



HAL
open science

Faire des maths, faire faire des maths, regarder ce que ça donne

François Conne

► **To cite this version:**

François Conne. Faire des maths, faire faire des maths, regarder ce que ça donne. Gisèle Lemoyne et François Conne (dir.). Le cognitif en didactique des mathématiques, Presses Université de Montréal, pp.31-69, 1999. halshs-03365032

HAL Id: halshs-03365032

<https://shs.hal.science/halshs-03365032>

Submitted on 5 Oct 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

FAIRE DES MATHS, FAIRE FAIRE DES MATHS, REGARDER CE QUE ÇA DONNE. ¹

F. Conne, IFRES et UniL, REF, Montréal 25-28 septembre 96.

I. Faire des mathématiques

Faire des mathématiques : créer et animer des objets de pensée (2^{ème} version)

Je place ici quelques balises. Le terme premier sera "chose". Parler d'objets, c'est déjà situer certaines choses par rapport à un sujet, à son activité propre. Considérons dans la réalité des choses et des individus. Ces derniers agissent. La réalité, ni les choses qui la constituent ne sont statiques. L'action elle-même est une chose. L'action se produit, elle porte sur quelque chose (ce peut être l'individu lui-même), elle produit ou transforme quelque chose. Là-dessus viendront se greffer d'autres actions. Les actions se succèdent, se coordonnent, quelques-uns de leurs montages se reconduisent, se modifient. Les unités organisatrices d'actions sont les schèmes. L'action aux prises avec ses choses les constitue en objets, objets de l'action du sujet sur ces choses. Certains objets acquerront un caractère de permanence. S'il avait utilisé les termes de Chevallard, Piaget aurait pu sans doutes écrire: « Le schème réunit et fait vivre ensemble objet et sujet au sein de l'activité.»

(Dans son article: Les outils sémiotiques du travail mathématique. (Petit'x n°42 1995), Chevallard a en fait écrit (p.50). « Ces rapports naissent, précisément, de la pratique qui réunit et fait vivre ensemble objet et sujet, au sein du système de travail considéré.» Chevallard et Piaget disent-ils la même chose? La référence à un même schéma le laisserait entendre. Mais ce n'est sans doute là qu'un emprunt par Chevallard à Piaget d'une image utile à son exposé.)

Les objets se différencient ou au contraire s'amalgament en objets de plus en plus élaborés. Pour différents sujets (ou pour un même sujet pris en différents moments de son histoire), une même chose ne constituera pas forcément le même objet. Le sujet vit à l'heure de ses objets. Si l'on parle d'objet sans spécifier le sujet ou l'action, ce n'est pas pour dire la chose, mais au contraire parce que l'on se sera permis de faire abstraction de l'un et/ou de l'autre de ces termes (sujet, action). Le sujet agit sur des choses, mais s'il **inter-agit**, cela ne peut être qu'avec des objets (constitués par les actions en jeu). La pensée est interaction, et je parlerai donc d'objet de pensée.

Si l'action constitue les choses en objets, au-delà et dans un mouvement inversé, ces objets peuvent être attribués (liés) à d'autres choses. Les actions en tant que choses peuvent être soit intériorisées soit enfermées (capturées) dans d'autres choses, qui en seront les signes. Toute chose est susceptible d'être signe, même un geste relatif à un montage d'actions.

¹ Ce texte développe une idée qui m'est venue dans un cours donné à l'université de Montréal, en janvier/février 1989, et dans le courant de la même année (mai ou juin 1989), j'en avais fait l'objet d'une communication au congrès de Ste Catherine (Ontario). Mais ce sont mes travaux de formateur et de chercheur dans le cadre de l'enseignement spécialisé à Lausanne qui m'ont permis de l'étayer à ce point. C'est dire que tout ce qui est écrit ici est directement inspiré du travail de terrain au contact des élèves et des enseignants. Enfin signalons que le texte que J.-M. Favre présente à ce symposium, intitulé: Le mathématique et le cognitif: deux chimères pour l'enseignant ? en est le pendant. En effet, nous avons dès l'origine projeté de les rédiger en parallèle, l'un faisant écho à l'autre.

Je ne veux pas entrer dans des considérations d'ordre sémiologique, le lecteur pourra se référer à des articles spécialisés. Je ne retiendrai ici que ceci. La chosification (et la symbolisation) des objets établit un découplage entre actions et objets. *Ce n'est pas un processus d'abstraction*. En effet de nouvelles actions peuvent alors porter sur des objets chosifiés (symbolisés) sans que pour autant elles se coordonnent, s'articulent ou s'emboîtent aux actions constitutives de ces objets.

En particulier, des objets de pensée peuvent devenir des choses qui seront à leur tour enrôlées dans de nouvelles actions, voire de nouvelles pensées. *Telles sont les choses auxquelles se réfèrent les mathématiques*. Ces choses ne se manifestent qu'au détour des actions et pensées d'un sujet (que l'on aura peut-être abstrait) et de la prise qu'il a sur elles. Les objets mathématiques sont de telles choses (des objets chosifiés ou symbolisés) constitués en objets par (la part de) la pensée (propre aux mathématiques).

Si au terme de ce premier processus d'objectivation / chosification, l'univers mathématique peut être conçu comme indépendant des sujets qui le pensent, c'est, je le répète, parce que l'on aura fait abstraction de ces derniers. Par contre la manifestation de cet univers, en tant que manifestation d'objets de pensée chosifiés, reste indissociable de l'activité d'un sujet à même de penser cet univers. Pour l'instant, poursuivons quelques considérations sans confondre les choses avec les objets, ni les deux niveaux (au moins) qui fondent le mathématique. On peut alors comprendre pourquoi, en mathématiques, la question des sujets et de l'action est sensible, en faire abstraction ne devrait pas se faire au prix d'une confusion entre choses et objets.

Pratiquer les mathématiques est très exigeant pour le sujet. Il doit en effet engager sa propre pensée dans la constitution des objets qui, chosifiés, seront les choses de son univers mathématique (susceptible d'élaboration constante). C'est à lui donc qu'il incombera d'entretenir les choses qui feront l'objet de ses investigations et de ses expériences. Il porte son laboratoire en lui. En mathématiques, non seulement chacun entretient ses propres *cobayes*, mais encore il les anime. Dans les expérimentations des naturalistes, le chercheur se contente de la mise en scène ; par contre en mathématiques, l'expérience est entièrement le fait du sujet. On ne peut pas pour autant prendre le mathématicien pour son propre cobaye. Le sujet, bien qu'étant effectivement l'agent ultime de son expérimentation, s'est abstrait et se situe en quelque sorte en retrait. Ce sont les marionnettes dont il tire les ficelles, ou plutôt les personnages qu'elles incarnent qui sont ses animaux de laboratoire.

Faire des mathématiques : pratiques mathématiciennes (2^{ème} version).

Par réglages réciproques de nos actions sur celles d'autrui, nous en venons à partager nos objets. On dit communément que nous interagissons. Pourtant, il ne nous est pas donné d'entrer dans les actions d'autrui. En première acceptation, je désignerai les jeux de prises communes sur les choses et de partage des objets par le terme de *pratiques*. Alors quiconque est dès sa naissance entré de plain-pied dans un univers de pratiques. Pour un individu, la seule condition à cette entrée est que les choses impliquées dans ces pratiques soient accessibles à ses actions (en l'état de leur développement). L'action s'infiltré en effet partout dans le réel, sur toutes les choses existantes (pour l'individu).

La collaboration entre mathématiciens n'est que la synchronisation de telles pratiques. Tout objet de pensée, chosifié puis repensé, n'est pas pour autant un objet mathématique et encore moins un objet reconnu comme tel en référence aux pratiques mathématiciennes. Parce que les objets mathématiques se constituent par l'emprise d'un sujet sur des objets de pensée chosifiées (symbolisés), parce que cela se situe sur un niveau second où la pensée porte sur quelque chose d'elle-même, les mathématiciens, dans leurs pratiques, accordent une importance primordiale à la façon de conduire leurs pensées. Comme les individus n'entrent pas dans les

actions des autres, ce sont leurs pratiques qui viendront contrôler les montages d'actions qui se nouent au gré des circonstances. Les pratiques sont mobilisatrices d'actions, elles les filtrent, les dirigent et les sélectionnent. La nature secondarisée des objets mathématiques fait que les critères pratiques que les mathématiciens se donnent sont cruciaux. En ce sens, je dirais que, plus que bien d'autres choses, l'univers mathématique est *chose pratique*.

Il faudrait le plus possible éviter de confondre ces deux facettes: l'activité mathématique et la pratique mathématicienne. Certes, la seconde suppose la première, mais c'est par celle-là que nous avons accès à celle-ci : à ce titre toute pratique est indice d'activité. Par ailleurs, une grande part de l'activité de pensée du sujet mathématicien ne se situe pas au niveau de ses pratiques, mais y est sous-jacente. Qu'on puisse en faire abstraction ne veut pas dire qu'elle ne soit pas partie prenante : on n'abstrait pas ce que l'on pourrait simplement écarter. Je ne dis pas que les mathématiques se réduiraient aux activités de pensées sous-jacentes. Enfin, ne confondons pas non plus l'activité avec un geste mathématique, ce dernier est une forme que prend l'activité pour le praticien, un acte mathématique, en tous les cas une sorte de chose.

En définitive, *faire des mathématiques*, c'est-à-dire fournir aux activités et pratiques mathématiciennes des objets de pensée chosifiés (symbolisés), est une condition première. Il incombe au sujet et à lui seul de constituer sa réalité mathématique, et pour cela il ne peut que commencer par agir. Le premier enjeu de l'enseignement des mathématiques est là, c'est ce que l'école doit obtenir de la part de ses sujets. Il incombe alors aux enseignants de faire faire des mathématiques aux élèves en les enrôlant dans des pratiques mathématiciennes.

L'interaction sujet / objet comme modèle de la pensée en acte.

Je vais examiner dans ce texte l'articulation qui s'établit entre "l'activité, le faire des mathématiques", l'activité enseignante et les pratiques mathématiciennes. J'adopterai ici le point de vue de l'échange didactique, c'est-à-dire celui du couple élève / enseignant. De manière très classique, je m'appuierai sur un modèle d'interaction sujet / objet. Voici comment ce qui vient d'être évoqué s'exprime dans ce modèle.

Au coeur de ces pratiques s'inscrivent donc des interactions de sujets avec des éléments du milieu objectif (matériel et/ou symbolique). Je considère que ce sont ces interactions qui sont constitutives des objets mathématiques. On peut même dire que pour chaque individu, les objets mathématiques qu'il pense sont issus des interactions entretenues avec les objets matériels et symboliques des milieux qu'il traverse. Sur le plan des activités, c'est-à-dire de la connaissance, nous nous retrouvons tous les mêmes mais aussi inévitablement autres.

Le rapport aux objets mathématiques (rapport au savoir cf. Y. Chevallard) sera alors l'interaction avec les objets mathématiques eux-mêmes. Il se situe à proprement parler sur un plan culturel (social et institutionnel). Selon les situations considérées, on distinguera différents niveaux d'interactions mettant en jeu des mathématiques plus ou moins élaborées (des objets plus ou moins nombreux, différenciés, élaborés). Sur le plan des pratiques, les savoirs sont nos repères pour tout à la fois nous reconnaître et nous distinguer.

De telles interactions sont au centre de toute situation où il est question de mathématiques et a fortiori de toute situation didactique ou d'enseignement. Dans ces derniers cas, il est important de noter que les interactions des différents acteurs avec le milieu de la situation ne sont pas identiques ni substituables les unes aux autres. Pourtant tous les échanges sont fortement marqués par les interactions que chacun entretient avec le milieu, et l'une des premières fonctions que ces échanges assurent est d'obtenir une certaine synchronisation des pensées. Cela est rendu nécessaire parce que la vitesse et les niveaux d'interactions varient d'un sujet à l'autre. En cela, le

maître et l'élève se distinguent nettement, et on doit partir de l'idée qu'ils ne traitent pas exactement des mêmes mathématiques. Les jeux que laissent ces différences d'objets sont régulés par l'intermédiaire d'interprétations subjectives des traces et indices laissées par les sujets dans leur interaction avec le milieu : traces écrites, expressions verbales, etc. Les acteurs s'accordent ou ne s'accordent pas sur la production de ces traces et indices dans la mesure où ils sont compatibles avec leurs pensées respectives. Ces diverses interprétations occasionnent donc à leur tour de nouveaux jeux, ceux-là mêmes qui font l'objet de l'étude du contrat didactique et des mécanismes intimes de la transposition didactique à l'œuvre en classe.

Les interactions (d'abord sujet-milieu puis sujets-sujets) dont il est ici question ne sont pas statiques ni même en équilibre, mais bel et bien évolutives. Elles produisent quelque chose, transforment les situations, les enrichissent d'informations, d'indices, les organisent, les élargissent, etc. L'étude mathématique et les phénomènes mathématiques dont nous nous étonnons, que nous cherchons à établir, comprendre, expliquer, démontrer etc. puise tous ses matériaux dans ces interactions. Réfléchir à une formule aussi succincte que $x^n + y^n = z^n$, est une interaction, qui, comme on le sait, est susceptible de développements vastes, importants et inattendus (sa dynamique est celle des pensées que nous sommes amenés à échafauder autour de cet objet et qui nous mène par exemple à nous étonner de ce que s'il existe des solutions entières pour l'exposant 2, il ne semble pas en exister pour d'autres exposants, etc.).

Voici maintenant une remarque importante. Dans ce qui va suivre, j'emploierai l'expression "activité mathématique" pour désigner ces interactions de premier niveau. J'ai renoncé aux expressions "activité logico-mathématique" voire "activité de pensée" parce que mon propos est didactique plus que psychologique. Les interactions auxquelles je me réfère portent en elles la marque de l'intention d'enseigner, en particulier elles s'établissent entre un sujet-élève et des objets et milieux qui se rapportent aux pratiques mathématiciennes auxquelles on veut lui donner accès. Dès lors que ces interactions ne trouvent pas leur source dans la spontanéité d'un sujet psychologique - fût-il épistémique - mais qu'elles se placent dans le cadre d'un apprentissage provoqué des mathématiques, je me permettrai de les affubler du vocable "mathématique". Qu'il soit clair que pour moi, dans ce texte, l'activité mathématique ne porte pas sur des objets mathématiques, mais que ces derniers sont constitués par elle, ils se situent donc en aval de celle-ci. Qu'il soit aussi bien entendu que le vocable mathématique ne préjuge rien sur l'adéquation ou la conformité des pratiques mathématiciennes scolaires avec les pratiques mathématiciennes promues. Il revient au concept de rapport au savoir d'examiner ce genre de questions. Le lecteur est donc prié de considérer dès maintenant que les expressions "activité mathématique" et "interaction d'un sujet avec un milieu propice aux pratiques mathématiciennes" seront prises comme synonymes.

