



THE ANALYTICAL ENGINE : DIAGRAMMES DE FONCTIONNEMENT, DE BABBAGE A LOVELACE

Marie-José Durand-Richard

► To cite this version:

Marie-José Durand-Richard. THE ANALYTICAL ENGINE : DIAGRAMMES DE FONCTIONNEMENT, DE BABBAGE A LOVELACE. Sarah Carvallo. Ancrages matériels, imagination diagrammatique et publication encyclopédique, Presses Universitaires de Besançon, A paraître. <halshs-03949649>

HAL Id: halshs-03949649

<https://shs.hal.science/halshs-03949649v1>

Submitted on 17 Feb 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



HAL Authorization

THE ANALYTICAL ENGINE : DIAGRAMMES

DE FONCTIONNEMENT, DE BABBAGE A LOVELACE¹

Marie-José DURAND-RICHARD

Charles Babbage (1791-1871) est souvent considéré aujourd'hui comme un pionnier de l'informatique², et Ada Lovelace (1815-52) comme la première programmatrice³. Cette présentation relève d'une approche rétrospective de l'histoire, qui tend à ne retenir du passé que les traces de nos connaissances présentes. Elle fait fi du contexte de production des idées nouvelles, et gomme de ce fait la richesse de leur processus d'émergence, ainsi que la longue série de réinterprétations qui ont accompagné leur transmission, ici jusqu'à la constitution de la discipline informatique. Qui plus est, se concentrer sur le rôle de quelques individus isolés, trop vite qualifiés de génies précurseurs, conduit à ignorer le contexte qui a nourri leur cheminement intellectuel, et à projeter sur leurs travaux une perspective quelque peu erronée sur la signification de leur démarche. C'est pourquoi la première partie de cet article s'attachera à rappeler que Babbage fut d'abord un algébriste anglais de la première moitié du 19^{ème} siècle. *The Analytical Engine*, dont il élabore les plans sur plusieurs décennies, apparaît comme une volonté de matérialiser une conception purement opératoire de l'algèbre, alors produite à Cambridge dans le cadre d'une entreprise de réforme radicale de l'enseignement des mathématiques, initiée par Babbage avec d'autres étudiants. Le travail de matérialisation des calculs qu'il entreprend à partir de 1819 est présenté dans la deuxième partie. Bien que cette machine n'ait jamais été construite, Babbage va s'efforcer d'en spécifier le fonctionnement, notamment lors d'une présentation donnée en Italie en 1840. Le compte-rendu qu'en publie Luigi F. Menabrea (1809-96) en 1842 contient une série de diagrammes, que je qualifie de statiques, et qui seront analysés dans la troisième partie. Ils exemplifient l'affichage numérique

¹ Cette recherche a débordé fait l'objet de trois exposés donnés dans le cadre du projet ANR « PROGRAMME » conduit par Liesbeth de Mol : à Bertinoro (Italie) en 2018, au séminaire Codes Sources en 2019, au colloque « Ancrages matériels, imagination diagrammatique et publication encyclopédique » (Besançon 2019).

² C'est ainsi que le considère Antony Hyman dans sa biographie, ainsi que *The Charles Babbage Institute for the history of Information Processing*, à l'université de Minneapolis (Minnesota).

³ Un langage de programmation développé par le Département de la Défense des Etats-Unis a été nommé Ada en son honneur en 1979.

des colonnes de roues dentées qui stockent les résultats des opérations. Dans son « Sketch of the Analytical Engine », publié en 1843, Lovelace ne se contente pas de traduire l'article de Menabrea. Elle ajoute une série de notes où elle explicite longuement les caractéristiques de la machine, et donne de diagrammes plus complets, que je qualifie de dynamiques, détaillant l'affichage des colonnes de roues dentées tout au long des procédures de calcul. Leur caractérisation fera l'objet de la dernière partie.

Vers une conception opératoire de l'algèbre

L'Angleterre pré-victorienne est le théâtre de mutations multiples. La Révolution Industrielle (1760-1830), alors en pleine expansion, y produit d'importants bouleversements, tant politiques que sociaux et culturels. A l'université de Cambridge, dont les statuts n'ont pas changé depuis 1616, Babbage et ses amis vont déployer une volonté politique de réformes, tant institutionnelles que conceptuelles. Il s'agit d'adapter l'enseignement aux nouvelles formes de savoir issues à la fois des avancées continentales et de pratiques nouvelles où l'expérimentation le dispute à la connaissance livresque⁴.

Si l'enseignement propédeutique à Cambridge est fondé sur les mathématiques, il privilégie la géométrie euclidienne et la présentation newtonienne du calcul infinitésimal, dont les références à la vérité s'enracinent sur la tradition classique et le respect d'un savoir ancré dans le passé. A l'heure où la *Mécanique Céleste* (1799-1825) de P.S. de Laplace (1749-1827) réconcilie les approches newtonienne et leibnizienne de l'astronomie, l'urgence est d'introduire rapidement la notation différentielle de ce calcul – celle de Leibniz – avec, par voie de conséquence épistémologique, l'ambition de fondre l'algèbre comme science afin qu'elle devienne la nouvelle propédeutique de l'enseignement des mathématiques à Cambridge.

The Analytical Society et son programme de recherche

C'est dans cette perspective qu'un groupe d'étudiants, réunis autour de Babbage, fonde en 1812 *The Analytical Society*. La préface de son unique volume de *Memoirs* contient un véritable programme fondationnel, analysant les apports continentaux pour les structurer en une approche purement symbolique et opératoire de l'algèbre, où le calcul sur les séries occupe une place centrale⁵.

⁴ Durand-Richard 1996.

⁵ Babbage 1813.

Si cette initiative audacieuse passe presque inaperçue, le *Traité élémentaire du calcul différentiel et intégral* de Sylvestre-François Lacroix (1765-1833), que traduisent Babbage, George Peacock (1791-1858) et John F. W. Herschel (1792-1871) en 1816, accompagné de trois volumes d'exemples, impulse l'adoption de la notation différentielle dans les examens à Cambridge. Si leur collaboration se poursuit dans leur correspondance, il reviendra à Babbage de mener une réflexion approfondie sur le rôle de la notation en mathématiques dans les années 1820-1830, et à Peacock de proposer une approche restructurée de l'algèbre en 1830. Le réseau d'algébristes qui se constitue alors, qualifié parfois d'école symbolique ou philologique, inclut des auteurs plus connus, comme Augustus de Morgan (1806-71), George Boole (1815-64), Arthur Cayley (1821-95), James J. Sylvester (1814-97), ainsi que toute une nébuleuse d'auteurs moins célèbres qui contribueront à installer durablement cette perspective, qui n'envahira pourtant pas le champ entier des mathématiques⁶.

