



**HAL**  
open science

## Une application de la formule de Jarrow et Rudd aux options sur indice CAC 40

Gunther Capelle-Blancard, Emmanuel Jurczenko

► **To cite this version:**

Gunther Capelle-Blancard, Emmanuel Jurczenko. Une application de la formule de Jarrow et Rudd aux options sur indice CAC 40. 2000. halshs-03723832

**HAL Id: halshs-03723832**

**<https://shs.hal.science/halshs-03723832>**

Submitted on 15 Jul 2022

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License

**Une application de la formule de Jarrow et  
Rudd aux options sur indice CAC 40**

Gunther CAPELLE-BLANCARD  
Emmanuel JURCZENKO

**2000.05**

# Une application de la formule de Jarrow et Rudd aux options sur indice CAC 40 <sup>¶</sup>

Gunther Capelle-Blancard<sup>y</sup>  
Emmanuel Jurczenko<sup>z</sup>

TEAM - ESA 8059 du CNRS.  
Université Paris 1 Panthéon-Sorbonne.  
Maison des Sciences Economiques  
106-112, Bd de l'Hôpital 75647 Paris Cedex 13

Novembre 1999  
(première version : juin 1999)

---

<sup>¶</sup>Les auteurs tiennent à remercier Messieurs Bernard Bensaïd, Rama Cont, Jean-Paul Laurent, Bertrand Maillet, Thierry Michel et Christophe Villa pour leurs commentaires et leurs conseils ainsi que tous les participants au Workshop "Quantitative Methods in Finance" AFFI-CNRS.

<sup>y</sup>E-mail : [gunther@univ-paris1.fr](mailto:gunther@univ-paris1.fr).

<sup>z</sup>E-mail : [ejurczenko@aol.com](mailto:ejurczenko@aol.com).

## Abstract

Many empirical studies pointed out that the Black-Scholes model led to a wrong evaluation of deep in-the-money options and deep out-the-money options. These biases are usually attributed to the hypothesis of log-normality of the underlying asset. In order to remove these biases, Jarrow and Rudd (1982) propose to use a series expansion for the state price density. This approach allows to take non-normal skewness and kurtosis in asset returns into account. Using high frequency data from the SBF database, we examine the explicative and predictive performance of the Jarrow and Rudd option valuation. We find that Jarrow and Rudd's model improves the valuation of CAC 40 index option (PXL).

**Keywords:** Option Pricing Models, Density Probability Functions, Volatility Forecast, Edgeworth Expansion.

**J.E.L. Classification:** G.10, G.12, G.13.

## Résumé

L'objectif de cet article est de vérifier s'il est possible d'améliorer l'évaluation des options sur indice CAC 40 grâce à une meilleure estimation des paramètres d'asymétrie et d'aplatissement de la fonction de distribution de l'actif sous-jacent. De nombreuses études empiriques ont montré en effet que la formule de Black et Scholes (1973) conduisait à une mauvaise évaluation des options deep in the money et deep out the money. Ce biais est généralement attribué à l'hypothèse de log-normalité de l'actif sous-jacent. Afin de supprimer ce biais, Jarrow et Rudd (1982) suggèrent d'approcher la fonction de répartition de l'actif en utilisant les paramètres d'asymétrie et d'aplatissement. En utilisant des données intrajournalières issues de la base de données de la SBF nous comparons le prix théorique tel qu'il ressort de la formule de Black et Scholes (1973) et de celle de Jarrow et Rudd (1982) au prix de marché. Pour ce faire nous utilisons les paramètres estimés implicitement à partir des données du marché. Les résultats obtenus suggèrent alors que la formule de Jarrow et Rudd (1982) permet d'améliorer l'évaluation des options sur indice CAC 40.

**Mots-clés :** Modèles d'évaluation d'options, Fonction de densité de probabilité, Prévion de volatilité, Développement d'Edgeworth.

**Classification J.E.L. :** G.10, G.12, G.13.

# 1 Introduction

La formule de Black et Scholes (1973) est certainement l'une des formules mathématiques les plus utilisées en économie. Cette formule souffre malgré tout de nombreuses déviations empiriques. Les études empiriques sur la volatilité<sup>1</sup> montrent en effet qu'il existe un biais systématique entre le prix théorique, tel qu'il est calculé par la formule de Black et Scholes, et les prix observés sur les marchés optionnels. Ce biais est généralement attribué à l'hypothèse, très controversée, de log-normalité du cours de l'actif sous-jacent qui implique une volatilité constante. Cette hypothèse conduit à une mauvaise évaluation des options ; en particulier le modèle de Black et Scholes (1973) sous-estime les options deep out of the money et surestime les options deep in the money. Ces deux éléments sont caractéristiques d'une mauvaise estimation des paramètres de symétrie ("skewness") et d'aplatissement ("kurtosis"). Ainsi, lorsque l'on estime la volatilité implicite pour différents prix d'exercice, on remarque que celle-ci est en forme de U : c'est le phénomène connu sous le nom de "smile" d'option.

Nombreux sont ceux, par conséquent, qui ont cherché à modéliser différemment le processus suivi par l'actif sous-jacent. C'est le cas notamment du modèle avec saut, proposé par Merton (1976) et plus récemment par Bates (1996a, 1996b), ou des modèles à volatilité stochastique développés par Hull et White (1987), Stein et Stein (1991) ou encore Heston (1993). Ces modèles, qui supposent un processus de diffusion plus général que le mouvement brownien géométrique, sont toutefois difficiles à mettre en oeuvre puisqu'ils supposent de connaître le processus de diffusion de la volatilité. Il est alors nécessaire de recourir à des hypothèses simplificatrices concernant la corrélation entre la volatilité et le rendement de l'actif sous-jacent.