Faire et refaire: apprendre, savoir, enseigner.

Du point de vue cognitif, un sujet est constamment actif. Bien entendu, l'activité elle-même est diverse et porte sur de multiples niveaux distincts. La suivre nous ferait sans cesse "sauter du coq à l'âne". Ici, on parlera d'activation ou de ré-activation de schèmes, et ces deux termes seront même équivalents puisqu'il faut tenir un point de vue supérieur pour être à même de mettre ainsi en relation les activités qui se succèdent. Ce flux d'actions se situe dans un contexte lui-même changeant, et c'est sur ce fond que l'observateur peut repérer des reprises, des répétitions, des boucles, des invariances, bref une organisation. Dès lors l'activité apparaît comme se répétant, ou plutôt se déclenchant à de multiples reprises sans toutefois qu'elle se répète de la même manière exactement, car ni les circonstances, ni les contextes, ni même les constellations de schèmes co-activés ne se retrouvent exactement les mêmes. En fait, l'organisation de l'activité se manifeste à un observateur sous la forme de ses réorganisations qui accompagnent peu ou prou

toute reprise d'actions. A plus long terme nous la voyons donc susceptible d'évolution et de transformation, et nous pouvons alors parler d'apprentissage.

Jusqu'à ce point je m'étais contenté de distinguer deux niveaux, celui de l'activité, celui des pratiques. J'arrive maintenant à y croiser une distinction entre un point de vue "interne" au sujet (qui épouse la perspective du sujet) d'une part et un point de vue "externe" d'autre part. Ainsi dans la suite de mes propos, le terme "activité" se rapportera au point de vue interne, alors que le terme "faire" exprimera le point de vue externe. Il faudrait sans doute encore attribuer une place à la question de la conscience que le sujet a de ses actes. En effet la conscience est ce qui permet au sujet de considérer une part de son "activité" comme un "faire". Mais je vais essayer de me contenter de cette seule remarque à ce propos.

Je puis alors traduire et prolonger ce qui vient d'être dit en quelques propositions simples. Nous partons d'un point de vue qui considère l'action comme une organisation. Aux yeux d'un observateur externe, celle-ci se manifeste comme organisation du « faire » du sujet observé. Il faut en effet une référence externe pour distinguer dans l'activité des reprises, des réactivations, des organisations (stables ou non). En ce sens, on pourra relever que dans ses activités, le sujet est souvent en train de faire et refaire les "mêmes" choses. On notera donc que l'apprentissage s'accompagne de répétitions multiples et fréquentes. Disons alors qu'**apprendre c'est faire et refaire**. Que l'on m'entende bien, refaire veut dire ici "refaire aussitôt", soit que la première action ait avorté, soit que le sujet n'arrive pas à assurer que son action aboutisse à chaque coup au même résultat. L'enjeu de l'apprentissage réside pour une bonne part dans le contrôle de l'activité en cours. L'aboutissement de ce processus, **le savoir-faire**, est alors un contrôle suffisant de l'action qui **dispense le sujet d'avoir à se reprendre** (savoir-faire c'est en effet être quitte d'avoir à refaire aussitôt l'action, de tout refaire, de toujours devoir refaire, etc.). Concrètement cela apporte une économie dans l'activité, son organisation (ses ramifications, ses boucles, etc.). Le savoir lorsqu'il est réfléchi permet de distinguer dans l'activité le degré de reprises nécessaires et de définir des paliers dans l'apprentissage. Enfin comme le savoir assure une certaine univocité au "faire", il peut être mis en correspondance à un objet.

Du point de vue de "l'activité", ce qui dispense de "refaire" peut être un changement effectif, le sujet a construit d'autres voies d'action, mais cela peut aussi bien être une routinisation, un automatisme. Si l'on me permet cette métaphore, le savoir est un "faire qui part au quart de tour". Le savoir confère au sujet une autre conscience ("perception") de son activité propre. Le savoir permet des raccourcis. Par conséquent, il ne peut donner au sujet une claire vision de son apprentissage, ni lui indiquer "comment il a pu en arriver là". Tout au plus, ce sujet gardera-t-il le souvenir des multiples tentatives qu'il devait opérer et de l'incertitude dans lesquelles elles le laissaient. Le savoir n'est donc pas savoir ni même connaissance de ce dont il dispense. Le terme "dispenser" est à prendre dans ses deux sens : "lever une obligation" et "fournir". Ainsi donc, en amont, le savoir oblitère ce qui le précède tandis qu'en aval, il garantit au sujet de disposer des connaissances requises au moment où la nécessité s'en fera sentir. Le savoir allège le sujet dans sa vigilance, dans le sens où il n'a plus besoin d'exercer un contrôle volontaire sur les acquis en question. Le savoir allège la tâche de prévision et ceci à la fois rend possible l'enseignement et accroît la difficulté qu'il y a à contrôler les actes mis en œuvre dans ce processus. Ces deux aspects complémentaires se résument bien dans la proposition suivante : **le savoir ne dit pas grand-chose sur ce que c'est qu'ignorer**. Ce point a une importance cruciale pour l'enseignement qui justement lie savoir et ignorance. Car si l'enseignant est tenu de savoir ce qu'il enseigne et si savoir équivaut à ne pas (tout) avoir (toujours) à refaire, c'est à dire ne pas en être réduit à se reprendre sans cesse, alors **l'enseignant se distingue par le fait que, sans y être lui-même obligé, il va être tenu à refaire une part de ce dont le savoir le dispenserait**. Il est légitime alors de considérer que l'enseignant entretient un rapport particulier à l'ignorance.

Disons tout de suite qu'il n'est pas toujours possible d'établir un tel rapport, et qu'il faudra même souvent mettre au point des médiateurs didactiques pour y parvenir, c'est-à-dire s'appuyer sur des dispositifs symboliques, règles d'action formelles, modèles ou situations idoines (établissant une analogie entre les activités respectives de l'enseignant et de l'élève) à même de réactiver (consciemment ou non) chez le sujet enseignant les niveaux oblitérés par ses savoirs. L'enseignement ne peut se tenir que dans les limites de ce qui pourra ainsi être "récupéré". Ainsi, les moyens d'enseignement sont des moyens pour enseigner avant d'être des moyens pour apprendre. Je reviendrai là-dessus. Une autre question essentielle consiste à se demander jusqu'à quel point l'enseignant devra "refaire", c'est-à-dire devra accompagner (si ce n'est suppléer) l'activité de l'élève. Cette question en est bien une puisque bien entendu nombre d'apprentissages ne sont tributaires d'aucun enseignement. D'ailleurs, l'enseignement lui-même tire tout son parti de cette circonstance en organisant en son sein des segments d'apprentissages "spontanés". Comme André Rouchier se plaît à répéter : « Encore heureux qu'en chaque élève sommeille un autodidacte ! »

Considérons donc, comme je viens de l'exposer, les termes "apprendre", "savoir" et "enseigner" à la lumière des termes "faire et refaire", considérons d'autre part comme unité de l'acte d'enseignement le couple "enseignant - enseigné". Que nous livre l'observation de **l'activité de ce "sujet didactique"** si ce n'est qu'il est amené à "faire et refaire", c'est-à-dire qu'il est engagé lui-même dans un processus qui présente les caractéristiques d'un apprentissage. Je retrouve ici l'ambiguïté de la langue française pour le terme "apprendre" qui signifie tantôt "apprendre quelque chose" et "apprendre à quelqu'un". On pourra aussi considérer le processus d'enseignement comme un processus dans lequel le savoir du sujet enseignant sera amené à se transformer en savoir du sujet "enseignant - enseigné" et que l'enseigné apprendra alors un dérivé de cette transformation.

Enfin et pour conclure, je dirais que la pratique s'organise autour des savoirs, c'est bien au regard de la pratique et dans l'activité que le savoir établit économie et distinction.

Faire faire des mathématiques.

** Faire faire ne peut être que faire faire en refaisant.*

** Faire faire des mathématiques n'est pas encore installer des pratiques mathématiciennes (on ne peut faire pratiquer des mathématiques), mais cela permet de créer des expériences de pensée.*

** Pour provoquer la rencontre d'un sujet avec un objet mathématique, il suffit d'installer une interaction entre ce sujet et un dispositif matériel (ou symbolique) idoine. A ce niveau très élémentaire, il n'est pas nécessaire que le sujet reconnaisse l'objet rencontré.*

** Installer une interaction entre un sujet et un dispositif matériel afin d'y provoquer certains "événements" est un moyen très usité pour enseigner les mathématiques. G. Brousseau propose de modéliser cela par la théorie des jeux, les interactions des joueurs avec le milieu et leurs échanges étant rapportés à un jeu, les stratégies étant alors rapportées aux connaissances engagées. (L'issue du jeu et la stratégie développée étant alors l'indice du savoir à enseigner.)*

** Je ne puis enseigner sans interagir avec le milieu, je fais partie de la situation, je ne puis pas non plus identifier mon interaction à celle de l'élève.*

** Il n'y a pas d'objet à l'image de notre interaction. Les objets sont indices, traces de notre pensée. Par contre on peut attribuer (projeter) nos pensées aux objets avec lesquels elle interagit. Il n'existe pas d'image des objets mathématiques.*

** L'interaction avec des objets (emblématiques des objets) mathématiques est un moyen d'une pratique mathématicienne, mais cela n'est pas cette pratique.*

** Les objets (milieu) ne sont pas définis intrinsèquement. L'objectivité des objets de pensée tient à leur intersubjectivité. Dès lors, on ne peut pas, par leur entremise, décider du niveau d'interaction qui sera induit (installé). Si on peut cadrer l'interaction d'un sujet avec des objets mathématiques par le biais d'objets (milieu), ce ne sera que nos objets, notre milieu, et dès lors*

ne sera pas décisif pour définir le niveau de cette interaction. L'ajustement des niveaux d'interaction donne lieu à des régulations dans la situation d'enseignement.

** Le milieu permet d'induire, de contenir, de provoquer, de diriger l'interaction et par là de "créer" des objectivations et des réobjectivations (boucles cf. Jean Brun), donc d'agir sur la dynamique de l'interaction et non pas sur sa nature.*

** On ne peut pourtant pas faire faire des maths en déléguant à l'élève l'activité et en se contentant d'orchestrer (diriger, piloter, contrôler) cela.*

II : Faire faire des mathématiques

Le "faire des mathématiques" du maître lorsqu'il enseigne.

“Faire faire des mathématiques” est donc une activité complexe. De ce qui vient d’être dit, on doit conclure sans aucune hésitation que l’enseignant “fait des mathématiques” lorsqu’il enseigne. Certains lecteurs seront peut-être étonnés de mon insistance alors qu’en général on ne porte pas grande attention à cet aspect des choses. Quelle valeur ce qui se passe pour le maître pourrait donc avoir puisque ces mathématiques qu’il enseigne, il les sait et sont généralement très en deçà de ses compétences ? Un tel étonnement résulte d’une habitude à ne juger l’enseignement qu’en fonction des enjeux d’apprentissage de l’élève. A l’école on ne fait des mathématiques que dans le but de les transmettre ou de les apprendre ; il n’y est fait aucun autre usage ; on n’en invente pas non plus de nouvelles ; cette tâche est d’ailleurs confiée à d’autres institutions. On considère que les mathématiques faites en classe ne valent que pour les élèves. Qu’ils y aient été aidés par leur maître (telle semble être leur collaboration) ne change rien à l’affaire. Ainsi donc on voudrait croire que le maître efface sa personne mathématicienne pour son rôle d’instigateur, de guide, et qu’il porte tous ses efforts à l’orientation et la valorisation des activités de l’élève. Le défaut d’un tel raisonnement provient de ce que ceux qui le tiennent se trompent d’objet, ils confondent tout simplement l’activité mathématique (l’interaction qui s’instaure entre chacun des sujets avec les objets) avec la pratique mathématicienne. De fait, le maître entretient une activité mathématique visible de l’extérieur, c’est pourquoi je dis non seulement « activité » mais « faire ». Dire cela ne préjuge rien de ses pratiques ni de leur adéquation aux pratiques mathématiciennes de référence, ni de leur part proprement didactique. Il s’agit maintenant d’examiner comment on pourrait intégrer ce fait dans les analyses didactiques.

Comme je l’ai déjà fait remarquer, collaborer à de mêmes tâches sur des objets communs n’implique pas pour autant l’équivalence des mathématiques que chacun fait. Si je prétends que tout acte d’enseignement (des mathématiques) voit le maître et l’élève faire des mathématiques, je soutiens néanmoins primo que leurs activités diffèrent et secundo qu’ils ne traitent pas exactement des mêmes objets. Certes, considérés de l’extérieur, leurs faits peuvent sembler identiques et leurs activités peuvent paraître bien synchronisées, il n’en sera rien par contre ni des significations, ni qualitativement de la pensée de chacun. Croire que le maître et l’élève puissent être interchangeables est une vue de l’esprit et revient inmanquablement à faire l’impasse tantôt sur ce que fait l’un tantôt sur ce que fait l’autre.

J’ai déjà mentionné qu’en mathématiques chacun transportait avec lui ses propres objets de pensées et faisait ses propres expérimentations. Cet aspect marque profondément toute collaboration à propos de mathématiques quelles que soient les pratiques considérées. Il convient donc d’être particulièrement attentif à ce qui distingue les acteurs d’une situation d’enseignement. En premier lieu, ce sont des individus différents, et nous savons qu’il ne leur est pas donné de pouvoir s’identifier totalement. Ensuite l’âge, la maturité psychique et l’expérience séparent les maîtres des élèves : l’enseignant est un adulte, l’élève est un enfant, un adolescent. La psychologie développementale nous apprend que leurs pensées diffèrent qualitativement, que cela tient à la différence de leur développement intellectuel, et que ce développement est irréversible.

