



HAL
open science

Anzahlen et Werthverläufe: quelques remarques sur les §§I.34-40 des Grundgesetze de Frege

Marco Panza

► **To cite this version:**

Marco Panza. Anzahlen et Werthverläufe: quelques remarques sur les §§I.34-40 des Grundgesetze de Frege. E. Haffner, D. Rabouin. L'épistémologie du dedans: Melanges en l'honneur de Hourya benios-Sinaceur, Classiques Garnier, pp.141-189, 2021. halshs-03947399

HAL Id: halshs-03947399

<https://shs.hal.science/halshs-03947399>

Submitted on 19 Jan 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Anzahlen et Werthverläufe : quelques remarques sur les §§ I.34-40 des *Grundgesetze de Frege*

Marco Panza

CNRS, IHPST (CNRS et Univ. Paris 1, Panthéon-Sorbonne),
Chapman Univ., Orange, CA.

Résumé. On a plusieurs fois observé que le système formel de Frege est un système interprété, au sens que celui-ci assigne une signification invariante aux constantes fonctionnelles primitives qui y interviennent et suppose que les quantificateurs, autant du premier que du second ordre, ont un domaine fixe et universel. Ceci implique que ses définitions et théorèmes sont censés avoir, à leur tout, une signification invariante. Il n'en reste pas moins que cette signification est redevable de la manière dans laquelle l'on conçoit les valeurs de vérité et les *Werthverläufe*, ou parcours de valeurs. Frege ne nous dit jamais explicitement ce qu'il entend par ces objets. Il se limite à stipuler que les premiers comptent parmi les secondes, sans se préoccuper non plus de clarifier si l'on devrait ou pas admettre qu'il ait des objets qui ne sont pas de parcours de valeurs. Ceci fait que la signification invariante que Frege semble assigner à ses définitions et théorèmes n'est pas, en fait, si précise que cela. Le but que je poursuis ici est d'illustrer ce flou, en me concentrant sur le système de définitions qui conduit à celle des *Anzahlen* et en montrant comment le flou est particulièrement gênant dans le cas de cette dernière définition. En conclusion, j'envisagerai deux manières possibles de limiter ce flou.

1. Introduction

Chacun sait que Dedekind est, et a toujours été, l'un des amours intellectuels de Hourya. Et comme tous les amours, il va avec quelque peu de déconsidération envers les concurrents possibles du bien-aimé. Parmi ces concurrents, il y a certainement Frege, du moins si on se limite à considérer les contributions de Dedekind à la définition des nombres naturels et réels.

Cette limitation est déjà un motif majeur de déconsidération : l'apport intellectuel de Dedekind va bien au-delà, pourrait-on dire, de celui de Frege. Dedekind a été un mathématicien à part entière, et il n'a consacré à cette question que deux pamphlets que, bien qu'influents, ne constituent qu'une toute petite partie de sa production mathématique. Ces définitions – avec les considérations qui les accompagnent et les motivent (en opposition à d'autres approches des nombres réels, y compris celle de Dedekind), et le système formel au sein duquel elles sont formulées – sont, en revanche, l'essentiel de ce que Frege nous a laissé.

Soit. Mais il reste que cette simple remarque contraste avec une autre qu'il est également facile de faire : alors que les mathématiciens d'aujourd'hui tiennent Dedekind pour une icône d'un passé glorieux, plusieurs philosophes tiennent Frege pour un protagoniste vivant de leurs discussions quotidiennes. S'interroger sur son œuvre est considéré comme une activité philosophique à l'aune des temps ; le faire sur celle de Dedekind est considéré comme l'activité d'un historien s'intéressant aux mathématiques du XIX^e siècle. Cela ne peut que rendre la tension plus aiguë. Et elle le devient plus encore lorsque l'on se rappelle que les définitions de Frege sont, après tout, inconsistantes, et requièrent, pour être réactualisées, des modifications plus ou moins profondes, tandis que celles de Dedekind n'ont demandé, tout à plus, qu'à être formalisées.

Il y a plus encore. Dedekind et Frege, sont souvent associés en tant que fondateurs du logicisme, mais, comme Hourya le sait bien, leurs logicismes (à condition qu'ils soient bien logicistes) sont bien différents entre eux, et il y a de nombreuses raisons pour en préférer l'un à l'autre, selon les orientations philosophiques de chacun.

Vous pouvez donc bien imaginer que, depuis que j'ai commencé à travailler sur Frege, mes discussions avec Hourya ont souvent porté sur la comparaison entre (sinon sur les mérites respectifs de) Dedekind et Frege. Et, bien qu'il ne soit certes pas dans le caractère de Hourya de s'opposer à autrui – elle est bien plus portée à chercher dans les discours des autres une raison d'enrichir le sien, ou, du moins, de contribuer à une réflexion commune – j'ai souvent senti dans ces discussions, un voile de scepticisme : cette sorte de déconsidération que j'ai mentionné plus haut. Ceci ne nous a pas empêchés de travailler ensemble à un livre (en collaboration avec Gabriel Sandu)¹, dans lequel on discute les conceptions différentes de Frege et Dedekind quant à la fondation de l'arithmétique et de l'analyse réelle, et même d'en signer l'introduction ensemble.

C'est bien ce travail commun que j'ai rappelé lors des journées en l'honneur de Hourya, qui sont à l'origine du présent livre. Je l'ai fait car ce travail m'a semblé exemplaire autant de l'esprit d'amitié et collaboration qui a toujours marqué nos interactions, que de l'énorme dette, qui n'est pas seulement intellectuelle, que je ressens envers son enseignement et son exemple inégalable d'intelligence, de passion, de rigueur, et d'humanité.

Il serait cependant sans intérêt de relater ici des thèses déjà exposées ailleurs. J'ai donc décidé d'apporter un grain de sel supplémentaire à nos discussions sur Frege (et Dedekind), en cherchant à montrer un aspect, à ma connaissance méconnu ou du moins mésestimé, de la définition des *Anzahlen*² que Frege avance dans les *Grundgesetze*, et d'en tirer quelques conséquences plus générales quant à la nature de son système formel, ou plutôt à la manière dont on doit le comprendre.

On a plusieurs fois observé que le système formel de Frege est en quelque sorte un système interprété, au sens où celui-ci assigne une signification invariante aux constantes fonctionnelles primitives qui y interviennent, et suppose que les quantificateurs, tant du premier que du second ordre, ont un domaine fixe et universel. Ceci implique que ses définitions et théorèmes sont censés avoir, à leur tour, une signification invariante. Il n'en reste pas moins que cette signification est redevable de la manière dont on conçoit les valeurs de vérité – qui pour Frege sont deux objets distingués et naturellement distincts entre eux, le Vrai et le Faux, que je dénoterai ici respectivement par '**T**' et '**F**' – et les *Werthverläufe* ou parcours de valeurs. Frege ne nous dit jamais explicitement ce qu'il entend par ces objets. Il se limite à stipuler (dans le § I.10) que les premiers comptent parmi les seconds, sans se préoccuper non plus de clarifier si l'on devrait ou pas admettre qu'il y existe des objets qui ne sont pas de parcours de valeurs. Ceci entraîne que la signification invariante que Frege semble assigner à ses définitions et théorèmes n'est pas, en fait, si précise que cela. Le but que je poursuis ici est d'illustrer ce flou, en me concentrant sur le système de définitions qui conduit à celle des *Anzahlen* et en montrant comme le flou soit particulièrement gênant dans le cas de cette dernière définition. En conclusion, j'envisagerai deux manières possibles de limiter ce flou.

Je ne sais pas si, en faisant ainsi, je vais apporter de l'eau au moulin de Frege, ou plutôt à celui de Dedekind, si effectivement opposition il y a. Tous ce que j'espère, et que je suis sûr que Hourya appréciera, si ma tentative réussit, est d'apporter de l'eau au moulin de la compréhension de l'œuvre du premier (et, peut-être, par comparaison, aussi du second). Pour ce faire, je serai contraint d'entrer dans des détails techniques, car l'aspect en question tient justement à ces détails. Je sais que Hourya sera contente de suivre le fil d'un raisonnement concernant des détails,

¹ (Benis-Sinaceur, Panza et Sandu, 2015)

² Je ne vais pas traduire le terme '*Anzahl*', employé par Frege, autant dans les *Grundgesetze* que dans les *Grundlagen*, car aucune traduction française possible ne me semble convenable. Il faut pourtant rappeler que les *Anzahlen* sont, pour Frege, une sorte de nombre qui inclue les nombres naturels, mais ne sont épuisés par ceux-ci. Plus précisément, Frege définit ces derniers comme les *Anzahlen* finis : ceux qui ont avec zéro l'ancestrale relation de successeur.

car il personne ne sait mieux qu'elle que c'est là qui se niche le diable. J'espère que le lecteur moins obsédé que nous deux par l'effort de le dénicher n'en sera pas trop désemparé.

2. Préliminaires

Soient Φ et Ψ des fonctions³ à un et deux arguments respectivement, Γ et Δ des objets quelconques, et **T** et **F** le Vrai et le Faux, comme je l'ai indiqué ci-dessus. Désignons par ' $\mathcal{E}\Phi$ ' et ' $\mathcal{E}\Psi$ ' les parcours de valeurs respectifs de Φ et Ψ (dits aussi 'extensions', si Φ est un concept et Ψ une relation au sens de Frege⁴).

Pour abrégé, écrivons

$\mathcal{C}_\Phi\Gamma$ pour ' $\Phi(\Gamma) = \mathbf{T}$ '

et

$\Gamma\mathcal{R}_\Psi\Delta$ pour ' $\Psi(\Gamma, \Delta) = \mathbf{T}$ '.

Il s'en suit que ' \mathcal{C}_Φ ' et ' \mathcal{R}_Ψ ' dénotent respectivement le concept 'argument pour lequel $\Phi(\xi)$ prend la valeur **T**' et la relation 'couple d'arguments pour lesquels $\Psi(\xi, \zeta)$ prend la valeur **T**'. Si Φ est un concept et Ψ une relation, ' $\mathcal{C}_\Phi\Gamma$ ' et ' $\Gamma\mathcal{R}_\Psi\Delta$ ' sont simplement des réécritures pour ' $\Phi(\Gamma)$ ' et ' $\Psi(\Gamma, \Delta)$ '. Mais si Φ n'est pas un concept et Ψ n'est pas une relation, alors ' $\mathcal{C}_\Phi\Gamma$ ' et ' $\Gamma\mathcal{R}_\Psi\Delta$ ' ont, respectivement, une signification différente de ' $\Phi(\Gamma)$ ' et ' $\Psi(\Gamma, \Delta)$ '. D'une part, soit ' $\mathcal{C}_\Phi\Gamma$ ' et ' $\Gamma\mathcal{R}_\Psi\Delta$ ' dénotent respectivement la même valeur de vérité que ' $\Phi(\Gamma)$ ' et ' $\Psi(\Gamma, \Delta)$ ' mais ont un sens différent, car alors que les premiers la dénotent comme valeur de la fonction $\xi = \zeta$, les secondes la dénotent comme valeur des fonctions Φ et Ψ respectivement. Soit, d'autre part, les premiers dénotent une valeur de vérité (comme valeur de la fonction $\xi = \zeta$), et les seconds dénotent la valeur des fonctions Φ avec Γ comme argument et celle de la fonction Ψ avec Γ et Δ comme arguments, valeurs qui peuvent bien être des valeurs de vérité, mais également n'importe quel autre objet.

Pour tout objet Λ , soit $\Lambda_{1,n}^F$ la fonction constante à n arguments ($n = 1, 2, \dots$) définie en posant

³ Frege distingue les fonctions selon leurs niveaux : les arguments d'un fonction de premier niveau sont des objets, ceux d'une fonction de deuxième niveau sont des fonctions de premier niveau, et ainsi de suite. Ici, il ne sera pourtant question que de fonctions de premier niveau. Pour abrégé, on parlera, donc, simplement de fonctions pour se référer invariablement à des fonctions de premier niveau. Toujours pour abrégé, on se permettra aussi, sauf que quand ceci pourrait engendrer une confusion, de noter des fonctions sans faire apparaître les places (vides) destinées à être remplies par les arguments, c'est-à-dire, par exemple, comme ici, par ' Φ ' et ' Ψ ', plutôt que par ' $\Phi(\xi)$ ' et ' $\Psi(\xi, \zeta)$ ', à la manière de Frege. Rappelons que le rôle de ' ξ ' et ' ζ ' dans le système de Frege est de garder des places libres dans une expression pour les noms d'objets jouant le rôle d'arguments de la fonction de premier niveau dont cette expression est à son tour le nom. Si elles sont remplacées par de tels noms, l'expression en question se transforme alors dans le nom de la valeur de la fonction avec ces objets comme arguments. Dans l'allemand de Frege (§ I.1), ' ξ ' et ' ζ ' sont ainsi des *Offenhalten*, des teneurs de place, ce qui est très différent des variables, selon notre conception usuelle. Ceci fait que ' ξ ' et ' ζ ' ne peuvent en aucun cas être conçues comme des variables au sens moderne. Par exemple, pour Frege, cela n'aurait aucun sens d'écrire une identité telle ' $\zeta = \Phi(\xi)$ ', ou plus généralement, ' $\Phi(\xi) = \tilde{\Phi}(\zeta)$ ' (où Φ et $\tilde{\Phi}$ sont deux fonctions à un argument), car, pour lui, l'identité n'est qu'une relation entre objets, et $\Phi(\xi)$ et $\tilde{\Phi}(\zeta)$, ne sont pas des objets, mais des fonctions. La notion moderne de variable est même absente de l'horizon conceptuel Frege. Même si l'on a souvent rapproché ses lettres latines des variables au sens moderne, je ne crois pas que ce soit correct ; la question, cependant n'est pas tellement pertinente pour les arguments avancés ici, car il ne sera jamais question dans ce qui suit de l'usage de ces lettres fait par Frege. On pourrait tout au plus soutenir que dans l'exposition de son système (la première partie des *Grundgesetze*), il fait usage de méta-variables au sens moderne, données par des lettre grecques majuscules, telles ' Γ ', ' Δ ', ' Θ ', ' Λ ', ... pour des objets, et ' Φ ', ' Ψ ' et ' Υ ', ... pour des fonctions. Je ne discuterai pas ici cette question, et en particulier si ces lettres fonctionnent comme des méta-variables ou comme des lettres schématiques, au sens moderne, ou d'une autre manière encore. Je me limiterai à les employer en accord à l'usage qu'en fait Frege (comme j'ai déjà fait ci-dessus).

⁴ C'est-à-dire des fonctions à un et deux arguments, respectivement, dont toutes les valeurs sont des valeurs de vérités.

$$\Lambda_{1,n}^F(\Gamma_1, \dots, \Gamma_n) = \Lambda,$$

pour tout n -uplet d'objets $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$, c'est-à-dire la fonction à n arguments prenant la valeur Λ pour n'importe quel n -uplet d'arguments.

Une fonction coïncidant extensionnellement avec une telle fonction constante a une place parfaitement reconnue dans le système de Frege. Il s'agit du concept $[x : x \neq x]$ (dans la notation usuelle de la logique des prédicats) coïncidant extensionnellement avec $\mathbf{F}_{1,1}^F$. Dénotons par ' \emptyset ' son parcours de valeurs, c'est-à-dire, stipulons que :

$$\emptyset =_{df} \mathcal{E}\mathbf{F}_{1,1}^F = \mathcal{E}[x : x \neq x].$$

D'autres fonctions constantes sont faciles à définir dans ce système. Un exemple immédiat est celui du concept $[x : x = x]$ (encore dans la notation de la logique des prédicats), qui coïncide extensionnellement avec $\mathbf{T}_{1,1}^F$. Dénotons son parcours de valeurs par '@', c'est-à-dire, stipulons que :

$$@ =_{df} \mathcal{E}\mathbf{T}_{1,1}^F = \mathcal{E}[x : x = x].$$

D'autres fonctions comme $\Lambda_{1,n}^F$ pour lesquelles Λ n'est pas une valeur de vérité n'apparaissent pas immédiatement à la surface de ce système. Mais comme nous le montrerons ci-dessous, elles doivent être admises si l'on admet qu'il y a des objets autres que des parcours de valeurs.

Le fait de faire ou de ne pas faire cette admission va jouer un rôle crucial dans ce qui suit. Il est, donc, important d'en clarifier la nature et les implications.

Observons, d'abord, que dans le cadre des *Grundgesetze*, tout parcours de valeurs est le parcours de valeurs d'une fonction de premier niveau à un argument. D'une part, le parcours de valeurs d'une fonction de premier niveau à plusieurs arguments est défini (dans le § I.36) comme étant le parcours de valeurs d'une fonction à un argument qui lui est associée de manière standard. D'autre part, les parcours de valeurs de fonctions de niveau supérieur⁵ ne sont simplement pas définis, même s'il serait possible de les penser comme les parcours des valeurs des fonctions de premier niveau représentant ces fonctions.

Bien que le mécanisme permettant à des fonctions de premier niveau de représenter des fonctions de niveau supérieur dépende de la fonction $\xi - \zeta$, dont il sera largement question dans ce qui suit, rien de ce que je dirai ne dépendra de la possibilité de penser (ou même de traiter) les parcours de valeurs des fonctions de niveau supérieur comme des parcours des valeurs des fonctions de premier niveau. Il suffira, donc, ici, de se concentrer sur le premier point.

Pour n'importe quelle fonction à deux arguments $\Psi = \Psi(\xi, \zeta)$, soit $\mathcal{E}_\varepsilon\Psi(\varepsilon, \zeta)$ (aussi désignée par ' $\mathcal{E}_\alpha\Psi(\alpha, \zeta)$ ') la fonction à un argument obtenue en prenant le parcours de valeurs de $\Psi(\xi, \zeta)$ relativement à l'argument ξ seulement, et $\mathcal{E}_\xi\Psi(\xi, \varepsilon)$ (aussi désignée par ' $\mathcal{E}_\alpha\Psi(\xi, \alpha)$ ') la fonction à un argument obtenue en prenant le parcours de valeurs de $\Psi(\xi, \zeta)$ relativement à l'argument ζ seulement. Le parcours de valeurs $\mathcal{E}\Psi$ de $\Psi(\xi, \zeta)$ est le parcours de valeurs de $\mathcal{E}_\varepsilon\Psi(\varepsilon, \zeta)$, c'est-à-dire $\mathcal{E}_\alpha[\mathcal{E}_\varepsilon\Psi(\varepsilon, \alpha)]$ (aussi désigné par ' $\mathcal{E}_\varepsilon[\mathcal{E}_\alpha\Psi(\alpha, \varepsilon)]$ '), et il est, de ce fait, un double parcours de valeurs⁶. Ceci implique que tout parcours de valeurs est, par définition, le parcours de valeurs d'une fonction à un argument, et que certains d'entre eux, mais pas nécessairement tous, sont

⁵ Voir la note 1 p. 3, ci-dessus.

⁶ Pour simplifier, j'adopte ici la terminologie de Frege et j'appelle « double » le parcours de valeurs d'une fonction à deux arguments – qui sera, aussi, comme je suis en train de l'expliquer, le parcours de valeurs d'une (autre) fonction à un argument – et « simple » le parcours de valeurs d'une fonction à un argument qui n'est pas (on n'est pas censé être) en même temps le parcours de valeurs d'une fonction à deux arguments.

aussi les parcours de valeurs d'une fonction à deux (ou, par répétition, plusieurs) arguments⁷. Dans la suite, on parlera, donc, de manière générale, de parcours de valeurs pour se référer aux parcours de valeurs d'une fonction à un argument (en ne spécifiant ce point que lorsque cela est nécessaire), indépendamment du fait que ce parcours de valeurs soit ou ne soit pas aussi parcours de valeurs d'une fonction à deux (ou plusieurs) arguments. En revanche, on parlera de parcours de valeurs d'une fonction à deux arguments (le cas des fonctions à plus de deux arguments ne fera l'objet d'aucune considération) pour se référer au parcours de valeurs d'une fonction à un argument qui est aussi le parcours de valeurs d'une fonction à deux arguments.

Observons de plus que pour Frege toute fonction est conçue comme étant totale, ce qui implique que, pour n'importe quelle fonction, on peut quantifier sur ses valeurs en quantifiant sur (tous) les objets. En d'autres termes, si Φ est n'importe quelle fonction à un argument, et Ψ n'importe quelle fonction à deux arguments, dire que (toutes) leurs valeurs sont ainsi et ainsi est équivalent à dire que pour n'importe quel objet Γ , $\Phi(\Gamma)$ est ainsi et ainsi, et, pour n'importe quel couple d'objets (Γ, Δ) , $\Psi(\Gamma, \Delta)$ est ainsi et ainsi. Toute valeur d'une fonction quelconque est de surcroît un objet pour Frege (et ceci quel que soit le niveau de la fonction), ce qui implique que ce qui vaut pour tout objet vaut aussi pour toute valeur de toute fonction.

