



HAL
open science

Brève Histoire Introductoire des Géométries Non-Euclidiennes pour des Non-Mathématiciens

Emanuel González Álvarez

► **To cite this version:**

Emanuel González Álvarez. Brève Histoire Introductoire des Géométries Non-Euclidiennes pour des Non-Mathématiciens. 2021. halshs-03240157v1

HAL Id: halshs-03240157

<https://shs.hal.science/halshs-03240157v1>

Preprint submitted on 31 May 2021 (v1), last revised 1 Jun 2021 (v2)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Public Domain

Brève Histoire Introductive des Géométries Non-Euclidiennes pour des Non-Mathématiciens

Emanuel González Álvarez
Université National Autonome du Mexique (UNAM)

« *J'ai découvert des choses tellement merveilleuses que j'ai été étonné ...
de rien, j'ai créé un nouvel univers étrange* »
János Bolyai

Le but de ce texte-ci est d'exposer l'histoire des géométries non-euclidiennes de la façon la plus simple possible. On commence par montrer l'institution de la géométrie euclidienne et le problème du 5^e postulat. Puis, les principaux essais et stratégies de solution sont présentés. Ensuite, on raconte les événements et décrit les recherches qui ont formulé les premières géométries non-euclidiennes « officielles ». Postérieurement, on mentionne les contributions les plus importantes qui ont aidé à établir ces nouvelles géométries et à les prendre au sérieux. Finalement, on conclue par un résumé et quelques réflexions sur ce sujet.

Antécédents (350 av. J.-C. – 1800)

La géométrie telle que l'on l'apprend à l'école est basée primordialement sur *Les Éléments* d'Euclide (ca. III^e siècle av. J.-C.). Dans cette œuvre, Euclide a systématisé la connaissance géométrique existante à son époque, en ajoutant aussi quelques contributions propres.¹ Pour atteindre son but, il a développé une méthode que l'on pourrait appeler « axiomatique-déductive » car on commence par formuler des énoncés clairs ou évidents, et à partir d'eux on déploie leurs conséquences et implications. Ainsi, la géométrie serait en quelque sorte une longue chaîne d'énoncés inférés à partir d'autres.

Or, les propositions les plus basiques ou fondamentales sont les *postulats*. En théorie, ils sont évidents eux-mêmes et soutiennent le reste du bâtiment géométrique. Euclide en a proposé 5 :²

¹ En général les grecs ont axiomatisé la géométrie « empirique » qu'ils avaient appris en Egypte et Babylone [Dahan-Dalmedico et Peiffer 1986].

² Euclide en a donné d'autres plus « généraux », c'est-à-dire, qui ne s'appliquent pas seulement dans la géométrie. Par exemple : Les quantités qui sont égales à une même quantité sont égales entre elles (Si $A=C$ et $B=C$, donc $A=B$) [Wolfe 1945].

1. « Par tous points A et B distincts l'un de l'autre, il passe une droite » [Guin 2015, p. 4] (d'après Euclide : « Les extrémités d'une ligne sont des points. La ligne droite est celle qui est toute également interposée entre ses points », p. 1).
2. Une ligne droite peut se prolonger indéfiniment (d'après Euclide : « La ligne est une longueur sans largeur », p. 1).
3. « Pour tous points O et A , il existe un cercle de centre O et de rayon OA » [Guin 2015, p. 4] (d'après Euclide : « Le cercle est une figure plane comprise dans une seule ligne qu'on appelle circonférence ; toutes les droites menées à la circonférence d'un seul point de ceux qui sont placés dans les figures, sont égales entr'elles. Ce point se nomme le centre du cercle », p. 2-3).
4. « Tous les angles droits sont égaux », d'après Euclide (p. 6).
5. « Si une droite tombante sur deux droites fait les angles intérieurs du même côté plus petits que deux droits, les deux droites prolongées à l'infini se rencontreront du côté où les angles sont plus petits que deux droits », d'après Euclide (p. 6).

Ironiquement, il est évident que le cinquième postulat ne semble pas très évident. Il ne possède ni la même simplicité ni la même clarté que les autres 4. C'est pourquoi plusieurs savants grecs ont commencé à chercher des alternatives. Quelques-uns se sont demandés s'il était vraiment un postulat ou plutôt une conséquence du reste, et d'autres croyaient qu'il était possible de le simplifier.

Un exemple du premier groupe de réponses est Proclus (ca. 412-485). Supposons 2 lignes parallèles a et b et une autre ligne c qui coupe a dans un point P . Si a et b sont vraiment des parallèles, donc c doit couper b si l'on la prolonge suffisamment :

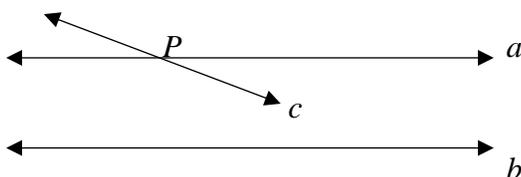


Fig. 1. Formulation (approximée) de Proclus

Malheureusement, cette solution n'a pas été bien justifiée parce que « une succession strictement croissante de termes positifs peut être accotée supérieurement » [Sánchez 2020, ma traduction].