Une approche alternative consiste à approcher la véritable fonction de distribution de l'actif sous-jacent à l'aide d'une loi log-normale. C'est la voie suivie par Jarrow et Rudd (1982) et par Madan et Milne (1993). Ces méthodes permettraient d'obtenir l'évaluation des options obtenue par la formule de Black et Scholes en introduisant des paramètres d'ajustement illustrant l'asymétrie et l'excès de kurtosis de la véritable fonction de distribution par rapport à la loi log-normale.

Cette étude cherche à vérifier si l'approximation proposée par Jarrow et Rudd (1982) permet d'améliorer l'évaluation des options européennes sur

---

<sup>1</sup> Voir, entre autres, Black (1975), ou Rubinstein (1985, 1994).

le marché parisien. Dans un premier temps, nous rappelons les hypothèses et la méthode d'approximation proposées par Jarrow et Rudd (1982) pour l'évaluation des options européennes. Nous jugeons alors de la performance de cette méthode d'évaluation à l'aune de sa capacité à expliquer et à prévoir le prix des options européennes (option à long terme PXL) cotées sur l'indice CAC 40, négociées sur le Monep durant le premier trimestre 1997.

## 2 Le problème du smile

Le modèle de Black et Scholes (1973) suppose que le rendement continu de l'actif sous-jacent suit une loi normale, ou, ce qui est équivalent, que son prix suit une loi log-normale. Pourtant, on est généralement amené à rejeter empiriquement cette hypothèse. La distribution des rendements exhibe en effet un coefficient d'asymétrie (skewness) différent de zéro et un coefficient d'aplatissement (kurtosis) supérieur à trois. Cette simplification conduit à une mauvaise évaluation des options en dehors de la parité. Les options dont le prix d'exercice est éloigné du cours de l'actif sous-jacent sont plus sensibles aux événements rares. Si ceux-ci sont plus fréquents que ne le suppose une distribution normale des rendements, alors le prix des options deep in et deep out of the money sera plus élevé que ne le prédit le modèle de Black et Scholes (1973). Cette mauvaise estimation des queues de la fonction de distribution se traduit par une volatilité implicite plus importante pour les options dont le prix d'exercice est éloigné du cours de l'actif sous-jacent : c'est le phénomène bien connu du smile de volatilité. En outre, la fonction de distribution n'est pas nécessairement symétrique. Cette asymétrie conduit à une volatilité implicite différente pour les options in et out of the money. Dans ce cas, le smile se transforme en smirk (Das et Sundaram (1999)).

A titre d'illustration, nous avons inversé la formule de Black et Scholes (1973) pour obtenir la volatilité implicite des options européennes sur indice cotées sur le Monep le 14 janvier 1997 et d'échéance mars 1997 (cf. Figure 1). Sur l'axe des abscisses, on mesure la parité de chaque option définie comme étant égale (en pourcentage) à  $100 \times \frac{K e^{i r t} - S_0}{K e^{i r t}}$ .

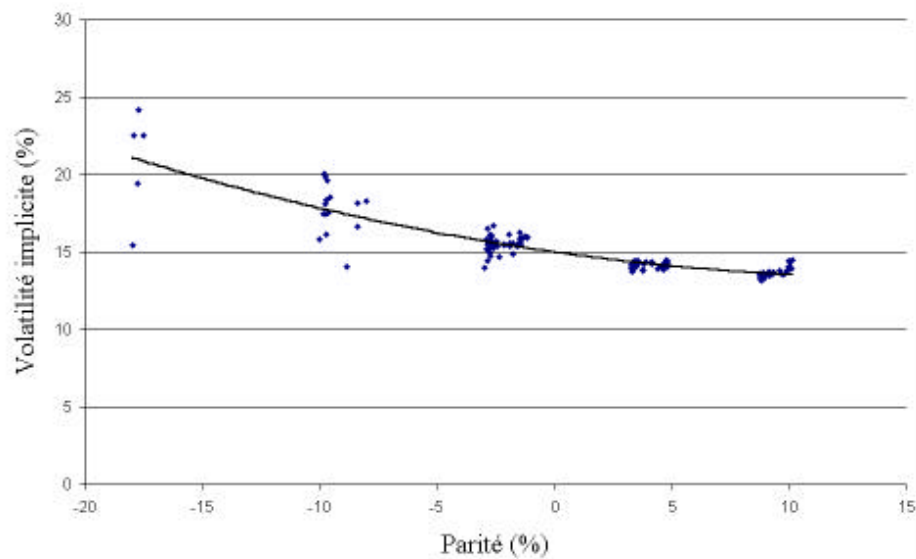


Figure 1 : Smile de volatilité des options d'achats sur indice CAC 40 (PXL).

Une première réponse au problème du smile ou du smirk serait de considérer que la volatilité suit un processus de diffusion. Renault et Touzi (1996) ont, en effet, montré que dans le cas où la volatilité n'est pas corrélée avec l'actif sous-jacent, le modèle de Black et Scholes conduisait à une sous-estimation des options at the money et à une sur-estimation des options in et out of the money. Outre l'hypothèse simplificatrice d'absence de corrélation entre le processus de volatilité et l'actif sous-jacent, ce type d'approche n'est toutefois pas satisfaisant. Comme le montrent Das et Sundaram (1999), ces modèles conduisent à une structure par termes des paramètres inconciliable avec celle observée sur le marché.

