Quelques enjeux épistémologiques rencontrés lors de l'étude de l'enseignement des mathématiques

François Conne

▶ **To cite this version:**

François Conne. Quelques enjeux épistémologiques rencontrés lors de l'étude de l'enseignement des mathématiques. Actes du XXIe congrès Inter-IREM de la Copirelem, 1994, Chantilly, 1994, pp.3-35. halshs-03284674

HAL Id: halshs-03284674
https://shs.hal.science/halshs-03284674

Submitted on 12 Jul 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

QUELQUES ENJEUX EPISTEMOLOGIQUES
RENCONTRES LORS DE L'ETUDE DE L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES

FRANCOIS CONNE (CONFERENCE)

Introduction.

J'ai été invité à ce colloque pour vous parler de Savoir et Connaissance suite au texte, rédigé en 1989-1990, et publié par RDM en 1992, que j'ai consacré à ce thème (Conne F. 1992). Depuis lors, la question a connu un certain succès dans un cercle plus large que les didacticiens des mathématiques. Pourtant le point de vue que j'ai défendu n'est de loin pas partagé. De quoi s'agit-il ? Je cherche à comprendre et à caractériser le concept d'enseignement. On peut considérer qu'il établit l'interface entre deux objectivités, ou si vous préférez deux ordres de choses, que je nomme connaissance-individuelle (ou connaissance tout court) et savoir-institué.

Cette question renvoie à la dualité individu / culture et préoccupe plus d'un chercheur. A ce propos, considérez les deux titres d'ouvrages suivants : La société de l'esprit de M. Minsky (Minsky M. 1986), étude dans le domaine de l'IA, et Ainsi pensent les institutions de l'anthropologue M. Douglas (Douglas M. 1989), cet "échange de métaphores" se passe de tout commentaire. En didactique des mathématiques comme en épistémologie, tout ce que nous étudions s'inscrit dans un contexte culturel qui suppose l'engagement cognitif d'individus. D'un côté nous pouvons examiner les pratiques sociales de l'autre les activités individuelles par lesquelles se manifestent le savoir ou la connaissance et la distinction entre ces deux termes cherche tout simplement à marquer cette dualité.

L'abstraction épistémologique.

L'épistémologie montre qu'il est possible dans une certaine mesure de s'abstraire de ces références culturelles et individuelles car c'est au-delà qu'elle constitue ses objets. Ceci astreint l'épistémologie à ne pas prendre en compte la culture et la connaissance personnelles qu'apporte avec lui-même l'épistémologue. Si une telle objectivation est possible, c'est que ces références présentent une certaine régularité, voire une certaine invariance. Et les réussites de l'épistémologie sont par là même informantes des questions culturelles et cognitives. Ceci n'empêche pas pour autant que l'épistémologie ne se pratique pas n'importe où, n'importe quand, ni par n'importe qui. Pour cela il est des conditions culturelles et individuelles que l'on peut résumer ainsi: il faut que se soit constitué autour de sa pratique un groupe social auquel tout épistémologue aura été initié. Cette invariance n'est donc pas donnée mais construite, n'est pas spontanément générable mais reproductible par initiation; répétable et ouverte à des différenciations ultérieures, elle est donc au-delà de l'histoire le fruit d'un développement. Les conditions de l'épistémologie sont donc des seuils culturels et individuels de développement.

Ceci dit, c'est le mouvement qui inverse cette abstraction, c'est à dire ce que l'on pourrait appeler les retombées de l'épistémologie, plus que l'épistémologie pour elle-même qui m'importe. J'ai donc choisi aujourd'hui de vous rendre compte de mon intérêt pour une "lecture épistémologique" de l'expérience commune d'enseignement.

La démarche caractéristique de l'épistémologie génétique.

De ce point de vue la démarche de l'épistémologie génétique est passionnante. Il s'agit pour elle de se donner une base expérimentale, et c'est donc bien un travail

"à rebours d'abstraction" qu'elle effectue, en deçà de l'invariance signalée ci-dessus, non pas pour l'oublier mais au contraire pour mieux la connaître, la décrire et l'expliquer. Un examen plus attentif de la question montre que, du point de vue des pratiques sociales de références, l'expérimentation reste canonique, relativement formelle, et qu'elle varie peu. Cette facette de l'épistémologie génétique est relativement abstraite. Sa méthode d'interrogation des sujets, appelée méthode clinique, s'inspire des pratiques sociales de la psychologie et de la pédagogie. Bien entendu, au fil des ans et de la diversité des collaborateurs, de leurs astuces et intuitions la méthode a forcément connu quelques fluctuations, de plus les expérimentateurs successifs n'ont pas toujours demandé aux sujets de se manifester de la même façon : ils leur auront demandé de fournir tantôt des commentaires, tantôt des actions, voire même d'effecteur un apprentissage ou encore la résolution d'un problème, etc. L'étude de ceci est encore à faire. Mais comme du point de vue des pratiques sociales, cela reste malgré tout très étroitement cadré, je me permettrai d'en rester dans ce texte à ces considérations générales. Donc du côté de la référence culturelle, l'épistémologie génétique ne cède pas en généralité à l'épistémologie classique. Il n'en va pas de même évidemment du côté du cognitif individuel, puisque l'épisté-mologue généticien lorsqu'il expérimente n'aborde plus ses objets directement mais interpose entre lui et eux un sujet épistémique : ce qui était abstraction dans la démarche classique devient retrait dans une position d'observateur. Cette position lui permet de considérer son étude sous l'angle de l'interaction d'un individu avec son milieu et d'inscrire le développement cognitif sous la loi de l'adaptation. L'épistémologie génétique a pu montrer comment chaque individu répète pour lui le même parcours, et passe par les mêmes étapes dans un ordre qui a pu être établi expérimentalement. L'étude fine des processus cognitifs et l'objectivation de la connaissance que cela rend possible ont permis de proposer l'équilibration des structures cognitives comme principe même de ce développement. Ces données sont suffisamment générales pour fournir de nouveaux éclairages épistémologiques concernant certains progrès scientifiques. Retenons de cela, deux choses :

- Premièrement, du côté des individus mais par devers eux, quelque chose se maintient en se répétant pour et par chacun. Rappelons que cette pérennité ne s'entend que moyennant la double abstraction des formes particulières individuelles et sociales que cela peut prendre dans chaque cas. La pérennité de la connaissance n'est pas tout et elle ne suffit en particulier pas à garantir celle des savoirs-institués. C'est justement la fonction de l'enseignement que d'assurer, en deçà de ces phénomènes universels, la formation des connaissances et par là, la pérennité de ces formes. Or cette fonction ne peut être assurée directement. Il n'y a pas de génération spontanée de la connaissance hors contexte social, hors formes sur lesquelles elle puisse prendre et se cristalliser, comme il n'y a pas transmission immédiate de savoirs-institués sans apprentissage, c'est à dire sans qu'un individu accomplisse à leur propos un certain processus cognitif.

- Secondement il y a une analogie certaine de la situation expérimentale de l'épistémologue généticien avec celle de l'enseignement. De plus, une lecture épistémologique de l'activité du sujet, c'est-à-dire rien moins qu'une forme de reconnaissance de la part de l'observateur est nécessaire. Les propos des chercheurs comme celui qui va suivre, que nous devons à P. Gréco, sont de ce point de vue éloquents (Gréco 1988, p15-16, c'est moi qui souligne.) :

« La structure, si structure il y a, et si elle n'est pas préconstruite par les acquisitions scolaires («calculer le discriminant...») ou l'expérience antérieure, n'est donc pas un outil mental directement lisible dans les actions ou les discours des sujets, ni forcément sous-jacent aux procédures observables (tels les Indiens qui se garderaient bien de se marier sans

respecter l'algèbre du groupe cyclique ou du groupe de Klein, chez Levi-Strauss). Elle est notre façon d'exprimer rigoureusement - et pour le sujet celle de respecter et d'exploiter - les comptabilités des schèmes ou des séquences courtes d'action ; elle assure les antici-pations à court et à long terme, détecte les erreurs : si je multiplie 13 par 15 à la machine et que je lis 95 sur l'écran. il y a probablement une erreur d'écriture (ou de défaillance des piles...) parce que le produit de deux nombres supérieurs à 10 est forcément >100, ou parce que je me souviens que 12x12 font déjà 144. Insistons sur ce dernier exemple: savoir que 12x12 = 144 est un savoir acquis, une "réalisation" au sens de Reuchlin, qui va veiller la vigilance et guider le diagnostic. Mais il ne devient utile que moyennant le principe que [si a>b et a' >b', alors (a x a') est obligatoirement plus grand que (b x b')] est une connaissance qui relève d'une structure mathématique au moins implicite.»

Notons que cette reconnaissance est ici une référence épistémologique abstraite : la structure comme condition de la cognition humaine, bien que l'auteur ne se montre pas non plus avare de références mathématiques plus spécifiques, qui dans son propos remplissent quasiment une fonction de relais.

Les prolongements didactiques de cette démarche: le concept de situation.

La didactique des mathématiques a ceci en commun avec l'épistémologie génétique qu'elle retourne sur les aspects dont le traitement épistémologique a fait abstraction. Elle peut bénéficier comme nous l'avons esquissé des apports de cette dernière, mais elle n'évite pas la référence à de multiples pratiques sociales en évolution. Ces pratiques diversement codifiées et marquées par différentes institutions s'objectivent en savoirs-institués. Ce sont des objets culturels de référence et de reconnaissance pour les individus. Savoir un savoir-institué c'est avoir développé quelque connaissance à son sujet (qui réfère aux pratiques sociales associées à ce savoir). A proprement parler un individu ne connaît pas vraiment un savoir-institué. Il faudrait dire de lui, ainsi que le propose Chevallard, qu'il a développé à son propos une connaissance idoine, reconnue comme adéquate. Par contre, les processus sociaux de reconnaissance sont si déterminants et ont une telle force qu'eux suffisent à assurer la pérennité des savoirs-institués. Tout institutionnels qu'ils soient, les savoirs-institués n'en dépendent pas moins des individus qui en sont porteurs et qui s'y reconnaissent. La fonction de l'enseignement est alors de donner à la connaissance de certains individus des formes relevant des savoirs-institués de sorte que d'autres individus pourront les reconnaître.

La reconnaissance est bien sûr un phénomène interindividuel, inter-cognitif plus précisément et porte sur les formes que peut prendre la connaissance. Une autre façon de dire son caractère cognitif est de remarquer qu'elle implique la fonction cognitive de représentation. Elle est plus qu'une interaction cognitive interindividuelle puisqu'elle suppose en outre qu'une certaine correspondance cognitive soit établie. Ajoutons que la reconnaissance par quelqu'un est susceptible de se porter autant sur ses partenaires que sur la réalité (le milieu) avec lequel ils interagissent, et que le jeu sur l'un ou l'autre des pôles de l'interaction (selon que la reconnaissance porte sur l'individu ou sur la réalité avec laquelle il interagit) tour à tour identifie ou distingue les individus entre eux.

On voit bien que la distinction de deux ordres de choses est nécessaire. C'est ce dont j'entend rendre compte en distinguant connaissance et savoir, sans m'occuper d'aucune autre question linguistique à propos de ces vocables. Une distinction ne signifie pas pour autant une dissociation, il s'agit à mon sens de dualité et pas de dualisme. Il m'importe de bien comprendre comment ces deux domaines si solidaires s'articulent entre eux. S'il est évident à tous qu'un savoir-institué ne peut exister sans être reconnaissable par quelque individu en référence à un contexte culturel donné, donc que le savoir suppose un individu qui le

connaisse, il devrait être tout aussi clair que la connaissance n'est accessible qu'au travers de formes de reconnaissance et qu'elle est donc tributaire des savoirs-institués. En ce sens ma distinction marque des perspectives d'objectivation très différentes, des abstractions faites dans des perspectives distinctes mais qui se rapportent à des phénomènes du même type.

Nous avons vu comment l'épistémologie génétique réintroduisait le sujet, et comment elle le faisait au travers d'une exigence expérimentale. Nous avons vu aussi que la situation correspondant à cette expérimentation restait encore relativement abstraite. H. Wallon a critiqué cela dans son ouvrage: De l'acte à la pensée. (Wallon H. 1942). Ainsi débute le chapitre intitulé: La psychologie des situations (je cite):

(p. 50) «L'objet de la psychologie peut être, au lieu de l'individu, une situation. Il se confond avec l'effet qu'elle suscite, avec la solution cherchée ou trouvée des difficultés qu'elle présente. L'acte est considéré du dehors, sans aucun postulat de conscience ou de personne.» Plus loin (p. 51), il précise : « Une situation peut bien être idéale, c'est-à-dire uniquement fondée sur des représentations; elle peut ne comporter que des solutions d'ordre imaginatif ou intellectuel. Mais le matériel de symboles et d'idées qu'elle exige alors la fait relever d'activités mentales qui s'alimentent au langage, à la pensée collective.» Et il conclut ce chapitre (p. 91), en déclarant: «...l'origine des concepts ne saurait être cherchée dans les schèmes relatifs aux réactions immédiates que les circonstances font surgir de tout être vivant selon son niveau d'organisation. Ils ne sont pas le simple décalque intellectuel de ces schèmes. Ils appartiennent à un autre système dont l'évolution est liée d l'existence des sociétés humaines.»

La didactique des mathématiques quant à elle s'est constituée en prenant en compte des situations qui sont explicitement, spécifiquement et exclusivement référées aux mathématiques (savoir institué et ensemble de pratiques sociales bien déterminés). Il est très intéressant de voir que cela n'est pas opéré de la même manière dans la théorie des situations de G. Brousseau que dans la théorie des champs conceptuels de G.Vergnaud. (Le lecteur se référera à Conne F. 1993, pour ce qui en est de la première théorie et à Brun J. 1994, pour ce qui en est de la seconde). Pour la théorie des situations, on peut dire que la réflexion porte sur la situation comme outil d'expérimentation de la recherche en didactique, l'objet d'étude ce sont les situations fondamentales et les séquences de situations qu'elle permettent de construire. Je cite Brousseau qui, après avoir déclaré insuffisante l'option piagétienne, poursuit (Brousseau G. 1986, p. 49):

«La conception moderne de l'enseignement va donc demander au maître de provoquer chez l'élève les adaptations souhaitées par un choix judicieux des "problèmes" qu'il lui propose. Ces problèmes, choisis de façon à ce que l'élève puisse les accepter doivent le faire agir, parler, réfléchir, évoluer de son propre mouvement. Entre le moment ou l'élève accepte le problème comme sien et celui où il produit sa réponse, le maître se refuse à intervenir comme proposeur des connaissances qu'il veut voir apparaître. L'élève sait bien que le problème a été choisi pour lui faire acquérir une connaissance nouvelle mais il doit savoir aussi que cette connaissance est entièrement justifiée par la logique interne de la situation et qu'il peut la construire sans faire appel à des raisons didactiques. Non seulement il le peut, mais il le doit aussi car il n'aura véritablement acquis cette connaissance que lorsqu'il sera capable de la mettre en oeuvre de lui-même dans des situations qu'il rencontrera en dehors de tout contexte d'enseignement et en l'absence de toute indication intentionnelle. Une telle situation est appelée situation a-didactique. Chaque connaissance peut se caractériser par une (ou des) situation a-didactique qui en préserve le sens et que nous appellerons situation fondamentale.»