Dès 1819, et pendant toute la première moitié du 19^{ème} siècle, ces algébristes vont également s'investir dans la création de nouvelles sociétés savantes d'importance nationale afin de rééquilibrer le dynamisme des villes industrielles⁷. Ils constituent le cœur d'un mouvement réformateur, le « network of Cambridge », visant à réunifier les classes sociales autour de la science, et autour de nouveaux critères de vérité issus de la Révolution Industrielle, en articulant l'expérience et la loi⁸.

L'Algèbre Symbolique comme science des opérations⁹

Même si Peacock vise à remplacer la géométrie par l'algèbre comme base de l'enseignement à Cambridge, il serait épistémologiquement erroné de le qualifier de « prphète de l'algèbre abstraite »¹⁰. Telle qu'il l'envisage, l'Algèbre Symbolique se veut à la fois à la fois « langage du raisonnement symbolique », opérant sur des symboles tout à fait généraux, et héritière des pratiques algébriques issues de la littéralisation de l'arithmétique. C'est pourquoi il n'en donne pas une présentation hypothético-déductive, ni dans *A Treatise on Algebra* (1830), destiné aux étudiants, ni dans le Rapport présenté à Cambridge en 1833 au 3^{ème} congrès de la

⁶ Durand-Richard 2021.

⁷ Morrell & Thackray, MacLeod.

⁸ Cannon 1964, Durand-Richard 2011a.

⁹ Ce terme est effectivement employé par Gregory en 1939. Il sera repris par Lovelace dans ses notes à la traduction du texte de Menabrea.

¹⁰ Boyer p. 510.

british Association for the Advancement of Science. Il lui préfère une présentation historico-génétique¹¹ en trois étapes, qui respecte cet ancrage dans les pratiques de l'algébriste au travail :

- l'arithmétique, qui n'est en aucun cas une théorie des entiers. Elle rassemble plutôt toutes les pratiques opératoires sur les entiers, engendrant à la fois les décimaux et les racines carrées¹²,
- l'algèbre arithmétique, issue de la littéralisation de l'arithmétique, mais qui respecte la signification initiale des opérations et la rigueur du raisonnement. Elle est ainsi obligée de conserver toutes les limitations de l'arithmétique : $a - b$ n'existe que si $a \geq b$. Les symboles y sont généraux dans leur forme, mais pas dans leur valeur.
- l'algèbre symbolique, dont les formes symboliques n'obéissent qu'aux règles de combinaison. Ses symboles sont arbitraires, c'est-à-dire généraux dans leur forme et dans leur valeur. Ses formules au sein de l'algèbre arithmétique, parmi celles qui ne comportent aucune limitation sur la signification des symboles, en appliquant le « principe de permanence des formes équivalentes » :

« (A) Proposition directe : Toute forme qui est algébriquement équivalente à une autre quand elle est exprimée en symboles généraux doit continuer à lui être équivalente, quel que soit ce que ces symboles représentent.

(B) Proposition réciproque : Toute forme équivalente qui est découverte en algèbre arithmétique considérée comme science de suggestion, lorsque les symboles sont généraux dans leur forme, bien que spécifiques dans leur valeur, doit continuer à être une forme équivalente quand les symboles sont généraux dans leur nature aussi bien que dans leur forme »¹³.

Ce principe est explicitement destiné à éviter tout recours aux analogies opératoires qui ont jusqu'ici alimenté l'invention de méthodes et d'entités nouvelles en algèbre. Ici, :

$$a - (b + c) = a - b - c$$

quelles que soient les valeurs des symboles, en particulier lorsque $a = b$, légitimant ainsi l'existence de quantités négatives. Il en est de même pour leurs racines carrées, qui légitiment l'existence de quantités dites « impossibles ». Et surtout :

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots \& c$$

¹¹ Ceci est ma dénomination.

¹² Peacock vient d'en écrire une impressionnante histoire, très documentée, pour l'*Encyclopaedia Metropolitana*, où les systèmes de numération sont structurés par les opérations, et leur élaboration envisagée comme une étape fondamentale dans la formation du langage mathématique, qui passe des pratiques aux mots, puis aux signes. Durand-Richard 2011a.

¹³ Peacock, 1833, p. 210. Toutes les traductions sont le fait de l'autrice de cet article.

ainsi que la formule du binôme, donnent des formes équivalentes indépendamment des valeurs des symboles. L'existence numérique des résultats s'efface devant la validité opératoire. Peacock fonde ici l'universalité des calculs symboliques en les séparant radicalement de toute référence à leur signification. Les opérations sont désormais définies, non plus par la production de résultats numériques, mais par les « lois de combinaison » qui organisent leurs transformations. Elles sont connues à partir de celles des opérations de l'arithmétique :

« Les opérations appelées *addition* et *soustraction* sont désignées par les signes + et –. Elles sont inverses l'une de l'autre.

Dans la concurrence des signes + et –, quelle que soit la manière dont ils sont utilisés, si deux signes se suivent, qu'ils soient + et +, ou – et –, ils sont remplacés par le signe +; et quand deux signes différents se suivent, qu'ils soient + et –, ou – et +, ils sont remplacés par le seul signe –.

Quand différentes opérations sont effectuées ou indiquées, l'ordre dans lequel elles se succèdent est indifférent »¹⁴.

Le même type de principe mixte d'associativité-commutativité vaut également pour la multiplication et la division, associées elles aussi comme opérations inverses.

Le double principe de permanence a sans aucun doute une validité logique contestable au vu de la structuration des mathématiques d'aujourd'hui. Mais il importe de tenir compte du fait que Peacock travaille antérieurement à la construction des réels et à la théorie des ensembles élaborées à la fin du 19^{ème} siècle, et qu'il tente d'y suppléer par un recours au symbolisme. De fait, le principe de permanence se soutient bien davantage de la référence à l'empirisme modéré de John Locke (1637-1704). L'*Essay concerning Human Understanding* (1694) déploie une philosophie dans laquelle la perception est certes au fondement de la connaissance, mais elle révèle, par réflexion sur ses propres pratiques, leur enracinement sur les opérations de l'esprit et leur fonctionnement. Cet *Essay* est enseigné à l'université, et les écrits de Babbage et de Peacock – plus tard ceux de Duncan F. Gregory (1813-44) – reprennent, tant dans leur vocabulaire que dans leur méthodologie, les thèmes essentiels de cette philosophie : connaissance construite à partir de la combinaison d'idées simples issues de la perception des opérations de l'esprit, distinction entre réalité et perception, arbitraire du signe, essence strictement nominale des entités algébriques¹⁵. Dès la préface des *Memoirs* en 1813, Babbage exprime le programme de recherche de *The Analytical Society* en termes lockéens :

¹⁴ Peacock 1833, pp. 196-97.

¹⁵ Durand-Richard 1991 et 2011a.

« Observer attentivement les opérations de l'esprit dans la découverte de nouvelles vérités, et retenir en même temps ces liens fugitifs, qui fournissent une connection momentanée avec des idées éloignées, dont on déduit la connaissance de leur existence plutôt à partir de la raison que de la perception, sont les objets à la poursuite desquelles on ne peut espérer le succès que grâce à la plus patiente persévérance »¹⁶.