Ceci ayant été précisé, considérons les assertions suivantes, concernant l'existence d'objets autres que des parcours de valeurs (où ' x ', ' z ', ' f ' et ' g ' sont employés, par simplicité, comme des variables au sens moderne, les deux premières variant sur des objets, et les deux suivants sur des fonctions à un argument) :

- (a) 'Tout objet est un parcours de valeurs', ou ' $\forall x \exists g [x = \mathcal{E}g]$ ' ;
- (-a) 'Certains objets ne sont pas des parcours de valeurs', ou ' $\exists x \forall g [x \neq \mathcal{E}g]$ ' ;
- (d) 'Toute valeur de toute fonction à un argument est un parcours de valeurs', ou ' $\forall g \forall x \exists f [g(x) = \mathcal{E}f]$ ' ;
- (-d) 'Certains valeurs de certaines fonctions à un argument ne sont pas des parcours de valeurs', ou ' $\exists g \exists x \forall f [g(x) \neq \mathcal{E}f]$ ' ;
- (e) 'Certaines valeurs de toute fonction à un argument sont des parcours de valeurs', ou ' $\forall g \exists x \exists f [g(x) = \mathcal{E}f]$ ' ;
- (-e) 'Aucune valeur de certaines fonctions à un argument n'est un parcours de valeurs', ou ' $\exists g \forall x \forall f [g(x) \neq \mathcal{E}f]$ ' ;
- (d) 'Toute fonction à un argument est telle que ses valeurs sont toutes des parcours de valeurs ou aucune ne l'est', ou ' $\forall g [\forall x \exists f [g(x) = \mathcal{E}f] \vee \forall x \forall f [g(x) \neq \mathcal{E}f]]$ ' ;
- (-d) 'Certaines valeurs de certaines fonctions sont des parcours de valeurs et d'autres ne le sont pas', ou ' $\exists g [\exists x \forall f [g(x) \neq \mathcal{E}f] \wedge \exists x \exists f [g(x) = \mathcal{E}f]]$ ' ;
- (e) 'Tout objet est la valeur d'une fonction à un argument', ou ' $\forall x \exists g \exists z [x = g(z)]$ ' ;
- (f) 'Il existe des fonctions à un argument telles que tout objet est un de leurs valeurs', ou ' $\exists g \forall x \exists z [x = g(z)]$ ' ;
- (g) 'Il existe une fonction à un argument telle que tout objet est sa valeur pour ce même objet comme argument', ou ' $\exists g \forall x [x = g(x)]$ ' .

⁷ Voir la note (15), ci-dessous.

Il est clair que $a \Rightarrow b$, et donc $\neg b \Rightarrow \neg a$; et que $c \Rightarrow (b \Rightarrow a)$, $b \Rightarrow c$ et $d \Rightarrow b$, et donc $d \Rightarrow (b \Rightarrow a)$. Il s'ensuit, en admettant d , que $a \Leftrightarrow b$. Il convient donc de se demander si d doit être admise. Il me semble que la réponse tient à une règle non restreinte de substitution que Frege applique tout au long des déductions au sein de son système formel, et qui est équivalente à un schéma d'axiomes de compréhension pleine pour les fonctions. Dans le cas de fonctions à un argument, ce schéma revient à:

$$\exists g \forall x [g(x) = \mathcal{A}(x)],$$

où ' $\mathcal{A}(x)$ ' est n'importe quelle formule du langage du système ouverte en la variable ' x '. Or, une instance fort simple de ce schéma est la suivante :

$$\exists g \forall x [g(x) = x],$$

qui autorise l'introduction de la fonction identité à un argument, définie par

$$\forall x [I(x) = x].$$

Il suffit, alors, d'admettre, en accord avec Frege, que tout nom bien formé de fonction dénote une fonction, pour en tirer une preuve de d . Si cet argument est accepté, on doit donc en conclure que, pour Frege, $a \Leftrightarrow b$, et donc $\neg a \Leftrightarrow \neg b$.

Par ailleurs, pourvu qu'il y ait des objets et des fonctions à un argument, ce qui pour Frege est certainement le cas (comme on vient de le voir dans le cas des secondes, et comme il suit de la supposition que **T** et **F** sont des objets dans le cas des premiers), on a $\neg c \Rightarrow \neg b$, et, donc, $\neg c \Rightarrow \neg a$ et $a \Rightarrow c$.

De plus, il est clair que $a \Rightarrow d$, et, donc, $\neg d \Rightarrow \neg a$, et que $(c \wedge d) \Rightarrow b$, de sorte que, pourvu qu'il y ait des objets et des fonctions à un argument, $d \Rightarrow (b \Leftrightarrow c)$, et donc $d \Rightarrow (a \Leftrightarrow c)$, $(c \wedge \neg a) \Rightarrow \neg d$ et $(\neg a \wedge d) \Rightarrow \neg c$.

Comme rien ne permet, en revanche, de prouver a (et donc b), c et d , de même que leurs négations, je raisonnerai dans la suite de manière conditionnelle, en supposant dans un premier cas respectivement a (et donc b , c et d) ou $\neg a$ (et donc $\neg b$)⁸, et, dans un second cas, c (et donc $\neg d$) ou $\neg c$, et en supposant d (et donc $\neg c$), ou $\neg d$.

3. Les fonctions $\xi \dashv \zeta$ et $\xi \dashv \Theta$ et le concept $_ \xi \dashv \Theta$

Parmi les fonctions primitives du système de Frege, il y a la fonction $\backslash \xi$. Celle-ci est informellement définie dans le § I.11, en stipulant que, pour n'importe quels objets Γ et Δ ,

$$\begin{aligned} \exists z [\mathcal{E}[x : x = z] = \Gamma \wedge z = \Delta] &\Rightarrow \backslash \Gamma =_{df} \Delta \\ \neg \exists z [\mathcal{E}[x : x = z] = \Gamma] &\Rightarrow \backslash \Gamma =_{df} \Gamma \end{aligned} \quad (1)$$

La première clause de cette stipulation n'est pas ambiguë, car, conformément à la Loi Fondamentale V (ou LFV),

$$\exists z [\mathcal{E}[x : x = z] = \Gamma] \Leftrightarrow \exists ! z [\mathcal{E}[x : x = z] = \Gamma].$$

⁸ Il est clair que si l'argument précédent concernant f est rejeté, alors l'équivalence de a et de b n'est plus prouvée, ce qui mène à une augmentation des cas possibles. On ne devrait pas avoir, pourtant, de difficultés à traiter les nouveaux cas générés en analogie à ceux que je vais considérer.

Cela entraîne que, prise ensembles, les deux clauses fixent la valeur de la fonction $\setminus \xi$ pour n'importe quel argument.

Ceci autorise Frege à employer cette fonction pour définir la plus fondamentale de ces fonctions non primitives : la fonction (à deux arguments) $\xi \frown \zeta$. Ceci est fait dans le § I.34, où il est établi que :

$$\forall x, y \left[x \frown y =_{df} \setminus \mathcal{E} \left[z : \exists g [y = \mathcal{E}g \wedge g(x) = z] \right] \right], \quad (2)$$

où 'x', 'y', 'z' varient sur les objets et 'g' sur les fonctions à un argument.

Pour n'importe quelle telle fonction Φ , en n'importe quel objet Γ , de (1) et (2), il suit que :

$$\Gamma \frown \mathcal{E}\Phi = \setminus \mathcal{E} \left[x : \exists g [\mathcal{E}\Phi = \mathcal{E}g \wedge g(\Gamma) = x] \right] = \setminus \mathcal{E} [x : x = \Phi(\Gamma)] = \Phi(\Gamma). \quad (3)$$

Sous la condition \mathfrak{a} , ceci épuise tous les cas possibles.

En revanche, sous la condition $\neg \mathfrak{a}$, on peut imaginer que le ζ -argument de cette fonction soit donné par un objet autre qu'un parcours de valeurs, disons Θ^\odot . De (1)⁹ et (2), il suit alors que¹⁰ :

$$\Gamma \frown \Theta^\odot = \setminus \mathcal{E} \left[x : \exists g [\Theta^\odot = \mathcal{E}g \wedge g(\Gamma) = x] \right] = \setminus (\mathcal{E}\mathbf{F}_{1,1}^f) = \setminus \emptyset = \emptyset. \quad (4)$$

De cela, on tire les conclusions suivantes :

1. $\xi \frown \Theta$ est une fonction à un argument, en particulier la fonction

$$\setminus \mathcal{E} \left[x : \exists g [\Theta = \mathcal{E}g \wedge g(\xi) = x] \right].$$

Donc :

- (a) Si $\Theta = \mathcal{E}\Phi$ pour n'importe quelle fonction à un argument Φ , alors $\xi \frown \Theta$ est la même fonction que Φ , ce qui fait que $\xi \frown \mathcal{E}\Phi$ coïncide (du moins extensionnellement si ce n'est aussi intensionnellement) avec Φ .

Sous la condition \mathfrak{a} , aucun autre cas ne doit être considéré. Sous la condition $\neg \mathfrak{a}$, un autre cas est possible :

- (b) Il se peut que $\Theta = \Theta^\odot$, pour n'importe quel objet Θ^\odot autre qu'un parcours de valeurs, ce qui fait que $\xi \frown \Theta$ se réduit à la fonction constante $\emptyset_{1,1}^f$.

Il s'ensuit que considérer que $\xi \frown \Theta$ est une fonction bien formée quel que soit l'objet Θ , et admettre $\neg \mathfrak{a}$ nous force à admettre une fonction constante comme cette dernière. (Remarquons qu'il serait inapproprié de dénoter une telle fonction par ' $\xi \frown \Theta^\odot$ ', puisqu'elle est parfaitement indépendante de Θ^\odot , pourvu seulement que cet objet ne soit pas un parcours de valeurs.)

⁹ Il est facile de voir que la dérivation dépend de la seconde clause de (1). Dans la suite, je considérerai la possibilité de rechasser cette seconde clause tout en gardant la première, ce qui porterait à une conclusion différente de (4). Pour éviter toute confusion entre les cas où cette clause est admise et ceux où elle ne l'est pas, il convient de préciser que par la suite je raisonnerai par défaut en supposant que cette clause est admise, en signalant explicitement les cas où je raisonnerai, par contre, avec l'hypothèse opposée.

¹⁰ On observe facilement que de (1), il s'ensuit que

$$\setminus \mathcal{E} \left[x : \exists g [\Theta^\odot = \mathcal{E}g \wedge g(\Gamma) = x] \right] = \mathcal{E} \left[x : \exists g [\Theta^\odot = \mathcal{E}g \wedge g(\Gamma) = x] \right],$$

mais non que

$$\setminus \mathcal{E} [x : \exists g [\mathcal{E}\Phi = \mathcal{E}g \wedge g(\Gamma) = x]] = \mathcal{E} [x : \exists g [\mathcal{E}\Phi = \mathcal{E}g \wedge g(\Gamma) = x]],$$

qui n'est valide que si l'on admet que $\mathcal{E} [x : x = \Phi(\Gamma)] = \Phi(\Gamma)$, ce que Frege ne peut que rejeter dans le cas où $\Phi(\Gamma)$ est le parcours de valeurs d'une fonction autre qu'un concept sous lequel tombe un seul objet. En effet, comme il le montre dans le § I.10 (seconde note de bas de page), ceci contredirait LFV. En général, il n'est donc pas autorisé d'égaliser $\Gamma \frown \Theta$ avec $\mathcal{E} [x : \exists g [\Theta = \mathcal{E}g \wedge g(\Gamma) = x]]$, même si cela est permis dans certains cas.

2. $_ \xi \text{ — } \Theta$ (ou $_ \xi$ est la fonction horizontale définie par Frege dans le § I.4) est un concept, en particulier le concept

$$_ \backslash \mathcal{E} \left[x : \exists g [\Theta = \mathcal{E}g \wedge g(\xi) = x] \right]. \quad (5)$$

Donc :

- (a) Si $\Theta = \mathcal{E}\Phi$ pour n'importe quelle fonction Φ à un argument, alors $_ \xi \text{ — } \Theta$ est le même concept que $_ \Phi(\xi)$, ce qui entraîne que $_ \xi \text{ — } \mathcal{E}\Phi$ coïncide (du moins extensionnellement si ce n'est aussi intensionnellement) avec \mathfrak{C}_Φ .

Sous la condition \mathfrak{a} , aucun autre cas ne doit être considéré. Sous la condition $\neg \mathfrak{a}$, un autre cas est possible :

- (b) Il se peut que $\Theta = \Theta^\odot$ pour n'importe quel objet Θ^\odot autre qu'un parcours de valeurs, ce qui entraîne que $_ \xi \text{ — } \Theta$ se réduit au concept constant $_ \emptyset_{1,1}^F$ ou $\mathbf{F}_{1,1}^F$.

Il s'ensuit qu'autant sous la condition \mathfrak{a} que sous la condition $\neg \mathfrak{a}$:

- le concept $_ \xi \text{ — } \Theta$ prend la valeur \mathbf{T} pour un argument Γ si et seulement si Θ est le parcours de valeurs d'une fonction à un argument Φ telle que $\Phi(\Gamma) = \mathbf{T}$.

Dans les deux cas, ce concept est, alors, le même que

$$\left[x : \exists g [\Theta = \mathcal{E}g \wedge \mathfrak{C}_g x] \right]. \quad (6)$$

Pour abrégé, dénotons-le par ' \mathfrak{T}_Θ '¹¹.

Ceci étant dit, revenons aux stipulations (1) et (2) pour observer une différence cruciale entre elles. Alors que la seconde consiste en une définition (explicite) intégrée au système formel de Frege (c'est-à-dire la définition (A) du § I.34 et de la section 2 de l'*Anhång* au vol. I), la première consiste en une définition (toujours explicite) informelle ne faisant partie que de « l'exposition [*Darlegung*] » préliminaire de ce système, et n'est reflétée, dans ce système, que par la Loi fondamentale VI,

$$\vdash \mathfrak{a} = \backslash \dot{\mathcal{E}}(\mathfrak{a} = \varepsilon)$$

ou (dans le langage que l'on a adopté)

$$\forall x \left[x = \backslash \mathcal{E} [z : z = x] \right],$$

qui ne fait cependant que refléter la première de ses deux clauses.

Or cette clause et donc cette loi ne concernent que le cas où l'argument de la fonction $\backslash \xi$ est le parcours de valeurs d'un concept sous lequel tombe un seul objet. Il s'ensuit que, même si on admet la condition \mathfrak{a} , le système formel de Frege n'inclut aucune indication au sujet de la manière de comprendre la fonction $\backslash \xi$ dans toute sa généralité, à moins que l'on admette également que tout parcours de valeurs se réduise, d'une manière ou d'une autre, au parcours de valeurs d'un concept sous lequel ne tombe qu'un seul objet (ce qui, à la lumière de la seconde des deux notes de bas de page du § I.10¹² semble difficile à faire de manière appropriée). Il reste, toutefois, que sous la condition \mathfrak{a} , cette indétermination ne concerne pas la fonction $\xi \text{ — } \Theta$, puisque, comme montré par (3), déterminer les valeurs de cette fonction pour $\Theta = \mathcal{E}\Phi$ (indépendamment du fait que Φ soit ou pas un concept sous lequel tombe un objet) dépend seulement de la première clause

¹¹ La différence entre les deux cas (où les conditions \mathfrak{a} et $\neg \mathfrak{a}$ sont respectivement admises) ne tient pas à la nature qu'il faut assigner à ce concept, mais aux conditions qui font qu'un objet tombe sous lui, ou, plus précisément, aux conditions sous lesquelles Θ est un parcours de valeurs

¹² Voir la note (10), ci-dessus.

de la stipulation (1). Avec la condition $\neg a$, les valeurs de cette fonction restent, en revanche, indécidables dans ce système, à moins qu'il soit établi que Θ est un parcours de valeurs. En effet, comme cela est montré par (4), si ce dernier objet n'était pas un parcours de valeurs, la réduction de cette fonction à la fonction constante $\emptyset_{1,1}^F$ dépendrait de la seconde clause de (1), en l'absence de laquelle tout ce qui peut être dit sur elle est que $\xi \sim \Theta^\odot$ se réduit à $\setminus \emptyset_{1,1}^F$, sans avoir aucune manière d'établir la valeur constante prise par cette fonction pour tout argument : tout ce qu'on peut dire est que cette valeurs est celle prise par de la fonction $\setminus \xi$ pour l'argument \emptyset .

Les choses ne vont pas mieux pour le concept $_ \xi \sim \Theta$. Car le fait de comprendre ce concept comme étant le concept \mathfrak{T}_Θ dépend de la seconde clause de la stipulation (1). En l'absence de cette clause, et en supposant, sous la condition $\neg a$, que Θ n'est pas un parcours de valeurs, on peut seulement conclure que ce concept se réduit à $_ \setminus \emptyset_{1,1}^F$, en n'ayant, à nouveau, aucune manière d'établir la valeur constante prise par cette fonction pour tout argument : tout ce qu'on peut dire est, à nouveau, que cette valeurs est celle prise par la fonction $_ \xi$ pour l'argument $\setminus \emptyset$. Il serait donc suffisant de concéder que $\setminus \emptyset = \mathbf{T}$ pour en conclure que

$$_ \Gamma \sim \Theta^\odot = _ \setminus \emptyset = _ \mathbf{T} = \mathbf{T}$$

et s'empêcher de conclure que le concept $_ \xi \sim \Theta$ prend la valeur \mathbf{T} pour un certain argument Γ si et seulement si Θ est le parcours de valeurs d'une certaine fonction à un argument Φ , telle que $\Phi(\Gamma) = \mathbf{T}$ et, donc, de regarder ce concept comme étant le même concept que \mathfrak{T}_Θ quel que soit l'objet Θ . Ainsi, en tant que tel, le système formel de Frege n'inclut aucune indication non équivoque pour comprendre la fonction $_ \xi \sim \Theta^{13}$. Concevoir ce concept comme étant le même concept que \mathfrak{T}_Θ dépend, donc :

- i) soit de l'adoption de la seconde clause de la stipulation (1) ;
- ii) soit de l'admission de la condition a ;
- iii) soit, encore, du rejet de la possibilité que $\setminus \emptyset = \mathbf{T}$.

Bien que Frege aurait pu accepter la première et la dernière de ces options – si ce n'est également la seconde – il n'en reste pas moins que son système formel n'a aucune juridiction sur ceci¹⁴.

On pourrait soutenir que cela n'est pas problématique du point de vue adopté par Frege. En effet, il ne serait nullement plausible de penser que Frege visait un système complet (au sens d'un système apte à prouver tous les énoncés formulés dans son langage, dont la vérité résulte des stipulations adoptées dans son « exposition » préliminaire concernant ses fonctions fondamentales). Frege semble aussi n'avoir que cherché à munir ce système du strict nécessaire pour démontrer ce qu'il entendait démontrer conformément à ses buts fondationnels. On pourrait

¹³ Est-ce qui est impliqué par Frege dans la note de bas de page qu'il ajoute au commentaire suivant la définition (A), dans l'*Anhäng* du premier volume? Dans ce commentaire, Frege présente cette définition comme celle de la « relation d'un objet tombant sous l'extension d'un concept ». Puis, dans la note, il observe : « ces indications rapides en mot que j'ai dû ajouter aux définitions de la *Begriffsschrift* ne sont pas exhaustives et n'on pas la prétention de la plus grande précision [*machen keinen Anspruch auf strengste Genauigkeit*] ».

¹⁴ On pourrait espérer qu'il y ait manière d'écarter la possibilité que $\setminus \emptyset = \mathbf{T}$, en montrant que ceci conduit à une contradiction (naturellement de manière indépendante du fait que ceci est le cas pour LFV). Un argument astucieux pour montrer ceci m'a été suggéré par Joan Bertran-San Millán. En accord avec la stipulation que Frege fait dans le § I.10, $\mathbf{T} = \mathcal{E}[z : z = \mathbf{T}]$, et, donc, d'après LFV, $\mathbf{T} \neq \emptyset$. Il s'ensuit que si $\setminus \emptyset = \mathbf{T}$, alors, $\setminus \emptyset \neq \emptyset$. Donc la valeur de $\setminus \emptyset$ n'est pas établie an accord à la seconde clause de (1) et il le sera, en conséquence, en accord à la première, ce qui fait que

$$\exists z[\mathcal{E}[x : x = z] = \emptyset \wedge z = \setminus \emptyset = \mathbf{T}],$$

et, donc,

$$\mathcal{E}[x : x = \mathbf{T}] = \emptyset,$$

ce qui contredit LFV. L'argument est correct, mais s'appelle à deux stipulations externes au système formel de Frege : celle du § I.10 à propos de \mathbf{T} , et la (1) prise dans son ensemble.

donc dire que si la seconde clause de (1) n'est pas reflétée dans ce système, c'est simplement parce qu'il n'y a aucun besoin d'y dériver des théorèmes en employant un corrélat formel de celle-ci. Cet argument est convaincant. Mais pris tel quel, il n'est pas conclusif. Car l'absence d'un tel corrélat ne nous empêche pas seulement de dériver dans le système des énoncés vrais en vertu de cette clause, mais aussi, sous la condition $\neg a$, d'identifier la signification qu'il faut assigner aux fonctions $\xi \dashv \Theta$ et $_ \xi \dashv \Theta$, et donc à toutes les définitions et théorèmes les impliquant, en restant à l'intérieur de ce système, c'est-à-dire, si on me permet de m'exprimer ainsi, de fixer la sémantique informelle intrinsèque à un tel système. Or, c'est justement de cette sémantique dont il est ici question. Le problème est donc celui de savoir si une telle absence a ou n'a pas de conséquences significatives. Comme la question ne peut pas être décidée *a priori*, je vais traiter dans la suite autant le cas où la seconde clause de (1) est adoptée, que celui où elle ne l'est pas, en me réservant d'évaluer à la fin les conséquences à tirer dans les deux.

