



HAL
open science

Les mathématiques allemandes et le projet scientifique du jeune Descartes

David Rabouin

► **To cite this version:**

David Rabouin. Les mathématiques allemandes et le projet scientifique du jeune Descartes. *Mirabilis scientiae fundamenta*, Verlag Karl Alber, pp.203-226, 2022. halshs-03905087

HAL Id: halshs-03905087

<https://shs.hal.science/halshs-03905087>

Submitted on 15 Dec 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Les mathématiques allemandes et le projet scientifique du jeune Descartes

David Rabouin - Laboratoire SPHERE, UMR 7219, CNRS-Université de Paris

Le rôle des mathématiques dites « cossiques »¹ dans la formation du premier projet scientifique cartésien a fait l'objet depuis deux décennies d'une profonde réappréciation. Les travaux de Ivo Schneider, Ken Manders, Erwan Penchèvre, ou Edouard Mehl ont notamment indiqué que ces mathématiques, malgré leurs notations embarrassées, étaient beaucoup plus élaborées qu'on ne l'avait cru auparavant, et accompagnaient même, à l'occasion, des réflexions épistémologiques de grand intérêt². Une étude plus poussée des mathématiques cartésiennes a indiqué, en retour, que les travaux de Descartes avant les années 1630 étaient assez différents de ce que l'on avait reconstruit jusqu'à présent³. Ainsi aucun document ne permet aujourd'hui d'attester que Descartes ait pratiqué à cette époque l'analyse algébrique des problèmes de géométrie supérieure qu'il présente dans la *Géométrie* de 1637 et qui a fait sa célébrité. Outre cet argument *a silentio*, de nombreuses indications positives nous sont données sur sa mathématique qui ne correspondent pas à la plupart des reconstitutions proposées jusqu'à présent, et témoignent d'une pratique plus proche de celle des mathématiciens allemands de son temps. Ces rapprochements ont néanmoins été mentionnés dans le cadre de considérations techniques, souvent centrés sur l'œuvre du seul mathématicien Johann Faulhaber ou de son cercle, mais dont on ne mesure pas toujours les conséquences pour l'appréciation d'ensemble du projet cartésien. Mon but, dans cet article, sera d'indiquer la manière dont ce contexte nous invite à réinterroger le premier projet scientifique cartésien.

Dans un premier temps, je rappellerai la lecture « continuiste » qui voit dans la lettre à Beeckmann du 26 mars 1619, la première annonce d'un programme qui aurait servi de fil conducteur à Descartes, jusqu'à sa pleine réalisation dans la *Géométrie* de 1637. Selon cette lecture, les *Regulae ad directionem ingenii* constituent une étape importante, notamment par le lien qu'elles

¹ On désigne ainsi les mathématiques développées dans l'héritage du livre de Cristopher Rudolff *Coss* (1525) – *coss* étant l'équivalent de l'italien *cosa*. Elles reposaient sur un système de notations particulier pour les puissances de l'inconnue : racine \mathcal{R} , carré \mathcal{Z} , cube \mathcal{L} , bicarré $\mathcal{Z}\mathcal{Z}$, etc. (avec quelques variantes selon les auteurs).

² Ivo Schneider, *Johannes Faulhaber (1580-1635) — Rechenmeister in einer Welt des Umbruchs*, Basel, Birkhauser, 1993 ; Kenneth Manders, « Descartes et Faulhaber », *Archives de philosophie* (58), 1995, cahier 3, p. 1-12 et « Algebra in Roth, Faulhaber, and Descartes », *Historia Mathematica*, (33), 2006, p. 184-209 ; Edouard Mehl, *Descartes en Allemagne 1619-1620 : le contexte allemand de l'élaboration de la science cartésienne*, Presses universitaires de Strasbourg, 2001, rééd. 2019 ; Erwan Penchèvre, « L'oeuvre algébrique de Johannes Faulhaber », *Oriens-Occidens, Cahiers du Centre d'Histoire des Sciences et des Philosophies Arabes et Médiévales* (5), 2004, p. 187-222.

³ Je me permets de renvoyer à D. Rabouin, « What Descartes knew of Mathematics in 1628 », *Historia Mathematica* (37), 2010, pp. 428-459 ; et « Les mathématiques de Descartes avant *La Géométrie* », dans T. Gress (ed.), *Cheminer avec Descartes. Concevoir, raisonner, comprendre, admirer et sentir*, Paris, Classiques Garnier, 2018, coll. « Rencontres – Etudes de Philosophie », p. 293-311.

instaurent entre mathématiques et méthodologie. Après avoir détaillé les difficultés posées par cette lecture, je me porterai plus précisément sur les indications qui subsistent concernant la pratique mathématique de Descartes dans les années 1620, et pointerai quelques éléments nouveaux dans le rapprochement avec la mathématique allemande de l'époque. Je conclurai en indiquant comment cette contextualisation nous invite à relire un texte comme les *Règles pour la direction de l'esprit*, et plus généralement comment elle peut conduire à une appréciation différente de la genèse de la méthode cartésienne.

Le Grand Programme

Une source importante pour la reconstruction du programme scientifique cartésien dans les années 1619-1620 est l'annonce faite à Beeckmann, le 26 mars 1619, d'une « science profondément nouvelle » (*scientia penitus nova*) qui permettrait « de résoudre en général toutes les questions que l'on peut proposer en n'importe quel genre de quantité, tant continue que discontinue » (mais, précise le Descartes de cette époque de manière significative : « chacune selon sa nature »). L'idée directrice est qu'il devrait être possible d'établir un parallèle entre les questions arithmétiques, faisant intervenir différents types de nombres pour leur résolution (rationnels, « sourds »⁴, ou « imaginaires »⁵) et les questions géométriques, faisant intervenir différents types de lignes pour leur résolution : droite et cercle (correspondant à l'usage de la règle et du compas), lignes « qui ont pour origine un seul mouvement » (que Descartes réfère à de « nouveaux compas » qu'il a mis au point), ou courbes engendrées « par des mouvements différents les uns des autres et non subordonnés entre eux » (comme exemple de ces lignes « imaginaires », Descartes propose la quadratrice)⁶.

Lu rapidement, ce texte donne effectivement l'impression d'une préfiguration de ce que réalisera la *Géométrie* de 1637, plus exactement de ce que présentera son second livre où Descartes entreprend de classer les courbes entrant dans les différents problèmes géométriques en ayant recours à un critère algébrique. Il insiste alors sur le fait que la classification ancienne, héritée de Pappus, en problèmes « plans » (résolubles à la règle et au compas), « solides » (résolubles à l'aide des sections coniques) et « linéaires » ou « grammiques » (résolubles par des courbes particulières) n'est pas bien fondée, car ses nouveaux compas donnent justement un exemple de solution par

⁴ C'est-à-dire des nombres qui s'expriment à l'aide de racines (carrés, cubiques, etc.) ou, dans nos termes modernes, « irrationnels algébriques ».