L'autre solution possible était de reformuler le postulat. Bien qu'il y en ait diverses propositions, probablement les deux redéfinitions les plus fameuses sont :

- 5'. « Pour toute droite D et tout point P extérieur à D , il passe par P une droite parallèle à D et une seule » [Guin 2015, p. 4].
- 5''. La somme des angles intérieurs d'un triangle est égale à 180° .

On s'occupera de ces deux alternatives plus tard. Maintenant il est seulement important souligner que, quoique beaucoup de savants grecs aient essayé de résoudre le dilemme du 5^e postulat, personne n'a pu le faire avec succès.

Ainsi, les géomètres arabes du Moyen Âge ont hérité le problème du 5^e postulat, mais ils n'ont pas pu le résoudre non plus. Néanmoins, leurs développements ont influencé les générations suivantes pour continuer la discussion. Par exemple, Al-Khayyam (ca. 1048-1131) a postulé que, pour les angles supérieures a et b d'un quadrilatère, il y avait 3 possibilités : a) ils sont aigus, b) ils sont obtuses, ou c) ils sont droits. Or, s'ils sont aigus ou obtuses, donc les côtés du quadrilatère ne seraient pas équidistants (montré par les segments ch et ef ci-dessous), ce qui contredit l'énoncé : « deux lignes qui sont perpendiculaires à une autre sont toujours équidistantes entre elles ». Par conséquent, on doit accepter que les angles a et b sont droits (montré par le segment dg).

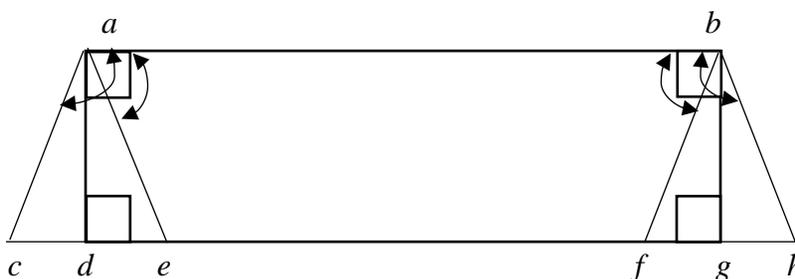


Fig. 2. Formulation (approximée) d'Al-Khayyam

Cette méthode est appelée *reductio ad absurdum* et consiste en démontrer que la négation d'une hypothèse nous conduit à une contradiction, ce qui nous oblige à accepter l'hypothèse si l'on veut que notre système soit cohérent. Malgré les propositions des arabes (et des générations suivantes), le problème restait insoluble: « Personne n'a obtenu de véritable solution, bien que de nombreux pensaient qu'ils avaient. Habituellement, le raisonnement était gâché par l'utilisation d'un énoncé non démontré ou d'un processus injustifié équivalent au 5^e postulat » [Gans 1973, p. 22, ma traduction].

Comme on a dit ci-dessus, les arabes ont fortement influencé les travaux suivants à propos du 5^e postulat. Probablement le savant le plus représentatif de ce fait a été Gerolamo Saccheri (1667-1733), qui a repris la stratégie d'Al-Khayyam de démontrer le 5^e postulat par *reductio ad absurdum* en examinant les possibles mesures des angles d'un quadrilatère.

Saccheri a examiné les 3 hypothèses formulées par Al-Khayyam : a) les angles supérieures d'un quadrilatère sont aigus, b) les angles supérieures d'un quadrilatère sont obtuses, ou c) les angles supérieures d'un quadrilatère sont droits. Ainsi, sa tâche était de démontrer que les hypothèses a) et b) nous conduisent à une contradiction et donc on doit accepter l'hypothèse c).

L'hypothèse b) a été rejetée presque immédiatement car elle implique que, si l'on prolonge les côtés du quadrilatère, ils se rencontreront dans un point et par définition les lignes parallèles ne se touchent jamais. Toutefois, l'hypothèse a) n'impliquait aucune

contradiction. Le savant italien en a développé plusieurs conséquences,³ mais le système restait cohérent. A la fin, Saccheri a conclu que l'hypothèse a) était fautive parce qu'elle est « dégoûtante à la nature de la ligne droite » [Saccheri cité dans Sánchez 2020, p. 3, ma traduction], ce qui n'est pas une raison logique *stricto sensu*.

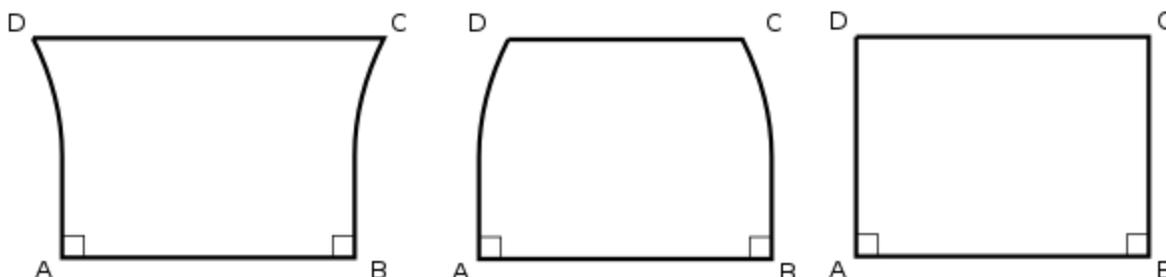


Fig. 3. Formulation de Saccheri : hypothèses a), b) et c) respectivement

Quoique Saccheri n'ait pas réussi à démontrer le 5^e postulat, on le considère un type de Colomb qui a essayé de « trouver une nouvelle route vers un monde connu, mais à la fin il a découvert un monde nouveau » [Wolfe 1945, p. 33, ma traduction].