Par contre avec la théorie des champs conceptuels, Vergnaud vise à rencontrer

l'expérience propre du sujet, sa connaissance du monde ; l'objet d'étude ce sont les conceptualisations du monde par le sujet. Je cite (Vergnaud G. 1994, p. 180.):

« On peut aussi penser le réel comme un ensemble de situations, dans lesquelles le sujet est engagé de manière active et affective. Le réel est alors vécu sur le mode dramatique que sont l'action et l'émotion. Le concept de situation n'est pas nouveau, mais il a pris avec les recherches en didactique, grâce aux idées de G. Brousseau, une ampleur sans précédent. Je ne retiendrai pas ici toutes les distinctions que fait Guy Brousseau pour penser les situations d'apprentissage et d'enseignement. Je m'en tiendrai au sens très général que je viens d'évoquer, celui de la référence. Ce n'est pas la même chose que de lire le réel en termes de situations et en termes d'objets. Bien qu'il ait développé le concept de schème, Piaget ne parlait que de l'interaction sujet-objet, pas de l'interaction sujet-situation. C'était une faiblesse théorique.»

Cette double manière de prolonger le schéma expérimental proposé par l'épistémologie génétique recouvre des visées épistémologiques distinctes. Schématiquement dit: Brousseau cherche l'approfondissement de l'épistémologie des mathématiques en prenant en compte explicitement les pratiques sociales qui leur sont associées, tandis que Vergnaud tente de compléter l'épistémologie des mathématiques par des apports de la psychologie et de l'épistémologie génétique. Chacune des démarches propose, à sa manière, un redécoupage et une réorganisation du savoir-institué (mathématique) et par là de nouvelles perspectives épistémologiques. Il est remarquable que chacune des deux démarches insiste autant sur l'idée de séquences de situations (rejoignant ainsi Y. Chevallard & A. Mercier 1987.)

Connaissance, connaissance-utile, savoir-reconnu et savoir-institué.

Le concept de situation est donc décisif et c'est à son niveau que se trouve l'articulation entre connaissance et savoir-institué, entre les dimensions individuelles et culturelles de nos objets. C'est aussi dans le cadre de situations que s'opère la reconnaissance, c'est à de nouvelles situations que le savoir permet de reporter les développements cognitifs locaux. Il me semble que cette dimension est perdue lorsque l'on s'intéresse trop exclusivement à chacun des termes : connaissance d'un côté, savoirs institués de l'autre. En outre, si apprendre un savoir c'est adhérer cognitivement à celui-ci au travers de situations référant à des pratiques particulières, on ne peut cependant pas identifier sans autres les savoirs institués visés et les formes que prendra une telle adhésion, pour tel individu, dans telles circonstances, etc. Pour ces raisons, j'ai proposé de considérer qu'il y a entre connaissance et savoir-institué quelque chose que j'ai appelé aussi savoir, tout court. C'est cela qui est le moins compris dans mon article. Peut-être aurait-il fallu pour mieux me faire entendre que j'emploie un autre terme, que je parle plutôt de *connaissance-représentation,* ou de *savoir-personnel ?* Qu'importe. Ce qui est essentiel, c'est de bien comprendre la nécessité de considérer primo que tout savoir comporte un substrat cognitif, et secundo que ce qui du point de vue de l'individu régit ses savoirs, leur développement, leur organisation et leur transmission, n'est pas de l'ordre d'une adaptation individuelle, mais d'un autre ordre, que j'ai appelé : *utilité.* L'utilité englobe les processus interindividuels de reconnaissance (qui dans cette acception devient une sorte d'utilité). Le savoir est de la connaissance-utile, un savoir est une forme de connaissance-utile. Le caractère d'utilité d'une connaissance ou plutôt si on peut dire, sa *réutilisabilité,* suppose, comme la *reconnaissance,* le report du savoir sur des situations ultérieures voire la référence aux situations, aux pratiques sociales et aux savoirs institués. Elle correspond bien à l'engagement cognitif d'un individu dans sa culture. Mais elle concerne tout aussi bien les savoirs institués, car n'existe de savoir

que reconnaissable (ce qui suppose tout au moins qu'il ait été savoir de quelques uns).

Définir le savoir comme *connaissance–utile*. c'est établir son lien avec l'ordre du savoir–institué, c'est dire comment la connaissance, qui chez l'individu déborde toujours le savoir, est filtrée par les situations et rendue sélectionnable par le savoir–institué. De l'autre côté, pour en parler selon le point de vue de la connaissance, j'en ai proposé une autre description. Je cite (Conne F. 1992, p. 234–235):

«D'un côté, la situation est inductrice de connaissance ; d'un autre côté, la connaissance permet d'agir sur la situation. Le processus décrit est donc bouclé du moment où une connaissance induite transforme la situation, qui à son tour induit d'autres connaissances, qui à leur tour... Lorsque le sujet reconnaît le rôle actif d'une connaissance sur la situation, pour lui, le lien inducteur de la situation sur cette connaissance devient inversible, il sait. Une connaissance ainsi identifiée est un savoir, c'est une connaissance utile, utilisable, dans ce sens qu'elle permet au sujet d'agir sur la représentation.»

Traiter la connaissance comme objet c'est établir une boucle : savoir – connaissance–savoir.

L'article publié dans RDM (Conne F., 1992) présente une argumentation de cette thèse, et comporte deux parties selon que j'y adopte le point de vue de la connaissance ou celle du savoir. La première suit le fil de la connaissance et de l'interaction de connaissances, la perspective est alors celle que Rouchier a appelé *conversion : connaissance ---> savoir* (Rouchier A., 1991). La seconde suit le fil du savoir, et sa visée est celle de la *conversion : savoir ---> connaissance*. A nouveau les deux démarches sont intimement liées, et j'en reviens au constat de la solidarité des deux termes : tout savoir est la connaissance d'un individu au moins, et réciproquement tout traitement de la connaissance (que ce soit à fin d'étude cognitive, d'enquête épistémologique, d'enseignement, ou de recherche didactique) procède du savoir.

Comme phénomène le savoir repose sur la connaissance, il ne nous est pourtant pas donné d'autre accès à la connaissance que le savoir. Que nous le voulions ou pas, notre position nous place d'emblée dans la perspective: "conversion : savoir ---> connaissance", notre regard s'y origine, c'est par là que nous pouvons avoir prise sur les phénomènes cognitifs. Bien entendu, il est possible de mettre ceci entre parenthèses, le temps d'une recherche scientifique, de découper les phénomènes, de faire abstraction de ce segment de nos approches. Mais il ne s'agit là que d'une objection portant sur la méthode qui n'ôte rien au fait lui–même. Cela n'est pas tout. Car à moins de perdre toute perspective épistémologique, nous retournons toujours au savoir. Dès lors si ma thèse selon laquelle la connaissance ne se laisse saisir que par le biais du savoir alors il y a une boucle (ou spire) : l'origine est le savoir, la vection est alors celle de la "conversion : savoir ---> connaissance", tandis que l'issue est encore le savoir, mais la vection y est maintenant celle de la "conversion : connaissance ---> savoir".

Enseignement comme expérience du point de vue de la transposition didactique.

C'est donc à titre d'interface que je m'intéresse à la situation d'expérience, d'où je pourrais selon la perspective d'abstraction choisie tirer des informations objectives tantôt sur la connaissance tantôt sur le savoir–institué. La boucle décrite ci–dessus précise et affine l'idée selon laquelle l'expérience procède d'une recontextualisation d'un savoir suivie d'une décontextualisation (Brousseau G., 1986, Schubauer–Leoni M–L. & Perret–Clermont A–N., et alii, 1982). Nous avons vu comment, en procédant de la sorte, la méthode de l'épistémologie génétique dégageait des régularités dans le développement des connaissances individuelles et en tirait des analogies avec le progrès des connaissances scientifiques. L'idée est de considérer que ceci concerne

aussi l'enseignement et l'expérience qu'il doit prodiguer aux élèves. Je retrouve ici la préoccupation première de ma réflexion

De ce point de vue didactique, la double conversion opérée par l'acte d'enseignement correspond à ce que nous nommons une *dévolution* du savoir en connaissance, suivie d'une *institutionnalisation* de connaissance en savoir. Il n'est cependant jamais assuré que ceci se solde exactement par une boucle, que la connaissance induite par la situation d'enseignement soit reconnaissable comme le savoir que l'on se proposait d'enseigner, que le processus d'enseignement ait pu être à ce point contrôlé qu'il n'ait connu en cours de route aucun gauchissement. Ici alors se situe **la proposition** que je fais dans mon article de RDM, à savoir : **ce décalage possible entre le savoir de départ et celui d'arrivée est de l'ordre d'une transposition de savoirs.** C'est pourquoi mon article ne s'intitule pas seulement: "Savoir et Connaissance", mais "Savoir et Connaissance dans la perspective de la Transposition Didactique". Ceci donne un tout autre ancrage au concept de Transposition Didactique (ou de savoirs) et en dévoile une autre facette, celle qu'il m'avait été donnée de découvrir par l'observation en classe lors de mon travail de thèse. Cela renvoie à ce que Chevallard appelle la *transposition didactique sensu lato,* son étude est primordiale, pour lui comme pour moi. (Chevallard Y., 1991, chap 1, n° 1.4, p39).

Revenons alors à la triple distinction que je fais entre connaissance, savoir et savoir-institué. Comme rappelé ci-dessus, j'ai montré comment ce que je nomme savoir (connaissance-utile, connaissance qui a prise sur la représentation par le biais du contrôle de la transformation des situations, savoir-reconnu) pouvait être approché soit par le biais cognitif et plus précisément de l'interaction des connaissances, soit par le biais situationnel et plus précisément en référence aux usages et utilités de type et de niveau divers que peut prendre la connaissance. Dans ce dernier cas la transposition de savoir serait alors analogue à un transfert d'utilité ou d'usage. La transposition est un processus normal et banal qui n'a rien de négatif. Elle est très liée aux processus de reconnaissance, comme le montre le constat général que c'est toujours à la faveur d'un déni de reconnaissance que l'on a pu dénoncer ou déplorer les effets de telle ou telle transposition didactique.

Collection d'expérimentations ad hoc, perspectives expérimentales et expérience.

Il y a donc un écart connaissance / savoir qui se manifeste par une dérive transpositive. Quelle est la portée épistémologique de cette question? Cela a trait à ce que Chevallard a appelé *conversion.* Voici ce que Brousseau écrit à son propos (Brousseau G. et Centeno J. 1991):

«En ce qui concerne la didactique, Chevallard a formulé l'hypothèse que les causes de phénomènes de nature non didactique ne pouvaient influencer les phénomènes didactiques que par l'intermédiaire d'éléments ayant leur logique dans la théorie didactique. Cette "réinterprétation" d'un phénomène non didactique en termes de didactique est une conversion didactique.»

Y a-t-il lieu de se questionner là-dessus? Ne devrions-nous pas commencer par nous informer, par nous efforcer de suivre les rapides développements des sciences cognitives et la moisson des résultats qu'elles nous proposent? Cela ne saurait **de loin pas** suffire. S'il serait idiot d'attendre des mathématiques qu'elles nous expliquent comment elles viennent à notre connaissance, comment le raisonnement se développe, il ne le serait pas moins d'attendre de la part des sciences cognitives qu'elles expliquent comment la connaissance vient prendre les formes d'un savoir mathématique actuel, celui-là exactement, et de nous dire la façon dont l'enseignement contribue à ce résultat. La question que je veux soulever a trait à l'interprétation des faits expérimentaux, et aux limites des

explications qui nous sont proposées en psychologie ou en sciences cognitives. La littérature consacrée à ces études porte à croire que les chercheurs y passent leur temps à proposer et vérifier des hypothèses plus qu'à observer. Ma critique porte avant tout sur ce que j'appellerai un *pointillisme expérimental. Les* normes auxquelles doivent se plier les publication scientifiques (recension de la littérature, hypothèses théoriques, présentation de l'expérience, résultats expérimentaux, discussion) n'y sont pas étrangères. Ce schéma ramène toute l'interprétation de l'expérimentation présentée et de ses résultats au cadre théorique proposé a priori, confondre ainsi théorie, raisonnement expérimental et interprétation est fortement réducteur. C'est croire qu'avec la théorie est donné aussi son sens. Ce pointillisme a pour conséquence que dans de nombreux articles, on voit les chercheurs prendre leurs petites lucarnes expérimentales pour de grandes baies vitrées panoramiques.

Eviter ce genre de dérive nécessiterait à mon avis que l'on fasse deux choses.

1° Donner plus de crédit à l'observation en tant que méthode de recherche, et corriger l'actuel surinvestissement porté à des expérimentations, trop souvent ad hoc (au détriment de l'observation). J'y reviendrai dans la suite de ce texte.

2° Contrôler théoriquement l'usage de faits expérimentaux obtenus sur la base de montages qui n'ont généralement rien à voir les uns avec les autres. Ceci renvoie au problème épistémologique des relations complexes entre le plan théorique et le plan de l'expérience, et devrait être pris en charge par les méthodes expérimentales elles-mêmes. Je vais illustrer ceci sur l'exemple de trois citations relatives à la connaissances mathématique.

La première citation est de J. Piaget dans un ouvrage intitulé: Psychologie et Pédagogie. (Piaget J. 1969).

A propos des élèves présentant des difficultés en mathématiques, Piaget commente (p. 68) : *«L'enseignement des mathématiques a toujours posé un problème assez paradoxal. Il existe, en effet, une certaine catégorie d'élèves par ailleurs intelligents et qui peuvent même témoigner en d'autres domaines d'une intelligence supérieure, mais qui échouent plus ou moins systématiquement en mathématiques. (. . .) Il est donc difficile de concevoir que des sujets bien doués dans l'élaboration et l'utilisation de structures logico-mathématiques spontanées de l'intelligence se trouvent handicapés dans la compréhension d'un enseignement portant exclusivement sur ce que l'on peut tirer de cette structure. Or le fait est là et pose problème.» Puis il donne son explication (p.69) : « En effet les structures opératoires de l'intelligence, tout en étant de nature logico-mathématique, ne sont pas conscientes en tant que structures dans l'esprit des enfants : ce sont des structures d'action ou d'opération, qui dirigent certes le raisonnement du sujet, mais ne constituent pas un objet de réflexion de sa part (de même que l'on peut chanter juste sans se trouver obligé de construire une théorie du solfège et même sans savoir lire la musique). L'enseignement des mathématiques convie au contraire le sujets à une réflexion sur les structures, mais il le fait au moyen d'un langage technique comportant un symbolise très particulier et exigent, un degré plus ou moins haut d'abstraction. La soi-disant "aptitude aux mathématiques" peut donc fort bien porter sur la compréhension de ce langage lui-même, par opposition aux structures qu'il décrit, ou sur la vitesse d'abstraction en tant qu'elle est liée à un tel symbolisme et non pas en tant que réflexion sur des structures par ailleurs naturelles.»*

Mais qu'explique Piaget ? Pas tant le fait rapporté. Il répond simplement à une objection : ce problème ne s'érige pas en paradoxe de sa théorie. Piaget ne nous explique pas vraiment ces échecs scolaires, mais plutôt sa théorie, il nous indique comment l'interpréter.

La seconde citation montre que 16 ans plus tard, le mystère résiste aux multiples travaux effectuées entre temps en

psychologie cognitive, et malgré un élargissement conséquent de la perspective piagétienne La Revue Française de Pédagogie publie en 1985, une recension de M. Fayol, intitulée: Nombre, numération, dénombrement : que sait-on de leur acquisition?

L'auteur annonce son projet comme suit: « Il nous a semblé important d'informer, au moins succinctement, les maîtres des développements récents relatifs à l'acquisition du nombre et de la numération.» Dans sa conclusion nous retrouvons le paradoxe signalé par Piaget, dans une formulation plus générale. Par contre l'auteur ne risque pas d'explication: «Comme le note Guinsburg (1978) en ce qui concerne les mathématiques : "Cross cultural research suggest universal cognitive capacities. Why do school fail to exploit them?" Et effectivement le bilan que nous avons présenté amène à se demander comment et pourquoi, compte tenu des "habilités" précoces décelées chez les enfants, l'apprentissage des mathématiques peut être difficile.»

