



HAL
open science

Le Syllogisme Catégorique

Shahid Rahman, Mawusse Kpakpo Akueadotevi, Clément Lion, Zoe Mcconaughey, Alioune Seck

► **To cite this version:**

Shahid Rahman, Mawusse Kpakpo Akueadotevi, Clément Lion, Zoe Mcconaughey, Alioune Seck. Le Syllogisme Catégorique. Licence. France. 2022. halshs-03659665

HAL Id: halshs-03659665

<https://shs.hal.science/halshs-03659665v1>

Submitted on 5 May 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Le syllogisme catégorique

1. **Un aperçu général à partir de l'Organon, notamment des Premiers analytiques d'Aristote.** S. Rahman et M. K. Akue Adotevi.
2. **La Reconstruction Inférentialiste de K. Ebbinghaus (1964) comparée avec la Reconstruction de J. Corcoran (1972) :**
C. Lion et S. Rahman (2018). "Aristote et la question de la completeude". Dans "Philosophie antique", n°18, pp. 219-243
3. **Syllogisme à la Lumière de la Dialectique des Topiques. Avec des Exemples pour les premières trois figures, Preuve Indirecte et Réduction à la première figure.**
Extraits de
M. Crubellier, Z. McConaughey, M. Marion, S. Rahman (2018) : "Dialectic, The Dictum de Omni and Ecthesis". *History and Philosophy of Logic.*, vol. 40, No. 3, pp. 207-233.,
Z. McConaughey (2021): *Aristotle, Science and the Dialectician's Activity. A Dialogical Approach to Aristotle's Logic.* PhD-Université de Lille et
S. Rahman et A. Seck (2022) : Suhrawardī's Stance on Modalities and his Logic of Presence. Talk presented at the *Workshop on Arabic Logic in honour of Tony Street* University of California, Berkeley, 24-25 April 2022.

I

Un aperçu général à partir de l'Organon

Shahid RAHMAN

(shahid.rahman@univ-lille3.fr)

Traduit par Mawusse Kpakpo AKUE ADOTEVI

[<akueadotevi@yahoo.fr>](mailto:akueadotevi@yahoo.fr)

Avertissement : L'aperçu suivant est basé sur la présentation systématique des livres standard sur le syllogisme traditionnel. Il n'y a aucune prétention à l'originalité concernant cette systématisation

Définitions :

- Un syllogisme, dans le cadre des *Premiers analytiques*, est un raisonnement constitué de **trois jugements**, dont **deux prémisses** et **une conclusion**.

NB : Dans les *Premiers analytiques*, A1.25, Aristote soutient qu'une déduction, avec un nombre arbitraire fini de prémisses, peut être présentée comme une série d'inférences syllogistiques à deux prémisses chacune. Cette découverte d'Aristote est montrée l'ampleur de ses habiletés techniques.

- Chaque proposition (d'un jugement) est composée de **deux termes**, habituellement mis en couple comme le sujet et le prédicat.
- Le sujet de la conclusion est appelé le *terme mineur*

- Le prédicat de la conclusion est appelé le **terme majeur**
- La prémisses qui contient le terme mineur (le sujet de la conclusion) est appelée la **prémisse mineure**
- La prémisses qui contient le terme majeur (le prédicat de la conclusion) est appelée la **prémisse majeure**
- Le second terme de chaque prémisses est appelé le **moyen terme** et il se retrouve dans les deux prémisses
- La conclusion ne contient jamais le moyen terme.
- Les prémisses et la conclusion doivent se présenter sous l'une des formes propositionnelles suivantes :
 - A (Tout... : universelle affirmative)
 - E (Nul/Aucun... : universelle négative)
 - I (Quelque... : particulière affirmative)
 - O (Quelque... ne... (pas) : particulière négative)

Une inférence syllogistique peut être effectivement comprise comme la recherche du moyen terme qui pourrait faire le lien entre les termes d'une conclusion donnée.

Remarque :

Il faut noter que :

- il ne s'agit pas de logique propositionnelle
- il n'y a point de syllogisme à une seule prémisses
- il n'y a pas plus de complexité dans une prémisses que celle de la quantification des prédicats monadiques. C'est-à-dire :
- il n'y a pas de prémisses qui contiennent des combinaisons de connecteurs avec les quantificateurs
- il n'y a pas de syllogisme avec plusieurs quantifications

- il n'y a pas de syllogisme qui exprime l'égalité

Ces deux dernières remarques sont dues au fait que Aristote n'inclut pas les relations dans sa théorie du syllogisme. Les inférences à partir d'une prémisse donnée obéissent aux règles suivantes, qui régissent les rapports entre les formes **A**, **E**, **I**, **O** :

- de la vérité de **A**, suit la vérité de **I** ; de la vérité de **E**, suit la vérité de **O** (si l'univers du discours est non vide).
- si **I** est fausse, alors **A** est fausse ; si **O** est fausse, alors **E** est fausse.
- de la vérité de **A**, suit la fausseté de **O** et vice versa ; de la vérité de **E**, suit la fausseté de **I** et vice versa.
- **A** et **E** ne peuvent pas être vraies simultanément (mais les deux peuvent être simultanément fausses ; **I** et **O** ne peuvent pas être simultanément fausses (mais elles peuvent être simultanément vraies).

Les figures du syllogisme

Aristote lui-même ne considérait que trois figures.

Et ces trois figures résultent du fait que Aristote cherchait la manière dont il pouvait mettre en relation les deux termes T et T' à partir du moyen terme. Il découvre alors trois possibilités : ou le moyen terme est au milieu de T et T' (première figure), ou T et T' sont à gauche du moyen terme (deuxième figure) ou les deux sont à droite du moyen terme (troisième figure).

Cela donne schématiquement :

Première figure :

T
M
T'

Deuxième figure :

T
M
T'

Troisième figure :

T
M
T'

On voit, dans ce cas, qu'il n'y a pas de place pour la quatrième figure. Cependant, on peut distinguer la quatrième figure de la première figure en modifiant la position du moyen terme en relation avec les positions du sujet (petit terme) et le prédicat (grand terme).

Pour la première figure :

○ P
↑ M ↓
S ○

Ce qui donne :

M P

S M

Et pour la quatrième figure :

 P ◦
↓ M ↑
◦ S

Ce qui donne :

P M
M S

On peut en retenir que Aristote ne considérait pas vraiment le sujet et le prédicat comme éléments importants dans la structure du syllogisme.

Voici toutefois les quatre figures clairement présentées :

Fig. I	Fig. II	Fig. III	Fig. IV
M P	P M	M P	P M
S M	S M	M S	M S
-----	-----	-----	-----
S P	S P	S P	S P

I. Les inférences valides:

Aristote étudie deux principales voies pour déterminer les inférences valides qui correspondent à chaque figure.

La première voie est faite de considérations inférentielles qui font état de distinctions qualitatives (formes affirmative et négative) et de distinctions quantitatives (l'universel et le particulier).

La seconde voie est celle de la *stratégie du fondement*. Selon cette stratégie, une inférence syllogistique est valide si elle peut être fondée sur un syllogisme valide de la première figure, considérée comme parfaite. L'idée ici est de tester cette inférence, de voir si elle peut être transformée, par des manipulations syntaxiques – appelées *réduction* – en une inférence parfaite. Au moyen âge, cette idée de syllogisme parfait était comprise dans le sens de la transitivité de la relation d'inclusion (...) exprimée par le principe *dictum de omni et de nullo*. Autrement dit, la raison de la préférence des syllogismes de la première figure est que ces derniers étaient considérés comme fondés sur la propriété sémantique de l'inclusion et que cette propriété sémantique offrait un certain fondement d'évidence.

Il est fort probable que Aristote n'utilise pas la méthode de réduction pour tester un syllogisme i.e. voir s'il est valide ou non, mais plutôt pour en rendre la validité clairement visible.

Si ça s'avère correct alors le syllogisme parfait c'est pas un axiome mais une règle d'inférence (cf. Ebbinghaus (1964, Corcoran 1972) – voir II en dessus).

Il est important de souligner que quoique l'on puisse voir les *Premiers analytiques* comme le développement d'une théorie de l'inférence, les considérations épistémologiques n'y sont pas du tout étrangères. En effet, Aristote semble fixer quelques conditions telles que les termes de la conclusion ne doivent pas être disposés de la même manière que dans les prémisses. Un syllogisme comme *Tous les étudiants sont étudiants, Tous les étudiants sont étudiants, donc Tous les étudiants sont étudiant* semble être interdit. De plus il semble que les propositions

logiquement valables comme *Tous les étudiants sont étudiants* ne peuvent pas constituer la conclusion d'un syllogisme, et probablement pas les prémisses.

Les distributions

Sujet :

Les universelles, affirmatives et négatives, distribuent le sujet (force universelle)

Les particulières ne distribuent pas le sujet (force particulière)

Prédicat :

Les affirmatives ont un prédicat non distribué

Les négatives ont un prédicat distribué

D'où :

Les universelles affirmatives ont un sujet distribué et un prédicat non distribué

Les universelles négatives ont à la fois le sujet et le prédicat distribués

Les particulières affirmatives ne distribuent ni le sujet ni le prédicat

Les particulières négatives ont un sujet non distribué et un prédicat distribué

La distribution des axiomes

Axiomes de quantité

A1 : Le moyen terme doit être distribué au moins une fois

A2 : Aucun terme ne peut être distribué dans la conclusion qui ne soit distribué dans les prémisses

Axiomes de qualité

A3 : Si les deux prémisses sont négatives, il n'y a pas de conclusion

A4 : Si une des prémisses est négative, la conclusion doit être négative

A5 : Si aucune des prémisses n'est négative, la conclusion doit être affirmative

De ces axiomes méta-syllogistiques (auxquels s'ajoute la transitivité), on obtient les théorèmes suivants :

- I) Le nombre de termes distribués dans la conclusion doit être inférieur d'un au nombre total de termes distribués dans les prémisses
- II) Si les deux prémisses sont particulières, il n'y a pas de conclusion
- III) Si une des prémisses est particulière, la conclusion doit être particulière
- IV) Si la majeure est une particulière affirmative et la mineure une universelle négative, il n'y a pas de conclusion

Preuve des théorèmes

T.I: Le nombre de termes distribués dans la conclusion doit être inférieur d'un au nombre total de termes distribués dans les prémisses.

Le nombre de termes distribués ne peut pas être plus grand que le nombre total de termes distribués dans les prémisses (A2)

Le moyen terme, qui doit être distribué au moins une fois (A1), n'apparaît pas dans la conclusion.

Donc, c'est ce terme qui doit manquer dans la conclusion

T.II : *Si les deux prémisses sont particulières, il n'y a pas de conclusion.*

Si les deux prémisses sont des particulières négatives, il n'y a pas de conclusion

Si les deux sont affirmatives, il n'y a pas de terme distribué et aucune conclusion n'est donc possible

Si une des particulières est affirmative et l'autre négative, alors il y a seulement un terme distribué. S'il y a une des prémisses qui est négative, la conclusion doit être négative, mais alors le prédicat sera distribué dans la conclusion et alors le nombre de termes distribués dans la conclusion ne sera pas inférieur d'un ; ce qui contredit T.I.

T.III : *Si une des prémisses est particulière, la conclusion doit être particulière.*

Si les deux prémisses sont négatives, il n'y a pas de conclusion (A3).

Si les deux prémisses sont particulières, il n'y a pas de conclusion (T.II).

Si les deux prémisses sont affirmatives, une particulière et l'autre universelle, et la conclusion est universelle, la conclusion ne pourra pas contenir moins de termes distribués que les prémisses. Donc la conclusion doit être particulière – sans aucun terme distribué.

Si une des prémisses est affirmative et l'autre négative, nous avons :

1. une universelle négative et une particulière affirmative. Mais alors le nombre total de termes distribués est de deux. D'après A4, la conclusion doit être négative ; mais si elle est universelle, elle devra distribuer deux termes, ce qui contredit T.I. d'où la conclusion doit être particulière.
2. une universelle affirmative et une particulière négative. D'après A4, la conclusion doit être négative. Si elle est négative et universelle, le nombre de termes distribués sera de deux, et cela ne sera pas plus petit que le nombre de termes distribués dans les prémisses (qui est aussi de deux). Donc, la conclusion doit être une particulière négative. Si la prémisses particulière est négative, la conclusion sera négative.

T.IV : *Si la majeure est une particulière affirmative et la mineure une universelle négative, il n'y a pas de conclusion.*

Selon A4 et T.III, la conclusion doit être une particulière négative. Donc le prédicat (le grand terme) est distribué dans la conclusion. Selon A2, le grand terme doit être distribué dans la prémisses majeure, mais la majeure est une particulière affirmative et les particulières affirmatives ne distribuent pas leurs termes.

Il suit, de tout cela, des théorèmes spécifiques pour chaque figure syllogistique.

Dès lors qu'il y a 4 types de proposition catégorique et qu'un syllogisme est fait de trois propositions, nous avons $4 \times 4 \times 4 = 64$ modes par figure. Et si nous admettons qu'il y a 4 figures, alors nous avons au total $64 \times 4 = 256$ modes syllogistiques.

Les combinaisons possibles sont donc les suivantes :

AA, AE, AI, AO

EA, EE, EI, EO

IA, IE, II, IO

OA, OE, OI, OO

Les éliminations:

Axiome 3: EE, EO, OE, OO

Théorème 2 : II, IO, OI

Théorème 4 : IE

Ainsi, dans chaque figure, nous devons avoir :

AA, AE, AI, AO, EA, EI, IA, OA.

Figure 1

Théorème 1: La mineure doit être affirmative

La preuve : Si la mineure est négative, la conclusion est négative, et le prédicat y est donc distribué. S'il y est distribué, il doit être distribué dans la majeure. Donc la majeure est négative ; mais de deux prémisses négatives ne suit aucune conclusion.

Nous éliminons ainsi : AE, AO

Théorème 2 : La majeure doit être universelle.

La preuve : Selon T.1.f1. la mineure est affirmative, donc le moyen terme ne peut y être distribué. Mais d'après A1, le moyen terme doit être distribué une fois, donc il doit l'être dans la majeure. S'il est distribué dans la majeure, cette majeure doit être universelle (qu'elle soit affirmative ou négative).

Ainsi se trouvent également éliminés : IA, OA

Nous avons alors :

AA, AI, EA, EI

Ce qui donne

AAA, et AAI (ni AAE ni AAO, puisque les conclusions négatives requièrent une prémisses négative). Le soulignement indique qu'il s'agit d'une forme faible de l'universel.

AII (mais non AIA, car si une prémisses est particulière la conclusion doit être particulière ; non plus AIE ni AIO, étant donné que les conclusions négatives requièrent des prémisses négatives).

EAE et EAO (ni EAA ni EAI à cause de l'exigence de conclusion négative).

EIO (ni EIA ni EII, à cause de l'exigence de conclusion négative, ni EIE étant donné que d'après T.III la conclusion doit être particulière).

Ainsi, nous avons :

Barbara, Celarent, Darii, Ferio (il n'y a pas de nom pour les modes faibles).

Figure 2

Théorème T.1.f2 : Les prémisses doivent être différentes en qualité

La preuve : Les deux prémisses ne peuvent pas être négatives (A3). Si les deux sont affirmatives, le prédicat est non distribué ; mais le prédicat des deux prémisses est le moyen terme et il doit être distribué (A1). Seule une négative distribue le prédicat. Donc une des prémisses doit être négative.

Ce qui élimine AA, AI.

Théorème T.2.f2 : La majeure doit être universelle

La preuve : étant donné qu'une des prémisses doit être négative (T.1.f2), la conclusion sera négative et le grand terme sera distribué. Si le grand terme est distribué dans la conclusion, il doit être distribué dans la majeure, et (puisque dans cette figure, c'est le sujet de la majeure) donc elle doit être universelle.

Ce qui élimine IA, OA.

Nous avons donc
AE, AO, EA, EI.

Ce qui donne

AEE, AEO (ni AEI ni AEA à cause de l'exigence de conclusion négative).

AOO (ni AOA ni AOI à cause de l'exigence de conclusion négative ; non plus AOE à cause de l'exigence de conclusion particulière (théorème III)).

EAE, EAO, (ni EAA ni EAI à cause de l'exigence de conclusion négative).

EIO (ni EIA ni EII à cause de l'exigence de conclusion négative, ni EIE à cause l'exigence de conclusion particulière).

Baroco, Camestres, Cesare, Festino (il n'y a pas de nom pour les modes faibles)

Figure 3

T.1.f3 : *La mineure doit être affirmative.*

La preuve : Si la mineure est négative, la conclusion aussi est négative. Si la conclusion est négative, le prédicat y est distribué. Donc il doit être distribué dans la majeure et cela signifie, dans cette figure, qu'il doit être distribué dans le prédicat de la majeure. La majeure doit donc être négative. Mais alors les deux prémisses seraient négatives.

Ce qui élimine AE et AO.

T.2.f3 : *La conclusion doit être particulière.*

La preuve : D'après T.1.f3, la mineure doit être affirmative. Mais dans ce cas, le moyen terme (le sujet de la mineure dans cette figure) ne peut pas y être distribué. Donc, il ne peut pas être distribué dans le sujet de la conclusion. Donc la conclusion doit être une particulière.

Nous avons alors
AA, AI, EA, EI, IA, OA

Ce qui donne

AAI (non AAO, étant donné qu'aucune prémisses n'est négative et que les universelles sont éliminées par le théorème 2 de cette figure). Le double soulignement signale qu'ils sont aussi forts qu'ils ont besoin de l'être : on pourrait substituer à une des prémisses une subalterne.

AII, (ni AIO ni AIE à cause de l'exigence de négation de l'axiome 5 ; non plus AIA d'après le théorème 2 de la figure 3).

EAO (ni EAA ni EAE d'après le théorème 2 de la figure 3, ni EAI à cause de l'exigence de négation de l'axiome 4).