Si le jeune est un adulte en puissance, par contre il n'est pas donné au plus vieux de penser à nouveau comme un jeune. En troisième lieu, le maître sait plus de mathématiques que l'élève. En classe, chacun sait autrement les choses dont il est question, et l'enseignant les sait avec d'autres choses que l'élève ignore. (Exemple savoir les opérations ensemblistes, solidement de la relation d'inclusion, comme pour l'adulte, déliées comme pour l'élève, car c'est à ce prix qu'on a pu lui enseigner l'intersection. Idem pour les propriétés de divisibilité, les nombres premiers, idem pour la numération écrite et parlée. Etc.). Pour le maître, le fait de connaître les réponses aux questions qu'il pose gêne la perception des problèmes que l'élève rencontre. Cela concerne aussi l'évolution des interactions induites par les situations. Lorsque le maître les aborde, il prévoit un certain type de déroulement. Les connaissances qu'il croit mobiliser de cette manière chez l'élève devraient le faire déboucher sur un savoir déterminé. Quelque chose est censé se passer et venir transformer le savoir mathématique de l'élève. Par contre le maître sait déjà tout cela, donc son savoir ne saurait en être véritablement affecté. Le savoir et la maîtrise de la situation jouent comme "une immunité cognitive" qui présente un avantage indéniable pour l'enseignement. Le maître a prise sur la situation (il sait), il peut en tout temps s'en dégager, il peut suspendre momentanément son activité, il peut suivre parallèlement différentes démarches, il peut effectuer quelques pointages, revenir en arrière, provoquer des reprises ou des récapitulations, jouer sur la synchronisation des collaborations en classe, ralentissant ou accélérant le rythme. Cette maîtrise lui est indispensable s'il veut répondre aux contraintes du temps didactique. Mais ne nous trompons pas, l'activité du maître n'est ni plus ni moins syncopée que celle de l'élève qui, nous le savons bien, a aussi divers motifs de distraction (regarder par la fenêtre, tailler son crayon, s'amuser avec ses voisins, mais aussi se voir confronté à des problèmes qui se posent en des termes très personnels et qui détournent son attention de ce qui se passe en classe, etc.). Le fil du travail mathématique en classe n'est pas à rechercher au niveau des activités mais seulement au niveau de la situation, il concerne le savoir plus que les connaissances engagées.

Faire des maths, faire faire des maths.

Partant de l'idée que la simple interaction du maître avec le milieu d'une situation d'enseignement représente une activité mathématique sous-jacente à ses pratiques, j'ai montré comment le savoir du maître le rendait apte à enrôler cette activité dans sa pratique enseignante. Ici, je vais renverser la perspective et montrer comment cette pratique enseignante implique nécessairement un tel engagement : non seulement c'est un fait, mais encore c'est un fait nécessaire. Alors qu'on s'attend en général à ce que l'élève fasse des mathématiques pour les apprendre, le plus directement possible et de la manière la plus déagée qu'il soit du projet que les adultes ont pour lui, on considère que lors de l'enseignement, l'activité du maître, fût-elle mathématique, est entièrement tournée vers le but de faire faire des mathématiques à ses élèves. Si seulement le maître pouvait se contenter de provoquer l'activité de l'élève ! Pour éviter que l'un et l'autre ne se perdent dans les méandres de la dynamique interactive, l'activité de l'élève (le faire des mathématiques dévolu à l'élève) se déroulera sous le contrôle (discontinu) de l'activité enseignante (le faire faire des mathématiques dévolu au maître). Le travail du maître englobe donc un véritable suivi de l'interaction de l'élève avec le milieu, donc un suivi de l'élève et tout autant un suivi du milieu. Cela occasionne à l'enseignant de nombreuses boucles entre des activités mathématiques de base (les mathématiques qu'il fait), effectives, et la pratique enseignante proprement dite (les mathématiques qu'il fait faire) qui justement lui permettent de réguler ou de maintenir une synchronisation entre ses propres actions et celles de ses élèves. En un mot, l'activité du maître (son "faire des mathématiques") accompagne celle de ses élèves. Cela suppose justement que le maître puisse développer une activité analogue à la leur et ce, en référence au même dispositif. De ce point de vue, le maître et ses élèves entretiennent une véritable collaboration. (Par exemple ils en viennent à synchroniser leurs actions comme lorsque l'on suit sur le texte une lecture faite à haute voix par quelqu'un d'autre, ou sur sa partition une œuvre musicale entendue, ou encore comme lorsque, passager avant dans une voiture, on se

surprend à conduire avec le chauffeur, etc.). Ceci amène l'enseignant à opérer pour lui-même (et en acte) une transposition de son savoir mathématique qui devient pour lui un savoir-faire didactique (connaissance utile pour enseigner). Telle réponse de l'élève est à la fois référée aux mathématiques (via l'attente de certains gestes ou de certaines réponses) et à des stratégies didactiques (relance de l'activité par le maître, évaluation ou au contraire nouvelle confrontation, etc.).

Activité, pratiques enseignantes, pratiques enseignées et pratiques mathématiciennes.

J'ai déjà dit que la collaboration entre mathématiciens s'accommodait des différences entre les modalités d'actions de chacun et que pour cela les mathématiciens accordaient une attention primordiale à la manière de conduire leur pensée. Cette idée rejoint ce que dit F. Gonseth : « La méthode qu'est-ce que c'est ? C'est un ensemble de règles qui nous permettent plus ou moins, mais avec une certaine plausibilité, de parler aussi au nom des autres, et quasi au nom d'un autre quelconque. » Ceci indique qu'au niveau des pratiques mathématiciennes, il y a bel et bien substituabilité des acteurs mathématiciens (et telle est l'exigence du genre). Que peut-on en tirer pour la description de la collaboration didactique en classe de mathématiques ? La différence essentielle tient à ce que si dans la pratique mathématicienne, le savoir mathématique et son objectivité "permettent de parler au nom d'un autre quelconque" (un sujet épistémique), en classe il s'agit au contraire de "donner la parole à l'élève". Le mathématicien est déjà initié et introduit dans l'univers des pratiques mathématiciennes, il a donc déjà "sa parole" et en est "responsable", alors que c'est à cela qu'il s'agit d'introduire l'élève. Plus encore puisqu'il s'agit de faire en sorte que l'élève puisse à son tour "parler au nom des autres" et qu'il endosse la responsabilité de ce qu'il avance. G. Brousseau a inventé divers dispositifs pour obtenir cela en classe primaire, je ne reviendrai pas là-dessus, me centrant ici plutôt sur l'activité de l'enseignant dans des situations d'enseignement ordinaires. Je pourrais dire alors que ce qui distingue la collaboration en classe de mathématiques de celle entre mathématiciens, c'est qu'en classe le travail de l'élève se fait sous contrôle de l'enseignant alors que le travail du mathématicien ne se fait que sous le contrôle du savoir (savant). Deux mathématiciens qui ne partageraient pas la même réalité cesseraient vite de collaborer, du moins momentanément. En classe par contre, les maîtres (et les élèves ?) ne peuvent en aucun moment se permettre de rompre tout échange, et cela même si les réalités de chacun des acteurs diffèrent grandement. Voyons en maintenant quelques implications.

Les liens entre l'activité enseignante et l'activité enseignée sont d'autant plus complexes et indirects que la distance qui sépare l'enseignant de son élève est grande. Tel est le cas lorsque les mathématiques que le maître engage, celles qu'il fait hic et nunc dans son travail enseignant, sont pour lui triviales et machinales. Ces mathématiques lui sont si faciles à faire qu'il lui est pratiquement impossible d'imaginer qu'elles puissent nécessiter une quelconque reprise. Plus il maîtrise la matière à enseigner, plus il lui est facile d'imaginer des tâches susceptibles de faire faire des mathématiques à ses élèves ; cela ne lui demande pas un grand travail. En revanche, plus ces mathématiques lui sont évidentes, plus il lui sera difficile de prendre conscience de ce qu'il fait faire, d'identifier exactement ce que les élèves font et de juger de la signification que cela prend pour eux. En prendre la mesure exigera de sa part une analyse fine. En d'autres termes, si "donner la parole aux élèves" ne présente pas de difficultés majeures, toute autre chose est "d'entendre cette parole pour ce qu'elle dit" !

La centration sur les performances est un moyen très économique pour obtenir que l'élève rejoigne le savoir. Cela fournit un critère pour qu'il puisse en quelque sorte se "substituer" au maître. Si l'élève réussit régulièrement à effectuer telle ou telle tâche, c'est qu'il possède le savoir qu'on voulait lui faire acquérir, de ce point de vue il sera l'égal du maître. Cela pourra agir "en boucles positives", l'accès de l'élève à des méthodes générales lui procurant de nouvelles performances lui permettant d'accéder à des méthodes plus générales encore, etc. L'économie

réalisée ici tient à ce que le sens est alors entièrement relégué dans le faire. Hélas, les difficultés des élèves à apprendre les mathématiques montrent qu'un tel modèle n'a qu'une valeur très limitée, et que l'on bute massivement sur un écueil, celui du "contrôle du sens" attribué par les élèves (et les enseignants) aux tâches scolaires.

Ce contrôle ne peut s'établir qu'en examinant les deux niveaux de réalité traitées et leurs liens : d'une part, celui des interactions des élèves avec les objets et dispositifs qui leur sont soumis, et d'autre part, celui des pratiques mathématiciennes et des savoirs de référence. Cela pose problème dans l'enseignement des mathématiques. Ce fait maintes et maintes fois observé s'explique par ce que les objets ne sont pas des entités absolues et intrinsèques mais qu'au contraire ils sont relatifs à l'activité des sujets (des interactions dans lesquelles ces objets sont impliqués). Dans le processus d'enseignement, les objets et dispositifs présentés à l'entrée ne se retrouvent pas tels quels à la sortie, le contrôle du sens est le contrôle de la transformation ainsi effectuée, il porte sur l'activité mathématique engagée (l'évolution des interactions sujets-milieu lors du déroulement de la situation). Vu que le critère de réussite peut suffire à la communication entre le maître et l'élève, ce contrôle peut échapper à celui de l'échange didactique. Par contre, on le trouvera inmanquablement dans les régulations qui vont s'imposer au maître au cours de l'accomplissement de sa tâche et dans le pilotage de son enseignement.

Dit autrement, le maître peut très bien garder pour lui sa "lecture" de la situation, cela n'oblitére pas pour autant que cette "lecture" a lieu et qu'elle est nécessaire. Dans la situation qu'il soumet aux élèves, il propose une réalité à traiter afin d'aboutir à une véritable réalisation mathématique. Le maître doit donc contrôler deux choses. D'abord ce qui fera réalité pour l'élève, ensuite ce à quoi aboutit la situation. Le premier contrôle se situe au niveau du "faire des mathématiques", c'est-à-dire, selon le point de vue développé ici, sur le niveau inférieur des interactions sujets-milieu. Pour ceci le maître doit prendre en considération ce qui distingue l'activité de ses élèves de la sienne propre (sa lecture de la réalité à la leur, ce qui fait objet pour lui différenciellement de ce qui fait objet pour eux). Le second contrôle se situe au niveau des pratiques de référence et du savoir à enseigner, c'est ce que les didacticiens appellent le contrôle de l'adéquation du rapport au savoir. Dit autrement, le maître devra opérer une double référence : d'une part, il a bel et bien enseigné des mathématiques, il peut gager que ce qu'il s'agissait de faire était bien des mathématiques ; d'autre part les élèves ont bel et bien appris des mathématiques, ce sont bien des mathématiques qu'ils ont fait. Autrement dit, il devrait pouvoir certifier que les mathématiques enseignées et apprises bien que différentes se retrouvent toutes deux conformes au savoir de référence.

Une vision simpliste du partage des tâches dans l'acte d'enseignement.

On délègue à des professionnels le soin d'enseigner les mathématiques. Le projet d'enseignement et ses agents se font les représentants (les messagers) des mathématiques (des objets mathématiques). L'idée qui prévaut communément est basée sur le mode d'une simple chaîne de procuration : [le maître fait]---[faire des mathématiques à ses élèves]. Ce schéma n'est pas incompatible avec la hiérarchie que je viens de mettre en évidence : le maître installe une pratique mathématicienne (scolaire) en classe ; pour cela il fait faire des mathématiques ; ce qui suppose un niveau sous-jacent (en retrait par rapport aux pratiques) où le maître et l'élève développent leur activité mathématique propre (interaction avec le milieu matériel et symbolique de la situation d'enseignement). Ramener ce dernier schéma à une simple chaîne se fait au prix d'une confusion. Ce n'est que sur le plan des pratiques, **au delà de l'action**, que le maître et l'élève seront substituables. (Accompagnés de justifications diverses telles : il ne convient pas de faire deux fois les mêmes choses ; celui qui sait peut être dispensé de faire à nouveau ; il suffira que l'un pratique au nom de l'autre ; etc.). Par contre, ceci ne vaut plus au niveau des actions. Maîtres et élèves en tant que sujets de leur activité ne sont pas assimilables l'un à l'autre, ni substituables, chacun établit pour lui-même sa ("lecture" de la) réalité. Bien sûr l'élève doit faire

des mathématiques, mais cela ne justifie pas l'illusion que le maître pourrait se soustraire à devoir en faire lui-même. En mathématiques, établir une collaboration nécessite que l'on soit attentif aux différences d'approche et de compréhension de la réalité traitée (qui est une réalité de pensée). Cela vaut aussi pour la classe. Sinon, si l'on néglige de telles prises en compte, le risque sera que l'élève ait fait ce qu'on attend de lui, et qu'il ne tienne alors plus qu'au bon vouloir du maître de prendre cela pour des mathématiques (le maître attribue une valeur **de** pratique à ce qui n'était peut-être qu'action de l'élève). C'est exactement ce qui se passe dans les tâches de comptage élémentaire qualifiés de calculs par les enseignants sous le prétexte qu'ils sont inscrits sur une forme d'égalité lacunaire du type : $7 = 2 + \dots$. Les exemples foisonnent de tels effets Jourdain. Dans ce cas, l'élève reste à la porte, et le maître se contente de se prétendre garant d'une pratique mathématique scolairement conforme dans sa classe. Alors l'élève a toutes les chances de "rater son entrée dans les pratiques mathématiques". Pour qu'elle puisse être opérationnelle jusque sur le niveau de l'activité mathématique, la procuration supposerait en effet que l'on contrôle très étroitement les objets fournis à l'interaction des élèves. Or on ne le dira jamais assez, les objets mathématiques sont des objets de pensée et des objets seconds. Lorsque l'on propose aux élèves un dispositif didactique, on ne sait pas d'avance comment celui-ci sera appréhendé (par leur pensée). C'est pourquoi lorsque nous décrivons les situations d'enseignement, nous parlons de dévolution du savoir plutôt que de délégation de tâches. Pour redire autrement ce qui a déjà été développé dans le paragraphe précédent, je dirais que le travail en classe vise la mise en adéquation de deux rapports au savoir - ce qui fait **trois termes au moins** (on a au mieux un "même objet de savoir", mais toujours deux personnes distinctes donc aussi deux rapports).