Ainsi s'éclaire la double fonction – quelque peu ambiguë – de l'algèbre arithmétique dans la reconstruction épistémologique de Peacock. Ontologiquement subordonnée à l'algèbre symbolique, en ce sens que la signification est postérieure au calcul, elle intervient en même temps comme « science de suggestion » dans la production des formes équivalentes, l'expérience révélant en quelque sorte les lois de combinaison des opérations de l'esprit.

Les successeurs de Peacock, notamment Gregory et Boole auront à cour de se libérer du principe de permanence. Gregory élaborera un principe de transfert, repris par Boole, susceptible de légitimer l'identité du fonctionnement opératoire entre différents domaines – nombres, classes d'objets, opérateurs différentiels, opérateurs de différences finies – pour peu qu'elles obéissent initialement aux mêmes lois de combinaison fondamentales¹⁷.

Babbage et la mécanisation des opérations

Le caractère automatique des transformations algébriques interroge les mathématiciens anglais depuis le tournant du siècle : certains le dénigrent dans la mesure où il réduit la pensée humaine à un simple mécanisme, d'autres en louent la richesse productive. Cette tension épistémologique n'est pas dépourvue d'écho sociologique, dans une société où la tradition des *learned men* – celle des universités de Cambridge et d'Oxford se trouve confrontée au dynamisme des *practical men* des nouvelles villes industrielles¹⁸. Là encore, la philosophie de Locke offre la possibilité de réconcilier ces deux options, en marquant l'interaction nécessaire entre les processus de calcul – susceptibles d'automatisation – et l'élaboration des formes symboliques que produisent les théoriciens.

Si l'adoption de la notation différentielle conduit les algébristes de Cambridge à rechercher un changement de statut pour l'algèbre – afin de lui conférer celui d'une science – ce serait un raccourci de l'histoire de l'interpréter immédiatement comme une recherche de

¹⁶ Babbage 1813, p. .

¹⁷ Durand-Richard 2021a.

¹⁸ Durand-Richard 1996.

structures abstraites¹⁹. Replongé dans son contexte²⁰, ce langage symbolique apparaît plutôt comme relevant de la recherche d'une méthode générale de résolution des équations différentielles, parce qu'elles sont omniprésentes dans le programme laplacien qui prolonge et renouvelle celui d'Isaac Newton (1642-1824)²¹.

Si Babbage est d'abord un mathématicien, il est d'emblée concerné par les effets de la Révolution Industrielle sur le devenir de la société britannique, notamment par leur impact sur la vie scientifique. Son étude encyclopédique du monde industriel, *On the Economy of Machinery and Manufactures* (1832) est le fruit d'une vaste enquête²² menée depuis 1819. Il y place délibérément et pour la première fois l'usine au centre de la scène économique, et prône la régulation de la pratique industrielle par la théorisation scientifique afin de juguler les violents troubles sociaux – manifestations, destructions de machines – qui déstabilisent alors la société britannique.

« Les sciences appliquées décrivent les faits de l'expérience : mais les raisonnements, dont dépend leur principale utilité, sont la province de ce qu'on appelle science abstraite. Il a été montré que la division du travail n'est pas moins applicable aux productions mentales qu'à celles qui concernent les corps matériels ; et il s'ensuit que les efforts pour l'amélioration de ses manufactures, que tout pays doit faire avec la plus grande probabilité de succès, doit provenir de l'exercice combiné des plus habiles théoriciens, aussi bien que de la pratique des arts, chacune travaillant dans le secteur où ses capacités naturelles et ses habitudes acquises le rendent le plus efficace »²³.

The Difference Engine

C'est précisément dans ce cadre que Babbage va s'intéresser à la production de machines mathématiques à partir de 1819, jusqu'à y investir sa vie et sa fortune personnelle, déménageant pour pouvoir installer un atelier à son domicile et diriger le travail des quelques artisans en charge de ses projets²⁴. Il conçoit d'abord la machine aux différences, dont un modèle de base est construit dès 1822, afin d'éviter toute intervention humaine dans

¹⁹ Comme l'ont fait par exemple Bourbaki p. 74, Bachelard, Novy.

²⁰ Vattimo, Corry.

²¹ Aussi bien Babbage et Peacock que Gregory et Boole publieront sur le sujet, abordant à la fois les méthodes symboliques et les méthodes fonctionnelles. Durand-Richard, 2021.

²² Elle est aujourd'hui reconnue comme essentielle à la compréhension du monde industriel, au même titre que la *Philosophy of Manufactures* (1835) de Andrew Ure, et citée aussi bien par John Stuart Mill dans ses *Principles of Political Economy* (1848) que par Karl Marx dans les chapitres « la division du travail et la manufacture », et « Le machinisme et la grande industrie » du *Capital*.

²³ Babbage 1832, p. 261.

²⁴ Hyman,.

l'élaboration des tables trigonométriques et logarithmiques destinées à l'astronomie et la navigation. Sur le plan théorique, elle matérialise une méthode d'approximation pour la résolution des équations différentielles : la méthode aux différences finies. Sur un certain intervalle, une fonction peut être approchée par les valeurs d'un polynôme. Et puisque, pour un polynôme de degré n , les différences n -ièmes sont constantes, il est possible, par additions successives, de calculer toutes la valeurs de la fonction pour des valeurs équidistantes de la variable, en ne connaissant que les valeurs initiales de la fonction et de ses différences. Par exemple, pour la fonction $f(x) = x^2$:

0	→	1		4		9		16		25		36		49		64	
	\	1		→	3		5		7		9		11		13		15
		\	2		→	2		2		2		2		2		2	
			\	0		0		0		0		0		0		0	