EIO (ni EIA ni EIE à cause du théorème 2 de la figure 3, ni EII à cause de l'exigence de négation de la conclusion).

IAI (ni IAA ni IAE à cause du théorème 2 de la figure 3, ni IAO à cause de l'axiome 5).

OAO (ni OAA ni OAE à cause du théorème 2 de la figure 3, ni OAI à cause de l'exigence de négation de la conclusion).

Nous avons ainsi

Bocardo, Darapti, Datisi, Disamis, Felapton, Ferison.

Figure

4

T.1.f4 : *Si la majeure est affirmative, la mineure est universelle.*

La preuve : Si la majeure est affirmative, le moyen terme n'est pas distribué. Le moyen terme (sujet de la mineure dans cette figure) doit donc être distribué dans la mineure. Donc la mineure doit être une universelle.

Ce qui élimine AI,
AO.

T.2.f4 : *Si l'une ou l'autre des prémisses est négative, la majeure doit être universelle.*

La preuve : Si une des prémisses est négative, la conclusion est négative ; et le prédicat de la conclusion sera distribué. Mais alors le sujet de la majeure doit être distribué ; la majeure doit donc être universelle.

Ce qui élimine
OA.

T.3.f4 : *Si la mineure est affirmative, la conclusion est particulière.*

La preuve : Si la mineure est affirmative, le prédicat est non distribué. Il ne doit pas non plus être distribué dans la conclusion. Donc, la conclusion doit être particulière.

Nous avons
ainsi
AA, AE, EA, EI,
IA

AAI (ni AAA ni AAE à cause du théorème 3 de la figure 4 ; ni AAO à cause de la négation). AEE, AEO (ni AEA ni AEI à cause de la négation).

EAO (ni EAE ni EAA à cause du théorème 3 de la figure 4, ni EAI à cause de la négation). EIO (ni EIA ni EIE à cause du théorème 3 de la figure 4, ni EII à cause de la négation).

IAI (ni IAA ni IAE à cause du théorème 3 de la figure 4, ni IAO à cause de l'exigence de négation de l'axiome 5).

Ainsi, nous
avons

Bramantip, Camenes, Dimaris, Fesapo, Fresison. Il n'y a pas de nom pour le mode faible
AE
O.

II

ARISTOTE ET LA QUESTION DE LA COMPLETUDE

Le modèle formel de Kurt Ebbinghaus.

Clément Lion – Shahid Rahman

(Université de Lille 3, UMR STL)

Dans “Philosophie antique”, n°18 (2018), 219-243

ABSTRACT. With the article “Aristotle’s natural deduction system”, published in 1974, J. Corcoran has contributed to spread a new insight into Aristotelian logical writings and of the theory of assertoric syllogism in particular. The main claim of this article is that, in the first chapters of the *Analytic prior*, Aristotle doesn’t expose an axiomatic system that would suppose an underlying logic, as thought Łukasiewicz, but a natural deduction system, with metalogical dimensions. Our paper is based on a short monograph of Kurt Ebbinghaus, called “Ein formales Model der Syllogistik des Aristoteles” (1964), which set a landmark for the new insight mentioned above and that was developed within the conceptual framework of Paul Lorenzen’s “operative logic”. Ebbinghaus develops a formal reconstruction that shows that Aristotle’s perspective is a proof-theoretical one, not only in relation to the underlying inference system but in relation to the study of its metalogical features. The latter indicates a main distinction to Corcoran’s own reconstruction. Indeed, while Corcoran’s assumes that Aristotle’s inferential systems is rooted on an underlying model-theoretical semantics (worked by Corcoran himself), Ebbinghaus understands the theory of syllogisms has been developed under the background of a “rule-based” approach to meaning similar to “game rules. In fact, Ebbinghaus’ reconstruction proposes a pragmatist reading of Aristotle’s syllogistic, that, so we claim, not only seems to be definitely closer to Aristotle’s views, than the model-theoretical semantics developed by Corcoran, but it also yields the theory of syllogism as a unified system.

RÉSUMÉ. Avec l’article “Aristotle’s natural deduction système”, publié en 1974, J. Corcoran a contribué à diffuser une nouvelle perspective sur les écrits logiques d’Aristote et sur la théorie du syllogisme en particulier. Dans cet article, Corcoran prétend établir que, dans les premiers chapitres des *Premiers Analytiques*, Aristote ne propose pas un système axiomatique, qui supposerait une logique sous-jacente, ainsi que le pensait Łukasiewicz, mais plutôt un système de déduction naturelle, avec des dimensions métalogiques. Notre propos est ici basé sur une courte monographie de Kurt Ebbinghaus, intitulée “Ein formales Model der Syllogistik des Aristoteles”(1964), où est fixé le canon de cette nouvelle perspective mentionnée plus haut et qui a été développé dans le cadre conceptuel de la « logique opérative » de Paul Lorenzen. Ebbinghaus développe une reconstruction formelle montrant que l’approche d’Aristote relève de la « théorie de la preuve », non seulement pour ce qui concerne le système d’inférence sous-jacent, mais aussi pour ce qui concerne les éléments métalogiques. C’est notamment à travers ce dernier aspect que se manifeste une différence majeure par rapport à la reconstruction de Corcoran. Alors que celui-ci pose que le système d’inférence d’Aristote est enraciné dans une sémantique de théorie des modèles (élaborée par Corcoran lui-même), Ebbinghaus comprend que la théorie du syllogisme a été développée à partir d’une approche de la signification par des règles (« rule based »), semblables aux règles d’un jeu. En fait, la reconstruction d’Ebbinghaus offre une lecture pragmatiste de la syllogistique d’Aristote, qui, tel est notre propos, paraît non seulement beaucoup plus proche du point de vue d’Aristote que ne l’est la sémantique de théorie des modèles proposée par Corcoran, mais qui, de plus, permet de saisir l’unité systématique de la théorie du syllogisme.

Dans la seconde moitié du XXème siècle, après avoir été complètement délaissée par les logiciens, la théorie aristotélicienne du syllogisme assertorique est de nouveau apparue comme un objet d’étude digne d’intérêt. On considère généralement que ce retour paradoxal à la logique d’Aristote, si décriée à la fin du XIXème siècle, a procédé en deux temps principaux. Dans les années 50, J. Łukasiewicz, proposa d’abord, dans son ouvrage *Aristotle’s Syllogistic from the Standpoint of Modern Formal Logic*, de revenir au texte aristotélicien, par-delà la lecture traditionnelle, puis montra que les résultats obtenus par Aristote pouvaient être retrouvés

et complétés au moyen des outils de la logique formelle moderne (notamment le calcul des propositions et la théorie des quantificateurs) certes au prix d'un décalage important avec les procédés explicitement employés par Aristote lui-même, laissant ouvertes de nombreuses questions, dont G. Patzig dressa l'inventaire dans son propre ouvrage de 1959, *Die Aristotelische Syllogistik*. Puis, au début des années 70, à travers une série d'articles¹, J. Corcoran déploya une autre perspective, consistant à lire le début des *Premiers Analytiques* comme l'exposé d'un système de déduction naturelle autonome, même s'il devait être associé à une sémantique de théorie des modèles, demeurée implicite chez Aristote. La principale contribution de Corcoran fut de proposer une notion de la validité des syllogismes fondée sur l'explicitation d'une telle sémantique et sur la construction d'une preuve de complétude. On tient aujourd'hui pour acquis que la lecture des syllogismes comme règles d'inférence² – et non comme propositions implicatives complexes, lecture suggérée, quant à elle, par Łukasiewicz – est la plus fidèle au texte des *Analytiques*, et c'est elle qui guide désormais les traductions et les commentaires, notamment ceux de Smith.

Dans ce récit du renouveau des études logiciennes d'Aristote, on passe sous silence une monographie parue en 1964 dans la série de langue allemande HYPOMNEMATA, discrètement présent dans de nombreuses bibliographies, à commencer par celle de la seconde édition de l'ouvrage de Patzig, mais presque jamais cité, intitulé *Ein formales Modell der Syllogistik des Aristoteles* et écrit par Kurt Ebbinghaus, un étudiant de P. Lorenzen. On peut le déplorer, car outre l'impression qui s'en dégage que l'interprétation des syllogismes comme règles d'inférence y est déjà contenue, cet article présente un intérêt majeur pour comprendre ce qui fait d'Aristote un grand logicien et qui tient notamment à l'originalité de sa propre pensée de la « complétude », pensée qui peut être opposée à celle qui guide notamment J. Corcoran lorsqu'il entreprend d'établir, par une preuve, la complétude de la logique d'Aristote en relayant

¹ Corcoran 1972, 1973, 1974.

² En fait, cette « nouvelle » manière de voir le syllogisme est souvent appelée aujourd'hui, à juste titre, la perspective de « Corcoran-Smiley ». En effet, bien que le système de déduction naturelle développé par chacun d'eux diffère (voir Smiley, 1962, 1973), ils partagent le même type de système formel, notamment : un système de déduction naturelle + une sémantique formelle sous-jacente (ainsi qu'une critique de la reconstruction de Łukasiewicz). Nous avons focalisé notre discussion sur le modèle de Corcoran, afin de disposer d'un terme de comparaison bien défini ; mais rien dans notre propos ne repose sur le fait d'avoir choisi Corcoran plutôt que Smiley. D'ailleurs, la reconstruction de Smiley (1962) basée sur une « sémantique avec domaines triés » (*many-sorted semantics*) apparaît plus adéquate que celle utilisée par Corcoran (1972). Cependant, l'article en question concerne la notion d'ecthèse, qui n'est pas le sujet d'Ebbinghaus (bien que dans une note de bas de page, ce dernier suggère la possibilité de rendre compte de l'ecthèse au moyen d'une logique dialogique) et n'a pas de lien avec la preuve de complétude de Corcoran (1972). On dispose aujourd'hui de plusieurs reconstructions alternatives sophistiquées qui suivent une approche en termes de déduction naturelle. L'une des premières est celle de Thom (1981).

de ses propres efforts ceux d'Aristote lui-même³. Dans cet article, nous revenons d'abord sur les paradoxes de l'interprétation proposée par Łukasiewicz, afin de montrer en quoi l'interprétation d'Ebbinghaus adhère bien mieux au texte des *Premiers Analytiques*. Puis, nous comparons le modèle formel proposé par ce dernier au modèle mathématique proposé par Corcoran, afin d'en exhiber la proximité. Pour finir, nous essayons de dégager de l'article d'Ebbinghaus une conception de la « complétude » que nous opposons à la « preuve de complétude » que Corcoran s'est efforcé de greffer au système de déduction naturelle qu'il attribue à Aristote.

1. Les limites de la reconstruction de Łukasiewicz.

Dans son ouvrage, traduit en français sous le titre : *La syllogistique d'Aristote dans la perspective de la logique formelle*, Łukasiewicz fait un travail de pionnier et cherche à instaurer un dialogue avec Aristote en le défendant à la fois contre l'interprétation traditionnelle et contre les reproches qui lui sont faits par la logique moderne⁴. Ce travail est d'abord un travail de retour au texte, même s'il rencontre des limites considérables.

Pour présenter tout d'abord les grandes lignes de cette reconstruction, on peut énoncer les points suivants.

- Łukasiewicz estime tout d'abord qu'Aristote n'est pas rigoureux dans son formalisme et qu'il joue sur les correspondances intuitives propres au langage naturel. Il y aurait formalisme si à ce « jeu » étaient substituées des formes parfaitement univoques, ce que Łukasiewicz propose de faire.
- Un syllogisme ne représente pas, selon Łukasiewicz, une règle d'inférence, mais une proposition du type « si p et q, alors r », c'est-à-dire une proposition exprimant une implication matérielle. Pour affirmer cela, il s'appuie sur la manière dont Aristote formule explicitement ses syllogismes. Par exemple, « Si A s'applique à tout B et B à tout C, alors il est nécessaire que A s'applique à tout C » (*PA*, 1. 4 25 b 38). En outre, un syllogisme ne met pas en relation des propositions, mais des termes.
- La proposition qu'est le syllogisme est non quantifiée⁵. Les quantificateurs apparents que sont « tout, aucun, quelque » ne sont que des parties des constantes A, E, I et O, qui représentent des types de relations entre des termes. Il y a toutefois une quantification

³ Corcoran, 1972.

⁴ Voir J.B. Gourinat, 2011.

⁵ « Aristote ne s'est pas formé une idée très claire des quantificateurs et n'en a pas fait usage dans ses œuvres ».

universelle implicite dans toutes les relations entre termes définies par Aristote. C'est cette quantification universelle qui constitue la nécessité syllogistique.

- Enfin, les syllogismes parfaits sont, selon Łukasiewicz des axiomes dont vont être dérivés les syllogismes imparfaits au moyen de lois qu'Aristote utilise intuitivement, mais qu'il n'explique pas et qui correspondent aux lois du calcul des propositions. Il y a donc là aussi une dimension implicite dans les raisonnements d'Aristote. Son travail de logicien est alors incomplet et Łukasiewicz se propose de le compléter⁶, au moyen des outils de la logique moderne.

A partir de l'ensemble de ces choix théoriques, Łukasiewicz parvient à restituer l'ensemble des résultats obtenus par Aristote, mais c'est au prix d'un décalage avec le texte et les procédés effectivement mis en œuvre par Aristote.

On peut noter les points suivants :

- Si les syllogismes étaient effectivement des propositions, alors Aristote devrait considérer que les syllogismes valides sont des propositions vraies. Or, à aucun moment il ne qualifie un syllogisme de « vrai ».
- Si les syllogismes étaient des propositions conditionnelles, alors on ne pourrait pas comprendre pourquoi Aristote soutient qu'une démonstration est un syllogisme⁷. Une démonstration ne peut évidemment pas consister en une seule proposition.
- L'idée qu'un syllogisme est une proposition conduit Łukasiewicz à rejeter la manière dont Aristote s'y prend explicitement pour réduire les syllogismes imparfaits aux syllogismes parfaits, ou du moins à substituer à un procédé déductif encore trop intuitif, une expression rigoureusement formaliste. Considérons en guise d'exemple deux des trois types de preuve proposés par Aristote (la preuve par conversion, la preuve par l'impossible), afin de montrer comment Łukasiewicz s'y prend pour les reconstruire.

La preuve par conversion (Festino, mode de la deuxième figure) :

Voici le texte d'Aristote :

« Si M n'est le cas pour aucun N et est le cas pour tel P, alors, nécessairement N n'est pas le cas pour tel P. Car puisque la négative se convertit, N n'est le cas pour aucun M. Or, on avait supposé que M était le cas pour tel P, de sorte que N ne sera pas le cas pour tel P (en

⁶ « Il est impossible de comprendre complètement les démonstrations d'Aristote si l'on méconnaît l'existence d'un autre système que le sien, qui lui est parallèle tout en étant plus fondamental que la théorie du syllogisme. Il s'agit de la logique des propositions » (p. 65)

⁷ P.A. 1. 4. 25b30

effet, on a ici une déduction de la première figure » (P.A. 1,5 27a32-6)⁸

Selon Łukasiewicz, « Aristote effectue [là] une preuve intuitive », dont, selon lui, l'analyse révèle qu'elle contient implicitement deux thèses du calcul propositionnel, qu'il va, quant à lui, expliciter.

La première énonce :

$$(p \rightarrow q) \rightarrow ((p \wedge r) \rightarrow (q \wedge r))$$

Si on définit p : M n'est le cas d'aucun N ; q : N n'est le cas d'aucun M ; r : M est le cas de quelque P, alors l'antécédent correspond à la loi de conversion, admise par Łukasiewicz dans sa reconstruction axiomatique. On peut donc détacher le conséquent, à savoir : « Si M n'est le cas d'aucun N et si M est le cas de quelque P, alors N n'est le cas d'aucun M et M est le cas de quelque P ».

Si maintenant, on définit p : M n'est le cas d'aucun N et M est le cas de quelque P ; q : N n'est le cas d'aucun M et M est le cas de quelque P ; et r : N n'est pas le cas de quelque P, alors en invoquant la seconde thèse du calcul propositionnel, qui énonce que :

$$(p \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)),$$

et en s'appuyant sur le conséquent détaché auparavant (ici $p \rightarrow q$), on établit que si on admet le mode *Ferio*, c'est-à-dire : « Si N n'est le cas d'aucun M et si M est le cas de quelque P, alors N n'est pas le cas de quelque P » (ici : $q \rightarrow r$), alors on est obligé d'admettre le mode *Festino*, c'est-à-dire : « Si M n'est le cas d'aucun N et M est le cas de quelque P, alors N n'est pas le cas de quelque P » (ici : $p \rightarrow r$).

On constate que l'analyse que Łukasiewicz propose de la démonstration « intuitive » d'Aristote distingue des rapports logiques qui n'apparaissent pas à Aristote, mais sur lesquels celui-ci s'appuie « sans le savoir »⁹.

La preuve par l'impossible (Baroco) :

Aristote argumente ainsi :

« Si maintenant M est le cas pour tout N et n'est pas le cas pour tel P, nécessairement N n'est pas le cas pour tel P ; car s'il était le cas pour tout P, étant donné que par ailleurs M s'applique à tout N, il serait nécessaire que M soit le cas pour tout P ; mais on a supposé qu'il n'était pas le cas pour tel P » (P.A. 1. 5. 27a36-b1).

⁸ Traduction de M. Crubellier, GF, 2014

⁹ Ou peut-être plutôt sans s'y intéresser. Il ne serait pas illégitime de penser que les dérivations formulées par Łukasiewicz dans le calcul des propositions correspondent plutôt à des métarègles, secondaires par rapport à la marche naturelle des raisonnements.

Selon Łukasiewicz, ce procédé ne peut pas constituer une vraie preuve par l'impossible du syllogisme, car il repose sur la négation non pas du syllogisme entier, mais seulement de la conclusion (« *N n'est pas le cas pour tel P* »).