4. Les fonctions $\xi \dashv (\zeta \dashv \Theta)$ et $_ \xi \dashv (\zeta \dashv \Theta)$ et la relation $_ \xi \dashv (\zeta \dashv \Theta)$

Comme Frege l'explique dans le § I.36, de (2) il suit également que, pour n'importe quels objets Γ , Δ et Θ ,

$$\begin{aligned} \Gamma \dashv (\Delta \dashv \Theta) &= \setminus \mathcal{E} \left[x : \exists g [\Delta \dashv \Theta = \mathcal{E}g \wedge g(\Gamma) = x] \right] \\ &= \setminus \mathcal{E} \left[x : \exists g \left[\setminus \mathcal{E} \left[z : \exists f [\Theta = \mathcal{E}f \wedge f(\Delta) = z] \right] = \mathcal{E}g \wedge g(\Gamma) = x \right] \right] \end{aligned} \quad (7)$$

où ' f ', comme ' g ', varient sur les fonctions à un argument.

Donc, si Ψ est n'importe quelle fonction à deux arguments, de (1) il suit que :

$$\begin{aligned} \Gamma \dashv (\Delta \dashv \mathcal{E}\Psi) &= \Gamma \dashv (\Delta \dashv \mathcal{E}_\alpha [\mathcal{E}_\varepsilon \Psi(\varepsilon, \alpha)]) \\ &= \setminus \mathcal{E} \left[x : \exists g \left[\setminus \mathcal{E} \left[z : \exists f [\mathcal{E} [\mathcal{E}_\varepsilon \Psi(\varepsilon, \xi)] = \mathcal{E}f \wedge f(\Delta) = z] \right] = \mathcal{E}g \right] \right] \\ &\quad \wedge g(\Gamma) = x \\ &= \setminus \mathcal{E} \left[x : \exists g [\setminus \mathcal{E} [z : z = \mathcal{E}\Psi(\xi, \Delta)] = \mathcal{E}g \wedge g(\Gamma) = x] \right] \\ &= \setminus \mathcal{E} \left[x : \exists g [\mathcal{E}\Psi(\xi, \Delta) = \mathcal{E}g \wedge g(\Gamma) = x] \right] \\ &= \setminus \mathcal{E} [x : x = \Psi(\Gamma, \Delta)] \\ &= \Psi(\Gamma, \Delta). \end{aligned} \quad (8)$$

Si Φ est n'importe quelle fonction à un argument, de (1) il suivra, par contre, que :

$$\begin{aligned} \Gamma \dashv (\Delta \dashv \mathcal{E}\Phi) &= \setminus \mathcal{E} \left[x : \exists g [\setminus \mathcal{E} [z : \exists f [\mathcal{E}\Phi = \mathcal{E}f \wedge f(\Delta) = z]] = \mathcal{E}g \wedge g(\Gamma) = x] \right] \\ &= \setminus \mathcal{E} [x : \exists g [\setminus \mathcal{E} [z : z = \Phi(\Delta)] = \mathcal{E}g \wedge g(\Gamma) = x]] \\ &= \setminus \mathcal{E} [x : \exists g [\Phi(\Delta) = \mathcal{E}g \wedge g(\Gamma) = x]]. \end{aligned}$$

Une fois cela établi, la dérivation ne peut continuer qu'à condition d'avoir établi si $\Phi(\Delta)$ est ou n'est pas un parcours de valeurs.

Sous la condition a , il est certain que c'est le cas. Supposons alors que $\Phi(\Delta)$ soit le parcours de valeurs de la fonction (à un argument) $\tilde{\Phi}_\Delta$. On devra continuer de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
\Gamma \multimap (\Delta \multimap \mathcal{E}\Phi) &= \setminus \mathcal{E} \left[x : \exists g [\mathcal{E}\tilde{\Phi}_\Delta = \mathcal{E}g \wedge g(\Gamma) = x] \right] \\
&= \setminus \mathcal{E} [x : x = \tilde{\Phi}_\Delta(\Gamma)] \\
&= \tilde{\Phi}_\Delta(\Gamma).
\end{aligned} \tag{9}$$

Or, si la condition \mathfrak{a} est admise, la fonction Φ étant donnée, à n'importe quel objet Δ correspondra une fonction à un argument $\tilde{\Phi}_\Delta$ (qui dépend de Δ , de telle sorte que si Λ est un objet autre que Δ , la fonction $\tilde{\Phi}_\Lambda$ pourra être une fonction autre que $\tilde{\Phi}_\Delta$, et avoir, en particulier, un parcours de valeurs différent), telle que $\Phi(\Delta) = \mathcal{E}\tilde{\Phi}_\Delta$. Donc supposer que l'on a $\Phi(\Delta) = \mathcal{E}\tilde{\Phi}_\Delta = \mathcal{E}_\alpha \tilde{\Phi}_\Delta(\alpha)$ revient à poser $\Phi(\Delta) = \mathcal{E}_\alpha \Psi_{[\Phi]}(\alpha, \Delta)$ – où $\Psi_{[\Phi]}$ est une fonction à deux arguments telle que $\Phi(\zeta)$ est la même fonction (ou a du moins les mêmes valeurs pour les mêmes arguments) que $\mathcal{E}_\alpha \Psi_{[\Phi]}(\alpha, \zeta)$ – et, donc, $\mathcal{E}\Phi = \mathcal{E}_\varepsilon [\mathcal{E}_\alpha \Psi_{[\Phi]}(\alpha, \varepsilon)]$ ¹⁵. Ce premier cas se réduit alors au cas (8) par l'identification de Ψ avec $\Psi_{[\Phi]}$ ¹⁶.

Sous la condition $\neg \mathfrak{a}$, il n'est pas nécessaire que, la fonction Φ étant donnée, à n'importe quel objet Δ corresponde une fonction à un argument $\tilde{\Phi}_\Delta$, telle que $\Phi(\Delta) = \mathcal{E}\tilde{\Phi}_\Delta$.

Si l'on admet la condition $\neg \mathfrak{e}$, il est possible que Φ soit telle qu'aucun de ces valeurs ne soit un parcours de valeurs. Si c'est ainsi, quel que soit Δ , la dérivation devra continuer ainsi :

$$\begin{aligned}
\Gamma \multimap (\Delta \multimap \mathcal{E}\Phi) &= \setminus (\mathcal{E}\mathbf{F}_{1,1}^f) \\
&= \setminus \emptyset \\
&= \emptyset.
\end{aligned} \tag{10}$$

ce qui correspond à ce que Frege lui-même observe à la fin du § I.36¹⁷.

¹⁵ Le raisonnement peut naturellement être réitéré : sous la condition \mathfrak{a} , la fonction $\Psi_{[\Phi]}$ étant donnée, à n'importe quel couple d'objets (Γ, Δ) correspondra une fonction à deux arguments $\tilde{\Psi}_{[\Phi](\Gamma, \Delta)}$ (qui dépend de Γ et Δ), telle que $\Psi_{[\Phi]}(\Gamma, \Delta) = \mathcal{E}\tilde{\Psi}_{[\Phi](\Gamma, \Delta)} = \mathcal{E}_\alpha Y_{[\Psi_{[\Phi]}]}(\alpha, \Gamma, \Delta)$, où $Y_{[\Psi_{[\Phi]}]}$ est une fonction à trois arguments telle que $\Psi_{[\Phi]}(\zeta, \xi)$ est la même fonction que $\mathcal{E}_\alpha Y_{[\Psi_{[\Phi]}]}(\alpha, \zeta, \xi)$, et, donc, $\mathcal{E}\Psi_{[\Phi]} = \mathcal{E}_\eta [\mathcal{E}_\varepsilon [\mathcal{E}_\alpha Y_{[\Psi_{[\Phi]}]}(\alpha, \varepsilon, \eta)]]$. De même pour la fonction $Y_{[\Psi_{[\Phi]}]}$, et ainsi de suite. Il s'ensuit que, sous la condition \mathfrak{a} , tout parcours de valeurs est, en même temps, le parcours de valeurs d'une fonction à un, deux, ..., n arguments, pour n'importe quel nombre naturel n . L'on jugera si ceci est ou non une raison pour discréditer cette condition.

¹⁶ Car :

$$\begin{aligned}
\Gamma \multimap (\Delta \multimap \mathcal{E}_\varepsilon [\mathcal{E}_\alpha \Psi_{[\Phi]}(\alpha, \varepsilon)]) &= \setminus \mathcal{E} \left[x : \exists g \left[\setminus \mathcal{E} \left[z : \exists f [\mathcal{E}_\varepsilon [\mathcal{E}_\alpha \Psi_{[\Phi]}(\alpha, \varepsilon)] = \mathcal{E}f \wedge f(\Delta) = z] \right] = \mathcal{E}g \wedge g(\Gamma) = x \right] \right] \\
&= \setminus \mathcal{E} \left[x : \exists g \left[\setminus \mathcal{E} \left[z : z = [\mathcal{E}_\alpha \Psi_{[\Phi]}(\alpha, \Delta)] \right] = \mathcal{E}g \wedge g(\Gamma) = x \right] \right] \\
&= \setminus \mathcal{E} \left[x : \exists g [\mathcal{E}_\alpha \Psi_{[\Phi]}(\alpha, \Delta) = \mathcal{E}g \wedge g(\Gamma) = x] \right] \\
&= \setminus \mathcal{E} [x : x = \Psi_{[\Phi]}(\Gamma, \Delta)] \\
&= \Psi_{[\Phi]}(\Gamma, \Delta).
\end{aligned}$$

¹⁷ Pour être plus précis, Frege observe simplement que si Θ est un parcours de valeurs simple (plutôt que double), alors $\Delta \multimap \Theta$ n'est pas un parcours de valeurs, ce qui fait que $\Gamma \multimap (\Delta \multimap \Theta) = \emptyset$. Plus précisément, si Φ^\odot est une fonction dont aucune valeur n'est un parcours de valeurs et $\Lambda_{[\Phi, \Delta]}^\odot$ est l'objet autre qu'un parcours de valeurs qui en fournit la valeur pour l'argument Δ (ce qui revient à poser que $\Phi^\odot(\Delta) = \Lambda_{[\Phi, \Delta]}^\odot$), on aura que :

$$\begin{aligned}
\Gamma \multimap (\Delta \multimap \mathcal{E}\Phi^\odot) &= \setminus \mathcal{E} \left[x : \exists g \left[\setminus \mathcal{E} \left[z : \exists f [\mathcal{E}\Phi^\odot = \mathcal{E}f \wedge f(\Delta) = z] \right] = \mathcal{E}g \wedge g(\Gamma) = x \right] \right] \\
&= \setminus \mathcal{E} \left[x : \exists g [\setminus \mathcal{E} [z : z = \Lambda_{[\Phi, \Delta]}^\odot] = \mathcal{E}g \wedge g(\Gamma) = x] \right] \\
&= \setminus \mathcal{E} \left[x : \exists g [\Lambda_{[\Phi, \Delta]}^\odot = \mathcal{E}g \wedge g(\Gamma) = x] \right] \\
&= \setminus (\mathcal{E}\mathbf{F}_{1,1}^f) \\
&= \setminus \emptyset \\
&= \emptyset,
\end{aligned}$$

Si l'on admet, par contre, la condition ε , et, donc, la condition $\neg \varepsilon$, ou même seulement cette dernière condition, il est possible que Φ soit telle que certaines de ses valeurs soient des parcours de valeurs et d'autres ne le soient pas. Soit Φ^\odot une telle fonction, et supposons que $\Theta = \varepsilon\Phi^\odot$. On aura alors deux sous-cas. Si Δ est tel que $\Phi^\odot(\Delta)$ est un parcours de valeurs, on reviendra au premier des deux cas précédents, et on aura que $\Phi^\odot(\Delta) = \varepsilon\tilde{\Phi}_\Delta^\odot = \varepsilon_\alpha\tilde{\Phi}_\Delta^\odot(\alpha) = \varepsilon_\alpha\Psi_{[\Phi^\odot]}(\alpha, \Delta)$, où $\Psi_{[\Phi^\odot]}$ est une fonction à deux arguments telle que $\Phi^\odot(\zeta)$ est la même fonction que $\varepsilon_\alpha\Psi_{[\Phi^\odot]}(\alpha, \zeta)$, et, donc, $\varepsilon\Phi^\odot = \varepsilon_\varepsilon[\varepsilon_\alpha\Psi_{[\Phi^\odot]}(\alpha, \varepsilon)]$, ce qui nous conduit à nouveau au cas (8) par l'identification de Ψ avec $\Psi_{[\Phi^\odot]}$. En revanche, si Δ est tel que $\Phi^\odot(\Delta)$ n'est pas un parcours de valeurs, on reviendra au second des deux cas précédents, ce qui nous reconduit au cas (10)¹⁸.

Cette duplicité du cas où $\Theta = \varepsilon\Phi^\odot$ rend ce cas difficile à traiter à l'aide de la notion de fonction de Frege, car de la description que l'on vient d'en faire il devrait être clair que, même si la fonction Φ^\odot est totale – comme Frege le requiert pour toute fonction – cela ne peut pas être, par définition, le cas des fonctions $\Psi_{[\Phi^\odot]}(\xi, \zeta)$ et $\varepsilon_\alpha\Psi_{[\Phi^\odot]}(\alpha, \zeta)$. En effet, la première est définie en requérant que $\Phi^\odot(\zeta)$ soit la même fonction que la seconde, c'est-à-dire à condition que les valeurs de cette dernière fonction soient des parcours de valeurs, et, donc, seulement pour les ζ -arguments pour lesquels la valeur de cette fonction Φ^\odot est un parcours de valeurs. En employant la notion moderne de variable¹⁹, on pourrait dire que $\Psi_{[\Phi^\odot]}(y, x)$ et $\varepsilon_\alpha\Psi_{[\Phi^\odot]}(\alpha, x)$ sont définies par la condition $\Phi^\odot(x) = \varepsilon_\alpha\Psi_{[\Phi^\odot]}(\alpha, x)$, et, donc, seulement pour les valeurs de x pour lesquelles $\Phi^\odot(x)$ est un parcours de valeurs. Pourvu que, d'après Frege (comme je l'ai expliqué dans le §1), le parcours de valeurs de n'importe quelle fonction à deux variables $\Psi(\xi, \zeta)$ (ou double parcours de valeurs) ne soit rien d'autre que le parcours de valeurs d'une fonction à un seul argument $\varepsilon_\alpha\Psi(\alpha, \zeta)$ associée à $\Psi(\xi, \zeta)$, ceci a comme conséquence que, dans le cas en question, Θ (c'est-à-dire $\varepsilon\Phi^\odot$) devrait être considéré, en même temps, comme un double parcours de valeurs d'une fonction (à deux arguments) définie seulement, quant à son second argument, sur certains objets (ceux qui donnent les arguments pour lesquels la valeur de Φ^\odot est, à son tour, un parcours de valeurs), et comme un parcours de valeurs simple d'une (autre) fonction (à un argument) définie seulement pour les autres objets. Mais, pour Frege, un parcours de valeurs est un objet, et tout objet est, pour lui, complètement saturé, c'est-à-dire, en termes modernes, qu'il ne dépend d'aucune variable, et ne peut pas, de ce fait, changer de nature selon les valeurs prises par cette variable (ou, dans ses termes, selon les arguments de la fonction dont il est le parcours de valeurs).

Une manière de rendre compte de ce cas sans devoir abandonner cette idée fondamentale – ce qui mettrait en doute de manière radicale la distinction, qui pour Frege est absolument fondamentale et même fondatrice, entre objets et fonctions – est de distinguer nettement les deux sous-cas. C'est-à-dire, qu'il faut considérer que Θ puisse être deux objets distincts selon le choix de l'objet Δ , ou bien que la fonction Φ^\odot se scinde en deux fonctions partielles distinctes : la fonction $\varepsilon_\alpha\Psi_{[\Phi^\odot]}(\alpha, \zeta)$, qu'on pourra aussi noter ' Φ_ε^\odot ', définie sur certains objets, en particulier ceux pour lesquels on dira que lorsqu'ils sont arguments la valeur de la fonction Φ^\odot est un

¹⁸ Et donc à la dérivation détaillée dans la note (17), ci-dessus sous le remplacement de l'objet $\Lambda_{[\Phi, \Delta]}^\odot$ (autre qu'un parcours de valeurs) avec l'objet $\Lambda_{[\Phi^\odot, \Delta]}^\odot$ (autre qu'un parcours de valeurs), aussi.

¹⁹ Voir la note (3), ci-dessus.

parcours de valeurs, et une autre fonction, qu'on pourra noter ' Φ_{ξ}^{\odot} ', définie sur les autres objets, ceux pour lesquels on dira que lorsqu'ils sont arguments valeur de la fonction Φ^{\odot} n'est pas un parcours de valeurs. Dans le premier cas, Θ , c'est-à-dire $\mathcal{E}\Phi^{\odot}$, ou mieux Φ_{ξ}^{\odot} , sera un double parcours de valeurs (d'une fonction partielle à deux arguments) ; dans le second cas Θ , c'est-à-dire $\mathcal{E}\Phi^{\odot}$, ou mieux, $\mathcal{E}\Phi_{\xi}^{\odot}$, sera un parcours de valeurs simple (d'une fonction partielle à un argument). Autant dire que Θ est le parcours de valeurs de Φ^{\odot} , ou écrire l'identité ' $\Theta = \mathcal{E}\Phi^{\odot}$ ', que dire que la valeur de Φ^{\odot} est un parcours de valeurs pour certains arguments et ne l'est par d'autres, reviendrait alors à un abus de langage commode.

Ceci va aussi à l'encontre des conceptions de Frege, mais cela me semble le faire de manière, pour dire ainsi, moins radicale. C'est pourquoi je choisis ici cette option.

La possibilité de faire ce choix (si elle m'est accordée) n'anéantit pas le fait qu'en admettant la possibilité de ce cas, c'est-à-dire des conditions $\neg a$ et $\neg d$ (ou $\neg a$ et e), on va à l'encontre, d'une manière ou d'une autre, d'au moins une parmi deux des idées fondamentales sur lesquelles Frege base la conception même de son système logique en rendant impossible de les garder en même temps. On pourrait penser que ceci puisse être, en soi, un argument suggérant que Frege n'aurait pas pu admettre la condition $\neg d$, ou, encore plus radicalement, la condition $\neg a$. Il me semble cependant que ce serait aller trop vite : après tout, Frege ne nous dit rien à propos des relations entre ces conditions et ces idées, et s'exprime souvent (par exemple, à la fin du § I.36) de manière à faire penser qu'il admet la condition $\neg a$ (sinon la condition $\neg e$). C'est pour cela que je maintiens ouverte, du moins pour l'instant, la possibilité d'admettre les conditions $\neg a$ et $\neg d$ (ou $\neg a$ et e).

Sous la seule condition $\neg a$ (c'est-à-dire indépendamment du fait que les conditions e , $\neg e$, d , et $\neg d$ soient admises ou pas), rien n'empêche non plus que Θ soit un objet autre qu'un parcours de valeurs, disons Θ^{\odot} . Dans ce cas, de (1) il suivra, que :

$$\begin{aligned}
\Gamma \dashv (\Delta \dashv \Theta^{\odot}) &= \setminus \mathcal{E} \left[x : \exists g \left[\setminus \mathcal{E} \left[z : \exists f [\Theta^{\odot} = \mathcal{E}f \wedge f(\Delta) = z] \right] = \mathcal{E}g \wedge g(\Gamma) = x \right] \right] \\
&= \setminus \mathcal{E} \left[x : \exists g [\setminus (\mathcal{E}\mathbf{F}_{1,1}^f) = \mathcal{E}g \wedge g(\Gamma) = x] \right] \\
&= \setminus \mathcal{E} \left[x : \exists g [\setminus \emptyset = \mathcal{E}g \wedge g(\Gamma) = x] \right] \\
&= \setminus \mathcal{E} \left[x : \exists g [\emptyset = \mathcal{E}g \wedge g(\Gamma) = x] \right] \\
&= \setminus \mathcal{E} [x : x = \mathbf{F}] \\
&= \mathbf{F},
\end{aligned} \tag{11}$$

comme Frege l'observe aussi à la fin du § I.36.

De tout cela, on peut tirer les conclusions suivantes.

1. $\xi \dashv (\zeta \dashv \Theta)$ est une fonction à deux arguments, en particulier la fonction :

$$\setminus \mathcal{E} \left[x : \exists g \left[\setminus \mathcal{E} \left[z : \exists f [\Theta = \mathcal{E}f \wedge f(\zeta) = z] \right] = \mathcal{E}g \wedge g(\xi) = x \right] \right].$$

Donc :

(a) Si $\Theta = \mathcal{E}\Psi$, pour n'importe quelle fonction à deux arguments Ψ , ou $\Theta = \mathcal{E}\Phi$ pour n'importe fonction à un argument Φ^{\odot} dont toutes les valeurs sont, à leur tour, des parcours de valeurs, alors $\xi \dashv (\zeta \dashv \Theta)$ est, respectivement, la même fonction que Ψ ou que la fonction (à deux arguments) $\Psi_{[\Phi^{\odot}]}$ telle que Φ^{\odot} est la même fonction que

$\mathcal{E}_\alpha \Psi_{[\Phi^\odot]}(\alpha, \zeta)$, ce qui fait que $\xi - (\zeta - \mathcal{E}\Psi)$ coïncide (du moins extensionnellement sinon même intensionnellement) avec Ψ , ou $\xi - (\zeta - \mathcal{E}\Phi^\odot)$ avec $\Psi_{[\Phi^\odot]}$.

Sous la condition \mathfrak{a} , aucun autre cas ne doit être considéré. Sous la condition $\neg\mathfrak{a}$, trois autres cas sont possibles. Sous la condition $\neg\mathfrak{e}$, il est possible que :

(b) $\Theta = \mathcal{E}\Phi^\odot$, pour n'importe quelle fonction à un argument Φ^\odot dont aucune valeur n'est, à son tour, un parcours de valeurs, ce qui fait que $\xi - (\zeta - \Theta)$ se réduit à la fonction constante $\emptyset_{1,2}^F$.