Une approche alternative consiste à calculer directement les paramètres implicites d'asymétrie et d'aplatissement, voire à estimer la fonction de densité implicite<sup>2</sup>. C'est notamment la voie suivie par Jarrow et Rudd (1982).

<sup>2</sup>Pour une synthèse des différentes méthodes d'estimation des densités risque-neutre voir, entre autres, Jondeau et Rockinger (1997) et Cont (1997).

### 3 L'évaluation des options à l'aide des moments d'ordre 3 et 4

Jarrow et Rudd (1982) ont proposé une méthode d'évaluation du prix d'un call européen qui tient compte de certaines différences entre la véritable loi de distribution et la loi log-normale. L'idée est d'approcher la véritable fonction de distribution de l'actif sous-jacent en utilisant les troisièmes et quatrièmes moments. En effet, alors qu'il est impossible de connaître précisément la fonction de distribution, il est facile d'estimer ses moments à l'aide de méthodes numériques. A cette fin, Jarrow et Rudd (1982) utilisent un développement d'Edgeworth d'ordre quatre, et appliqué à la fonction de densité de la loi log-normale<sup>3</sup>. Sous réserve que la loi log-normale soit une bonne approximation de la véritable loi de probabilité de l'actif sous-jacent, les deux auteurs parviennent à dériver une solution numérique pour l'évaluation d'un call européen. Corrado et Su (1996) ont montré que cette méthode améliorerait de façon significative l'évaluation des options européennes sur indice S&P 500.

#### 3.1 La formule d'évaluation de Jarrow et Rudd (1982)

Jarrow et Rudd (1982) suggèrent, afin de modéliser l'évolution du cours de l'actif sous-jacent, de retenir un processus de diffusion log-normale et d'utiliser un développement d'Edgeworth d'ordre quatre. Notons  $F(s)$  et  $A(s)$ , respectivement la fonction de distribution de l'actif sous-jacent et la fonction de distribution de la loi log-normale. On suppose que  $dF(s) = ds = f(s)$  et  $dA(s) = ds = a(s)$  existent, ainsi que les moments d'ordre un à quatre. Sous ces conditions, la densité de l'actif sous-jacent peut s'écrire comme une fonction de la densité de la loi log-normale et des quatre premiers cumulants  $\mu_i, i=1;2;3;4$ , soit :

$$f(s) = a(s) \left[ 1 + \frac{\mu_2(F) - \mu_2(A)}{2!} \frac{d^2 a(s)}{ds^2} + \frac{\mu_3(F) - \mu_3(A)}{3!} \frac{d^3 a(s)}{ds^3} + \frac{\mu_4(F) - \mu_4(A) + 3(\mu_2(F) - \mu_2(A))^2}{4!} \frac{d^4 a(s)}{ds^4} + \dots \right] \quad (1)$$

<sup>3</sup>Suivant la voie tracée par Jarrow et Rudd, Madan et Milne (1993) utilisent une approximation polynomiale d'Hermite pour intégrer les moments d'ordre trois et quatre dans l'évaluation des options européennes. Cette méthode a initialement été appliquée aux options sur futures par Abken, Madan et Ramamurtie (1996).



en posant  $\mu_1(F) = \mu_1(A)$ , avec  $\mu_1 = \mu_1$ ;  $\mu_2 = \mu_2$ ;  $\mu_3 = \mu_3$ ;  $\mu_4 = \mu_4$  ;  $\mu_3^2$  où  $\mu_1$  est l'espérance mathématique et  $\mu_i$ ;  $i = 2; 3; 4$ ; les moments centrés d'ordre  $i$ . Les deuxième, troisième et quatrième termes permettent respectivement d'ajuster  $a(s)$  en fonction de l'écart entre les moments centrés d'ordre 2, 3 et 4 de la fonction de distribution de l'actif sous-jacent et celle de la loi log-normale (chaque terme étant pondéré par la dérivée seconde, troisième et quatrième de la loi log-normale). Le dernier terme prend en compte les termes négligés dans le développement.

Si l'on suppose que  $\mu_1(F) = \mu_1(A) = S_0 e^{r\tau}$  et  $\mu_2(F) = \mu_2(A) e^{\frac{3}{4}\tau}$  ; de sorte que la fonction de distribution  $F(s)$  soit proche de  $A(s)^4$ , alors Jarrow et Rudd (1982) montrent que le prix de l'option est égal à :

$$C(F) = C(A) + e^{i r t} \frac{\mu_3(F) - \mu_3(A)}{3!} \frac{da(K)}{dS_t} \quad (2)$$

$$+ e^{i r t} \frac{\mu_4(F) - \mu_4(A)}{4!} \frac{d^2a(K)}{dS_t^2} + \dots(K) \quad (3)$$

où  $C(A) = S_0 N(d) - K e^{-r\tau} N(d - \frac{P}{S_0})$  avec  $d = \frac{\log(S_0/K) + \frac{1}{2}\sigma^2\tau}{\sigma}$  est le prix du call sous les hypothèses de Black et Scholes (1973). Le deuxième terme de l'équation corrige ainsi l'erreur due à l'asymétrie de la fonction de distribution originale, tandis que le troisième permet de tenir compte du phénomène des "queues épaisses". Il est bien sûr possible de poursuivre le développement d'Edgeworth mais on peut penser que les moments d'ordre supérieur à quatre, s'ils existent, n'apportent aucune information supplémentaire sur le prix du sous-jacent.