Une centration excessive sur les objets.

Le schéma classique du partage des tâches en classe est simplificateur et l'économie qu'il permet présente des avantages. Il convient alors d'examiner comment certaines pratiques enseignantes s'organisent autour d'une telle représentation. Comme je l'ai indiqué, la procuration n'est concevable qu'à condition d'attribuer aux objets un statut absolu et de conférer alors le niveau des objets de pensées à celui (inférieur) des objets auxquels on met aux prises l'élève (objets de savoir). On ne s'étonnera donc pas de constater que les pratiques enseignantes privilégient à outrance les objets d'enseignement, c'est-à-dire ces dispositifs (des "objets", des symboles écrits ou iconiques, des choses à faire avec ces objets) qui permettent de "faire des mathématiques", ces modèles matériels et ces modèles d'actions (ces "effigies de l'immatérialité mathématique") conçus à l'image des objets et pratiques mathématiques que l'on propose aux élèves. Il n'est pas difficile ni très coûteux de proposer des tâches et, par-là, de susciter que les élèves fassent quelque chose. En classe, on se contente généralement de telles illustrations mathématiques.

Faire porter ainsi l'accent sur les dispositifs d'enseignement n'est pas sans conséquences. Par exemple, on se suffira d'une documentation scolaire (dont les manuels bien sûr) conçue comme un répertoire de tâches variées présentées selon une progression plus ou moins marquée. Croire qu'il puisse exister de "bons objets" ou de "bons dispositifs" qui posséderaient en eux la vertu d'entretenir de "bonnes interactions" entre bien dans le schéma du partage des tâches. Les élèves agissent et produisent quelque chose. Partant de l'idée que le mathématique serait lisible d'emblée dans les dispositifs proposés, les enseignants pourront se contenter de la seule conformité des productions des élèves relativement à ces dispositifs. On ne leur demandera pas de contrôler ce que les élèves y mettent. Ne compte en définitive que ce que le maître voudra bien voir en toute honnêteté et bienveillance. Un avantage incontestable est l'économie que cela permet (économie de travail, économie de mémoire, économie en formation, etc.). Un défaut tout aussi incontestable est qu'une telle conception favorise un activisme didactique relativement stérile (faire pour faire, agir pour mieux passer le temps...).

Dans cette conception classique de l'enseignement, les mathématiques sont caricaturalement versées du côté de l'objet, du dispositif de la tâche (nommée elle-même "activité mathématique" dans le jargon des enseignants et auteurs de manuels), qui du coup devient un emblème scolaire de l'objet mathématique et des pratiques mathématiciennes ("faire des ensembles", "faire des bases", "faire des factorisations", "faire de la trigonométrie" etc.). Quant au "faire" et à "l'activité", ils seront versés du côté de l'élève. Le maître se contente d'orchestrer cela. Le risque encouru est que l'on passe ainsi sous silence la partie difficile de l'acte d'enseignement, je veux dire le contrôle de ce que l'on fait faire aux élèves, la confrontation de ce que les tâches scolaires suscitent de mathématique chez l'enseignant, avec ce qu'elles suscitent pour l'enseigné. Là réside en effet toute la question du contrôle du sens mathématique des tâches proposées en classe.

Ce genre de simplification n'implique pas forcément que l'on ne portera aucune attention à ce que fait l'élève, mais faute de points de comparaison, l'appréciation se réduira trop souvent à sanctionner une réussite ou un échec. Si "savoir" veut dire "être capable de réussir ceci ou cela", celui qui sait se contente de "faire sans avoir à refaire" (il ne réapprend pas), il peut accomplir la tâche et il n'y a alors plus lieu de s'interroger sur ce qu'elle est, ni sur la pensée qu'elle soutient. Suivant ce même ordre d'idées, on ne pourra bien sûr pas exiger de ceux qui ne savent pas encore qu'ils réussissent tout du premier coup. La classe ouvrira donc un espace à leur exercice durant lequel les maîtres pourront examiner ce que les élèves ont fait, voir comment ils s'y sont pris. Mais, toujours par souci d'économie, ce travail ne concernera généralement que l'apprentissage non abouti. Un tel enjeu peut être qualifié de négatif : lorsqu'un élève se trompe, on ne verra pas cela comme sa manière de faire des mathématiques. Certes il aura fait quelque chose mais l'aura aussi raté (il devra faire et refaire), cela n'aura par conséquent pas de statut propre. Ce sera une tâche inaccomplie, avortée, sans nom, non référée à la pensée qui l'a produite, qui n'aura cours que dans l'échange didactique à titre de signal pour une éventuelle intervention de l'enseignant. S'il examine ce que l'élève a produit c'est d'abord pour décider d'une correction ou d'une aide (lui indiquer une voie à suivre, ou au contraire une piste à éviter, lui montrer comment obtenir des produits plus conformes, etc.). Puis le moment d'évaluation viendra refermer cette parenthèse où il s'était quelque peu intéressé au "faire-des-mathématiques" de l'élève (il ne gardera généralement pas de trace de ces observations).

Pour en venir à ma thèse, disons qu'elle corrige le schéma classique de "procuration" qui accorde trop d'importance aux objets et dispositifs d'enseignement. Ce qui est en cause ne sont pas tant les objets d'enseignement eux-mêmes que la façon dont on les conçoit. Etant donné que les objets sont à *élaborer* (et cette élaboration est ouverte), il faut proposer aux élèves des objets qui fassent réalité pour eux mais qui en même temps soient susceptibles "d'évoluer" vers les formes mathématiques visées. Aussi ce n'est pas le sujet seul qui se transforme (en apprenant), mais aussi les objets, ou si l'on préfère la totalité de leur interaction, et au-delà encore, le couple enseignant-enseigné lui-même. Pour le didacticien, il s'agit d'opérer un retour de l'objet mathématique vers des formes objectives concrètes (matérielles ou symboliques) plus élémentaires. Pour mon propos, je ne prendrai ici en considération que le fait de pouvoir disposer de telles formes. Dès lors, on ne sait pas vraiment ce qu'elles sont mais on est sûr d'une chose : **ces formes seront forcément moins différenciées que les objets visés**. Elles prêteront d'autant plus à confusion. Une courte vue didactique voudrait que l'on cherche à mettre d'emblée les élèves sur de "bons rails", et donc à leur soumettre des objets leur épargnant d'avance toute confusion inutile, toute erreur de jugement. Par exemple, on insiste sur le recours à des consignes toujours simples et compréhensibles pour les élèves, comme si les objets et dispositifs didactiques pouvaient être en eux-mêmes porteur d'erreurs, alors que ce ne sera jamais que la pensée qui pourrait s'égarer. En d'autres termes, on voudrait épargner à l'élève qu'il perde trop de temps à refaire, ou encore on voudrait contrôler les limites dans lesquelles l'enseignant sera tenu à ces reprises. Pourtant c'est cet égarement qui fera que le sujet dépassera le niveau des objets pensés pour aller vers celui des objets de pensée, il est donc nécessaire qu'il en fasse l'expérience. Dit

autrement certains voudraient que dès l'entrée dans la situation les choses fussent claires pour l'élève. Mais alors quel sens aurait donc le processus dans lequel on l'engage ? Y subsistera-t-il même un quelconque enjeu ? Au contraire, c'est à la fin du processus que les choses viendront à se clarifier. Le savoir à apprendre en vient à se présenter comme une issue à la situation problématique instaurée au départ, sur la base justement d'une lecture mal dégrossie de la situation (qui fait par exemple diverger les diverses reprises de l'activité). De nombreuses études en didactique des mathématiques montrent la pertinence d'un tel modèle de l'apprentissage scolaire. De telles confrontations de la pensée de l'élève à des réalités qui lui posent (encore) problème semblent bien être le moteur de l'apprentissage des mathématiques en classe. Si ce qui vient d'être dit reflète en premier le point de vue de l'élève, cela n'en concerne pas moins le maître et le pilotage de son enseignement (là encore les représentations usuelles de l'acte d'enseignement ont tendance à négliger son activité). Je puis alors expliquer l'origine d'un tel entêtement didactique de la part des enseignants et pédagogues en rappelant que le savoir est démuné face à l'ignorance. En fait, tant de précautions concerne en premier lieu les enseignants et les élèves ne jouent ici qu'un rôle d'alibi. L'état à l'entrée d'une situation (milieu mal dégrossi, objets non clairement délimités), implique en effet une certaine ouverture, c'est-à-dire l'éventualité de la voir évoluer dans une direction non prévue, voire non souhaitée. Ce risque de voir la situation diverger, et cette nécessité d'admettre que l'élaboration des objets pourrait ne pas prendre les formes voulues ne sont pas toujours faciles à assumer et il est peu surprenant que les enseignants cherchent à éviter de se trouver eux-mêmes démunés devant les développements inattendus de la situation.

Pour sortir d'une telle impasse, je propose une réelle décentration : les objets pris en compte dans la tâche sont là pour susciter une pensée qui en retour enrichit ces objets et c'est dans cette élaboration et là seulement que réside le mathématique (même s'il devra encore prendre une forme reconnaissable au regard des pratiques mathématiciennes de référence). Si l'on peut présenter et proposer des objets à l'élève ce ne peut être qu'à titre d'amorce, car c'est à lui et à lui seul qu'il incombe de mener un tel processus d'enrichissement. Cela suppose aussi une reconnaissance de l'activité mathématique de l'enseignant lui-même, et par conséquent la prise en compte des mathématiques scolaires et leur pratique. Dès lors la responsabilité de ce dernier sera engagée en regard de ce qu'il sait et de ce qu'il fait et non pas en regard de ce qui est apparemment mathématique, il pourra et devra quitter son rôle plutôt ambigu d'entremetteur culturel. Alors seulement la transposition didactique ne sera plus prise comme un scandale permanent (« Comment c'est ça qu'on leur enseigne ? Mais cela n'a rien de mathématique ? ») et l'on comprendra que l'enseignement ne peut se faire qu'au prix de certaines distorsions provisoires et contrôlables.

Ce qui prévaut pour les objets est encore plus prégnant pour les actes et les productions ou traces du travail en classe (qui n'ont pas non plus de signification intrinsèque ni même univoque et ne sont donc pas directement appréhendables). La conformité aux attentes n'est pas une garantie fiable ; nous le savons tous. Les gestes et les images (les emblèmes) peuvent n'être que mimés ou feints. Il en sera d'autant plus nécessaire que l'élève « fasse des mathématiques » et réussisse par lui-même. Le découpage des tâches qui veut que l'élève se charge de « faire quelque chose » et que le maître sanctionne la conformité mathématique des productions recueillies escamote la confrontation en classe de deux rapports aux mathématiques (celui du maître à celui de l'élève). (Et selon que la négociation portera sur l'obtention d'un acte conforme de la part de l'élève ou sur l'obtention d'un jugement de conformité de la part du maître nous trouverons respectivement un effet Topaze ou un effet Jourdain.) Il n'est donc pas superflu que les maîtres apprennent à connaître leur propre fonctionnement et leur mode de faire des mathématiques. Pour leur formation, un bon moyen de susciter et d'entretenir une telle compétence serait de les engager à comparer leur activité lorsqu'ils se trouvent en situation d'enseignement d'une part et lorsqu'ils en sont dégagés de l'autre, ou, dit autrement, lorsqu'ils font des mathématiques en les enseignant et lorsqu'ils font des mathématiques pour eux-mêmes. Mais tout comme le sujet

mathématicien se situe en retrait et en amont vis à vis de la pratique mathématicienne, cette compétence réflexive souhaitée chez les maîtres est seconde, et peut être par conséquent vue comme un luxe. Comment contraindre le système scolaire à faire ce pas ? Par la conviction ? Peut-on encourager suffisamment d'enseignants (quel que soit leur niveau de maîtrise des mathématiques) de faire des mathématiques ? Comment leur faire prendre conscience que ces exercices scolaires qu'ils proposent et qu'ils archi-maîtrisent supposent une activité mathématique authentique, identifiable concrètement ? Comment faire pour qu'ils ne se contentent pas d'administrer des tâches mathématiques aux élèves ? Comment leur donner des moyens pour leur faire maîtriser non seulement ce qu'ils font faire, mais encore ce qu'ils font, eux, dans cette entreprise ? Comment leur faire réaliser qu'alors, en retour, il leur sera donné de comprendre ce que les élèves ont produit ? Comment discuter posément avec eux, sans procès mais sans complaisance non plus, de ce que leur action enseignante produit ?

La formation des enseignants ramenée à la présentation de choses à faire faire.

