Analyse de brouillons de calculs d'élèves confrontés à des items de division écrites

François Conne, Jean Brun

▶ **To cite this version:**

François Conne, Jean Brun. Analyse de brouillons de calculs d'élèves confrontés à des items de division écrites. Proceedings of PME XV. International group for psychology of mathematics education, Assisi, Italy, 29 juin - 4 juillet 1991, 1991. halshs-03284706

HAL Id: halshs-03284706
https://shs.hal.science/halshs-03284706

Submitted on 12 Jul 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNE ANALYSE DES BROUILLONS DE CALCUL D'ELEVES CONFRONTES A DES ITEMS DE DIVISIONS ECRITES

François Conne et Jean Brun

Faculté de Psychologie et des Sciences de l'Education
Université de Genève

ABSTRACT

This paper discusses research still in progress supported by the Swiss National Fund for Scientific Research, no 11-25448-88, entitled: L'étude des algorithmes de calculs dans la transmission et la constitution des connaissances numériques. , conducted by J. Brun, F. Conne, and R. Schubauer, of University of Geneva, and J. Retschitzki, of University of Fribourg. By this presentation, we want to present our research about the teaching of written division at primary school. In the following paper, we describe the frames of our research, and the main lines of our results. These are:
- A classification of errors observed in written division, which envolve errors of division, but also errors of subcalculations: multiplications, subtractions, and additions.
- A description of the links the pupils make, in their calculation, between division and multiplication.
- A description of the links between these errors and the teaching method of division.
- All these results are based on the analysis of the pupils draft of their calculations.
Our purpose for this PME session will be the illustration by examples and commentaries of these results.

L'objet de cette recherche concerne les relations qui existent entre les connaissances numériques des élèves et les algorithmes de calcul qui leur sont enseignés.
Par algorithme de calcul nous désignons " une suite finie de règles à appliquer dans un ordre déterminé à un nombre fini de données pour arriver avec certitude (c'est-à-dire sans indétermination ou ambiguité) en un nombre fini d'étapes, à un certain résultat et cela indépendamment des données. " (Conne 1988).
Par connaissances numériques de l'élève, nous signifions l'ensemble de ses connaissances conceptuelles et procédurales lui permettant de faire les mises en relations nécessaires à l'exécution de différentes tâches en situations d'enseignement ou non. L'élève se construit sur une longue durée ces connaissances, à l'école et hors de l'école; celles-ci peuvent être classées en dénombrements, comptages , calculs symboliques et calculs sur un diagramme, ... (Conne 1988).
Dans l'algorithme d'une opération écrite nous retenons deux ordres de significations :

- l'un , numérique, qui renvoie aux opérations et relations élémentaires
- l'autre, numéral, qui renvoie aux règles de l'écriture des nombres et à la disposition des calculs, ainsi qu'à la configuration des écritures des nombres.

L'opération écrite de division est le support de cette étude des relations entre connaissances numériques/numérales de l'élève et algorithmes de calcul . Les principales caractéristiques de cette opération de division sont les suivantes :
- la part "évaluative " du calcul
- la possibilité d'un reste ; tout n'est pas résolu avec les "tables"
- le sens (direction) dans lequel on traite le nombre écrit : de gauche à droite au lieu de droite à gauche pour les autres opérations déjà apprises. Les opérations intermédiaires de soustraction requièrent que l'on coordonne les deux sens.
- l'enchainement de sous-algorithmes : ceux de la multiplication et de la soustraction.
- la division "exacte" demande une ouverture vers le dépassement des nombres entiers et des quantités discrètes.

Une analyse didactique de cette question demande trois catégories d'études:
1. l'étude des manuels
2. l'étude des erreurs des élèves
3. l'étude des conceptions des enseignants sur les erreurs des élèves dans les calculs écrits

Notre exposé sera consacré principalement à l'étude des erreurs d'élèves de cinquième et sixième année de la scolarité élémentaire . Les erreurs dont il sera question ont été recueillies au moyen d'épreuves collectives papier-crayon y compris les brouillons que les élèves ont utilisés pour produire leurs résultats. Ce sont ces brouillons qui sont pris en considération à différents niveaux d'analyses des procédures des élèves.
Ces niveaux d'analyse sont respectivement la description, la classification , l'interprétation et l'explication des erreurs observées.