### 3.2 Une application de la formule de Jarrow et Rudd aux options sur indice S&P 500

Les simulations réalisées par Jarrow et Rudd (1982) montrent que leur formule constitue une bonne approximation du prix de l'option lorsque l'actif sous-jacent suit un processus avec saut. Dans un article ultérieur, Jarrow

<sup>4</sup>Corrado et Su (1996) avancent un argument supplémentaire pour justifier l'égalité entre le deuxième moment de la fonction de distribution de l'actif sous-jacent et celui de la loi log-normale. Leur raisonnement est d'ordre empirique : les moments d'ordre pair étant fortement corrélés entre eux (tout comme les moments d'ordre impair), l'estimation simultanée de la volatilité et du kurtosis pose en effet de sérieux problèmes de multicolinéarité.

et Rudd (1983) utilisent leur approximation pour évaluer le prix d'un call en utilisant des données historiques. Cette étude confirme également que l'estimation des moments d'ordre 3 et 4 améliore l'évaluation des options européennes. Toutefois les données historiques fournissent une mauvaise estimation des anticipations de marché concernant les paramètres implicites de la formule de Jarrow et Rudd (1982). A l'instar des méthodes qui permettent de calculer la volatilité implicite à partir du prix de marché des options, Corrado et Su (1996) ont donc entrepris de tester cette formule sur le marché américain et utilisent les options sur indice S&P 500 traitées sur le Chicago Board Options Exchange (CBOE). En négligeant le reste " (K), les deux auteurs réécrivent la formule du call de Jarrow et Rudd (1982) sous la forme suivante :

$$C(F) = C(A) + \omega_1 Q_3 + \omega_2 Q_4 \quad (4)$$

avec

$$\omega_1 = \rho_1(F) - \rho_1(A) \quad \text{et} \quad Q_3 = S_0 e^{rt} \int_0^{\infty} \frac{e^{-i^2/2} e^{i^3/3} i^{3-2} e^{i^2/2} da(K)}{3! dS_t}$$

$$\omega_2 = \rho_2(F) - \rho_2(A) \quad \text{et} \quad Q_4 = S_0 e^{rt} \int_0^{\infty} \frac{e^{-i^2/2} e^{i^3/3} i^{4-3} e^{i^2/2} d^2a(K)}{4! dS_t^2}$$

où  $\rho_1$  et  $\rho_2$  sont les paramètres de Fisher d'asymétrie et d'aplatissement tels que :

$$\rho_1 = \frac{1}{12} \frac{3}{2} \quad \text{et} \quad \rho_2 = \frac{1}{12} \frac{4}{2} \quad (5)$$

Les paramètres  $Q_3$  et  $Q_4$  caractérisent la sensibilité de l'ajustement de la véritable fonction de distribution de l'actif sous-jacent à la distribution log-normale. Comme l'illustrent Corrado et Su (1996, p. 615) repris Figure 2, il semble que ce soit le coefficient (négatif) d'asymétrie de la fonction de distribution qui provoque la sur-évaluation des options out of the money.

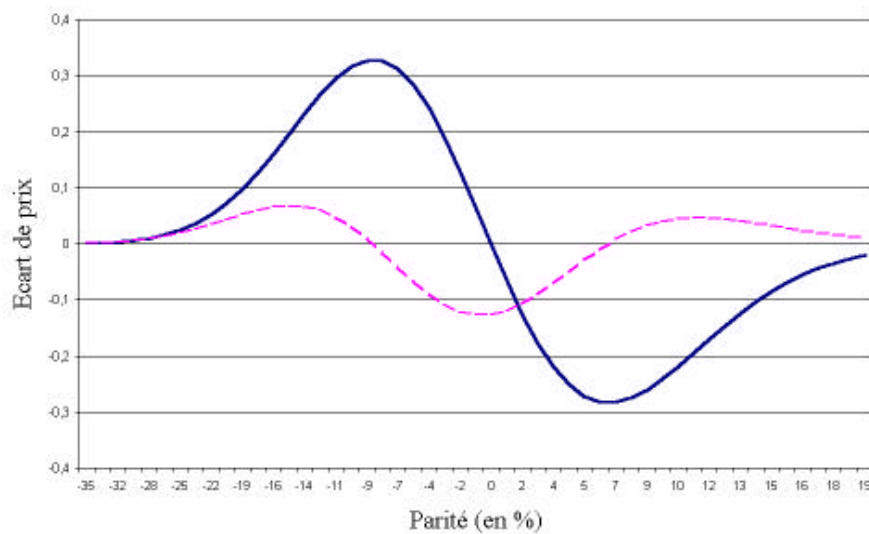


Figure 2 : Représentation graphique des paramètres  $\rho$  ; Q3 (trait plein) et Q4 (pointillés) pour les valeurs suivantes :  $S_0 = 100$  ;  $s = 0,15$  ;  $r = 0,05$  ;  $K$  compris entre 75 et 125.

Corrado et Su (1996) testent cette formule sur le marché américain et utilisent les options sur indice S&P 500 traitées sur le Chicago Board Options Exchange (CBOE). De nombreuses études empiriques exploitent ces mêmes données.<sup>5</sup> Dans la section qui suit, nous utilisons cette dernière formulation pour estimer les paramètres implicites de la formule de Jarrow et Rudd (1982) dans le cas des options sur indice CAC 40 traitées sur le Monep.