Dans l'idée d'une procuration à l'élève de l'activité mathématique, le maître devra certes savoir les mathématiques qu'il enseigne, mais sans qu'il ait à y revenir en position réflexive (il engage son savoir dans une activité qui n'est pas prise en compte comme telle). Suivant ce modèle, la formation mathématique des enseignants pourra alors se limiter à l'apprentissage des mathématiques qu'il aura à enseigner. On ne comptera ni sur d'éventuelles maturations de ses connaissances ni sur ce que, peut-être, l'enseignant aura pu faire pour lui-même du savoir acquis en classe. On ne demandera pas aux maîtres de pratiquer les mathématiques hors des limites de leur enseignement ; il ne sera pas exigé d'eux qu'ils fassent d'autres mathématiques que cela, ni qu'ils les pratiquent à d'autres occasions. Bien sûr cela n'est pas interdit non plus, bref c'est à discrétion. Certes on se réjouira de voir des enseignants intéressés par cette matière et s'y adonnant toujours activement. Mais un enseignant qui avouera que faute de capacités il a désinvesti ce domaine ne sera pas pour autant moins bien reçu ! Et bien entendu, on ne lui demande pas plus qu'un intérêt poli, une déférence à la norme. Pour les maîtres, le "faire des mathématiques" engagé dans leur acte d'enseignement pourra fort bien n'exister qu'au regard des "tâches" à faire faire aux élèves, et des modèles à accomplir. Ils ne prennent pas en compte l'activité mathématique sous-jacente à leur pratique enseignante. Les mathématiques engagées dans les tâches mathématiques proposées importent alors moins que ces tâches elles-mêmes, ils savent les accomplir et leurs élèves sont censés apprendre à faire de même. Tout au long de sa scolarité l'élève défilera devant des maîtres qui sauront faire de plus en plus de mathématiques. Tel est le lourd tribut payé à la volonté d'un enseignement obligatoire et généralisé des mathématiques à l'école élémentaire.

Classiquement, l'école est considérée comme la propédeutique à l'exercice du métier d'enseignant et la formation mathématique qui y a été dispensée suffit pour les maîtres. On retrouve ici le schéma de procuration : l'école instruit la population, on prélève les enseignants parmi les personnes les mieux instruites ; elles ont appris les mathématiques ; ce "faire" leur suffit à les enseigner (à les "faire faire" aux élèves). Ce schéma n'est pas remis en question par les mots d'ordre modernes du type de la "pédagogie active". La formation scolaire en mathématiques des enseignants se ramène donc souvent à un réaménagement de leur mémoire et l'actualisation d'un cadre compatible avec la philosophie des moyens d'enseignement.

Une telle formation portera alors essentiellement sur les choses à "faire faire" laissant implicite, "encapsulé", le niveau de l'activité mathématique suscitée, occultant ainsi la distinction entre activité et pratique mathématique. L'idée qu'il suffit de présenter de "bons objets" aux élèves concerne tout autant l'école que la formation des maîtres : il suffira de présenter aux futurs enseignants de "bons manuels", de "bonnes méthodologies" pour qu'ils apprennent la didactique. On retrouve une centration forte sur les objets d'enseignement.

Un enchaînement de choses à faire, doublé d'un système de repérage des choses accomplies.

L'appareil didactique définissant les pratiques mathématiciennes à l'école est organisé selon deux axes : d'une part des contraintes de contenus, d'autre part des instruments didactiques. Les éléments du premier axe portent sur la nature de ces contenus, leur ordonnancement, les formes sous lesquels ils doivent être présentés et appris, ainsi qu'une programmation dans le temps, des échéances à respecter dans les différents acquis et des niveaux de performances à atteindre. Tandis que les éléments du second axe, les instruments, consistent en moyens d'enseignement et principes méthodologiques adaptés, ainsi que des moyens d'évaluation permettant de vérifier le respect des échéances. C'est à ce dernier axe que l'on a trop longtemps réduit la didactique.

On retrouve le schéma de procuration jusque dans le fait qu'une fonction de pilotage est dévolue à cet "appareil" (plans d'études, programmes, manuels, méthodologies et matériels pédagogiques, recueils de tâches diverses, etc.). Dans le premier axe se manifeste le côté promotionnel de l'enseignement. J'ai déjà mentionné que l'interaction élève - milieu didactique dans la situation était évolutive : quelque chose est censé advenir en classe. En se transformant le sujet transforme jusqu'à sa perception de la réalité, les objets eux-mêmes s'élaborent. Mais les situations ne sont pas non plus isolées, le savoir n'est jamais définitif. Si « faire faire des mathématiques » engage bien l'élève à faire des mathématiques hic et nunc, la finalité de ceci reste le dépassement de l'état de ses connaissances actuelles. Le savoir est toujours en instance de se reporter et ce sont toujours les développements ultérieurs qui sont visés. On comprendra dès lors pourquoi l'image d'une progression en escalier, ou encore par paliers successifs s'impose si fortement dans les représentations des cursus scolaires.

Comme je l'ai déjà mentionné, dans les représentations communes de l'enseignement des mathématiques ces dernières sont totalement versées du côté de l'objet, le faire quant à lui sera placé du côté de l'élève, tandis que le maître se contente d'orchestrer cela. Pour mon analyse, je vais maintenant grossir un peu cet aspect des choses. Si le défilement des objets est préprogrammé pour l'élève, cela ne veut pas dire que ce dernier serait inactif, au contraire, il est un des éléments moteurs de ce défilement auquel, pour une bonne part, il imprimera son rythme. Certes l'élève fait ça ; mais le produit qui en résulte compte-t-il vraiment ? Ce produit est nécessairement une réplique, mais il y a plus : **à l'école il est pré-interprété.**

Tout à tour on se représentera la progression scolaire de l'élève comme un parcours de ce dernier dans un cursus ou comme le défilement d'objets de plus en plus élaborés qui lui sont successivement proposés ; l'école s'intéresse au devenir de l'élève tout autant qu'au devenir des savoirs de l'élève. Ce dernier est inscrit dans les objets et dispositifs, au cœur du programme. Tant que l'élève est "relancé" dans le programme, ses productions compteront plus pour ce qu'elles représentent vis à vis des objets programmés que pour ce qu'elles sont. C'est en ce sens que je dis que leur interprétation est donnée d'avance. Prendre en compte les productions des élèves peut alors se limiter à vérifier qu'elles se prêtent effectivement à une telle interprétation (et là les critères peuvent être plus ou moins stricts bien entendu, je n'entre pas ici sur cette question). Cette fonction sera dévolue au second axe de l'appareil didactique. Bien entendu un tel jugement de conformité n'est lui-même pas univoque ni intrinsèque puisqu'il tient aux diverses "lectures" (qui ne coïncident jamais exactement) de la réalité que font les sujets, selon ce qui est soumis à leurs traitements. J'examinerai plus loin ce qu'il advient quand cette sanction de conformité n'est pas obtenue.

Que les productions des élèves doivent être interprétées ou valorisées ne fait pas problème. Que ces interprétations et valorisations soient par contre déterminées a priori, sans les confronter à ce qui aura résulté de la situation est plus ennuyeux. Pour des raisons pragmatiques faciles à comprendre, les liens entre ce que l'on fait faire à l'élève et ce qu'il fait effectivement

seront supposés établis (voire garantis) par le programme. De la sorte, tant que l'élève "permet" à l'enseignant de s'y conformer, l'examen de ces liens ne sera pas tenu pour nécessaire. Un tel "découplage" de l'interaction sujet / objet dans la définition de l'objet d'enseignement présente d'autres avantages. D'abord on en joue comme d'un levier pour amener le sujet à se transformer (ne serait-ce que superficiellement). On amorce ainsi de sa part un processus d'apprentissage sans entrer en matière sur ce qui le constitue. C'est à discrétion de l'élève. On ne cherche pas à établir une représentation de la réalité de l'élève, entreprise combien délicate sinon illusoire. Secondement, ce qui sépare l'enseignant de l'élève, ce parcours que le premier a déjà fait pour lui-même et qu'il ne peut naturellement ni remonter ni refaire est d'emblée ramené à un décalage dans l'échelonnement des objets du programme. Troisièmement, c'est encore à un tel décalage que l'on tentera de rapporter les difficultés d'apprentissage en mathématiques. La part "diagnostique" de l'appareil didactique reviendra à un ensemble de moyens de repérage de l'élève dans le cursus. (Que le système d'évaluation des savoirs soit sommatif ou non, individualisé ou non, ne change rien à ce modèle). Ce repérage conduit à la définition d'un projet pédagogique pour l'élève, c'est à dire au projet de lui faire parcourir des segments du programme au voisinage des compétences repérées. Il faut alors admettre que les objets du programme seront affublés d'une double valeur : référés au programme lui-même, ce seront alors des objets de mathématique ; relativement à la position de l'élève, ce seront des compétences. Ainsi l'activité nécessaire de l'élève prend valeur d'une succession de performances par lesquelles lui sera attribué un niveau de compétence dans l'échelle des savoirs définie par le programme scolaire.

Pourtant avec cela, on ne s'intéresse pas vraiment à ce que fait l'élève, à ce qu'il produit, à ses mathématiques. A fortiori on n'insiste même pas pour qu'il les prenne en considération en tant qu'objet (si ce n'est quelquefois pour qu'il en peaufine la présentation), on ne l'amène pas à en questionner le sens, ni à y engager sa responsabilité, on se contente de lui faire livrer un travail sans qu'il soit considéré en classe et aux yeux de tous comme une production. Si la production de l'élève est "pré-interprétée" par le programme et que la seule question posée à son propos est celle de sa conformité à l'objet d'enseignement, n'importera en définitive que la comptabilisation des tâches accomplies, des épreuves surmontées, la succession des performances. L'enseignement sera certes appelé à réussir à ce que l'élève réussisse telle ou telle tâche, mais sans plus. Les pratiques mathématiciennes étant considérées d'emblée comme garanties par la conformité aux dispositifs didactiques utilisés, il n'y aura pas lieu de les distinguer des tâches mathématiques promues (qui se situent sur un plan inférieur). Tout concorde : peu importe de décrire ce que l'élève fait puisque s'il accomplit la tâche on est d'emblée sûr que ce sera les mathématiques à enseigner, il aura donc appris et que voulez-vous qu'il ait appris d'autre que ces mathématiques que l'on a mises dans l'objet ? Aucune chance non plus de voir un élève performant faire autre chose, ni même fondamentalement autrement que le maître. « La mathématique est universelle, deux plus deux feront toujours quatre, circulez, il n'y a rien à voir ! » Or nous l'avons vu toute pratique mathématicienne porte une importance primordiale à la manière dont les collaborateurs conviennent de conduire leur pensées (et ce formellement, car il ne s'agit pas ici de procédure mais de procédé). Clore la pratique scolaire sur le seul niveau du faire faire des mathématiques ne favorise pas l'accès à des pratiques mathématiciennes fussent-elles fortement transposées.

Ici, il vaut la peine de mentionner à l'appui de ma thèse trois faits.

Première observation : il est significatif de voir comment la mode de la métacognition s'est répandue dans le monde enseignant ! C'est au faire seulement qu'elle se rapporte : sous ce prétexte, on suggère à l'élève de réfléchir sur son style propre, la manière dont il accomplit ses tâches. Pourquoi ne lui demande-t-on pas aussi (voire plutôt) de considérer sa production ? Pourquoi ne lui reconnaît-on pas une compétence épistémique d'ordre méta-mathématique ? Hélas, ceci n'est même pas accordé au maître (et il est rare de voir ce dernier s'arroger une telle compétence).

Seconde observation : tout aussi significatif est le succès que ne cessent de récolter les psychologies décrivant divers stades du développement de l'intelligence ou de la connaissance. Une telle rencontre présente divers aspects. D'abord elle "naturalise" les objets mathématiques et en particulier ceux qui s'échelonnent dans les programmes. Cela permet entre autres de répondre à l'exigence d'adapter les objets d'enseignement aux données de la psychologie cognitive. Secondement, en se fondant sur l'idée d'un sujet en évolution et en laissant s'établir une analogie tentante entre le développement de l'intelligence et celui des apprentissages scolaires, elle renforce la centration sur des objets intangibles, définis de manière absolue, et non pas rapportés au niveau des interactions du sujet qui les pense. L'élève grandit, donc se déplace et l'école profiterait de ce mouvement pour le faire mouvoir dans un programme scolaire adapté. Troisièmement, en accréditant ainsi l'idée que faire des mathématiques serait une activité naturelle, normalement spontanée, pour autant que l'on propose aux sujets des milieux d'interactions appropriés, on renforce l'identification abusive du niveau de l'activité à celui de la pratique mathématicienne. De là à croire que la compétence à faire des mathématiques confère tout aussi naturellement la compétence à faire faire des mathématiques, il n'y a qu'un pas. Quatrièmement, on transpose ainsi, sans autres précautions, le savoir psychologique (cognitif) en une sorte d'ergonomie des moyens d'enseignement. Cela évite l'enseignant de devoir assumer la confrontation aux difficultés bien connues des psychologues. Par exemple, l'impossibilité pour un sujet (fût-il psychologue) de "revenir sur les pas" de son développement mental, de "déconstruire sa réalité", ou encore de reparcourir la formation de son expérience, c'est-à-dire l'intégration progressive de ses savoirs spécifiques. Autre exemple, le fait que dans ses propres interactions avec les milieux didactiques, le sujet n'est pas libre de choisir son niveau d'entrée dans le processus. Le sujet qu'est l'enseignant n'est donc pas assuré de percevoir correctement ce qui se passera pour les élèves.

Troisième observation : ce sont les problèmes que posent aux enseignants la prise en compte de la transposition didactique et la délégitimation qui en résulte aux yeux de certains. Cette difficulté tient à ce que les enseignants demandent aux programmes toutes les garanties sur le sens des tâches qu'ils leur proposent (imposent), comme s'il était possible de prémunir les objets de toutes déformations imposées par les nécessités d'échange didactique. Je ne reviendrai pas sur les objets tels qu'ils sont introduits à l'entrée du processus. Je préfère mentionner ici un autre aspect que l'on a tendance à négliger et qui concerne les objets à l'aboutissement du processus. On ne saurait en effet fixer d'avance le niveau d'élaboration que les objets auront atteint à cette issue. Qui plus est, cette élaboration sera toujours susceptible d'être poussée un cran plus loin. A cela sont liés quelques faits indubitables comme par exemple : l'influence que la présence de très bons élèves a dans le pilotage de l'enseignement ; ou bien l'impact que la présence d'un observateur, mettons un observateur dont la compétence en mathématiques soit reconnue par l'enseignant, aura sur sa façon d'enseigner ; ou encore, autre manifestation, les effets de "surenchère" didactique dans les manuels et l'inflation d'un certain type de tâches scolaires, voire de dispositifs matériels ou informatiques, etc.