Sous la condition \mathfrak{e} , et, donc, la condition $\neg\mathfrak{a}$, ou même seulement sous cette dernière condition, il se peut aussi que :

(c) Θ soit le parcours de valeurs $\mathcal{E}\Phi^\odot$ d'une fonction à un argument Φ^\odot , dont certaines valeurs sont des parcours de valeurs et certaines ne les sont pas. Si c'est le cas, le comportement de la fonction $\xi - (\zeta - \Theta)$ dépend de son ζ -argument, c'est-à-dire que la fonction à un argument $\xi - (\Delta - \Theta)$ a un comportement différent selon si la valeur de la fonction dont Θ est le parcours de valeurs, avec Δ comme argument, est ou n'est pas à son tour, pas un parcours de valeurs. En particulier, si la fonction Φ^\odot est telle que $\Phi^\odot(\Delta)$ est un parcours de valeurs – c'est-à-dire que $\Theta = \mathcal{E}\Phi_\xi^\odot$ est le (double) parcours de valeurs de la fonction partielle (à deux arguments) $\Psi_{[\Phi_\xi^\odot]}(\xi, \zeta)$, telle que $\Phi_\xi^\odot(\zeta)$ est la même fonction que $\mathcal{E}_\alpha \Psi_{[\Phi_\xi^\odot]}(\alpha, \zeta)$ définie seulement quant à son ζ -argument sur les objets qui donnent les arguments pour lesquels on dit que la valeur de Φ^\odot est, à son tour, un parcours de valeurs –, alors la fonction $\xi - (\Delta - \Theta)$ se réduit à la fonction $\Psi_{[\Phi_\xi^\odot]}(\xi, \Delta)$. Si la fonction Φ^\odot est telle que $\Phi^\odot(\Delta)$ n'est pas un parcours de valeurs – c'est-à-dire que $\Theta = \mathcal{E}\Phi_\xi^\odot$ est le parcours de valeurs simple d'une fonction partielle (à un seul argument) définie seulement sur les objets pour lesquels on dit que la valeur de Φ^\odot n'est pas, à son tour, un parcours de valeurs –, la fonction $\xi - (\Delta - \Theta)$ se réduit à la fonction constante $\emptyset_{1,1}^F$.

Sous la seule condition $\neg\mathfrak{a}$ (c'est-à-dire indépendamment du fait que les condition \mathfrak{e} , $\neg\mathfrak{e}$, \mathfrak{a} , et $\neg\mathfrak{a}$ soient admises ou pas), il se peut aussi que :

(d) $\Theta = \theta^\odot$, pour n'importe quel objet θ^\odot autre qu'un parcours de valeurs, ce qui fait que $\xi - (\zeta - \Theta)$ se réduit à la fonction constante $\mathbf{F}_{1,2}^F$.

Il s'ensuit que si l'on considère que $\xi - (\zeta - \Theta)$ est une fonction bien formée, quel que soit l'objet Θ alors : admettre la condition $\neg\mathfrak{a}$ force à accepter que la fonction constante $\mathbf{F}_{1,2}^F$ puisse être une instance de la fonction $\xi - (\zeta - \Theta)$; admettre les conditions $\neg\mathfrak{a}$ et $\neg\mathfrak{e}$ force à admettre une fonction constante comme $\emptyset_{1,2}^F$; admettre les conditions $\neg\mathfrak{a}$ et \mathfrak{e} ou $\neg\mathfrak{a}$ et $\neg\mathfrak{a}$ force à admettre à nouveau, une fonction constante comme $\emptyset_{1,1}^F$, de même qu'à admettre que Θ puisse être le parcours de valeurs d'une fonction partielle.

2. $_ \xi - (\zeta - \Theta)$ est une relation binaire, en particulier la fonction :

$$_ \lambda \mathcal{E} \left[x : \exists g \left[_ \lambda \mathcal{E} \left[z : \exists f \left[\Theta = \mathcal{E}f \wedge f(\zeta) = z \right] \right] = \mathcal{E}g \wedge g(\xi) = x \right] \right].$$

Donc :

(a) Si $\Theta = \mathcal{E}\Psi$ pour n'importe quelle fonction à deux arguments Ψ , ou $\Theta = \mathcal{E}\Phi$ pour n'importe quelle fonction Φ^\odot à un argument dont toutes les valeurs sont à leur tour des parcours de valeurs, alors $_ \xi - (\zeta - \Theta)$ est, respectivement, la même relation que $_ \Psi$

ou que la relation (à deux arguments) $_ \Psi_{[\Phi^\odot]}$ telle que Φ^\odot est la même fonction que $\mathcal{E}_\alpha \Psi_{[\Phi^\odot]}(\alpha, \zeta)$, ce qui fait que $_ \xi \dashv (\zeta \dashv \mathcal{E}\Psi)$ coïncide (du moins extensionnellement si ce n'est même intensionnellement) avec \mathfrak{R}_Ψ , ou $_ \xi \dashv (\zeta \dashv \mathcal{E}\Phi^\odot)$ avec $\mathfrak{R}_{\Psi_{[\Phi^\odot]}}$.

Sous la condition \mathfrak{a} , aucun autre cas ne doit être considéré. Sous la condition $\neg \mathfrak{a}$, d'autres trois cas sont possibles. Sous la condition $\neg \mathfrak{e}$, il est possible que :

- (b) $\Theta = \mathcal{E}\Phi^\odot$, pour n'importe quelle fonction à un argument Φ^\odot dont aucune valeur n'est un parcours de valeurs, ce qui fait que $_ \xi \dashv (\zeta \dashv \Theta)$ se réduit au concept constant $_ \emptyset_{1,2}^F$, qui n'est rien que $\mathbf{F}_{1,2}^F$.

Sous la condition \mathfrak{e} , et, donc, la condition $\neg \mathfrak{a}$, ou même seulement sous cette dernière condition, il se peut aussi que :

- (c) Θ soit le parcours de valeurs $\mathcal{E}\Phi^\odot$ d'une fonction à un argument Φ^\odot , dont certaines valeurs sont des parcours de valeurs et certaines ne les sont pas, ce qui fait que le comportement du concept $_ \xi \dashv (\Delta \dashv \Theta)$ dépend du choix de Δ . En particulier, si la fonction Φ^\odot est telle que $\Phi^\odot(\Delta)$ est un parcours de valeurs – c'est-à-dire que $\Theta = \mathcal{E}\Phi_\varepsilon^\odot$ est le (double) parcours de valeurs de la fonction partielle (à deux arguments) $\Psi_{[\Phi_\varepsilon^\odot]}(\xi, \zeta)$, telle que $\Phi_\varepsilon^\odot(\zeta)$ est la même fonction que $\mathcal{E}_\alpha \Psi_{[\Phi_\varepsilon^\odot]}(\alpha, \zeta)$, alors le concept $_ \xi \dashv (\Delta \dashv \Theta)$ se réduit au concept $_ \Psi_{[\Phi_\varepsilon^\odot]}(\xi, \Delta)$. Si la fonction Φ^\odot est telle que $\Phi^\odot(\Delta)$ n'est pas un parcours de valeurs – c'est-à-dire que $\Theta = \mathcal{E}\Phi_\varepsilon^\odot$ est le parcours de valeurs simple d'une (autre) fonction partielle (à un seul argument) –, le concept $_ \xi \dashv (\Delta \dashv \Theta)$ se réduit au concept constant $_ \emptyset_{1,1}^F$, qui n'est autre que $\mathbf{F}_{1,1}^F$;

Sous la seule condition $\neg \mathfrak{a}$ (c'est-à-dire indépendamment du fait que les conditions \mathfrak{e} , $\neg \mathfrak{e}$, \mathfrak{a} , et $\neg \mathfrak{a}$ soient admises ou pas), il se peut aussi que :

- (d) $\Theta = \Theta^\odot$, pour n'importe quel objet Θ^\odot autre qu'un parcours de valeurs, ce qui fait que $_ \xi \dashv (\zeta \dashv \Theta)$ se réduit au concept constant $_ \mathbf{F}_{1,2}^F$, qui, à nouveau, n'est autre que $\mathbf{F}_{1,2}^F$.

Il s'ensuit qu'autant sous la condition \mathfrak{a} que sous la condition $\neg \mathfrak{a}$ (indépendamment du fait que les conditions \mathfrak{e} , $\neg \mathfrak{e}$, \mathfrak{a} , et $\neg \mathfrak{a}$ soient admises ou pas), on a :

- si Θ est le parcours de valeurs d'une fonction à deux arguments Ψ , ou d'une fonction à un argument Φ^\odot dont toutes les valeurs sont des parcours de valeurs, la relation $_ \xi \dashv (\zeta \dashv \Theta)$ prend, respectivement la valeur \mathbf{T} pour des arguments Γ et Δ si et seulement si $\Psi(\Gamma, \Delta) = \mathbf{T}$ ou $\Psi_{[\Phi^\odot]}(\Gamma, \Delta) = \mathbf{T}$;
- si Θ n'est pas un parcours de valeurs ou est le parcours de valeurs (simple) d'une fonction à un argument Φ^\odot dont aucune valeur n'est un parcours de valeurs, la relation $_ \xi \dashv (\zeta \dashv \Theta)$ ne prend jamais la valeur \mathbf{T} ;
- si Θ est le parcours de valeurs d'une fonction à un argument Φ^\odot , dont certaines valeurs sont des parcours de valeurs et certaines ne les sont pas, le concept $_ \xi \dashv (\Delta \dashv \Theta)$ prend la valeur \mathbf{T} pour un argument Γ si et seulement si Δ est tel que $\Phi^\odot(\Delta)$ est à son tour un parcours de valeurs – c'est-à-dire que $\Theta = \mathcal{E}\Phi_\varepsilon^\odot$ est le (double) parcours de valeurs de la fonction partielle (à deux arguments) $\Psi_{[\Phi_\varepsilon^\odot]}(\xi, \zeta)$, telle que $\Phi_\varepsilon^\odot(\zeta)$ est la même fonction que $\mathcal{E}_\alpha \Psi_{[\Phi_\varepsilon^\odot]}(\alpha, \zeta)$, et $\Psi_{[\Phi_\varepsilon^\odot]}(\Gamma, \Delta) = \mathbf{T}$.

Comme le parcours de valeurs d'une fonction à un argument dont aucune valeur n'est un parcours de valeurs n'est pas un parcours de valeurs double, que l'on admette la condition a ou la condition $\neg a$ (indépendamment du fait que les conditions e , $\neg e$, d , et $\neg d$ soient admises ou pas), la relation $\underline{\xi} \dashv (\zeta \dashv \Theta)$ est alors la même que

$$\left[x, y : \exists h[\Theta = \mathcal{E}h \wedge x\mathfrak{R}_h y] \right], \quad (12)$$

où ' h ' varie sur les fonctions à deux arguments. Dans le troisième cas, le concept $\underline{\xi} \dashv (\Delta \dashv \Theta)$ est le même que

$$\left[x : \exists h \exists g[\Theta = \mathcal{E}g \wedge g(\Delta) = \mathcal{E}_\alpha h(\alpha, \Delta) \wedge x\mathfrak{R}_h \Delta] \right], \quad (13)$$

pourvu que l'on admette que, pour toute valeur de x , la formule ouverte ' $\Theta = \mathcal{E}g \wedge g(\Delta) = \mathcal{E}_\alpha h(\alpha, \Delta) \wedge x\mathfrak{R}_h \Delta$ ' puisse être satisfaite par deux fonctions partielles (respectivement à un et deux arguments), ce qui fait que la relation $\underline{\xi} \dashv (\zeta \dashv \Theta)$ est la même que

$$\left[x, y : \exists g, h[\Theta = \mathcal{E}g \wedge g(y) = \mathcal{E}_\alpha h(\alpha, y) \wedge x\mathfrak{R}_h y] \right]. \quad (14)$$

Il suffit, alors, d'observer que

$$\forall y[\exists h[\Theta = \mathcal{E}h] \Leftrightarrow \exists g, k[\Theta = \mathcal{E}g \wedge g(y) = \mathcal{E}_\alpha k(\alpha, y)]]], \quad (15)$$

(ou ' k ' varie, comme ' h ', sur les fonctions à deux arguments) pour en conclure que le troisième cas se réduit aux deux premiers, pourvu toujours que l'on admette que pour toutes valeurs de x et y , la formule ouverte ' $\Theta = \mathcal{E}g \wedge g(y) = \mathcal{E}_\alpha h(\alpha, y) \wedge x\mathfrak{R}_h y$ ' puisse être satisfaite par deux fonctions partielles (respectivement à un et deux arguments). Il s'ensuit que, indépendamment de quelles conditions parmi a , $\neg a$, e , $\neg e$, d , et $\neg d$ sont admises, la relation $\underline{\xi} \dashv (\zeta \dashv \Theta)$ sera la même que la relation (12)²⁰. Pour abrégé, dénotons cette relation par ' \mathfrak{S}_Θ '.

Ceci étant dit, il faut aussi observer que si l'on admet la condition a , le fait que seulement la première clause de la stipulation (1) est reflétée dans le système formel de Frege ne rend pas ce système incapable de toujours décider les valeurs prises par les fonctions $\xi \dashv (\zeta \dashv \Theta)$ et $\underline{\xi} \dashv (\zeta \dashv \Theta)$. En effet – comme il est montré par les dérivations (8) et (9) – si cette condition est admise, la décision ne dépend pas de la seconde clause de cette stipulation. Mais si l'on admet, en revanche, la condition $\neg a$, et que l'on n'établit pas que Θ soit le parcours de valeurs d'une fonction à deux arguments ou d'une fonction à un argument dont toutes les valeurs sont des parcours de valeurs, alors ce n'est plus le cas, puisque les dérivations (10) et (11) dépendent de cette seconde clause, ce qui implique que l'argument permettant de réduire la fonction $\underline{\xi} \dashv (\zeta \dashv \Theta)$ à la fonction \mathfrak{S}_Θ en dépend aussi.

Concentrons nous sur ce dernier point. Pour ce faire, admettons la condition $\neg a$.

Si la condition $\neg e$ est aussi admise, il se peut que l'on ait $\Theta = \mathcal{E}\Phi^\odot$, où Φ^\odot est comme on l'a dit ci-dessus. La première clause de la stipulation (1) est alors suffisante, si couplée à la stipulation (2), pour réduire la fonction $\xi \dashv (\zeta \dashv \Theta)$ à $\setminus \emptyset_{1,2}^F$. Mais la seconde clause est requise pour réduire cette dernière fonction à $\emptyset_{1,2}^F$ et, donc, la fonction $\underline{\xi} \dashv (\zeta \dashv \Theta)$ à $\mathbf{F}_{1,2}^F$. Il serait donc suffisant de rejeter cette clause et de concéder, à nouveau, que $\setminus \emptyset = \mathbf{T}$, pour conclure que $\underline{\xi} \dashv (\zeta \dashv \mathcal{E}\Phi^\odot)$ se réduit à $\mathbf{T}_{1,2}^F$.

²⁰ La différence entre le cas où la condition a est admise et celui où l'est la condition $\neg a$, et avec elles, les conditions e ou $\neg e$, et d , ou $\neg d$, ne tient pas à la nature qu'il faut assigner à cette relation, mais aux conditions qui font qu'un couple d'objets tombe sous elle, et, donc, comme je l'ai dit ci-dessus, à son comportement.

Si la condition ϵ et, donc, la condition $\neg a$, ou même seulement cette dernière condition sont admises, il se peut que $\Theta = \mathcal{E}\Phi^\odot$, où Φ^\odot est à nouveau comme on l'a dit ci-dessus. Si Δ est tel que $\Phi^\odot(\Delta)$ n'est pas un parcours de valeurs, et, donc, $\Theta = \mathcal{E}\Phi_\xi^\odot$ est le parcours de valeurs simple d'une fonction partielle (à un seul argument), la première clause de la stipulation (1) est alors suffisante, si couplée à la stipulation (2), pour réduire la fonction $\xi \dashv (\Delta \dashv \Theta)$ à $\setminus \emptyset_{1,1}^F$. Mais la seconde clause est requise pour réduire cette dernière fonction à $\emptyset_{1,1}^F$ et, donc, la fonction $_ \xi \dashv (\Delta \dashv \Theta)$ à $\mathbf{F}_{1,1}^F$. Il serait donc suffisant, aussi, de rejeter cette clause et de concéder que $\setminus \emptyset = \mathbf{T}$, pour conclure que $_ \xi \dashv (\Delta \dashv \mathcal{E}\Phi^\odot)$ se réduit à $\mathbf{T}_{1,1}^F$.

À nouveau, sous la seule condition $\neg a$, il est encore possible que $\Theta = \Theta^\odot$, où Θ^\odot est, lui aussi, comme on l'a dit ci-dessus. La première clause de la stipulation (1) est alors suffisante, si couplée à la stipulation (2), pour réduire la fonction $\xi \dashv (\zeta \dashv \Theta)$ à $\setminus \mathcal{E} [x : \exists g [\setminus \emptyset_{1,1}^F = \mathcal{E}g \wedge g(\xi) = x]]$. Mais la seconde clause est requise pour réduire cette dernière fonction à $\mathbf{F}_{1,2}^F$ et donc aussi la fonction $_ \xi \dashv (\zeta \dashv \Theta)$ à $\mathbf{F}_{1,2}^F$. Il serait donc suffisant de concéder que $\setminus \emptyset = @$, pour conclure que ces fonctions se réduisent à $\mathbf{T}_{1,2}^F$ ²¹. Mais il serait même suffisant, pour n'importe quel objet Γ , de supposer que $\setminus \emptyset$ est le parcours de valeurs de n'importe quelle fonction dont la valeur, pour Γ comme argument, soit \mathbf{T} , pour réduire la fonction $_ \Gamma \dashv (\zeta \dashv \Theta^\odot)$ à $\mathbf{T}_{1,1}^F$ ²².

Il est clair que dans tous ces cas, on ne peut pas conclure que la relation $_ \xi \dashv (\zeta \dashv \Theta)$ prend la valeur \mathbf{T} pour des arguments Γ et Δ si et seulement si Θ est le parcours de valeurs d'une fonction à deux arguments Ψ telle que $\Psi(\Gamma, \Delta) = \mathbf{T}$, et que cette fonction se réduit, donc, à \mathfrak{S}_Θ . Il s'ensuit que le système formel de Frege n'inclut, en tant que tel, aucune indication non équivoque pour comprendre la relation $_ \xi \dashv (\zeta \dashv \Theta)$. Concevoir cette relation comme étant la même relation que \mathfrak{S}_Θ dépend donc :

- i) soit de l'adoption de la seconde clause de la stipulation (1) ;
- ii) soit de l'admission de la condition a ;
- iii) soit du rejet autant de la possibilité que $\setminus \emptyset$ soit le parcours de valeurs d'une fonction à un argument qui puisse prendre la valeur \mathbf{T} (et, donc, *a fortiori*, que $\setminus \emptyset = @$), que de celle que $\setminus \emptyset = \mathbf{T}$.

À nouveau, bien que Frege aurait pu être d'accord avec la première et la dernière de ces options, il n'en reste pas moins que son système formel n'a juridiction sur aucune d'elles.

²¹ En effet, si $\setminus \emptyset = @$, alors :

$$\begin{aligned} \Gamma \dashv (\Delta \dashv \Theta^\odot) &= \setminus \mathcal{E} [x : \exists g [\setminus \emptyset = \mathcal{E}g \wedge g(\Gamma) = x]] \\ &= \setminus \mathcal{E} [x : \exists g [@ = \mathcal{E}g \wedge g(\Gamma) = x]] \\ &= \setminus \mathcal{E} [x : x = \mathbf{T}] \\ &= \mathbf{T}. \end{aligned}$$

²² Dans le cas où $\Gamma = \emptyset$, il suffirait, par exemple, de concéder que $\setminus \emptyset = \setminus \mathcal{E} [z : z = \emptyset]$, pour conclure que

$$\begin{aligned} \emptyset \dashv (\Delta \dashv \Theta^\odot) &= \setminus \mathcal{E} [x : \exists g [\setminus \emptyset = \mathcal{E}g \wedge g(\emptyset) = x]] \\ &= \setminus \mathcal{E} [x : \exists g [\setminus \mathcal{E} [z : z = \emptyset] = \mathcal{E}g \wedge g(\emptyset) = x]] \\ &= \setminus \mathcal{E} [x : x = (\emptyset = \emptyset)] \\ &= \setminus \mathcal{E} [x : x = \mathbf{T}] \\ &= \mathbf{T}. \end{aligned}$$

5. Le concept $\mathbf{I}\xi$ et les fonctions $\mathbf{I}\xi$ et $\mathbf{U}\xi$

Ayant établi tout cela, suivons maintenant Frege dans sa définition des *Anzahlen*. Commençons par la définition du concept $\mathbf{I}\xi$, avancée dans le § I.37. D'après cette définition, ce concept est tel que

$$\forall u [\mathbf{I}u =_{df} \forall x, y [_x \frown (y \frown u) \Rightarrow \forall z [_x \frown (z \frown u) \Rightarrow y = z]]]. \quad (16)$$

Ceci revient à stipuler que, pour tout objet u , la valeur de $\mathbf{I}u$ est la même valeur de vérité que celle de la formule de droite. Donc, si l'on suppose que la relation $_ \xi \frown (\zeta \frown \Theta)$ est comprise conformément à (12), cette définition est équivalente à poser que :

$$\forall u [\mathbf{I}u \Leftrightarrow \forall x, y, z [(x \mathfrak{S}_u y \wedge x \mathfrak{S}_u z) \Rightarrow y = z]],$$

ce qui implique que, pour n'importe quel objet Θ ,

$$\mathbf{I}\Theta \Leftrightarrow \forall x, y, z [(x \mathfrak{S}_\Theta y \wedge x \mathfrak{S}_\Theta z) \Rightarrow y = z]. \quad (17)$$

Cela est valide aussi bien si l'on admet la condition \mathfrak{a} , que si on ne l'admet pas. Dans le cas où on ne l'admet pas, cela est valide que Θ soit un parcours de valeurs ou pas. Et si Θ est un parcours de valeurs, c'est valide que ce parcours de valeurs soit double ou simple, et qu'il soit celui d'une fonction totale ou partielle. Mais la formule de droite de cette double implication n'a pas la même signification dans ces différents cas.