## 4 L'évaluation des options sur l'indice CAC 40

Pour évaluer la pertinence de l'approximation de la fonction de densité de l'actif sous-jacent, nous appliquons donc la formule de Jarrow et Rudd (1982) sur le marché français. Nous comparons alors nos résultats à ceux obtenus par la formule de Black et Scholes (1973). Nous avons sélectionné les options à long terme sur l'indice CAC 40 (PXL). A l'instar de Bakshi, Cao et Chen (1997) et Dumas, Fleming et Whaley (1998), le choix des options sur indice s'explique par le fait que ces options sont, sans conteste, les plus liquides, mais aussi parce que le cours de l'actif suit bien, en première approximation,

<sup>5</sup>En particulier Dumas, Fleming et Whaley (1998) et Bakshi, Cao et Chen (1997).

une loi log-normale.<sup>6</sup> L'étude empirique est menée en deux temps. Dans une première étape nous estimons les paramètres implicites, que sont les moments d'ordre deux à quatre, à partir du prix des options négociées sur le Monep, puis nous utilisons ces informations comme inputs pour évaluer le prix théorique des options. Nous comparons alors l'erreur résiduelle entre le prix de marché et le prix théorique, obtenu soit par la formule de Black et Scholes (1973), soit par celle de Jarrow et Rudd (1982). Cette étape nous permet alors de juger du pouvoir explicatif des différents modèles d'évaluation. Toutefois, cette méthode n'est pas suffisante pour juger de l'intérêt de l'approche de Jarrow et Rudd (1982). Le fait d'estimer deux paramètres supplémentaires par rapport au modèle de Black et Scholes (1973), réduit nécessairement l'écart au prix de marché. Dans une seconde étape, nous étudions le pouvoir prédictif de chacune des méthodes. Pour cela nous utilisons les paramètres implicites calculés à partir des données de la veille, grâce auxquels nous évaluons à nouveau le prix théorique des options pour chaque maturité. Cette deuxième étape permet en particulier de vérifier si nos estimations sont suffisamment stables.

Une troisième étape pourrait consister à juger de ces différentes approches selon qu'elles autorisent une plus ou moins bonne couverture, toujours dans l'esprit des travaux de Bakshi, Cao et Chen (1997) et Dumas, Fleming et Whaley (1998). Cette question n'est en effet qu'esquissée par Corrado et Su (1997).

## 4.1 Les données

Les séries utilisées dans cette étude sont extraites de la base de données de la SBF-Bourse de Paris pour le mois de janvier 1997. Il s'agit des options européennes à long terme (PXL) sur l'indice CAC 40. Ces options sont de loin les contrats les plus liquides du Monep (Marché des Options Négociables de Paris). Le volume des options sur indice négociées au cours des trois premiers mois de l'année 1997, s'est élevé à 1 255 827 contrats pour un montant total de prime de 8,4 milliards de francs. L'étude est réalisée en utilisant les prix négociés sur les options d'achat. Les options dont le prix de marché est inférieur à 1 franc sont exclues de l'échantillon. Les options dont la maturité est inférieure à 3 jours sont également exclues.

---

<sup>6</sup>Ces données sont également utilisées par Navatte et Villa (1997) pour estimer la fonction de densité implicite à partir du prix des options.

Pour évaluer le prix des options, nous devons ajuster l'indice pour tenir compte des dividendes. Toutefois nous ne retenons pas, comme c'est souvent le cas, l'hypothèse que les flux de dividendes sont constants.<sup>7</sup> Au contraire, pour chaque contrat nous calculons la valeur courante des dividendes détachés durant la durée de vie de l'option, notée  $D(t)$  :

$$D(t) = \sum_{s=1}^T e^{-R(t;s)} D(t+s) \quad (6)$$

Ce faisant, nous supposons que les agents ont des anticipations parfaites concernant les flux de dividendes futurs. Les dividendes sont également extraits de la base de données de la SBF. Par la suite, nous utiliserons donc l'indice CAC 40 corrigé des versements de dividendes. Les taux d'intérêt sont en...n issus du Bulletin Mensuel de la Banque de France. Il s'agit, quelle que soit la maturité de l'option, du PIBOR 3 mois. Cette échéance est en effet la plus liquide.

## 4.2 La procédure d'estimation

Dans un premier temps nous calculons les paramètres implicites pour chaque classe d'option de même maturité. Le prix théorique de l'option dépend de quatre paramètres observables - le prix d'exercice, la maturité de l'option, le cours de l'actif sous-jacent et le taux d'intérêt sans risque - ainsi que d'un ou de trois paramètres inobservables, selon que l'on retient la formule de Black et Scholes ou celle proposée par Jarrow et Rudd (1982) - la volatilité, et les coefficients de skewness et de kurtosis.

---

<sup>7</sup>Voir à ce sujet Harvey et Whaley (1991).

Le, ou les paramètres implicites sont alors obtenus par la procédure suivante (en adoptant les notations de Corrado et Su (1996)) :

1. dans le cas du modèle de B&S :

$$\text{Min}_{\hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2} \sum_{j=1}^n \left( C_{\text{obs};j} - C_{\text{BS};j} \right)^2 \quad (7)$$

2. dans le cas du modèle de J&R :

$$\text{Min}_{\hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2} \sum_{j=1}^n \left( C_{\text{obs};j} - C_{\text{BS};j} \right)^2 \quad (8)$$

où  $n$  est le nombre d'options par jour pour chaque maturité, et où  $\hat{\sigma}_1$  et  $\hat{\sigma}_2$  permettent, respectivement, d'estimer les paramètres  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$ . Les coefficients de Fisher de la vraie fonction de distribution sont alors donnés par :

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_1(F) &= \hat{\sigma}_1 + \hat{\sigma}_1(A) \\ \hat{\sigma}_2(F) &= \hat{\sigma}_2 + \hat{\sigma}_2(A) \end{aligned} \quad (9)$$

où

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_1(A) &= 3 e^{\frac{\hat{\sigma}_1^2}{2}} + 3 e^{\frac{\hat{\sigma}_1^2}{2}} \\ \hat{\sigma}_2(A) &= 16 e^{\frac{\hat{\sigma}_2^2}{2}} + 15 e^{\frac{\hat{\sigma}_2^2}{2}} + e^{\frac{\hat{\sigma}_2^2}{2}} + e^{\frac{\hat{\sigma}_2^2}{2}} \end{aligned} \quad (10)$$

Cette opération est réalisée chaque jour entre le 2 et le 31 janvier 1997. Nous utilisons ensuite les paramètres implicites calculés en  $j$  pour évaluer le prix des options d'achats négociées sur le Monep à la date  $j$  (procédure in sample), puis à la date  $j + 1$  (procédure out of sample). Nous comparons alors ces prix théoriques aux prix de marché.