⁵ Dans le sens, encore mal fixé, des solutions qui ne soient pas du type précédent, typiquement celles qui faisaient intervenir des racines de nombres négatifs (mais dont on se gardera de croire qu'elles formaient pour les acteurs de l'époque un corps de nombres à part entière).

⁶ AT X, 156-157. Notons d'emblée que ces dernières courbes qui seront exclues de la géométrie en 1637, y sont alors incluses et que Descartes reconnaît également que son projet est encore très largement devant lui : « Et j'estime qu'on ne saurait rien imaginer dont on ne puisse trouver la solution à l'aide de pareilles lignes. Mais j'espère établir par démonstration quelles questions peuvent se résoudre de telle ou telle façon et non autrement, en sorte qu'il ne restera presque plus rien à découvrir en géométrie. L'œuvre, il est vrai, est infinie, et ne peut être accomplie par un seul. Projet incroyablement ambitieux ! Mais j'ai aperçu je ne sais quelle lumière dans le chaos obscur de cette science, et j'estime que, par le secours de cette lumière, les ténèbres les plus épaisses pourront être dissipées. » (trad. fr. F. Alquié dans Descartes, *Œuvres philosophiques*, Paris, Garnier, Tome I (1618-1637), 1963).

« mouvement continu » (comme les compas ordinaires) qui conduisent pourtant à des équations allant bien au-delà des problèmes « solides » (qui correspondaient, algébriquement, aux troisième et quatrième degrés). Cela soutient sa conviction que tout problème « géométrique » peut être résolu par une courbe constructible par « mouvement continu » et exprimable par une équation algébrique – une équivalence qui est posée sans être démontrée. Les autres problèmes relèvent de résolutions « mécaniques », et la mathématique n'a de prise sur eux que de manière indirecte et souvent approchée.

La lettre de 1619 semble, par ailleurs, donner un appui au célèbre passage de la seconde partie du *Discours de la méthode*, qui paraît lui-même se référer à la pratique mathématique des *Regulae ad directionem ingenii*. Descartes y rappelle, en effet, avoir ramené l'ensemble des mathématiques à l'étude de lignes simples (segments) représentées par des chiffres (symboles) afin d'emprunter « tout le meilleur de l'analyse géométrique et de l'algèbre » et de corriger « tous les défauts de l'une par l'autre », en écho apparent à ce qu'il présente en ouverture de la *Géométrie*. Il poursuit alors :

Comme, en effet, j'ose dire que l'exacte observation de ce peu de préceptes que j'avais choisis, me donna telle facilité à démêler toutes les questions auxquelles ces deux sciences [*scil.* la géométrie et l'algèbre] s'étendent, qu'en deux ou trois mois que j'employai à les examiner, ayant commencé par les plus simples et plus générales, et chaque vérité que je trouvais étant une règle qui me servait après à en trouver d'autres, non seulement je vins à bout de plusieurs que j'avais jugées autrefois très difficiles, mais il me sembla aussi, vers la fin, que je pouvais déterminer, en celles même que j'ignorais, par quels moyens, et jusqu'où, il était possible de les résoudre. (AT VI, 20-21)

La suite répète clairement que la « méthode » fut d'abord éprouvée dans les mathématiques, plus précisément dans l'algèbre⁷, et ne laisse pas de doute sur le fait que les succès obtenus pendant ces « deux ou trois mois » correspondent bien à l'année 1619⁸. La troisième partie rappelle d'ailleurs que pendant « les neuf années suivantes », Descartes continua à s'exercer en sa méthode en réservant

de temps en temps quelques heures, que j'employais particulièrement à la pratiquer en des difficultés de mathématique, ou même aussi en quelques autres que je pouvais rendre quasi semblables à celles des mathématiques (AT VI, 29).

Ceci consonne avec le cheminement que Descartes décrit à Beeckman lorsqu'il le retrouve en octobre 1628 et lui dit avoir progressé dans l'arithmétique et la géométrie « aussi loin qu'un esprit humain peut comprendre »⁹. Il ajoute n'avoir rencontré personne à part Beeckman avec qui partager ses idées, évoquant ainsi leur projet ancien d'édifier une « physico-mathématique » (AT X, 52). C'est ce descriptif général qui m'intéressera particulièrement au titre du « premier projet scientifique » cartésien.

⁷ « ne l'ayant point assujettie à aucune matière particulière, je me promettais de l'appliquer aussi utilement aux difficultés des autres sciences, que j'avais fait à celles de l'algèbre » (AT VI, 22).

⁸ Et même à son début si l'on en croit l'âge que s'attribue alors Descartes : « Mais, ayant pris garde que leurs principes devaient tous être empruntés de la philosophie, en laquelle je n'en trouvais point encore de certains (...), je ne devais point entreprendre d'en venir à bout, que je n'eusse atteint un âge bien plus mûr que celui de vingt-trois ans, que j'avais alors » (AT VI, 21-22).

⁹ AT X, 331 ; OC 1, 107.

De fait, une étude plus approfondie de ces passages laisse rapidement apparaître plusieurs zones d'ombre sur lesquelles le commentaire semble s'être peu penché et qui vont nous permettre d'interroger la lecture « continuiste » dont je viens de rappeler les grands traits. La plus évidente est que le parallèle initial, celui présenté dans la lettre à Beeckman de mars 1619, est mathématiquement infondé : il est déjà absurde de mettre en regard l'existence de solutions rationnelles avec la construction à la règle et au compas (pensons simplement à la construction d'une moyenne proportionnelle sur le rayon d'un cercle, que décrira Descartes en ouverture de sa *Géométrie*, et qui donne aisément naissance à des nombres « sourds »¹⁰) ; mais n'était ce premier obstacle évident, il n'y aurait de toute façon aucun moyen de mettre en regard les solutions « imaginaires » et les courbes que l'on ne peut pas tracer par « mouvement continu ». La raison en est justement donnée par la *Géométrie de 1637* : les courbes qui sont engendrées par plusieurs mouvements non coordonnés entre eux sont celles que l'on ne peut pas exprimer par des équations algébriques (et qu'on ne peut donc pas mettre en regard d'un certain type de solution d'équation algébrique, qu'elle soit « imaginaire » ou non). Gardons-en un aspect important, sur lequel nous aurons l'occasion de revenir : ce qui manque à Descartes en 1619, et qui n'est pas négligeable, est précisément l'idée que le critère du « mouvement continu » ou du « géométrique » puisse s'identifier avec l'existence d'une formulation algébrique du problème.