Łukasiewicz va donc là aussi proposer une toute autre démonstration, en s'appuyant sur la loi de la logique des propositions appelée « loi de transposition » qui énonce :

$$((p \wedge q) \rightarrow r) \rightarrow ((p \wedge \neg r) \rightarrow \neg q).$$

Si on définit p : « M est le cas pour tout N » ; q : « N est le cas pour tout P » et r : « M est le cas pour tout P », alors, d'après la loi de transposition, l'antécédent correspondant au syllogisme parfait *Barbara* donne bien le syllogisme de la deuxième figure *Baroco*.

Selon Łukasiewicz, les démonstrations proposées par Aristote sont donc menées dans une certaine inconscience, car elles comportent une dimension intuitive à laquelle on peut substituer une expression formaliste plus rigoureuse. Aristote ne serait, en somme, pas vraiment conscient de ce qu'il fait : pas conscient que les syllogismes parfaits sont des axiomes, ni que les démonstrations qu'il effectue ne sont pas des syllogismes, ni que les fondements d'une preuve par conversion sont plus complexes qu'il ne le croit, ni que les preuves qu'il propose comme étant des preuves par l'impossible ne satisfont pas aux exigences d'une véritable preuve par l'impossible. Il apparaît donc que la lecture proposée par Łukasiewicz est peu charitable. Elle conduit à croire que le travail d'Aristote est plutôt un travail d'éclaireur, comme si Aristote formulait des conjectures sans les accompagner par les outils d'analyse adéquats. Aristote serait donc, dans les textes des *Analytiques*, dans un rapport d'approximation avec des vérités logiques qu'il devine plus qu'il ne les conceptualise adéquatement. Łukasiewicz conçoit alors son propre travail comme comblant, au moyen des outils de la logique moderne, les lacunes et les carences du travail d'Aristote. Selon ce point de vue, le développement historique de la logique pourrait donc être mesuré à l'aune de sa finesse expressive. Les efforts d'Aristote peuvent être vus comme encore un peu maladroits, si on les évalue à l'aune des résultats postérieurs de la logique.

2. Le modèle formel d'Ebbinghaus et sa proximité avec le texte des Analytiques.

Dans un effort d'adhérence minutieuse à la lettre du texte, Ebbinghaus va

paradoxalement concevoir son modèle à travers ce qu'il appelle un « calcul »¹⁰, c'est-à-dire ici un ensemble de règles qu'on peut faire correspondre à des schémas opératifs. En ce sens très large du mot « calcul », tricoter est un calcul : quelqu'un qui tricote applique une règle implicite qui lui permet de répéter des opérations. On peut dire qu'un calcul n'est rien d'autre que l'explicitation par des règles d'une méthode de construction de quelque chose à partir de quelque chose. Les syllogismes correspondent ici à des règles de ce type. Selon cette approche, la signification des expressions qui apparaissent dans un syllogisme est donnée par les propriétés inférentielles prescrites par les règles opératives.

Pour être exact, Ebbinghaus va en fait reconstruire la théorie du syllogisme à partir de deux calculs. Le premier prend pour « input » des phrases concrètes et les transforme en des formes propositionnelles de 4 types : AaB , CeD , EiF , GoH . Les « points de départ » (*Anfänge*)¹¹ d'un raisonnement sont déjà les résultats de l'application d'opérations schématiques. A partir d'un ensemble infini de phrases, on peut construire quatre ensembles correspondant aux propositions de type A , E , I et O . A la base de la théorie d'Aristote, il y aurait un acte de construction de prémisses possibles. Ce point permet d'explicitier la règle qu'Aristote emploie implicitement lorsqu'il désigne une même proposition sous plusieurs formes différentes, par exemple « A est prédiqué de tout B » ou « A appartient à tout B ». Cet usage indifférencié de formules équivalentes correspond à une opération, à une sorte de fonction injective, qui à un ensemble de phrases fait correspondre une seule et unique forme abstraite. Ce calcul auxiliaire qu'Ebbinghaus situe en amont de son modèle semble correspondre à une opération constructive qui situe d'emblée l'activité proprement logique dans un domaine d'objet qui est fabriqué à partir des discours réels, afin de permettre la réalisation d'opérations plus complexes qui seront effectuées dans le calcul proprement dit. Le fait qu'Aristote emploie indifféremment des formules équivalentes ne signifie donc pas un défaut de formalisme, mais plutôt l'indication que quelque chose est à construire à partir de ces formules diverses, à savoir une forme schématique.

¹⁰ Ce concept particulier de « calcul », compris comme un ensemble d'opérations schématiques à partir desquelles on se donne le droit de produire des signes déterminés à partir de signes donnés, est tiré, d'ailleurs comme la plupart des concepts sur lesquels s'appuie Ebbinghaus, de l'ouvrage de Lorenzen, *Einführung in die operative Logik und Mathematik*, 1959.

¹¹ Dans la traduction de la monographie d'Ebbinghaus, par C. Lion, le choix a été fait de traduire « *Anfänge* » par « points de départ » plutôt que par « formules initiales », afin de souligner le fait qu'un calcul conçu selon la méthode opérative ne relève pas à proprement parler d'un « langage », possédant une syntaxe qui aurait besoin d'être interprétée, mais ne consiste qu'en de pures règles opératoires. Lorsque Ebbinghaus ajoute une prémisses au calcul, afin de prouver, par l'absurde, la contradictoire de cette prémisses, nous avons utilisé « formule initiale ajoutée », ce qui dans un vocabulaire plus moderne correspondrait à « hypothèse locale » (voir *Un modèle formel de la Syllogistique d'Aristote*, tr. C. Lion, 2016). Cela étant, les « points de départ » correspondent à ce qu'Aristote nomme « prémisses » (πρότασις) – « hypothèse globale ».

Ce calcul auxiliaire (nommé K^*_s) étant posé, Ebbinghaus va en définir un second, qu'il nomme K_s et qui consiste lui aussi en un ensemble de règles de construction à appliquer aux constructions qui résultent elles-mêmes du calcul auxiliaire. Ce calcul est le suivant :

- (R_1) $AeB \rightarrow BeA$
 (R_2) $AaB, BaC \rightarrow AaC$ (Barbara)
 (R_3) $AeB, BaC \rightarrow AeC$ (Celarent)
 (D_1) $AaB, AoB \rightarrow \wedge$
 (D_2) $AeB, AiB \rightarrow \wedge$
 (D_3) $AaB, AeB \rightarrow \wedge$
 ($R_{4.1}$) $AaB \rightarrow \wedge \dot{\rightarrow} AoB$
 ($R_{4.2}$) $AeB \rightarrow \wedge \dot{\rightarrow} AiB$
 ($R_{4.3}$) $AiB \rightarrow \wedge \dot{\rightarrow} AeB$
 ($R_{4.4}$) $AoB \rightarrow \wedge \dot{\rightarrow} AaB$
- (R_5) $AaB, BiC \rightarrow AiC$ (Darri)
 (R_6) $AeB, BiC \rightarrow AoC$ ¹² (Ferio)

Bien ces règles constituent un calcul autonome, on peut les faire correspondre aux différents types de règles dont Aristote fait un usage explicite au début des *Premiers Analytiques*. Il est tout d'abord important de souligner que les opérateurs a , e , i et o correspondent respectivement, dans le texte d'Aristote, aux types de prémisses : « ...est prédiqué de tout... », « ...n'est prédiqué d'aucun... », « ...est prédiqué de quelque... », « ...n'est pas prédiqué de quelque... ». Ceci étant posé, la règle (R_1) correspond à une *règle de conversion* du sujet et du prédicat dans une prémisses du type « ... n'est prédiqué d'aucun... ». Il est important de garder à l'esprit qu'Ebbinghaus définit ici les *règles* nécessaires et suffisantes pour la signification de la conversion dans le contexte de K^*_s : la validité de la conversion du sujet et du prédicat dans une universelle négative ne requiert pas l'ajout au système d'une définition vérifonctionnelle.

On peut en dire autant des règles qui suivent. (R_2) et (R_3) correspondent aux *règles des syllogismes parfaits* (Barbara et Celarent). (D_1), (D_2) et (D_3) correspondent aux *règles qui*

¹² Ces deux dernières règles peuvent être mises à part, car Ebbinghaus montrera qu'elles sont « admissibles », c'est-à-dire qu'elles correspondent à des syllogismes qu'il est possible de réduire aux syllogismes parfaits auxquels correspondent les règles R_2 et R_3 , ce que fait également Aristote au chapitre 7 du livre 1 des *Premiers Analytiques*.

entraînent « ἀδύνατον » exprimé par le signe \wedge ¹³ quand sont prises comme points de départ les formules antécédentes des règles de type *D*. Ces règles correspondent en fait, pour D_1 et D_2 ¹⁴, à la contradiction (ἀντικείμενον) et, pour D_3 , à la contrariété (ἐναντίον). Enfin, les règles ($R_{4.1}$), ($R_{4.2}$), ($R_{4.3}$) et ($R_{4.4}$) sont les *règles de négation*, qui sont décisives en vue de la reconstruction des *preuves indirectes* (qu'Ebbinghaus nomme « *sylogismi per impossibile* »)¹⁵. Ebbinghaus note à leur propos qu'elles sont « des métarègles, c'est-à-dire qu'elles ne font pas qu'ajouter au calcul des figures dérivables, mais contiennent aussi – dans leurs formules antécédentes – une phrase *à propos* du calcul, à savoir une affirmation de dérivabilité, du type : « Si du fait de l'ajout de AaB au calcul, \wedge devient dérivable, alors... ». La formule antécédente appartient ainsi à un niveau supérieur, étant donné qu'elle désigne non pas une figure dérivée, mais une opération de dérivation » (p. 25 de la traduction française).

Pour marquer le contraste avec la perspective de Łukasiewicz, on peut noter les points suivants, à propos du calcul K_s :

- Les syllogismes correspondent bien ici à des règles d'inférence, c'est-à-dire à des schémas opératifs, tels qu'à partir de quelque chose de donné, on peut construire quelque chose d'autre. La flèche désigne donc une action de construction de quelque chose à partir de quelque chose d'autre. La question de la vérité n'a pas du tout à être posée dans ce cadre ; du moins, elle n'a pas à être posée pour comprendre la nature du syllogisme¹⁶.
- Si on parvient à établir que les démonstrations proposées par Aristote pour réduire les syllogismes correspondent bien à une application de ces mêmes syllogismes, alors Aristote ne fait pas erreur quand il affirme que les démonstrations sont des syllogismes.
- Les procédés de réduction d'un syllogisme à un autre ne correspondent pas, dans ce cadre, à la démonstration d'un théorème à partir d'axiomes, mais plutôt à la démonstration qu'une règle est réductible à d'autres. Ebbinghaus appelle *admissibilité* (terme repris à Lorenzen) le statut d'une règle qui permet de construire quelque chose

¹³ Cf. Ebbinghaus, 2016.

¹⁴ Mentionnons ici que Łukasiewicz avait déjà observé (p.56) que les universelles négatives ne sont rien d'autre que la négation des universelles affirmatives.

¹⁵ Pour une explication plus exhaustive de ce à quoi correspondent les règles de K_s dans les *Premiers Analytiques*, on se reportera au chapitre 2 § 5, intitulé « Preuve de l'isomorphisme » dans lequel Ebbinghaus montre, à travers une attention très scrupuleuse au texte d'Aristote, les correspondances qu'on peut établir avec son propre calcul.

¹⁶ « La flèche, ici équivalente au « si...alors » aristotélicien, n'est pas [...] définie à travers la valeur de vérité, mais elle exprime une indication d'action. Nous nous écartons par conséquent des interprétations qui jusqu'ici ont considéré le « si – alors » aristotélicien en tant qu'implication, au sens de l'implication matérielle et formelle (Łukasiewicz, 1951 ; Bocheński, 1951 ; Patzig, 1959) », Ebbinghaus, (2016), p. 28.

qui pourrait très bien être construit sans cette règle, qui constitue donc une sorte de détour¹⁷. Les syllogismes imparfaits sont réductibles aux syllogismes parfaits, car ce qu'ils permettent de construire peut très bien être construit sans eux ; autrement dit, ils n'ajoutent rien à la capacité proprement opérative procurée par les règles fondamentales du calcul, sinon une simplification des procédures. Nous reviendrons plus loin sur le concept d'admissibilité, lorsque nous aborderons la question de la complétude.

- Enfin, le calcul K_s offre un moyen élégant de rendre compte des preuves indirectes. Nous l'illustrerons juste après (exemple 2). Notons tout de suite qu'elles sont effectuées par Ebbinghaus par le biais des règles (D_1) , (D_2) , (D_3) , $(R_{4.1})$, $(R_{4.2})$, $(R_{4.3})$ et $(R_{4.4})$, c'est-à-dire d'une manière purement inférentielle et selon la procédure qui suit. Pour développer une preuve indirecte :
 1. On ajoute, à l'ensemble initial de prémisses, la négation de la conclusion (dans l'exemple proposé plus bas NaP).
 2. En se servant des règles de type R (dans l'exemple 2 $(R_2) =$ Barbara) et des règles de type D , on montre que cet ajout conduit à une contradiction avec l'une des prémisses (dans l'exemple 2 MoP).
 3. En appliquant alors l'une des règles de type R (dans l'exemple 2 $(R_{4.1})$), on obtient la négation de la prémisse ajoutée, c'est-à-dire la négation de la négation de la conclusion.
 4. On obtient alors, si l'on suppose la double négation (comme c'est bien le cas lorsqu'on procède *par l'absurde*), la preuve de la conclusion visée¹⁸.

Reprenons donc, à présent, les preuves par conversion et par l'impossible dont nous avons précédemment montré en quoi consistait leur reconstruction formaliste chez Łukasiewicz¹⁹, afin

¹⁷ Ou « peak » (Gentzen, 1969). On peut prouver l'admissibilité d'une règle au moyen d'une « méthode d'élimination » (Lorenzen) – qu'on appelle plutôt « réduction des détours » en théorie de la preuve – elle-même fondée sur le concept de « dérivabilité » : une règle est admissible, si l'élimination de cette règle, maintient la dérivabilité dans le calcul de toutes les formules dérivables dans le calcul complété au moyen de cette règle. Sur la méthode de l'élimination, voir P. Lorenzen, *Einführung in die operative Logik und Mathematik*, 1§3.

¹⁸ « Aristote nomme explicitement (par exemple, *Premiers analytiques*, A23, 41a36) [la méthode de preuve indirecte] « συλλογισμός διά τοῦ ἀδυνάτου » et montre ensuite (*Pr. An.* B11-14) que chaque phrase qu'on peut prouver par ce moyen est aussi démontrable au moyen d'un syllogisme direct. Il décrit le *sylogismus per impossibile* dans plusieurs passages (*Pr. An.* A23, A44, B11-14), mais ne le formule jamais sous la forme d'un énoncé complet du type si-alors. Il propose toujours plutôt une description plus ou moins compliquée d'un procédé, dont il apparaît qu'à chaque fois, ce qu'il en dit est isomorphe à la règle R_i du calcul K_s . Les formules antécédentes correspondent par ailleurs à des syllogismes directs. » Ebbinghaus, 2016, p. 31 (nous soulignons)

¹⁹ Ebbinghaus déclare ne pas disposer avec K_s d'un moyen adéquat de reconstruire la preuve par ecthèse. Cependant, nous évoquerons à nouveau ce point un peu plus loin, lorsque nous reviendrons sur la thèse de Łukasiewicz selon laquelle il n'y aurait aucune théorie des quantificateurs chez Aristote.

de voir, en contrepois, comment Ebbinghaus les restitue dans son propre modèle formel, sous la forme de preuves d'admissibilité.

Exemple 1

Pour la preuve par conversion (preuve directe), dans K_s , le mode *Festino* correspond à la règle :

$$MeN, MiP \rightarrow NoP$$

Une dérivation contenant cette règle a la forme :

$$\begin{array}{l} \vdots \\ l \quad MeN \\ \vdots \\ m \quad MiP \\ \vdots \\ l, m \rightarrow n \quad NoP \\ \vdots \end{array}$$

On peut remplacer cette dernière ligne de la façon suivante :

$$\begin{array}{lll} l \rightarrow n & NeM & (R_1) \\ n, m \rightarrow n + 1 & NoP & (R_6) \end{array}$$

A la ligne n correspond chez Aristote : « Etant donné que la négation peut être inversée (R_1), N n'est le cas d'aucun M . » A la ligne m : « On a posé au départ qu' M est le cas de quelque P ». A la ligne $n+1$: « Ainsi, N n'est pas le cas de quelque P ». Finalement, Aristote indique à propos de la règle employée (R_6) : « Par conséquent, cela est produit à travers ($\delta\acute{\iota}\alpha$) un syllogisme de la première figure ».

Exemple 2

Pour ce qui concerne maintenant la preuve indirecte, dans K_s *Baroco* correspond à la règle :

$$MaN, MoP \rightarrow NoP$$

Sa dérivation correspond au schéma suivant :

$$\begin{array}{l} \vdots \\ l \quad MaN \\ \vdots \\ m \quad MoP \\ \vdots \end{array}$$

n	NaP	(formule initiale ajoutée)
$l, n \rightarrow n+1$	MaP	(R_2)
$n+1, m \rightarrow n+2$	\wedge	(D_1)
$n \rightarrow n+2 \dot{\rightarrow} n+3$	NoP	$(R_{4,1})$

On peut comparer cette inférence avec le texte d'Aristote (pour le début, voir l'extrait d'Aristote retranscrit p. 5) : ligne n : « car s'il est le cas pour chaque P », ligne l : « et si M est aussi dit de chaque N », ligne $n+1$: « il est nécessaire que M soit le cas de chaque P . » ; ligne m : « Mais il était posé au départ que M n'est pas le cas de quelque P ». Les lignes $n+2$ et $n+3$ sont à compléter : « mais il est impossible que M soit le cas de chaque P et qu'il ne soit pas le cas pour quelque P . » ($n+2$) : « Il doit donc être faux que N soit le cas de tout P , et par suite il n'est le cas d'aucun » ($n+3$).