Après l'analyse de Saccheri, divers savants ont commencé à douter de la possibilité d'une solution authentique au problème du 5^e postulat, et ces doutes ont augmenté de plus en plus (malgré la formulation d'autres alternatives).

Par exemple, Johann H. Lambert (1728-1777) a repris la moitié d'un quadrilatère de Saccheri, lequel possède trois angles droits. Pour le quatrième angle, il a considéré les hypothèses a), b) et c) afin de démontrer que a) et b) portent des contradictions. S'il démontrait que les premières deux hypothèses sont inconsistantes, donc il pourrait conclure que c) est vrai et par conséquent que le 5^e postulat est vrai. Cependant, il a pu démontrer que l'hypothèse b) conduit à une contradiction (pour les mêmes raisons que Saccheri), mais l'hypothèse des angles aigus a resté ferme encore une fois.⁴

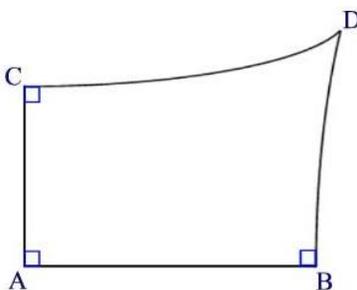


Fig. 4. Formulation de Lambert

³ En fait, quelques-unes de ces implications sont valides dans la géométrie de Lobachevski.

⁴ C'est pourquoi il a décidé de ne pas publier son travail pendant sa vie.

Malgré son échec, Lambert a fait des contributions importantes. Par exemple, il a montré que l'hypothèse des angles obtus est proche à la géométrie sphérique, que cette géométrie-ci est indépendante du 5^e postulat et que, d'après les implications des 3 hypothèses dans la somme des angles internes d'un triangle ($<180^\circ$, $>180^\circ$ et $=180^\circ$ respectivement), le *déficit* ou l'*excès* est proportionnel à l'aire du triangle en question.⁵

Bien que Lambert n'ait pas pu démontrer le 5^e postulat, les savants commençaient à s'approcher au problème avec un esprit plus ouvert. D'ailleurs, le problème s'est popularisé grâce aux publications d'Adrien-Marie Legendre (1752-1833). Legendre n'a pas contribué en réalité au problème d'une manière originale parce que ses démonstrations du 5^e postulat provenaient d'autres savants anciens (par exemple, Saccheri). Pourtant, elles ont été si simples et élégantes et qu'elles ont été diffusées extensivement et ont re-attiré l'attention sur le problème du 5^e postulat.⁶

La naissance des géométries non-euclidiennes (1800-1850)

Pendant le XVIII^e siècle, la géométrie euclidienne possédait un prestige respectable à l'aide de I. Kant (1724-1804). D'après lui, l'espace n'est pas une notion produite par la réalité externe, mais une condition *a priori* qui moule nos perceptions. De ce fait, la géométrie est un savoir absolu et donc la seule géométrie possible était celle d'Euclide. Étant donné la réputation de Kant, cette idée n'a pas été questionnée, voire très défendue. Toutefois, le problème du 5^e postulat restait ouvert.

Ainsi, les essais pour solutionner cette difficulté ont continué, parfois par des voies cachées. L'exemple le plus clair est le légendaire Carl Friedrich Gauss (1777-1855). Grâce à la richesse de sa trajectoire, et particulièrement, à ses travaux géodésiques, Gauss défendait une géométrie basée sur l'expérience. Si l'on prend en compte que la géométrie d'Euclide contient des figures idéales, donc on note que Gauss considérait (depuis sa jeunesse) qu'il existait la possibilité d'une autre géométrie plus liée à la nature.

Cependant, Gauss n'en a rien publié. Une antithèse de la géométrie euclidienne (considérée absolue) pouvait créer des malentendus, alors il n'a que partagé certaines idées avec quelques personnes. Néanmoins, après sa mort, on a trouvé dans ses cahiers et ses lettres qu'il avait développé plusieurs implications d'une géométrie alternative à celle d'Euclide. En outre, comme l'on verra ci-dessous, il a été en quelque sorte « le centre » des développements des premières essais d'une géométrie non-euclidienne.

⁵ Supposons que la somme des angles internes d'un triangle ($A+B+C$) est $>180^\circ$ (π exprimée en radians). Donc, le résultat de l'opération $(A+B+C-\pi)r^2$ (où r est le rayon de la sphère sur laquelle le triangle est dessiné) est l'aire du triangle. On peut faire une opération similaire pour l'hypothèse a), mais comme la somme est $<180^\circ$ (et le triangle serait tracé sur une sphère imaginaire), on aurait $(\pi-A-B-C)r^2$.