À ce premier doute, on pourrait facilement opposer que Descartes ne fait, en mars 1619, qu'annoncer un programme. Dans les neuf années qui suivirent, n'avait-il pas tout le loisir de le préciser et de l'amender ? Certes, mais c'est ici que les vrais mystères portés par cette reconstruction vont se révéler le plus clairement. De fait, nous ne disposons justement d'aucun témoignage de ce qui est censé être, dans la lecture continuiste, au cœur du programme cartésien pendant les neuf années qui suivent, soit la pratique de l'analyse algébrique des problèmes de géométrie supérieure (c'est-à-dire mobilisant plus que la règle et le compas). Les exemples d'analyse algébrique de problèmes de géométrie supérieure chez Descartes sont bien connus et relativement aisés à dater : il s'agit du problème de Pappus, dont on sait que Descartes en prend connaissance à la fin de l'année 1631 et qu'il en propose une première résolution au début de 1632 (AT I, 232 et 278), ainsi que du traitement des ovales, préservé dans les *Excerpta mathematica* (AT X 310-324), qui semble devoir être postérieur à la démonstration par Beeckman (datée du 1^{er} février 1629) du fait que l'hyperbole est une solution au problème de l'anaclastique (AT X, 341). Il est d'ailleurs frappant de voir que les passages de Descartes sur le traitement des sections coniques en optique, que Beeckman recopie dans son *Journal* antérieurement à cette solution (AT X, 338-340), ne font intervenir aucune analyse algébrique (mais simplement le langage ancien de la théorie des proportions).

Bien plus, les rares témoignages dont nous disposons sur la pratique géométrique de Descartes à cette époque laissent clairement transparaître qu'il ne peut pas avoir alors élaboré le critère de classification des courbes de 1637 que nous concevons comme son achèvement naturel.

¹⁰ Il suffit, en effet, de prendre une moyenne proportionnelle entre un segment unité et un segment qui ne soit pas équivalent à un carré. L'exemple le plus simple en est donné par la moyenne proportionnelle entre le segment unité et son double, soit en termes arithmétique le « nombre » x tel que 1 est à x comme x est à 2 ($1/x = x/2$ ou $x^2 = 2$), que nous notons $\sqrt{2}$.

Ainsi la lettre à Mersenne du 8 octobre 1629 avance-t-elle que la division de l'angle en 27 et 29 parties ne peut pas être traitée « en géométrie », mais seulement « mécaniquement » (AT I, 25-26). Or non seulement il était bien connu, depuis le traité de Viète sur les sections de l'angle, que toute division d'un angle peut s'exprimer par une équation algébrique¹¹, mais ce même Viète avait expliqué comment construire les solutions d'une équation du troisième degré à solutions réelles par trisection de l'angle – une analyse reprise dans son *Invention nouvelle en Algèbre* par Albert Girard en 1629 et si importante pour ceux qui voulaient éviter la solution exprimée à l'aide de nombres imaginaires (alors que les trois solutions de l'équation initiale sont réelles), à laquelle conduisait dans ce cas l'algorithme mis au point par Cardan. Si Descartes avait avancé dans l'analyse algébrique, il aurait donc immédiatement su que la division d'un angle en 27 parts, qui revient simplement à opérer trois fois une trisection¹², est parfaitement « géométrique » dans le sens mobilisé en 1637.

Rappelons, à ce propos, que cette dernière affirmation est précisément au cœur du troisième livre de sa *Géométrie* où Descartes montre après Viète, *et par l'analyse algébrique*, que tous les problèmes solides (correspondant aux équations du troisième et quatrième degré) peuvent se ramener à la trisection de l'angle et à la duplication du cube (AT VI, 464-473). Dans le contexte des *Cogitationes privatae* en revanche, l'affirmation de 1629 est parfaitement attendue. Si les compas sont mobilisés pour la résolution des équations du troisième degré (comme en témoigne AT X, 233-240), il ne pourra s'agir en tout état de cause de constructions *approchées* (on cherche à localiser une racine de l'équation en ajustant le compas). Bien plus, le compas servant à cette époque à la trisection de l'angle est d'un autre type que celui servant à l'insertion des moyennes proportionnelles, et les deux problèmes (trisection de l'angle et solution des équations cubiques) sont donc traités *séparément* (AT X, 240-241).

Mais poursuivons. Lorsque ce même Mersenne demande à Descartes six mois plus tard, le 15 avril 1630 (AT I, 139), des exemples de problèmes géométriques qu'il pourrait proposer en défi aux autres mathématiciens, ce dernier, qui se dit alors « las des mathématiques » et qui en évoque « un million », n'a pourtant à lui proposer que des problèmes *plans* (c'est-à-dire résoluble à la règle et au compas) – soit le type de problème dont la résolution par l'algèbre est connue depuis la naissance de l'algèbre chez les mathématiciens arabes. Cela s'accorde avec le témoignage consigné par Beeckman lorsque son ami lui rend visite en octobre 1628, et lui annonce avoir tant travaillé en arithmétique et en géométrie qu'il n'a plus rien à y souhaiter. Mentionnant son traité d'algèbre rédigé à Paris, au moyen duquel il serait parvenu à « une science parfaite de la géométrie » (AT X, 331), il livre alors à son ami quelques échantillons, dont l'un de son « algèbre générale » (AT X, 333-335). Or la surprise est grande de voir alors Beeckman recopier la solution d'une équation *du*

¹¹ *Ad Angularum Sectionem Analytica Theorema* (traité édité et complété par Anderson, paru en 1615). La chose était en fait connue dès la résolution par Viète du célèbre défi d'Adrien Romain, problème du 45^{ème} degré, qui correspondait à un problème de détermination de la corde d'un angle et dont Viète avait vu qu'il correspondait à une suite d'équations de degré 3 et 5 (*Ad Problema quod omnibus Mathematicis totius orbis construendum proposuit Adrianus Romanus Francisci Vietæ Responsum*, 1595).

¹² Il suffit, en effet, d'opérer d'abord une trisection pour obtenir un nouvel angle de valeur un tiers de l'angle initial. Une trisection répétée sur cet angle donnera un angle de valeur un neuvième de l'angle initial et la trisection de ce dernier un nouvel angle de valeur un vingt septième de l'angle initial.

second degré (écrite, qui plus est, en caractères cossiques), à l'aide de carré et de rectangles, une pratique attestée, à nouveau, depuis les commencements de l'algèbre arabe. Cette pratique est parfaitement conforme à ce que l'on trouve consigné dans les copies les plus étendues des *Regulae* où la multiplication est également figurée par la construction de rectangles. Mais on remarque trop peu qu'elle est, en revanche, *incompatible* avec le dispositif de la *Géométrie* où la multiplication est représentée à l'aide de segments¹³, ce qui permet de travailler à même la configuration plane en exhibant des parallèles et des orthogonales permettant d'élaborer les équations fondamentales du système¹⁴. Certes Descartes est parfaitement au fait, dès 1628, que le système des proportions algébriques peut être représenté par des lignes simples (*per nudas lineas*), mais cela ne fait que rendre plus frappant le fait qu'il n'a pas alors intégré cette donnée à la *représentation des opérations elles-mêmes*.