Une troisième citation, toute récente, nous montre cette question accéder au rang de *Question Vive* de la psychologie, dans un ouvrage intitulé: Pensée Logico-Mathématique : nouveaux objets interdisciplinaires. (Houdé O. & Miéville D. 1993):

Au cours d'une large discussion portant sur les recherches de psychologie consacrées au logico-mathématique, Houdé écrit ceci (p. 107):

« Un bébé mathématicien ?

Le bébé de quelques mois est-il capable de calculer le résultat d'opérations arithmétiques simples sur de petits nombres? Notre représentation naïve de "l'esprit du bébé" ou la connaissance des prédictions piagétiennes (voire celle d'auteurs actuels) conduiraient à répondre que non. Et pourtant! Dans une recherche, menée auprès de bébés de quatre-cinq mois, Wynn (1992) montre que ceux-ci réalisent sans difficulté l'addition "1+1=2" ainsi que la soustraction "2-1=1". La méthode utilisée est le temps de fixation visuelle associé à une procédure de "réaction à l'événement impossible"». Pourtant Houdé n'est pas naïf comme il nous le rappelle lui-même (p.108) : «On ne peut qu'être d'accord avec Bryant (1992) lorsque il indique que ces "concepts" ne relèvent pas du même niveau d'élaboration logico-mathématique que ceux étudiés à un âge plus avancé, par Piaget (Piaget et Szeminska 1941). C'est l'évidence. Il n'en reste pas moins que rien n'interdit de penser qu'il existe des connaissances (proto) conceptuelles précoces – innées selon Wynn – relatives au nombre». Et pour donner finalement bonne mesure à cela il recule dans les niveaux en renvoyant le lecteur à une recherche en neuroscience cognitive (Deheane S.& Changeux J-P dans l'ouvrage cité) qui, toujours selon Houdé, présente «une vision très concrète de la manière dont les "protomathématiques" sont intégrées précocement dans les circuits du cerveau.» Bref, suite au panorama qu'il a dressé, Houdé nous livre son bilan, et nous retrouvons notre question. Au détour de cette affaire, elle a pris bien du grade. Elle n'est plus présentée comme un paradoxe explicable par la théorie (Piaget), ni même comme une question pendante (Fayol), mais bien comme un défi à relever. Je cite (p. 118): « Le moins que l'on puisse dire est que les questions vives se bousculent. (suit une liste qui se clôt par:) Enfin au regard des données du cognitivisme développemental, quelle solution apporter au paradoxe entre le constat d'un bébé précocement rationnel et celui d'un enfant qui souvent ne l'est pas?»

Ne nous trompons pas et situons bien le propos de cette dernière question. Ne lui donnons pas plus d'importance qu'elle ne mérite, sa valeur est rhétorique avant tout. Ne nous attendons pas à voir un chercheur psychologue l'attaquer de front. Comprenons bien qu'elle n'est pas centrale, et parions que ce ne sera jamais qu'au détour d'autres recherches que la question sera rappelée, assortie le cas échéant d'une solution originale. Pourtant ce type de discours étant typique et nous étant régulièrement servi, je vais prendre le temps de montrer que le problème est mal posé.

Dans les trois citations, les auteurs postulent sinon une identité de l'objet connu, du moins une continuité. Houdé est le plus explicite, il parle de *proto-concepts*, de *proto-mathématique*, il évoque des *niveaux d'élaboration logico-mathématiques*. Fort bien, l'objet se construit c'est enregistré. Mais s'agit-il vraiment de la même chose? Dans son évocation *«d'un enfant qui souvent n'est pas rationnel»*, Houdé omet de dire que ce n'est pas sur le même objet que cet enfant se manifeste si peu rationnel. S'il voulait être cohérent avec ses propres théories de référence, ne devrait-il pas d'ailleurs parler de *niveaux de rationalité ? Le bébé* et *l'enfant* dont il est question ne sont en effet pas rencontrés dans le même champ d'expérience; les jugements du chercheur à leur propos (rationalité précoce dans un cas, irrationalité fréquente dans l'autre) ne s'appuient pas sur les mêmes bases expérimentales ; on ne peut donc pas dire à leur propos : «...toutes choses étant égales par ailleurs...». C'est bien sûr et avant tout sur cette dimension expérimentale que la continuité n'est pas établie. Houdé semble avoir oublié les leçons des si fameux décalages horizontaux en épistémologie génétique. **Le paradoxe signalé a tout l'air de se réduire à un artefact expérimental, à un effet d'analogie, à une *substitution d'expérience*.** (Peut-être que tous comptes faits, de nos trois auteurs c'est encore Piaget le plus lucide.)

Il devient donc nécessaire de questionner l'expérience et l'expérimentation et le schéma épistémologique lui-même. Car dans chacun de ces exemples tout semble correspondre alors qu'en fait rien n'est comparable, tout bouge : les sujets ne sont pas comparables (niveau qui affecte qualitativement leur interaction avec le monde), les objets sont distincts (qu'est-ce qui permet à Houdé de parler du "calcul 1+1=2"? de quel objet s'agit-il, vu que les objets sont des construits ?) et les expériences adaptées et à une certaine version de l'objet et aux sujets observés n'ont que peu de chances d'être compatibles. La méthode expérimentale doit fournir des critères de compatibilité expérimentale permettant les analogies et les reports d'interprétation. Si l'enfant est jugé *«souvent non rationnel»*, que dire alors du psychologue?

Pour qui s'en tient à l'idée que la connaissance n'est pas statique mais dynamique, il devrait être clair que la connaissance ne se révèle qu'en situation, et que c'est bien la seule manière pour nous de l'observer. Cela ne garantit aucunement qu'elle se révèle en toutes conditions égales ou comparables. Nous retrouvons la question de l'abstraction épistémologique évoquée au début de ce texte. Il y a une forte variabilité dans les mises en situations possibles. De cela dépendront, entre autres, les moyens de reconnaissance que se donnera l'observateur, et par là l'interprétation des résultats de son expérimentation. Il faut en outre compter lorsque l'on travaille avec des humains de leur échanges et de leurs adaptations réciproques. Car pour chacun de ses protagonistes, l'expérience elle-même est une interaction. Wynn considère qu'il ne peut rien demander à un bébé de 5 mois, ni même tabler sur un effet de reconnaissance directe. Il assimile donc son jugement (bébé sait-il que 1+1=2?) à une mesure du temps de fixation visuelle associé à une procédure de "réaction à l'événement impossible". L'astuce du chercheur consiste à essayer de provoquer un événement de "non reconnaissance" chez le sujet, ou encore "de prendre en défaut une anticipation de sa part". Admettons que l'expérience soit valide, qu'a-t-il obtenu ? Une "connivence" entre le bébé et lui-même, une reconnaissance réciproque (interaction de connaissance), ce n'est pas rien. Est-ce plus ? L'interprétation se doit d'être prudente. Qui peut garantir qu'il n'y a pas malentendu, fausse donne sur l'objet de cette reconnaissance réciproque? Que vaut encore la démarche expérimentale si tout tient en dernier recours à la discrétion du chercheur pour reconnaître l'objet et repérer que le sujet le connaît lui aussi ? Le chercheur, le psychologue, l'épistémologue pourront-ils se mettre d'accord sur ces résultats ? Ou bien

est-ce à dire que l'on doive admettre que l'objectivité de l'objet connu se dilue dans l'objectivité du phénomène cognitif ? Ne va-t-on pas retrouver les écueils de la méthode introspective ?

Ces questions relatives à la définition de la réalité questionnée dans l'expérience (partage de réalité entre expérimentateur et son sujet, substitutions d'expériences dans la comparaison d'études diverses, référence à des faits établis par ailleurs) sont abordées (je ne dis pas traitées totalement) par la distinction connaissance/savoir. Une connaissance est identifiée par le chercheur à partir d'un savoir à la fois modèle expérimental et cadre d'observation. Ceci suffit nullement à qualifier cette connaissance de savoir. Si tant est qu'il connaît "1+1=2" quelle utilité pourrait donc avoir cette connaissance pour le bébé? En quoi cela lui donnerait-il une quelconque expérience de son monde? La question vaut autant pour les élèves évoqués par Piaget: comment les "structures d'actions et d'opérations qui dirigent certes le raisonnement du sujet" pourront-elles lui procurer de la connaissance utilisable (la remarque que faisait Gréco se trouve ici retournée) ? La reconnaissance même réciproque ne suffit pas, le critère est bien le report du savoir sur d'autres situations, ce que j'appelle utilité. Pour chacun de nos savoirs, les structures d'action ne dirigent pas seulement notre raisonnement, elles définissent pour nous des cadres situationnels (dans lesquels viennent prendre place nos actions et raisonnements).

Pour moi, l'enjeu est crucial, et il occupe une grande place dans mes recherches. D'une part, il m'importe de savoir comment garantir l'interprétation des résultats elle-même. Pourrait-on le faire expérimentalement? C'est ici que le rôle de l'observation me paraît nécessaire, et incontournable. D'autre part, il s'agit de sélectionner les résultats expérimentaux utilisables. Je ne puis me contenter de rapporter des résultats d'expérimentation ad hoc, comme cela est si souvent fait. Quel rapport doit entretenir la théorie et l'élaboration des expériences ? Par exemple, si tant est que l'on veut expérimenter sur des sujets en développement à propos d'objets non donnés mais construits, la méthode utilisée ne doit-elle pas le prendre en compte explicitement dans ses interprétations et surtout dans ses comparaisons ? Si Houdé parle de *proto-concepts,* de *proto-mathématiques,* pourquoi ne dirait-il pas du *bébé* qu'il est un *proto-enfant,* voire même que *l'enfant* est un *proto-élève* ? Devrait-on aussi parler de *proto-expérience* lorsque l'on cherche à rejoindre la réalité d'un bébé de 4 à 5 mois ?

Mon ironie n'est pas gratuite, car ici même nous rejoignons des questions qui depuis Brousseau et Chevallard sont devenues familières aux didacticiens des mathématiques. Je citerai ici un autre auteur qui arrive à des conclusions analogues (Morf A. 1994, P. 31):

«(...) nous devons nous demander si les difficultés que rencontre la construction d'une théorie didactique ne sont pas liées à cette approche qui traite les connaissances en cause (le savoir à enseigner) tantôt comme un aspect de l'élève (du sujet), tantôt comme un aspect des objets connus de l'enseignant. Autrement dit, il semble que la théorie manque d'un objet propre.

Pour le lui donner, une conversion s'impose : tout comme le constructivisme est parvenu à traiter l'objet comme un aspect de la connaissance, il faudra réussir à traiter le sujet comme un aspect de la connaissance. *Sur ce deuxième point, le constructivisme épistémologique ne semble pas prêt à effectuer la conversion.»*

L'élargissement de l'horizon épistémologique.

Il faut alors revenir sur l'objet mathématique et examiner un aspect de l'expérience, en l'occurrence le déplacement du regard allant de l'objet de connaissance à la connaissance elle-même. L'occasion m'est donnée de rappeler le projet de Polya dans son ouvrage : Mathematics and Plausible Reasoning qui réunit deux volumes: Induction and Analogy in Mathematics. &

Patterns of Plausible inference. (1953). Tout au long de son étude Polya s'inspire de ses plus illustres prédécesseurs. Ainsi au tout début de son ouvrage, lorsqu'il parle d'induction, il cite Euler. Voici cette citation tirée des oeuvres complètes d'Euler (Euler L, ser. 1, vol. 2, p. 459, Specimen de usu observationum in mathesi pura., in Polya 1953, vol. 1, exergue du chap 1 présentant l'induction en mathématiques, p. 3). Je traduis de l'anglais :

«Il paraîtra un peu paradoxal d'attribuer une grande importance à l'observation, et ce même pour cette partie des mathématiques appelée Mathématiques Pures puisque l'opinion courante veut que l'observation ne concerne que les objets physiques qui seuls sont à même d'impressionner les sens. Or comme nous devons rapporter les nombres au seul et pur intellect, nous ne pouvons que difficilement comprendre comment des observations et des quasi-expérimentations peuvent être utiles dans des investigations portant sur la nature des nombres. Pourtant, comme je vais le montrer ici en me fondant sur de très bonnes raisons, les propriétés des nombres que nous connaissons aujourd'hui ont été pour la plupart découvertes à partir de l'observation et trouvées longtemps avant que leur vérité ait pu être établie par des démonstrations rigoureuses. Il y a même beaucoup de propriétés des nombres dont nous avons connaissance, et que nous ne sommes pourtant pas capables de démontrer; seule l'observation nous y a donné accès. Ainsi nous voyons que dans la théorie des nombres, qui est encore très imparfaite, nous pouvons placer nos plus grands espoirs dans l'observation ; elle nous mènera continuellement à de nouvelles propriétés qu'ultérieurement nous devrons tenter de prouver. Le type de connaissance qui ne repose que sur des observations et que nous ne pouvons cependant pas prouver doit être soigneusement distingué de la vérité ; il est acquis par induction comme nous avons coutume de le dire. Effectivement, nous avons vu des cas où l'induction nous a mené à l'erreur. C'est pourquoi nous devons prendre un soin tout particulier à ne pas accepter pour vraies de telles propriétés des nombres, découvertes par l'observation et supportées uniquement par l'induction. En fait, nous devons considérer de telles découvertes comme autant d'opportunités pour étudier avec plus d'exactitude les propriétés mises en évidence, pour les prouver ou les réfuter; dans un cas comme dans l'autre nous pourrons apprendre quelque chose d'utile.»

De cette citation, je retiendrai:

- Bien que ce soient des objets non sensibles mais qui réfèrent au pur intellect, les nombres peuvent être objets d'observations.

- Ces observations sont légitimes et pertinentes. De ces observations, par inférence on a tiré de très nombreuses propriétés des nombres, et cela bien avant d'être à même d'en démontrer la véracité.

- Les propriétés induites à partir des observations ne sont pas vraies pour le mathématicien mais elles sont néanmoins utiles car elles lui fournissent l'opportunité de preuves ou de réfutations qui feront avancer ses connaissances.

L'argumentation d'Euler est de nature épistémologique, même si son objet reste directement l'objet mathématique, en l'occurrence les nombres, leur nature, la théorie des nombres comme partie des mathématiques pures. L'observation et l'induction restent des moyens et donnent des opportunités au mathématicien d'exercer son travail. Par contre, Polya va plus loin. Son objet est ce qu'il dénomme *Plausible Reasoning,* qui est, concernant l'art de faire des conjectures, le pendant du *Demonstrative Reasoning.* Il s'agit toujours d'épistémologie, mais la visée est autre, elle est plus générale aussi : le travail du mathématicien devient une figure du travail scientifique. Il ne s'agit plus seulement d'observer les nombres mais de tirer des conjectures de l'expérience. Voici ce qu'il annonce en effet dans sa préface (vol 1 p. v.), je traduis :

«A proprement parler, toute notre connaissance en dehors des mathématiques

et de la logique de la démonstration (qui d'ailleurs est une branche des mathématiques) consiste en conjectures. (...) Nous assurons notre connaissance mathématique par des raisonnements démonstratifs, *par contre nous basons nos conjectures sur des* raisonnements plausibles. (...) *La différence entre les deux sortes de raisonnements est grande et variée. (...) A chaque fois que nous apprenons quelque chose de nouveau sur le monde, le raisonnement plausible se trouve impliqué, et c'est la seule forme de raisonnement dont nous ayons besoin pour nos affaires courantes.» Plus loin, il dit s'adressant cette fois-ci à l'étudiant en mathématiques (p. vi): «Un étudiant sérieux en mathématiques, ayant l'intention d'en faire sa profession, doit apprendre le raisonnement démonstratif; c'est sa profession et la marque distinctive de sa science. Pour un réel succès dans son entreprise, il devra néanmoins apprendre le raisonnement plausible ; c'est de cette sorte de raisonnement que dépendra la créativité de son travail.»*

Voici maintenant comment Polya présente cet ingrédient du plausible reasoning qu'est l'induction. Le passage cité prend place juste après la citation d'Euler rapportés ci-dessus (vol. 1, chap. 1, p. 3):

«Expérience et croyance. L'expérience modifie les croyances humaines. Nous apprenons au travers de l'expérience ou plutôt nous devrions le faire. Faire le meilleur usage de l'expérience est une des grandes tâches humaines. Y travailler est la vocation des scientifiques.