On constate que la fidélité au texte d'Aristote est dans les deux cas très exacte. La démonstration consiste à exhiber les opérations de construction qu'il est possible d'accomplir au moyen des seules règles initiales du calcul et dont les règles admissibles ne constituent qu'une explicitation.

Si l'on suit cette reconstruction, il apparaît qu'Aristote nomme les éléments de ses propres raisonnements avec une parfaite adéquation. Le fait qu'il n'emploie ni le concept d'axiome, ni celui de vérité dans le texte des *Premiers analytiques* apparaît parfaitement justifié. En somme, il est légitime de dire que la théorie du syllogisme expose les règles qu'Aristote emploie lorsqu'il établit des rapports de réduction entre les syllogismes. Ceci tend à prouver que les raisonnements effectués par Aristote ne présupposent aucune logique sous-jacente, mais constituent plutôt une exécution de la logique dont il définit lui-même les règles. Ainsi, tout se passe comme si Aristote commençait par formuler des règles, pour ensuite faire de ces règles des objets d'étude, à travers une sorte de procédé réflexif. Son travail de logicien ne s'arrête pas au seul acte de répertorier des formes valides de raisonnement, car il en vient à construire des relations entre ces mêmes formes, telles qu'il est possible d'établir que les unes n'augmentent nullement la puissance opérative des formes canoniques que constituent les syllogismes parfaits et la règle d'inversion. Cette démarche pourrait être qualifiée de *métalogique* si l'on entend par là non pas l'acte de formaliser les rapports entre des assertions, mais celui de formaliser les schémas d'inférence eux-mêmes pour construire des relations d'équivalence entre leurs diverses formes possibles, qui sont autant d'instruments permettant de décider de la validité d'un raisonnement.

Il est intéressant de remarquer qu'Ebbinghaus situe par ailleurs la théorie du syllogisme

dans son contexte historique et qu'il justifie ainsi la pertinence de son approche opérative. Selon lui, l'origine du syllogisme est à rechercher dans les jeux dialectiques. A partir d'un certain niveau de codification de ces jeux, le besoin s'est fait ressentir de déterminer précisément ce qu'il convenait de reconnaître comme devant être éprouvé comme évident. Dans les *Topiques*, Aristote recommande de ne pas formuler en tant que question l'acte même de tirer la conclusion (158 a7-13). En effet, si l'on pose cette question, le partenaire considérera qu'il est possible de contester la légitimité de la conclusion. Cette solution comporte à l'évidence une dimension purement rhétorique, qui ne la rend pas pleinement satisfaisante. Néanmoins le problème est bien posé : comment contraindre un partenaire à tirer une conclusion ? Les *Analytiques* offrent une solution pour rendre parfaitement décidable la question de la validité ou la non-validité de chaque étape de la discussion. Cela signifie que les *Analytiques* reprennent d'une manière systématique une réflexion qui s'impose naturellement aux partenaires d'un jeu dialectique²⁰, et qui vise à dégager les moyens d'obtenir un accord sur les règles d'inférence. La théorie du syllogisme répondrait donc à un besoin immanent aux jeux dialectiques. Elle doit donc être fondée en dernière instance sur une perspective pragmatique et dialogique.

²⁰ Cette manière de situer le sens de la théorie du syllogisme dans le contexte des jeux dialectiques ouvre d'ailleurs une perspective de recherche sur la question des quantificateurs chez Aristote. Souvenons-nous que pour Łukasiewicz, la théorie du syllogisme est une théorie dont toute quantification explicite est absente. Or, dans une note de bas de page, Ebbinghaus suggère qu'il est possible de dégager de textes extraits des *Topiques*, une théorie de la quantification des prémisses. Les quantifications universelles et existentielles vont être situées dans le contexte d'une interaction entre un proposant et un opposant sous la forme d'une procédure d'argumentation. Citons Ebbinghaus :

1. « Si le proposant soutient une phrase de la forme « A est le cas de quelque B » et si l'opposant la nie, alors le proposant a gagné s'il parvient à proposer un cas n pour laquelle les deux propositions primitives « A est le cas pour n » et « B est le cas pour n » sont vraies. S'il n'y parvient pas, alors il a perdu.
2. Si le proposant soutient une phrase de la forme « A est le cas de tout B » et si l'opposant la nie, alors le proposant doit convaincre l'opposant de la validité générale de son assertion en donnant plusieurs cas pour lesquels A et B sont valables. Mais comme l'assertion générale se rapporte à une classe infinie, l'opposant peut toujours nier celle-ci. Or, le proposant a le droit d'exiger de lui un contre-cas, c'est-à-dire que l'opposant doit donner un n , pour lequel $n \in B$ soit valable, mais pas $n \in A$. S'il n'y parvient pas, alors le proposant a gagné et vice-versa. (On trouve cette dernière règle explicitement dans les *Topiques* θ , 157a34 ; on nomme ce procédé l'induction, $\epsilon\pi\alpha\gamma\omega\gamma\eta$) »

Ceci tend à établir qu'Aristote avait en sa possession une théorie de la quantification qui le rendait capable de distinguer entre une procédure argumentative fondée sur l'incapacité de l'opposant à fournir un contre-exemple (dans le cas d'une proposition universelle) et sur la capacité du proposant à fournir un exemple (dans le cas de la proposition particulière). Il convient de remarquer que cette théorie de la quantification ne repose pas sur la mise en relation d'une proposition avec un domaine d'objets correspondant, mais bien sur une interaction au sein d'une dynamique argumentative qui repose sur une prise en compte de la capacité des agents épistémiques à produire ou pas des exemples ou des contre-exemples. Notons au passage que s'il est vrai que cette approche dialogique permet de contester la thèse de Łukasiewicz selon laquelle on ne trouve aucune théorie de la quantification chez Aristote, du moins elle ne s'imbrique pas d'elle-même dans l'approche opérative qui est celle d'Ebbinghaus dans la construction du calcul K_s . Ajoutons enfin qu'Ebbinghaus exprime à plusieurs reprises l'idée qu'il ne dispose pas d'une théorie des prémisses. Sur la quantification universelle et une première réhabilitation de l'importance de l'article d'Ebbinghaus, voir M. Marion, H. Ruckert, 2015. Sur une interprétation proprement dialogique de la théorie du syllogisme assertorique, voir S. Rahman, Z. McConaughey, M. Crubellier, 2015.

3. Le modèle de J. Corcoran, sa proximité avec le modèle d'Ebbinghaus

Si l'on se cantonnait à une compréhension de la sémantique en termes de théorie des modèles, on pourrait être étonné de l'absence apparente de toute considération de cet ordre dans l'article d'Ebbinghaus et croire que la validité des règles d'inférence que sont les syllogismes demanderait à être fondée dans une discipline formelle remplaçant l'ontologie, dont Ebbinghaus concède qu'elle complète, chez Aristote, les recherches proprement logiques²¹. On serait alors tenté de penser que le modèle d'Ebbinghaus est incomplet, car le système de règles d'inférence qu'il propose n'est associé à aucune « fonction de vérité », ni à aucun « univers de discours ». On chercherait pourtant en vain des formules indiquant qu'Aristote lui-même envisage comme pertinente la perspective d'un langage non-interprété. John Corcoran le concèdera dans l'article « Aristotle's natural deduction system » : « le concept [d'un univers de discours] ne joue aucun rôle dans le système des *Premiers analytiques* » (p. 104). Mais s'il le concède, c'est parce que dans son propre modèle, il fondera les règles d'inférence que constituent, pour Ebbinghaus comme pour lui, les syllogismes, sur un système sémantique, basé sur des notions extensionnelles, et donc sur la possibilité théorique de concevoir des univers de discours alternatifs²², afin que soit universellement fondée la relation de conséquence logique. Avant d'étudier en quoi cette introduction d'un système sémantique dans le modèle que propose Corcoran l'éloigne de la lettre du texte des *Analytiques*, considérons d'abord son modèle en tant que système formel de déduction naturelle.

Nous pouvons réduire ce système, qu'on nomme D (pour « *Deductive System* »), au minimum en adoptant la présentation suivante²³ (et en normalisant les expressions pour faciliter la comparaison avec les reconstructions respectives de Łukasiewicz et d'Ebbinghaus)²⁴.

1. L'alphabet de D contient :
 - a) Un ensemble V de termes constants (A, B, C, D...)
 - b) Les opérateurs du syllogisme (a, e, i, o)

²¹ « Si on aborde le système aristotélicien avec le concept moderne de la règle et si on se demande pourquoi cette règle est valide, alors on ne peut donner à cela comme fondement qu'un état de fait, qui se laisse percevoir au moyen du $\nu\omicron\zeta$ et qui, dans le cadre de la pensée d'Aristote, relève proprement du domaine de l'ontologie. » Ebbinghaus, 2016, p. 61.

²² Même si Corcoran précise que ce système déductif sera associé à une seule interprétation, considérée comme interprétation naturelle.

²³ Voir Fillion, 2007, à qui nous reprenons la présentation du système déductif D notamment dans le choix de remplacer le signe \vDash par le signe \vdash , afin de faire ressortir provisoirement la primauté des règles d'inférences sur les relations de conséquences logiques, choix sur lequel nous reviendrons plus bas.

²⁴ Ainsi, au lieu de Aab (pour tout a est b), on écrira BaA (B est le cas de tout A)

2. Les expressions bien formées du langage L , pour D^{25} , sont :
 - a) Pour tous termes constants distincts²⁶ A et B : AaB , AeB , AiB et AoB ²⁷ sont des expressions bien formées (ou des « phrases »)
 - b) Rien d'autre n'est une expression bien formée.
3. Les règles d'inférence pour D . Pour tout $x, y, z \in V$:
 - C1. $x e y \vdash y e x$ (conversion)
 - C2. $x a y \vdash y i x$ (conversion)
 - C3. $x i y \vdash y i x$ (conversion)
 - PS1. $x a y, y a z \vdash x a z$ (Barbara)
 - PS2. $x e y, y a z \vdash x e z$ (Celarent)
 - PS3. $x a y, y i z \vdash x i z$ (Dariï)
 - PS4. $x e y, y i z \vdash x o z$ (Ferio)
 - CTR. Si $P, C(d) \vdash e$ et $P, C(d) \vdash C(e)$, alors $P \vdash d$ (Réduction)²⁸

Définition 1 (argument) : *Un argument est une paire ordonnée (P, c) , où P est un ensemble de phrases (appelées prémisses) et c est une seule phrase (appelée conclusion).*

Définition 2 (déduction directe) : *Une déduction directe dans D de c à partir de P est une liste finie de phrases terminant par c , commençant par toutes ou plusieurs phrases de P , et telle que toute phrase subséquente (après celles de P) est soit :*

²⁵ Notons que Corcoran distingue le système déductif D du langage L , qui en constitue la partie purement syntaxique.

²⁶ Cette stipulation que les termes doivent nécessairement être distincts dans les expressions bien formées permet à Corcoran d'exclure les prémisses du type « Tous les hommes sont hommes ». Notons, à cette occasion, que T. Smiley (1973, p.153) mentionne la monographie d'Ebbinghaus et sa différence par rapport à l'approche de Łukasiewicz. Cependant, selon lui, cette reconstruction procède bien d'une approche par la déduction naturelle et non par des propositions implicatives, mais elle est trop *permissive*, en ce qu'elle autorise la constitution de prémisses du type AaA . Sur ce point précis, il faut concéder que ce type de prémisse ne correspond pas à l'approche épistémique qui paraît bien être celle d'Aristote dans les *Analytiques*. Cela étant, Corcoran (1974, p. 99) mentionne lui-même deux occurrences d'un tel type de proposition, qui seraient exclues comme étant mal formées selon les règles qu'il a définies lui-même, à savoir (*P.A.* 63b40-64b25) : « Aucun savoir n'est savoir » et « Quelque savoir n'est pas savoir ». Sans doute que Corcoran a raison de dire que de telles propositions ont un caractère « extra-systématique » chez Aristote, mais après tout, la permissivité du système d'Ebbinghaus lui permet de rendre compte d'une forme propositionnelle dont l'usage est attesté chez Aristote. L'argument que Smiley utilise pour établir le caractère non-aristotélien du système d'Ebbinghaus ne saurait apparaître comme absolument décisif et pourrait très bien être retourné contre le système de Corcoran.

²⁷ En fait, Corcoran utilise une autre notation. Au lieu des constantes traditionnelles a, e, i et o , il utilise A, N, S et $\$$ pour « all », « no », « some » et « some... not ». Cette différence de notation ne change évidemment rien.

²⁸ $x a y$ et $x e y$ sont définis respectivement comme les contradictoires de $x o y$ et de $x i y$ (et vice-versa). $C(d)$ indique le contradictoire de d . CTR pour « contradiction »

- Une répétition d'une ligne qui précède
- Une D-conversion d'une ligne précédente
- Une D-inférence de deux lignes précédentes.

Définition 3 (déduction indirecte) : Une déduction indirecte dans D de c à partir de P est définie comme une liste finie de phrases finissant par une paire de contradictoires $[d, C(d)]$, commençant par une liste de toutes ou plusieurs phrases de P suivies de $C(c)$, et telle que chaque ligne additionnelle subséquente (après $C(c)$) est soit :

- Une répétition d'une ligne qui précède
- Une D-conversion d'une ligne précédente.
- Une D-inférence de deux lignes précédentes.

En nous appuyant sur ce système déductif, montrons à présent comment on peut réduire les syllogismes *Festino* et *Baroco*. Il ne s'agit pas des exemples que prend Corcoran, mais d'exemples reconstruits selon les règles de son système. Pour rendre plus facile la comparaison de ces reconstructions avec celles proposées par Ebbinghaus, on se reportera aux tableaux proposés en annexe

- *Festino* (déduction directe)

1	MeN	Prémisse
2	MiP	Prémisse
3	NeM	C1 (1)
4	MiP	Réitération (2)
5	NoP	PS4 (3,4)

- *Baroco* (déduction indirecte)

1		7	MoP
2	MaN		NoP
3	Mop		Prémisse
4	NaP		Prémisse
5	MaN		C(NoP)
6	MaP		Réitération (1)

PS1 (3,4)

Réitération (2)

CTR

On voit que le modèle de Corcoran est assez exactement similaire à celui d'Ebbinghaus, si on présente le système déductif D de cette manière, c'est-à-dire sous la forme d'un ensemble de règles d'inférence définies à partir d'un langage donné. Pourtant cette présentation est, en toute rigueur, trompeuse (même si elle permet de rendre manifeste une forte similitude avec le calcul K_S). En effet, dans l'article de 74, Corcoran, après avoir défini le langage L ne pose pas à proprement parler des « règles d'inférence », ici indiquées par le symbole \vdash . Ces règles d'inférence sont plutôt basées sur la formulation première de « lois », appartenant à une sémantique nommée S , et d'emblée associée au système déductif D . Elles sont donc rendues au moyen du symbole \models , qui exprime la conséquence logique, et pas seulement la dérivabilité. La validité de ces lois est fondée par Corcoran sur la définition d'une fonction de vérité qui associe les phrases de L à un « domaine » spécifique. Selon Corcoran, Aristote considère la valeur de vérité des propositions catégoriques non modales comme déterminée extensionnellement. Il se base alors sur ce fait pour relier les règles d'inférences à une fonction de vérité V associée à une interprétation des éléments du langage L qui fonde la possibilité pour les prémisses ou la conclusion d'un syllogisme d'être qualifiées de vraies. En fait, Corcoran se sert de la sémantique de théorie des modèles de Tarski dans une forme abrégée. De façon générale, une interprétation i est, dans ce cadre, une fonction qui associe des signes à un domaine : le résultat de l'interprétation d'un terme x , c'est-à-dire ix , est une classe, à savoir un sous-ensemble spécifique du domaine de discours. Quand les signes sont des phrases, on définit une fonction de valuation V^i (basée sur l'interprétation i) qui leur assigne alors des valeurs de vérité, qui dépendent de l'interprétation des termes. L'interprétation de « Axy », c'est-à-dire $V^i(Axy)$, est **vraie**, si et seulement si la classe qui interprète x est incluse dans la classe qui interprète y . La fonction d'interprétation relie des signes non-interprétés à un domaine garantissant la possibilité d'une sémantique, conçue en termes de fonctions de vérité, à partir de laquelle Corcoran définit les notions de négation et de contradiction présentes dans les *Premiers Analytiques*.

En d'autres mots, Corcoran suppose que le système de déduction naturelle qui se laisse dégager des *Premiers Analytiques* possède une sémantique vérifonctionnelle sous-jacente. Cette sémantique est préfigurée par la fonction d'interprétation. Plus généralement, Corcoran (1972) aussi bien que Smiley (1962) notent qu'Aristote utilise à la fois un système d'inférence et une méthode de contre-exemple (voir Smiley, 1962, p. 62), et ils supposent que cette dernière requiert une sémantique vérifonctionnelle. Or, si on suppose une telle sémantique formelle, on a besoin d'une preuve de complétude pour assurer que le système syllogistique inclut tout argument que la sémantique présente comme logiquement vrai. Rappelons que Corcoran (1972) réalise cette

preuve. Néanmoins, cette manière d'envisager la question de la complétude est plutôt greffée au texte des *Analytiques* qu'elle n'y est préfigurée. L'approche opérative d'Ebbinghaus ne requiert aucune sémantique de ce type. Une manière d'esquisser la différence entre les deux approches consiste à dire que Corcoran et Smiley utilisent un système « hybride ». En effet, on remarquera, par exemple, que Corcoran (1972, p. 697) ajoute aux règles du système inférentiel une définition vérifonctionnelle de la négation d'une proposition. Il est intéressant d'y comparer les pures règles d'inférence qu'emploie Ebbinghaus pour définir la négation (règles (D_1) , (D_2) , (D_3) , $(R_{4.1})$, $(R_{4.2})$, $(R_{4.3})$ et $(R_{4.4})$).