La difficulté que portent tous ces témoignages n'est donc pas seulement que Descartes ne mentionne pas une pratique géométrique supérieure, dont on pourrait toujours supposer qu'il la tenait cachée à ses interlocuteurs, y compris à son ami Beeckman. Elle est bien plus profondément que les témoignages que nous possédons ne sont pas *compatibles* avec une telle hypothèse. Certes, Descartes mentionne également à Beeckman en 1628 que « les nombres irrationnels qui ne peuvent être expliqués autrement, il les explique par la parabole » (AT X, 335). Mais on remarquera, à nouveau, que dans le meilleur des cas, il s'agirait de traiter de problèmes solides, une résolution par l'algèbre qui était déjà au pouvoir d'un mathématicien comme Al-Khayyam¹⁵. Bien plus, lorsque Descartes, honorant sa promesse, envoie à Beeckman un échantillon de son algèbre présentant la construction des équations du troisième et quatrième degré par intersection d'une parabole et d'un cercle – invention qu'il présente comme son « secret universel » et dont il déclare n'avoir rien trouvé de plus excellent – le texte que Beeckman dit recopier *ad verbum* ne nous présente qu'une algèbre rhétorique expliquant comment représenter sur la figure le « nombre des carrés », celui des racines, ou le « nombre absolu » dans des équations que Beeckman décrit comme « cossiques » (AT X, 344-346).

Nombre de commentateurs s'appuient sur ce procédé de construction pour reconstituer la *preuve* d'une autre construction qui lui est liée, celle de l'insertion de deux moyennes, que Descartes est censé avoir trouvée à Paris en 1625. Mais ils ne réalisent pas toujours non seulement qu'ils projettent alors sur les textes le dispositif de la *Géométrie* (quand ce n'est pas l'analyse, plus tardive encore, de Van Schooten), mais surtout que la construction des deux moyennes, que Descartes avait envoyée en 1629, était nécessairement *sans démonstration* puisque Beeckman l'accompagne justement (sans qu'on puisse savoir si cela faisait partie de l'envoi cartésien) de la

¹³ Ce point avait été fortement mis en avant par Michel Fichant dans son article « *L'Ingenium* selon Descartes et le chiffre universel des *Règles pour la direction de l'esprit* », repris dans *Science et métaphysique dans Descartes et Leibniz*, Paris, PUF, 1998, p. 1–28.

¹⁴ Comme Descartes l'expliquera à Élisabeth à l'occasion de la résolution du problème dit « des trois cercles » en 1643 (AT IV, 38).

¹⁵ R. Rashed, *D'al-Khwārizmī à Descartes. Études sur l'histoire des mathématiques classiques*, Paris, Hermann, 2011.

preuve, purement géométrique qu'aurait élaborée un *autre* mathématicien français (qu'on pense être Mydorge)¹⁶.

Quant aux *Règles pour la direction de l'esprit*, outre qu'elles ne mentionnent *jamais* le programme d'une classification des questions géométriques au moyen de lignes – dont la lecture « continuiste » fait, rappelons-le, le cœur du programme cartésien depuis 1619 –, elles attestent d'une pratique algébrique encore très maladroite et tout à fait inapte à la pratique de l'analyse algébrique des problèmes de géométrie supérieure¹⁷. Finalement, il est tout à fait remarquable que la lettre à Stampioen de 1633, où Descartes répond à un problème de détermination d'un triangle dans lequel sont inscrits un carré et deux cercles, au moyen d'une équation écrite en cossiques¹⁸, réplique par un problème de polyèdres inscrits dans une sphère que l'on peut exprimer en termes de nombres figurés très semblable à ce que l'on peut trouver chez un mathématicien cossiste comme Peter Roth¹⁹, avant de conclure : « Si vous désirez une question qui s'étende plus loin, je ne vous en saurais envoyer de plus célèbre que celle qui a été proposée à toute la postérité par Pappus, et dont je fus particulièrement averti il y a environ deux ans par Monsieur Golius, professeur à Leyden » (AT I, 278). Ceci est conforme au diagnostic qu'avait avancé Henk Bos à propos du problème de Pappus comme moment de césure fondatrice de la géométrie cartésienne²⁰. En 1633 encore, Descartes n'a finalement pas d'autre exemple de géométrie supérieure à proposer à qui voudrait le défier en matière d'analyse algébrique.

Si Descartes est capable de fournir une *construction* de la trisection de l'angle ou de l'insertion de deux moyennes proportionnelles depuis le milieu des années 1620²¹, on ne remarque donc pas assez que les pratiques algébriques que les commentateurs décrivent « derrière » ces différentes constructions sont toujours *suppléées par eux*. À proprement parler, aucun des documents subsistants ne fournit d'analyse algébrique, et les textes que nous avons rappelés précédemment tendent plutôt à montrer que Descartes n'a justement *pas* fait le lien entre ces différents aspects : les différentes constructions qu'il est capable d'effectuer d'un côté (limités aux problèmes « solides » d'ailleurs) et son programme initial de classification des courbes par un critère algébrique de l'autre. La question qui reste ouverte à ce stade est alors la suivante : qu'est-ce que Descartes peut bien désigner dans le *Discours* quand il déclare avoir emprunté « tout le meilleur de l'analyse géométrique et de l'algèbre » et corrigé « tous les défauts de l'une par l'autre » au point d'être venu à bout « en deux ou trois mois » de grandes difficultés ?

Descartes cossiste ?

¹⁶ « Comme M. Descartes avait trouvé le moyen de trouver par la parabole deux moyennes proportionnelles, un certain mathématicien de Paris l'a démontré géométriquement » (AT X, 342-344 ; trad. fr. OC 1, 115).

¹⁷ Je me permets de renvoyer sur ce point à D. Rabouin, « *Mathesis universalis* et algèbre générale dans les *Regulae ad directionem ingenii* de Descartes », *Revue d'histoire des sciences*, 69, 2016, p. 259-309.

¹⁸ Je remercie Sébastien Maronne, qui prépare un commentaire de cette lettre à partir de l'étude du manuscrit, que ne possédait pas Tannery, de m'avoir signalé ce fait.