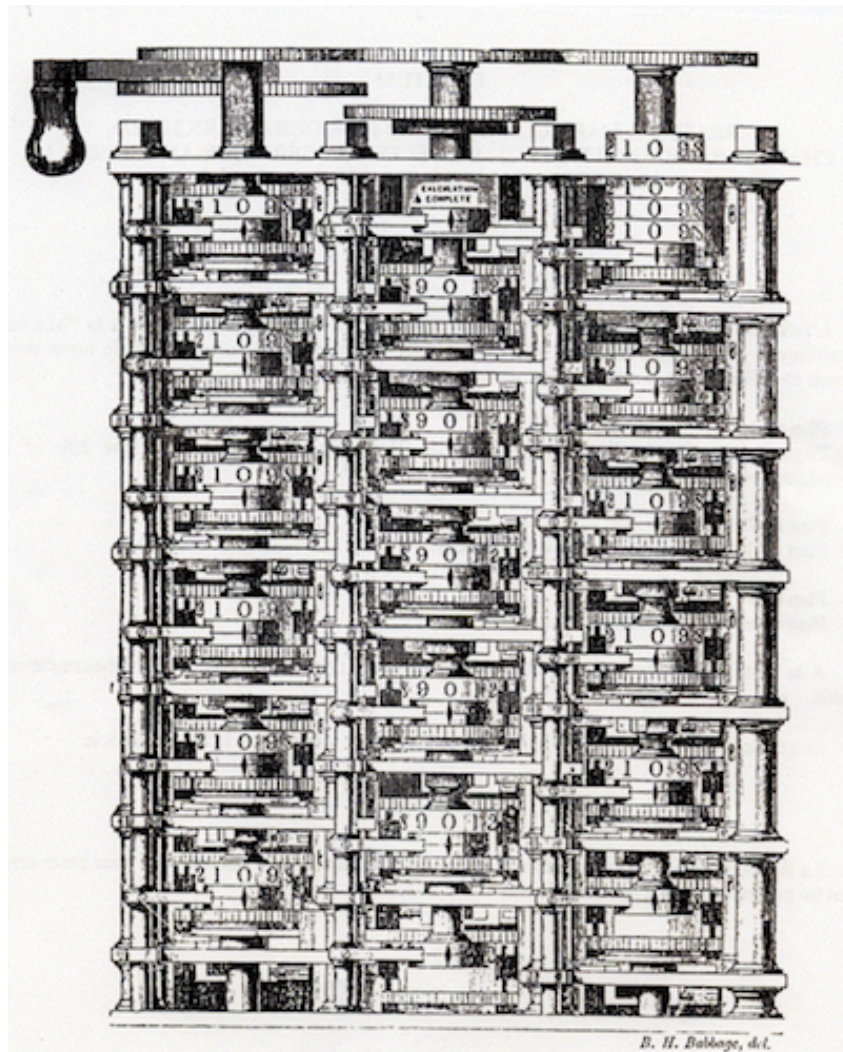


Fig. 1. The Difference Engine. 1933.
Page de garde de *The Life of a Philosopher*. Babbage 1864.

Sur le plan pratique, la machine aux différences réalise la séparation entre l’affichage des valeurs numériques d’une fonction, effectué manuellement au départ sur les colonnes de nombres de la machine, et le fonctionnement opératoire qui mécanise les additions successives en tournant la manivelle, et qui permet d’obtenir les valeurs de la fonction, en passant des valeurs d’une différence d’ordre n à celles d’une différence d’ordre $n-1$.

Le projet initial est d’envergure. Il part des différences d’ordre 6 avec des valeurs à 16 chiffres, et associe une imprimante. mais, face aux difficultés techniques et financières de sa réalisation, seul un modèle à 2 différences sera assemblé en 1833, avec des valeurs à 6 chiffres²⁵. Babbage réalisera des plans plus perfectionnés à partir de 1855, d’après lesquels une imposante machine aux différences sera réalisée au Science Museum de Londres en 1991, avec son imprimante, pour le deuxième centenaire de la naissance de Babbage²⁶.

The Analytical Engine

La machine aux différences a une structure linéaire. Elle est initialement conçue pour le calcul des valeurs d’une fonction dont un certain ordre de différences a une valeur constante, comme $\Delta^2 y = k$, introduite au départ et une fois pour toutes dans la machine. Babbage imagine alors la possibilité d’introduire une valeur de la dernière différence qui dépende du calcul précédent, comme $\Delta^2 u_{n+1} = \text{chiffre des unités de } u_n$. Il est ainsi conduit à envisager une nouvelle machine dont l’unité de calcul a une structure circulaire, et où les nombres sont stockés séparément sur le même type de colonnes que dans la machine aux différences (fig. 2). L’organisation des différentes parties de cette calculatrice mécanique automatique à programme externe matérialise le principe de la division du travail. Elle inspire en général aux historiens un rapprochement avec l’architecture Von Neumann d’un ordinateur. Leur désignation est directement issue du vocabulaire de l’industrie : les colonnes de nombres sont réparties le long d’un râtelier (*the rack*) qui gère les entrées-sorties, les nombres sont amenés depuis le magasin (*the store*) à l’unité de calcul (*the mill*), via un système de cartes perforées du type de celles du métier Jacquard (*variables cards*). La suite des opérations d’un calcul

²⁵ Ce modèle, exposé au South Kensington Museum, de Londres, fonctionne toujours parfaitement.

²⁶ Pour une description plus détaillée de la machine aux différences, voir Durand-Richard, 2011, Grattan-Guinness.

donnée est inscrite sur une suite de cartes perforées (*operation cards*) qui passent sur de cylindres à picots constituant le dispositif de contrôle²⁷.

Tous les types de développement en série peuvent être effectués, donnant aussi bien des fonctions connues que des fonctions inconnues, des fonctions susceptibles ou non d'interprétation. Telle qu'elle est conçue comme matérialisation de l'algèbre symbolique, la machine analytique a la capacité d'effectuer toutes les procédures algorithmiques de l'analyse algébrique, et Babbage en perçoit parfaitement le caractère universel :

« La machine analytique est donc une machine de la nature la plus générale. Quelle que soit la formule qu'elle ait à développer, les lois de son développement doivent lui être communiquées par deux ensembles de cartes. Quand elles ont été placées, la machine devient une machine spéciale pour cette formule particulière. La valeur numérique de ses constantes doivent alors être placées sur les colonnes de roues sous ces cartes, et en mettant la machine en mouvement, elle calculera et imprimera les résultats numériques qui en résultent »²⁸.