⁶ Les démonstrations de Legendre essaient surtout de démontrer que la somme des angles internes d'un triangle ne peut ni être $<180^\circ$ ni $>180^\circ$, mais toujours $=180^\circ$ (rappelons la reformulation 5'' mentionnée au début du texte) [cf. Wolfe 1945].

Il y a eu divers savants intéressés au problème du 5^e postulat en contact avec Gauss. Ferdinand K. Schweikart (1780-1857) et son neveu, Franz A. Taurinus (1794-1874) ont été 2 parmi eux. Le premier a développé une « géométrie astrale », laquelle, selon lui, était adéquate pour faire des calculs astronomiques. En 1818, il a envoyé sa formulation à Gauss, qui a été d'accord avec elle. Dans la géométrie astrale, la somme des angles internes d'un triangle est $<180^\circ$ et elle augmente si l'aire du triangle augmente aussi. Néanmoins, Schweikart n'a pas publié toutes ses recherches.

Pour sa part, Taurinus (influencé par Schweikart et Gauss) a déployé une géométrie basée sur des formules trigonométriques pendant les années 1820. Outre la différence « trigonométrique » avec son oncle, il croyait aussi que le 5^e postulat d'Euclide était absolument vrai⁷ et donc cette nouvelle géométrie était logiquement possible, mais non applicable à la réalité. Parmi ses découvertes les plus significatives, on note la confirmation de la correspondance entre l'hypothèse des angles obtus et la géométrie sphérique (postulée par Lambert) et la continuité entre cette dernière, la géométrie euclidienne et celle formulée par lui.⁸

Les deux savants considérés « les fondateurs officiels » des géométries non-euclidiennes (outre Gauss) sont János Bolyai (1802-1860) et Nikolái I. Lobachevski (1792-1856). Tous les deux ont travaillé de façon indépendante et ont été en contact avec Gauss. Bolyai, officier et ingénieur de l'armée autrichienne, était le fils d'un bon ami de Gauss depuis leur jeunesse, Wolfgang Bolyai (1775-1856).⁹

Au début, Wolfgang a insisté à János d'abandonner le problème du 5^e postulat dans une lettre du 4 avril 1820:

« You must not attempt this approach to parallels. I know this way to the very end. I have traversed this bottomless night, which extinguished all light and joy of my life. I entreat you, leave the science of parallels alone . . . I thought I would sacrifice myself for the sake of the truth. I was ready to become a martyr who would remove the flaw from geometry and return it purified to mankind. I accomplished monstrous, enormous labours; my creations are far better than those of others and yet I have not achieved complete satisfaction . . . I turned back when I saw that no man can reach the bottom of this night. I turned back unconsolated, pitying myself and all mankind. Learn from my example: I wanted to know about parallels, I remain ignorant, this has taken all the flowers of my life and all my time from me » [cité dans Gray, 2011, p. 102-103].

Pourtant, János a continué ses recherches. Le 3 novembre 1823, il a écrit à son père :

« I am determined to publish a work on parallels as soon as I can put it in order, complete it, and the opportunity arises. I have not yet made the discovery but the path that I am following is almost certain to lead to my goal, provided this goal is possible. I do not yet have it but I have found things so magnificent that I was astounded. It would be an eternal pity if these

⁷ Gauss n'a pas été d'accord avec cette idée. Pourtant, Taurinus s'est ouvert à la possibilité contraire quelques ans plus tard.

⁸ On reviendra sur cette idée plus tard avec Riemann.

⁹ Wolfgang (mieux connu comme Farkas) a fait aussi des recherches sur le 5^e postulat.

things were lost as you, my dear father, are bound to admit when you see them. All I can say now is that I have created a new and different world out of nothing. All that I have sent you thus far is like a house of cards compared with a tower. I am as convinced now that it will bring me no less honour, as if I had already discovered it » [cité dans Gray, 2011, p. 103].

De cette façon, père et fils ont continué à discuter leurs idées. Quoiqu'ils n'aient pas été d'accord sur tout, Wolfgang a accepté de publier le travail de 24 pages de János comme l'appendice d'un traité connu comme *Le Tentamen* en 1832. Le 6 mars de cette année-là, Gauss a écrit à Wolfgang (après avoir lu le texte de János) :

« If I commenced by saying that I am unable to praise this work, you would certainly be surprised for a moment. But I cannot say otherwise. To praise it, would be to praise myself. Indeed the whole contents of the work, the path taken by your son, the results to which he is led, coincide almost entirely with my meditations, which have occupied my mind partly for the last 30 or 35 years. So I remained quite stupefied. So far as my own work is concerned, of which up till now I have put little on paper, my intention was not to let it be published during my lifetime. Indeed the majority of people have not clear ideas upon the questions of which we are speaking, and I have found very few people who could regard with any special interest what I communicated to them on this subject. To be able to take such an interest it is first of all necessary to have devoted careful thought to the real nature of what is wanted and upon this matter almost all are most uncertain. On the other hand it was my idea to write down all this later so that at least it should not perish with me. It is therefore a pleasant surprise for me that I am spared this trouble, and I am very glad that it is just the son of my old friend, who takes the precedence of me in such a remarkable manner » [cité dans Gray, 2011, p. 131].