4. *Vers une autre compréhension de la question de la complétude.*

Malgré tout, Ebbinghaus ne conteste pas qu'Aristote ait pu s'intéresser à la question de la complétude. Il écrit, au contraire, au moment où il rapporte la théorie du syllogisme au contexte pragmatique des jeux de discussions qu'Aristote « s'intéresse beaucoup à la preuve de la complétude (*Nachweis der Vollständigkeit*) de son système, à cela que toutes les inférences passent par les figures répertoriées, que chaque preuve requiert trois termes...etc.»²⁹. Puisque cependant, il ne s'occupe pas, dans cet article, de la question de la vérité³⁰, sinon incidemment et pour la rejeter hors de son propos, étant donné que « le concept de vérité est éliminé de la syllogistique »³¹, alors on doit en conclure que l'intérêt d'Aristote pour une preuve de complétude doit être pensé autrement qu'à partir de la question de la vérité, donc autrement que Corcoran ne la pose, en termes de « fonction de vérité ». Ebbinghaus perçoit la raison de cet intérêt dans le fait qu'Aristote a inventé, avec la théorie du syllogisme, « un procédé au moyen duquel il devient possible de décider de la validité ou de la non-validité de chaque étape de la discussion »³². La

²⁹ Ebbinghaus, 2016, p. 56

³⁰ « Les propriétés « vrai » et « faux » ne sont pas définies pour les figures du calcul $[K_s]$ et ne peuvent être définies de façon opérative », p. 38.

³¹ p. 60.

³² p. 49. Le verbe « *entscheiden* » (décider) et l'expression « *Entscheidungsverfahren* » (procédé de décision) employés dans la même page par Ebbinghaus font écho au problème de la décision (« *Entscheidungsproblem* ») posé par Hilbert, problème qui trouverait, en quelque sorte, dans la syllogistique d'Aristote une solution positive. Notons qu'il s'agit là d'une théorie logique ne permettant pas de formaliser les relations, contrairement à la logique du premier ordre, dont Church a établi l'indécidabilité, et que ce n'est évidemment pas le type de théorie logique que Hilbert avait en vue lorsqu'il formulait le « problème de la décision ». D'ailleurs, Ebbinghaus parle de la décidabilité d'une *inférence* et non pas de celle d'une *proposition* : il ne s'agit pas, pour Aristote, de se demander si on peut décider de la dérivabilité ou de la non-dérivabilité de toute proposition, mais plutôt si on peut décider de la validité de toute inférence. Or, c'est justement possible si toute inférence valide constitue un détour réductible au moyen d'une preuve d'admissibilité. Le « flottement » entre le problème de la décision et celui de la complétude tient sans doute au fait que l'approche d'Ebbinghaus présuppose une manière de penser la signification qui diffère de celle en fonction de laquelle ces problèmes ont été formulés par Hilbert. On peut dire que ce que fait Aristote concerne la complétude si on comprend celle-ci comme détermination *complète* de l'ensemble des inférences du point de vue de la validité. Cependant, il est sans doute plus approprié de parler de l'admissibilité de toutes les inférences valides relativement aux règles fondamentales de la théorie du syllogisme.

« question de la complétude » est en quelque sorte déplacée et n'est plus à comprendre selon le sens qu'elle revêt lorsqu'on commence par séparer les règles d'inférence des questions sémantiques. Un système d'inférence ne sera pas qualifié de « complet » s'il est corrélé à une structure ensembliste dont il restituerait entièrement les relations inclusives, il le sera, dans un autre sens, s'il est associé à la preuve que toutes les inférences qu'il rend possibles sont susceptibles d'être normalisées, c'est-à-dire ramenées à des figures canoniques qui correspondent, non pas à des règles évidentes conservant la vérité, mais à des assomptions fondamentales instituant le cadre dans lequel une discussion entre individus raisonnables devient possible. Tel est le sens du concept d'admissibilité³³, qui rend possible de penser la notion de validité comme, en quelque sorte, immanente aux inférences elles-mêmes. Ebbinghaus a l'intuition géniale qu'en réduisant l'ensemble des syllogismes à quelques figures canoniques, moyennant l'usage des règles de conversion, Aristote *n'a pas besoin d'une preuve de complétude*. Dans les *Analytiques*, l'instrument inférentiel constitue l'objet même de l'analyse logique, indépendamment de toute perspective référentielle, renvoyée en dehors du domaine propre de la logique. Si Corcoran a bien perçu que les syllogismes étaient des règles d'inférence, il s'en est tenu à l'idée que ces règles devaient servir, en dernière instance, à transporter et à conserver la vérité, qui seule fonde, à ses yeux, leur validité. Ebbinghaus va, pour sa part, beaucoup plus loin, en suggérant qu'Aristote pense la validité syllogistique à travers l'analyse des inférences elles-mêmes et de leur réductibilité aux règles d'inférences canoniques que sont les syllogismes parfaits et les règles de conversion. C'est donc, en somme, le concept d'admissibilité qui permet de nommer la manière spécifique dont Aristote élabore la preuve de la complétude de son système, la mise en œuvre de cette preuve correspondant à celle de réduction des détours. On pourrait certes appeler ici « preuve de complétude » une preuve que la validité de tous les « coups » possibles dans le cadre d'un jeu peut faire l'objet d'une « décision » fondée sur la construction d'une relation d'équivalence entre les règles d'inférence auxquelles correspondent ces « coups » et les règles canoniques qui constituent

³³ Il est important de savoir que le concept d'admissibilité a eu une importance décisive dans la construction d'une sémantique de théorie de la preuve, notamment à travers le « principe d'inversion » qu'il permet de fonder, que Lorenzen formule en 1953 et que Dag Prawitz reprendra en 1965 pour développer l'idée que la signification d'un connecteur logique est donnée à travers des règles, à savoir les règles dites d'introduction et d'élimination de ce connecteur (idée que Gentzen formulait dès 1934). Si le travail d'Ebbinghaus est en quelque sorte traversé par des idées novatrices, et en chantier, sur la nature de la signification en général, mais plus particulièrement celle des constantes logiques, c'est d'une manière qui n'est pas toujours totalement maîtrisée, ce dont témoigne, par exemple, la note de bas de page concernant la dialogique, dont le contenu est suggéré, de l'aveu d'Ebbinghaus, par Lorenzen, mais qui s'intègre difficilement au contexte de l'article. Il nous semble qu'un des intérêts de ce dernier ressort justement de l'impression d'indécision et de flottement qui s'en dégage et qui est l'indice d'une bifurcation hésitante vers une approche nouvelle de la notion de validité, encouragée par la lecture toute « matinale » qu'elle rend possible du texte des *Analytiques*. Sur le développement de la sémantique de la théorie de la preuve à partir des travaux de Lorenzen, voir P. Schroeder-Heister « Proof-Theoretic Semantics », 2012 (Stanford Encyclopaedia of Philosophy).

fondamentalement le cadre du jeu, mais il serait plus naturel de parler de « preuve d'admissibilité » en ayant bien en tête qu'établir l'admissibilité de schémas inférentiels suffit pour fournir ce que Corcoran prétendait réaliser à travers sa preuve de complétude et que c'est exactement ce que fait Aristote dans les *Premiers Analytiques*. Prouver l'admissibilité d'un syllogisme est, au demeurant, un procédé plus général que celui qui consiste à admettre la validité d'un syllogisme imparfait en raison de sa perfectibilité. Gisela Striker (1999) a indiqué la nécessité de penser une telle notion générale, en s'appuyant sur le fait qu'après tout, les *Premiers Analytiques* contiennent d'autres procédés que la réduction à un syllogisme parfait pour fonder la validité des syllogismes, à savoir l'ecthèse, la *reductio ad impossibile*, mais aussi la réduction des syllogismes de la première et de la deuxième figures à ceux de la troisième (A. 45, 50b-51b).

On notera enfin que, la notion de réductibilité à la première figure peut-être généralisée pour *n'importe quel* syllogisme. Cette généralisation provient de la compréhension que prouver la réductibilité d'un syllogisme *quelconque* revient à prouver que ce syllogisme est admissible, s'il est éliminable à travers l'utilisation de quelques règles basiques ou canoniques. L'admissibilité permet donc de discerner, parmi tous les arguments possibles, ceux qui sont logiquement valides, c'est-à-dire les *syllogismes*. Cela suffit à Ebbinghaus pour atteindre sa visée métalogue (analogue à la preuve de complétude de Corcoran, 1972). Il aurait certainement pu élaborer en détail un procédé pour reconstruire la méthode du contre-exemple, à l'intérieur du cadre qu'il était en train de développer, mais il ne l'a pas fait – et a tristement disparu du monde académique après la publication du texte que nous sommes en train de discuter. Quoiqu'il en soit, la procédure consistant à produire des contre-exemples ne doit pas nécessairement être comprise en termes de fonction de vérité : Marion / Rückert, 2015 ont montré que cette méthode pouvait être comprise comme faisant partie de la signification inférentielle des quantificateurs chez Aristote. Ce qu'on peut sans doute objecter à l'approche d'Ebbinghaus, c'est que, contrairement à celui de Corcoran, son système ne paraît pas exclure les prémisses de la forme « Homme est prédiqué de tout homme » – et du moins, que c'est une question sur laquelle il ne se prononce pas. Ce point a été signalé par Smiley (1973, note de fin 5), qui, à cette occasion, reconnaît le travail d'Ebbinghaus, et qui est, à notre connaissance, le seul, avec G. Patzig (1969) et, plus récemment, Gisela Striker (1999, 2009), à l'avoir fait.

*

S'il vaut la peine de lire (ou de relire) aujourd'hui cet article de 1964, ce n'est toutefois peut-être pas tant pour lui restituer la part d'influence qui fut la sienne, d'une manière plus ou

moins souterraine, dans le domaine des études des écrits logiques d'Aristote, que pour redécouvrir, dans son éclat naissant, une intuition lumineuse relative à l'essence de la logique, intuition qui pourrait, dans sa discrétion même, ouvrir la perspective de nouveaux développements audacieux, s'inscrivant dans la continuité des textes de l'*Organon*.

*

Annexe : tableau comparatif des reconstructions proposées pour les preuves de Festino et de Baroco.

Ces deux exemples font partie de ceux qui ont été choisis par Ebbinghaus, 1964, et sont différents de ceux choisis par Corcoran, 1974. Nous avons donc indiqué, en vue de la comparaison, les règles qui auraient servi à reconstruire les exemples en question dans le système de Corcoran en adoptant une notation différente de la sienne (cf. note 27)

Festino (preuve directe)

EBBINGHAUS			CORCORAN		
l	MeN		1	MeN	prémisse
m	MiP		2	MiP	prémisse
$l \rightarrow n$	NeM	R ₁	3	NeM	C1 (1)
$n, m \rightarrow n+1$	NoP	R ₆	4	MiP	Réitération (2)
			5	NoP	PS4 (3,4)

Baroco (preuve indirecte)

EBBINGHAUS			CORCORAN		
l	MaN		1	MaN	prémisse
m	MoP		2	MoP	prémisse
n	NaP	prémisse ajoutée.	3	NaP	C(NoP)
			4	MaN	Réitération(1)
$l, n \rightarrow n+1$	MaP	R ₂	5	MaP	PS1 (3,4)
$n+1, m \rightarrow n+2$	\wedge	D ₁	6	MoP	Réitération (2)
$(n \rightarrow n+2) \rightarrow$	NoP	R _{4.1}	7	NoP	CTR.

$n+3$					
-------	--	--	--	--	--

*

Remerciements. Nous exprimons notre gratitude et nos plus vifs remerciements au professeur Michel Crubellier pour ses précieuses indications et pour la relecture minutieuse de la traduction de l'article d'Ebbinghaus par Clément Lion. Merci également à Zoé McConaughy pour les échanges fructueux dans le cadre d'un séminaire organisé au sein de l'UFR de philosophie de Lille 3, portant sur les reconstructions modernes de la théorie du syllogisme d'Aristote et à l'occasion duquel s'est esquisé le contenu du présent article. Merci à la MESHS de la région Hauts-de-France, pour nous avoir donné l'occasion, dans le cadre de l'axe de recherche ADA (Argumenter-Décider-Agir), de soumettre une première présentation du contenu de cet article au jugement de chercheurs avisés. Merci à Thomas Bénatouïl, pour nous avoir proposé de soumettre cet article à la revue *Philosophie Antique*. Merci enfin aux rapporteurs, dont les remarques nous ont permis de préciser certains points et de rendre ainsi notre propos, nous l'espérons, plus intelligible.

*

BIBLIOGRAPHIE.

- Corcoran, J., 1972, «Completeness of an Ancient Logic», *Journal of Symbolic Logic*, (1972) vol. 37, p. 696-702.
- Corcoran, J., 1973, «A Mathematical Model of Aristotle's Syllogistic», *Archiv für Geschichte der Philosophie*, (1973) vol. 55, p. 191-219.
- Corcoran, J., 1974a, «Aristotle's Natural Deduction System», in J. Corcoran (ed.), *Ancient Logic and its Modern Interpretations*, Dordrecht, 1974, Reidel, p. 85-131.
- Corcoran, J., 1974b, «Aristotelian Syllogisms: Valid Arguments or True Universalized Conditionals? », *Mind*, n.s., vol. 83, (1974) p. 278-281.
- Corcoran, J., 1994, «The Founding of Logic. Modern Interpretations of Aristotle's Logic», *Ancient Philosophy*, vol. 14, (1994) p. 9-24.
- Crubellier, M., 2011, «Du sullogismos au syllogisme», *Revue philosophique de la France et de l'étranger*, vol. 136, (2011) no 1, p. 17–36.
- Crubellier, M., 2014, *Aristote, Premiers Analytiques ; traduction, introduction et commentaire*,

- Paris, 2014, Garnier-Flammarion.
- Ebbinghaus, K., 1964, *Ein formales Modell der Syllogistik des Aristoteles*, Göttingen, 1964, Vandenhoeck & Ruprecht.
- Ebbinghaus, K., 2016, *Un modèle formel de la syllogistique d'Aristote*, traduit par C. Lion, London, 2016, College Publications.
- Fillion, N., 2007, "Two accounts of Aristotle's Logic", Seminar on Aristotelian Logic, Ph.D in Philosophy.
- Gourinat, J.B., 2011, "Aristote et la « logique formelle moderne »: sur quelques paradoxes de l'interprétation de Łukasiewicz", *Philosophia Scientiae*, 15-2, (2011) p. 69-101.
- Kapp, E., 1942, *Greek foundation of traditional logic*, New-York, 1942, Columbia Univ. Press.
- Marion, M, Ruckert, H., 2015, « Aristotle on universal quantification: a study from the perspective of game semantics » *History and philosophy of Logic*, vol. 37, (2015) p. 201-209.
- Patzig, G., 1959, *Die aristotelische Syllogistik*, Göttingen, 1959, Vandenhoeck & Ruprecht.
- Patzig, G., 1969, *Aristotle's theory of the syllogism: a logico-philosophical study of Book A of the prior analytics*, New York, 1969, Reidel.
- Prawitz, D., 1965, *Natural deduction*, Stockholm, 1965, Almquist and Wiksell.
- Rahman, S, McConaughey Z., M. Crubellier, 2015, « A dialogical framework for Aristotle's Syllogism », en préparation.
- Rahman, S, Nzokou, G., 2015, « Les racines dialectiques de la syllogistique aristotélicienne. Identité et quantification universelle ». Conférence Ada-Lacto, MESHS Lille.
- Smiley T., 1962, « Syllogism and quantification ». *The journal of symbolic logic*, vol. 27 no. 1 (1962), p. 58–72.
- Smiley, T., 1973, « What is a Syllogism », *Journal of Philosophical Logic* 2 (1), (1973) p.136-154.
- Smith, R., 1982, «What is Aristotelian Ecthesis? », *History and Philosophy of Logic*, vol. 3, (1982) p. 113-127.
- Smith, R., 1983, «Completeness of an Ecthetic Logic», *Notre Dame Journal of Formal Logic*, vol. 24, (1983) p. 224-232.
- Smith, R., 1989, *Aristotle's Prior Analytics*, Indianapolis, 1989, Hackett.
- Striker, G., 1999, « Perfection and Reduction in Aristotle's Prior Analytics » In Michael Frede & Gisela Striker (éds.), *Rationality in Greek Thought*. Clarendon Press (1999) p. 203-219.
- Striker, G., 2009, *Aristotle, Prior Analytics: Book I (translation and commentary)*, Oxford, 2009, University Press.
- Thom, P., 1981, *The Syllogism*, Munich, 1981, Philosophia.

III

Syllogisme à la Lumière de la Dialectique des *Topiques*. Avec des Exemples pour les premières Trois Figures, Preuve Indirecte, et Reduction à la Première Figure.

Extraits de

M. Crubellier, Z. McConaughey, M. Marion, S. Rahman (2018) : "Dialectic, The Dictum de Omni and Ecthesis". *History and Philosophy of Logic.*, vol. 40, No. 3, pp. 207-233.,

Z. McConaughey (2021): *Aristotle, Science and the Dialectician's Activity. A Dialogical Approach to Aristotle's Logic*. PhD-Université de Lille et S. Rahman et A. Seck (2022).