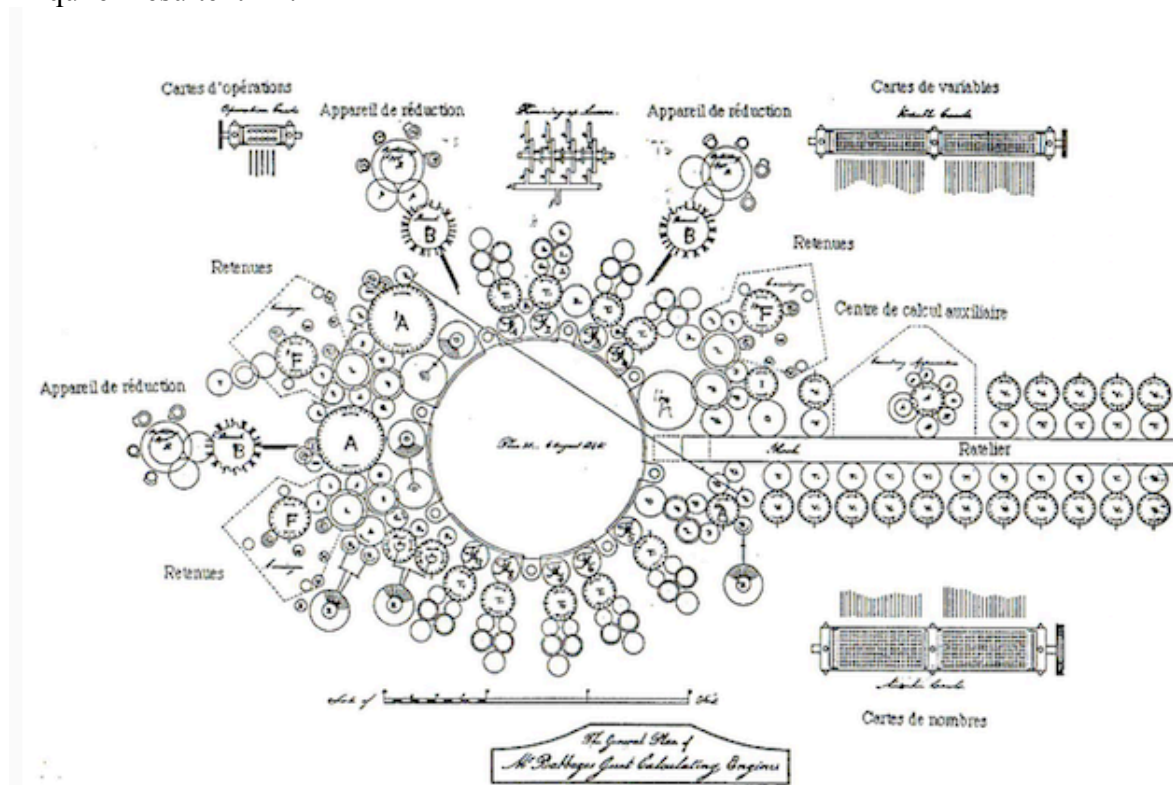


Fig. 2. Plan n° 16 de *The Analytical Engine* (1840) complété par les noms en français des éléments organisationnels de la machine. Science Museum Library.

²⁷ *The store* ne compte pas moins de 50 colonnes de 40 chiffres en doubles colonnes, afin que le nombre reste stocké même quand on est envoyé à l'unité de calcul. *The mill* comporte les axes sur lesquels sont effectués les opérations. La commande des opérations est assurée par un système de cartes perforées qui se succèdent dans la machine en traduisant les formules algébriques. Le dispositif de contrôle est constitué par 3 ensembles de cylindres à picots, qui peuvent être assimilés à des ensembles micro-codés. Pour une description plus détaillée, voir Bromley.

²⁸ Babbage 1864, in *Works* 11, p. 89-90.

Babbage a consacré toute son énergie à la mise au point de cette machine à partir de 1834. Mais il n'est pas parvenu à la construire effectivement, du fait du gigantisme du projet²⁹, et de l'absence d'une demande spécifique qui aurait pu conduire le gouvernement ou quelque entreprise à investir pour sa réalisation. Mais il a conçu des plans extrêmement précis, ainsi que quelques plans de calcul, qui permettent d'en évaluer les possibilités.

Les diagrammes statiques de Menabrea

Babbage est invité à Turin en 1840 à un congrès scientifique italien, où il se lie au milieu concerné par la réforme civile et le sentiment nationaliste³⁰. Il y fait la seule présentation publique de la machine analytique devant un groupe compétent, rassemblé autour de Giovanni Plana (1781-1864), disciple de Laplace et astronome du gouvernement piémontais. Il leur expose le fonctionnement de sa machine, ainsi que ses dessins et sa notation mécanique. Menabrea, ingénieur militaire et futur Premier Ministre de l'Italie unifiée, en donne un compte-rendu détaillé en 1842 pour *Bibliothèque de Genève*. Ce compte-rendu et sa traduction amplement commentée par Lovelace sont les seuls textes de cette époque détaillant la structure et le fonctionnement de la machine analytique.

Menabrea souligne l'importance de la mécanisation des calculs pour éviter toute source d'erreurs dues à l'intervention humaine, et insiste sur la complète automaticité de la machine, qui élimine tout recours aux procédés pour essais et erreurs dans les opérations, dans la division par exemple, qui conduit Babbage à envisager les branchements conditionnels. Il précise que la machine présente ses résultats sous la forme de fractions décimales, positives ou négatives, avec tout degré d'approximation voulu.

Ses diagrammes reproduisent les dessins que Babbage avait apportés à Turin. Menabrea détaille notamment l'exemple de résolution d'un système de 2 équations à 2 inconnues. Menabrea y distingue soigneusement les dispositions relatives aux opérations, et celles relatives aux variables.

²⁹ La machine aurait eu la taille d'une locomotive, son énergie fournie par une machine à vapeur. Et Babbage en avait estimé les performances : l'addition et la soustraction en 3 secondes pour des nombres à 40 chiffres, la multiplication et la division en 3 minutes de 2 nombres de 20 chiffres. Dubbey p. 173-219

³⁰ A son retour, il mènera une exploration scientifique et économique de l'Italie, visitant notamment les sources chaudes de Volterra, et de nombreuses manufactures en passant par Milan et Turin.

Le diagramme de la fig. 3 montre la suite des opérations pour le calcul de x : les opérations successives sont numérotées, les cartes d'opérations spécifient laquelle est effectuée, et les cartes de variables indiquent sur quelles colonnes sont pris les nombres dans la machine, et sur lesquelles sont placés les données initiales, les résultats intermédiaires et le résultat final. Ces colonnes sont désignées par V , avec un indice pour les distinguer. Les coefficients sont initialement disposés sur 8 colonnes, de V_0 à V_7 . : $m, n, d, m', n', d', m, n$. Le produit de deux coefficients, comme mm' , est indiqué par $V_4 \times V_0$, et une carte indique de ne pas effacer ce résultat tant que toutes les opérations où il intervient n'auront pas été effectuées. A chaque type d'opération est associé une seule carte, qui reste aussi en place tant qu'elle est mobilisée dans le calcul. Le même type de tableau indique le mode de résolution pour les deux variables.

Number of the operations	Operation-cards	Cards of the variables		Progress of the operations
	Symbols indicating the nature of the operations	Columns on which operations are to be performed	Columns which receive results of operations	
1	\times	$V_2 \times V_4 =$	$V_8 \dots\dots$	$= dn'$
2	\times	$V_5 \times V_1 =$	$V_9 \dots\dots$	$= d'n$
3	\times	$V_4 \times V_0 =$	$V_{10} \dots\dots$	$= n'm$
4	\times	$V_1 \times V_3 =$	$V_{11} \dots\dots$	$= nm'$
5	$-$	$V_8 - V_9 =$	$V_{12} \dots\dots$	$= dn' - d'n$
6	$-$	$V_{10} - V_{11} =$	$V_{13} \dots\dots$	$= n'm - nm'$
7	\div	$\frac{V_{12}}{V_{13}} =$	$V_{14} \dots\dots$	$= x = \frac{dn' - d'n}{n'm - nm'}$

Fig. 3. Diagramme de Meabrea illustrant l'obtention de x dans la résolution d'un système de 2 équations à 2 inconnues.