Cette réponse a fâché János tellement qu'il n'a plus publié aucun texte de géométrie.

De manière générale, Bolyai a montré que la géométrie ordinaire ne dépend pas du 5^e postulat si l'on utilise une définition différente de « lignes parallèles ». D'après lui, deux lignes ab et cd sont parallèles si elles ne se coupent pas, mais toutes les lignes qui passent par l'angle θ (formé entre cd et une ligne e perpendiculaire à ab) coupent ab :¹⁰

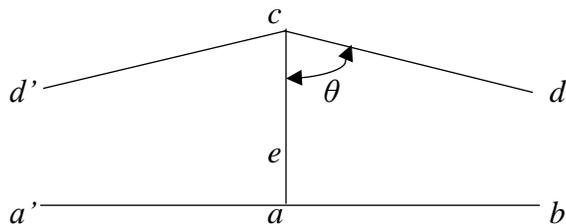


Fig. 5. Lignes parallèles d'après Bolyai

Supposons maintenant que l'on trace une autre ligne parallèle à ab en-dessous d'elle-même (fg). La ligne qui unit c , a et f forme une courbe, laquelle tracera une section sphérique similaire à un bol si l'on la fait tourner autour de « l'axe » ab :

¹⁰ Si le 5e postulat est vrai, $\theta=90^\circ$, mais s'il n'est pas vrai, θ peut mesurer $<90^\circ$.

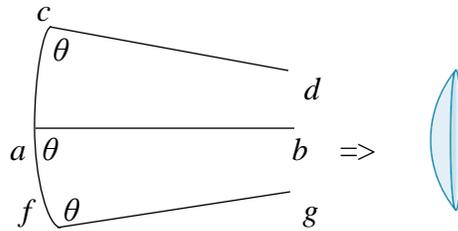


Fig.6. Surface de Bolyai (F)

Or, si l'on trace des lignes sur F, elles ne seront pas des droites, mais des courbes. En outre, rappelons que cette surface est possible seulement si $\theta < 90^\circ$, c'est-à-dire, si le 5^e postulat est faux. Curieusement, Bolyai a trouvé qu'il est possible de tracer deux courbes sur F qui intersectent à une troisième courbe en formant des angles internes $< 90^\circ$, et qui, au même temps, s'intersectent entre elles. En d'autres termes, le 5^e postulat est possible (mais non indispensable) sur F ! Par conséquent, il est possible de « traduire » les figures euclidiennes à une surface où le 5^e postulat (en tant que postulat) est faux.

Bolyai a tiré plusieurs conséquences de cette nouvelle géométrie (en utilisant des formules trigonométriques), ce qui lui a permis de résoudre divers problèmes et de montrer quels résultats ne dépendent pas du 5^e postulat. Bolyai a nommé « géométrie absolue » à l'ensemble de ces derniers-ci.

Pour sa part, Lobachevski, professeur et directeur de l'Université de Kazan, a développé quelques idées similaires à celles de Bolyai. Étant donné qu'il considérait la géométrie euclidienne trop abstraite et éloignée de la nature, il a pensé que l'on ne doit pas la prendre très au sérieux. Dès 1815, il avait commencé à essayer de démontrer le 5^e postulat, mais il n'y a pas réussi. Donc, pendant les années 1820 il a décidé de suivre un chemin similaire à Saccheri et Lambert en niant le postulat. D'après la redéfinition 5' mentionnée au début de cet écrit, il y a 2 possibilités pour nier le 5^e postulat :

-5'a) Pour toute droite D et tout point P extérieur à D , il ne passe aucune droite par P parallèle à D .

-5'b) Pour toute droite D et tout point P extérieur à D , il passe par P au moins 2 droites parallèles à D .

Lobachevski a adopté la deuxième option. En la déployant, il a formulé une géométrie « imaginaire » (car il n'était pas sûr qu'elle était applicable à la nature), mais cohérente.¹¹ Ses premiers résultats ont été publiés en 1829 sans grand succès. Néanmoins, il était convaincu de l'importance de ses découvertes grâce à sa considération du mouvement des corps et à l'utilisation du calcul et de la trigonométrie, et donc il a continué à publier ses recherches. Toutefois, Lobachevski n'a jamais eu une grande reconnaissance pendant sa vie. Les critiques de mathématiciens importants (comme M. Ostrogradski), son appartenance à une université sans beaucoup de relevance académique et le fait d'écrire principalement en

¹¹ Plus tard, il l'appellera *pangéométrie*.

russe ont été des obstacles significatifs à son succès. Cependant, Gauss a décidé d'apprendre le russe environ 1840 et c'est pourquoi il a lu les travaux de Lobachevski. Quoique Gauss n'y ait pas trouvé aucune nouveauté, l'exposition de Lobachevski l'a étonné :

« I have found nothing actually new for myself in Lobachevski's work. But in developing the subject the author followed a road different from the one I took; Lobachevski carried out the task in a masterly fashion and in a truly geometric spirit. I see it as my duty to call your attention to this work that is bound to give you truly exceptional pleasure » [Lettre à Schumacher, 1846, cité dans Gray, 2011, p. 133].