Sous la condition \mathfrak{a} , Θ ne peut qu'être le parcours de valeurs d'une fonction à deux arguments Ψ , ou d'une fonction à un argument Φ^\odot dont toutes les valeurs sont des parcours de valeurs. Il s'ensuit que cette formule nous dit, sans ambiguïté, que la relation \mathfrak{S}_Θ est fonctionnelle, c'est-à-dire que pour tout objet x , il existe au plus un seul objet y tel que $x \mathfrak{S}_\Theta y$. Mais si Θ est soit $\mathcal{E}\Psi$, soit $\mathcal{E}\Phi^\odot$, la relation \mathfrak{S}_Θ se réduit à $x \mathfrak{R}_\Psi y$ ou $x \mathfrak{R}_{\Psi_{[\Phi^\odot]}} y$, de sorte que de (17) il s'ensuit que

$$\mathbf{I}\mathcal{E}\Psi \Leftrightarrow \forall x, y, z [(x \mathfrak{R}_\Psi y \wedge x \mathfrak{R}_\Psi z) \Rightarrow y = z] \quad (18)$$

et

$$\mathbf{I}\mathcal{E}\Phi^\odot \Leftrightarrow \forall x, y, z \left[\left(x \mathfrak{R}_{\Psi_{[\Phi^\odot]}} y \wedge x \mathfrak{R}_{\Psi_{[\Phi^\odot]}} z \right) \Rightarrow y = z \right] \quad (19)$$

qui affirment que $\mathbf{I}\mathcal{E}\Psi$ et $\mathbf{I}\mathcal{E}\Phi^\odot$ si, et seulement, si les relations \mathfrak{R}_Ψ et $\mathfrak{R}_{\Psi_{[\Phi^\odot]}}$ sont respectivement fonctionnelles. Si Ψ et $\Psi_{[\Phi^\odot]}$ sont à leur tour des relations, cela revient à affirmer que $\mathbf{I}\mathcal{E}\Psi$ et $\mathbf{I}\mathcal{E}\Phi^\odot$ si et seulement ces mêmes relations sont fonctionnelles²³.

Sous la condition $\neg \mathfrak{a}$, il se peut, par contre, que Θ soit un objet Θ^\odot autre qu'un parcours de valeurs, ou, si la condition $\neg \mathfrak{c}$ est aussi admise, qu'il soit le parcours de valeurs $\mathcal{E}\Phi^\odot$ d'une fonction à un argument dont aucune valeur n'est un parcours de valeurs. Enfin, si la condition \mathfrak{e} , et, donc, la condition $\neg \mathfrak{d}$, ou même seulement cette dernière condition, sont admises, il est

²³ On remarque que si $\Phi^\odot(\zeta)$ est un concept, alors cela sera aussi le cas de $\mathcal{E}_\alpha \Psi_{[\Phi^\odot]}(\alpha, \zeta)$, de sorte que, pour n'importe quel objet Δ , on aura $\mathcal{E}_\alpha \Psi_{[\Phi^\odot]}(\alpha, \Delta) = \mathbf{T}$, où $\mathcal{E}_\alpha \Psi_{[\Phi^\odot]}(\alpha, \Delta) = \mathbf{F}$. Donc, si \mathbf{T} et \mathbf{F} sont comme Frege le stipule (informellement) dans le § I.10, c'est-à-dire que $\mathbf{T} = \mathcal{E}[z : z = \mathbf{T}]$ et $\mathbf{F} = \mathcal{E}[z : z = \mathbf{F}]$ (voir la note (13), ci dessus), il s'ensuivra que la fonction à un argument $\Psi_{[\Phi^\odot]}(\xi, \Delta)$ se réduit soit au concept $[z : z = \mathbf{T}]$, soit au concept $[z : z = \mathbf{F}]$. Cela entraînera que la fonction à deux arguments $\Psi_{[\Phi^\odot]}(\xi, \zeta)$ est une relation. Si l'on admet la stipulation du § I.10, il suffit, donc, que Φ^\odot soit un concept pour que $\Psi_{[\Phi^\odot]}$ soit une relation.

possible qu'il soit le parcours de valeurs d'une fonction à un argument Φ^\odot dont certaines valeurs sont des parcours de valeurs et d'autres ne les sont pas.

Dans le premier et le deuxième cas, la relation Θ_\circ se réduit à $\mathbf{F}_{1,2}^f$, ce qui fait que de (17) il suit que

$$\mathbf{I}\Theta^\odot \Leftrightarrow \forall y, z [y\mathbf{F}_{1,2}^f z \Rightarrow y = z] \quad \text{et} \quad \mathbf{I}\mathcal{E}\Phi^\odot \Leftrightarrow \forall y, z [y\mathbf{F}_{1,2}^f z \Rightarrow y = z]. \quad (20)$$

Quant au troisième cas, il se scinde en deux sous-cas : le premier, où $\Theta = \mathcal{E}\Phi_\varepsilon^\odot$, sera analogue à celui auquel s'applique la double implication (19) ; le second, où $\Theta = \mathcal{E}\Phi_\varepsilon^\odot$, sera analogue à celui auquel s'applique la double implication (20).

Dans le premier, de (17) il s'ensuit que

$$\mathbf{I}\mathcal{E}\Phi_\varepsilon^\odot \Leftrightarrow \forall_{\mathcal{D}_{\Phi_\varepsilon^\odot}} y, z \forall x \left[\left(x\mathfrak{R}_{\Psi_{[\Phi_\varepsilon^\odot]}} y \wedge x\mathfrak{R}_{\Psi_{[\Phi_\varepsilon^\odot]}} z \right) \Rightarrow y = z \right], \quad (21)$$

où l'index du premier quantificateur universel indique que ceci est limité au domaine $\mathcal{D}_{\Phi_\varepsilon^\odot}$ des objets sous lesquels la fonction partielle Φ_ε^\odot est définie. Cette double implication nous dira, alors, que si Δ et Δ' sont n'importe quels deux objets sur lesquels cette fonction est définie (c'est-dire qu'ils sont tels que $\Phi^\odot(\Delta)$ et $\Phi^\odot(\Delta')$ sont des parcours de valeurs), alors, pour tout objet x , de $x\mathfrak{R}_{\Psi_{[\Phi_\varepsilon^\odot]}} \Delta$ et $x\mathfrak{R}_{\Psi_{[\Phi_\varepsilon^\odot]}} \Delta'$ il suit que $\Delta = \Delta'$, c'est à dire que la relation $\mathfrak{R}_{\Psi_{[\Phi_\varepsilon^\odot]}}$ est fonctionnelle sur son domaine de définition (qui inclut tous les couples ordonnés d'objets dont le premier peut être n'importe lequel, et le second est un objet sur lequel Φ_ε^\odot est définie).

Dans le second cas, de (17) il s'ensuit que

$$\mathbf{I}\mathcal{E}\Phi_\varepsilon^\odot \Leftrightarrow \forall_{\mathcal{D}_{\Phi_\varepsilon^\odot}} y, z [y\mathbf{F}_{1,2}^f z \Rightarrow y = z], \quad (22)$$

qui nous dit que si Δ et Δ' sont n'importe quels deux objets sur lesquels la fonction Φ_ε^\odot est définie (c'est-dire qu'ils sont tels que $\Phi^\odot(\Delta)$ et $\Phi^\odot(\Delta')$ ne sont pas des parcours de valeurs) alors de $\Delta\mathbf{F}_{1,2}^f \Delta'$ il suit que $\Delta = \Delta'$.

Alors que les doubles implications (18), (19) et (21) correspondent à la signification que Frege semble vouloir assigner à sa définition (16) – si ce n'est que pour le fait que Φ_ε^\odot est une fonction partielle, les doubles implications (20) et (22) véhiculent une signification bien différente. En effet, puisque les implications qui entrent dans leurs membres de droites reviennent à des tautologies, on a

$$\mathbf{I}\Theta^\odot \quad ; \quad \mathbf{I}\mathcal{E}\Phi^\odot \quad ; \quad \mathbf{I}\mathcal{E}\Phi_\varepsilon^\odot, \quad (23)$$

pour n'importe quel objet Θ^\odot autre qu'un parcours de valeurs, n'importe quel parcours de valeurs $\mathcal{E}\Phi^\odot$ d'une fonction totale Φ^\odot dont aucune valeur n'est un parcours de valeurs, et n'importe quel parcours de valeurs $\mathcal{E}\Phi_\varepsilon^\odot$ d'une fonction partielle Φ_ε^\odot dont aucune valeur n'est un parcours de valeurs.

Mais ce n'est pas tout. Car, comme je l'ai montré plus haut, comprendre la relation $_ \xi _ (\zeta _ \Theta)$ conformément à (12) n'est pas sans avoir un prix. On peut, alors, supposer que les conditions qui rendent cela possible ne sont pas vérifiées. Si l'on admettait, par exemple, non seulement la condition $\neg a$, mais aussi que la seconde clause de la stipulation (1) n'est pas valide

et que $\setminus\emptyset = @$, on devrait tirer de (16) que pour tout objet Θ^\odot autre qu'un parcours de valeurs²⁴ :

$$\mathbf{I}\Theta^\odot \Leftrightarrow \forall y, z [\mathbf{T}_{1,2}^f(y, z) \Rightarrow y = z]. \quad (24)$$

Cela implique que $\mathbf{I}\Theta^\odot$ si, et seulement si, tout objet est identique à tout objet, c'est-à-dire si, et seulement si, il y a au plus un objet. Mais dans la mesure où l'on a supposé que Θ^\odot est un objet autre qu'un parcours de valeurs, cela entraîne que $\mathbf{I}\Theta^\odot$ si, et seulement si, il existe un seul objet, et que cet objet n'est pas un parcours de valeurs. L'existence de deux objets distincts tels que \mathbf{T} et \mathbf{F} suffirait alors à assurer que $\neg\mathbf{I}\Theta^\odot$.

Évidemment, cette remarque ne nous permet pas de conclure que c'est ce que Frege avait l'intention d'impliquer en avançant la définition (16). Elle montre seulement que prendre cette définition comme ayant cette conséquence est compatible avec les contraintes imposées pour le système formel de Frege²⁵. Mais prendre cette définition comme étant équivalente à (17) l'est aussi et c'est, de plus, conforme à la seconde clause de la stipulation (1). Et ceci est même de rigueur si l'on admet la condition \mathfrak{a} . Donc, sous cette condition, tout ce que dit la définition (16) est qu'un objet (ou parcours de valeurs) Θ tombe sous le concept $\mathbf{I}\xi$ si, et seulement si, la relation \mathfrak{R}_Ψ (si $\Theta = \mathcal{E}\Psi$) ou $\mathfrak{R}_{\Psi_{[\Phi]}}$ (si $\Theta = \mathcal{E}\Phi$) est fonctionnelle, quelle que soit la fonction à deux arguments Ψ , ou celle à un argument Φ .

Ceci étant dit, passons à la définition de la fonction $\rangle\xi$, avancée dans le §I.38 :

$$\forall u \left[\rangle u =_{df} \mathcal{E} \left[x, y : \mathbf{I}u \wedge \forall z [_z \frown x \Rightarrow \exists w [_w \frown y \wedge _z \frown (w \frown u)]] \right] \right]. \quad (25)$$

Celle-ci revient à stipuler que pour tout objet u , la valeur de $\rangle u$ est le double parcours de valeurs dénoté par la formule de droite, c'est-à-dire l'extension d'une relation. Si le concept $_ \xi \frown \Theta$ et la relation $_ \xi \frown (\zeta \frown \Theta)$ sont compris conformément à (6) et (12), adopter cette définition est équivalent à poser que

$$\forall u \left[\rangle u = \mathcal{E} \left[x, y : \mathbf{I}u \wedge \forall z \left[\mathfrak{I}_{xz} \Rightarrow \exists w \left[\mathfrak{I}_{yw} \wedge z \mathfrak{S}_u w \right] \right] \right] \right],$$

ce qui implique que, pour n'importe quel objet Θ ,

$$\rangle \Theta = \mathcal{E} \left[x, y : \mathbf{I}\Theta \wedge \forall z \left[\mathfrak{I}_{xz} \Rightarrow \exists w \left[\mathfrak{I}_{yw} \wedge z \mathfrak{S}_\Theta w \right] \right] \right]. \quad (26)$$

²⁴ Voir la note (21), ci dessus.

²⁵ Pour nier cela, nous pourrions par exemple essayer de prouver dans ce système qu'il existe au moins un parcours de valeurs et au moins un objet Θ^\odot autre qu'un parcours de valeurs qui a la propriété \mathbf{I} . Pour le premier, nous pourrions observer que ' $_ \left[(\mathcal{E}[x : x \neq x] = \mathcal{E}[x : x \neq x]) = _ \forall z [(z \neq z) = (z \neq z)] \right]$ ' est une instance de LFV et que ' $_ \forall z [(z \neq z) = (z \neq z)]$ ' est une instance d'un théorème (propositionnel) qu'on peut prouver dans le système de Frege, ce qui implique que dans ce système on peut aussi prouver que $\mathcal{E}[x : x \neq x] = \mathcal{E}[x : x \neq x]$, et donc que $\exists x [x = \mathcal{E}[z : z \neq z]]$, et, de ce fait, que $\exists g \exists x [x = \mathcal{E}g]$. Cet argument est contestable. Il serait certainement valide si la règle de généralisation existentielle était admise. Mais ce n'est pas une règle que Frege admet explicitement (ce qu'il admet explicitement, dans les §§ I.17 et I.48.5, est la règle de généralisation universelle, qui implique celle d'instanciation existentielle, qui est juste la règle réciproque de la généralisation existentielle). Mais même si cette conclusion était admise (ce qui rendrait d'ailleurs le système capable de prouver facilement, d'une manière similaire, qu'il existe des *Anzahlen* et, de fait, qu'il y en a une infinité dénombrable), pour conclure qu'il est contradictoire de prendre la définition (16) comme ayant la conséquence mentionnée – c'est-à-dire que l'on ne peut pas rejeter la seconde clause de la stipulation (1), et, en même temps, admettre qu'il existe des objets autres que les parcours de valeurs et que $\setminus\emptyset = @$ –, on devrait également prouver que, sous les mêmes conditions, il existe au moins un objet Θ^\odot autre qu'un parcours de valeurs tel que $\mathbf{I}\Theta^\odot$. Mais ceci est quelque chose que nous ne pouvons certainement pas prouver dans le système de Frege.

À nouveau, c'est le cas sous n'importe laquelle des conditions mentionnées ci-dessus, mais admettre ou ne pas admettre l'une ou l'autre de ces conditions fait que Θ , et, par conséquent, $\rangle\Theta$ peuvent être identifiés avec des objets de nature différente.

Sous la condition \mathfrak{a} , Θ ne peut qu'être le parcours de valeurs d'une fonction à deux arguments Ψ ou d'une fonction à un argument Φ^{\odot} dont toutes les valeurs sont des parcours de valeurs. Il s'ensuit que $\rangle\Theta$ ne peut être que l'extension de la relation \ulcorner couple d'objets (x, y) tel que les objets tombant sous le concept \mathfrak{X}_x sont avec tous (resp. certains de) ceux tombant sous le concept \mathfrak{X}_y dans la relation $x\mathfrak{R}_{\Psi}y$ (resp. $\mathfrak{R}_{\Psi[\Phi^{\odot}]}$) pourvu que cette relation soit fonctionnelle \urcorner . Il est clair que, si cette dernière relation n'est pas fonctionnelle, aucun couple d'objets ne tombe sous la relation dont $\rangle\Theta$ est l'extension. Donc n'importe quel couple d'objets (Γ, Δ) tombe sous une relation dont $\rangle\Theta$ est l'extension, pour quelque objet Θ , si, et seulement si, pour tout objet tombant sous \mathfrak{X}_{Γ} il y a un (et en seul) objet tombant sous \mathfrak{X}_{Δ} qui est avec le premier dans une relation fonctionnelle. Comme, d'après Frege, cette relation devrait se prendre comme totale, et que, sous la condition \mathfrak{a} , Γ et Δ ne peuvent qu'être des parcours de valeurs, cela signifie qu'à tout objet tombant sous $\mathfrak{C}_{\Phi_{\Gamma}}$ correspond un et un seul objet tombant sous $\mathfrak{C}_{\Phi_{\Delta}}$, où Φ_{Γ} et Φ_{Δ} sont les fonctions à un argument dont Γ et Δ sont les parcours de valeurs. Si Φ_{Γ} et Φ_{Δ} sont à leur tour des concepts, Γ et Δ tombent sous une relation dont $\rangle\Theta$ est l'extension, pour quelque objet Θ , si et seulement si à tout objet tombant sous Φ_{Γ} correspond un et un seul objet tombant sous Φ_{Δ} .

Mais sous la condition $\neg\mathfrak{a}$, les choses changent. Car Θ pourra alors être un objet Θ^{\odot} autre qu'un parcours de valeurs, ou, sous la condition $\neg\mathfrak{e}$, le parcours de valeurs $\mathcal{E}\Phi^{\odot}$ d'une fonction à un argument dont aucune valeur n'est un parcours de valeurs, ou encore, sous la condition $\neg\mathfrak{d}$ (et donc sous la condition \mathfrak{e}), le parcours de valeurs $\mathcal{E}\Phi^{\odot}$ d'une fonction à un argument dont certaines valeurs sont des parcours de valeurs et d'autres ne le sont pas.

Dans les deux premiers cas, de (20), (26) et les points 2.b et 2.d du § 3, il s'ensuivra que

$$\begin{aligned}\rangle\Theta &= \mathcal{E}\left[x, y : \forall z \left[\mathfrak{X}_x z \Rightarrow \exists w \left[\mathfrak{X}_y w \wedge \mathbf{F}_{1,2}^f(z, w) \right] \right] \right] \\ &= \mathcal{E}\left[x, y : \forall z \left[\neg \mathfrak{X}_x z \right] \right] \\ &= \mathcal{E}\left[x, y : \forall g \forall z \left[x \neq \mathcal{E}g \vee \neg \mathfrak{C}_g z \right] \right].\end{aligned}$$

Cela entraîne que $\rangle\Theta$ est le parcours de valeurs de la relation qui subsiste entre tout objet qui n'est pas un parcours de valeurs, ou qui est le parcours de valeurs d'une fonction qui ne prend jamais la valeur \mathbf{T} , et tout objet. Pour abrégier, dénotons cette relation par ' \wp '. Nous aurons, alors, que

$$\forall x, y \left[x\wp y \Leftrightarrow \forall g \left[x = \mathcal{E}g \Rightarrow \neg \exists z \left[\mathfrak{C}_g z \right] \right] \right]$$

et

$$\rangle\Theta^{\odot} = \rangle\mathcal{E}\Phi^{\odot} = \mathcal{E}\wp.$$

Le troisième cas se scinde, en revanche, en deux sous-cas distincts : celui où $\Theta = \mathcal{E}\Phi_{\mathfrak{E}}^{\odot}$, et celui où $\Theta = \mathcal{E}\Phi_{\mathfrak{E}}^{\odot}$, où $\Phi_{\mathfrak{E}}^{\odot}$ et $\Phi_{\mathfrak{E}}^{\odot}$ sont deux fonctions partielles, dont la première est définie sur les objets sur lesquels n'est pas définie la seconde et vice versa. Le premier de ces sous-cas correspond au second cas considéré sous la condition \mathfrak{a} . Dans ce cas, de (26) il s'ensuit que

$$6. \ \rangle\mathcal{E}\Phi_{\varepsilon}^{\odot} = \mathcal{E} \left[x, y : \mathbf{I}\mathcal{E}\Phi_{\varepsilon}^{\odot} \wedge \forall z \left[\mathfrak{I}_x z \Rightarrow \exists_{\mathfrak{D}_{\Phi_{\varepsilon}^{\odot}}} w [\mathfrak{I}_y w \wedge z \mathfrak{S}_{\Theta} w] \right] \right],$$

ce qui nous dit que, si la relation (partielle) $\mathfrak{R}_{\Psi_{[\Phi_{\varepsilon}^{\odot}]}}$ est fonctionnelle sur son domaine de définition, n'importe quel couple d'objets (Γ, Δ) tombe sous la relation dont $\rangle\Theta$ est l'extension si, et seulement si, pour tous les objets tombant sous \mathfrak{I}_{Γ} , dans ce même domaine de définition il y a un (et en seul) objet tombant sous \mathfrak{I}_{Δ} qui est avec le premier dans la relation $\mathfrak{R}_{\Psi_{[\Phi_{\varepsilon}^{\odot}]}}$. Le second cas se réduit à celui où $\Theta = \mathcal{E}\Phi^{\odot}$, ce qui implique que

$$\rangle\mathcal{E}\Phi_{\varepsilon}^{\odot} = \mathcal{E}\emptyset.$$

Mais, dans ce cas également, il y a plus, et ceci du fait que comprendre le concept $_ \xi \frown \Theta$ conformément à (6) et la relation $_ \xi \frown (\zeta \frown \Theta)$ conformément à (12) n'est pas sans avoir un prix. Si l'on suppose que les conditions qui rendent cela possible ne sont pas vérifiées, et, en particulier, non seulement que la condition $\neg a$ est admise, mais aussi que la seconde clause de la stipulation (1) ne vaut pas et que $\setminus \emptyset = @$, alors de (25) et de l'admission qu'il existe au moins deux objets distincts, on devrait tirer de pour tout objet Θ^{\odot} autre qu'un parcours de valeurs :

$$\begin{aligned} \rangle\Theta^{\odot} &= \mathcal{E} \left[x, y : \forall z, w [z = w] \wedge \forall z \left[_ z \frown x \Rightarrow \exists w [_ w \frown y \wedge \mathbf{T}_{1,2}^f(z, w)] \right] \right] \\ &= \mathcal{E} \left[x, y : \forall z, w [z = w] \wedge \forall z [_ z \frown x \Rightarrow \exists w [_ w \frown y]] \right] \\ &= \mathcal{E}\mathbf{F}_{1,2}^f. \end{aligned}$$

À nouveau, tout ce que cette remarque montre est que prendre la définition (25) comme ayant cette conséquence est compatible avec les contraintes imposées par le système formel de Frege. Mais c'est aussi le cas si l'on prend cette définition comme étant équivalente à (26), ce qui est, de plus, conforme à la seconde clause de la stipulation (1), et qui est de rigueur, si l'on admet la condition a . Donc, sous cette condition, tout ce que dit la définition (25) est qu'un couple d'objets (ou parcours de valeurs) (Γ, Δ) tombe sous une relation dont $\rangle\Theta$ est l'extension, pour quelque objet Θ , si et seulement si à tout objet tombant sous $\mathfrak{C}_{\Phi_{\Gamma}}$ correspond un et un seul objet tombant sous $\mathfrak{C}_{\Phi_{\Delta}}$, pourvu que Φ_{Γ} et Φ_{Δ} soient les fonctions à un argument dont Γ et Δ sont les parcours de valeurs.