Pour comprendre les erreurs des élèves il est indispensable de faire intervenir d'abord l'examen des manuels scolaires . Les manuels actuellement en vigueur dans les écoles de Suisse romande présentent , en résumé, les caractéristiques suivantes:
- le sujet traité n'est pas seulement le calcul écrit de l'opération de division, mais la division elle-même; plus exactement la construction de l'algorithme est une occasion de traiter des notions générales comme :
- les évaluations par approximation des résultats du calcul
- la proportionnalité

- les nombres décimaux

La progression de l'apprentissage conçue par les manuels (depuis la quatrième année jusqu'à la sixième année incluse) passe par les étapes suivantes de l'enseignement :
- introduction du "sens" (signification) par une situation de partage : distribution d'unités discrètes.
- introduction des relations multiplicatives par des situations d'échanges, afin de donner du sens à la "sous-opération" de multiplication.
- étude de la proportionnalité des termes de la division .
- utilisation des propriétés de la division pour le calcul mental.

Les manuels ont été récemment révisés; il est significatif de noter qu'avec l'expérience dans les classes, l'objectif initial qui consistait à faire évoluer chaque élève d'une forme de calcul (soustractions successives) à une autre plus élaborée (dite forme économique parce que plus concise) est présenté de façon moins définitive : une plus grande souplesse est recommandée. C'est reconnaitre qu'une progression didactique ne correspond pas à une hiérarchie de complexité d'apprentissages. Comparons par exemple la forme de division la plus élaborée , dite "économique", à la forme plus élémentaire dite "par soustractions successives". Dans la forme élaborée, il est plus simple de former le quotient par la détermination successive des chiffres qui composent son écriture que de le former par le comptage, une à une , du nombre de fois que le diviseur a pu être soustrait du dividende. Par contre , il est plus complexe de décomposer le dividende en une suite de " dividendes partiels " pris successivement en considération selon des règles précises que de considérer le dividende puis la suite des restes que l'on obtient au fur et à mesure des soustractions. Il n'y a pas une hiérarchie de complexité claire entre ces différentes formes présentées dans les manuels.

L'examen des travaux des élèves montre surtout l'apparition de formes nouvelles, non décrites dans les manuels mais produites par les élèves. Les plus remarquées sont des formes de division erronées. Ce sont en général des formes hybrides, comme le montreront les exemples; hybrides au sens où elles sont entre les deux formes présentées ("par soustractions successives" et " économiques") en retenant et combinant des éléments et de l'une et de l'autre.
On peut considérer ces formes hybrides comme des formes transitoires, témoignant d'élèves en train d'apprendre et de "faire leurs propres expériences" en matière de calculs de division. La question est alors de se demander comment on peut les faire évoluer vers des formes plus cohérentes. Choisir un ordre de succession entre