La machine analytique peut aussi travailler sur des expressions analytiques. Les coefficients sont placés sur les colonnes de nombres, chacune correspondant à une puissance de la variable, ou une puissance d'une fonction trigonométrique. Menabrea illustre son propos en donnant le diagramme (fig. 4) relatif au calcul de $(a + bx^1).(A + B.\cos^1 x)$.

Pour calculer sur des développements en série, la loi de formation des coefficients est inscrite sur les cartes. La procédure est particulièrement intéressante pour les séries récurrentes, puisque cette loi est la même pour tous les coefficients et que la même opération est systématiquement effectuée. Dans le calcul des puissances, comme par exemple ab^n , il suffit

de mobiliser 4 colonnes de nombres, et une carte indique à un compteur le nombre d'opérations qui restent à effectuer. Menabrea envisage aussi le cas d'exposants négatifs ou fractionnaires.

Colonnes au-dessus desquelles sont écrites les fonctions de la variable	Coefficients		Cartons des opérations		Cartons des variables			
					Colonnes sur lesquelles sont écrits les résultats des opérations	Indication des nouvelles colonnes sur lesquelles sont écrits les coefficients soumis aux opérations	Résultats des opérations	
	Donnés	A former	Nombre des opérations	Nature de l'opération				
x^0 V_0 x' V_0 $\cos^0 x$ V_2 $\cos^1 x$ V_3	a b A B							
$x^0 \cos^0 x$ V_4	aA	1	\times	$V_0 \times V_2 =$	V_4	$\left\{ \begin{array}{l} V_0 \text{ sur } V_0 \\ V_2 \text{ id. } V_2 \end{array} \right.$	$V_4 = aA$ coefficients de $x^0 \cos^0 x$	
$x^0 \cos^1 x$ V_5	aB	2	\times	$V_0 \times V_3 =$	V_5	$\left\{ \begin{array}{l} V_0 \text{ id. } \dots \\ V_3 \text{ id. } V_3 \end{array} \right.$	$V_5 = aB$ id. $x^0 \cos^1 x$	
$x' \cos^0 x$ V_6	bA	3	\times	$V_1 \times V_2 =$	V_6	$\left\{ \begin{array}{l} V_1 \text{ id. } V_1 \\ V_2 \text{ id. } \dots \end{array} \right.$	$V_6 = bA$ id. $x' \cos^0 x$	
$x' \cos^1 x$ V_7	bB	4	\times	$V_1 \times V_3 =$	V_7	$\left\{ \begin{array}{l} V_1 \text{ id. } \dots \\ V_3 \text{ id. } \dots \end{array} \right.$	$V_7 = bB$ id. $x' \cos^1 x$	

Fig. 4. Diagramme de Menabrea illustrant un calcul sur des expressions symboliques contenant des fonctions circulaires

Quant aux nombres spécifiques tels que π , le calcul proposé utilise une formule d'approximation, dont l'expression exacte suppose un passage à l'infini, pour lequel Menabrea précise : « On peut demander à la machine [...] d'indiquer immédiatement que sa valeur devient $[\pi]$ lorsque n est infini. [...] on exigerait ainsi que la machine interprêtât un résultat non évident par par lui-même, ce qui n'est pas dans ses attributions, puisque elle n'est point un être pensant. Cependant, [le cas de n infini ayant été prévu], un carton peut indiquer immédiatement la substitution de la valeur de π »³¹.

Menabrea synthétise ainsi le fonctionnement de cette machine analytique dont les calculs traduisent les formules algébriques :

« En résumant ce qui vient d'être dit sur la machine analytique, on peut conclure qu'elle est fondée sur deux principes :

- le premier, qui consiste en ce que tout calcul arithmétique dépend en définitive de quatre opérations principales, l'addition, la soustraction, la multiplication et la division ;

³¹ Menabrea p. 272-373.

- le second en ce que tout calcul analytique peut se réduire à calculer les coefficients des différents termes d'une série. Si ce dernier principe est vrai, toutes les opérations de l'analyse sont du domaine de la machine »³².

Menabrea réaffirme ici la séparation radicale entre la logique des opérations et l'interprétation numérique des résultats. Sur les traces de Babbage, il laisse au mathématicien le travail d'élaboration des formules algébriques, et qualifie le travail de la machine de simple exécution :

« L'objet essentiel de la machine étant de calculer, d'après les lois qui lui sont dictées, la valeur de coefficients numériques qu'elle doit ensuite distribuer convenablement sur les colonnes qui représentent les variables, il s'ensuit que l'interprétation des formules et des résultats est en dehors de ses attributions, à moins toutefois que cette interprétation ne soit elle-même susceptible d'être exprimée par le moyen des symboles dont elle fait usage. Ainsi elle n'est point elle-même l'être qui pense, mais on peut la considérer comme l'être qui exécute les conceptions de l'intelligence »³³.

Les diagrammes dynamiques de Lovelace

Babbage est alors en quête de reconnaissance par le gouvernement britannique pour son travail sur les machines. Il est particulièrement satisfait du travail de Menabrea, et cherche à le faire traduire en anglais. Depuis 1833, Ada Lovelace fait partie de son cercle d'amis, auxquels il présente souvent la machine aux différences lors de ses dîners mondains hebdomadaires. Elle est la fille de Lord Byron (1788-1824) et d'Anabella Milbanke (1792-1860), issue d'un milieu libéral, et qui est très vite parvenue à négocier son indépendance après ce mariage particulièrement désastreux. Mariée à Lord Lovelace en 1835 et mère de trois enfants, Ada ne parviendra pas à se faire reconnaître au delà d'un cercle privé quelque peu élargi autour de Babbage, et à poursuivre une carrière scientifique, malgré ses ambitions après cette traduction de l'article de Menabrea³⁴.

Sous l'impulsion de sa mère, dont l'excès de détermination aura toutefois un impact négatif sur l'équilibre de sa fille, Ada est initiée aux mathématiques dès l'adolescence, d'abord au sein de la famille. Elle en poursuit l'étude avec Mary Somerville (1780-1872), traductrice

³² Menabrea p. 3674.

³³ Menabrea p. 375.

³⁴ Pour une biographie détaillée d'Ada Lovelace, y compris sur la situation des femmes dans la bourgeoisie éclairée et les conditions matrimoniales entre aristocratie décadente et bourgeoisie montante à cette époque : Stein. Pour plus de précisions sur sa formation mathématique, Hollongs, Martin et Rice.

de Laplace, avec Babbage lui-même et avec Augustus de Morgan (1806-71). Tous reconnaissent sa grande puissance de travail, ses talents, mais soulignent ses difficultés dans le suivi de son travail, du fait des contraintes sociales³⁵ et de ses problèmes de santé.