Un scientifique qui sert cette cause s'efforce de se faire une idée aussi correcte que possible à partir d'une expérience donnée, et inversement d'amasser l'expérience la mieux à même d'établir sa conviction relative à toute question qui l'occupe. La manière dont le scientifique traite l'expérience est communément appelée l'induction. On trouve dans la recherche mathématique des exemples particulièrement clairs de procédures inductives. »

Polya va donc se consacrer aux mathématiques, avec une visée épistémologique générale, philosophique annonce-t-il même, dans le but de transmettre rien moins qu'une méthode. Son exposé, qu'il dit avoir été très soigneusement ordonnancé, se fera par l'examen d'exemples, je cite (p. viii): « (...) *investigating induction inductively.»* Le moyen que se donne Polya est alors d'examiner une série de problèmes mathématiques. Le livre comporte aussi des exercices donnés au lecteurs et des solutions. La pratique sociale de référence est donc de résoudre des problèmes ; ou plutôt, la présentation de problèmes va être l'amorce de la présentation didactique. Le lecteur est mis en face de son ignorance et Polya commence même très fort puisqu'à la page 4 de l'ouvrage déjà nous nous retrouvons aux prises avec la conjecture de Goldbach, rien moins. Je cite la formulation qu'en donne Polya : *«Tout nombre pair non premier ou non carré de premier, s'écrit comme la somme de deux nombres premiers impairs.»* Il ne nous en cache d'ailleurs pas la difficulté: « *La conjecture de Goldbach est-elle vraie ? Personne ne peut répondre à cette question aujourd'hui*». (A ma connaissance elle n'est toujours pas démontrée.) Ce qui est alors intéressant du point de vue de la démarche épistémologique de Polya, c'est que cette présentation de problèmes puis cette évocation des différentes manières dont certains mathématiciens l'ont abordée permettront au lecteur d'apprendre des mathématiques. **L'évocation du travail de certains sujets informe sur l'objet.** La démarche est exemplaire: **l'induction est bien le moyen de s'informer** de l'expérience, ici l'expérience des grands maîtres mathématiciens.

Je ne pousserai pas plus loin mon analyse. Relevons que l'on est passé d'admettre avec Euler qu'il était légitime, pertinent et même utile d'observer et d'induire des objets non sensibles (les nombres), à admettre qu'il est légitime, pertinent, utile, pour la connaissance même des mathématiques, d'étudier les moyens

dont les mathématiciens s'y sont pris pour observer et raisonner sur leurs conjectures. Relevons aussi que cela introduit, sur le mode de l'évocation il est vrai, la dimension didactique. Comparé à la citation d'Euler, on mesure le champ que prend Polya.

Comme je l'ai soutenu plus haut, le mouvement de recul ne s'arrêtera pas là et de nouvelles étapes se dessinent vers l'expérience et surtout l'expérimental. Polya lui-même dans la préface de son ouvrage les mentionne : il s'est enquis auprès de certains étudiants (confrontations empiriques sur le tas), et un certain travail d'exploration a été engagé par le département de psychologie de l'université de Stanford (nous sommes en 1953). On sait les développements et l'ampleur que vont connaître ensuite les recherches sur le *Problem Solving*. Du point de vue de la démarche, ceci revient à interposer expérimentalement, c'est-à-dire réellement et plus de manière évoquée, un sujet épistémique entre l'objet de l'épistémologue et lui-même. De plus, ce ne sera plus le génie, le scientifique, l'expert au faîte du développement intellectuel qui sera pris comme représentant, mais un sujet plus moyen, statistique voire en développement. Examinons ceci plus en détails.

Dans la citation ci-dessus, Euler intervient à double titre : en tant que sujet-mathématicien qui étudie et connaît les nombres, et, en position réflexive cette fois, en tant qu'épistémologue, témoin, interprète de cette connaissance. Ainsi juge-t-il de la valeur comparative de la connaissance par induction et de la connaissance par démonstration. Polya se place déjà en retrait, il ne se présente pas tant au lecteur comme mathématicien et il interpose entre lui et son objet l'évocation de l'expérience accumulée et partagée des scientifiques, entre autres celles que nous ont léguée les grands maîtres. On pourrait penser que ce retrait dégage un peu Polya de la double position d'Euler, mais il n'en est rien puisque tout transite encore par ce que l'auteur nous restitue et est capable d'évoquer. Ce double statut, support (siège, source) et interprète de connaissance, ne va pas être atténué non plus par le recours à l'expérimentation réelle et l'observation effective et non évoquée de sujets. Ainsi le psychologue qui étudie le *Problem Solving* ne peut pas se retrancher totalement derrière ses observations, puisque comme je l'ai dit, il devra reconnaître la connaissance engagée. Il lui faut pouvoir partager son expérience avec celle du sujet observé, tout comme il fallait à Polya partager son expérience avec ses illustres prédécesseurs. Il en va exactement de même pour l'épistémologue généticien.

Pourtant quelque chose s'est déplacé. Nous avons vu ce que Polya, par le simple changement de perspective d'observation, par la poursuite du recul amorcé par Euler (objet sensible-->nombre-->induction chez l'expert-->comportement chez le sujet--> etc.), avait laissé entrer: référence à des pratiques sociales scientifiques, marque distinctive des mathématiques, démonstration, conjectures et problèmes, présentation didactique, référence à des pratiques sociales didactiques etc. L'exploitation des résultats de Polya peut se faire dans de multiples directions, sur de multiples facettes, selon différents axes d'abstraction. Les démarches comme le *Problem Solving* ou l'épistémologie génétique ne font qu'accentuer le mouvement.

Je ne résiste pas au plaisir de vous montrer cet élargissement sous un autre jour. Tant que l'épistémologue est en prise directe avec son objet (comme Euler), on peut comprendre qu'il soit tenté par une position tantôt empiriste, tantôt innéiste, selon qu'il se considère prioritairement comme épistémologue (interprète de la connaissance) ou sujet (porteur de la connaissance qu'il étudie). Il suffit cependant d'interposer entre le regard de l'épistémologue et son objet un sujet épistémique effectif pour que l'alternative se distende et qu'une position interactionniste devienne alors envisageable. On sait combien Piaget a oeuvré pour défendre cette position. Est-il besoin de rappeler que l'interaction est autant structurelle, bipolaire sujet/objet, que fonctionnelle et dynamique ? Ainsi l'horizon épistémique s'élargit aux

dimensions temporelles, on retrouve évolution et développement. De là à la perspective didactique il n'y a plus qu'un pas. Polya l'a déjà franchi, comme tant d'autres, en particulier Gonseth.

Le partage d'expérience que j'ai évoqué ci-dessus à propos de Polya et son maître Euler, puis à propos de l'épistémologue génétique et ses sujets, existe encore, sur une autre facette, entre l'expérimentateur psychologue et l'enseignant. Ainsi, on peut établir une analogie nouvelle entre l'expérimentation de l'épistémologie génétique (ou de l'expérimentation de type cognitiviste) et l'enseignement (Conne F. 1992). Or faire cette analogie, c'est reculer encore d'un pas, interposer un personnage de plus entre lui et l'objet de connaissance. On imagine la complexité effroyable du système à considérer lorsque l'on voudra, par exemple, prendre en compte en plus de tout cela *l'épistémologie de l'enseignant !* Ne va-t-on pas perdre totalement de vue notre objet ? A cette question je ne puis pour l'heure que de proposer à mon tour deux conjectures. La première a été proposée par Rouchier à la suite de Passeron (Passeron J-Cl, 1989, Rouchier A. 1991), elle consiste à considérer que ces diverses positions épistémologiques vont s'organiser autour de trois niveaux qu'il a désignées par : *Pratiques sociales de référence de niveau I, II et III,* notées PSI, PSII, PSIII. En voici les définitions (données au séminaire national de didactique Paris, avril 1991) :

PSI : Pratique de référence dans un rapport direct à la situation (agie et vécue) – Sujet connaissant.

PSII : Pratique de référence qui prennent les PSI comme objet. Référence à des formes instituées du système culturel. – Sujet instruit.

PSIII : Pratique de référence qui mettent en circulation des savoirs. Communication et/ou transmission des savoirs.»

La seconde conjecture se base sur l'expérience des grands maîtres, en l'occurrence ici Piaget. Considérant que l'acquis de l'épistémologie génétique réside justement dans ce qu'elle n'a jamais transigé sur la perspective épistémologique adoptée, je parierai volontiers qu'un tel contrôle épistémologique suffit. C'est exactement ce que défendent in corpore tous les didacticiens des mathématiques. En retour on voit combien l'épistémologie nous est nécessaire, incontournable.

Vigilance épistémologique et transposition didactique.

Ainsi donc tout comme en épistémologie, nos élaborations théoriques sont guettées par un danger de régressions infinies qui nous font finalement perdre de vue notre objet. La didactique s'en est bien sûr préoccupée depuis longtemps. Chevallard dans son ouvrage: La Transposition Didactique du savoir savant au savoir enseigné (Chevallard Y. 1991, titre du chap 2) en appelle à une *vigilance épistémologique.* L'exposé de Brousseau dans son article: Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques (Brousseau G. 1986), y donne une place de choix parmi les *phénomènes de didactique,* en particulier ce qu'il appelle *le glissement métacognitif* (p. 41- 47)*, puis* dans ses considérations sur *l'épistémologie des professeurs* et en particulier *l'effet Dienès* (p. 56-60).

Pourtant la prise en considération de la chaîne transpositive, sensu lato, ne contribue-t-elle pas, elle aussi, à cette dérive ? Rappelons que cette chaîne se définit par:

xxx---> objet de savoir ---> objet à enseigner ---> objet d'enseignement.

Là réside sinon une des objections les plus sérieuses faites à l'encontre de la transposition didactique, du moins l'un des motif de méfiance de beaucoup d'épistémologues face à ce concept. Ma réponse à ceci se trouve en filigrane dans ma thèse, puisque je propose en fait de prolonger la chaîne transpositive jusqu'à l'objet effectivement appris et à la remonter en examinant aussi les reflux de la transposition, sous forme des objets restitués

par les acteurs sis aux différents maillons de la chaîne:

xxx---> objet de savoir ---> objet à enseigner <---> objet d'enseignement <---> objet enseigné <---> objet appris.

C'est de cette façon que j'ai pu, dans ma thèse concilier les analyses de manuels avec les analyses d'observation de classes. Brun a précisé cela (Brun J. 1982) : «*Surtout, c'est à partir d'une activité qui leur soit propre que les élèves pourront retrouver ce qui est derrière la forme donnée aux contenus d'enseignement et de faire l'envers du parcours de la transposition didactique.* » Et j'ai prolongé cette réflexion (Conne F. 1988) : «*La transposition didactique est donc un cadre théorique pour l'étude et le travail sur les décalages cognitifs à l'école et plus précisément en classe. Je ne me contente pas de tendre le fil sur lequel descendrait la transposition, mais je considère qu'il est parcouru par une navette qui assume les descentes et remontées des connaissances ou des objets d'enseignement.*». Tavignot a approfondi et systématisé ceci sous l'idée de *systèmes de protocoles* (Tavignot P. 1994).

La distinction entre savoir et connaissance ne fait que reprendre ces considérations en les approfondissant et les élargissant. Ainsi, un des arguments développé dans mon article de RDM concernant le savoir et la nécessité de prendre en compte la transposition des savoirs, était d'éviter que nos études et recherches, qu'elles se situent en didactique, en **psychologie** cognitive, ou en socio-psychogologie cognitive, etc, ne dérivent et finissent par s'éloigner de leur objets et préoccupations initiales. Je cite (Conne F., 1992, p. 245-248) :

«*Contrairement à ce que l'on pourrait croire, la confrontation entre savoir et connaissance est établie dès que les sciences dites cognitives surgissent dans le croisement des champs épistémologiques et psychologiques, sans même qu'il faille considérer le didactique. Examinons à ce propos la démarche d'une des plus fameuses variantes de ces sciences, je veux dire l'épistémologie génétique. (...) Je retiendrais ici, c'est que la référence au savoir est première dans la démarche. Elle l'accompagne d'ailleurs tout au long de son périple. (...) Ne quitte-t-on donc jamais le savoir ? Bien qu'on s'y réfère constamment, on l'a pourtant déjà quitté par cette transposition psychologique dans des situations que l'on a crées pour les examiner dans la perspective de la connaissance et selon les critères de validité que la psychologie se donne. (...) On le quitte encore lorsque l'on en dégage comme résultat des processus de développement de la connaissance, et qu'on propose comme le fait Piaget de poursuivre la transposition vers les sciences biologiques, en faisant référence à des mécanismes d'adaptation analogues à ceux mis en évidence en biologie. Et certains (c.f. Cellerier) parlent même de théorie darwinienne de sélection des schèmes, et ce faisant rejoignent les biologistes et neuro-biologistes qui parlent de darwinisme neuronal (c.f. Rosenfield 1989).(. . .)*

On pourrait dire en résumé que si l'expérience psycho-cognitiviste cherche à retrouver la connaissance au-delà des savoirs mis en oeuvre, c'est au contraire de reproduire les savoirs au delà des connaissances que tend l'expérience didactique. Sur le fil des transpositions qui va de l'épistémologique vers le cognitif et se prolonge en direction du neuro-biologique, la transposition vers le didactique renverse l'orientation.»

Nous retrouvons alors la question du contrôle des processus transpositif des savoirs posées par Chevallard et Brousseau. Avons-nous seulement une prise là-dessus? Toujours dans l'article de RDM (Conne F., 1992, p. 251), je propose que : *le contrôle de la transposition sera de contrôler sur quoi cela devient savoir, c'est le contrôle du couple connaissance-situation et pas le contrôle du savoir.*» Je pourrais dire tout aussi bien c'est la question du contrôle du couple savoir/connaissance.

Transposition didactique et interaction de connaissances.

L'un des résultats, si ce n'est le résultat majeur de mon travail de thèse consacré a l'étude de la transposition didactique dans l'enseignement effectif de l'école élémentaire aura été de montrer, je cite (Conne F. 1981, p 451): «(...) *dans le travail de la transposition didactique, les élèves ont une part active.*» Le genre d'explications avancées dans ce travail est résumé ainsi (Conne F. 1981, dos de l'ouvrage):

«En classe comme ailleurs, les mathématiques que chacun pratique ne parlent pas d'elles-mêmes. L'échange scolaire exige donc des formes qui permettent non seulement au maître de désigner et à l'élève d'identifier ce qu'il faut apprendre, mais encore au premier de vérifier et au second de faire voir ce qui a été appris.