Ainsi, Gauss a donné à Lobachevski la position de « membre correspondant de l'Académie des Sciences de Göttingen » en 1842.

Or, le mathématicien russe a écrit d'une façon plus claire que Bolyai dans quelques points et a procuré d'adopter des « étiquettes » pour chaque élément de son exposition. Par exemple, il a nommé « angle de parallélisme » à l'angle θ de la figure 5. Cet angle dépend de la longueur de la ligne ac : plus elle est longue, plus petit sera l'angle ; et inversement, plus elle est courte, plus grand sera l'angle. De cette façon, θ tend vers 90° lorsque ac s'approche à $a'b$, donc, la géométrie euclidienne est vraie pour des espaces infiniment petits.

L'établissement des géométries non-euclidiennes (1850-)

Les développements de Gauss, Bolyai et Lobachevski n'ont pas été immédiatement acceptés. En fait, les derniers deux sont décédés sans avoir obtenu aucune reconnaissance. De cette façon, d'autres savants ont repris et développé les idées formulées par ces 3 mathématiciens. Parmi eux, les plus fameux sont G. F. Bernhard Riemann (1826-1866), Felix Klein (1849-1925) et Eugène Beltrami (1835-1900).

Klein et Beltrami ont démontré que la géométrie non-euclidienne est vraiment cohérente. Bien que ni Lobachevski ni Bolyai aient trouvé des contradictions dans leurs systèmes, cette possibilité restait ouverte. En générale, Klein et Beltrami ont postulé une connexion par laquelle on peut « traduire » la géométrie euclidienne à celle non-euclidienne. Par conséquent, si la géométrie non-euclidienne était incohérente ou contradictoire, donc la géométrie euclidienne le serait aussi.

Beltrami a utilisé la pseudosphère pour modeler la géométrie de Lobachevsky. Une pseudosphère est une figure de courbure négative qui résulte de tourner une tractrix autour de son asymptote. Cette contribution a permis à la « géométrie imaginaire » de devenir plus tangible et ainsi les savants l'ont prise plus au sérieux.

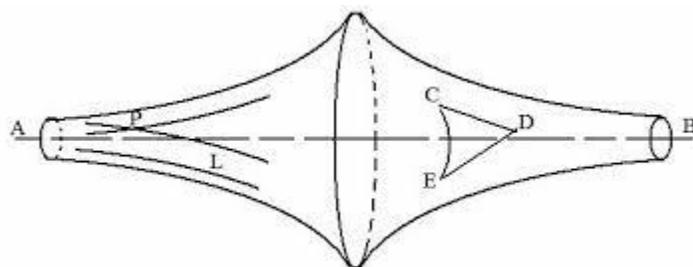


Fig. 7. Modèle de Beltrami (pseudosphère)¹²

Pour sa part, Klein¹³ a utilisé un cercle. Supposons que les points de la circonférence représentent l'infini et que, dans le cercle, les cordes équivalent aux droites dans le plan euclidien. Par conséquent, l'énoncé $\neg 5b$) est vrai, c'est-à-dire, pour toute droite D et tout point P extérieur à D , il passe par P au moins 2 droites parallèles à D .¹⁴

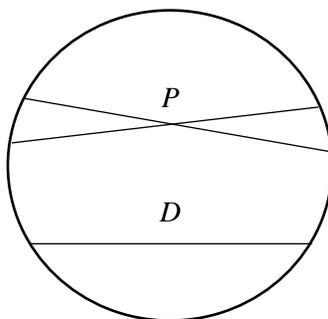


Fig. 8. Modèle de Klein

Par ailleurs, Riemann a été un élève de Gauss qui a aussi supporté la formulation d'une géométrie empirique. En 1854, il a dicté une conférence à l'université de Göttingen où d'une part il a exposé une géométrie basée sur l'hypothèse des angles obtus de Saccheri et Lambert, et d'autre part il a posé des questions sur les rapports entre la géométrie et la réalité.

Si l'on prend l'hypothèse des angles obtus, on peut noter qu'elle est vraie dans un espace sphérique. Autrement dit, sur la surface d'une sphère il est vrai que la somme des angles internes d'un triangle est $>180^\circ$ et que les lignes parallèles n'y existent pas,¹⁵ ce qui contredit les reformulations 5' et 5'' mentionnées au début du texte. On note alors dans la figure 9 que les angles du triangle ABC sont obtus et qu'il n'est pas possible de tracer une ligne parallèle à la circonférence qui passe par C et B (supposons par exemple que le point extérieur par lequel devrait passer la parallèle est A).

¹² On note que la somme des angles intérieurs du triangle CDE est $<180^\circ$ et que par le point P passent au moins 2 lignes parallèles à L .

¹³ Klein a proposé aussi des noms pour chaque géométrie existante. On les verra à la fin du texte.