¹⁹ Voir plus bas p. ???

²⁰ H. Bos, *Redefining geometrical exactness: Descartes' transformation of the early modern concept of construction*, New York, Springer, 2001, p. 283.

²¹ Voyez la lettre à Mersenne de juin 1632 où Descartes dit lui avoir envoyé « la construction de la façon de diviser l'angle en trois » en même temps que celle de deux moyennes proportionnelles (AT I, 256).

Cette première série de remarques étant faites, tournons maintenant non vers ce que Descartes ne fait pas dans les années 1620, mais vers ce qu'il y fait.

Même si les témoignages sont lacunaires et épars, ils sont loin d'être inexistantes et offrent un visage de notre philosophe mathématicien bien différent de ce qu'on estime parfois. Au premier chef, on rappellera que Descartes n'est pas l'auteur d'un seul traité de mathématiques, la *Géométrie* de 1637, mais de deux autres ouvrages qu'il n'a certes pas publiés, mais qu'il n'a pas moins écrits : une « vieille Algèbre », rédigée à Paris, et qu'il présente comme achevée à Beeckman en 1628²², et les *Progymnasmata de solidorum elementis*, dont une partie est préservée grâce à une copie de Leibniz²³.

Le premier traité est perdu, mais Descartes nous renseigne sur son contenu lorsqu'il répond à Mersenne lui demandant en 1638 cet ouvrage pour Mydorge :

Je ne ferais nulle difficulté de lui envoyer ma vieille Algèbre, sinon que c'est un écrit qui ne me semble pas mériter d'être vu ; et parce qu'il n'y a personne que je sache qui en ait de copie, je serai bien aise qu'il ne sorte plus d'entre mes mains ; mais s'il veut prendre la peine d'examiner le troisième livre de ma Géométrie, j'espère qu'il le trouvera assez aisé, et qu'il viendra bien après à bout du second.²⁴

Outre que l'on voit Descartes, qui estimait en 1628 son algèbre « parfaite » et menant à une « science parfaite de la géométrie » (AT X, 331), la dédaigner dix ans plus tard comme ne méritant pas d'être vue, la principale indication qui nous est fournie ici est que son contenu fut, au moins pour partie, remplacé par le troisième livre de la *Géométrie*, soit la théorie des équations²⁵. On peut donc supposer que c'est ce que contenait, au moins pour partie, l'ancien traité. Les documents préservés tendent, par ailleurs, à indiquer qu'il devait être rédigé dans le formalisme maladroit des cossistes.

C'est un des points où notre connaissance des mathématiques allemandes du début du XVII^e siècle permet une meilleure réappréciation de la pratique cartésienne. De fait, certains cossistes témoignent d'une pratique algébrique bien plus développée que ce que l'on avait estimé jusque-là, et très proche du savoir contenu dans le troisième livre de la *Géométrie*. Au premier rang, il faut noter le fait qu'ils concevaient la structure des équations de manière multiplicative, qu'ils pouvaient évaluer une équation à zéro, qu'ils avaient compris par là même les relations complexes entre racines et coefficients – ce qui leur permettait de traiter des solutions entières d'équations de degré élevé à partir des diviseurs du terme constant²⁶, ou d'avoir des règles pour la détermination des racines réelles –, qu'ils introduisaient des termes notés par des lettres, permettant ainsi la

²² S'il s'agit du registre in octavo, « où il semble avoir écrit pour son usage une introduction contenant les fondemens de son algèbre », l'inventaire de Stockholm nous dit qu'il comportait 155 feuillets.

²³ L'inventaire de Stockholm indique que le document conservé par Descartes comportait 16 feuillets in octavo. Bien plus que ce que Leibniz en a recopié.

²⁴ Lettre à Mersenne 25 janvier 1638, AT I, 501-502.

²⁵ Descartes se réfère d'ailleurs souvent à ce livre en parlant des règles de « son algèbre » – un terme plus rare qu'on ne le croit sous sa plume.

²⁶ Un des thèmes de théorie des nombres (la recherche des « parties aliquotes » d'un nombre) sur lesquels Descartes a beaucoup travaillé d'après ce qu'on trouve et dans les *Cogitationes Privatae* et dans l'Inventaire de Stockholm.

première occurrence aujourd’hui connue, avant Descartes, de la méthode dite des « coefficients indéterminés »²⁷.

On objectera alors qu’un apport propre de Descartes, que mentionne le témoignage de Beeckman, aussi bien que la seconde partie du *Discours*, est l’usage de cette algèbre pour l’achèvement de la géométrie. Mais un tel écart a été grandement exagéré par une comparaison trop étroitement conduite avec les seules œuvres de Faulhaber (effectivement peu enclin à s’intéresser à la géométrie dans les textes où il traite d’algèbre). Lorsque l’on prend une vue plus large, on s’aperçoit que les cossistes n’avaient aucune difficulté à utiliser l’algèbre pour la résolution de problème de géométrie, qu’elle soit plane ou solide. Cela, Descartes le sait dès sa lecture de l’*Algèbre* de Clavius qui comporte de tels problèmes :

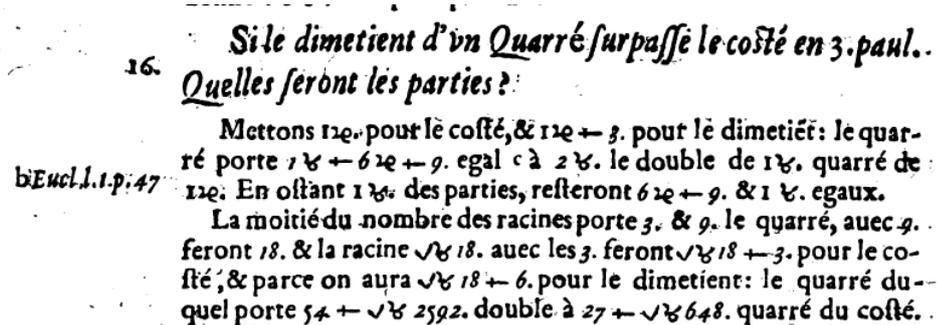


Fig. 1. Un problème géométrique traité par l’algèbre dans Clavius (traduction française par G. Guillon, p. 279)²⁸

Une lecture plus poussée des *Rechenmeister* allemands (ou plus généralement des auteurs de la sphère d’influence cossiste qui comprenait tout aussi bien des Français, des Belges ou des Hollandais) l’avait nécessairement mis en contact avec des problèmes de lieux plus élaborés (quoique ne dépassant pas les problèmes plans), typiquement des problèmes de cercles tangents à un troisième cercle, selon des variantes simples du problème général qu’il traitera avec Élisabeth en 1643.