les deux formes qui se sont malencontreusement mélangées ce serait insister sur la stabilité de ces formes de calcul plutôt que sur leur évolution. La question est de savoir comment l'élève pourra se lancer dans des calculs plus sophistiqués.
Que pouvons-nous affirmer sur la façon dont les élèves évoluent dans leurs calculs ? Peu de choses encore, et dans ce peu de choses , des indications contradictoires nous montrent que pour une part ils évoluent peu, lentement, et résistent longtemps devant l'adoption de nouvelles procédures , que pour une autre part ils évoluent de façon relativement autonome et font preuve de faculté d'adaptation comme en témoignent les formes hybrides que nous venons de citer en exemple.
Il est intéressant de se poser deux questions à propos de ces formes : comment sont-elles venues à l'esprit des élèves? et comment ces élèves pourraient-ils se corriger de manière spontanée. Le qualificatif "spontané" est important ici car il lie les deux questions posées à l'instant : trouver une réponse à la seconde question fait que l'enseignant n'aura pas à se préoccuper d'interdire à ses élèves d'essayer leurs "trucs" de calculs; mais "de manière spontanée" n'exclue pas l'enseignant, cela va de soi.
Les manuels actuels proposent une réponse à la deuxième question : il s'agit pour le maître de demander à l'élève d'expliquer et de justifier son calcul, voire même la disposition qu'il a adoptée. Le raisonnement sous-jacent est que la simple demande d'explication de la part de l'enseignant devrait amener l'élève à changer sa façon de faire. En fait , il n'est pas toujours possible à un élève (ni à quiconque d'ailleurs) de justifier et d'expliquer comment il a trouvé une réponse, quand bien même cette réponse serait correcte, avec conscience de son bien-fondé. D'autre part cette exigence faite à l'élève de ne fournir de réponse que justifiable et explicable pourrait être plus paralysante que stimulante. Imaginons que nous ayons demandé à un élève produisant un de ces hybrides de s'expliquer et qu'il n'aie pas pu le faire. Il sera alors bien convaincu qu'il faut faire autrement, mais il lui restera à savoir que faire d'autre, comment faire autrement et comment s'assurer que ce changement va effectivement corriger son erreur. Notre expérience nous montre que les élèves préfèrent le plus souvent chercher à glaner des indications chez le maître plutot que se risquer à nouveau.

Une autre étape nécessaire à la compréhension des erreurs des élèves consiste à classer les erreurs observées sur les différentes épreuves.

Description des épreuves
Nous avons soumis à 6 classes de Cinquième et Sixième années une épreuve écrite en quatre parties.

Les deux premières concernaient le calcul écrit lui-même et ont permis d'entreprendre une première classification des erreurs.
Les résultats de la première épreuve de cacul ont permis de construire la typologie suivante :

1. Erreurs en rapport avec le contrôle des relations Dividende / Diviseur / Quotient / Reste, à chaque étape de l'algorithme.

Si l'on considère l'ordre dans lequel l'élève traite chaque étape, on peut répertorier les erreurs suivantes:

1.1 Traitement du dividende
a. Choix d'un Dividende plus grand ou égal à dix fois le diviseur
implique
Quotient plus grand que 9 ; d'où :
- inscription d'un nombre à deux chiffres au quotient
- inscription de 9 au quotient

b.Dividende plus petit que le diviseur:
implique 0 au Quotient
erreurs : - saut à la colonne suivante sans 0 au Quotient
- inscription de 1 au Quotient

1.2 Traitement du Quotient
a. Choix d'un Quotient inférieur
implique un Reste plus grand que le Diviseur; d'où - division du reste avec un deuxième chiffre au quotient pour un même Dividende
- reprise du cycle de la division avec
+ un nombre à deux chiffres au quotient
+ une suite de 9 au quotient

1.3 Traitement du Diviseur

- le diviseur est découpé en une suite de chiffres non-emboîtés

1.4 Traitement du Reste

a. Reste final plus grand ou égal au Diviseur
b. Reste final divisé bien que plus petit que diviseur, d'où un 0 supplémentaire au Quotient

2. Erreurs en rapport avec les opérations intermédiaires

2.1 Erreurs de soustraction

- impliquent des dividendes erronés , d'où voir 1.1
- impliquent un reste inexact

2.2 Erreurs de multiplication

a. recherche du produit par additions successives :
- erreur sur le nombre d'additions.
- erreur d'addition

b. livret

3. Erreurs en rapport avec le placement des chiffres dans le diagramme de la division.

3.1 Placement du dividende
- n'abaisse pas le chiffre de la colonne ; d'où
- arrêt
- 0 au quotient
- abaisse un 0

3.2 Inversions

- le reste est écrit à l'emplacement du quotient
- le produit est écrit à l'emplacement du quotient
- le dividende est découpé en allant de droite à gauche

La troisième partie des épreuves écrites consistait à compléter trois divisions :
9072 : ... = ...
... : 38 = ...
... : ... = 95
Nous avons constaté de fréquentes erreurs à ces items où l'élève reconstitue un dividende par une sorte de multiplication chiffre à chiffre qui a un rapport évident avec la procédure de division.
Ce qui importe comme observation c'est qu'ils essayent de résoudre le problème dans le cadre de la division, comme l'indique la forme de la donnée.