Ces formes indiquent qu'on fait des mathématiques ; elles ne garantissent pas pour autant l'authenticité du travail. Les représentations mathématiques ne sont pour les élèves que des supports à leurs activités d'écoliers et les termes restent liés au contexte. Identifier les mathématiques pratiquées revient à confronter ces illustrations aux activités effectives. En décrivant la chaîne qui va de la constitution d'un contenu (ensemble, nombre) jusqu'à la leçon, cette thèse montre comment le concept de transposition didactique permet la restitution de la réalité de la classe.»

Dans mon article de RDM (Conne F. 1992), je n'ai repris de ces explications que ce qui a trait à l'interaction de connaissances, à savoir que c'est par le biais des interactions et des adaptations réciproques de l'élève et du maître que les élèves deviennent acteurs dans le processus de transposition (ce qui en fait un processus jamais clos!). J'ai tenu à y montrer que ce phénomène didactique, l'interaction de connaissance, médiateur de la transmission des savoirs, ne concerne pas seulement les échanges maître élève, mais bien les connaissances et savoirs en jeu. On pourra ramener cela à l'étude des phénomènes de contrat didactique, pour autant que l'on réfère bien le contrat au système didactique dans son ensemble, maître, élève, **savoir.** Je cite J. Brun (Brun J. & Conne F., 1990): « *Le savoir ainsi transposé focalise les relations entre les élèves et l'enseignant au travers d'un autre processus, celui de la recherche d'un contrat.* »

La transposition didactique n'est donc qu'une valeur du concept de transposition des savoirs. Je défend l'idée que ce concept est important pour l'épistémologie. Les arguments que j'ai apporté dans mon article de RDM montrent un lien avec l'épistémologie génétique, et ceci transite, comme l'a proposé Piaget par des considérations de psychologie et de psychologie du développement. Dans l'argumentation des pages précédantes j'ai élargi mes références en considérant la perspective des sciences cognitives. J'ai plaidé pour un rééquilibrage de la recherche en faveur des données d'observations. J'aimerais maintenant donner quelques aperçus de ceci.

Retour de l'épistémologie sur l'expérience d'enseignement.

On peut considérer que le rôle de l'épistémologie est d'informer la didactique, de jouer le rôle externe d'une science de référence. Effectivement cela est pour la didactique une de ses préoccupations princeps. A ce titre, passer en revue les inspirations épistémologiques des différentes chercheurs reviendrait brosser un panorama complet de la didactique des mathématiques elle-même. Mon point de vue est autre, comme je l'ai dit plus haut ce qui m'intéresse c'est de renverser l'abstraction épistémologique et retrouver le plan de l'expérience. J'ai déjà montré différentes modalités plus ou moins complètes de ce retour (épistémologie génétique, prolongements par la théorie des champs conceptuels et la théorie des situation, etc.) auxquels il faudrait adjoindre les recherches actuelles de G. Arsac, et l'anthropologie des savoirs de Y. Chevallard, bien sûr. Traiter le

didactique comme champ d'expériences épistémologiques est une démarche classique en didactique. Que ce soit sous la modalité d'une recherche didactique informée par l'épistémologie visant une simple mise en oeuvre de l'épistémologie, ou que ce soit plus fondamentalement sous celle d'une expérimentation didactique visant une confrontation de ces résultats au didactique lui-même (tant pour en dégager les spécificités du didactique que pour avancer de nouvelles thèses épistémologique), le regard porté sur l'expérience didactique est déductif, l'épistémologique y joue le rôle d'un cadre organisateur de l'expérience didactique. Pour ma part, j'ai toujours été porté vers une approche plus inductive qui m'apparaît aujourd'hui encore comme un complément indispensable. C'était la perspective adoptée dans ma thèse et je voudrais profiter de l'occasion qui m'est donnée ici pour en plaider la cause.

A ce propos, je vais revenir sur la première phrase du résumé cité ci-dessus, et dire la part d'explication qu'elle contient. Je cite à nouveau : «*En classe comme ailleurs, les mathématiques que chacun pratique ne parlent pas d'elles-mêmes.*» Cette remarque renvoie à une question plus générale aussi simple que redoutable, tout le monde se la pose : dans l'expérience didactique quelle part des mathématiques doit-on mettre ? quelle part y est déjà (soit qu'elle soit apportée par le sujet, soit qu'elles y soit de fait) ? J'ai donc été tenté d'examiner un enseignement effectif de mathématiques en classe élémentaire (CP et CEl). Si, comme je l'ai soutenu ici même, l'abstraction épistémologique est possible, c'est qu'il est en matière de connaissance et de savoir certaines invariances. Donc différentes formes d'expériences, différentes valeurs dans les références individuelles et culturelles devraient nous ramener à des problématiques épistémologiques bien connues. Je serais même tenté de dire de moi avec ironie qu'ici je suis préoccupé par *l'immanence* de l'épistémologie dans le didactique. Je n'en prendrais pas moins le risque de vous faire état d'exemples extraits de mes recherches, et dont je tire argument pour la proposition suivante : **les problèmes didactiques renvoient à des problèmes épistémologiques majeurs.** A mon avis c'est ce qui rend **inévitables et incontournables** les démarches d'expérimentation didactiques évoquées ci-dessus.

De l'ontologie en première année primaire ?

Le principal handicap de la méthode descriptive est d'amener à de longs développements. Le lecteur voudra bien me pardonner ce défaut. Je commencerai par vous inviter à vous replonger dans l'enseignement des ensembles à l'école élémentaire, et vous citerai à ce propos de longs extraits de ma thèse: La transposition didactique à travers l'enseignement des mathématiques en première et deuxième année de l'école primaire. (Conne F. 1981.) La longueur de la citation montre combien l'univers didactique est plein, et en particulier combien riches parce que multidimensionnelles sont les références culturelles, et cela même pour des tâches très formelles!

«Il s'agit donc de l'illustration ensembliste des diagrammes de Venn en première primaire afin d'enseigner des rudiments de logique. (extraits des p. 111 à 125): « (Dans ces programmes,) les ensembles n'ont pas de noms. Ils ont bien une "étiquette" mais celle-ci se définit dans le cadre d'une tâche précise: "c'est le critère décidé ou choisi pour un classement donné" (Méthodologie Romande, 1 P, 1ère éd . p. 8). Il s'agit donc d'une classe logique dont la compréhension est figurée par l'étiquette-attribut, et l'extension par la plage ensembliste et son contenu. (...)

Ces représentations diagrammatiques sont-elles utiles à l'acquisition du concept d'ensemble (entendez classe logique)? Le présent programme donne une réponse affirmative. Et les méthodologues annoncent même le passage des ensembles que l'on remplit d'éléments à ceux illustrés par Euler, Venn, Carroll. Je cite: "les cordes dessinées ont pour fonction de séparer les

ensembles. A un premier stade, les éléments sont représentés. A un stade supérieur, la "corde" désigne un ensemble et il n'est plus nécessaire de représenter les éléments." (Méthodologie Romande, 1P, 2ème éd. p.37). (...) L'ensemble est alors un contenant dont on oubliera finalement le contenu. Au passage, il y a généralisation puisque tout contenant, en tant que tel, pourra être considéré comme un ensemble: par exemple, le complémentaire d'un ensemble. (...)

Mais l'analyse didactique peut expliquer comment, dans le but d'enseignement, on en vient à réduire autant le champ de la logique. Tout s'explique quand on considère la logique même de la mise en place de cet enseignement. Et c'est une logique de l'illustration. de la monstration. Les éléments du jeu de blocs logiques sont en fait non pas les éléments d'une classification mais ceux d'un marquage. (. . .).

Les éléments sont, dans les jeux, les entités objectives par excellence. Cela se marque de différentes manières, mieux sur les plans du langage ou sur celui des règles du modèle spatial des objets concrets, que sur celui de la représentation diagrammatique à proprement parler.

a) Langue naturelle. La distinction entre le référentiel et les sous-classes qui seront considérées se traduit par la distinction: substantif-adjectif ou locutions composées des mots "avec / sans" (...)

b) Placement des objets. Unicité de la place des éléments. La correspondance réaliste élément-objet, voulue par les méthodologues dans les jeux d'introduction, fait que les premiers empruntent aux seconds l'exclusivité de la position : en tant qu'objet, l'élément ne peut avoir qu'une seule et unique place. La plupart des tâches proposées demandent à l'élève de remplir un diagramme et de ce fait d'effectuer un classement. A l'élève donc de déterminer successivement la place de chaque élément donné. Les objets ne peuvent être superposés, ni se chevaucher ou encore ne seront pas accolés. Cette exclusivité de la position est relative aux attributs considérés: deux répliques d'un même élément doivent être côte à côte comme des jumeaux dans un pousse-pousse. Donc la règle d'exclusivité est doublée d'une règle d'interchangeabilité des éléments équivalents. Au contraire pour les étiquettes-attributs, les règles de placement sont bien plus floues. Notons qu'il n'y a pas de solution satisfaisante pour rendre compte à la fois de 1' intersection et de la réunion. Les ensembles ne sont pas des objets indépendants. Ils peuvent, et doivent dans certains cas, se chevaucher, voire se superposer complètement. Dans ce dernier cas, le marquage se fera par une double corde ou par deux étiquettes. Cette difficulté de représentation est exactement celle que l'on rencontre avec l'ensemble vide et l'idée que celui-ci est inclus dans tous les ensembles. (Ce n'est donc pas cette notion en tant que telle qui pose problème.) Exhaustion du placement. L'ensemble ne saurait être constitué qu'au moment où il contient tous les éléments répondant au critère choisi et rien que des éléments de la sorte. (...).

c) Placement des étiquettes. Les étiquettes-attributs répondent aussi à des règles précises, sous la forme de règles de présentation destinées avant tout aux enseignants .(. . .).

d) Figuration des ensembles. Pour ce qui est des ensembles, il y a aussi des règles. Entre autre la forme de la corde qui les délimite doit être quelconque. Pour exprimer ceci, on peut avoir recours soit d une forme parfaite lisse, soit au contraire "bosselée", mais connexe bien sûr. (...).

e) Ordre/désordre comme indice de classement. Si les éléments sont à classer, ils seront donnée "en vrac". Le mélange signifie l'absence d'organisation, les éléments sont fournis sans considérations de leurs attributs. Dans d'autres cas, pour entourer les ensembles, les zones que l'on peut perceptivement repérer (rapprochements de couleurs, formes, tailles) sont considérées comme les ensembles.»

Eclairons alors cet exemple de la citation suivante extraite de l'ouvrage de René Thom intitulé : Stabilité structurelle et

morphogenèse. (chap 13, De l'animal à l'homme pensée et langage. p. 294–295.):

« La théorie des catastrophes conduit à une certaine formalisation de la dynamique animale ; mais de même qu'en mathématique pure, une formalisation complète de l'arithmétique bute sur les apories de la théorie des ensembles, liées à la self référence (...), de même une formalisation de la dynamique vitale ne peut que déboucher sur ce même type de difficulté, liées à la self référence, à la nature de la différence entre le moi et l'autre. en un mot sur l'ambiguïté essentielle qu'affecte le concept d'identité. (souligné par moi.)

Selon notre point de vue, le symbolique est issu du conflit entre deux manières radicalement différentes d'envisager l'identité d'un être:

1 . Pour un être spatial, matériel, l'identité peut être définie simplement par le domaine (connexe) d'espace temps que cet être occupe. En effet deux objets matériels sont interpénétrables l'un à l'autre, comme deux solides. Ainsi l'identité d'un homme, son nom propre, peut être considérée définie par la localisation spatio–temporelle du domaine occupé par son corps. (L'identité «civile» réduit cette localisation aux lieu et date de naissance.)

2. Pour un être de type abstrait, comme une qualité par exemple, l'identité ne repose plus sur une base spatiale. Une même couleur, vert par exemple, peut être trouvée simultanément en deux endroits différents de l'espace, la définition même de la qualité est parfaitement indépendante de la localisation spatio–temporelle des objets qui la possèdent. Ici l'identité est de nature sémantique, elle fait appel à la «compréhension» d'un concept.

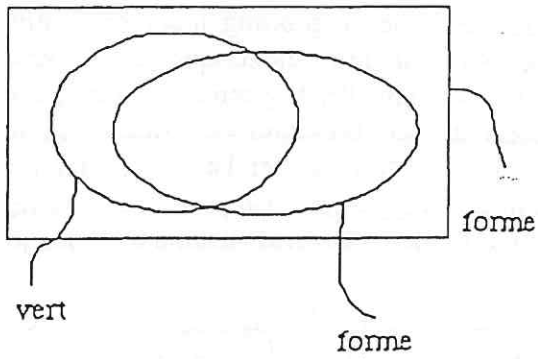
A partir du moment où la « qualité d'être», le statut ontologique qu'on accorde à un être est plus de nature sémantique que de nature spatiale, alors rien ne s'oppose à ce que cet être puisse apparaître simultanément, sous des apparences d'ailleurs diverses, en des lieux différents de l'espace. D'où les faits de participation *que Lévy–Bruhl avait qualifiés de prélogiques, mais qui en fait, s'expliquent très naturellement dans le cadre d'une logique «intensive», qui met plus l'accent sur la compréhension des concepts que sur leur extension, à l'opposé de la logique moderne. C'est du conflit, de la dialectique, entre ces deux critères d'identité que naît l'imaginaire. (. . .) Et la mitose cellulaire, la procréation qui réalisent le projet peuvent être conçues comme des projections du sémantique dans le spatial : Et le verbe s'est fait chair! »*

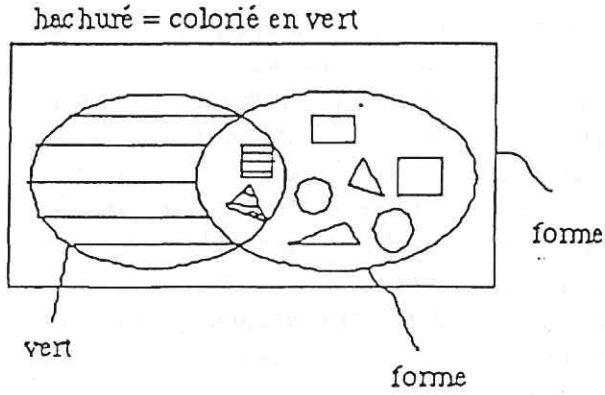
Bien que les préoccupations R. Thom se situent à mille milles de celles que j'avais dans ma thèse, et qu'il ne s'agisse pas ici de faire de qui que ce soit, moi–même, les auteurs de la méthode, les enseignants, les élèves, des M. Jourdain de l'ontologie, mais de bien voir ceci : toutes proportions gardées, ces préoccupations partagent au moins un même objet épistémologique. Bien entendu, concernant un projet d'enseignement si modeste, limité, élémentaire, simple que celui des diagrammes de Venn en première année primaire, personne n'a jamais eu l'intention d'entrer dans les considérations fondamentales de Thom. Bien au contraire, l'astuce didactique que l'on avait trouvée résidait justement à proposer un appareil de tâches éludant ces problèmes ontologiques ; cela consistait en quelque sorte à remonter le cours évoqué par Thom. A l'origine du projet didactique, l'intention est bien de conférer aux objets traités une nature sémantique. Les citations de la Méthodologie Romande en témoignent : dès le départ il est clairement stipulé que les élèves travailleront jusqu'à pouvoir raisonner directement en termes d'ensembles et pourront faire abstraction de leurs éléments. Mais pour y aboutir, on se propose d'en revenir à un statut ontologique des objets, plus spatial que sémantique. Or nous voyons que ce qui a été chassé d'un côté, à la faveur de l'illustration concrète et manipulatoire, revient d'un autre à la faveur des nécessités de signifier certaines choses, de les communiquer, de les symboliser, d'échanger à leur propos. (On se référera aussi aux citations de la Méthodologie Romande faites aux pages 132, et 133 de ma

«compréhension» d'un c

thèse.) C'est là le fait le plus intéressant à retenir. L'analyse de l'observateur externe que j'étais n'a pas manqué de buter sur le conflit entre les deux critères d'identités, conflit que la méthode espérait éluder, ou pour être plus exact, conflit qu'elle voulait épargner aux élèves. On a donc tenté en quelque sorte de contenir, voire retenir le sémantique du côté du dispositif. Mon analyse mettant en évidence les règles implicites de placement et de symbolisation montre comment cela s'effectuait. Or une telle opération, si elle est envisageable sur le papier, tant qu'on en reste à la lecture du manuel, ne l'est plus dès lors que l'on passe à un enseignement effectif, en classe, avec maître et élèves en chair en os. Impossible d'évacuer ainsi le sémantique. Il n'est en effet donné à personne de suspendre la dialectique évoquée par Thom. Et ce vain effort de rétention se soldera finalement pour l'entreprise enseignante en une perte du contrôle sémantique. De multiples observations rapportées dans ma thèse attestent qu'il en allait bien ainsi dans la réalisation de cette méthodologie. Mais j'ai pu en dire plus encore puisque d'autres observations effectuées lors de cette même recherche, mais provoquées celles-là, ont montré l'efficacité didactique de toute action rétablissant la dialectique évoquée par Thom, et la richesse de ce que les élèves en restituent. Encore fallait-il être capable de la repérer, et, bien entendu, ne pouvait y être sensible qu'un observateur ayant un tant soit peu réfléchi à ces questions, et qui, fort de ce souci du sémantique, était prêt à prendre quelques libertés vis à vis des principes soi-disant méthodologiques. Je ne donnerai ici qu'un seul exemple, pour le reste, le lecteur pourra consulter ma thèse.