²⁷ L’ensemble de ces points de rapprochement fait l’objet de l’étude de Ken Manders parue en 2006 dans *Historia Mathematica* (voir ci-dessus note 2).

²⁸ *L’algèbre de Christophe Clavius*, Liège, Leonard Streeck, 1612.

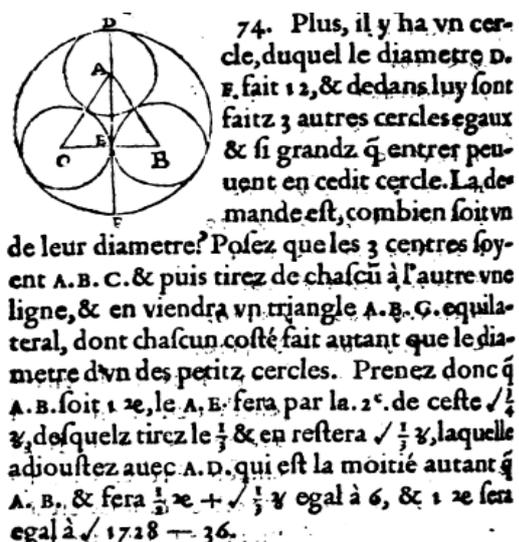
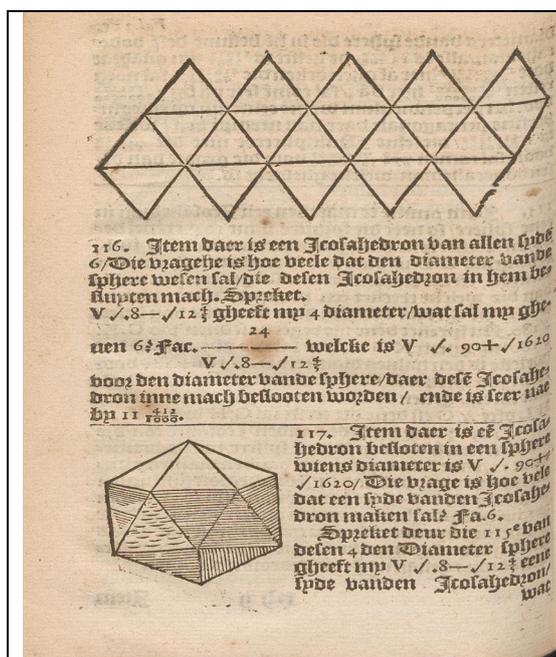
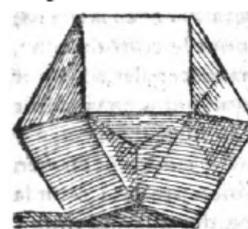


Fig. 2. Un problème de cercles tangents (Valentin Mennher 1565, § 74)²⁹

Plus significatif encore, il aurait alors été mis en contact avec une très riche littérature sur des problèmes concernant l'inscription des polygones dans des cercles et la construction de polyèdres réguliers et semi-réguliers (notamment à l'aide de patrons permettant leur traitement combinatoire) :



Petri 1591 fol. 236³⁰



Mennher 1565 § 143

²⁹ Valentin Mennher (ou Menher), *Pratique pour brievement apprendre à chiffrer & tenir livre de Comte, avec la Regle de Cos et Geometrie*, Anvers, 1565.

³⁰ Nicolaus Petri (Claes Pietersz van Deventer), *Practique om te Leeren Rekenen cijpheren ende Boeckhouwen / met die Regel Coss ende Geometrie seer profijtlijcken voor allen Coopluyden. Van nieuw Ghecorrigeert ende vermeerdert*, Amsterdam B. Adriaensz 1591 (seconde édition augmentée).

Fig. 3. Traitement par les cossistes de polyèdres réguliers et semi-réguliers à l'aide de l'algèbre

Enfin, cette littérature abonde en traitement des nombres figurés, avec ou sans l'aide de l'algèbre³¹.

On est frappé de constater que ces thèmes concordent parfaitement avec la pratique mathématique consignée dans tous les documents préservés : les *Cogitationes privatae*, certains passages anciens des *Excerpta Mathematica* et, bien sûr, les *Exercices pour les éléments des solides* (où Descartes conjoint justement l'étude des nombres figurés polyédriques et celle des polyèdres réguliers et semi-réguliers)³².

Mais il y a plus, car la conjonction de ces problèmes était au cœur de l'algèbre elle-même telle que l'entendait un cossiste comme Peter Roth – dont on se rappellera qu'il est un des rares mathématiciens que Descartes mentionne dès cette époque (AT X, 242) et dont on sait par Van Schooten qu'il trouvait son travail très élégant (AT X, 638). Les problèmes que pose Peter Roth dans la dernière partie de son *Arithmetica philosophica* (1608) sont, en effet, toujours de ce type : trouver la racine d'un polynôme d'un degré souvent élevé (jusqu'à six ou sept) qui soit également un nombre figuré (généralement à un très grand nombre de côtés) et qui entre dans des relations géométriques (généralement d'inscription d'un polyèdre semi-régulier dans une sphère). En voici un exemple typique :

³¹ Voir ci-dessous le texte de Curtius (Sebastian Kurtz), [page ???](#).

³² Voir en particulier, sur les questions de nombres : AT X, 241, AT X, 293-296, et plusieurs opuscules mentionnés dans l'inventaire de Stockholm (AT X, 6 et 10) ; sur les nombres figurés : AT X, 241 ; sur le calcul des grandeurs géométriques : AT X, 285-292 ; sur la géométrie des solides : AT X, 246-248. Plus généralement, on pourra remarquer que les documents qui ne relèvent pas de ces thèmes relèvent de la « physico-mathématique » (problème de la chaînette, question de gnomonique, chute des graves) – le thème que Descartes et Beeckman sont censés avoir entrepris de développer en propre et qui semble former le cœur du traitement des questions déterminées et indéterminées dans les seconde et troisième parties des *Regulae* (dont seul le tout début de la seconde est préservée).

XXIII f. 187 Soit une autre sphère dont le diamètre est égal à la plus petite vraie racine **triacosiaicosihexagonale** de $x^5 + 578x^2 + 7072 - 2861x - 20x^3 - 8x^4$. On y inscrit un **corpus irrégulier** à 6 faces carrées et 8 faces triangulaires équilatérales régulières, tel que, quand il est posé sur un carré, la face supérieure est toujours aussi un carré. Quand on le pose sur une base triangulaire, la face supérieure lui est toujours parallèle et c'est aussi un triangle. Combien une arête de ce corps à douze sommets inscrit dans la sphère donnée mesure-t-elle? *Solution* : $3 - \sqrt{\frac{1}{2}}$.