Passons maintenant à la définition de la fonction (à un argument)²⁶ $\mathcal{U}\xi$, avancée dans le § I.39 :

$$\forall u \left[\mathcal{U}u =_{df} \mathcal{E}_{\alpha} \mathcal{E}_{\varepsilon} [\alpha \frown (\varepsilon \frown u)] \right]. \quad (27)$$

Sous la condition a et d'après (8) et (9), ceci revient à stipuler que, pour n'importe quelle fonction à deux arguments Ψ et n'importe quelle fonction à un argument Φ (dont les valeurs seront nécessairement tous des parcours de valeurs),

$$\mathcal{U}\mathcal{E}\Psi = \mathcal{E}_{\alpha} \mathcal{E}_{\varepsilon} [\alpha \frown (\varepsilon \frown \mathcal{E}\Psi)] = \mathcal{E}_{\alpha} \mathcal{E}_{\varepsilon} \Psi(\alpha, \varepsilon) = \mathcal{E}\Psi \sim$$

et

²⁶ Pour des raisons de simplicité typographique, je remplace ici le symbole inhabituel ' \mathfrak{U} ', employé par Frege, par la lettre cursive majuscule ' \mathcal{U} ' (comme '*Umkehrung*', le mot allemand pour 'inversion' que Frege avait probablement en tête en choisissant son symbole).

$$\mathcal{U}\mathcal{E}\Phi = \mathcal{E}_\alpha \mathcal{E}_\varepsilon [\alpha \frown (\varepsilon \frown \mathcal{E}\Psi_{[\Phi]})] = \mathcal{E}_\alpha \mathcal{E}_\varepsilon \Psi_{[\Phi]}(\alpha, \varepsilon) = \mathcal{E}\Psi_{[\Phi]}^\sim,$$

où Ψ^\sim est la fonction obtenue de Ψ en échangeant les places de ses arguments, c'est-à-dire la relation inverse de Ψ si celle-ci est une relation (et le même pour $\Psi_{[\Phi]}^\sim$ et $\Psi_{[\Phi]}$, naturellement).

Sous la condition \mathfrak{a} , c'est la seule manière possible de comprendre la définition (27). Mais si l'on admet la condition $\neg \mathfrak{a}$, on ne devra pas seulement spécifier que la seconde de ces identités ne concerne pas n'importe quelle fonction à un argument Φ , mais plutôt n'importe quelle fonction à un argument Φ^\odot dont toutes les valeurs sont des parcours de valeurs, mais aussi, et surtout, prévoir d'autres possibilités : d'abord que (27) soit appliqué à un objet Θ^\odot autre qu'un parcours de valeurs ; puis, sous la condition $\neg \mathfrak{a}$, au parcours de valeurs $\mathcal{E}\Phi^\odot$ d'une fonction à un argument dont aucune valeur n'est un parcours de valeurs ; et enfin, sous la condition $\neg \mathfrak{d}$ (ou \mathfrak{e}), au parcours de valeurs $\mathcal{E}\Phi^\odot$ d'une fonction à un argument dont certaines valeurs sont des parcours de valeurs et d'autres ne les sont pas. De (27) il s'ensuivra, alors, que :

$$\begin{aligned} \mathcal{U}\Theta^\odot &= \mathcal{E}_\alpha \mathcal{E}_\varepsilon [\alpha \frown (\varepsilon \frown \Theta^\odot)] &= \mathcal{E}_\alpha \mathcal{E}_\varepsilon [\mathbf{F}_{1,2}^f(\alpha, \varepsilon)] \\ & &= \mathcal{E}_\alpha \mathcal{E}_\varepsilon [(\mathbf{F}_{1,2}^f)^\sim(\varepsilon, \alpha)] \\ & &= \mathcal{E}[(\mathbf{F}_{1,2}^f)^\sim] = \mathcal{E}\mathbf{F}_{1,2}^f; \\ \mathcal{U}\mathcal{E}\Phi^\odot &= \mathcal{E}_\alpha \mathcal{E}_\varepsilon [\alpha \frown (\varepsilon \frown \mathcal{E}\Phi^\odot)] &= \mathcal{E}_\alpha \mathcal{E}_\varepsilon [\emptyset_{1,2}^f(\alpha, \varepsilon)] \\ & &= \mathcal{E}_\alpha \mathcal{E}_\varepsilon [(\emptyset_{1,2}^f)^\sim(\varepsilon, \alpha)] \\ & &= \mathcal{E}[(\emptyset_{1,2}^f)^\sim] = \mathcal{E}\emptyset_{1,2}^f; \\ \mathcal{U}\mathcal{E}\Phi_\varepsilon^\odot &= \mathcal{E}_\alpha \mathcal{E}_\varepsilon [\alpha \frown (\varepsilon \frown \mathcal{E}\Phi_\varepsilon^\odot)] &= \mathcal{E}_\alpha \mathcal{E}_\varepsilon [\Psi_{[\Phi_\varepsilon^\odot]}(\alpha, \varepsilon)] \\ & &= \mathcal{E}_\alpha \mathcal{E}_\varepsilon [\Psi_{[\Phi_\varepsilon^\odot]}^\sim(\varepsilon, \alpha)] \\ & &= \mathcal{E}\Psi_{[\Phi_\varepsilon^\odot]}^\sim; \\ \mathcal{U}\mathcal{E}\Phi_\varepsilon^\odot &= \mathcal{E}_\alpha \mathcal{E}_\varepsilon [\alpha \frown (\varepsilon \frown \mathcal{E}\Phi_\varepsilon^\odot)] &= \mathcal{E}_\alpha \mathcal{E}_\varepsilon [\emptyset_{1,2}^f(\alpha, \varepsilon)] \\ & &= \mathcal{E}_\alpha \mathcal{E}_\varepsilon [(\emptyset_{1,2}^f)^\sim(\varepsilon, \alpha)] \\ & &= \mathcal{E}[(\emptyset_{1,2}^f)^\sim] = \mathcal{E}\emptyset_{1,2}^f. \end{aligned}$$

Il s'ensuit que, pour n'importe quel objet Θ , et indépendamment desquelles parmi les conditions \mathfrak{a} , $\neg \mathfrak{a}$, \mathfrak{e} , $\neg \mathfrak{e}$, \mathfrak{d} , et $\neg \mathfrak{d}$ sont admises, $\mathcal{U}\Theta$ est le parcours de valeurs de la fonction à deux arguments qui résulte de $\xi \frown (\zeta \frown \Theta)$, en échangeant les places de ses arguments, c'est-à-dire que²⁷ :

$$\mathcal{U}\Theta = \mathcal{E}[x, y: y \frown (x \frown \Theta)],$$

ce qui fait que, sous chacune de ces conditions²⁸,

²⁷ Le fait que toute fonction constante à deux arguments est invariante sous l'échange de ses arguments, de sorte que $\mathcal{E}[(\mathbf{F}_{1,2}^f)^\sim] = \mathcal{E}\mathbf{F}_{1,2}^f$ et $\mathcal{E}[(\emptyset_{1,2}^f)^\sim] = \mathcal{E}\emptyset_{1,2}^f$, n'a aucune influence sur cette conclusion.

²⁸ Car :

$$\forall x, y [x \mathfrak{S}_{u\Theta} y \Leftrightarrow y \mathfrak{S}_{\Theta} x]. \quad (28)$$

À la différence de celles du concept $\mathbf{I}\xi$ et de la fonction $\mathfrak{S}\xi$, la définition de la fonction $\mathcal{U}\xi$ n'a donc, en tant que telle, aucune conséquence singulière sous la condition $\neg a$, et ceci même si les conditions $\neg c$ ou $\neg d$ sont admises : dans tous les cas, les conséquences de cette définition sont exactement celles attendues. Il est facile de voir que ceci reste vrai aussi si, en plus d'admettre la condition $\neg a$, on suppose aussi que les conditions qui permettent de comprendre le concept $_ \xi \frown \Theta$ conformément à (6) et la relation $_ \xi \frown (\zeta \frown \Theta)$ conformément à (12) ne sont pas vérifiées. Si on rejette, par exemple, la seconde clause de la stipulation (1) et on suppose que $\setminus \emptyset = @$, la détermination de $\mathcal{U}\Theta^{\odot}$ se fait, *mutatis mutandis*, comme ci-dessus :

$$\begin{aligned} \mathcal{U}\Theta^{\odot} &= \mathcal{E}_{\alpha}\mathcal{E}_{\varepsilon}[\alpha \frown (\varepsilon \frown \Theta^{\odot})] &= \mathcal{E}_{\alpha}\mathcal{E}_{\varepsilon}[\mathbf{T}_{1,2}^f(\alpha, \varepsilon)] \\ & &= \mathcal{E}_{\alpha}\mathcal{E}_{\varepsilon}[(\mathbf{T}_{1,2}^f)^{\sim}(\varepsilon, \alpha)] \\ & &= \mathcal{E}[(\mathbf{T}_{1,2}^f)^{\sim}] = \mathcal{E}\mathbf{T}_{1,2}^f. \end{aligned}$$

Cela n'empêche pas les conséquences de cette définition sous la condition $\neg a$ d'avoir, sous cette même condition, des répercussions assez déplaisantes sur la définition des *Anzahlen*.

7. *Anzahlen*

Celle-ci est avancée tout de suite après celle la fonction $\mathbf{U}\xi$, dans le § I. 40. La voici²⁹ :

$$\forall u \left[\mathcal{N}u =_{df} \mathcal{E} \left[x : \exists y [_ x \frown (u \frown y) \wedge _ u \frown (x \frown \mathcal{U}y)] \right] \right] \quad (29)$$

$$\forall x, y \left[\begin{array}{l} x \mathfrak{S}_{u\varepsilon\Psi} y \Leftrightarrow \exists h [\mathcal{U}\varepsilon\Psi = \varepsilon h \wedge x \mathfrak{R}_h y] \\ \Leftrightarrow \exists h [\mathcal{E}\Psi^{\sim} = \varepsilon h \wedge x \mathfrak{R}_h y] \\ \Leftrightarrow x \mathfrak{R}_{\Psi^{\sim}y} \\ \Leftrightarrow \Psi^{\sim}(x, y) = \mathbf{T} \\ \Leftrightarrow \Psi(y, x) = \mathbf{T} \\ \Leftrightarrow y \mathfrak{R}_{\Psi x} \\ \Leftrightarrow \exists h [\mathcal{E}\Psi = \varepsilon h \wedge y \mathfrak{R}_h x] \\ \Leftrightarrow y \mathfrak{S}_{\varepsilon\Psi} x \end{array} \right]$$

(et de manière analogue dans les cas que $\Theta = \mathcal{E}\Phi^{\odot}$ et $\Theta = \mathcal{E}\Phi_{\varepsilon}^{\odot}$),

$$\forall x, y \left[\begin{array}{l} x \mathfrak{S}_{u\Theta^{\odot}} y \Leftrightarrow \exists h [\mathcal{U}\Theta^{\odot} = \varepsilon h \wedge x \mathfrak{R}_h y] \\ \Leftrightarrow \exists h [\mathcal{E}\mathbf{F}_{1,2}^f = \varepsilon h \wedge x \mathfrak{R}_h y] \\ \Leftrightarrow \mathbf{F}_{1,2}^f(x, y) \\ \Leftrightarrow \mathbf{F}_{1,2}^f(y, x) \\ \Leftrightarrow y \mathfrak{S}_{\Theta^{\odot}} x \end{array} \right],$$

et

$$\forall x, y \left[\begin{array}{l} x \mathfrak{S}_{u\Phi^{\odot}} y \Leftrightarrow \exists h [\mathcal{U}\Phi^{\odot} = \varepsilon h \wedge x \mathfrak{R}_h y] \\ \Leftrightarrow \exists h [\mathcal{E}\emptyset_{1,2}^f = \varepsilon h \wedge x \mathfrak{R}_h y] \\ \Leftrightarrow \emptyset_{1,2}^f(x, y) = \mathbf{T} \\ \Leftrightarrow \emptyset_{1,2}^f(y, x) = \mathbf{T} \\ \Leftrightarrow y \mathfrak{S}_{\Phi^{\odot}} x \end{array} \right]$$

(et de manière analogue dans les cas que $\Theta = \mathcal{E}\Phi_{\varepsilon}^{\odot}$).

²⁹ Pour des raisons, à nouveau, de simplicité typographique, je remplace ici le symbole inhabituel ‘ \mathfrak{N} ’, employé par Frege, avec la lettre cursive majuscule ‘ \mathcal{N} ’ (comme ‘*Nummer*’ or ‘*numerus*’, les mots allemand et latin pour ‘nombre’ que Frege avait probablement en tête en choisissant son symbole).

Elle revient à stipuler que pour tout objet u , la valeur de $\mathcal{N}u$ est le parcours de valeurs dénoté par la formule de droite, c'est-à-dire l'extension d'un concept. Si la relation $_ \xi - (\zeta - \Theta)$ est comprise conformément à (12) – ce qui implique que le concept $\mathbf{I}\xi$ et la fonction $_ \xi$ doivent à leur tour être compris conformément à (17) et (26) – adopter cette définition est équivalent à poser que

$$\forall u \left[\mathcal{N}u = \mathcal{E} \left[x : \exists y [x \mathfrak{S}_{_y} u \wedge u \mathfrak{S}_{_y} x] \right] \right], \quad (30)$$

ce qui implique que, pour n'importe quel objet Γ ,

$$\begin{aligned} \mathcal{N}\Gamma &= \mathcal{E} \left[x : \exists y [x \mathfrak{S}_{_y} \Gamma \wedge \Gamma \mathfrak{S}_{_y} x] \right] \\ &= \mathcal{E} \left[x : \exists y [\exists k [] y = \mathcal{E}k \wedge x \mathfrak{R}_k \Gamma] \wedge \exists h [] \mathcal{U}y = \mathcal{E}h \wedge \Gamma \mathfrak{R}_h x] \right] \\ &= \mathcal{E} \left[x : \exists y \left[\begin{array}{l} \mathbf{I}y \wedge \forall z [\mathfrak{I}_{xZ} \Rightarrow \exists w [\mathfrak{I}_{\Gamma w} \wedge z \mathfrak{S}_y w]] \wedge \\ \mathbf{I}\mathcal{U}y \wedge \forall z [\mathfrak{I}_{\Gamma z} \Rightarrow \exists w [\mathfrak{I}_{xw} \wedge z \mathfrak{S}_{_y} w]] \end{array} \right] \right]. \end{aligned} \quad (31)$$

Le problème est que, sous la condition $\neg a$, adopter cette définition ne nous assure pas que pour n'importe quel objet Γ , $\mathcal{N}\Gamma$ soit ce que Frege semble vouloir qu'il soit, c'est-à-dire le parcours de valeurs du concept d'être un objet x tel que les objets tombant sous le concept $_ \xi - \Gamma$ sont en bijection avec ceux tombant sous le concept $_ \xi - x$. En d'autres termes, sous la condition $\neg a$, adopter cette définition ne nous assure pas que

$$\forall u \left[\mathcal{N}u =_{df} \mathcal{E} [x : \mathfrak{I}_x \approx \mathfrak{I}_u] \right], \quad (32)$$

où ' $\mathfrak{I}_x \approx \mathfrak{I}_u$ ' est, comme d'habitude, l'abréviation de la formule du second ordre exprimant la condition que les concepts \mathfrak{I}_x et \mathfrak{I}_u sont équinumériques. Et ceci, même en admettant que le concept $_ \xi - \Theta$ et la relation $_ \xi - (\zeta - \Theta)$ soient compris conformément à (6) et (2), ce qui permet d'ailleurs de comprendre (29) conformément à (31). Pour s'en apercevoir, raisonnons comme il suit.

Conformément à (17) et (28), supposer que pour n'importe quels objets Γ et Δ , l'objet y satisfaisant la condition

$$\mathbf{I}y \wedge \forall z [\mathfrak{I}_{\Delta z} \Rightarrow \exists w [\mathfrak{I}_{\Gamma w} \wedge z \mathfrak{S}_y w]] \wedge \mathbf{I}\mathcal{U}y \wedge \forall z [\mathfrak{I}_{\Gamma z} \Rightarrow \exists w [\mathfrak{I}_{\Delta w} \wedge z \mathfrak{S}_{_y} w]] \quad (33)$$

est le parcours de valeurs $\mathcal{E}\Psi$ d'une fonction à deux arguments, fait que cette fonction vérifie la condition

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall x, y, z [(x \mathfrak{R}_{\Psi} y \wedge x \mathfrak{R}_{\Psi} z) \Rightarrow y = z] \wedge \forall z [\mathfrak{I}_{\Delta z} \Rightarrow \exists w [\mathfrak{I}_{\Gamma w} \wedge z \mathfrak{R}_{\Psi} w]] \wedge \\ \forall x, y, z [(y \mathfrak{R}_{\Psi} x \wedge z \mathfrak{R}_{\Psi} x) \Rightarrow y = z] \wedge \forall z [\mathfrak{I}_{\Gamma z} \Rightarrow \exists w [\mathfrak{I}_{\Delta w} \wedge w \mathfrak{R}_{\Psi} z]] \end{array} \right. \quad (34)$$

et de manière analogue pour la supposition que y est le parcours de valeurs $\mathcal{E}\Phi^{\odot}$ d'une fonction à un argument dont toutes les valeurs sont des parcours de valeurs, avec $\Psi_{[\Phi^{\odot}]}$ à la place de Ψ . Il est donc suffisant d'observer que quelles que soient Ψ et Φ^{\odot} , \mathfrak{R}_{Ψ} et $\mathfrak{R}_{\Psi_{[\Phi^{\odot}]}}$ sont des relations binaires (c'est-à-dire qu'elles le sont *ipso facto* au sens de Frege, ou peuvent être réduites à de telles relations au sens moderne par compréhension Σ_1^1), pour en conclure que requérir que cette condition soit satisfaite par un parcours de valeurs tel $\mathcal{E}\Psi$ ou $\mathcal{E}\Phi^{\odot}$ revient à requérir que les concepts \mathfrak{I}_{Δ} et \mathfrak{I}_{Γ} soient équinumériques, ce qui réduit l'identité (31) à la (32), comme on l'attend.