## 5 Les résultats empiriques

Les interprétations empiriques qui suivent portent sur les options européennes d'achats sur l'indice CAC 40 négociées durant le mois de janvier 1997 et qui arrivent à échéance au mois de mars.

On remarque tout d'abord que les résultats obtenus grâce au modèle de Black et Scholes (1973) ne sont pas très satisfaisants, en particulier comparés à ceux obtenus outre-Atlantique. L'erreur, in sample, par rapport au prix de marché est, en moyenne de 3,48 francs, soit une erreur de 10,32 % (cf. tableau 1). Out of sample, l'erreur est, en moyenne de 4,24 francs, soit une erreur de 10,94 % (avec, sur la journée, un minimum de 4,12 % et un maximum de 21,73 %).<sup>8</sup> A titre de comparaison, l'erreur, out of sample obtenue par Corrado et Su (1996) sur le marché américain est, en moyenne de 0,875 dollar, soit 4,3 %<sup>9</sup> (avec un minimum de 3,2 % et un maximum de 5,4 %).<sup>10</sup> Au vu de ces données, le modèle de Black et Scholes (1973) a donc un pouvoir explicatif et prédictif moindre sur le marché français que sur le marché américain.

Table 1: Différence entre le prix théorique issu du modèle de Black et Scholes (1973) et le prix de marché des options d'achats PXL

	In sample		Out of sample	
	(en %)	(en FRF)	(en %)	(en FRF)
Minimum	0,01	0,01	0,01	0,01
Maximum	82,98	14,83	84,58	45,53
Moyenne	10,32	3,48	10,94	4,24
Ecart-type	14,16	2,51	15,31	6,60

<sup>8</sup>Pour certaines options, l'erreur de prix peut être supérieure à 80 % (cf. tableau 1). Il s'agit toutefois d'options dont la prime est très faible.

<sup>9</sup>Corrado et Su (1996) ne donnent pas directement l'erreur relative par rapport aux cotations du marché. Nous déduisons ce pourcentage de la manière suivante : l'erreur relative est égale à l'erreur absolue par rapport aux limites de la fourchette de prix, augmentée de la moitié de la fourchette moyenne, le tout divisé par le prix moyen et multiplié par 100. Soit pour l'erreur moyenne :  $4,3 \% = (0,64 + 0,47/2) * 100 / 20,22$ .

<sup>10</sup>Ces résultats sont conformes à ceux obtenus par Bakshi, Cao et Chen (1997) et Dumas, Fleming et Whaley (1998) à partir des mêmes données.

Au delà de cet aspect quantitatif, ce modèle semble mal adapté à l'évaluation des options in et out-of-the-money (cf. Figure 3), même si, paradoxalement, les options deep in et deep out-of-the-money semblent correctement évaluées par le modèle de Black et Scholes (1973).<sup>11</sup>

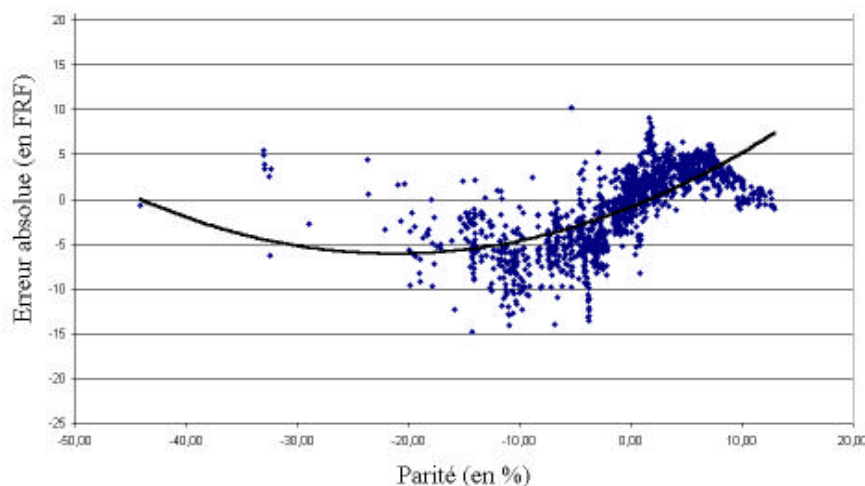


Figure 3 : Différences entre les prix théoriques calculés à partir du modèle de Black et Scholes (1973) et les prix de marchés.