Nombre 326-gonal
Equation : $162x^2 - 161x$
 $x^5 + 578x^2 + 7072 - 2861x - 20x^3 - 8x^4$

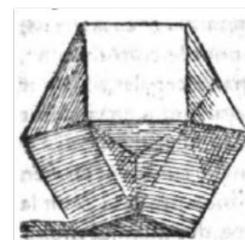


Fig. 4. Le problème 23 de l'*Arithmetica Philosophica* de Peter Roth (1608)³³, traduction Erwan Penchèvre

Non seulement on retrouve là le matériau sur lequel s'est édifié les *Progymnasmata*, mais il informe encore sur le problème posé à Stampioen aussi tard que 1633 – problème dont Descartes reconnaît qu'il est plan, mais dont on a vu qu'il admet n'en avoir pas de meilleur à proposer à part le problème de Pappus.

Reste un dernier point où il est coutumier d'insister concernant les avancées cartésiennes : les notations algébriques telles que décrites par les *Règles pour la direction de l'esprit* (plus exactement la Règle XVI, préservée dans toutes les versions existantes). Ici encore, il faut néanmoins se garder de projeter trop vite les achèvements de la *Géométrie* de 1637 dans les réalisations des années 1620. De fait, dans les *Regulae*, contrairement à une légende tenace, Descartes ne mentionne absolument pas la possibilité de noter les coefficients avec des lettres et ne décrit les équations que munies de coefficients *numériques*. Ce qu'il avance, très exactement, est que l'on peut noter les connues à l'aide de lettres minuscules et les inconnues à l'aide de lettres majuscules. Or cette pratique était courante dans l'algèbre cossique. Non seulement, il était habituel d'introduire les secondes inconnues au moyen de lettre de l'alphabet, mais on indiquait également ainsi les termes connus entrant dans les problèmes. Bien plus, l'habitude fut rapidement prise de noter les secondes par des répétitions de lettres, comme Descartes le fait encore jusque dans la *Géométrie* pour les puissances secondes (*aa* pour a^2). On trouve ainsi dès le début du XVIIème

³³ P. Roth (Rothen), *Arithmetica philosophica, oder schöne neue wolgegründte überauss künstliche Rechnung der Coss oder Algebrae*, Nürnberg, 1608.

siècle des auteurs détaillant le développant en carré de $(1^2e + 1a)$ en $(1^2 + 2^2ea + 1aa)$ de la façon suivante :

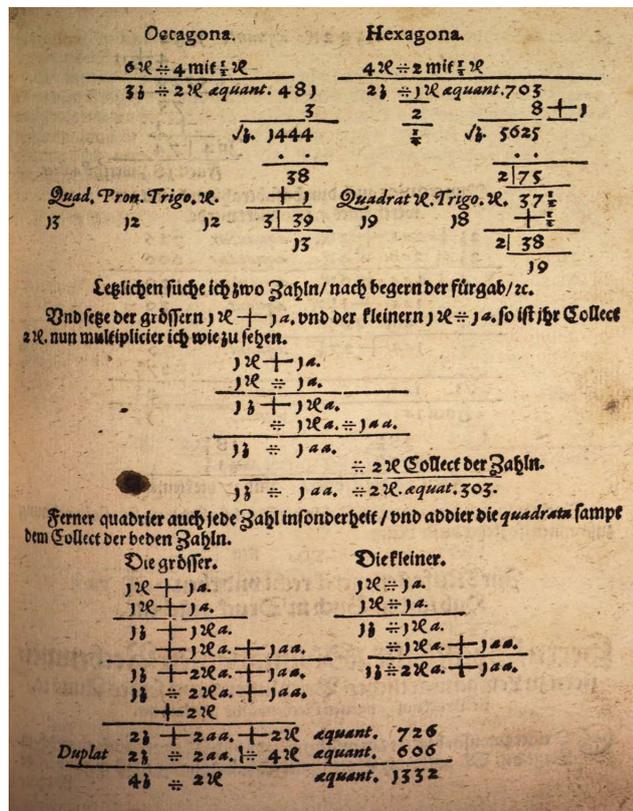


Fig. 5. Curtius 1604³⁴ (sans indication de pagination) : traitement des nombres figurés par l’algèbre (haut de page) et développement des égalités que nous noterions $(x + a)^2$ et $(x - a)^2$.

On trouve ainsi chez Faulhaber des équations écrites avec des a jusqu’à la puissance sixième.

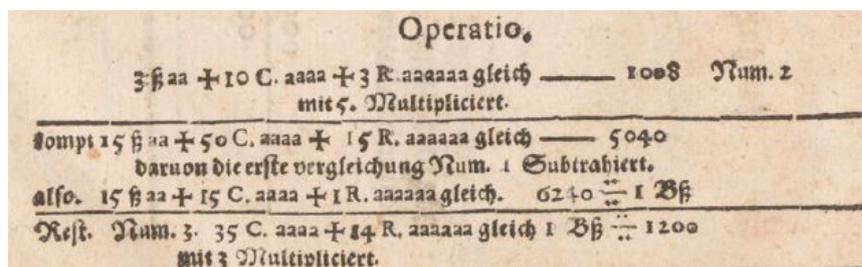


Fig. 6. Système d’équations en a et x chez Faulhaber 1622 (que l’auteur résout ensuite en les deux variables au moyen d’éliminations)³⁵.

Ce type de notations se retrouve chez d’autres auteurs comme Johannes Geysius (ou Gyennus) qui l’utilise pour toutes les inconnues. Ces notations lui permettent de formuler aisément

³⁴ S. Curtius (Sebastian Kurtz), *Resolutio: Das ist: Auflösung vieler ... Exemplar etlicher fürnemer*, Nürnberg, 1604.