Cependant, sous la condition $\neg a$, requérir qu'il y ait un objet y satisfaisant la condition (33) n'est pas la même chose que de requérir qu'il soit ainsi pour un parcours de valeurs tel que $\mathcal{E}\Psi$ ou $\mathcal{E}\Phi^\ominus$. Car, sous la condition $\neg a$, la première requête est aussi satisfaite si la condition (33) n'est à son tour satisfaite que par des objets tels que Θ^\ominus autres que parcours de valeurs ; ou, sous la condition $\neg e$, que par le parcours de valeurs $\mathcal{E}\Phi^\ominus$ d'une fonction à un argument dont aucune valeur n'est un parcours de valeurs ; ou encore, sous la condition $\neg a$ (et donc sous la condition e), que par le parcours de valeurs $\mathcal{E}\Phi^\ominus$ d'une fonction à un argument dont certaines valeurs sont des parcours de valeurs et d'autres ne les sont pas. Et, si c'est ainsi, satisfaire la condition (33) se réduit à tout autre chose que de s'assurer que les concepts \mathfrak{I}_Δ et \mathfrak{I}_Γ soient équinumériques. En particulier, de (12), (17), (27) et (les conséquences de) (27), il s'ensuit que supposer que la condition (33) soit satisfaite par Θ^\ominus , $\mathcal{E}\Phi^\ominus$ ou $\mathcal{E}\Phi_\xi^\ominus$ revient à supposer que

$$\forall z[\mathfrak{I}_\Delta z \Rightarrow \exists w[\mathfrak{I}_\Gamma w \wedge \mathbf{F}_{1,2}^f(z, w)]] \wedge \forall z[\mathfrak{I}_\Gamma z \Rightarrow \exists w[\mathfrak{I}_\Delta w \wedge \mathbf{F}_{1,2}^f(z, w)]],$$

c'est-à-dire

$$\forall z[\mathfrak{I}_\Delta z \Rightarrow \mathbf{F}_{1,1}^f(z)] \wedge \forall z[\mathfrak{I}_\Gamma z \Rightarrow \mathbf{F}_{1,1}^f(z)],$$

ou bien

$$\forall z[\neg \mathfrak{I}_\Delta z \wedge \neg \mathfrak{I}_\Gamma z].$$

Donc, si la condition (33) n'était satisfaite que par des tels objets, on aurait que

$$\forall u \left[\mathcal{N}u = \mathcal{E} \left[x : \forall z[\neg \mathfrak{I}_x z \wedge \neg \mathfrak{I}_u z] \right] \right]. \quad (35)$$

Bien entendu, cela ne signifie pas qu'admettre la condition $\neg a$, de même qu'une parmi les conditions $\neg e$ et $\neg a$, sinon le deux, nous force à considérer que la définition (29) soit équivalente à (35). En fait, c'est même pire que cela. Ce qu'on vient de montrer est que, sous ces conditions, il n'y a pas manière de décider si la définition (29) est équivalente à (32) ou à (35), ou même parfois à l'une, parfois à l'autre. Pour s'assurer qu'elle soit équivalente à (32), il faudrait s'assurer que la formule existentiellement quantifiée en (31) soit satisfaite seulement par des parcours de valeurs tels que $\mathcal{E}\Psi$ et $\mathcal{E}\Phi^\ominus$. Pour s'assurer qu'elle soit équivalente à (35), il faudrait s'assurer que cette formule soit satisfaite seulement par des objets tels que Θ^\ominus ou par des parcours de valeurs tels que $\mathcal{E}\Phi^\ominus$. Si elle l'était, enfin, seulement par des parcours de valeurs tels que $\mathcal{E}\Phi^\ominus$ (ou, plus précisément, tels que $\mathcal{E}\Phi_\xi^\ominus$ ou $\mathcal{E}\Phi_\xi^\ominus$), il faudrait évaluer, cas par cas, si sous le concept \mathfrak{I}_u tombent ou pas des objets sous lesquels Φ_ξ^\ominus n'est pas définie (c'est-à-dire que $\mathcal{E}\Phi_\xi^\ominus$ l'est) : si c'est le cas, même si cette formule était satisfaite seulement par des parcours de valeurs tels que $\mathcal{E}\Phi_\xi^\ominus$, de cela ne suivra pas non plus que l'instance considérée de la définition (29) soit équivalente à l'instance correspondante de (32).

Le problème vient, bien sûr, du fait que (32) et (35) ne sont en aucune manière équivalentes, ou, pour être plus précis, que leurs seules instances équivalentes sont celles où $u = \Theta^\ominus$ ou $u = \mathcal{E}\Phi^\ominus$, où Φ^\ominus est n'importe quelle fonction à un argument telle que $\neg \exists x[\mathfrak{C}_{\Phi^\ominus} x]$, c'est-à-dire $\neg \exists x[\Phi^\ominus(x) = \mathbf{T}]$ — ce qui est, entre autres, le cas de la fonction $\mathbf{F}_{1,1}^f$, de sorte que \emptyset est une instance de $\mathcal{E}\Phi^\ominus$. De (32), il suit en effet que

$$\mathcal{N}\Theta^\ominus = \mathcal{N}\mathcal{E}\Phi^\ominus = \mathcal{E}[x : \mathfrak{I}_x \approx \mathfrak{I}_{\Theta^\ominus}] = \mathcal{E}[x : \mathfrak{I}_x \approx \mathfrak{I}_{\mathcal{E}\Phi^\ominus}] = \mathcal{E}[x : \mathfrak{I}_x \approx \mathbf{F}_{1,1}^f],$$

car

$$\forall z[\mathfrak{I}_{\emptyset} z \Leftrightarrow \exists g[\theta^{\ominus} = \varepsilon g \wedge \mathfrak{C}_g z] \Leftrightarrow \mathbf{F}_{1,1}^f z]$$

et

$$\forall z[\mathfrak{I}_{\varepsilon\Phi} z \Leftrightarrow \exists g[\varepsilon\Phi^{\ominus} = \varepsilon g \wedge \mathfrak{C}_g z] \Leftrightarrow \mathfrak{C}_{\Phi} z \Leftrightarrow (\Phi^{\ominus}(z) = \mathbf{T}) \Leftrightarrow \mathbf{F}_{1,1}^f z].$$

De (35), il suit également que

$$\begin{aligned} \mathcal{N}\theta^{\ominus} = \mathcal{N}\varepsilon\Phi^{\ominus} &= \varepsilon \left[x : \forall z[\neg \mathfrak{I}_x z \wedge \neg \mathfrak{I}_{\emptyset} z] \right] = \varepsilon \left[x : \forall z[\neg \mathfrak{I}_x z \wedge \neg \mathfrak{I}_{\varepsilon\Phi} z] \right] \\ &= \varepsilon \left[x : \neg \exists z[\mathfrak{I}_x z] \right] = \varepsilon \left[x : \mathfrak{I}_x \approx \mathbf{F}_{1,1}^f \right] \end{aligned}$$

car

$$\forall z[\neg \mathfrak{I}_{\emptyset} z \Leftrightarrow \neg \exists g[\theta^{\ominus} = \varepsilon g \wedge \mathfrak{C}_g z] \Leftrightarrow \neg \mathbf{F}_{1,1}^f z \Leftrightarrow \mathbf{T}_{1,1}^f z]$$

et

$$\forall z[\neg \mathfrak{I}_{\varepsilon\Phi} z \Leftrightarrow \neg \exists g[\varepsilon\Phi^{\ominus} = \varepsilon g \wedge \mathfrak{C}_g z] \Leftrightarrow \neg \mathfrak{C}_{\Phi} z \Leftrightarrow \neg (\Phi^{\ominus}(z) = \mathbf{T}) \Leftrightarrow \mathbf{T}_{1,1}^f z].$$

Pour tout autre cas – c'est-à-dire pour n'importe quel parcours de valeurs $\varepsilon\Phi^{\oplus}$, où Φ^{\oplus} est n'importe quelle fonction à un argument telle que $\exists x[\mathfrak{C}_{\Phi^{\oplus}}(x)]$, c'est-à-dire $\exists x[\Phi^{\oplus}(x) = \mathbf{T}]$, (de sorte que $\exists x[\Phi^{\oplus}(x) \neq \mathbf{F}]$) – de (32) il suit que

$$\mathcal{N}\varepsilon\Phi^{\oplus} = \varepsilon \left[x : \mathfrak{I}_x \approx \mathfrak{I}_{\varepsilon\Phi^{\oplus}} \right] = \varepsilon \left[x : \mathfrak{I}_x \approx \mathfrak{C}_{\Phi^{\oplus}} \right] \neq \varepsilon \left[x : \mathbf{F}_{1,1}^f(x) \right] = \varepsilon \mathbf{F}_{1,1}^f = \emptyset,$$

tandis que de (5.6), il suit que

$$\mathcal{N}\varepsilon\Phi^{\oplus} = \varepsilon \left[x : \forall z[\neg \mathfrak{I}_{\varepsilon\Phi^{\oplus}} z \wedge \neg \mathfrak{I}_x z] \right] = \varepsilon \left[x : \mathbf{F}_{1,1}^f \right] = \varepsilon \mathbf{F}_{1,1}^f = \emptyset.$$

Évidemment, cela n'implique en rien que la définition (29) est défectueuse, ou mathématiquement inappropriée (l'inconsistance du système de Frege mise à part, naturellement). Car rien de cela implique que les preuves que Frege avance, en se basant sur cette définition, de plusieurs théorèmes sur les *Anzahlen* – parmi lesquels on compte ses reformulations des théorèmes fondamentaux de l'arithmétique (en particulier des axiomes de Peano du second ordre) et d'autres théorèmes à propos de l'*Anzahl* de l'extension du concept d'être un nombre naturel, ou *Endlos* (sa version de \aleph_0) – sont incorrectes. De plus, quels que soient les objets Γ et Δ , et que l'on admette soit la condition \mathfrak{a} soit la condition $\neg \mathfrak{a}$, cette définition permet de décider si Δ tombe ou non sous le concept dont $\mathcal{N}\Gamma$ est l'extension, c'est-à-dire s'il y a ou non un objet y qui satisfait la formule (33)³⁰. Ce dont il est question ici n'est donc

³⁰ Car, supposons qu'on admette la condition $\neg \mathfrak{a}$ et que Γ ne soit pas un parcours de valeurs. Il s'ensuivra que $\forall z[\neg \mathfrak{I}_{\Gamma} z]$. Donc, il y a un objet y qui satisfait la formule (32) si, et seulement si, cet objet est tel que $\mathbf{I}y \wedge \forall z[\neg \mathfrak{I}_{\Delta} z] \wedge \mathbf{I}Uy$. Mais, si Δ n'est pas à son tour un parcours de valeurs, c'est ainsi si, et seulement si, il a un objet y tel que $\mathbf{I}y \wedge \mathbf{I}Uy$, ce qui est certainement le cas, car c'est ainsi autant pour l'extension de la relation $[x, z : x = y]$ que pour Δ lui-même. Si Δ est, par contre, un parcours de valeurs, disons $\varepsilon\Phi$, il faut et il suffit aussi, pour que ceci ait lieu, qu'il soit tel que $\forall z[\neg \mathfrak{C}_{\Phi} z]$. Si, encore sous la condition $\neg \mathfrak{a}$, l'on suppose que Δ ne soit pas un parcours de valeurs, on peut donc raisonner comme ci-dessous, en inversant le rôle de Γ et Δ . Il ne reste, donc, que le cas où autant Γ que Δ sont des parcours de valeurs. Si on accepte la condition $\neg \mathfrak{a}$, alors n'importe quel objet autre qu'un parcours de valeurs fera l'affaire. Par contre, si on admet la condition \mathfrak{a} , alors il y aura un objet y qui satisfait la formule (32) si et seulement si cet objet satisfait la formule (33), ce qui dépendra, naturellement, des concepts $\mathfrak{I}_{\Gamma} z$ et $\mathfrak{I}_{\Delta} z$. Qu'on observe, de plus, que le cas où Δ n'est pas un parcours de valeurs et Γ en est un conduit à une conséquence importante. Car si $\Gamma = \varepsilon\Phi$, de ce cas il suit que l'extension de la relation $[x, z : x = y]$ satisfait la formule (32) si, et seulement si, $\forall z[\neg \mathfrak{C}_{\Phi} z]$, c'est-à-dire que sous la condition $\neg \mathfrak{a}$ n'importe quel objet autre qu'un parcours de valeurs tombe sous le concept dont $\mathcal{N}\varepsilon\Phi$ est l'extension si et seulement si aucun objet ne tombe sous \mathfrak{C}_{Φ} . Mais si ceci est le cas, alors $\varepsilon\mathfrak{C}_{\Phi} = \emptyset$. Donc, sous cette condition, n'importe quel objet autre qu'un parcours de valeurs tombe sous le concept dont $\mathcal{N}\varepsilon\Phi$ est l'extension si, et seulement si, $\varepsilon\mathfrak{C}_{\Phi} = \emptyset$. Il s'ensuit que, même sous la condition $\neg \mathfrak{a}$, le comportement de ce concept est aisément déterminable sur la base des

pas la correction formelle de la démarche de Frege, mais la signification qu'il faut assigner à ses définitions, c'est-à-dire, comme je l'ai exprimé ci-dessus, la sémantique informelle intrinsèque à son système. Ce que suit de mes considérations précédentes n'est donc que cela : que cette sémantique n'est univoque que si l'on admet la condition \mathfrak{a} , c'est-à-dire si l'on bannit tout objet qui n'est pas un parcours de valeurs.

Il est également important de remarquer que, bien que pour comprendre le concept $_ \xi \text{ — } \Theta$ et la relation $_ \xi \text{ — } (\zeta \text{ — } \Theta)$ conformément à (6) et (12) (et, en conséquence, le concept $\mathbf{I}\xi$ et la fonction $\rangle \xi$ conformément à (17) et (26), respectivement), il soit suffisant d'accepter la seconde clause de la stipulation (1), ou de rejeter que $\setminus \emptyset$ puisse être soit le parcours de valeurs d'une fonction à un argument qui peut prendre la valeur \mathbf{T} , soit \mathbf{T} lui-même, rien de cela n'est, par contre, suffisant pour rendre la définition (29) univoque, au sens de cette sémantique. Pour cela, il n'y a pas d'autre solution que de bannir les objets qui ne sont pas des parcours de valeurs.

8. Zéro

Une solution moins radicale pourrait être d'amender de manière appropriée la définition de Frege : plutôt que de bannir les objets autres que des parcours de valeurs, on pourrait simplement les exclure du domaine de quantification dans (29) et, donc, dans (30) et (31). Ceci mènerait à remplacer ces deux dernières identités par les suivantes :

$$\forall u \left[\mathcal{N}u = \mathcal{E} \left[x : \exists h \exists y [y = \mathcal{E}h \wedge x \mathfrak{S}_{\gamma} u \wedge u \mathfrak{S}_{\gamma} u y x] \right] \right].$$

et

$$\begin{aligned} \mathcal{N}\Gamma &= \mathcal{E} \left[x : \exists h \exists y [y = \mathcal{E}h \wedge x \mathfrak{S}_{\gamma} \Gamma \wedge \Gamma \mathfrak{S}_{\gamma} u y x] \right] \\ &= \mathcal{E} \left[x : \exists h \exists y [y = \mathcal{E}h \wedge \exists k [\rangle y = \mathcal{E}k \wedge x \mathfrak{R}_k \Gamma] \wedge \exists k' [\rangle u y = \mathcal{E}k' \wedge \Gamma \mathfrak{R}_{k'} x]] \right] \\ &= \mathcal{E} \left[x : \exists h \exists y \left[\begin{array}{l} y = \mathcal{E}h \wedge \mathbf{I}y \wedge \mathbf{I}u y \wedge \\ \forall z \left[\mathfrak{I}_x z \Rightarrow \exists w \left[\mathfrak{I}_{\Gamma} w \wedge z \mathfrak{S}_{\gamma} w \right] \right] \wedge \\ \forall z \left[\mathfrak{I}_{\Gamma} z \Rightarrow \exists w \left[\mathfrak{I}_x w \wedge z \mathfrak{S}_{\gamma} u y w \right] \right] \right] \right] \right]. \end{array} \right. \end{aligned}$$

(ou k' varie, comme h and k sur les fonctions à deux-arguments), qu'on pourrait respectivement réécrire plus simplement ainsi :

$$\forall u \left[\mathcal{N}u = \mathcal{E} \left[x : \exists h [y x \mathfrak{S}_{\gamma} \mathcal{E}h u \wedge u \mathfrak{S}_{\gamma} u \mathcal{E}h x] \right] \right]. \quad (36)$$

et

considérations relatives à la cardinalité de concepts, en particulier du concept \mathfrak{C}_{Φ} . Ceci est important car les reformulations de Frege des théorèmes fondamentaux de l'arithmétique et de ses théorèmes à propos de *Endlos* ne concernent que les *Anzahlen* d'extensions de concepts (ce qui fait que, dans tous ces cas, \mathfrak{C}_{Φ} coïncide avec Φ) et que $\mathcal{N}\emptyset$ correspond, dans sa reformulation, à 0, alors que tous les nombres naturels sont les *Anzahlen* d'extensions de concepts définissables récursivement à partir de 0, et que *Endlos* est, comme je viens de le dire, l'*Anzahl* de l'extension du concept d'être un nombre naturel. Je remercie Joan Bertran-San Millán pour m'avoir suggéré cet argument.

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}\Gamma &= \mathcal{E} \left[x : \exists h [\wedge x \mathfrak{S}_{\gamma \varepsilon h} \Gamma \wedge \Gamma \mathfrak{S}_{\gamma u \varepsilon h} x] \right] \\
&= \mathcal{E} \left[x : \exists h [\exists k [\exists \varepsilon h = \varepsilon k \wedge x \mathfrak{R}_k \Gamma] \wedge \exists k' [\exists u \varepsilon h = \varepsilon k' \wedge \Gamma \mathfrak{R}_{k'} x]] \right] \\
&= \mathcal{E} \left[x : \exists h \left[\begin{array}{l} \mathbf{I} \varepsilon h \wedge \mathbf{I} u \varepsilon h \wedge \\ \forall z [\mathfrak{I}_x z \Rightarrow \exists w [\mathfrak{I}_\Gamma w \wedge z \mathfrak{S}_{\varepsilon h} w]] \wedge \\ \forall z [\mathfrak{I}_\Gamma z \Rightarrow \exists w [\mathfrak{I}_x w \wedge z \mathfrak{S}_{u \varepsilon h} w]] \end{array} \right] \right]. \tag{37}
\end{aligned}$$

Ceci permettrait de rendre la définition de Frege univoquement équivalente à (32), même en absence de la seconde clause de la stipulation (1). Mais il ne résoudrait pas tout problème. Sous la condition $\neg a$, un autre problème surgirait du fait que de (32) il suit que $\mathcal{N}\Theta^\odot = \mathcal{N}\emptyset$, ou, plus précisément, du fait que de ceci et de la définition de 0 que Frege avance dans le § I.41, il s'ensuit que 0 – qui est ici défini comme étant le même objet que $\mathcal{N}\emptyset$ – est le même *Anzahl* que $\mathcal{N}\Theta^\odot$ pour n'importe quel objet Θ^\odot autre qu'un parcours de valeurs³¹.

Le problème ici est que, bien que cela n'en vienne pas à contredire le Principe de Hume (qui est manifestement la conséquence plus importante – autant sur le plan déductif que sur le plan interprétatif, ou philosophique, si on le préfère – que Frege tire de sa définition des *Anzahlen*)³², il mine néanmoins l'idée que les *Anzahlen* appartiennent aux (sont des) concepts. Puisque – bien que rien ne s'oppose, en soit, à prendre, $\mathcal{N}\Gamma$, pour n'importe quel objet Γ , comme étant, non seulement, littéralement, l'*Anzahl* de Γ , comme on l'a dit jusqu'ici, mais aussi l'*Anzahl* de \mathfrak{I}_Γ (ce qui revient à admettre que tout *Anzahl* est, en même temps, l'*Anzahl* d'un objet et d'un concept), comme semble le faire Frege lui-même³³ – il n'en reste pas moins que ce qui fait que le concept $\mathfrak{I}_{\Theta^\odot}$ est vide est seulement le fait que Θ^\odot n'est pas un parcours de valeurs, plutôt que la manière dont les objets se distribuent parmi les concepts sous lesquels ils tombent.

Mais ce n'est pas encore tout. De ceci il suit, en effet, que la nature de 0 change dramatiquement selon si l'on admet la condition a , ou $\neg a$. Car si 0 s'identifie à $\mathcal{N}\emptyset$, alors il vient à être l'extension du concept $[x : \mathfrak{I}_x \approx \mathbf{F}_{1,1}^F]$ d'être le parcours de valeurs d'une fonction à un argument qui ne prend la valeur \mathbf{T} pour aucun argument. Or, alors que sous la condition $\neg a$, tous les objets autres que des parcours de valeurs tombent sous ce concept, de sorte que 0 est l'extension d'un concept sous lequel tombent tous ces objets, sous la condition a , 0 n'est que l'extension d'un concept sous lequel tombent seulement les extensions des fonctions qui ne prennent jamais la valeur \mathbf{T} . Donc si l'on ne pouvait pas décider entre la condition a et $\neg a$, on ne pourrait pas décider non plus la nature de 0.

Ainsi, même si la définition des *Anzahlen* de Frege était amendée conformément à (36) et (37), afin de la rendre univoque aussi sous la condition $\neg a$, il resterait que 0 serait un objet

³¹ Qu'on observe que (32) implique aussi que $\mathcal{N}\emptyset = \mathcal{N}\mathcal{E}\Phi^\ominus$, pour n'importe quelle fonction à un argument Φ^\ominus qui ne prend jamais la valeur \mathbf{T} . Comme rien ne permet de garantir qu'une telle fonction soit un concept, rien ne permet pas non plus de s'assurer que $\mathcal{E}\Phi^\ominus = \emptyset$, et que 0, ainsi qu'il est défini par Frege, soit l'*Anzahlen* d'un seul parcours de valeurs. Ceci ne dépend pas, cependant, de l'admission de la condition $\neg a$, car c'est de même aussi si cette condition n'est pas admise. De plus, ceci est aussi le cas de tous les *Anzahlen*, ainsi qu'ils sont définis par (32), car du fait que $\mathfrak{I}_\Theta \approx \mathfrak{I}_\Lambda$, pour deux objets Θ et Λ se suit nullement que $\Theta = \Lambda$, même si ces objets sont des parcours de valeurs.