(p.164) La maîtresse avait proposé par erreur à remplir le diagramme ci-dessous. On remarque qu'elle a mis deux fois la même étiquette "forme" . Une fois pour désigner l'ensemble référentiel, et une autre pour désigner un des deux ensembles. Ceci n'a pas manqué de poser quelques problèmes d'interprétation aux élèves. Plutôt que de corriger l'erreur de la maîtresse, je leur ai proposé d'en discuter. L'un d'eux présente sa solution: le **vert** *qui n'est pas une forme, c'est du* **vert**.





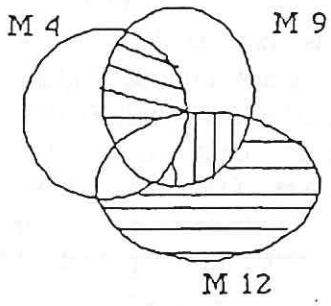
Je ne sais en quelle langue est écrit le didactique, mais il y a entre la citation de Thom et la pratique observée un effet d'intelligibilité qui me surprend et m'enthousiasme. Dans ma thèse, je cherchais à décrire quelques mécanismes qui contribuaient à la transposition didactique. Pour cet exemple relatif à l'enseignement des diagrammes de Venn, j'avais arrêté mon curseur sur un point précis de la chaîne de la transposition didactique, celui concernant la confection de tâches destinées à supporter l'apprentissage des élèves. Je viens de montrer, sur ce point spécifique, que ce fait que j'avais abordé par le biais d'une analyse de la transposition didactique, je pouvais aussi le rattacher à des considérations apparemment étrangères à cette problématique, et qui, pour le moins ne relevaient pas des mêmes a priori philosophiques. Cette rencontre inopinée de deux points de vues si différents renforce mon analyse et encourage à porter ce regard

sur les phénomènes d'enseignement. Et si j'ai tenu à faire figurer dans ma citation la dernière assertion de Thom concernant la reproduction en tant que réalisation d'un projet, c'est que ce prolongement rencontre encore son analogue didactique. Tout vient en effet que dans l'enseignement, on ne peut se contenter de présenter des situations, il faut encore y faire entrer l'élève, initier un certain développement. Ce point a été repris dans mon article de RDM (Conne F. 1992) je cite:

(p.243) «L'enseignement est une entreprise délibérée de transmission de savoir. C'est une projection: le savoir visé est projeté par 1' enseignant sur un segment de réalité, sur lequel va s'élaborer la connaissance de l'élève, le savoir est utilisé par l'enseignant pour installer l'élève et sa connaissance dans un modèle situationnel. C'est aussi un projet, une part de la connaissance induite chez l'élève par ce segment de réalité, se verra reconnue comme utile puis comme suffisamment proche du savoir à enseigner pour pouvoir en prendre la forme.»

Ajoutons que ce genre d'observations n'est pas isolé, local ni épisodique, mais que comme tout problème non résolu il perdure. Il est très facile à un observateur attentif à ce qui paraît d'abord comme de petits événements de classe d'en trouver d'autres.

Très récemment encore, toujours à propos des diagrammes de Venn, mais en 5ème année primaire d'une école de Suisse Romande cette fois (élèves d'âge CE2). Lors de l'étude des "multiples et diviseurs", le manuel proposait en exercice d'illustrer les relations entre multiples au moyen de diagrammes de Venn; il était proposé aux élèves de représenter sur un tel diagramme les multiples de 4, de 9 et de 12. Les élèves ayant appris la méthode diagrammatique de Venn copient donc un schéma de trois ensembles quelconques et de leurs intersections. Puis ils hachurent les plages qui sont nécessairement vides et notent quelques éléments dans les autres plage:



Le schéma est correct, mais ne satisfait pas l'enseignante qui aurait voulu que les élèves disposent les ensembles en illustrant les relations d'inclusion. Elle ne trouve pas d'autre moyen de communiquer cette contrainte que de leur demander de trouver un schéma qui ne comporterait pas de plage vide. Les élèves ne réussissent pas à résoudre ce nouveau problème d'illustration des relations de divisibilité. On peut le comprendre car ils ne savent justement pas encore que diviser c'est contenir. *L'épisode est très intéressant. D'abord, il se rapporte un grand moment de la transposition didactique des mathématiques modernes : un outil nouveau les ensembles – pour un objet ancien – les relations de divisibilité dans Z, (pour une analyse de ceci, Conne F. 1994.) Ensuite, et ceci rejoint mon propos, c'est un exemple où la progression du programme de mathématiques va à rebours d'un progrès mathématique. Et le fait que ce dernier soit un aspect très anecdotique de l'histoire des mathématiques rend l'exemple encore plus saisissant. Durant leur 4 premières années primaires en effet, les élèves dont il est question ici avaient appris à utiliser des diagrammes de Venn. Or on sait que ce dernier s'était inspiré d'une idée didactique d'Euler (Lettres à une Princesse d'Allemagne.), qu'il avait améliorée en la généralisant. On peut dire que là où le souci d'Euler était d'illustrer des relations de classes, celui de Venn était de proposer un algorithme de calcul logique ; et que le prix à payer aura été une perte de lisibilité, l'illustration se faisant moins évidente, ce qui nécessite de l'usager qu'il déduise les relations du diagramme, plutôt que de les*

lire directement. Dans notre anecdote, les élèves ont mis en oeuvre leur savoir, ce qui ne correspondait pas exactement au projet d'enseignement qui lui voulait surtout illustrer les nouvelles relations numériques d apprendre.

La maîtresse a donc cherché à faire retrouver l'usage moins élaboré d'Euler à partir d'un savoir plus achevé, les diagrammes de Venn ! On ne s'étonnera pas de son échec. Mais l'important n'est pas là, c'est plutôt la logique qui a déterminé cet épisode d'enseignement, à l'insu du maîtresse, toute ignorante qu'elle était de l'origine de l'objet d'enseignement. Le contrôle de l'enseignement des mathématiques et de la transposition didactique est bien un contrôle épistémologique.

En poursuivant alors le raisonnement de Thom, selon ses propres conceptions des mathématiques, on pourrait voir aussi que ce phénomène est peut-être bien lié au contenu mathématiques, faits d'objets immatériels. Et pour que ce soit bien établi qu'il en est ainsi permettez-moi de présenter une autre convergence, avec un autre auteur, Quine cette fois-ci. Voici comment l'éditeur de la traduction française présente son ouvrage intitulé : Le mot et la chose (Quine W. V. O. 1977):

«Quelles sont les catégories les plus générales de la réalité? Aristote a tenté de répondre à cette question, mais sa méthode ne résiste pas à la critique de Benveniste et Vuillemin : "Croyant classer les notions, Aristote a classé en réalité des catégories de langue, en sorte que les particularités de la langue grecque ont dominé le destin de la philosophie en Occident."

Le Mot et la Chose *est à l'abri de cette objection. Ce n'est pas à la langue naturelle que Quine fait jouer le rôle de "révélateur" d'ontologie, mais à la langue formelle construite pour exprimer le savoir scientifique. "La recherche de la notation canonique universelle qui ait la structure la plus simple et la plus claire possible ne doit pas être distinguée d'une recherche des catégories dernières ou d'un effort de reproduction des traits les plus généraux de la réalité."*

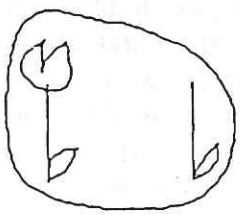
Le choix entre notations *rivales n'est-il pas affaire de convention, contrairement au choix entre* théories rivales? *Quine refuse ce contraste. Certaines conventions sont plus efficaces que d'autres et cette différence* objective *d'efficacité est comme l'écho assourdi de la réalité. Chez Quine, le réalisme fait sa rentrée dans le foulée du pragmatisme le plus radical.*

Toutes les expressions référentielles ne sont pas porteuses d'ontologie. Seules le sont celles que l'on ne peut pas éliminer par la paraphrase. Une enquête méthodique s'impose ici. L'un des mérites majeurs du présent ouvrage réside dans le souci de l'auteur de quitter le plan des généralités pour entrer dans le détail des applications concrètes.»

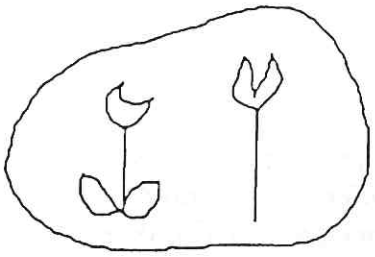
Vous vous imaginez combien son propos est éloigné de notre univers de l'enseignement des diagrammes de Venn à des élèves de 7 ans. Je vous fais grâce d'entrer dans les détails de la discussion philosophique qu'y tient Quine. Pourtant à la lecture, du dernier chapitre de l'ouvrage, intitulé: Décision ontique où il est question d'examiner quels éléments vont être tenus pour des réalités auxquelles vont se référer les phrases du langage formel à constituer, deux points m'ont passablement frappé.

1 • Le premier a trait à la discussion où est en cause l'existence d'objets abstraits, comme les attributs, les classes, etc... La question n'est pas seulement de savoir si l'on doit admettre leur existence, mais aussi de savoir si on ne peut pas s'en passer, du moment où on a admis l'existence de tels ou tels autres objets. Quine argumente en faveur de la nécessite de supposer existants aussi bien les objets concrets que les attributs, et montre que ces derniers ne peuvent se déduire d'une simple généralisation. Ainsi dit-il en substance, si on dispose de différents objets ayant la propriété d'être "rond" ou "chien", on pourra sans doutes considérer l'existence de termes généraux concrets, les termes de "rond" ou de "chien" (terme généraux vrais

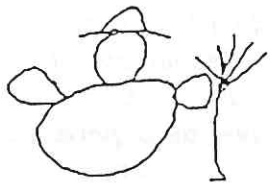
d'objets physiques) *qui réfèrent à l' un ou l'autre des objets particuliers qui se trouvent être "rond" ou "chien", mais que cela ne dira pas qu'il existe pour autant un attribut abstrait qui leur corresponde et dont le terme abstrait singulier serait "rondeur" ou "caninité" ou "espèce canine" et le terme général serait : "trait" et "espèce".*
(p 331 et 332) «Ces personnes auront le sentiment que tout terme général applicable aux objets physiques, comme "rond" ou "chien" symbolise en même temps un attribut. (. . .) Mais lorsque nous décidons de permettre à un mot – "lueur" par exemple pour prendre un cas contestable – de recevoir un plein emploi comme terme général, le fait est simplement que "les lueurs", mais non la "luminosité" ou le "genre des lumineux" est érigé en objet.» Au passage (p. 334) il montre par un raisonnement évident, mais bien typique d'un philosophe, que l'on ne saurait faire appel à deux significations du mot il existe, l'une qui serait propre aux objets concret, l'autre aux objets abstraits (autre que "l'une serait dans l'espace et l'autre non").
2 • L'intérêt est que cette recherche portant sur le langage amène Quine à présenter des distorsions de langage, et la façon dont elles jouent dans la communication, des jeux de glissements de sens et d'ambiguïté qui sont justement ceux auxquels n'échappent pas les enseignants de classe élémentaires lorsque, par exemple, ils ont voulu enseigner les ensembles. Ce qui est pointé dans la discussion philosophique est exactement ce qui fait problème dans la pratique enseignante. En voici un exemple tiré encore de ma thèse. (Le lecteur intéressé se référera à ma thèse chapitres 3, p.107 à 160, et chapitre 5 p.223 à 302 pour des observations de productions de classe ; en ce qui concerne le recours aux symboles iconiques, le lecteur se reportera plus particulièrement aux pages 114 à 130, 134 à 138, 144 à 165.) Dans l'enseignement des mathématiques modernes et de la logique au travers des "ensembles", les pédagogues ont eu recours à un codage iconique. On espérait éviter ainsi aux élèves des difficultés langagières non proprement mathématiques. Pourtant les mêmes problèmes que pointe Quine et qu' il illustre sur la valeur des termes de langage se retrouvent dans l'usage des symboles. Ainsi par exemple, lorsqu'ils font recours à des icônes pour représenter des objets, les manuels et les enseignants reprennent les mêmes icônes pour représenter les attributs. Les mêmes symboles ont différentes valeurs, ils représentent tour à tour : des objets concrets, des types d'objets, des traits particuliers, des attributs d'ensembles, ou encore des marquage de certaines plages d'un diagramme, c'est ce que j'ai appelé la multivocité des signifiants. J'ai montré que les élèves finissaient par apprendre grosso-modo d'être attentifs à ces distinctions en recourant à des indices donnés par le contexte de la tâche et certaines représentations véhiculées par la maîtresse (qu'elle partageait avec eux), essentiellement des indices sur la fonction de tel ou tel symbole, de telle ou telle disposition de ces derniers, renforcés encore par l'apprentissage de modèles d'action (algorithmes de placement d'éléments dans les plages d'un diagramme). J'ai raconté cela en détails dans un article intitulé: Un canard dans les mares. (Conne F. 1987), où je montre comment cet objet d'enseignement (diagramme) jouait sur deux modalités de relations logiques et spatiales. Ces faits sont généraux et ont pu être illustrés exactement de la même manière à propos de l'enseignement de la division écrite. (Conne F. & Brun J, 1989). De plus, j'ai pu montrer très clairement par des exemples ayant trait à la négation, ou par la mise en évidence des règles implicites concernant l'usage de ces icônes que ces symboles étaient structurés et ne représentaient pas tant des objets que des structures d'objets. Par exemple:



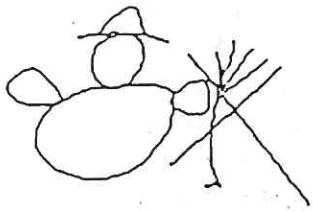
ce ne sera pas considéré comme un ensemble de tiges de fleurs



ensemble de 2 fleurs
l'une d'elles a des feuilles
l'autre pas



icône représentant l'attribut:
"bonhomme de neige avec balai".



icône représentant l'attribut:
"bonhomme de neige sans balai".