S. Rahman et A. Seck (2022) : Suhrawardī's Stance on Modalities and his Logic of Presence. Talk presented at the *Workshop on Arabic Logic in honour of Tony Street* University of California, Berkeley, 24-25 April 2022

III.1 Introduction

Given that demonstrations can be analyzed into inferences (see previous section II°), Aristotle is naturally understood as having constructed the theory of inference (or deduction) of *Prior Analytics* as a tool for his theory of demonstrative science in *Posterior Analytics*,³⁴ and there is a long tradition of commentators, harking back at least to Pacius, according to which Aristotle's belief that there is no demonstrative knowledge of singulars terms³⁵ entails that inferences in *Prior Analytics* could not involve such terms.³⁶ Thus, the typical syllogism 'Humans are mortal, Socrates is human, therefore Socrates is mortal' could not be truly Aristotelian.³⁷ Still, there are a number of proofs within Aristotle's own presentation of his theory of inference that appear at first sight to involve singular terms such as the proof of the convertibility of universal negatives or 'e-conversion', that have been called 'proofs by ecthesis':

Now, if *A* belongs to none of the *Bs*, then neither will *B* belong to any of the *As*. For if it does belong to some (for instance to *C*), it will not be true that *A* belongs to none of the *Bs*, since *C* is one of the *Bs*.³⁸

Although he does not use that word in this very passage, Aristotle calls the selection of a *C*

³⁴ After all, Aristotle himself tells us in the very first sentence of *Prior Analytics* that his treatise is about 'demonstration' and that its object is 'demonstrative science' (*An. Pr.* A1, 24a10-11).

³⁵ This claim is based on Aristotle's argument according to which individuals cannot be predicated of other things, and the concomitant claim at *An. Pr.* A27, 43a42-43 that "arguments and inquiries are almost always chiefly concerned with" things that are, as explained a few lines above, "both predicated of others and have others predicated of them" (*An. Pr.* A27, 43a29-31).

³⁶ See *Lukasiewicz 1957*, p. 4-7.

³⁷ For a modern statement, see Ross *ad An. Pr.* A1, 24a17 in *Ross 1949a*, p. 289.

³⁸ *An. Pr.* A2, 25a15-17. Unless indicated, we use Robin Smith's translation of *Prior Analytics* in *Smith 1989*.

‘ecthesis’ (ἐκθεσις) – translated by Robin Smith and others before him as ‘setting out’.³⁹

In this paper, we shall propose a new perspective on ecthesis, presenting it as a *procedure* such that (answering the second question) it will be seen as fully pertaining to Aristotle’s theory of inference, and (answering the first one) as involving *both* singular and general terms

But we should state at the outset that, according to our perspective, although it is part of the theory of inference, ecthesis is not at the same level, so to speak, as that of the rules of syllogisms and of conversion. With the *dictum de omni* one can recover the meaning explanation of the main building blocks of Aristotle’s theory of inference, the universal affirmative (*AaB*), universal negative (*AeB*), particular affirmative (*AiB*), and particular negative (*AoB*) propositions, and we see ecthesis as a procedure implementing the *dictum*,⁴⁰ that allows one to prove the *admissibility* of the basic rules of his theory, i.e., rules of the first figure (*Barbara*, *Celarent*, *Darii* and *Ferio*), and the three conversion rules (for propositions *a-e-i*).

While our perspective involves a bit of ‘formalism’, it is meant to be more historically sensitive than is usually the case in the secondary literature on logical aspects of Aristotle, as it relies on the claim that dialectic, far from being simply discarded by Aristotle when he wrote *Prior Analytics*, actually forms its historical context.⁴¹

In this we follow E. W. Beth, Kurt Ebbinghaus, as well as Mathieu Marion & Helge Rückert in claiming that the *dictum de omni* at *An. Pr.* A 2, 24b28-29 originates in a *dialectical* rule in the *Topics* (in *tTop.* Θ 2, 157a34-37),⁴².

This dialectical rule involves one of the players, in their terminology (taken from Aristotle), *Questioner* getting the other player *Answerer*, to concede a few instances before she can introduce a universal affirmative proposition such ‘*A* belongs to all *B*’ (*AaB*), and ask *Answerer* for a counterexample: if unable to provide one, *Answerer* must then concede it.

To argue their point, Marion & Rückert followed a suggestion by Jan von Plato⁴³ in using Martin-Löf’s Constructive Type Theory⁴⁴ to read *AaB* as meaning that no *c* of type *B* – or no ‘*c* : *B*’ – can be found for which it is not the case that *A(c)*.

³⁹ See *Smith 1982*, p. 113, *1983*, p. 225, *1989*, p. xxiii. For earlier precenses, see *Heath 1921*, I, p. 370, II, p. 533 and *Ross 1949b*, p. 36 n. 2. Jules Tricot *ad An. Pr.* A2, 25a15-17 in *Tricot 1971* p. 8 & p. 332, used ‘ecthèse’, which hardly counts as translation.

⁴⁰ It is also linked nowadays with the notion of downwards and upwards monotony developed during the Middle Ages. See, e.g., *Parsons 2014*, p. 45-48.

⁴¹ This claim is not new, see, e.g., *Kapp 1942*.

⁴² Beth linked ecthesis to the no counterexample reasoning embodied in his rules for semantic tableaux in *Beth 1969*, p. 35 & 37 (originally published in 1955), so he stands at the origin of the viewpoint developed here, although he did not notice the link with dialectic. This link was first noted in *Ebbinghaus 1964*, p. 57 n. 1 and it was fully argued for in *Marion & Rückert 2016*. Jaakko Hintikka had also linked ecthesis to the rule of existential instantiation in, e.g., *Hintikka 1973*, p. 111, or *Hintikka 1991*, p. 175, and recognized his debt to Beth in *Hintikka 2006*, p. 10. But, despite some perceptive remarks in, e.g., *Hintikka 1993*, p. 14-19, to our knowledge he never developed a dialectical account of ecthesis of the sort we set forth here.

⁴³ *von Plato 2009, 2013*, sec. 14.1.

⁴⁴ See, e.g., *Martin-Löf 1984* or *Granström 2011*.

We shall here travel further along that path, using a dialogical take on CTT that yields an interactive logical framework called ‘immanent reasoning’,⁴⁵ which we will adapt to Aristotle’s syllogistic.

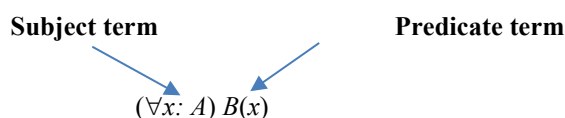
III.2 The Dialogical Meaning Explanation of Quantifiers

If we integrate the instances of the Subject and Predicate terms into the encoding the dialectical setting the *dialogical meaning explanation* of the universal quantifier amounts to the following:

- If player **X** states a universal quantifier he has to be able to associate a suitable presence of the **consequent** for any arbitrary presence of the **antecedent** chosen by the challenger **Y**.

Statement	Challenge	Defence
$X ! (\forall x: A) B(x)$ X states the universal <i>Every A is B</i>	$Y a: A$ Y chooses an arbitrary instance <i>a</i> of <i>A</i>	$X ! b[a]: B(a)$ X associates <i>a</i> with a instance of <i>B(a/x)</i>

Notice that this notation follows the idea of traditional logic that predication amounts to stating that the Predicate-Term applies to any instance of the Subject Term:



The dialogical meaning explanation for an existential, leaves the choice of the instance to the defender:

Statement	Challenge	Defence
$X ! (\exists x: A) B(x)$ X states the existential <i>Some A is B</i>	Challenge1 $Y ? \mathcal{L}^{\exists}$ Y asks for the left: Which/ Who of the <i>A</i> 's are <i>B</i> ?	Defence1 $X a: A$ X responds that <i>a</i> is one of those <i>A</i> 's
	Challenge2 $Y ? \mathcal{R}^{\exists}$ Y asks for the right: Show me that this choice of yours is indeed a <i>B</i>	Defence2 $X b(a): B(a)$ X associates the instance of <i>a</i> with a instance of <i>B(a/x)</i>

Notice that this allows an existential assertion to have the same subject-predicate structure as the one for the universal quantifier. Moreover, it allows expressing the Subject-Term as a restricting an underlying domain. Let us take Ibn Sīnā’s example

⁴⁵ See Rahman et al. to appear.

Some poets are good

Which, as pointed by Ibn Sīnā in the *al-Iṣārāt* (1983, Chapter 10.1, pp. 501-502) does not support the inference *There is someone, say Imra`a al-Qays, who is good and a poet.*⁴⁶ Clearly what is asserted is

Some poets are good as poets $(\exists x: \text{Poets}) \text{Good}(x)$

In other word: *Within the domain restricted by the the subject, namely, poets, some are good.* As mentioned in our discussion on ecthesis, the existential expresses a set, in our example the set of

Those instances of poet that are good (as poets) $\{x: \text{poet} \mid \text{Good}(x)\}$

Since this set, is what the meaning of the existential amounts to, the dialogical meaning explanation is the same as the one of the existential:

Statement	Challenge	Defence
X ! $\{x: A \mid B(x)\}$	Challenge1 Y ? \mathcal{L}^{\exists}	Defence1 X a: A
X states that the set of those A 's that are B can be defined over A	Y asks for the left: Which/ Who of the A 's are B ?	X responds that a is one of those A 's
	-----	-----
	Challenge2 Y ? \mathcal{R}^{\exists}	Defence2 X b[a]: $B(a)$
	Y asks for the right: Show me that this choice of yours is indeed a B	X associates the instance of a with a instance of $B(a/x)$

Once the logical constants have been constituted out of its dialectical meaning explanations, those moves can be identified, allowing a higher level – namely, the strategic level.⁴⁷

⁴⁶ In fact, by Ibn Sīnā's precise counterexample is that from the premises *Imra`a al-Qays is good* and *Imra`a al-Qays is a poet*, *Imra`a al-Qays is a good poet* does not follow.

⁴⁷ At the strategic level the Proponent, has a winning strategy for a a universal iff for *any* instance of the Subject the challenger can show produce an instance of the Predicate for this choice of the Opponent. The way to implement this, is to allow the Opponent to choose always a **new** instance

Statement	Challenge	Defence
P ! $(\forall x: A) B(x)$	O a: A	P ! $b(a): B(a)$
P states that he has a winning strategy for the universal	O chooses the new instance a of A , and requests P to show that it witnesses a instance of $B(x)$	P associates a with a instance of $B(a/x)$

Thus, at the strategic level, the truth of the universal requires **P** to be able to associate instances of the Subject with instances of the Predicate, by means of substituting x in $b(x)$ for any instance of the Subject **O** might choose. In other words, the truth of the universal $(\forall x: A) B(x)$ requires the Proponent

- a) to build out of the associations triggered by whatever instances of A **O** might choose, witnesses of $B(a/x)$ an association-procedure $b(x)$,
- b) to build the abstract construct of this procedure, namely $(\lambda x)b(x)$, called the lambda-abstract of $b(x)$. The lambda-abstract indicates that for whatever choice of the Opponent the association-procedure $b(x)$ can be executed in order to yield an instance of $B(a/x)$ for that choice, and
- c) P's execution of $b(a/x)$ is justified by **O** being forced to state himself $B(a)$: this actually is the core of proving the validity (building a winning-strategy) of a syllogism involving universals.

Thus, the canonical form of a winning strategy for a universal has the form:

P $(\lambda x)b(x): (\forall x: A) B(x)$

Any c witnessing the universal is a construct equal to the lamda-abstract $(\lambda x)b(x)$, built out of plays whereby **P** can execute the association-procedure $b(a/x)$ witnessing $B(a/x)$, for any $a: A$ chosen by **O**. Notice the proviso, **new**, implements the idea that the winning-strategy is not dependent upon one particular choice of **O**. Indeed, if the

Let us now observe that within a syllogism, premises and conclusion share a common domain, over which the Subject term and the Predicate term have been defined. This is what allows the

winning-strategy is a robust one, it will yield the same result for any alphabetic variant of instances of the antecedent.

Statement	Challenge-Defence	Strategic object
<p>$P ! (\forall x: A) B(x)$</p> <p>P states that he has a winning strategy for the universal</p>	<p>Challenge</p> <p>O $a: A$</p> <p>O chooses the new instance a of A, and requests P to show that it witnesses a instance of $B(x)$</p>	<p>$P (\lambda x)b(x)=c: (\forall x: A) B(x)$</p>
	<p>Defence</p> <p>P $b(a): B(a)$</p> <p>P associates a with a instance of $B(a/x)$, and O is forced to state himself $B(a)$</p>	

In relation to an existential, such as $(\exists x: A) B(x)$, at the strategic level, the truth of this existential requires **P** to be able to state some instance $a: A$ chosen by **P** himself, as response to the first challenge, and to state $B(a)$, as a response to the second challenge, by building the association procedure $b(a/x)$.

Statement	Challenges	Defence
<p>$P ! (\exists x: A) B(x)$</p> <p>P states that he has winning-strategy for the existential</p>	<p>Challenge1 O ? \mathcal{L}^{\exists}</p> <p>-----</p> <p>Challenge2 O ? \mathcal{R}^{\exists}</p>	<p>Defence1 P $a: A$</p> <p>P responds by choosing one a and that it is one these instances that witnesses A</p> <p>-----</p> <p>Defence2 P $b(a): B(a)$</p> <p>P associates the instance of a with a instance of $B(a/x)$</p>

In other words, the truth of the existential requires the Proponent

- to state that some instance a , chosen by **P** himself witnesses A , and build out of the association of a with a instance of the $B(a/x)$ an association-procedure $b(a/x)$
- to build the complex construct $\langle a, b(x) \rangle$, which results from **P**'s responses to both challenges:
- P**'s choice of some $a: A$, and the execution of $b(a/x)$ is justified by **O** being forced to state himself both $a: A$ and $B(a)$: this actually is the core of proving the validity (building a winning-strategy) of a syllogism involving existentials

Thus, the canonical form of a winning strategy for a universal has the form:

$$P \langle a, b(x) \rangle: (\exists x: A) B(x)$$

So, any c witnessing the existential can be analysed as the pair $\langle a, b(x) \rangle$.

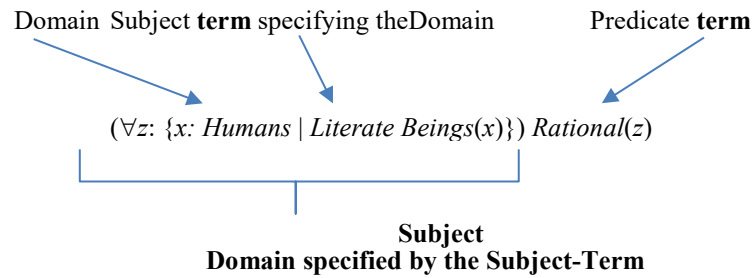
Statement	Challenges-Defences	Strategic Object
<p>$P ! (\exists x: A) B(x)$</p> <p>P states that he has winning-strategy for the existential</p>	<p>Challenge1 O ? \mathcal{L}^{\exists}</p> <p>Defence1 P $a: A$</p> <p>-----</p> <p>Challenge2 O ? \mathcal{R}^{\exists}</p> <p>Defence2 P $b[a]: B(a)$</p>	<p>$P \langle a, b(x) \rangle = c: (\exists x: A) B(x)$</p>

middle term, to occur as the Predicate in one premise and as Subject in the other. Moreover, since as we will see when we introduce modalities into the universal; the Subject term can be also be modalized, we need a first term to build the modal relation : as in *All Humans who are necessarily Contingently literate Beings, are necessarily necessary Rational*. Let for the moment ignore the modality in order to stress the underlying structure of the Subject – the “Subject” denominates here the Subject term + the domain upon which the Subject term has been defined:

All Humans who are Literate Beings are Rational

Should be understood as

All instances z of the set of all those Humans who are Literate Beings , are Rational



Notice that this analysis reflects the Subject-Predicate form of traditional syllogism.