L'élève en difficulté.

Dans les représentations communes, l'école s'intéresse d'abord au devenir des élèves et de leurs savoirs. Pour elles, l'épistémologie, l'examen des savoirs, de la manière dont ils se constituent et se transmettent ne sont que des moyens : tantôt ergonomiques pour préparer des tâches d'enseignement, tantôt diagnostiques lorsqu'une difficulté se présente (un élève ou des élèves n'apprennent pas comme prévu). Les échecs réguliers et suffisamment massifs signifieront bien sûr que les objets proposés ne sont pas adéquats, ou qu'ils sont mal adaptés. Les données de la psychologie seront peut-être requises pour expliquer cela. Leur rôle sera d'apporter un éclairage sur les objets choisis et développés (pour un projet proprement culturel). Dans ce cas, les corrections éventuelles seront portées en amont de l'acte d'enseignement. Cela reste du ressort

sinon d'un mathématicien, du moins de l'enseignant cautionné voire assisté par un mathématicien.

En revanche pour de telles représentations, l'échec scolaire individuel n'est finalement que l'échec de l'élève à s'être laissé porter par le programme. Cela ne peut être imputé aux objets d'enseignement. Selon cet ordre d'idées, la première réponse didactique à ce type d'échec (individuel) sera une régression dans le programme. Les mesures didactiques préconiseront d'assurer les prérequis, de ramener l'activité aux points supposés de blocage, aux étapes qu'on soupçonnera avoir été manquées. Des moyens didactiques à prescrire devant les difficultés éventuelles des élèves sont par avance mis à disposition du maître du simple fait de leur inscription dans l'échelonnement des tâches scolaires. Par conséquent, il s'agira essentiellement de déterminer l'endroit de la reprise. Le "diagnostic" consistera en une qualification générale (et forcément floue) du niveau de compétence des élèves concernés. Il ne sera pas nécessaire d'analyser en détails ce qu'ils font et produisent, ni même de développer une représentation plus détaillée des "naïvetés" enfantines. Dans les cas persistants de difficulté, on pourra faire appel à une assistance, soit de la part d'un appui pédagogique, soit de la part de spécialistes (psychologues, psychopédagogues, logopédistes). L'échec scolaire vaudra à l'élève un retard dans sa scolarité, voire dans les cas plus graves son piétinement dans les programmes les plus élémentaires. Dans les cas extrêmes, on finira par conclure que l'origine des difficultés n'est pas proprement didactique : cela deviendra un problème psycho-social, mais pas vraiment d'enseignement et encore moins de mathématiques pratiquées. C'est alors en amont de tout enseignement que l'on tentera de restaurer les conditions d'un engagement dans une pratique scolaire, par exemple en recourant au psychologue.

III : Regarder ce que ça donne

On peut comprendre ce que "regarder ce que ça donne" peut signifier pour une pratique de chercheur. Et c'est bien à partir d'une réflexion sur mon travail de terrain, en classe travaillant tantôt avec des élèves en individuel, en groupe, en collaboration directe ou non avec les enseignants que j'en suis venu à ce thème. Or si "ma pratique" n'est pas une pratique d'enseignement, elle s'appuie néanmoins sur une activité enseignante comparable à celle des enseignants, psychopédagogues et autres sujets exerçant une activité de tutelle. Pour des questions de recherche, il m'a été nécessaire d'explicitier la nature de ces activités, et je ne fais ici que poursuivre une réflexion que j'ai amorcée dans d'autres articles. Les considérations sur les activités mathématiques des divers acteurs de la classe montrent que la portée de "regarder ce que ça donne" dépasse le seul horizon du chercheur.

Le retour à l'expérience comme modalité du rapport à l'ignorance.

Je parle de rapport à l'ignorance parce que le savoir ne va pas de soi. Non seulement le savoir n'est pas donné, il faut le produire (le trouver, l'inventer, l'élaborer), mais il n'est pas non plus d'emblée partagé, il s'agira aussi (et encore) de le transmettre (et de le perpétuer). Pourquoi faudrait-il "regarder ce que ça donne" ? Parce que nos connaissances sont limitées, et que notre ignorance tout simplement nous oblige fréquemment à "tenter" telle ou telle hypothèse. Pourtant mon propos dépasse ce constat car, placée dans la perspective de transmettre, répliquer ou de reproduire sinon le savoir, du moins des processus de son élaboration, l'expression "rapport à l'ignorance" prend une toute autre épaisseur. Le processus d'enseignement est censé déboucher sur une réplique du savoir, il reste néanmoins incertain : on ne peut assurer d'avance qu'il aboutira, il pourrait emprunter des voies inattendues, prendre des formes quasi méconnaissables. Le rapport à l'ignorance est aussi rapport à l'incertitude dans laquelle nous place le système étudié qui garde une grande part d'autonomie. La relative impuissance à résoudre certains

problèmes d'enseignement, par exemple les problèmes d'élèves en difficulté scolaire est là pour nous le rappeler. L'incertitude à laquelle nous devons faire face est suscitée par l'ignorance de l'élève à laquelle font écho l'ignorance de l'enseignant et celle de son institution !

Comme annoncé au début, je veux centrer cette étude sur les interactions de l'enseignant et de l'enseigné en train de "faire", de "refaire" ou de "faire faire" des mathématiques, chacun de ces acteurs aux prises à sa manière avec l'environnement immédiat et le milieu. L'idée de faire du couple enseignant-enseigné un sujet est fondée sur l'analogie qu'il y a, du point de vue des activités en jeu, entre processus d'enseignement et processus d'apprentissage. Je faisais remarquer en effet que l'enseignant comme l'élève progressent vers un contrôle accru de leurs activités respectives, leur permettant de limiter les répétitions et les reprises. (Si, à ma connaissance, un tel rapprochement est original et concerne directement la question du cognitif en didactique, l'idée d'examiner les reprises dans la régulation des activités enseignantes a déjà été développée par G. Brousseau, entre autres dans : *Les différents rôles du maître*. In Bulletin de l'association mathématique du Québec, vol XXVIII, n° 2, mai 1988, p. 14-24). J'avais dit alors que l'enseignant entretenait un rapport particulier à l'ignorance : lui qui ne serait pas obligé de répéter ce qu'il sait va pourtant y être nécessairement conduit par son rôle, et ainsi être tenu d'opérer des répétitions et des reprises sans toujours pouvoir en contrôler l'ampleur (ici, je reprends à mon compte l'idée de G. Brousseau). Cela revient à redire qu'il faut pouvoir concevoir le processus d'enseignement comme ouvert.

L'élève est en train d'apprendre et à terme il saura ; il n'aura en principe plus jamais à y revenir ; il pourra même croire que ce qu'il sait lui aura été donné (par intuition, par hérédité, par héritage, etc.), ou qu'il y aura accédé relativement spontanément et ponctuellement. Il ne va pas de soi qu'un sujet puisse méditer sur son apprentissage. De la même manière, l'enseignant n'a a priori pas de raison d'explicitier et de penser les activités enseignantes qui se développeront en classe, et encore moins, pour autant qu'il en ait conscience, celles du système qu'il forme avec son (ses) élève(s). Mais, qu'il y ait pensé ou non ne change rien au fait que son activité enseignante le place en position d'ignorance de cela même qu'il sait, et dont il a été fait dépositaire pour le transmettre.

Le rapport à l'ignorance du savant (du chercheur) est une prise de responsabilité vis à vis de l'avancée du savoir et de son organisation (du développement scientifique par exemple). Le rapport didactique à l'ignorance s'inscrit dans son prolongement en prenant en charge (pour le réduire) l'état d'ignorance des élèves (étudiants). C'est une autre façon de dire que la didactique prend en compte l'intention sociale d'enseigner. Ainsi, la question du rapport à l'ignorance ne concerne pas que les producteurs de connaissances nouvelles (savants, chercheurs), mais aussi ceux dont le rôle est de diffuser et transmettre les connaissances, en particulier tout enseignant qui entend réfléchir (ou penser) sa pratique.

Psychologues, cognitivistes, linguistes, épistémologues, etc. s'accordent pour la plupart à penser que l'on ne peut pas transmettre directement les savoirs, mais que cette transmission passe par une élaboration active de l'enseigné, l'enseignant ne pouvant que se contenter d'amorcer et de guider ce processus. Par contre, beaucoup de ces mêmes personnes s'illusionnent encore sur la possibilité d'une application directe des données et résultats scientifiques aux didactiques et en général aux questions d'enseignement. Ils ne se rendent pas compte qu'ils reproduisent ainsi au niveau des processus d'enseignement ce qu'ils réfutent, parfois violemment, au niveau de l'apprentissage, de la communication et de la transmission des connaissances. Dire ceci, c'est dire que le rapport du chercheur à l'ignorance ne rejoint pas nécessairement le rapport didactique à l'ignorance. En effet, le chercheur, tout comme l'apprenant, pourra, une fois ses résultats obtenus, ne plus y revenir et penser que le savoir résout toute question relative à l'ignorance. Il succombera alors à une illusion qui consiste à confondre la problématique de la production de nouveaux savoirs, problématique à laquelle il aura fourni une solution, à celle de la diffusion, de

la transmission et de la pérennisation de ces derniers. (Et de ce fait on le verra fréquemment ne rien comprendre aux problématiques didactiques, tout en croyant ses opinions sur l'école autorisées par son statut d'apprenant professionnel).

Ce n'est donc pas sur cet aspect global que peuvent se rencontrer le savant et l'enseignant, mais bien plutôt sur autre chose. La position de l'enseignant s'apparente en effet à celle du chercheur lorsque ce dernier, fort de ses études, recoupements d'informations, développements théoriques, traitement de modèles, etc. est amené à retourner dans le domaine expérimental pour, en quelque sorte, "redonner la parole à la nature" (au système qu'il étudie). C'est exactement ce que recouvre l'expression : "regarder ce que ça donne". On comprend que cela représente pour l'enseignant et le chercheur, et en particulier pour le chercheur en didactique, une occasion de rencontre et de reconnaissance sur le terrain expérimental. L'un comme l'autre s'y trouvent en effet en position de "retour sur le savoir". Bien entendu, dire que les deux protagonistes se retrouvent dans la même position, et que leurs périple sont "également bouclés" ne signifie pas qu'ils soient identiques. Les études du chercheur l'auront engagé en effet à effectuer quelques tours (par exemple en épistémologie) que l'enseignant est dispensé de faire, voire qu'il ne pourrait pas soupçonner (les études de Piaget sur la conservation du nombre ont quand même surpris bien des enseignants, cela se comprend). En tous cas, je crois pouvoir affirmer que ce que j'avance ici rend bien compte de ce que j'ai pu constater par moi-même à chaque fois que j'ai eu l'occasion de mener des recherches en classe ; c'est aussi ce que nous avons tenu à signifier, Jean-Michel Favre et moi-même par nos rédactions conjointes.

Plus personne ne contestera l'avantage qu'il y a pour l'enseignement à s'appuyer sur la motivation de l'élève, que l'on puisse compter sur son appétence à apprendre, son engagement résolu dans le processus, mais aussi sa pleine assumption de sa position dans le système. Il en va symétriquement pour l'enseignant, quoique la question soit plus délicate à traiter puisqu'elle se mêle à des questions professionnelles, et idéologiques. Les représentations communes qui voient l'enseignant comme détenteur et dépositaire du savoir à transmettre oublient trop souvent que cela n'est qu'une condition à l'entreprise et qu'au-delà, tout reste à faire. Tout le monde sait que les enseignants n'y réussissent pas toujours avec le même bonheur. On invoque alors tantôt des dons personnels, ou encore la vocation avec laquelle il faut se dévouer à cette tâche ingrate (voir impossible). Personnellement, je considérerai simplement que l'interaction enseignante exige beaucoup de la part de l'enseignant, et qu'elle échappe en partie à son contrôle. Une question s'impose : **où est donc la difficulté à enseigner ?** J'ai déjà dressé la liste de ce qui sépare enseignant et enseigné, on y trouve quelques obstacles à surmonter. Je me contenterai ici d'une seule considération qui permet de mieux cerner ce que j'entends par l'expression « rapport à l'ignorance ». Comment définir à propos d'un savoir donné l'appétence à enseigner, non pas en regard de l'élève, c'est-à-dire de l'intérêt et de la sollicitude que l'on porte à lui et au développement de ses moyens et de son autonomie, mais en regard du savoir lui-même ? Peut-on être curieux du comptage de 1 à 10, de la soustraction ou de la division en colonne, de la résolution de problèmes arithmétiques, de la classification des quadrilatères, etc., lorsque ce sont pour nous des domaines éculés ? Ne revient-il qu'au psychologue de la cognition voire à l'épistémologue d'être intrigués par de telles questions ? Une chose est sûre. L'interaction d'enseignement passe nécessairement par la mise en commun d'un segment de réalité objective. Si l'enseignement présente quelque analogie avec un processus d'apprentissage, on doit retrouver en regard des contenus et de la réalité traitée une symétrie des positions (enseignant-enseigné). A la si précieuse "curiosité de savoir" de l'élève correspondrait alors une "curiosité d'ignorer" de l'enseignant. Faut-il vraiment que l'élève sache cela ? Et d'ailleurs, suis-je si certain qu'il ne le sait pas déjà ? Comment donc ça peut être quand on ignore cela ? Comment va-t-il bien pouvoir s'y prendre pour le savoir ? etc., mais encore et surtout : **Comment vais-je m'y prendre, moi l'enseignant, pour déjouer son état, le déstabiliser afin de faire reculer le front de ses savoirs et de ses ignorances ?** Toutes ces questions signent le rapport didactique à l'ignorance.