Nul doute que Lovelace a les compétences nécessaires pour comprendre la démarche de Babbage, avec qui elle entretient une longue amitié, et leur collaboration est tout à fait fructueuse, comme il le reconnaît lui-même : « Elle a pleinement pénétré presque toutes les questions, très difficiles et abstraites, qui se rapportent au sujet »³⁶. Il suggère d'ajouter des notes à cette traduction, que Lovelace développe au point qu'elles sont trois fois plus longues que le texte initial. Comme il a déjà préparé des exemples avec Herschel, il contribue à la préparation de ces notes, y compris pour le cas des nombres de Bernoulli qui va faire la célébrité de Lovelace, et pour lequel elle décèle une erreur dans ses calculs. Quoi qu'il en soit, elle manifeste une grande autonomie dans son travail, et se revendique comme autrice, imposant son refus d'une préface de Babbage, et signant toutes ses notes A. A. L. – avec l'autorisation de son époux³⁷.

L'ensemble témoigne d'une grande maîtrise du fonctionnement de la machine et des attendus de l'algèbre symbolique en tant que science des opérations. Dès la note A, Lovelace met en avant la distinction entre la machine aux différences, machine spéciale destinée à tabuler les valeurs d'une fonction particulière, et la machine analytique, perçue comme universelle du fait de sa complexité, susceptible de traduire aussi bien des compositions scientifiques que musicales, « de la même manière que le métier Jacquard tisse des fleurs et des feuilles »³⁸.

Les diagrammes de Lovelace, peuvent être qualifiés de dynamiques dans la mesure même où elle spécifie d'emblée que le *mill* passe par une succession d'états correspondant à la suite des opérations d'un processus de calcul. Elle détaille la localisation des nombres sur les colonnes, cette fois pour chacun de ces états. Pour ce faire, elle introduit des distinctions nouvelles :

- parmi les cartes de variables quant à leur distribution : entre cartes de données (*supplying cards*) et cartes de résultats (*receiving cards*),

³⁵ Charles Wheatstone (1802-75), acousticien co-inventeur du télégraphe électro-magnétique, à la recherche de traducteurs de mémoires scientifiques parus à l'étranger pour un nouveau périodique, suggère Ada pour traduire le texte de Menabrea. C'est lui qui doit prendre contact avec l'éditeur, ce qu'elle ne peut pas faire en tant qu'aristocrate. Stein p. 118.

³⁶ Babbage 1864, *Works* 11, p. 136.

³⁷ Stein p. 156.

³⁸ Lovelace in *Works* 3, p. 121.

- et parmi les colonnes, selon qu'elles reçoivent des variables intermédiaires (*working variable column*) ou des résultats (*resulting variable column*).

Et surtout elle spécifie la notion de *backing*, qui consiste à permettre « un retour en arrière du prisme Jacquard pour réitérer une partie du calcul », c'est-à-dire un cycle d'opérations, qu'elle suggère d'introduire en retour dans les métiers à tisser. « L'objet de cette extension est d'assurer la possibilité d'assurer qu'une carte particulière – ou tout ensemble de cartes – puisse être utilisée successivement un nombre quelconque de fois dans la solution d'un problème »³⁹. Il permet de réduire considérablement le nombre de cartes à utiliser. Associé au *backing*, le repérage des cycles d'opérations et leur notation seront abordés plus tard dans les notes E et F qui traitent de leurs répétitions possibles. Il n'est alors nul besoin d'exhiber une formule mathématique pour que la machine donne le résultat. La succession des opérations suffit.

Lovelace reprend dans la note D la question de la résolution d'un système de 2 équations à 2 inconnues, dont le diagramme montre cette fois la succession des affichages des colonnes de variables dans l'ordre où elles sont mobilisées à toutes les étapes du calcul, dont les calculs intermédiaires (fig. 5). Pour ce faire, Lovelace produit une notation nouvelle : pV_n , où n indique le numéro de la colonne, et où p désigne le nombre de fois où une valeur intervient dans la colonne.

Number of operations	Nature of operations	Variables for data						Working Variables										Variables for results	
		1V_0	1V_1	1V_2	1V_3	1V_4	1V_5	0V_6	0V_7	0V_8	${}^0V_{10}$	0V_9	${}^0V_{11}$	${}^0V_{12}$	${}^0V_{13}$	${}^0V_{14}$	${}^0V_{15}$	${}^0V_{16}$	
		+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	
		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
		m	n	d	m'	n'	d'										$\frac{dn' - d'n}{mn' - m'n} = x$	$\frac{d'm - dm'}{mn' - m'n} = y$	
1	x	m	n'	...	mn'											
2	x	...	n	...	m'	$m'n$											
3	x	d	...	0	dn'										
4	x	...	0	d'	$d'n$									
5	x	0	0	$d'm$									
6	x	...	0	0	dm'									
7	-	0	0			$(mn' - m'n)$						
8	-	0	0	$(dn' - d'n)$					
9	-	0	0		$(d'm - dm')$				
10	+			$(mn' - m'n)$	0	...	$\frac{dn' - d'n}{mn' - m'n} = x$			
11	+			0	...	0	...	$\frac{d'm - dm'}{mn' - m'n} = y$		

Fig. 5. Diagramme de Lovelace illustrant l'obtention de x dans la résolution d'un système de 2 équations à 2 inconnues.

³⁹ Lovelace, in *Works* 3, p. 134.

Au départ, les *working variable columns* sont vides, mais plusieurs résultats peuvent s'y trouver au cours du calcul, comme sur V_{12} (fig. 5). En règle générale, un résultat reste sur sa colonne (*retaining supplying card*) sauf s'il est prévu qu'il ne servira plus, auquel cas il devient 0 (*zero supply card*). A la fin, toutes les colonnes portent 0, sauf celles des résultats. Lovelace introduit aussi une notation pour exprimer la procédure elle-même :

$${}^1V_{16}^* = \frac{{}^1V_{14}}{{}^1V_{12}} = \frac{{}^1V_{10} - {}^1V_{11}}{{}^1V_6 - {}^1V_7} = \frac{{}^1V_0 \cdot {}^1V_5 - {}^1V_2 \cdot {}^1V_3}{{}^1V_0 \cdot {}^1V_4 - {}^1V_3 \cdot {}^1V_1} = \frac{d'm - dm'}{mn' - m'n}$$

Un tel tableau détaillé, ainsi que les nouvelles innovations qui l'accompagnent – la notation pV_n et ce type de formule appliquée aux colonnes de nombres de la machine – permettent d'enregistrer la suite des opérations successives, et donc de contrôler la procédure opératoire en remontant les calculs à rebours. Le cas d'un système de n équations à n inconnues est envisagé dans la note F.