	Traditional Form	Explicit Encoding
Universals	Every (<i>D</i> who are) <i>S</i> is <i>P</i>	$(\forall z: \{x: D \mid S(x)\}) P(z)$
	No (<i>D</i> who are) <i>S</i> is <i>P</i>	$(\forall z: \{x: D \mid S(x)\}) \sim P(z)$
Particulars	Some (<i>D</i> who are) <i>S</i> is <i>P</i>	$(\exists z: \{x: D \mid S(x)\}) P(z)$
	Some (<i>D</i> who are) <i>S</i> is not <i>P</i>	$(\exists z: \{x: D \mid S(x)\}) \sim P(z)$

Actually, in the context of a dialectical interaction, it is useful to be more precise and indicate that the “testing-instances” for a universal stated by **X**, are chosen by the challenger **Y**. In our example it amounts to the indication that **Y**’s choice of an instance witnessing the subject, is *an animal who is human*. Since *Animal* is the left component of every instance *z* witnessing the Subject, we adopt the notation “ $\mathcal{L}^{\exists}(z)^Y$ ”, that indicates that **Y** choses some animal who is rational, as his (**Y**’s) case to build a counterexample to the universal – cf. Crubellier et al. (2019) and McConaughey (2021, chapter 4):

$$\mathbf{X} ! \forall z: \{x: \text{Animal} \mid \text{Human}(x)\} \text{Rational}(\mathcal{L}^{\exists}(z)^Y)$$

From this perspective the semantic and logical analysis is a consequence of the dialectical interaction underlying a debate on meaning and its possible extensions. As discussed below, the dialectical framework, allows what we call a dynamic encoding. In other words, an encoding where the instances witnessing the Subject and Predicate terms are made explicit during the challenge-defence interaction. Thus, before the interaction the assertions in a syllogism have the following forms:

	Traditional Form Before Interaction	Dynamic Encoding Before Interaction	Explicit Dialectical Encoding Before Interaction
Universals	$\mathbf{X} ! \text{Every } (D \text{ who are}) S \text{ is } P$	$\mathbf{X} ! (\text{Every}S_D)P$	$\mathbf{X} ! (\forall z: \{x: D \mid S(x)\}) P(\mathcal{L}^{\exists}(z)^Y)$
	$\mathbf{X} ! \text{No } (D \text{ who are}) S \text{ is } P$	$\mathbf{X} ! (\text{Every}S_D)\text{no-}P$	$\mathbf{X} ! (\forall z: \{x: D \mid S(x)\}) \sim P(\mathcal{L}^{\exists}(z)^Y)$

Particulars	X ! Some (<i>D</i> who are) <i>S</i> is <i>P</i>	(Some S_D) <i>P</i>	X ! ($\exists z: \{x: D \mid S(x)\} P(\mathcal{L}^{\exists}(z)^Y)$)
	X ! Some (<i>D</i> who are) <i>S</i> is not <i>P</i>	X ! (Some S_D)no- <i>P</i>	X ! ($\exists z: \{x: D \mid S(x)\} \sim P(\mathcal{L}^{\exists}(z)^Y)$)

	Traditional Form During Interaction	Dynamic Encoding During Interaction	Explicit Dialectical Encoding During Interaction
Universals	X ! Every (<i>D</i> who are) <i>S</i> is <i>P</i> Y ! <i>d_i</i> is <i>S</i> X ! <i>d_i</i> is <i>P</i>	X ! (Every S_D) <i>P</i> Y <i>S_D</i> (<i>d_i</i>) X ! <i>P</i> (<i>d_i</i>)	X ! ($\forall z: \{x: D \mid S(x)\} P(\mathcal{L}^{\forall}(z)^Y)$) Y <i>S</i> (<i>d_i</i>) X ! <i>P</i> (<i>d_i</i>) Given Y $\mathcal{L}^{\forall}(z)=d_i: D$
	X ! No (<i>D</i> who are) <i>S</i> is <i>P</i> Y <i>d_i</i> is <i>S</i> X ! <i>d_i</i> is not <i>P</i>	X ! (Every S_D)no- <i>P</i> Y <i>S_D</i> (<i>d_i</i>) X ! $\sim P$ (<i>d_i</i>)	X ! ($\forall z: \{x: D \mid S(x)\} \sim P(\mathcal{L}^{\forall}(z)^Y)$) Y <i>S_D</i> (<i>d_i</i>) X ! $\sim P$ (<i>d_i</i>) Given Y $\mathcal{L}^{\forall}(z)=d_i: D$
Particulars	X ! Some (<i>D</i> who are) <i>S</i> is <i>P</i> Y which <i>S</i> ? X ! <i>d_i</i> is <i>S</i> Y which <i>P</i> ? X ! <i>d_i</i> is <i>P</i>	X ! (Some S_D) <i>P</i> Y ? \mathcal{L}^{\exists} X ! <i>S</i> (<i>d_i</i>) Y ? \mathcal{R}^{\exists} X ! <i>P</i> (<i>d_i</i>)	X ! ($\exists z: \{x: D \mid S(x)\} P(\mathcal{L}^{\exists}(z)^Y)$) Y ? \mathcal{L}^{\exists} X ! <i>S</i> (<i>d_i</i>) Y ? \mathcal{R}^{\exists} X ! <i>P</i> (<i>d_i</i>)
	X ! Some (<i>D</i> who are) <i>S</i> is not <i>P</i> Y which <i>S</i> ? X ! <i>d_i</i> is <i>S</i> Y which <i>P</i> ? X ! <i>d_i</i> is not <i>P</i>	X ! (Some S_D)no- <i>P</i> Y ? \mathcal{L}^{\exists} X ! <i>S</i> (<i>d_i</i>) Y ? \mathcal{R}^{\exists} X ! $\sim P$ (<i>d_i</i>)	X ! ($\exists z: \{x: D \mid S(x)\} \sim P(\mathcal{L}^{\exists}(z)^Y)$) Y ? \mathcal{L}^{\exists} X ! <i>S</i> (<i>d_i</i>) Y ? \mathcal{R}^{\exists} X ! $\sim P$ (<i>d_i</i>)

Many contemporary reconstructions that appeal to relevant, modal, or other forms of so-called non-classical logics, seem to overlook the fact that it is the dialectical constitution of meaning that leads the way in the logical shaping of dialectics. As dialogicians often put it: the dialectical conception of logic is not logic plus dialectical interaction, but it is dialectical interaction that shapes both meaning and logical reasoning.

III.3 Syllogism: Dialectical Meaning Explanations at Work

Here we present only some examples of each figure

III.3.1 First figure

Let us now argument in the form of a dialogue that implements these rules, focusing on an example that occurs very often in the commentators (since we restrict to categorical logic, we leave here unanalyzed the modal component),

All humans have the capacity of laughing
All those who have the capacity of laughing, have the capacity of reading
Therefore, all humans have the capacity of reading

- **N.B.** We use here the **re-ordering** of the premises within the Arabic tradition, which dominated post-Aristotelian and Medieval Philosophy. This makes it closer to the logic form of contemporary quantification and of course does not change the validity of the moods involved but it does not coincide with the Latin medieval denominations of the valid forms of each figure. A lucid presentation of this point has been provided by Street (2008), let us quote his excellent summary: *The first mood of the first figure is Barbara, given by Aristotle in the form: A belongs to all B (major premise), B belongs to all C (minor premise), therefore A belongs to all C (conclusion). The major premise is so-called because it provides the predicate of the conclusion, whereas the minor premise provides the subject. Arabic logicians stated Barbara differently in two respects. First, they put the subject of the premise before the predicate, and secondly, they put the minor premise before the major: every C is B, every B is A, therefore every C is A, which is just as obvious—or perfect—an inference as it is when stated in Aristotle's fashion. [...]. The second mood, Celarent, has different vowels to show that the major premise and the conclusion are E-propositions, that is, of the form 'no C is B'. But now the order of the premises as stated in the*

Arabic will be out of step with the vowels in the Latin mood name: every C is B (a -proposition), no B is A (e -proposition), therefore no C is A (e -proposition). Still, we should refer to this as *Celarent* because we can then compare it easily to the analyses of the same inference by Aristotle and the medieval Latin authors. Street (2008, pp. 176-177).

If we place a syllogism within a dialogue, then, the idea is that the proponent **P**, claims that that the conclusion holds if the opponent **O**, concedes to state the premises. This yields the notation:

$$\begin{array}{l} \mathbf{O} ! (\text{Every } J_D) B \\ \mathbf{O} ! (\text{Every } B_D) A \\ \hline \mathbf{P} ! (\text{Every } J_D) A \end{array} \qquad \begin{array}{l} \mathbf{O} ! (\forall z: \{x: D \mid J(x)\}) B(\mathcal{L}^{\exists}(z)^{\mathbf{P}}) \\ \mathbf{O} ! (\forall z: \{x: D \mid B(x)\}) A(\mathcal{L}^{\exists}(z)^{\mathbf{P}}) \\ \hline \mathbf{P} ! (\forall z: \{x: D \mid J(x)\}) A(\mathcal{L}^{\exists}(z)^{\mathbf{O}}) \end{array}$$

Recall that explicit dialectical notation, also indicates which player is in charge of the substituting the variables. Since the premises are stated by the opponent, and these are universals, it is the proponent who will choose the presence of the subject of which the predicate is requested to be stated. The dual is the case of the universal in the conclusion: since the conclusion is stated by the Proponent, it is the Opponent who will choose the presence of the subject of which the predicate is requested to be stated. In fact, a consequence of the Socratic rule is that a winning strategy for **P** should follow the idea to leave **O** choose first and the copy-cat this choice for his own challenges to the premises. Notice that **O** is forced to choose if he challenges a universal (stated by **P**) or defends an existential stated by himself.

0. **P** ! I can show that every element of domain of discourse D , who is a J is possibly A follows from the premises: I), Every element of D who is J , is possibly B and II) Every element of D who is B is A .
1. **O** ! Fine, I give you the premises. Show me now, that the consequent of the conclusion follows from some d_i in the domain of discourse D who is J : **O** challenges the conclusion with the move **O** ! $J(d_i)$.
2. **P** ! What I will do is to show you that the endorsement of the premises will force you to assert this consequent. Let us start with the first premise. Since the first premise states that every element of the domain of discourse who is J has the capacity B , and you just chose d_i in the domain of discourse with your first move (sic move 1), B should also hold of d_i , right?: **P** challenges the first premise with the move **P** $you_1 J(d_i)$; whereby “ you_1 ” stands for the indication “you just stated the same at move 1).
3. **O** ! Indeed, I have to assume that d_i is one of those in the domain of discourse that are B .
4. **P** ! Ok, however, premise II states that every element of the domain of discourse who is B , is A , this must include all those elements in D who are B , so let us again take precisely this d_i that you just conceded with your move 3 as being a B . This instance of B , must be also an instance of A , right?: **P** challenges the second premise with the move **P** $you_3: B(d_i)$.
5. **O** ! Right. This element of the domain D must be A : **O** defends the second premise with the move **O** ! $A(d_i)$.
6. **P** ! But this is exactly what you asked me to show. You just conceded it with your move 5: **P** defends the conclusion with the move **P** $you_5: A(d_i)$.

This development is based on the following rules, that we take from Rahman et al. (2018, p. 62), adapted to syllogism in McConaughey (2021, chapter 4.2, table 4.9) and present in a simplified form:

1. Starting rule

The player who states the conclusion move 0 is the proponent **P**.

2. Development rule

Once the starting rule has been implemented, each player in turn plays a move according to the dialectical meaning explanations for quantifiers, connective, modalities and the other structural moves.

3. Socratic rule

Some specific propositions, we call them *unanalysable constituents*, may not be stated by **P**, unless **O** stated them before. **O** can state such propositions when required. When **P** states such a proposition, he will justify it with the indication you_n , which indicates that his statement is backed by **O**'s endorsement of it at move n , and that he (**P**) adheres himself to the knowledge conveyed by **O**'s endorsement.

In the context of Aristotle's logic unanalysable propositions are elementary propositions.

4. Pragmatic coherence rule (concerns mainly the third figure)

When the conclusion Proponent defends is particular and all the premises Opponent defends are universal, Proponent may request the Opponent to instantiate the subject of a premise with the instance d_i , chosen by **P**, provided d_i is new: challenge: **P** ? $J(d_i)$; defence: **O** ! $J(d_i)$ (for a universal with $\{x: D \mid J(x)\}$ as subject, and J as Subject-Term), (this prevents **O** to state $J(d_i)$ when he endorsed before some $J^*(d_i)$ whereby J and J^* are incompatible).

5. Ending rule

The player who states \perp give-up, immediately loses. Otherwise, the player who has no available move left at this turn loses.⁴⁸

O		P	
I	$!(\forall z: \{x: D \mid J(x)\}) B(\mathcal{L}^{\text{O}}(z))$	$!(\forall z: \{x: D \mid J(x)\}) A(\mathcal{L}^{\text{O}}(z))$	0
II	$!(\forall z: \{x: D \mid B(x)\}) A(\mathcal{L}^{\text{O}}(z))$		
1 ?0	$! J(d_i)$ $\mathcal{L}^{\text{O}}(z)=d_i: D$	<i>you</i> _s : $A(d_i)$	6
3	$! B(d_i)$?I $! J(d_i)$ $\mathcal{L}^{\text{O}}(z)=d_i: D$	2
5	$! A(d_i)$?II <i>you</i> ₃ : $B(d_i)$	4
Proponent wins			

- The dialogue ends since 6 is an unanalysable constituent of the conclusion, namely $A(d_i)$, that cannot be challenged, since **O** himself endorsed it with move 5.

P can repeat the same sequence of moves for any arbitrary element of discourse **O** happens to choose to challenge the universal in the conclusion. In other words, **P** has a winning strategy for this syllogism, and therefore it is valid.

The strategy can be seen as a “recapitulation” and generalization that produces an algorithm for winning.⁴⁹ In our case, informally the winning strategy amounts to the following:

- 1) Let **O** choose any arbitrary instance of the universal in the conclusion
- 2) **P** should use exactly this instance, *whichever* this instance chosen by **O** is, to challenge the first premise, and force **O** to predicate B of it
- 3) **O** predicates B of it
- 4) **P** should use exactly this endorsement of **O** (that B can be predicated of the instance at stake), to challenge the second premise
- 5) **O** is forced to predicate A of it
- 6) **P** can now use this last endorsement to respond to the challenge to the conclusion

- Apply this sequence for any d_i chosen by **O** at move 1

The emergent winning strategy can be represented as a sequent calculus, where **P**’s assertions are to translated as assertions at the right of the turn-style and **O**’s assertions at the left –. However, the point is that this sequent calculus has been generated by the winning strategy produced by the dialogue: it is the interaction between players that puts the dialogical meaning explanation of the modalities at work, by fleshing out the meaning of each constituent. The sequent-calculus is only the abstract outcome based on a *pensée aveugle*, to put in Leibniz’s words.

⁴⁸ Comments on the Rules.

- i) The rationale behind the *Socratic rule* is that proving the conclusion of syllogism within a dialectical framework amounts to analysing the premises in such a way that the resulting statements are those that constitute the conclusion. Since the premises are stated by **O** and the conclusion by **P** the later but not the former is committed to justify the conclusion by justifying each of the constituents of the conclusion, by grounding them on statements of **O** involving constituents of the premises. In other words, the use of the Socratic rule allows defining a winning strategy for **P** (the dialectical way to proof validity) as a sequence of moves that force **O** to state those constituents of the premises that should provide a justification of the conclusion.
- ii) The rationale behind the pragmatic coherence rule, will be commented when we discuss the third figure: it concerns the way to deal with ontological assumptions such as those required by *Darapti*.
- iii) The prescription on giving up in the ending rule concerns the dialogical interpretation of negation. When challenging a negation such as $\sim A$ stated by player **X**, the challenger **Y** must now overtake the burden of the proof and state A . The defender of the negation has two options, either counterattack A , or simply give up and concede. The latter is indicated by the move **X** \perp give-up. In the Aristotelian texts the move \perp give-up, corresponds to the dialectical use of the term ἀδύνατον.

⁴⁹ As pointed out by McConaughy (2021, p. 140), Kapp (1942, pp. 14-16 & 71) points out the importance of two stages in a dialectical context, anticipation and recapitulation. These are indeed, the elements that allow to build a winning strategy. See too Crubellier (2011) who indicates that one of the first meanings of *syllogismos* is precisely recapitulation.

III.3.2 Second Figure

Again a frequent example for this figure is

All humans have the capacity of laughing
 No stone has the capacity of laughing
 Therefore, no human is a stone

$\mathbf{O} ! (\text{Every}_{J_D})B$ $\mathbf{O} ! (\text{Every}_{A_D})\sim B$ <hr style="width: 100%;"/> $\mathbf{P} ! (\text{Every}_{J_D})\sim A$	$\mathbf{O} ! (\forall z: \{x: D \mid J(x)\}) B(\mathcal{L}^{\exists}(z)^P)$ $\mathbf{O} ! (\forall z: \{x: D \mid A(x)\}) \sim B(\mathcal{L}^{\exists}(z)^P)$ <hr style="width: 100%;"/> $\mathbf{P} ! (\forall z: \{x: D \mid J(x)\}) \sim A(\mathcal{L}^{\exists}(z)^O)$
---	---

The dialogue presented in the form of the dynamic encoding of the moves is the following:

	O	P	
I	$! (\text{Every}_{J_D})B$	$! (\text{Every}_{J_D}) \sim A$	0
II	$! (\text{Every}_{A_D}) \sim B$		
1	$! J(d_i)$	$! \sim A(d_i)$	2
?0			
3	$! A(d_i)$		
5	$! B(d_i)$?I $! \text{you}_1: J(d_i)$	4
7	$! \sim B(d_i)$?II $\text{you}_3: A(d_i)$	6
9	$! \perp \text{ give-up}$?7 $\text{you}_5: B(d_i)$	8
		Proponent wins	

- The dialogue ends since **O** gives up with move 9, after **P** challenges moves 7 that contradicts **O**'s own endorsement of $B(d_i)$ at move 5.

III.3 Third Figure

The third figure has some difficulties linked to the existential in the conclusion in *Darapti*:

All humans are non-birds
 All humans are non-horses
 Therefore, some non-birds are non-horses

This example also confronts us with the question: Should we keep the subject-predicate structure or rather link in the conclusion the minor and major terms with a conjunction?

In relation to the second question, logically speaking we can adopt both of the options. However, the conjunction-analysis seems to contravene Aristotle's own Subject-Object formulation of the conclusion, namely:

Thus, the conclusion of this negative form of *Darapti* is encoded as:

Explicit Encoding	Dynamic Encoding
$(\exists z: \{x: D \mid \sim A(x)\}) \sim B(\mathcal{L}^{\exists}(z))$	$(\text{Some } \sim A_D) \sim B$

In our framework such a reading yields

$\mathbf{O} ! (\text{Every}_{J_D})\sim B$ $\mathbf{O} ! (\text{Every}_{J_D})\sim A$ <hr style="width: 100%;"/> $\mathbf{P} ! (\text{Some } \sim A_D)\sim B$	$\mathbf{O} ! (\forall z: \{x: D \mid J(x)\}) \sim B(\mathcal{L}^{\exists}(z)^P)$ $\mathbf{O} ! (\forall z: \{x: D \mid J(x)\}) \sim A(\mathcal{L}^{\exists}(z)^P)$ <hr style="width: 100%;"/> $\mathbf{P} ! (\exists z: \{x: D \mid \sim A(x)\}) \sim B(\mathcal{L}^{\exists}(z)^P)$
---	---

The usual way to deal with the ontological commitment required by *Darapti* is to add as a third premise an existential that assures the non-emptiness of the subject of the minor and the major premises or instead of a premise the non-emptiness of the Subject-Term, is added as an Existential occurring in the consequent of the universals or as an Existential Predicate. .

However, this does not render justice to the fact that ontological commitment is to understood as part of the contextually bounded meaning of the definitely necessary propositions. Stating a necessary universal commits **O** to presences of the subject, however, in a context where **O** stated two universals with the same Subject-terms, then once **O** endorsed that one individual witnesses, the Subject-Term, **P** can now use this endorsement in order to challenge the second universal: **O** stated after all that every witness of the Subject-term enjoys the property expressed by the Predicate-term.

Moreover, the precise specification of the set that constitutes the conclusion, has to be constructed out of **O**'s endorsements during the dialogical interaction.