Ainsi en est-il des cartes de matériels structurés ou des blocs-logiques (Dienes) utilisés pour ce genre de tâches scolaires. Il y a en effet une sémantique (manifestées ici comme des règles de préséances sémantiques), autant d'implicites culturels allant de soi pour les enseignants. J'ai montré dans ma thèse comment dans la pratique de cet enseignement, le contrôle de tout cela restait malgré tout langagier (malgré l'intention affichée des auteurs de réduire la part langagière), et que ceci provenait de la mise en place systématique d'activités préalables de description des dispositif et d'explicitation des consignes. C'est en effet le programme lui-même qui établit cette organisation en faisant précéder les activités ensemblistes d'activités de type jeu de portrait d'objets ou d'images *Ce contrôle par le langage est donc bien plus qu'unedisposition pédagogique mais porte sur l'objet d'étude lui-même.*

Ces observations vont bien dans le sens de Quine qui montre de son côté qu'il ne s'agit pas seulement de distinctions futiles de langage. Il invoque alors ce qu'il appelle *escalade sémantique,* qui nous allons le voir concerne de très près les échanges scolaires. Je le cite:

(p. 372) « (L'escalade sémantique est) le passage d'un discours où l'on s'exprime en certains termes, à un discours où on parle de ces termes. (... Or) l'escalade sémantique, s'applique partout.»

(p. 373 à 375) . La stratégie de l'escalade sémantique consiste à porter la discussion sur le terrain où les parties sont davantage en accord, tant sur les objets de la discussion (à savoir les mots) que sur les termes principaux qui les concernent. Les mots, ou leurs inscriptions, d la différence des points, des milles, des classes, et du reste sont des objets tangibles, d'un format très populaire sur le marché public, où les hommes en dépit des différences que présentent leurs schèmes conceptuels, communiquent au mieux. La stratégie de s'élever jusqu'à un niveau où les deux schèmes conceptuels fondamentalement différents se rejoignent, lieu optimum pour discuter leurs fondernents disparates. Rien d'étonnant qu'elle rende service en philosophie.

Mais cette stratégie intervient aussi dans les sciences naturelles. La théorie de la relativité d'Einstein fut aussi acceptée sur la base de réflexions portant sur la théorie elle-même, en tant que discours, et sur sa simplicité comparée à celle des théories rivales.

Le procédé d'escalade sémantique a été utilisé beaucoup et avec soin dans les études axiomatiques des mathématiques pour éviter des pétitions de principes. Quand un mathématicien axiomatise quelque théorie déjà familière, la géométrie par exemple, il court fréquemment le risque d'imaginer que c'est à partir des seuls axiomes qu'il a déduit une vérité familière à la théorie, alors qu'en réalité il a exploité, sans s'en rendre compte, d'autres connaissances géométriques. Comme précaution contre ce danger, on recourut d'abord à un procédé distinct de l'escalade sémantique : la mise entre parenthèse de l'interprétation. (....) En tout cas lorsque Frege eut réalisé une formalisation complète de la logique, une précaution de rechange,

plus raffinée que la première, contre les pétitions de principes devint disponible pour les études axiomatiques; et elle est précisément l'escalade sémantique.»

Là encore un point essentiel relevé lors de l'observation élémentaire. Quittons l'exemple un peu obsolète de l'enseignement des ensembles et de la logique à l'école élémentaire. Les échanges verbaux entre enseignants et élèves se caractérisent justement par un recours fréquent à l'escalade sémantique. Ainsi pour des raisons de méthode, l'analyse de protocole d'échanges à propos de problèmes d'arithmétique doit faire la distinction entre les déclarations des protagonistes qui se réfèrent au niveau a-didactique et celles qui se réfèrent au niveau didactique de la situation où ils se trouvent. Certaines déclarations sont à interpréter à titre d'expression de pensée en oeuvre dans le problème, tandis que d'autres sont manifestement des termes de l'échange didactique. Il y a passage d'un niveau à l'autre, qui correspond bien à la description que donne Quine et que je n'hésite pas à qualifier *d'escalade sémantique de type didactique.* Je cite un document annexe à un article paru dans Petit 'x (Conne F., Pauli L. 1989) :

«Je propose d'examiner dans les protocoles les expressions produites et les termes échangés lors des entretiens entre un expérimentateur et un élève. Un des multiples facteurs qui rend toute description de l'échange verbal complexe, tient à ce que les mots peuvent prendre, pour l'observateur, deux valeurs distinctes:

– à titre d'expressions de la pensée, ils réfèrent aux traitements de celle-ci ;

– à titre de termes de l'échange, ils sont eux-mêmes des objets traités par la pensée (et ceci même si ces objets sont aussi évanescents que des paroles !).

Un type particulier de traitement consiste pour l'un des protagonistes à intégrer (assimiler) les termes de son interlocuteur à ses propres expressions. Un autre type de traitement est la recherche puis le choix des termes adéquats pour réorienter la pensée de son interlocuteur et l'engager à des traitements particulièrement souhaités dans l'échange didactique. L'échange maître-élève (expérimentateur-élève) prend place dans un processus donné, en évolution dans le temps. Il y a dédoublement et articulation de moments divers. Dans une première approche, l'analyse découpera des séquences et cherchera à situer les transitions entre celles-ci. Un critère possible est celui d'une unité de redondance dans les expressions et termes. Ceci signifie que dans une même séquence, les termes réfèrent à un même point de vue, ou encore à des mêmes règles d'actions ou nécessités mathématiques. Il y a seulement réitération de l'expression. Par contre aux points de rupture, il y a changement de point de vue : les objets traités sont nouveaux, ou considérés sous un angle nouveau. A noter que le meneur de l'entretien peut décider d'intervenir à l'un ou l'autre type de moment. Tantôt il essayera de se faire expliciter (expliquer ou réexpliquer) le point de vue de l'élève. Tantôt il essayera de lui suggérer quelque chose pour lui faire changer de point de vue. Peu importe qu'il y réussisse ou non, ici c'est l'intention didactique qui m'importe. Par exemple, il induira un changement de perspective dans l'esprit de l'élève alors qu'il voulait seulement des précisions de sa part, ou au contraire, il échouera dans une de ses suggestions. Ceci peut même rendre momentanément le meneur mené ! En général, les échanges portent sur des mots chargés de sens et non pas sur le sens des mots. Ceci montre qu'il est primordial pour les partenaires de comprendre à quoi chacun se réfère lorsqu'il s'exprime. Ceci comporte une part interprétative, fortement intuitive, implicite, localement adaptée, sur la base de critères empiriques et le plus souvent peu pensés. Quoique fort subtile et souvent pertinente (ce qui en soi est plutôt étonnant), elle n'en est pas moins susceptible d'erreurs. Tout autre est le travail d'interprétation qui essaye de rendre compte d'un entretien entre un maître et un élève pour dégager ce qui s'y passe. C'est une chose de suivre au fur et à mesure un élève, c'en est une autre de pouvoir

comprendre dans sa globalité le traitement d'un élève, les interactions de celui-ci avec ses interlocuteurs, et les problèmes mathématiques qu'il y traite. Au cours d'un tel travail, on se rend compte de deux choses:

– a) Au travers de leurs expressions, l'activité des élèves (comme celle des maîtres) est plus grande que ne le laisse apparaître le simple examen de leurs réponses (respectivement, interventions). Cette activité déborde toujours celle requise par la résolution formelle des problèmes ! Il se peut aussi que ces activités ne se recouvrent que peu, c'est bien connu.

–b) Les raisonnements des élèves (et ceux des maîtres) s'avèrent plus consistants, c'est-à-dire plus cohérents que ne le laisserait supposer une lecture empirique (i.e. qui n'analyse pas l'entretien, mais se contente d 'en faire une lecture suivie)»

Quelle est la portée de telles observations? Sont-elles banales ou au contraires très sérieuses? Bien entendu, l'éventualité est toujours grande de voir le chercheur ou l'observateur s'égarer (donc que moi-même je m'égare). C'est le danger de l'induction (cf. la citation d'Euler). L'affaire n'est pas entendue pour autant; c'est une question ouverte de recherche. Je m'y suis attaché et je compte apporter prochainement de nouveaux arguments à son propos. Mon hypothèse, vous l'aurez deviné est que c'est une question très importante. On aurait tort de penser que la Transposition Didactique n'a plus rien à nous livrer. Ainsi nous n'avons jusqu'ici fait qu'évoquer les *pratiques sociales de référence.* Passé le premier effet d'intelligibilité, cette formule demande à être affinée, explicitée, étudiée. La question avait été abordée à la Vème école d'été de didactique des mathématiques, par Vergnaud, Brousseau et moi-même : c'est la distinction *situation jouée / situation évoquée* qui est en cause. Vergnaud a insisté sur cet aspect qu'il appelé *la référence* (Vergnaud G. 1994), dans mon article de RDM (Conne F. 1992), je l'ai mentionnée sous l'angle de *l'ambivalence de la transposition didactique.* Je cite (p. 263):

«Cependant une circonstance encore plus fondamentale a joué. Comme je l'ai dit, en didactique, on établit une double référence aux situations didactiques et aux situations de référence de ces savoirs. Ceci confère à la transposition didactique une ambivalence. En effet la situation de savoir doit être traitée en tant que telle, elle doit être pratique *comme l'est toute situation propre à un* savoir-pragmatique. *Ainsi lorsque la transposition didactique procède d'un* savoir-savant, il *lui faut transposer ce savoir en une* situation pratique, *c'est-à-dire réaliser ce savoir comme* savoir-pragmatique. *Il faut que le travail scolaire soit pour de vrai. Mais en revanche, cette situation ne sera pas à prendre pour elle-même, mais pour l'exemple, parmi tant d'autres* réalisations pragmatiques *qui eussent été possibles. C'est alors par l'enchaînement et l'articulations des situations entre elles que la transposition didactique retrouvera le* savoir-savant *et son organisation, c'est-à-dire assurera que les savoirs scolaires s'organisent et se développent à la manière des* savoirs-savants. *Dans le cas où la transposition didactique procéderait d'un* savoir-pragmatique, il *lui faudrait alors le transposer de sorte qu'il puisse jouer le rôle organisateur et cristallisateur, en un mot formateur qu'on lui a attribué en le choisissant. Cette circonstance est fondamentale car elle est inhérente au didactique, avant même toute mise en oeuvre effective de l'enseignement.»*

Etudier la transmission des savoirs en produit de nouveaux.

Nous avons vu que certains problèmes didactiques renvoyaient à des problèmes épistémologiques généraux, et ce, à l'insu du système d'enseignement (du projet d'enseignement, des plans d'études, des programmes, et des enseignants). C'est ce que montre une observation fine, dans des conditions où le didacticien s'est abstenu de proposer ou dispenser lui-même un enseignement (qui dès lors serait forcément inspiré d'une analyse épistémologique un

peu plus explicite). Ce sont des rencontres bien réelles et dont le caractère inattendu n'amoindrit pas la signification, bien au contraire. Le champ didactique est soumis à certains des enjeux dévoilés par les savants, les philosophes, les logiciens ou les mathématiciens. L'induction a aussi sa place en didactique. Cela contraste avec les efforts déductifs mais trop souvent idéalistes et schématiquement applicationnistes, où les enseignants ou didacticiens essayent de tenir compte soit d'une idée épistémologique originale, soit de données épistémologiques et s'efforcent à appliquer les résultats de ces références savantes externes. Cela se solde souvent par des échecs, comme la réforme des maths modernes en sont un exemple. Brousseau et Maudet ont analysé en détails cela pour les idées de Diénes (Brousseau G. 1986, Maudet C. 1979). Pour ce qui concerne les données de la psychologie d'inspiration piagétienne, Brun a décrit ses impasses depuis longue date (Brun J., 1975, 1994), de même Ricco (Ricco G. 1992). Le didactique se dérobe et résiste aux doctrines de la connaissance avec une vigueur surprenante.

Cela signifie que le didactique entretient avec l'épistémologique des rapports qui ne sont pas aussi simples que le laisseraient penser les réussites de l'abstraction épistémologique. C'est la méconnaissance du didactique lui-même qui cause tous ces déboires. Et Rouchier, à la suite de Passeron a raison de rappeler dans sa thèse que (Passeron J-Cl., 1989, Rouchier A., 1991, p.27, c'est moi qui souligne):

« Nous rencontrons donc ici trois formes d'interrogation sur le savoir. La première se constitue comme le domaine même des sciences cognitives. Il s'agit d'interroger le sujet humain dans sa capacité à comprendre et d'apprendre, c'est-à-dire à développer des compétences de nature cognitive qui lui permettront de réaliser les opérations qui témoignent et attestent du sujet connaissant. La seconde se constitue dans le domaine de sciences sociales autour du rapport nécessaire inévitable que le sujet humain va devoir entretenir avec un savoir ou une connaissance qui sont aussi des objets sociaux, marqués historiquement, existant dans des formes bien déterminées. On interroge alors les structures sociales dans lesquelles s'inscrivent les savoirs et qui les inscrivent dans la culture. Les sciences constituées qui vont s'en saisir sont par exemple l'histoire, la sociologie, l'anthropologie. La troisième interrogation va s'organiser autour des conditions de la transmission d'un savoir déterminé. Cette transmission s'inscrit dans un projet social général et l'ordre didactique se constitue justement dans les spécificités d'une mise en oeuvre qui doit incorporer ces conditions "historiques, sociales et psychologiques" à des contraintes générales d' efficacité et de complétude.»

Revenons au problème épistémologique que j'ai soulevé à propos de la logique ensembliste et qui s'est livré à mon observation. Il est temps de dire que indépendamment de mes travaux, à Bordeaux, suite sans doutes à la critique faite par Brousseau sur travaux de Papy et de Diénes, Pérès et une équipe du COREM ont trouvé à résoudre le problème en proposant justement d'aborder la logique au travers de la construction d'un code de désignation. (Pérès J. 1984). Mes analyses allaient dans ce sens, mais pour ma part je n'aurais jamais imaginé la solution didactique elle-même, ni le type de mise en scène. Le titre de la recherche de J. Pérès est éloquent : «*Utilisation d'une théorie des situations en vue de l'identification des phénomènes didactiques au cours d'une activité d'apprentissage scolaire :: Construction d'un code de désignation d'objets à l'école maternelle.*». Or cette théorie des situations qui est maintenant assez connue a une dimension épistémologique marquée, par exemple lorsqu'elle distingue entre *situations d'action, situations de formulation et situations de validation.* Mais l'intérêt des recherches sur ce domaine ne s'arrête pas là puisque le problème résolu par Pérès n'a pas empêché d'autres problèmes de surgir, relatés par la thèse de Maudet (Maudet C. 1982), qui a tenté d'utiliser cette *logique désignative*

pour traiter *la conjonction logique*. Il semble que les recherches de Bordeaux aient connu ici une impasse, et qu'il ait fallu abandonner là l'exploitation de codes de désignation pour instaurer d'autres jeux sur la base d'une autre situation fondamentale, ayant trait à l'analyse d'un autre aspect épistémologique de la question. Ces travaux ont été renouvelés par la thèse d'Orus Baguena (Orus Baguena P. 1992). Comme elle présente ses recherches à ce même colloque, je vous renvoie à son exposé. Dans ce cas et à propos de cet aspect de l'enseignement élémentaire, on peut dire que les résultats expérimentaux de la recherche en didactique des mathématiques ont confirmé et dépassé ces analyses d'observations de classe. Pour la recherche, ces points sont désormais acquis. Quant aux pratiques enseignantes, elles sont encore loin de s'en inspirer.