¹⁴ J. Henri Poincaré (1854-1912) a formulé deux autres modèles : un disque et un demi-plan. On ne va pas les montrer ici à cause de l'espace, mais Guin [2015] illustre tous les deux de façon simple et accessible.

¹⁵ Pour rendre cette idée plus évidente, il faut définir la notion de « géodésique ». Une géodésique est la distance la plus courte entre 2 points donnés dans n'importe quel plan. Dans le cas de la sphère, cette distance est représentée par l'arc d'un cercle dont le centre est le centre de la sphère.

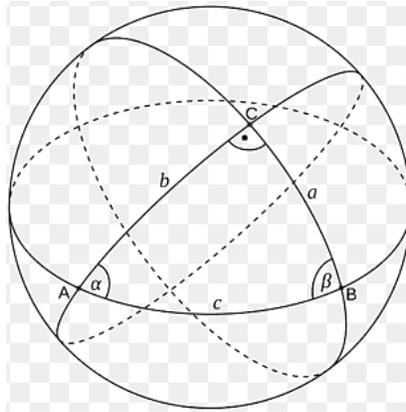


Fig. 9. Géométrie sphérique

En outre, Riemann a réfléchi sur les « fondements » de la géométrie, ce qui lui a permis d'ouvrir la possibilité de l'existence de plusieurs systèmes géométriques. Par exemple, il a défini la notion d'espace comme « la considération d'une collection continue de phénomènes homogènes » [Sánchez 2020, p. 34, ma traduction]. Les coordonnées de l'espace sont alors les quantités du phénomène considéré et donc les dimensions de l'espace peuvent être n . Or, il faut développer une façon de mesurer les longueurs y involucrées. D'après Riemann, la façon la plus simple est la détermination de distances utilisée par Euclide, laquelle est correcte dans des espaces infiniment petits. « En bref, un espace riemannien est donc un espace euclidien 'dans l'infiniment petit' » [Sánchez 2020, p. 34, ma traduction]. Ainsi, la géométrie euclidienne et celle de Bolyai et Lobachevski seraient deux géométries *possibles*, mais non les seules qui existent.

Conclusion

Résumons les idées principales exposées jusqu'ici. Euclide a systématisé la connaissance géométrique de son époque d'une façon extraordinaire dans laquelle on commence par des définitions et des énoncés évidents et puis on en développe des conséquences. Toutefois, le 5^e postulat n'est ni simple ni très clair si l'on le compare avec les autres 4. Les géomètres alors se sont demandés s'il était vraiment un postulat ou plutôt une conséquence du reste.

On a essayé de le simplifier, le reformuler et le dériver des autres postulats, mais sans succès. Donc, on a tenté de le démontrer par *reductio ad absurdum*, mais on n'a pas trouvé aucune contradiction. A sa place, on a découvert une géométrie alternative et cohérente.

De ce fait, on s'est rendu compte que la géométrie euclidienne n'était pas absolue, mais une option parmi d'autres. Ces nouvelles géométries sont incompatibles *stricto sensu* entre elles, mais chacune est cohérente elle-même. Ainsi, Klein les a nommées : géométrie parabolique (euclidienne), géométrie hyperbolique (Gauss-Bolyai-Lobachevski) et géométrie elliptique (Riemann). On peut les résumer ainsi :

Géométrie	Nom	Surface	Quadrilatère de Saccheri	Nombres de parallèles par un point à une droite	Sommes des angles intérieurs d'un triangle
Euclide	Géométrie parabolique	Plan	Hypothèse des angles droits	1	180°
Gauss-Bolyai-Lobachevski	Géométrie hyperbolique	Hyperboloïde, Pseudosphère, Disque ou demi-plan de Poincaré	Hypothèse des angles aigus	Infini	$<180^\circ$
Riemann	Géométrie elliptique	Sphère	Hypothèse des angles obtus	0	$>180^\circ$

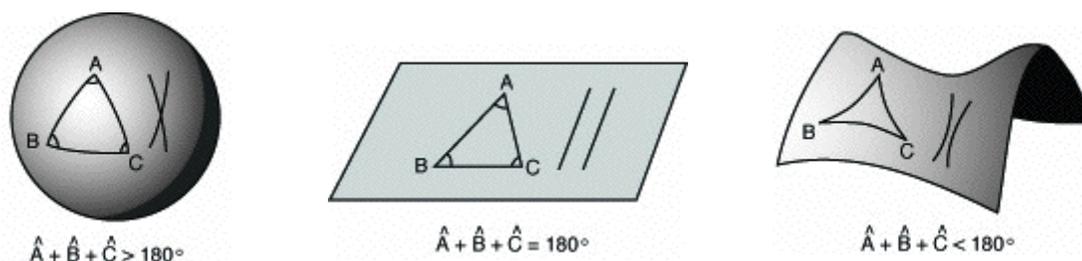


Fig. 10. Diverses géométries et leurs caractéristiques (basée sur Dahan-Dalmédico et Peiffer, 1986, p. 156)

On va finir ce texte-ci en donnant deux réflexions courtes à propos de la perspective absolutiste et les influences extérieures dans les sciences.