³² La raison en est que $\mathfrak{I}_\emptyset \approx \mathfrak{I}_{\Theta^\odot}$, et que, dans les *Grundgesetze* (§ I.65, th. 32 et § I.69, th. 49), ce principe se réduit à : $\forall x, z [\mathcal{N}x = \mathcal{N}z \Leftrightarrow \mathfrak{I}_x \approx \mathfrak{I}_z]$

³³ Juste avant d'avancer sa définition (29), dans le § I.40, Frege observe, en effet que, en accord à sa définition des *Grundlagen* (§ 68), l'extension qui apparaît au membre de droite de cette définition, avec ' Δ ' à la place de ' u ' est « l'*Anzahlen* qui appartient au concept $_ \xi - \Delta$ », ou, pour faire court, « l'*Anzahlen* du Δ -concept ».

différent que cette dernière condition soit admise ou pas ; et, si elle l'était, sa nature ne serait pas en accord avec l'idée fondamentale selon laquelle les *Anzahlen* appartiennent à des concepts.

9. Conclusions

Cette dernière observation, couplée avec toutes les difformités mentionnées concernant les fonctions $\xi \dashv \Theta$, $_ \xi \dashv \Theta$, $\xi \dashv (\zeta \dashv \Theta)$, $_ \xi \dashv (\zeta \dashv \Theta)$, $\mathbf{I}\xi$, $\mathbf{)}\xi$, $\mathcal{U}\xi$ et $\mathcal{N}\xi$, suggère que, en dépit de certaines de ses formulations, Frege supposait tacitement que tout objet est un parcours de valeurs.

Cette supposition peut prendre au moins deux formes distinctes.

1. D'un côté, on peut imaginer que Frege considérait que son système admettait (dans un sens ou un autre) plusieurs interprétations, et qu'il travaillait tacitement, pour le dire en termes modernes, au sein du modèle attendu, un modèle minimal n'incluant que des parcours de valeurs comme éléments de niveau zéro. Ces derniers éléments pourraient, en particulier, être donnés par **T** et **F** – respectivement identifiés, en accord à la stipulation faite dans le § I.10, avec les extensions de $[x : _x]$ et de $[x : x = _ \neg \forall z [z = z]]$ – et par les autres parcours de valeurs des fonctions définissables dans le langage de ce système, et par rien d'autre. Il est, en effet, facile de voir que, si la seconde clause de la stipulation (1) est acceptée, ces fonctions ne peuvent qu'être telles que leurs valeurs peuvent ne pas être de parcours de valeurs seulement si leurs arguments ne les sont pas, à leur tour. Car, elles ne peuvent que résulter, par composition, des huit fonctions primitives propres à ce système – l'horizontal, la négation, l'implication, l'identité, les deux quantificateurs universels du premier et du deuxième ordre, la fonction parcours de valeurs, ou $\acute{\epsilon}\varphi(\epsilon)$, et la fonction $\backslash \xi \dashv$, dont les six premières sont des concepts ou relations (les quatre premières du premier niveau et les deux dernières du deuxième), et ne peuvent, donc, prendre que **T** et **F** comme valeurs, alors que la septième (une autre fonction de deuxième niveau) n'a, par sa nature, que des parcours de valeurs comme valeurs, et, du fait de la stipulation (1), la dernière (de premier niveau) a comme valeurs soit des parcours de valeurs ; soit les mêmes objets qui en fournissent l'argument.
2. Mais on peut aussi imaginer que Frege considérait que les objets dont il est question dans son système ne sont rien d'autre que les objets qui existent indépendamment de celui-ci, de sorte que ce système n'admet, à proprement parler, et du moins pour ce qui est de ses objets, qu'une seule interprétation (si on peut alors parler d'interprétation), donnée par le monde ainsi qu'il est, indépendamment du système lui-même. Pour pouvoir admettre que c'est ainsi, il faudrait aussi admettre que ce monde inclue, parmi ses objets, tous les parcours de valeurs des fonctions définissables dans le langage du système, ce qui est, pourtant, quelque chose que Frege aurait été prêt à accepter³⁴. Pour s'assurer que tout objet soit un parcours de valeurs, il faudrait, de surcroît, associer, à tout objet qui n'est pas immédiatement défini comme un parcours de valeurs, une fonction de premier niveau (éventuellement définissable seulement à condition d'élargir le langage en y ajoutant un nom pour cet objet), dont le parcours de valeurs n'est, par définition, rien qu'un tel objet.

³⁴ On remarque que cette supposition peut très bien s'accompagner de celle que les fonctions dont il est question dans le système ne sont que celles définissables dans son langage, ce qui permet de répéter aussi dans ce cadre, *mutatis mutandis*, l'argument précédent à propos des valeurs de ces fonctions.

Une manière de faire ceci est suggérée par la stipulation que Frege discute dans la seconde note de bas de page du § I.10³⁵. Après avoir suggéré, au cours de ce paragraphe, que, comme on l'a dit ci-dessus,

$$\mathbf{T} = \mathcal{E}[x : _x] \quad \text{et} \quad \mathbf{F} = \mathcal{E}[x : x = _ \neg \forall z[z = z]],$$

ce qui est équivalent à

$$\mathbf{T} = \mathcal{E}[x : x = \mathbf{T}] \quad \text{et} \quad \mathbf{F} = \mathcal{E}[x : x = \mathbf{F}], \quad (38)$$

Frege considère la possibilité de généraliser cette stipulation en établissant que, pour n'importe quel objet Θ ,

$$\Theta = \mathcal{E}[x : x = \Theta]. \quad (39)$$

Il observe, alors, que si Θ était le parcours de valeurs $\mathcal{E}\Phi$ d'une fonction (de premier niveau) Φ autre qu'un concept sous lequel tombe un seul objet, cette stipulation entrerait en contradiction avec LFV. Car, de son instance

$$\mathcal{E}\Phi = \mathcal{E}[x : x = \mathcal{E}\Phi],$$

il suivrait, en accord avec LFV, que

$$\forall z[\Phi(z) = (z = \mathcal{E}\Phi)],$$

ce qui n'est le cas qu'à condition que Φ soit un concept sous lequel tombe le seul objet $\mathcal{E}\Phi$, en contradiction avec ce qu'on a supposé à propos de Φ . Ceci l'amène à rechasser la stipulation (39). Il est pourtant facile de voir que, pour n'importe quel objet Θ , si Φ est le concept $[x : x = \Theta]$, sous lequel ne tombe que Θ lui-même, de (39) il suit que

$$\mathcal{E}[x : x = \Theta] = \mathcal{E}[x : x = \mathcal{E}[x : x = \Theta]],$$

et, donc, d'après LFV,

$$\forall z[(z = \Theta) = (z = \mathcal{E}[x : x = \Theta])],$$

qui est parfaitement conforme à (39). Il semblerait, alors, que rien n'empêche d'adopter la stipulation (39) sous la limitation que Θ ne soit pas le parcours de valeurs d'une fonction (de premier niveau) autre qu'un concept sous lequel tombe un seul objet³⁶. Il s'ensuivrait que tout objet serait soit le parcours de valeurs d'une fonction autre qu'un concept sous lequel tombe un seul objet, soit le parcours de valeurs du concept sous lequel il est le seul objet à tomber.

Mais considérons le parcours de valeurs $\mathcal{E}\Phi^{\triangleleft}$ d'une fonction (de premier niveau) Φ^{\triangleleft} autre qu'un concept sous lequel tombe un seul objet, par exemple \emptyset ou $@$. Quelle sera l'extension du concept $[x : x = \mathcal{E}\Phi^{\triangleleft}]$, par exemple celle de $[x : x = \emptyset]$ ou de $[x : x = @]$? Comme le montre l'argument de Frege, elle ne pourra certes pas être, respectivement, $\mathcal{E}\Phi^{\triangleleft}$, \emptyset , ou $@$, car ceci contredirait LFV. On devrait alors l'identifier avec un objet distinct de ceux-ci, qu'on pourrait dénoter par $\{\mathcal{E}\Phi^{\triangleleft}\}$, $\{\emptyset\}$, ou $\{@\}$. Mais, alors, quelle sera l'extension de

³⁵ Cf. la note (10), ci-dessus.

³⁶ En discutant la stipulation (39), Frege rejette la possibilité de l'adopter seulement pour « ces objets qui ne nous sont pas donnés comme des parcours de valeurs », car « la manière dans laquelle un objet est donné ne doit pas être regardée comme sa propriété immuable ». Quoiqu'on pense de cette remarque, lorsqu'elle s'applique à des objets abstraits, il reste que la limitation dont il est ici question ne tombe pas sous cette critique, car elle ne concerne pas la manière dont Θ nous est donné, mais ce qu'il est. Si cette limitation permet d'appliquer cette stipulation à tout objet qui n'est pas immédiatement défini comme un parcours de valeurs, ce n'est que parce que, dans le cadre de ce qu'on a qualifié de sémantique informelle du système de Frege, définir un objet comme un parcours de valeurs revient à en fixer la nature intrinsèque.

$[x : x = \{\mathcal{E}\Phi^{\triangleleft}\}]$, $[x : x = \{\emptyset\}]$, ou $[x : x = \{\textcircled{\emptyset}\}]$? Si la stipulation (39) n'était limitée que comme on vient de le dire, on devrait en tirer qu'elle ne sera rien d'autre que $\{\mathcal{E}\Phi^{\triangleleft}\}$, $\{\emptyset\}$, ou $\{\textcircled{\emptyset}\}$, car ces objets ne sont que les parcours de valeurs d'un concept (de premier niveau) sous lequel tombe un seul objet. Si on voulait adopter la stipulation (39), on devrait alors la limiter différemment : on devrait préciser qu'elle s'applique seulement à n'importe quel objet Θ distinct de $\{\mathcal{E}\Phi^{\triangleleft}\}^n$ ($n = 0, 1, \dots$), pourvu que

$$\{\mathcal{E}\Phi^{\triangleleft}\}^0 =_{df} \mathcal{E}\Phi^{\triangleleft} \quad \text{et} \quad \{\mathcal{E}\Phi^{\triangleleft}\}^{n+1} =_{df} \mathcal{E}[x : x = \{\mathcal{E}\Phi^{\triangleleft}\}^n],$$

et que Φ^{\triangleleft} soit une fonction autre qu'un concept (de premier niveau) sous lequel tombe un seul objet.

Adoptons, alors, cette stipulation sous cette restriction, et imaginons que Θ^{\triangleright} soit un objet distinct de $\{\mathcal{E}\Phi^{\triangleleft}\}^n$, par exemple Jules Caesar, pourvu qu'il soit un tel objet³⁷. Il s'ensuivra que Θ^{\triangleright} sera le même objet que $\mathcal{E}[x : x = \Theta^{\triangleright}]$ et Jules Caesar le même objet que $\mathcal{E}[x : x = \text{Jules Caesar}]$ et ils seront, de ce fait, des parcours de valeurs. Pour n'importe quel énoncé \mathcal{A} , dénotons par ' $\mathfrak{W}(\mathcal{A})$ ' la valeur de vérité de \mathcal{A} . D'après la première clause de (1), (2) et (7) il suivra que

$$\begin{aligned} \Gamma \frown \Theta^{\triangleright} &= \backslash \mathcal{E} [x : \exists g[\Theta^{\triangleright} = \mathcal{E}g \wedge g(\Gamma) = x]] \\ &= \backslash \mathcal{E} [x : \exists g[\mathcal{E}[z : z = \Theta^{\triangleright}] = \mathcal{E}g \wedge g(\Gamma) = x]] \\ &= \backslash \mathcal{E}[x : x = \mathfrak{W}(\Gamma = \Theta^{\triangleright})] \\ &= \mathfrak{W}(\Gamma = \Theta^{\triangleright}) \end{aligned} \tag{40}$$

et

$$\begin{aligned} \Delta \frown (\Gamma \frown \Theta^{\triangleright}) &= \backslash \mathcal{E} [x : \exists g[\Gamma \frown \Theta^{\triangleright} = \mathcal{E}g \wedge g(\Delta) = x]] \\ &= \backslash \mathcal{E} [x : \exists g[\mathfrak{W}(\Gamma = \Theta^{\triangleright}) = \mathcal{E}g \wedge g(\Delta) = x]], \end{aligned} \tag{41}$$

pour n'importe quels objets Γ et Δ . De (40) on tirera immédiatement que

$$\forall x [(x = \Theta^{\triangleright} \Rightarrow x \frown \Theta^{\triangleright} = \mathbf{T}) \wedge (x \neq \Theta^{\triangleright} \Rightarrow x \frown \Theta^{\triangleright} = \mathbf{F})]. \tag{42}$$

De (41) et (38), on aura, par contre, que

$$\forall x, y \left[\begin{array}{l} [x = \Theta^{\triangleright} \Rightarrow y \frown (x \frown \Theta^{\triangleright}) = \backslash \mathcal{E}[z : (y = \mathbf{T}) = z]] \wedge \\ [x \neq \Theta^{\triangleright} \Rightarrow y \frown (x \frown \Theta^{\triangleright}) = \backslash \mathcal{E}[z : (y = \mathbf{F}) = z]] \end{array} \right]$$

et donc, d'après la première clause de (1), à nouveau :

$$\forall x, y \left[\begin{array}{l} [(x = \Theta^{\triangleright} \wedge y = \mathbf{T}) \Rightarrow y \frown (x \frown \Theta^{\triangleright}) = \backslash \mathcal{E}[z : z = \mathbf{T}] = \mathbf{T}] \wedge \\ [(x = \Theta^{\triangleright} \wedge y \neq \mathbf{T}) \Rightarrow y \frown (x \frown \Theta^{\triangleright}) = \backslash \mathcal{E}[z : z = \mathbf{F}] = \mathbf{F}] \wedge \\ [(x \neq \Theta^{\triangleright} \wedge y = \mathbf{F}) \Rightarrow y \frown (x \frown \Theta^{\triangleright}) = \backslash \mathcal{E}[z : z = \mathbf{T}] = \mathbf{T}] \wedge \\ [(x \neq \Theta^{\triangleright} \wedge y \neq \mathbf{F}) \Rightarrow y \frown (x \frown \Theta^{\triangleright}) = \backslash \mathcal{E}[z : z = \mathbf{F}] = \mathbf{F}] \end{array} \right]. \tag{43}$$

Pour n'importe quel objet Θ^{\triangleright} distinct de $\{\mathcal{E}\Phi^{\triangleleft}\}^n$, la première clause de (1) sera, alors, suffisante, si couplée avec les stipulations (38), pour faire en sorte que les fonctions $\xi \frown \Theta^{\triangleright}$ et $\xi \frown (\zeta \frown \Theta^{\triangleright})$ se réduisent, respectivement, à un concept et une relation ne souffrant d'aucune

³⁷ Naturellement, la supposition que Jules Caesar est un objet distinct de $\{\mathcal{E}\Phi^{\triangleleft}\}^n$ n'est, dans le cadre de l'hypothèse qu'on est en train de discuter, qu'une supposition quant au monde ainsi qu'il est. Même si on voulait la rejeter, on devrait de toute manière supposer que ce monde inclut d'autres objets distincts de $\{\mathcal{E}\Phi^{\triangleleft}\}^n$.

ambiguïté, et parfaitement en accord avec (3) et (8)³⁸. Ces dernières identités s'appliqueraient, en revanche, comme telles, aux fonctions $\xi \dashv \{ \mathcal{E}\Phi^{\triangleleft} \}^n$ et $\xi \dashv (\zeta \dashv \{ \mathcal{E}\Phi^{\triangleleft} \}^n)$.

Les objets dont il est question dans le système de Frege seraient alors de deux sortes : ceux comme Θ^{\triangleright} que l'on pourrait qualifier de primitifs, comptant comme parcours de valeurs de concepts comme $[x : x = \Theta^{\triangleright}]$, et parmi lesquels il y aurait **T** et **F** ; et ceux comme $\{ \mathcal{E}\Phi^{\triangleleft} \}^n$, que l'on pourrait qualifier de définis, parmi lesquels il y aurait \emptyset , @ et beaucoup d'autres. Les deux sortes d'objets existeraient dans le monde ainsi qu'il est, mais, alors que les seconds seraient les éléments d'une multiplicité de hiérarchies récursives, les premiers resteraient isolés, n'admettant qu'une infinité récursive de noms, car :

$$\begin{aligned} \Theta^{\triangleright} &= \mathcal{E}[x : x = \Theta^{\triangleright}] \\ &= \mathcal{E}[x : x = \mathcal{E}[x : x = \Theta^{\triangleright}]] \\ &= \mathcal{E}[x : x = \mathcal{E}[x : x = \mathcal{E}[x : x = \Theta^{\triangleright}]]] \\ &= \dots \end{aligned}$$

Quels que soient les mérites respectifs de ces deux hypothèses (qu'il n'y a pas ici lieu d'évaluer), il est clair que choisir la première ne fait aucunement disparaître les objets de la seconde et, encore moins, les deux parcours de valeurs **T** et **F**, qui, d'après la stipulation faite dans le § I.10, resteraient de toute manière en dehors de la multiplicité de hiérarchies récursives formée par ces objets. Pour mieux comprendre la sémantique informelle du système de Frege, il faudrait, donc, de toute manière, s'interroger sur la structure de cette multiplicité de hiérarchies, et, éventuellement, sur ce qu'elles pourraient devenir dans les différentes variantes de ce système apte à le rendre consistant. Mais ceci n'est pas une tâche que l'on peut accomplir ici. Je me limite à l'indiquer, en la laissant comme un argument pour de nouvelles discussions avec Hourya.

10. Bibliographie

Benis-Sinaceur Hourya, Panza Marco, et Sandu Gabriel, (Éds), 2015, *Functions and Generality of Logic. Reflections on Dedekind and Frege's Logicism*, Springer.

Frege Gottlob, 1884, *Die Grundlagen der Arithmetik. Eine logisch-mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl*, Breslau, Wilhelm Koebner. Trad. fr. Imbert C., 1969, *Les Fondements de l'arithmétique*, L'ordre philosophique, Seuil, Paris. Toutes les références sont à la traduction française.

³⁸ En posant $\Theta^{\triangleright} = \mathcal{E}[z : z = \Theta^{\triangleright}]$ de (3) il s'ensuit, en effet, que

$\Gamma \dashv \Theta^{\triangleright} = \Gamma \dashv \mathcal{E}[z : z = \Theta^{\triangleright}] = \setminus \mathcal{E}[x : \exists g[\mathcal{E}[z : z = \Theta^{\triangleright}] = \mathcal{E}g \wedge g(\Gamma) = x]] = \setminus \mathcal{E}[x : x = (\Gamma = \Theta^{\triangleright})] = \mathfrak{B}(\Gamma = \Theta^{\triangleright})$, en accord avec (42). Pour montrer l'accord de (8) et (43), supposons que Ψ^{\triangleright} soit une fonction à deux arguments telle que

$$\mathcal{E}_\varepsilon \Psi^{\triangleright}(\varepsilon, \Gamma) = \begin{cases} \mathcal{E}[x : x = \mathbf{T}] = \mathbf{T} & \text{si } \Gamma = \Theta^{\triangleright} \\ \mathcal{E}[x : x = \mathbf{F}] = \mathbf{F} & \text{si } \Gamma \neq \Theta^{\triangleright}. \end{cases}$$

Les fonctions $\mathcal{E}_\varepsilon \Psi^{\triangleright}(\varepsilon, \zeta)$ et Ψ^{\triangleright} coïncideront alors, respectivement, avec le concept $[x : x = \Theta^{\triangleright}]$ et la relation $[x, y : (y = \Theta^{\triangleright} \Rightarrow x = \mathbf{T}) \wedge (y \neq \Theta^{\triangleright} \Rightarrow x = \mathbf{F})]$, et de (8) il suivra que

$$\begin{aligned} \Delta \dashv (\Gamma \dashv \Theta^{\triangleright}) &= \Delta \dashv (\Gamma \dashv \mathcal{E}[x : x = \Theta^{\triangleright}]) \\ &= \Delta \dashv (\Gamma \dashv \mathcal{E}_\alpha[\mathcal{E}_\varepsilon \Psi^{\triangleright}(\varepsilon, \zeta)]) \\ &= \Psi^{\triangleright}(\Delta, \Gamma) \\ &= \mathfrak{B}([\Gamma = \Theta^{\triangleright} \Rightarrow \Delta = \mathbf{T}] \wedge [\Gamma \neq \Theta^{\triangleright} \Rightarrow \Delta = \mathbf{F}]), \end{aligned}$$

en accord avec (43).

Frege Gottlob, 1893, *Grundgesetze der Arithmetik begriffsschriftlich abgeleitet*, Vol I (1893), Vol II (1903), H. Pohle, Jena.

Remerciements. Les considérations que je présente ici tiennent à un projet plus ample qui concerne l'étude des relations entre la notion de parcours de valeurs de Frege, en particuliers les stipulations qu'il avance à ce sujet dans les §§ I.10-11 des *Grundgesetze*, sa définition des *Anzahlen*, et sa proto-théorie des ensembles (s'il y en a une), que je mène en collaboration avec Robert May. Bien que je porte seul la responsabilité de ce qui est exposé ici, je tiens à le remercier pour son apport tout au long de cette réflexion. Des remerciements majeurs vont aussi à Joan Bertran-San Millán, Méven Cadet, David Rabouin, et, surtout, Emmylou Haffner pour leurs aides diverses dans la rédaction de mon texte. Naturellement, le plus grand remerciement va cependant à Hourya, qui, par son exemple constant, a toujours été pour moi, une source d'inspiration et un motif de passion pour la recherche en histoire et philosophie des mathématiques et de la logique.