La recherche en didactique ne se réduit pas à mieux comprendre les phénomènes d'enseignement, ni à proposer de nouveaux moyens pour enseigner telle ou telle notion, de manière inévitable, elle met en évidence et contribue à l'élaboration de nouveaux savoirs. Or fait important à noter, ceci est en rapport direct avec la dualité savoir–connaissance. Le développement intellectuel et l'apprentissage des notions élémentaires de mathématique sont irréversibles. Les mathématiciens de profession n'ont cure des savoirs qui pour eux furent des enjeux dans leur jeune âge, voire même à l'école. Il faut des conditions sociales particulières pour que l'on s'intéresse à tel ou tel objet mathématique enseigné à l'école élémentaire. Par exemple, l'informatique et l'intelligence artificielle ont relancé l'intérêt porté à la question des calculs en colonnes et des algorithmes et plus généralement des modèles d'action. Ceci n'a pas été sans influencer les chercheurs qui ont porté un autre regard sur les erreurs d'élèves, leur caractère systématique, et les oppositions *syntaxique / sémantique* ou encore *procédural / déclaratif*, etc. Ceci a eu des répercussion sur le traitement didactique des erreurs dans les situations d'enseignement. Certains chercheurs pensent que ce sont des questions marginales, pas moi. Sur cette question, je renvoie le lecteur aux nombreux textes où j'ai développé mes arguments (Conne F., Brun J & alii, 1994 et sa bibliographie). Notons à ce propos une convergence des ces recherches didactiques avec des recherches dont la visée est l'intelligence artificielle (Voir par exemple Van Lehn, 1988, mais aussi les travaux de Balacheff N. 1993). Du point de vue de la distinction connaissance/savoir justement, les erreurs sont commises à l'insu des élèves. Ce ne sont donc pas, de leur point de vue, des savoirs. Par contre ce sont des savoirs pour qui se place du côté de l'enseignant ou du didacticien. Cette distinction a été reprise par Portugais pour ses recherches portant sur la formation des enseignants (Portugais J. 1992). Concernant l'enseignement des activités numériques élémentaires d'autres savoirs ont été mis en évidence qui ne concernent pas les erreurs (Conne F. 1988).

A ce propos, nous n'avons pas encore réglé toutes les questions relatives à nos dénominations. Ainsi ce que Brousseau appelle connaissance, je l'appelle déjà savoir, du moins, je fais des distinctions plus fines que lui. Je m'en étais expliqué en partie dans mon article de RDM. Ici, je reviendrai sur aspect que je n'avais pas traité alors. Voici les définitions que donnent Brousseau et Centeno (Brousseau G. & Centeno J., 1991, p.176 note 10.):

«Les connaissances sont les moyens transmissibles (par imitation, initiation, communication, etc.) mais non nécessairement explicitables de contrôler une situation et d'y obtenir un certain résultat conformément à une attente ou une exigence sociale. La connaissance – ou la reconnaissance – n'est pas analysée mais exigée comme une performance relevant de la responsabilité de l'acteur.

Le Savoir est le produit culturel d'une institution qui a pour objet de repérer, analyser, organiser les connaissances afin de faciliter leur communication, leur usage sous forme de connaissance ou de savoirs, la production de nouveaux savoirs. Dans

certaines situations (d'action, de formulation, ou de preuve) le même résultat peut être le fruit d'une connaissance de l'acteur ou le fruit d'un savoir ou les deux : la manipulation sociale des savoirs dans les relations sociales exige des connaissances personnelles de la part de l'acteur, mais le produit de cette activité est une explicitation de certaines de ces connaissances devenues publiques puis institutionnelles. La référence culturelle et l'analyse de l'usage qui sera fait de ces connaissances les constituent en savoirs culturels.

Au niveau de l'individu l'image de cette activité sociale publique et institutionnelle peut produire un fonctionnement similaire, des connaissances (mêmes fausses) sont utilisées comme des savoirs (savoirs privés). Voir Rouchier A. 1991, Conne F. 1992.

Nous verrons plus loin que la communication d'une notion entre des institutions de type différents exige des conversions didactiques, c'est-à-dire des changements de mode d'engagement de la notion, et, par conséquent, pour cela la création de formes typiques de situations. La même notion fonctionnera comme connaissance dans une situation d'action et comme savoir dans les discours d'institutionnalisation.»

Il fallait citer ici ces définitions car ce sont elles qu'ont reprises Berthelot & Salin, Orus Baguena et Briand qui présentent chacuns leurs travaux à ce colloque (Berthelot R & Salin M-H, 1992, Orus Baguena P. 1992, Briand J., 1993). La définition de Brousseau & Centeno a la chance d'être soutenue par ces excellents auteurs. Un de leurs apports, non des moindres, est de nous proposer des méthodes permettant d'exploiter ces idées et distinctions. Je vous renvoie aux communications de ce colloque. Je me contenterai pour conclure de mentionner l'étude de Briand, et l'exemple de cette *connaissance* (au sens de la définition citée ci-dessus) qu'est *l'énumération*. Je ferais deux remarques à ce propos. Maintenant que *l'énumération* est désignée, qu'elle a fait l'objet d'un travail de thèse, qu'elle a donc place dans l'institution didactique, on peut dire qu'il s'agit d'un *savoir* pour cette institution bien sûr (elle est reconnaissable, et est utile). Le mérite de Briand et Brousseau aura été de le mettre en évidence, mais de monter aussi qu'il concerne les mathématiques et pas seulement leur enseignement élémentaire. Reste une question. J. Briand refuse d'y répondre, à juste titre, me semble-t-il. Faut-il que ces savoirs de didacticiens deviennent des objets-à-enseigner ? Cette question marque selon moi un moment important de la didactique des mathématiques, un point sur lequel on ne pourra pas revenir : les savoirs mathématiques nécessaires à bien mener un enseignement ne s'identifient plus aux seuls savoirs à enseigner. Voilà un nouvel aspect de la transposition didactique qui devrait interpeller les formateurs d'enseignants.

F. Conne
Etoy, mai 1994 & janvier 1995.

Bibliographie

Arsac G. (1992) Vérité des axiomes et théorèmes en géométrie.Vérification et démonstration. in Séminaire de didactique des Mathématiques et de l'Informatique. IREM de Grenoble, IMAG, 1992, p.1–34.

Balacheff N. (1994) Didactique et Intelligence Artificielle, Recherches en Didactique des Mathématiques, n° 14 1/2, 1994, pp.9–42, Grenoble, La Pensée Sauvage.

Berthelot R. & Salin M–H (1992) L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire., Thèse, Université de Bordeaux I, Bordeaux, 1992.

Briand J. (1993) L'énumération dans le mesurage des collections: un dysfonctionnement dans la transposition didactique., Thèse, Université de Bordeaux I, Bordeaux, 1993.

Brousseau G. (1986) Fondements et méthodes de la Didactique des Mathématiques, Recherches en Didactique des Mathématiques, n° 7–2, 1986, pp. 33–115.

Brousseau G. & Centeno J. (1991) Rôle de la mémoire didactique de l'enseignant, Recherches en Didactique des Mathématiques, n° 11 2/3, 1991, p. 167–210.

Brun J. (1975) Education mathématique et développement intellectuel., Thèse Université Lyon II, Lyon, 1975.

Brun J. (1982) A propos de la Didactique des Mathématiques, in Math.Ecole, n° 100–101, 1982, Genève, Service de la Recherche Pédagogique.

Brun J. (1994) Evolution des rapports entre la psychologie du développement cognitif et la didactique des mathématiques, in Vingt ans de Didactique des Mathématiques en France., Artigue M., Gras R., Laborde C.& Tavignot P. éds., La Pensée Sauvage, Grenoble 1994.

Brun J. & Conne F. (1990) Analyses didactiques de protocoles d'observation du déroulement de situations. Education et Recherche, n°3, 1990, pp.261–186, Editions universitaires Fribourg.

Cellerier G. (1986) Structures and functions, memo n° 3 du Genetic Artificial Intelligence and Epistemics laboratory, FPSE, université de Genève, 1986.

Chevallard Y. (1991) La transposition didactique du savoir savant au savoir enseigné. Grenoble: La Pensée sauvage (2ère éd. 1991).

Chevallard Y. (1992) Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportés par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathérnatiques,* 12 (1), 73–112.

Chevallard Y. & Mercier A. (1987) Sur la formation historique du temps didactique., Publications de l'IREM Aix Marseille, n° 8, 1987.

Conne F. (1981) La Transposition Didactique à travers l'enseignement des Mathématiques en première et deüxième année de l'école primaire. Thèse de doctorat, FPSE, Université de Genève, Suisse.

Conne F. (1987) Un canard dans les mares. *Education et Recherche, 9 (3)*, 301–328.

Conne F. (1988a) Série d'articles consacrés aux activités numériques élémentaires à l'école primaire. Math–Ecole. n° 128, 2–12; n° 130, pp 11–23; n° 132 pp 26–31; n° 133, pp 20–23; n° 135, pp 23–36. Genève: Service de la Recherche Pédagogique.

Conne F. (1988b) Didactiques. Généralités spécificités. Prépublication, Université de Montréal, 1988.

Conne F. (1989) Situations évoquées, situations jouées et structures mathématiques. *In* R. Gras, Inst. Math. de Rennes, et IRESTE de Nantes (eds), (p. 51–57). Actes de la Vème école d'été de didactique des mathématiques et de l'informatique.

Conne F. avec Brun. J. (1992) Savoir et connaissance dans la perspective de la transposition didactique. Recherches en Didactique des Mathématiques, 12 (2).
Conne F. (1993) Du sens comme enjeu à la formalisation comme stratégie : une démarche caractéristique en didactique des mathématiques, in Sens des didactiques. didactiques du sens. Ph. Jonnaert et Y. Lenoir Eds, (actes des Troisièmes rencontres internationales du REF – réseau international de recherche en éducation et formation), 1993, Editions du CRP, Faculté d'éducation, Université de Sherbrooke, Québec, p. 205–270.
Conne F. (1994) Lettre à une institutrice. Document non publié.
Conne F. & Brun J. (1990) Content and Process: the case of teaching written calculation at primary school. Actes du Symposium on Effective and Responsible Teaching, september 1990 in Fribourg Switzerland.
Conne F. & Brun J. (1991) Les débuts d'un apprentissage : où placer les routines ? In Equipe de didactique des mathématiques de la F.P.S.E. et Séminaire de psychologie de l'université de Neuchâtel (eds). Les débuts d'un apprentissage. (Journée du COED, Marseille 1990.) Cahier Interactions didactiques. 12, 53 – 88.
Conne F. & Pauli L. (1989) Invitation à une réflexion sur le rôle du langage dans l'enseignement des mathématiques. Petit "x", 1989, no 20, p. 67–83.
Conne F. et alii (1994) Erreurs systématiques et schème–algorithmes, in Vingt ans de Didactique des Mathématiques en France, Artigue M., Gras R., Laborde C.& Tavignot P. éds., La Pensée Sauvage, Grenoble 1994.
Douglas M. (1989) Ainsi Pensent les Institutions. Usher.
Fayol M. (1985) Nombre, numération, dénombrement: que sait–on de leur acquisition ?, Revue Française de Pédagogie, n° 70, pp 59–77.
Gonseth, F. (1949) La géométrie et le problème de l'espace Neuchâtel: Editions du Griffon.
Greco P. (1988) Préface de Logique et bricolage chez l'enfant. de Bideaud J., 1988, Presses Universitaires de Lille.
Houdé O. & Miéville D. (1993) Pensée logico–mathématique : nouveaux objets inter–disciplinaires., Paris, PUF, 1993.
Maudet C. (1979) Apprentissage en Mathématiques : étude critique du processus psychodynamique d'apprentissage selon Dienès., D.E.A. de didactique des mathématiques, IREM de Bordeaux, 1979, Bordeaux.
Maudet C. (1982) Les situations et les processus d'apprentissage d'une fonction logique. Thèse Université de Bordeaux I, 1982, Bordeaux.
Minsky M.(1988) La société de l'esprit. Interéditions, Paris, 1988.
Morf A. (1994) Une épistémologie pour la didactique: spéculations autour d'un aménagement conceptuel, Revue des sciences de l'Education, n° thématique: Constructivisme et Education., n° XX, vol 1, 1994, Montréal.
Orus Baguena P. (1992) Le raisonnement des élèves dans la relation didactique: effets d'une initiation à l'analyse classificatoire dans la scolarité obligatoire.; Thèse, Université de Bordeaux I, Bordeaux, 1992.
Passeron J–Cl. (1989) Les trois savoirs sur le savoir, Actes du colloque: Finalités des enseignements scientifiques. Marseille, janvier 1989, CCSTI Provence Méditerrannée, et groupe de Recherche en Didactique de la Physique de Marseille.
Pérès J. (1984) Utilisation d'une théorie des situations en vue de l'identification des phénomènes didactiques au cours d'une activité d'apprentissage scolaire: Construction d'un code de désignation d'objets à l'école maternelle. Document IREM de Bordeaux, université de Bordeaux I. France.

Pérès J. (1989) Les activités logiques à l'école maternelle, cours donné à l'université d'été de didactiques des mathématiques et de formation des maîtres, Orléans 1988, in Actes de l'université d'été. IREM de Bordeaux, Bordeaux,1989, pp. 164–179.
Perret Clermont A–N, Schubauer Leoni M–L &alii (1982). Décontextualisation, recontextualisation du savoir dans l'enseignement des mathématiques à de jeunes élèves, Cahier Interactions didactiques, n° 1, 1982, Didactique des mathématiques F.P.S.E Genève, et Séminaire de psychologie Neuchâtel.
Piaget J. (1969) Psychologie et Pédagogie, Denoël, coll *Médiations,* Paris, 1969.
Polya G. (1953) Mathematics and Plausible reasoning. Vol. I et Vol II, Princeton University Press, Princeton New Jersey, 8ème éd. 1973.
Portugais J. (1992) Didactique des mathématiques et formation des enseignants : le cas des erreurs de calcul. Thèse de doctorat, FPSE, Université de Genève, Suisse.
Quine W. V. O. (1977) Le Mot et la Chose., Paris, Flammarion, 1977.
Ricco G. (1992) Psychologie cognitive et didactique. Constitution d'une nouvelle approche théorique concernant l'appropriation des connaissances scolaires. Thèse, Université Pierre Mendès–France, Grenoble, 1992.
Rosenfield I. (1989) L'invention de la mémoire, Ed. Eshel, Paris, 1989.
Rouchier A. (1991) L'institutionnalisation des savoirs dans l'enseignement des mathématiques, in Etude de la conceptualisation dans le système didactique en mathématiques et informatique élémentaires : proportionnalité, structures itérativo–récursives, institutionnalisation. Thèse de doctorat d'état, Université d'Orléans, UFR: Sciences Fondamentales et Appliquées, Orléans 1991, pp. 26–71.
Tavignot P. (1994) Protocoles d'observation et systèmes de protocoles, in Actes des Journées didactiques de la Fouly, avril 1994, Université de Genève, à paraître.
Thom R. (1977) Stabilité structurelle et Morphogenèse., Paris, Interéditions, 1977.
Van Lehn K. (1988) Toward a theory of impasse–driven learning. In Heinz Mandl & Alan Lesgold eds., learning issues for Intelligent Tutoring systems. pp 19–41, New York, Springer Verlag, 1988.
Vergnaud G.(1994) Le rôle de l'enseignant à la lumière des concepts de schème et de champ conceptuel., in Vingt ans de Didactique des Mathématiques en France., Artigue M., Gras R., Laborde C.& Tavignot P. éds., La Pensée Sauvage, Grenoble 1994.
Wallon H. (1942) De l'acte à la pensée, Flammarion 1942, Paris.