³⁵ J. Faulhaber, *Miracula arithmetica : Zu der Continuation seines Arithmetischen Wegweisers gehörig*, Augspurg, Franken, 1622, p. 70.

des problèmes à plusieurs inconnues, notées a, b, c , dans lesquelles il utilise d'ailleurs également des majuscules pour les données (A, B, C) – le même système que celui que décrit Descartes dans les *Regulae*³⁶. Nous ne devons pas non plus oublier que l'algèbre allemande est en contact étroit avec d'autres traditions, en particulier la tradition hollandaise de Van Ceulen, Snell et Van Roomen, qui sont souvent cités par nos auteurs. Or ce dernier, dont on rappellera qu'il est le seul auteur connu à ce jour à avoir utilisé le terme exact de *mathesis universalis* avant Descartes, traite dans son *Apologia pro Archimede* (1597) des opérations sur des nombres indéterminés, notés A, B, C en indiquant qu'ils peuvent être remplacés par des polynômes, qu'il note à la manière de Stevin (les puissances étant indiquées par des chiffres encadrés et les inconnues étant laissées implicites). Dans son commentaire à al-Khawārizmī³⁷, il franchit un pas supplémentaire en notant les *inconnues* par A, B, C , ce qui donne des écritures comme $A(3) + B(3) + 3A(2) \text{ in } B + 3B(2) \text{ in } A$ (pour l'expression développée du cube de $(A + B)$)³⁸. On voit qu'on est ici, dès le tournant du XVII^e siècle, au bord des notations cartésiennes décrites dans les *Regulae*³⁹. Ce sont des notations de ce type qui seront d'ailleurs reprises par Albert Girard dans son *Invention Nouvelle en algèbre* (Amsterdam, G. Blaeuw, 1629).

Conclusion

Tous ces documents, redécouverts récemment et encore trop peu étudiés, sinon par l'histoire des mathématiques érudite, me semblent changer très profondément l'appréciation du premier projet scientifique cartésien et, en particulier, du passage du *Discours* où Descartes dit avoir combiné analyse géométrique et algèbre pour triompher, grâce à sa méthode, en « deux ou trois mois » de difficultés qu'il jugeait jusque-là hors de portée. On a vu, en effet, qu'interprété à l'aune de l'analyse algébrique de 1637, un tel témoignage n'est appuyé sur aucun document avant 1630. Il n'en va pas de même si nous considérons que la géométrie que Descartes a en vue à ce moment est celle qu'il travaille dans les *Progymnasmata*. Comme y a insisté Edouard Mehl, la démonstration euclidienne de l'impossibilité de trouver des polyèdres réguliers autres que les cinq solides platoniciens était alors considérée comme le point culminant de la géométrie euclidienne, mais aussi

³⁶ Ces écrits sont malheureusement perdus, mais l'algèbre de Geysius est préservée en partie dans l'*Encyclopedia* d'Alsted (Herborn, 1630); voyez notamment la page 872, où Geysius propose un problème impliquant trois coupes A, B, C dont les prix a, b, c sont données par un système d'équations linéaires qu'il résout de manière élégante.

³⁷ Ce texte très rare dès l'époque est néanmoins cité par Caspar Grünewald, personnage clef de l'entourage de Faulhaber en 1619-1620 sur lequel Edouard Mehl a attiré l'attention (voir notamment la transcription du texte de Grünewald citant Van Roomen dans Mehl 2019, p. 373).

³⁸ J'indique avec des parenthèses ce que Van Roomen note à la manière de Stevin par des chiffres entourés d'un cercle. Le *in* désigne la multiplication, comme chez Viète.

³⁹ Comme y avait déjà insisté le Père Bosmans dans son article : « Le fragment du commentaire d'Adrien Romain sur L'ALGÈBRE DE MUHAMED BEN MUSA EL- CHOWAREZMI », *Annales de la Société scientifique de Bruxelles XXX* (1905-1906), p. 287. Je cite la note 47 : « Il n'est pas douteux qu'il n'ait fait connaître ses belles notations à ses élèves et qu'elles ne se soient répandues autour de lui. Elles n'étaient probablement pas un secret pour aucun mathématicien des Pays-Bas. N'est-il donc pas tout à fait vraisemblable que Descartes qui fit un séjour si prolongé chez eux, ne les ignorait pas ?/Cela ne diminue en rien le mérite de Descartes. Mais il est toujours instructif, pour employer un mot de Paul Tannery, de rechercher jusqu'à quel point des savants comme Descartes ont profité des idées qui étaient "dans l'air" à leur époque, pour en tirer tout le parti possible ».

comme un défi à relever pour des mathématiciens qui n'auraient pas été satisfaits par la « preuve » d'Euclide⁴⁰. Or c'est bien un tel défi que relèvent les *Progymnasmata* en donnant la première preuve *algébrique* aujourd'hui connue de ce fait.

Cela permet d'interpréter le passage du *Discours* où Descartes dit avoir triomphé de difficultés très grandes (on a vu le type de problème de degré élevé que pratiquait Roth et que Descartes mentionne encore à Stampioen en 1633), mais aussi le fait qu'il mentionne alors des questions d'impossibilité (« déterminer, en celles même que j'ignorais, par quels moyens, et jusqu'où, il était possible de les résoudre ») ; cela permet également de comprendre pourquoi Descartes peut avancer à Beeckman en 1628 être parvenu à « une science parfaite de la Géométrie » tout en professant dix ans plus tard que son travail de cette époque ne mérite pas d'être vu ; cela permet enfin d'expliquer pourquoi Descartes peut se déclarer en 1630 « las des mathématiques », ne mentionnant à Mersenne que des problèmes plans dont il a triomphé, et alors que subsiste encore devant lui ce qui constitue pour notre regard rétrospectif son plus grand achèvement.

Mais il y a plus, car ces rapprochements avec les mathématiques allemandes permettent également d'expliquer les très nombreuses anomalies de la pratique mathématique présentées dans les *Regulae*, à commencer par le fait que Descartes ne propose pas un, mais deux schématismes, selon que l'on traite de grandeurs continues ou discrètes (Règle XIV et XV). Ceci est, en effet, parfaitement conforme à ce que l'on trouve dans les *Progymnasmata* où Descartes considère les polyèdres tantôt comme nombres figurés (réseaux de points) ou tantôt comme figures géométriques (grandeurs continues), l'algèbre procurant la théorie « universelle » à partir de laquelle ces deux théories peuvent être développées. Bien plus, cela permettrait d'expliquer pourquoi les *Regulae* s'interrompent brutalement sur la question, pourtant élémentaire, de l'insertion d'une moyenne proportionnelle – celle-là même, comme je l'ai indiqué, qui fait immédiatement capoter le programme de mars 1619. De fait, si les *Regulae* déclarent que l'on peut résoudre en général le problème d'un nombre aussi grand que l'on veut de moyennes (comme le permettent effectivement les compas cartésiens), elles n'ont aucun moyen de transférer cette possibilité dans un *schématisme opératoire*, à la fois parce qu'elles restent attachées à la représentation de la multiplication par des rectangles et parce que la volonté de traiter sur un même plan le discret et le continu les empêche de disposer immédiatement du cercle⁴¹.

⁴⁰ E. Mehl, « Euclide et la fin de la Renaissance : Sur le scholie de la proposition XIII.18 », *Revue d'histoire des sciences*, 56, 2003, p. 439-455.

⁴¹ Je me permets de renvoyer, pour le détail de ces différentes anomalies, à Rabouin 2016.