L'estimation des moments d'ordre trois et quatre et l'utilisation du modèle de Jarrow et Rudd (1982) améliorent significativement l'évaluation des options sur indice CAC 40. L'erreur moyenne est en effet inférieure de 5 points lorsque l'on ajuste la loi log normale pour tenir compte des coefficients d'asymétrie et d'aplatissement (cf. tableau 2). In sample, l'erreur moyenne n'est plus que de 1,21 francs, soit une erreur de 3,94 %. Out of sample, l'erreur est en moyenne de 1,61 francs, soit une erreur de 4,85 %. L'écart-type de l'erreur est en outre plus faible avec le modèle de Jarrow et Rudd (1982) qu'avec celui de Black et Scholes (1973) : il passe de 14,16 % dans le premier cas à 8,76 % in sample, et de 15,31 % à 10,19 % out of sample. Par ailleurs, nos estimations des moments d'ordre 3 et 4 sont relativement robustes puisque l'erreur est approximativement la même avec la procédure in sample et out of sample.

<sup>11</sup>C'est également le cas outre-Atlantique (cf. Corrado et Su (1996), Figure 2, page 619).



Table 2: Différence entre le prix théorique issu du modèle de Jarrow et Rudd (1982) et le prix de marché des options d'achats PXL

	In sample		Out of sample	
	(en %)	(en FRF)	(en %)	(en FRF)
Minimum	0	0	0	0
Maximum	79,99	20,04	93,09	17
Moyenne	3,94	1,21	4,85	1,61
Ecart-type	8,76	1,28	10,19	1,57

Les paramètres implicites sont, pour le mois de janvier 1997, en moyenne de 16,20 % pour l'écart-type, de -0,52 pour la skewness et de 3,76 pour le kurtosis, ce qui confirme que la fonction de densité du rendement des indices boursiers accuse une asymétrie prononcée et des queues de distribution plus épaisses que celles induites par la loi normale (cf. tableau 3).

Table 3: Paramètres implicites des modèles de Black et Scholes et Jarrow et Rudd issues des prix de marché des options d'achats PXL

	Black et Scholes (1973)	Jarrow et Rudd (1982)		
	$\hat{\sigma}_{3/4}$	$\hat{\sigma}_1$	$\hat{\sigma}_{3/4}$	$\hat{\sigma}_2$
03/01/1997	0,1581	0,1555	-0,2919	2,3551
06/01/1997	0,1544	0,1565	-0,3887	3,0599
07/01/1997	0,1552	0,1561	-0,5087	2,9222
08/01/1997	0,1500	0,1537	-0,4519	3,3869
09/01/1997	0,1505	0,1523	-0,4122	3,1098
10/01/1997	0,1526	0,1589	-0,5250	3,7930
13/01/1997	0,1531	0,1558	-0,4994	3,3701
14/01/1997	0,1495	0,1544	-0,4827	3,6974
15/01/1997	0,1519	0,1570	-0,6044	3,6013
16/01/1997	0,1579	0,1571	-0,5613	3,0120
17/01/1997	0,1572	0,653	-0,6269	4,3852
20/01/1997	0,1634	0,1674	-0,7065	4,0467
21/01/1997	0,1683	0,1731	-0,7804	4,3090
22/01/1997	0,1622	0,1660	-0,6203	4,1831
23/01/1997	0,1583	0,1688	-0,6162	4,4882
24/01/1997	0,1682	0,1763	-0,7645	4,6204
27/01/1997	0,1606	0,1638	-0,2610	4,0163
28/01/1997	0,1608	0,1644	-0,4381	3,7975
29/01/1997	0,1642	0,1684	-0,9358	3,6624
30/01/1997	0,1622	0,1672	-0,3714	3,9923
31/01/1997	0,1644	0,1714	-0,4465	4,1203

On remarque en...n (cf. ...gure 4), que contrairement à la formule de Black et Scholes (1973), la formule de Jarrow et Rudd (1982) n'accuse aucun biais systématique quant à l'évaluation des options in et out-of-the-money.

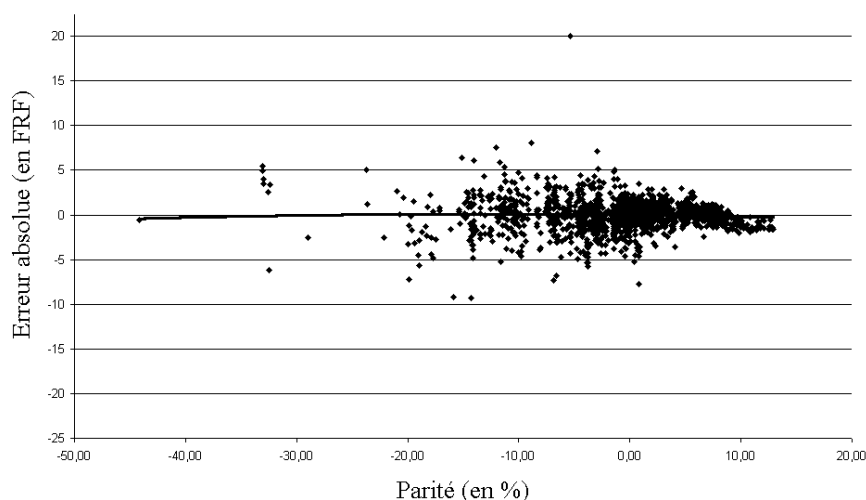


Figure 4 : Différences entre les prix théoriques calculés à partir du modèle de Jarrow et Rudd (1982) et les prix de marchés.

Sur le marché français, comme sur le marché américain, la formule de Jarrow et Rudd (1982) permet ainsi de diminuer de plus de 50 % l'erreur moyenne par rapport au modèle de Black et Scholes (1973). Cependant, aux Etats-Unis, l'erreur absolue n'est, en moyenne, que de 0,5 dollar, soit une erreur relative d'environ 2,6 %.<sup>12</sup>

<sup>12</sup>Ces bons résultats ne sont pas propres au modèle de Jarrow et Rudd (1982). Bakshi, Cao et Chen (1997) et Dumas, Fleming et Whaley (1998), aboutissent en effet aux mêmes conclusions, à savoir : i) que la formule de Black et Scholes (1973) est une relativement bonne approximation lorsqu'il s'agit d'évaluer le prix d'un call européen à la monnaie, ii) qu'il est toutefois possible de recourir à d'autres méthodes d'évaluation pour les options deep in et deep out of the money.