Dans l'article intitulé : *Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques* (chap. *Les situations a-didactiques*, in *Didactique des Mathématiques*, Textes de base en pédagogie, pp. 110-120.), G. Brousseau s'est expliqué sur «*La nécessité du sous-système "Milieu a-didactique"*», je cite (p. 114-115) : « A ce moment, à la fin de l'enseignement, le système enseigné est supposé lui donner la possibilité de pouvoir faire face, à l'aide du savoir appris, à des systèmes dénués d'intentions didactiques. Le savoir enseigné à l'élève est supposé lui donner alors la possibilité de lire ses relations avec ces systèmes comme de nouvelles situations a-didactiques, et par ce moyen, leur apporter une réponse appropriée. Le milieu est l'antagoniste du système enseigné, ou plutôt, précédemment enseigné. » Il écrit aussi : «...la situation didactique doit comprendre, réellement ou simplement évoquée, une représentation de ces rapports futurs. Elle doit inclure et mettre en scène un autre système, distinct du système éducatif et qui représentera "le milieu". Au fur et à mesure des progrès de l'élève, cette représentation culturelle et didactique du milieu sera supposée se rapprocher de la "réalité" et les relations du sujet avec ce milieu devront s'appauvrir en intentions didactiques. » Je poursuis cette analyse en considérant que l'enseignant devra faire un pas de plus que l'élève, ou plutôt prolonger la démarche qu'il aura suivie en tant qu'élève, pour "remettre à distance" cette "représentation culturelle et didactique du milieu" qui se sera en définitive rapprochée de la "réalité". Je n'utilise plus le terme "supposée", car si la phrase de Brousseau anticipe sur l'issue du processus d'enseignement, la mienne la considère comme dépassée. C'est la nécessité de cette opération qui fait que sur le plan des pratiques, il ne sera plus possible de "fusionner" ainsi le maître et l'élève en un « sujet enseignant-enseigné », mais il est nécessaire de les considérer comme des sous-systèmes. Le modèle de Brousseau est construit à partir du point de vue de l'enseigné, mon propos tente de penser comment symétriser ce modèle pour qu'il rende compte du point de vue de l'enseignant. Il est clair que ce n'est pas une symétrie exacte, mais une reconstruction sur un plan supérieur (selon un mouvement en spirale, cf. l'argument piagétien désormais classique de l'abstraction réfléchissante). Le "rapport à l'ignorance" et le "retour sur l'activité" ("faire, refaire, faire faire") sont les moyens de la nécessaire réouverture de ce que le savoir avait réglé (pour tous ceux qui le savent), afin de "redidactifier ce qui s'était tellement rapproché de la réalité" (non porteuse d'intentions didactiques). Dans les écrits des didacticiens de mathématiques, on trouve depuis longtemps la mention de ce mouvement, et la plupart du temps il est évoqué par le croisement de deux oppositions : *contextualisation / décontextualisation* et *personnalisation / dépersonnalisation*.

Enfin, s'il est nécessaire d'introduire dans le modèle du système d'enseignement quelque chose qui anticipe sur ce qu'il adviendra après son extinction, il me semble tout aussi important d'inclure aussi quelque chose qui indique les limites du savoir de l'enseignant, limites au-delà desquelles l'enseigné est appelé (tôt ou tard) à se mouvoir. L'école en effet a déjà prévu de lui faire rencontrer des enseignants plus savants encore, qui le solliciteront à leur tour. N'oublions pas non plus toutes les sollicitations culturelles externes à l'école.

L'expérience que j'ai des questions didactiques en classe d'enseignement spécialisé me porte à insister sur ce fait. Un des dangers y est en effet que l'enseignant, tout préoccupé par les difficultés et les échecs du processus d'enseignement qu'il tente de mettre en place, ne voie plus l'écart gigantesque qui se creuse entre les contenus abordés en classe et ceux qu'il s'agirait d'aborder (évoquer, faire rencontrer, rendre accessibles, etc.). Je n'hésiterai pas à dire qu'**on entre alors dans un processus de "reconduction dans l'ignorance"**. Voilà pourquoi il est toujours primordial que l'enseignant puisse être résolu à aborder des thèmes et des objets mathématiques plus sérieux que les savoirs instrumentaux. L'écueil qui guette le maître serait de trouver, chez l'élève et dans les difficultés qu'il lui suppose, prétexte à ne pas aborder des questions pour lesquelles il se sent lui-même peu sûr (peu au fait, relativement ignorant) ; tandis que celui qui menace l'institution serait de prendre prétexte de l'état de carences (sensorielles, affectives, intellectuelles, culturelles, etc.) de ces élèves pour croire que leur ignorance serait la moindre d'entre elles. En conséquence de quoi, elle pourrait s'autoriser à réduire, pour ces élèves,

“l’injonction d’apprendre”. Les enseignants spécialisés sont conscients que les collègues que leurs élèves rencontrent (dans la suite de leur parcours) ne seront pas forcément plus savants qu’eux-mêmes. N’étant de la sorte plus confrontés (professionnellement) à leurs limites, c’est comme si l’institution dispensait ces enseignants de savoir (d’en savoir plus).

Le caractère imprévu et néanmoins intelligible des événements rencontrés en enseignant.

L’enseignement consiste en ce double mouvement (dévolution-institutionnalisation) qui part d’un savoir donné pour induire certaines connaissances qui en retour seront saisies dans un savoir (celui-là ou un autre car il pourra avoir changé en cours de route). Il s’agit d’un processus au cours duquel l’enseignant réalise un certain savoir (engage une dynamique à propos de quelque objet pour réaliser ce qu’il sait), et cela passe par l’actualisation de connaissances sous-jacentes (on doit plonger jusqu’au niveau de l’activité, faire faire à l’élève les mathématiques en question). Si en définitive il tient toujours à l’enseignant, fort de son savoir, d’amorcer le processus, en revanche l’issue de ce dernier dépendra de l’enseigné. Dit autrement, l’enseignant a beau savoir que son activité et celle de l’enseigné n’aboutiront qu’à des répliques du savoir, il n’en reste pas moins qu’il lui est très difficile, voire impossible, d’anticiper le détail des formes qu’elles prendront, ni le moment où elles adviendront, ni même qui en sera l’auteur (pourra-t-il vraiment les faire produire à l’élève ?). (Vu cela, une position extrême serait de minimiser l’interaction d’enseignement considérant que tout enfant apprend pour autant qu’il soit mis dans un milieu propice, et que l’enseignant pourra limiter son action à contrôler que ce soit bien le cas. Mais qu’en sera-t-il du contenu ?)

A cela s’ajoute le fait que les acteurs ne contrôlent que très mal les ajustements cognitifs sans cesse à l’œuvre dans les interactions d’enseignement (enseignant-enseigné-milieu). Ainsi par exemple cette élève qui lors de notre entretien avait subitement cardinalisé une collection (retenu le dernier nombre prononcé dans son comptage comme le cardinal de la collection), action qu’elle n’avait jusqu’alors jamais manifestée, et moi qui me suis surpris, même pas trois minutes après, à considérer qu’elle l’avait su de toujours. Ici est en cause la lenteur du processus de prise de conscience, en l’occurrence chez le sujet-enseignant. Ce genre de faits oblige à réfléchir sur les rapports entre l’observation et le pilotage de l’interaction. On pourrait dire que l’élève ayant accédé à un autre niveau de réalité, je m’y suis immédiatement ajusté (adapté) sans même m’en rendre compte, alors que j’avais bel et bien observé l’événement. Dès lors, la question reste ouverte de savoir comment les savoirs et les connaissances induites chez l’enseignant par les conduites de l’enseigné influent sur le pilotage de l’interaction.

Certes, le savoir apporte à l’enseignant quelques certitudes : il peut en partie guider l’apprentissage de l’élève, c’est-à-dire l’engager et le diriger sur tel ou tel objet, mais aussi se faire une idée de la forme que cela prendra vu les contraintes culturelles et scolaires ambiantes. Bien entendu, à ce niveau individuel, il ne s’agira pour lui que d’indications moyennes. Ainsi par exemple, il est hautement naïf de croire qu’un programme scolaire représente le parcours d’un individu, fût-il ce “sujet didactique” qu’est “l’élève lambda”. Car le programme s’adresse d’abord à l’enseignant et ce dernier y est autrement tenu que l’élève. C’est donc la progression du couple “enseignant-enseigné” elle-même qui est ici codifiée. A ce titre c’est un objet de référence des pratiques enseignantes qui énumère en détails les actes enseignants (un ordre, si ce n’est une véritable organisation). Il procède d’une représentation des savoirs (par exemple sous forme de moyens didactiques d’évocation des connaissances sous-jacentes : situations, et appareils de tâches scolaires, etc.) et supporte une représentation du processus d’enseignement. Y rapporter les productions des élèves (réussites/échecs, traces écrites, productions, etc.), c’est attribuer d’emblée à ce cadre (des savoirs) la fonction de rendre compte des productions des élèves, c’est comme je l’ai dit les interpréter d’avance.

Ces certitudes s'arrêtent là, car dans l'échange didactique, le savoir qui est dispensé et raccourci n'est pas partagé. Le risque encouru est donc qu'enseignant et enseigné se perdent (se perdent de vue, ou se perdent ensemble dans le dédale de leurs ajustements réciproques). L'ignorance, justement est un point aveugle pour le savoir. Soit elle se manifeste par l'inaction, l'inactivité (je ne sais faire, je m'abstiens de le faire, on ne me laissera pas faire, etc.), soit une activité va se déployer (faiblement organisée en regard du savoir en jeu), avortant (d'où inaction), ou se développant (via des reprises), se transformant alors à terme en quelque savoir. Dans ce dernier cas l'ignorance aura fini par s'évanouir et le savoir n'aura en définitive fait que produire (reproduire) du savoir.

Pour en revenir à la remarque rapportée ci-dessus, il semble donc que mon observation ne se situait pas sur le même plan que mon interaction avec l'élève et les objets à traiter. En d'autres termes, je ne puis me faire une idée de ce que l'élève pense qu'en rapport avec ce que je pense sur le moment, l'un en fonction de l'autre. D'où l'importance pour l'observation et l'expérience à me trouver en position d'être surpris. En ce sens, "regarder ce que ça donne" m'oblige à "refaire" donc est l'occasion de "mobiliser" ("remobiliser") certains schèmes, ou encore "d'accéder au niveau de l'activité", en direct ou en différé, peu importe. Le hiatus entre ce plan de l'observation et celui de l'interaction est exactement ce qui distingue la mobilisation des schèmes de pensée, qui ne requiert pas la conscience, et les opérations d'évocation de ces mêmes schèmes, via une représentation, voire un modèle, comme l'est une situation. Cela veut dire que la limite de notre compréhension de l'élève réside sinon dans cette identification du moins dans cette correspondance entre les pensées.

Une fois passées et localisées, les surprises seront reprises par l'analyse, puis décontextualisées et **resituées** dans le cadre d'autres études (donc reprises par le chercheur - tel est son apprentissage à lui). Dès lors beaucoup de ces observations en devenant intelligibles vont perdre leur caractère inattendu. Ainsi, les études sur chacun de ces domaines convergent et nous livrent des descriptions relativement complètes de l'éventail des conduites ou productions des élèves. Par exemple, fort du recoupement de diverses observations, dire que les élèves reproduisent toujours le même genre de réponses sur tel ou tel thème, c'est simplement dire qu'ils me permettent de reproduire - lors de l'analyse - les mêmes pensées, que leur observation induit les mêmes connaissances chez moi. Cette stabilité ne décrit ni ne concerne tant les sujets que les représentations (modèles) que je me fais d'eux (à juste titre ou pas).

Toutefois, je retiens de l'expérience avec les élèves en difficulté que cette intelligibilité (qui n'est rien d'autre que mon apprentissage, c'est-à-dire mon accès à un savoir qui me dispense des surprises de l'expérience) ne m'empêche pas de me trouver à la merci de leurs réactions. Par exemple, lorsque certains ne semblent ne pas "entrer dans la situation prévue", c'est-à-dire ne se laissent pas localiser dans un contexte qui fasse immédiatement réalité pour moi ; ou au contraire lorsque d'autres paraissent se prêter à la situation prévue, celle-ci finit quand même par diverger totalement du développement attendu. Ainsi ce que je sais du numérique, du point de vue mathématique, cognitif et didactique, n'empêche en rien de me trouver surpris, au point de ne pas toujours trouver à réagir à chaud. En particulier, devant tel élève de 9 ans qui se montre incapable de compter jusqu'à dix, ni de dire son âge, ni le nombre de doigts de ses mains. Que se passe-t-il donc ? Y aurait-il chez cet élève une "phobie" quelconque ? etc. Ou encore, lors d'une situation de partage, je ne me rends pas tout de suite compte que les élèves (8-9 ans) comptent et recomptent sans cesse les perles qu'ils se sont distribuées, puis enfin je m'en étonne. C'est comme s'ils étaient incapables de fixer le résultat de leurs comptages. Qu'est-ce que cela peut bien signifier à propos de la situation traitée ? Mon étonnement n'est pas moindre de les voir répondre parfaitement à mes injonctions de retenir leurs résultats. Pourquoi donc ne l'avaient-ils pas spontanément fait ? Mais surtout, puis-je être sûr qu'ils auront intériorisé cette exigence ?

Sur le vif, ce genre de surprises est la règle dans les situations d'enseignement. Or de tels cas, on en trouve partout, dans toutes les classes et quasiment à chaque occasion. Il semble aussi, comme j'ai pu moi-même l'observer, et ainsi que Alain Mercier l'a bien analysé dans sa thèse, que tout simplement les objets sensibles, les enjeux didactiques rencontrés par l'élève dans la situation puissent être fortement décalés et en retrait par rapport à ceux que traite l'enseignant. Quelque chose se passe, on ne sait pas toujours très bien quoi et pourtant, une fois dépris de notre propre "faire" (interaction avec le milieu), cela devient généralement intelligible, parfois jusqu'à nous paraître banal. Le paradoxe du caractère à la fois imprévu et néanmoins intelligible tient justement à ce travail d'accord et de résonance (au sens musical) entre les pensées respectives.

Envoi : Vous cognitez ? J'en suis fort aise. Eh bien jouez maintenant !

Je voudrais tenter maintenant un pas de plus et imaginer ce que pourrait être le jeu de l'enseignant ou du didacticien informés des caractéristiques cognitives de ses antagonistes. En d'autres termes comment définir le jeu d'une didactique qui tienne compte du cognitif comme facteur adverse, d'une didactique forcée à adapter ses moyens aux contraintes de son milieu, en un mot, intelligente, plutôt que celle d'une didactique qui s'efforce illusoirement et un peu bêtement à se conformer aux données des sciences cognitives. On sait la grande part faite dans la théorie des situations aux schémas et modèles de la théorie des jeux (Brousseau op.cit.). On peut y voir un aspect formel et théorique, un cadre commode pour penser les interactions à l'œuvre dans les systèmes didactiques. Et en effet, ils jouent ce rôle dans la théorie. Mais on aurait tort de n'y voir qu'une référence abstraite.