La quatrième partie consistait en quatre énoncés :
a. Dans 552 il va 3 fois 24, c'est sûr . Mais on peut y mettre encore beaucoup de fois 24. En tout combien de fois peut-on mettre 24 sans 552 ?
b. De 728 j'ai enlevé 8 fois 26 et il me reste 520. Combien de fois faut-il additionner 26 pour avoir 728 ?
c. De 800 j'ai enlevé 2 fois 320 et il me reste 5 fois 32. Puis j'ai divisé 800 par 32 et j'ai trouvé 15. Ai-je fait juste ?

d. Dans 86 il va 3 fois 27. Et dans 864 ?
Le résultat de cette passation est que les élèves ne recourent vraiment à un calcul de division que dans l'exercice c. La mention de la division est présente dans l'énoncé.
En général les élèves refont tous les calculs mentionnés :
800 - 640 = 160
5 . 32 = 160
800 : 32 = 25
Très peu songent à faire la vérification de la division 800 : 32 = 15 comme ils l'ont appris, c'est-à-dire par le produit 32 . 15 = ...

En ce qui concerne les autres énoncés ils sont majoritairement traités comme des problèmes de multiplication et donnent lieu à des calculs répétés (par tâtonement) de multiples, comme si le mot "fois" était l'indice de leur résolution.
Ces élèves viennent d'apprendre , ou de répéter, la division; ils n'ont pas de peine à calculer, mais ils ne l'emploient pas dans des énoncés qui reprennent pourtant les termes consacrés du calcul. Ils font même au contraire appel à un autre calcul, celui de la multiplication, qu'ils réitèrent beaucoup de fois. Mais quand il faudrait penser à employer la multiplication (... : .... = 95) ils ne semblent pas l'envisager ."
Ces premiers résultats nous ont amenés à construire un second jeu d'épreuves auprès d'élèves de même niveau mais d'un autre établissement scolaire. Les tâches proposées visaient à mieux comprendre les relations que les élèves font entre multiplication et division. Nous avons alors constaté combien ces rapports sont centraux dans les tâches que nous avons proposées et combien ils permettent de lier les résultats des épreuves les uns aux autres. En particulier les informations obtenues à la seconde épreuve nous ont aidés dans l'interprétation des erreurs observées, lors de la première épreuve, dans les tâches d'effectuation de calcul mêmes. Nous espérons éclairer ce point particulièrement important lors de notre présentation.

Références

Brousseau G. Représentations et didactique du sens de la division. In Didactique et Acquisition des connaissances scientifiques. Actes du Colloque de Sèvres. Mai 1987. 47-64. La Pensée sauvage 1988
Chastellain M. , Jacquet F. , Michlig Y. Mathématique , Cinquième année. Méthodologie- Commentaires . Genève, OREMS, 1985
Condorcet Moyens d'apprendre à compter sûrement et avec facilité. Paris , ACL éditions , 1989

Conne F. Comptage et écriture des égalités lacunaires dans les premières classes de l'enseignement primaire. Math-Ecole , 128 , 1987 a

Conne F. Entre comptage et calcul. Math -Ecole, 130, 1987 b

Conne F. Numérisation de la suite des nombres et faits numériques. Math-Ecole , 132, 1988 a

Conne F. Calculs numériques. Math-Ecole, 135 , 1988 b

Conne F. , Brun J. Content and process : the case of teaching written calculation at primary school. Communication au Colloque "Effective and responsible teaching" Fribourg 1990

Vergnaud G. Concepts et schèmes dans une théorie opératoire de la représentation. Psychologie Française, 30-3/4, 1985