Premièrement, la naissance des géométries non-euclidiennes a questionné sérieusement la confiance (la foi ?) des géomètres dans la véracité d'Euclide. A la fin, on a appris que la géométrie euclidienne n'est pas absolue comme Kant pensait, mais qu'il y a d'autres options cohérentes et utiles pour certains problèmes. Comme Poincaré [1902/1917] a mentionné : « Une géométrie ne peut pas être plus vraie qu'une autre; elle peut seulement être plus commode » (p. 67).

Or, il est vrai que cette réflexion est *a posteriori* et donc on ne peut pas reprocher aux savants anciens de leur confiance excessive dans Euclide ou de leur résistance contre les formulations de Bolyai et Lobachevski. Cependant, le cas en question invite à réfléchir sur les systèmes scientifiques dans lesquels on confie maintenant. Sont-ils vraiment absolus ? Les possibilités qui sont incompatibles avec la nôtre, sont-elles indubitablement impensables ? Si l'ouverture à un certain type de pluralisme a donné de bons résultats dans

la géométrie (une des disciplines historiquement plus « certes » ou solides)¹⁶, parfois la même stratégie peut être effective dans d'autres sciences.¹⁷

Deuxièmement, l'histoire des géométries non-euclidiennes montre que la distinction proposée par Reichenbach entre le contexte de découverte et le contexte de justification est inadéquate. Il est possible d'observer comment les influences des contextes sociaux et historiques ont moulé les actions des savants examinés : Gauss n'a pas voulu publier ses recherches à cause de la peur d'être malentendu, Lobachevski a été en quelque sorte ignoré parce qu'il n'appartenait pas à une université de prestige, etc. Alors, même les mathématiques ne sont pas une discipline 100% neutre, mais elles sont influencées par plusieurs facteurs « extra scientifiques ». De cette façon, il ne faut pas supposer que l'histoire des sciences se déploie d'un mode linéaire et progressif.

En conclusion, l'histoire des géométries non-euclidiennes nous apprend que, lorsque l'on croit avoir toutes les réponses à propos d'un sujet, les questions peuvent changer subitement.

Bibliographie

Dahan-Dalmédico, A. et Peiffer, J (1986). *Une histoire des mathématiques. Routes et dédales*. Éditions du Seuil.

Euclide (1804). *Les éléments de géométrie d'Euclide, traduits littéralement et suivis d'un Traité du cercle, du cylindre, du cône et de la sphère, de la mesure des surfaces et des solides, avec des notes, par F. Peyrard*.

Gans, D. (1973). *An introduction to non-Euclidian geometry*. Academic press.

Goertzen, J. R. (2008). On the possibility of unification: The reality and nature of the crisis in psychology. *Theory & Psychology*, 18(6), 829–852.

<https://doi.org/10.1177/0959354308097260>

Gómez Cisternas, D. R. (2015). Geometría no euclidiana. Memoria para optar al título de profesor de enseñanza media en educación matemática. *Universidad del Bío-Bío*.

<https://bit.ly/2QgZp0M>

Gray, J. [marshare] (2013, 21 août). Non-Euclidean Geometry [Topics in the History of Mathematics] [Vidéo]. <https://www.youtube.com/watch?v=an0dXEImGHM>

Gray, J. (2011). *Worlds out of nothing. A course in the history of geometry in the 19th century*. Springer.

¹⁶ T. Hobbes (1588-1679) disait que « la géométrie d'Euclide est la seule science que Dieu a donné à l'homme ».

¹⁷ Par exemple, plusieurs psychologues et sociologues désirent un système unifié dans leur respective science [Goertzen 2008 ; Noguera 2010].

Guin, D. (2015). Géométries non euclidiennes : petite introduction mathématique à l'usage des non-mathématiciens. *Publication de l'IREM de Montpellier - production du groupe Mathématiques et Philosophie*. <hal-01442936>

Montesinos Amilibia, J. M. (2014a). La geometría no euclidiana. *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales*, 107(1-2), 1-8. <https://bit.ly/3twGsWk>

Montesinos Amilibia, J. M. [Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales] (2014b, 13 février). Las geometrías no euclidianas [Vidéo]. <https://www.youtube.com/watch?v=qnhviNKSkZ4>

Noguera, J. A. (2010). El mito de la sociología como «ciencia multiparadigmática». *ISEGORÍA. Revista de Filosofía Moral y Política*, (42), 31-53. <https://doi.org/10.3989/isegoria.2010.i42.682>

Poincaré, H. J. (1902/1917). *La science et l'hypothèse*. Ernest Flammarion.

Sánchez Muñoz, J. M (2020). Una Introducción a la Geometría Riemanniana: An Introduction to Riemannian Geometry, *RDMEI*, 20(2), 1-42. <https://bit.ly/3lqh7dC>

Senior Martínez, J. E. (2001). El surgimiento de las teorías no euclidianas y su influencia en la filosofía de la ciencia del siglo XX. *Revista Colombiana de Filosofía de la Ciencia*, 2(5), 45-63. <https://bit.ly/3eUbf1p>

Wolfe, H. E. (1945). *Introduction to non-Euclidean geometry*. The Dryden Press.