Très classiquement, et idéologiquement même, on a coutume de faire référence au jeu et à sa fonctionnalité dans les processus d'apprentissages des jeunes enfants, en prenant à partie soit des arguments d'inspiration éthologique (le jeu des petits chatons), soit des arguments ethnologiques (le jeu dans les rites d'initiation), ou encore des arguments d'inspiration psychanalytique (le jeu et l'espace transitionnel chez Winnicott), etc. On trouve d'ailleurs une argumentation de ce dernier type dans le texte de Brousseau cité précédemment, en l'occurrence dans le paragraphe intitulé : *Le jeu et la réalité.* (op. cit. p. 105 - 108.). Là encore c'est toujours le point de vue de l'enfant ou de l'élève (apprenant et enseigné) qui est prioritairement adopté. Pourtant lorsque l'on modélise le système didactique par un jeu, c'est-à-dire si l'on admet la pertinence d'une telle représentation, on doit considérer que l'enseignant est aussi un joueur, qu'il joue et qu'il est pris au jeu tout autant que le sera l'élève. Brousseau ne s'y trompe pas, bien qu'il mette trop exclusivement l'accent sur un aspect très partiel de la question, à savoir le jeu de l'enseignant avec le jeu de l'enseigné : « Le jeu du maître dans chaque système d'action concret définit et donne un sens au jeu de l'élève et à la connaissance. » (op. cit. p. 113.) Il serait dangereux d'interpréter cela selon un schéma simplement transitif : *l'interaction du maître avec {l'interaction de l'élève (avec le milieu)}*, qui nous ramène à ma critique du schéma : *le maître fait {faire (des mathématiques)} à l'élève*. De même, lorsque la théorie des situations définit la connaissance dans les termes de jeux, on retrouve ce privilège accordé au point de vue de l'enseigné, qui nous fait courir le risque de nous enfermer dans une interprétation étroitement constructiviste. Je cite encore (op. cit. p. 98) : « Au regard de la connaissance, le jeu doit être tel que la connaissance apparaisse sous la forme choisie, comme la solution, ou comme le moyen d'établir la stratégie optimale : est-ce que connaître telle propriété est le seul moyen de passer de telle stratégie à telle autre ? Pourquoi l'élève chercherait-il à remplacer celle-ci par celle-là ? Quelle motivation cognitive conduit à produire telle formulation d'une propriété ou telle démonstration ? Telle raison de produire ce savoir est-elle meilleure, plus juste, plus efficace que telle autre ? » Si le propos épouse le point de vue de l'enseigné afin de bien montrer comment la théorie s'en fait la porte-parole, il serait dangereux de ne retenir que cela et d'oublier quelques questions complémentaires : Qu'en est-il de l'enseignant et du didacticien, qui au fait du savoir à enseigner se posent de telles questions (celles que formule G. Brousseau) ? Quel travail fournissent-ils lorsqu'ils les examinent ? En toute rigueur, le modèle nous oblige à penser

l'enseignant comme un joueur, comment décrire son jeu et comment y rapporter la connaissance visée ? Pourra-t-on alors faire correspondre les deux points de vue : celui de l'enseigné et celui de l'enseignant ? L'écueil rencontré ici tient à ce que les cadres épistémologiques classiques privilégient la question de la constitution des connaissances et la production des savoirs nouveaux (les pratiques sociales de référence de niveau I et II de Rouchier, Cf. A. Rouchier 1990, Passeron 1989) au détriment de celle de leurs transmissions (les pratiques sociales de référence de niveau III de Rouchier). Adopter de manière trop insistante (ou exclusive) le point de vue de l'enseigné dans les descriptions du système d'enseignement accentue encore ce préjugé épistémologique.

Les principes énoncés par G. Brousseau ne sont pas faciles à respecter. Pour le didacticien ou pour l'enseignant, il est assez difficile d'imaginer à partir d'un savoir donné un jeu qui lui corresponde. A cela s'ajoute qu'en règle générale, on n'est pas sûr que l'élève (et encore moins la classe) ne dispose pas déjà de ce savoir. En fait, imaginer un tel jeu c'est justement mettre son savoir en jeu, c'est donc déjà entrer dans le jeu prévu. Chaque fois que l'on monte une situation, chaque fois que l'on prend connaissance d'une situation, on amorce le jeu. Très souvent on s'arrête là et on n'a pas l'occasion de le mener à terme. Ces tâches sollicitent fortement notre activité et là réside un redoutable obstacle que le cognitif (psychologique) oppose au didactique. On sait combien le sens est lié à l'action, au faire. Le danger est donc que tout le sens de la situation se réduise au faire, à l'activité que nous nous évoquons, ou que nous provoquons en classe. Tantôt le "faire" du maître, lors de la préparation, tantôt le "faire" de l'élève, lors de la leçon, chacun dissocié, chacun réduit à son sens (interne) propre, l'adéquation de ce que l'on fait faire à l'élève rapportée à la seule mise en correspondance du "sens inhérent à son faire" avec "le sens inhérent au faire du maître". C'est ce que l'on se contente d'établir dans la formation des maîtres, ou des parents, lorsqu'on leur propose de "faire" les tâches destinées aux élèves telles quelles. **Or dans ces correspondances, il n'y a plus aucun jeu car toute interaction est rompue.**

Mais pour mieux comprendre la nécessité du jeu, un exemple : *Une enseignante spécialisée s'occupe d'une "élève" très handicapée. Elle se demande si elle est capable d'établir des collections simples d'objets. Elle dispose de quelques éléments d'observation lors de tâches diverses allant de jeux de tris à des anecdotes récoltées hors du "temps scolaire". Par exemple, au cours du goûter la maîtresse propose diverses boissons à l'élève. La place-t-elle devant un réel choix ? Lorsque l'élève accepte telle proposition, le fait-elle en réponse à la sollicitation de la maîtresse ou bien le fait-elle en fonction de ce qui lui est proposé ? Par exemple, l'élève refuse toujours de boire du jus d'orange, elle dit ne pas aimer le jus d'orange, par contre elle aime le thé. A l'occasion d'un de ces goûters, la maîtresse demande : Voudrais-tu du thé ou du jus d'orange ? et la réponse est oui. La maîtresse réitère sa question : Voudrais-tu du jus d'orange ou du thé ? et la réponse est non. Il semble que l'élève ait donc répondu successivement aux questions : Voudrais-tu du thé ? et Voudrais-tu du jus d'orange ? Elle serait donc incapable, dans ce contexte, de prendre en compte à la fois deux éléments. Serait-elle capable de dire qu'elle préfère le thé au jus d'orange ? Peut-être pas, car cela lui demanderait d'avoir un jugement positif sur le jus d'orange. Mais son refus du jus d'orange tient-il au mot "orange" ou à un goût réellement éprouvé ? Il faut donc trouver une situation où la "connaissance" du jus d'orange par le "goût" soit décisive. Nous imaginons alors de nous "tromper" et de lui verser du jus d'orange alors qu'elle aura demandé du thé. Quand, à quel indice viendra-t-elle à se rendre compte de la "supercherie" ? Quelle sera sa réaction ? Jusqu'ici nous n'avons fait qu'imaginer une situation, allons-nous l'effectuer ? Quelle que fut la valeur de cette idée, la maîtresse a été fortement intriguée, et j'ai pu remarquer (en m'en étonnant) que pour elle cette démarche de pensée n'allait pas de soi, qu'il lui faut un effort d'imagination pour y entrer. Ce qui retenait l'enseignante était de s'imaginer qu'elle pourrait "tromper" l'élève, je dis bien s'imaginer, car il n'était pas encore question, à ce moment-là de notre réflexion, de tenter l'expérience. Or plus tard, et ce fut un argument décisif pour l'enseignante, cette manière de raisonner nous a permis de nous rendre compte que cette élève aimait les pommes, mais que dans le cadre de son*

institution on ne lui proposait que des "golden delicious" (en hiver) et une ou deux sortes d'autres pommes (en été et en automne). Ainsi, pour elle, les fruits qui étaient plutôt ronds, rouges et à peau lisse étaient des tomates (qu'elle aimait). La maîtresse ne savait pas non plus si pour cette élève, les pommes pouvaient être mauvaises. Le seraient-elles si elles étaient simplement vilaines ? etc. Dès lors, nous nous sommes demandés si l'institution ne jouait pas un bien mauvais tour (cognitif) à cette élève en n'assumant pas la responsabilité de la solliciter par un environnement riche en variétés de fruits (qui soit bien quelque chose de varié pour l'élève elle-même). Cette seule hypothèse, toujours prise comme une éventualité théorique, c'est-à-dire sans qu'il soit ici question d'émettre un quelconque jugement moral, aura permis à l'enseignante d'accepter de "jouer" et de "raisonner". Cela lui aura permis d'imaginer par elle-même, et sans l'aide de mes suggestions, des situations qu'elle soumettra finalement. Ainsi portée par le jeu, elle a pu amorcer une suite de tâches de reconnaissance de fruits, puis d'objets de la vie courante, etc.

L'idée de jeu indique gratuité, maîtrise mais aussi possibilité de se laisser prendre et emporter par l'activité. C'est donc un moyen de lever certains contrôles cognitifs supérieurs, et par là de maintenir le contrôle sur des activités très spécifiques : cela permet de s'adonner avec assiduité, persévérance et concentration à la poursuite de buts très particuliers. C'est aussi un moyen que nous avons d'ouvrir et de maintenir ouvertes des pensées chez l'élève, de manière à ce que les mises en relations soient possibles, ou encore de lui permettre de se "recentrer" sur ce que nous lui proposons. La difficulté pour l'enseignant réside dans son activité propre et le fait que celle-ci a toutes les raisons de se placer à un niveau fort éloigné de celle de l'élève. Dans l'exemple, "l'activité de la maîtresse au goûter" est centrée sur des catégories qui lui sont devenues intuitives au point qu'elles lui empêchent d'envisager ce que pourrait être "l'activité de l'élève". Lorsqu'elle me rapporte ces observations, je suis tout aussi démuné qu'elle, et je ne sais comment je me serais comporté moi-même à ce fameux goûter. Nous nous demandons ce que nous pourrions bien faire avec ça (les indications données par l'élève) ? La clé de l'affaire a résidé ici en un déplacement de la question en celle-ci : Non plus que faire ? mais : Que jouer ? Avec quoi ? Comment ? Par quel coup répondre à (celui de) l'élève ? C'est le seul moyen que nous trouvons pour prendre en charge l'incertitude de nos interactions (comprend-elle seulement ce qu'on lui dit ? répond-elle à nos questions ? sait-elle même de quoi nous lui parlons ? etc.).

Ainsi donc, la référence au jeu s'impose non seulement sur un plan théorique, mais encore sur un plan expérimental, à cause de la question extrêmement délicate de notre participation cognitive directe et inévitable au processus observé. Entretien après entretien, élève après élève, thème après thème, jamais le jeu ne me paraît joué d'avance. Pourtant, après coup, un très grand nombre de ces parties ne feront que me confirmer ce que je savais déjà. Cela tantôt m'enthousiasme, tantôt me laisse un arrière-goût de prévisible (soupir : il fallait s'y attendre ! il n'y a rien d'étonnant ! bon dieu mais c'est bien sûr ! j'aurais dû le prévoir et m'y prendre autrement !, etc.). Mais au juste cela même n'a rien d'exceptionnel ! Qui donc n'en a pas déjà fait l'expérience en jouant aux cartes (ou tout autre jeu de société) ?

REFERENCES

- Brousseau G. (1986)** Fondements et méthodes de la Didactique des Mathématiques, in Textes de base en pédagogie: didactique des mathématiques, textes réunis par J. Brun, Delachaux et Niestlé, Lausanne, 1996, pp. 45-143.
- Brousseau G.(1988)** Les différents rôles du maître. In Bulletin de l'association mathématique du Québec, vol XXVIII, n° 2, mai 1988, p. 14-24).
- Brun J. & Conne F. (1990)** Analyses didactiques de protocoles d'observation du déroulement de situations. Education et Recherche , n°3, 1990, pp.261-186, Editions universitaires Fribourg.
- Chevallard, Y. (1989)** Le concept de rapport au savoir. Séminaire de didactique des mathématiques et de l'informatique. 1988-1989, LSD2-IMAG, Grenoble, n° 108, p 33-98.
- Gonseth, F. (1949)** La géométrie et le problème de l'espace Neuchâtel: Editions du Griffon.
- Gonseth, F.** Du côté de la subjectivité: l'horizon de figuration. In Sciences, morale et foi. Textes recueillis, ordonnés et présentés par E. Emery, Dialectica, éditions: L'âge d'Homme, 1986, p.67-77.
- Gonseth, F.** Le problème du langage et la philosophie ouverte. Dialectica, vol 20, n°1, Lausanne, 1966.
- Mercier A. (1992)** L'élève et les contraintes temporelles de l'enseignement, un cas en calcul algébrique. Thèse de doctorat, Université de Bordeaux I.
- Passeron J-Cl. (1989)** Les trois savoirs sur le savoir, Actes du colloque: Finalités des enseignements scientifiques, Marseille, janvier 1989, CCSTI Provence Méditerranée, et groupe de Recherche en Didactique de la Physique de Marseille.
- Rouchier A. (1991)** L'institutionnalisation des savoirs dans l'enseignement des mathématiques, in Etude de la conceptualisation dans le système didactique en mathématiques et informatique élémentaires: proportionnalité, structures itérativo-récurrentes, institutionnalisation. Thèse de doctorat d'état, Université d'Orléans, UFR: Sciences Fondamentales et Appliquées, Orléans 1991, pp. 26-71.
- Rouchier A. (1996)** Connaissance et savoirs dans le système didactique, Recherches en didactique des mathématiques, vol. n° 16/2, pp 177-196, Grenoble, La pensée Sauvage.

Ettoy, le 5.9.96. F. Conne