## 6 Conclusion

A l'instar des résultats obtenus par Corrado et Su (1996) sur le marché américain, nous trouvons que la formule de Jarrow et Rudd (1982) permet d'améliorer significativement l'évaluation des options sur indice CAC 40 par rapport au modèle traditionnel de Black et Scholes (1973). A noter toutefois que l'erreur entre le prix théorique et le prix de marché est plus importante dans le cas français, quel que soit le modèle retenu.

Cette approche, qui consiste à estimer les paramètres de skewness et de kurtosis, n'est néanmoins pas sans poser de problèmes : en effet, pour certaines valeurs extrêmes, la fonction de densité implicite implique une probabilité d'occurrence négative pour certaines valeurs, même s'il est possible de contraindre la procédure d'estimation (Jondeau et Rockinger (1999)). Par ailleurs, si la formule de Jarrow et Rudd (1982) permet d'améliorer l'évaluation des options sur indice CAC 40, il reste à montrer qu'elle n'est pas soumise à un smile, non plus sur la volatilité, mais sur les paramètres de skewness et de kurtosis.

## Références bibliographiques

Abken P., D. B. Madan et S. Ramamurtie, 1996, Estimation of Risk-Neutral and Statistical Densities by Hermite Polynomiale Approximation with an Application to Eurodollar Futures options, Working Paper, Federal Reserve Bank of Atlanta.

Bakshi G., Ch. Cao et Z. Chen, 1997, Empirical Performance of Alternative Option Pricing Models, *Journal of Finance* 52 (5), 2003-2049.

Bates D. S., 1996a, Dollar Jump Fears, 1984:1992, Distributional Abnormalities Implicit in Currency Futures Options, *Journal of International Money and Finance* 15 (1), 65-93.

Bates D. S., 1996b, Jumps and Stochastic Volatility : Exchange Rate Process Implicit in Deutsche Mark Options, *Review of Financial Studies* 9 (1), 69-107.

Black F. et M. Scholes, 1973, The Pricing of Options and Corporate Liabilities, *Journal of Political Economy*, 637-655.

Cont R., 1997, Beyond Implied Volatility, to appears in J. Kertesz et I. Kondor (Eds.) *Econophysics*, Amsterdam: Kluver.

Corrado Ch. J. et T. Su, 1996, S&P 500 Index Option Tests of Jarrow and Rudd's Approximate Option Valuation Formula, *Journal of Futures Markets* 16 (6), 611-629.

Corrado Ch. J. et T. Su, 1997, Implied Volatility Skews and Stock Index Skewness and Kurtosis Implied by S&P 500 Index Option Prices, *Journal of Derivatives*, summer.

Das S. R. et R. K. Sundaram, 1999, Of Smiles and Smirks : A Term-Structure Perspective, (forthcoming) *Journal of Financial and Quantitative Analysis*.

Dumas B., J. Fleming et R. E. Whaley, 1998, Implied Volatility Functions: Empirical Tests, *Journal of Finance* 53 (6), 2059-2106.

Jarrow R. et A. Rudd, 1982, Approximate Option Valuation for Arbitrary Stochastic Processes, *Journal of Financial Economics* 10, 347-369.

Jarrow R. et A. Rudd, 1983, Tests of an Approximate Option Valuation Formula, dans *Option Pricing Theory and Applications*, M. Brener (ed.), Lexington MA: Lexington Books.

Jondeau E. et M. Rockinger, 1997, Estimation et interprétation des densités neutres au risque : une comparaison des méthodes, *Notes d'Etudes et de Recherche* 47, Banque de France.

Jondeau E. et M. Rockinger, 1999, Estimating Gram-Charlier Expansions

with Positivity Constraints, Notes d'Etudes et de Recherche 47, Banque de France.

Harvey C. R. et R. E. Whaley, 1992, Dividends and S&P 100 Index Option Valuation, *Journal of Futures Markets* 12 (2), 123-137.

Hull J. et A. White, 1987, The Pricing of Option with Stochastic Volatilities, *Journal of Finance* 42, 281-300.

Madan D.B. et F. Milne, 1994, Contingent Claims Valued and Hedged by Pricing and Investing in a Basis, *Mathematical Finance* 4, 223-245.

Merton R., 1976, Option Pricing when the Underlying Stock Returns are Discontinuous, *Journal of Financial Economics* 4, 125-144.

Navatte P. et C.Villa, 1997, Implied Skewness and Kurtosis : Smile Effect and Empirical Series Properties, *AFFI*.

Renault E. et N. Touzi, 1996, Option Hedging and Implied Volatilities in a Stochastic Volatility Model, *Mathematical Finance* 6, 279-302.

Rubinstein Marc, 1985, Non Parametrics Tests of Alternative Option pricing Models using all reported Trades and Quotes on the 30 Most Active CBOE Option Classes from August 23, 1976 through August 31, 1978, *Journal of Finance* 40, 455-480.

Rubinstein Marc, 1994, Implied Binomial Trees, *Journal of Finance* 49, 771-818.

Stein E. et J. Stein, 1991, Stock price Distributions with Stochastic Volatility, *Review of Financial Studies* 4, 727-752.