DARAPTI AND THE PRAGMATIC COHERENCE RULE

Let us recall here the *pragmatic coherence rule* introduced by Zoe McConaughey (2021, chapter 4.2, table 4.9), that implements both Aristotle's view that ontological commitments are contextually-bounded commitments:

Pragmatic Coherence Rule:

When the conclusion Proponent defends is particular and all the premises Opponent defends are universal, Proponent may request the Opponent to instantiate the subject of a premise with the instance d_i , chosen by **P**, **provided** d_i is **new**: challenge: **P** $?_{J(d_i)}$; defence: **O** $! J(d_i)$ (for a universal with $\{x: D \mid J(x)\}$ as subject, and J as Subject-Term), (this prevents **O** to state $J(d_i)$ when he endorsed before some $J^*(d_i)$ whereby J and J^* are incompatible)

The dialogue, again, presented in the form of the dynamic encoding of the moves is the following. Here we considered the negative elementary propositions $\sim A(d_i)$ and $\sim B(d_i)$, and unanalysable constituents, but as commented below this does not change the logical result:

	O		P
I	$! (\text{Every } J_D) \sim B$		$! (\text{Some } \sim A_D) \sim B$ 0
II	$! (\text{Every } J_D) \sim A$		
1	$? \mathcal{L}^{\exists}$?0	$you_5: \sim A(d_i)$ 8
3	$! J(d_i)$?II	$?_{J(d_i)}$ 2 (use of the pragmatic coherence rule)
5	$! \sim A(d_i)$?II	$you_3: J(d_i)$ 4
7	$! \sim B(d_i)$?I	$you_3: J(d_i)$ 6
9	$? R^{\exists}$?0	$you_7: \sim B(d_i)$ 10
			Proponent wins

- Instead of choosing immediately one animal that is not a bird, the Proponent, deploys the pragmatic coherence rule and asks **O** to endorse that d_i is one of the humans who are no birds. Then **P** asks, **O** to endorse that this very human is also no-horse. Only after these endorsements, has **P** now the knowledge of the presence of a particular animal, namely a human; that witness both being a non-bird and non-horse.
- The dialogue ends since 10 is an unanalysable constituent of the conclusion, namely the negative literal $\sim B(d_i)$, that cannot be challenged, since **O** himself endorsed it with move 7.
- Notice that if we prefer not to consider negations of elementary propositions to be unanalysable the end-result of the dialogues will not change. It will only a bit longer: as soon as **O** challenges $\sim A(d_i)$, **P** will do the same, similarly with $\sim B(d_i)$.

III.4 Indirect Proof

As pointed out by Zoe McConaughey (2021, 4.4.1) an indirect proof amounts to adding the following structural rule

1*. Indirect reduction
This rule modifies the Starting rule by giving Proponent an alternative way to play.
 Proponent may start an indirect deduction play by by stating the negation of the contradictory of the conclusion.

This requires the thesis to have the form: **P** Conclusion [Premise1, Premise2]
 This admits the Gloss: **P**: *I state the Conclusion C, provided the Premises P1 and P2*
 The first move of **O** will start by endorsing the Premises.

Thus, if the conclusion is
 Universal affirmative, move 2 of **P** will be stating the negation of its negative particular form
 Universal negative, move 2 of **P** will be stating the negation of its affirmative particular form
 Particular affirmative, move 2 of **P** will be stating the negation of its negative universal form
 Particular negative, move 2 of **P** will be stating the negation of its affirmative particular form

Let us show how to run an dialogue for *Barbara* by indirect deduction.

O		P	
		! (Every J_D) A [(Every J_D) B , (Every B_D) A]	0
1.1	! (Every J_D) B 0		
1.2	! ($\forall z: \{x: D \mid B(x)\} A(\mathcal{L}^{\{z\}}(z))$ 0	indirect: \sim (Some J_D) $\sim A$	2
3	! (Some J_D) $\sim A$		
5	$J(d_i)$?3 $? \mathcal{L}^{\exists}$	4
7	$\sim A(d_i)$?5 $? \mathcal{R}^{\exists}$	6
9	! $B(d_i)$?1.1 <i>you</i> ₅ : $J(d_i)$	8
11	! $A(d_i)$?1.2 <i>you</i> ₉ : $B(d_i)$	10
13	! \perp give-up	?7 <i>you</i> ₁₁ : $A(d_i)$	12
		Proponent wins	

- The dialogue ends since **O** gives up with move 13, after **P** challenges moves 12 that contradicts **O**'s own endorsement of $A(d_i)$ at move 11. By these means **P** shows that, given the premises, **O**'s endorsing of the contradictory of the conclusion (move 3) leads to contradiction

By means of indirect reductions the following conversions can dialectically be justified – we leave the dialogues to the reader:⁵⁰

Statement	Simple Conversion	Conversion by Subalternation
$(Every A_D)Non-B$	e-conv : $(Every B_D)Non-A$	e-sub-conv : $(Some B_D)Non-A$
$(Every A_D)B$	\emptyset	a-sub-conv : $(Some B_D)A$
$(Some A_D)B$	i-conv : $(Some B_D)A$	\emptyset

The expressions at the left of the colon encode the strategic moves that provide a winning strategy for the corresponding conversion deploying the indirect reduction rule. More generally, they convey that there is a winning strategy for such a conversion.

III.5 Reduction to the first figure⁵¹

Reductions to the first figure can be declined in three main steps

⁵⁰ We adapted here McConaughey's (2021, 4.4.1) notation to our own.

⁵¹ The following method and auxiliary rules are a slight variant of McConaughey (2021, 4.5)

Reduction to the first figure

- a) After **O**'s concession of the premises, given **P**'s starting move **P** ! Conclusion [Premise1, Premise2], after, the Proponent, will not state the conclusion in move 2, but he might use one or more of the conversion challenges (see table below) to the premises according to the table of conversions below
- b) Once the conversions have been stated by **O**, **P** might be able to force **O** to conclude, using the moods of the first figure according to the table of first figure rules below
- c) Once **O** concluded as required by the preceding step, **P** will state the conclusion of the thesis as follows:
 - P** *you(n)-barbara*: Conclusion, or
 - P** *you(n)-celarent*: Conclusion, or
 - P** *you(n)-darrii*: Conclusion, or
 - P** *you(n)-ferio*: Conclusion.

Statement	Conversion-Challenge	Conversion-Defence
O ! (<i>EveryA_D</i>) <i>Non-B</i>	P ? <i>e-conv</i> or P ? <i>e-sub-conv</i>	O ! <i>EveryB_D</i>) <i>Non-A</i> ----- O ! (<i>SomeB_D</i>) <i>Non-A</i>
O ! (<i>EveryA_D</i>) <i>B</i>	P ? <i>a-sub-conv</i>	O ! (<i>SomeB_D</i>) <i>A</i>
O ! (<i>SomeA_D</i>) <i>B</i>	P ? <i>i-conv</i>	O ! (<i>SomeB_D</i>) <i>A</i>

In the following table the moods of the first figure are used as (already justified) rules – the justification can be carried out by ecthesis or by indirect reduction as discussed above.

Statement	Reduction-Challenge	Reduction-Defence
O ! (<i>EveryA_D</i>) <i>B</i> O ! (<i>EveryB_D</i>) <i>C</i>	P ? <i>barbara</i>	O ! <i>EveryA_D</i>) <i>C</i>
O ! (<i>EveryA_D</i>) <i>B</i> O ! (<i>EveryB_D</i>) <i>Non-C</i>	P ? <i>celarent</i>	O ! (<i>EveryA_D</i>) <i>Non-C</i>
O ! (<i>SomeA_D</i>) <i>B</i> O ! (<i>EveryB_D</i>) <i>C</i>	P ? <i>darrii</i>	O ! (<i>SomeA_D</i>) <i>C</i>
O ! (<i>SomeA_D</i>) <i>B</i> O ! (<i>EveryB_D</i>) <i>Non-C</i>	P ? <i>ferio</i>	O ! (<i>SomeA_D</i>) <i>Non-C</i>

N.B. Recall that we are deploying the Arabic and post-Aristotelian re-ordering of the premises.

Let us run a play for the reduction of *Festino* (second figure) to the mood *Ferio* of the first figure:

O		P	
		! (<i>SomeA_D</i>) <i>Non-C</i> [(<i>SomeA_D</i>) <i>B</i> , <i>EveryC_D</i>) <i>Non-B</i>]	0
1.1	! (<i>SomeA_D</i>) <i>B</i>		
1.2	! <i>EveryC_D</i>) <i>Non-B</i>	<i>you(5)-ferio</i> : (<i>SomeA_D</i>) <i>Non-C</i>	6
3	! <i>EveryB_D</i>) <i>Non-C</i>	?1.2 ? <i>e-conv</i>	2
5	(<i>SomeA_D</i>) <i>Non-C</i>	?1.1, 3 ? <i>ferio</i>	4
		Proponent wins	

References

- Barnes, J. 2007. *Truth, etc.* Oxford: Clarendon Press.
 Beth, E. W., 1956-7. 'Über Lockes "Allgemeines Dreieck"', *Kant-Studien*, **48**, 361-380.
 Beth, E. W. & J. Piaget 1966. *Mathematical Epistemology and Psychology*. Dordrecht: D. Reidel.
 Beth, E. W. 1970. *Aspects of Modern Logic*. Dordrecht: D. Reidel.
 Brandom, R. 1994. *Making it Explicit*. Cambridge Mass.: Harvard University Press.
 Castelnérac, B. & M. Marion. 2009. 'Arguing for inconsistency: dialectical games in the Academy', in G. Primiero

- & S. Rahman, *Acts of Knowledge: History, Philosophy and Logic*, London: College Publication, 37-76.
- Chantraine, P., 1956. *Études sur le vocabulaire grec*. Paris : Klincksieck.
- Crubellier, M., 2011. 'Du *sullogismos* au syllogisme', *Revue philosophique*, n° 1/2011, 17-36.
- Crubellier, M. 2014. *Aristote. Premiers analytiques. Traduction, introduction, notes, commentaire et bibliographie par Michel Crubellier*. Paris: Flammarion.
- Ebbinghaus, K. 1964. *Ein formales Modell der Syllogistik des Aristoteles*. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht.
- Ebert, T. & U. Nortmann 2007. *Aristoteles: Analytica priora, Buch I*. Berlin: Akademie Verlag.
- Einarson, B. 1936. 'On certain mathematical terms in Aristotle's logic', *The American Journal of Philology*, **57**, 33-54 & 151-172.
- Granström, J. G. 2011. *Treatise on Intuitionistic Type Theory*. Dordrecht: Springer.
- Heath, Sir Thomas 1921. *A History of Greek Mathematics*. Oxford: Clarendon Press.
- Hintikka, J. 1973. *Logic, Language-Games and Information. Kantian Themes in the Philosophy of Logic*. Oxford: Clarendon Press.
- Hintikka, J. 1991. *Knowledge and the Known*. Dordrecht: Kluwer.
- Hintikka, J. 1993. 'Socratic questioning, logic and rhetoric', *Revue Internationale de Philosophie*, **47**, 5-30.
- Hintikka, J. 2006. 'Intellectual Autobiography' in R. E. Auxier & L. E. Kahn, *The Philosophy of Jaakko Hintikka*. La Salle Ill.: Open Court, 1-84.
- Joray, P. 2017. 'A completed system for Robin Smith's Incomplete Ecthetic Syllogistic', *Notre Dame Journal of Formal Logic*, **58**, 329-342.
- Kapp, E. 1942. *Greek Foundations of Traditional Logic*. New York: Columbia University Press.
- Kneale, W. & M. Kneale 1972. 'Prosleptic propositions and arguments', in S. M. Stern, A. Hourani, *Islamic Philosophy and the Classical Tradition*, Oxford: Cassirer, 189-207.
- Lorenz, K. 1981. 'Dialogical logic', in W. Marciszewski, *Dictionary of Logic as Applied in the Study of Language*. The Hague: Martinus Nijhoff, 117-125.
- Lorenzen, P., 1955. *Einführung in die operative Logik und Mathematik*. Berlin: Springer.
- Lorenzen, P. 1967. *Formal Logic*. Berlin: de Gruyter.
- Lorenzen, P. & K. Lorenz 1978. *Dialogische Logik*. Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft.
- Łukasiewicz, J. 1957. *Aristotle's Syllogistic from the Standpoint of Modern Formal Logic* (2nd ed.). Oxford: Clarendon Press.
- Maier, H. 1900. *Die Syllogistik des Aristoteles II.1: Formenlehre und Technik des Syllogismus & II.2: Die Entstehung der Aristotelischen Logik*. Tübingen: Laupp.
- Malink, M., 2008. 'T Ω I vs. T Ω N in *Prior Analytics* I 1-22', *The Classical Quarterly*, **58**, 519-536.
- Malink, M. 2009. 'A non-extensional notion of conversion in the *Organon*', *Oxford Studies in Ancient Philosophy*, **37**, 105-141.
- Malink, M. 2013. *Aristotle's Modal Syllogistic*. Cambridge Mass.: Harvard University Press.
- Marion, M., 2009. 'Why play logical games?', in O. Majer, A.-V. Pietarinen & T. Tulenheimo, *Logic and Games, Foundational Perspectives*. Dordrecht: Springer, 3-26.
- Marion, M. 2011. 'Game semantics and the manifestation thesis', in M. Marion, G. Primiero & S. Rahman, *The Realism-Antirealism Debate in the Age of Alternative Logics*, Dordrecht: Springer, 151-180.
- Marion, M. 2014. 'Les arguments de Zénon selon le *Parménide* de Platon', *Dialogue*, **53**, 393-434.
- Marion, M. & H. Rückert 2016. 'Aristotle on universal quantification: a study from the perspective of game semantics', *History and Philosophy of Logic*, **37**, 201-229.
- Martin-Löf, P. 1984. *Intuitionistic Type Theory*. Naples: Bibliopolis.
- Z. McConaughy 2021. *Aristotle. Science and the Dialectician's Activity. A Dialogical Approach to Aristotle's Logic*. PhD-Université de Lille.
- Mignucci, M. 1996. 'Aristotle's theory of predication', in I. Angelelli and M. Cerezo, *Studies in the History of Logic*, Berlin: de Gruyter, 1-20.
- Mignucci, M. 2000. 'Parts, quantification and Aristotelian predication', *The Monist*, **83**, 3-21.
- Morison, B. 2008. 'Aristotle, etc.', *Phronesis*, **53**, 209-22.
- Parsons, T. 2014. *Articulating Medieval Logic*. Oxford: Oxford University Press.
- Patzig, G. 1968. *Aristotle's Theory of the Syllogism: A Logico-Philosophical Study of Book A of the Prior Analytics*. Dordrecht: Reidel.
- Peregrin, J. 2014. *Inferentialism. Why Rules Matter*. Basingstokes: Palgrave Macmillan.
- Rahman, S., McConaughy, Z., Klev, A. and Clerbout, N. 2018. *Immanent Reasoning or Equality in Action: A Plaidoyer for the Play Level*. Cham: Springer .
- Ranta. A. 1994. *Type Theoretical Grammar*. Oxford: Clarendon Press. University Press.
- Ross, W. D. 1949a, *Aristotle's Prior and Posterior Analytics. A Revised Text with Introduction and Commentary by W. D. Ross*. Oxford: Clarendon Press.
- Ross, W. D. 1949b. *Aristotle* (5th ed.). London: Methuen & Co.
- Smiley, T. 1962. 'Syllogism and quantification', *Journal of Symbolic Logic*, **27**, 58-72.
- Smiley, T. 1973. 'What is a syllogism?', *Journal of Philosophical Logic*, **2**, 136-154.
- Smith, R. 1982. 'What is Aristotelian ecthesis?', *History and Philosophy of Logic*, **3**, 113-127.
- Smith, R. 1983. 'Completeness of an ecthetic logic', *Notre Dame Journal of Formal Logic*, **24**, 224-232.
- Smith, R. 1989. *Aristotle, Prior Analytics. Translated, with Introduction, Notes and Commentary by Robin Smith*, Indianapolis: Hackett.
- Stekeler-Weithofer, P. 1986. *Grundprobleme der Logik: Elemente einer Kritik der formalen Vernunft*. Berlin: de Gruyter.
- Striker, G. 2009. *Aristotle's Prior Analytics. Book I*. Oxford: Oxford University Press.

- Sundholm, G. 2012. ‘Inference versus consequence’ revisited: inference, consequence, conditional, implication’. *Synthese*, **18**, 943–956.
- Sundholm, G. 2013. ‘Inference and Consequence in an Interpreted Language’, talk delivered at the workshop *Proof Theory and Philosophy*, Groningen, 3-5 December 2005.
- Tannery, P. 1886. ‘Aristote, *Météorologie* livre III, ch. v’, *Revue de philologie, de littérature et d’histoire anciennes*, **10**, 38-46.
- Thom, P. 1978. ‘*Ekthesis*’, *Logique et Analyse*, **74-76**, 299-310.
- Thom, P. 1981. *The Syllogism*, Munich: Philosophia.
- Tricot, J. 1971. *Aristote, Organon III Les Premiers analytiques. Traduction nouvelle et notes par J. Tricot*. Paris : Vrin.
- Vitrac, B. 2002. ‘Note textuelle sur un (problème de) lieu géométrique dans les *Météorologiques* d’Aristote (III. 5, 375 b 16-376 b 22)’, *Archive for History of Exact Sciences*, **56**, 239-283.
- von Plato, J. 2009. ‘Aristotle’s deductive logic: A proof-theoretical study’, delivered at the Martin-Löf Symposium, Uppsala, May 2009, unpublished manuscript.
- von Plato, J. 2013. *Elements of Logical Reasoning*, Cambridge: Cambridge University Press.
- Wolff, M. 1998. ‘Prinzipien und expositorische Beweise in Aristoteles’ Syllogistik’, *Philosophiegeschichte und logische Analyse*, **1**, 131–69.