La note E aborde le calcul sur les expressions symboliques, et Lovelace précise en quoi cette machine matérialise l'algèbre symbolique :

« Bien des personnes qui ne sont pas au courant des études mathématiques imaginent que, parce que le travail de la machine est de donner ses résultats en notation numérique, la nature de ses processus doit par conséquent être arithmétique et numérique, plutôt qu'algébrique et analytique. C'est une erreur. La machine peut arranger et combiner ses quantités numériques exactement comme si elles étaient des lettres, ou tout autre sorte de symboles généraux, et en fait, elle pourrait donner ses résultats en notation algébrique, si des dispositions étaient prises dans ce sens. Elle pourrait développer trois ensembles de résultats simultanément, à savoir des résultats symboliques (comme on l'a vu dans les Notes A et B) des résultats numériques (son objet principal et premier), et des résultats algébriques en notation littérale. [...] Le but de la machine est en fait de donner le plus d'efficacité pratique possible aux ressources des interprétations numériques de la science supérieure de l'analyse, alors qu'elle utilise les processus et les combinaisons de cette dernière »⁴⁰.

L'exemple impliquant des fonctions circulaires est plus complexe que celui traité par Menabrea :

$$(A + A_1 \cos \theta + A_2 \cos 2\theta + A_3 \cos 3\theta + \dots) \cdot (B + B_1 \cos \theta)$$

Ce produit est représenté par l'expression :

$$(C_0 + C_1 \cos \theta + C_2 \cos 2\theta + C_3 \cos 4\theta + \dots)$$

une fois mobilisée la formule :

⁴⁰ Lovelace, in *Works* 3, p. 143-144.

$$\cos n\theta \cdot \cos \theta = \frac{1}{2} \cos (n+1)\theta + \frac{1}{2} \cos (n-1)\theta$$

La répartition des résultats intermédiaires sur les colonnes de nombres est longuement développée, même si aucun tableau synthétique n'est donné cette fois. Lovelace suggère que faire exécuter par la machine analytique le calcul des très nombreux coefficients de ce type, qui interviennent notamment dans le problème des trois corps – pourrait permettre d'apaiser les discordances entre astronomes.

Enfin (note G), Lovelace spécifie plus avant le rôle de cette machine. Celle-ci ne saurait être considérée comme l'origine des calculs, qui doivent d'abord être pensés par l'analyse mathématique. Mais elle permet d'anticiper les résultats, et de ce fait, elle peut avoir un impact en retour sur le développement des mathématiques, sans qu'il y ait pour autant à surestimer ses possibilités. Les derniers exemples sont là pour témoigner de leur puissance. L'intégration et la différentiation peuvent être automatisés par un calcul sur des expressions symboliques, en procédant terme à terme sur des développements en série. Le calcul des nombres de Bernoulli par une formule de récurrence⁴¹ vient clôturer le tout par un diagramme assez compliqué pour impressionner les lecteurs (fig. 6). L'identification des 2 développements suivants :

$$\frac{x}{e^x - 1} = 1 - \frac{x}{2} + B_1 \frac{x^2}{2} + B_3 \frac{x^4}{2.3.4} + B_5 \frac{x^6}{2.3.4.5.6} + \dots$$

$$\frac{x}{e^x - 1} = \frac{1}{1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2.3} + \frac{x^3}{2.3.4} + \&c}$$

permet d'obtenir la formule permettant d'obtenir les B_{2n-1} de proche en proche⁴² :

$$0 = -\frac{1}{2} \frac{(2n-1)}{(2n+1)} \cdot \frac{1}{2.3\dots 2n} + B_1 \frac{2n}{2} + B_3 \frac{2n(2n-1)(2n-2)}{2.3.4} + B_5 \frac{2n(2n-1)\dots(2n-4)}{2.3.4} + \dots + B_{2n-1}$$

En dépit de la conception opératoire de l'algèbre symbolique, le mot « algorithme » n'apparaît pas dans le texte. Lovelace parle systématiquement des opérations en termes de *process*. Ce qui tout à fait frappant pour ses contemporains est le fait que la machine pouvait

⁴¹ De Morgan en a donné une présentation dans un article de 1841 de *Penny Cyclopaedia*.

⁴² Les B_{22i} sont tous nuls.

fournir les valeurs d'une fonction, même sans en connaître son expression analytique, ce qui était déjà le cas avec la machine aux différences.

Conclusion

L'invention des machines de Babbage est fortement structurée par la conception opératoire et algorithmique de l'algèbre symbolique élaborée par les algébristes anglais autour de Cambridge dans la première moitié du 19^{ème} siècle, dont la machine analytique est la matérialisation la plus complète. De nombreux facteurs ont contribué à bloquer sa réalisation : l'ambition colossale du projet, la sophistication de son montage et la précision requise pour ses composants, des relations entre science et industrie suffisantes pour l'inspirer, mais insuffisamment structurées pour le porter, l'absence de véritables besoins de tels calculs à cette époque, et la volonté de Babbage de placer la science en position de surplomb par rapport au monde industriel, et non de chercher à établir le partenariat nécessaire à une telle entreprise.

Les textes de Menabrea et de Lovelace sont essentiels à la compréhension du fonctionnement de la machine analytique en l'absence de sa réalisation, quelle qu'ait pu être la contribution de Babbage à leur élaboration, ou l'abondance des plans qu'il a produits mais qui sont restés dans ses carnets. Leurs diagrammes offrent une visualisation du déroulement des calculs en l'absence d'une notation complète permettant de le représenter. Là où les diagrammes de Menabrea cherchent avant tout à matérialiser l'obtention des résultats, ceux de Lovelace saisissent la succession des états de la machine, dont la conservation et le transfert des résultats intermédiaires. Ces diagrammes ne correspondent pas à une programmation de la machine, en ce sens qu'ils sont trop loin des systèmes de commande et de contrôle des opérations pour représenter l'ensemble des enchaînements opératoires. Mais ils jouent un rôle heuristique, non pas en mathématiques puisque les formules y sont préalablement déterminées, mais relativement au fonctionnement de la machine où ils donnent à voir les possibilités de simplification des procédures.

Bibliographie

BABBAGE Charles. 1989, *The Works of Charles Babbage*. (dir.) Martin Campbell-Kelly, London, : William Pickering, 1989, 11 vols.

BABBAGE Charles. Anonyme. *Memoirs of the Analytical Society*,. Cambridge : 1813. BABBAGE *Works*, 1, 37-92.

- BABBAGE Charles. *On the Economy of Machinery and Manufactures*,. London : Charles Knight, 1832. BABBAGE *Works*, 8.
- BABBAGE Charles. *Passages of the Life of a Philosopher*. London : Longman, Roberts and Green., 1864. BABBAG, *Works*, 11.
- BACHELARD Suzanne. La représentation géométrique des quantités imaginaires au début du 19^{ème} siècle, *Conférences du Palais de la Découverte*. 1966.
- BOYER Carl B., MERZBACH Uta C. *A History of Mathematics* .3^{ème} édition. Hoboken : Wiley & sons, 2011.
- BOURBAKI Nicolas. *Eléments d'histoire des mathématique*., Paris : Hermann.,1969.
- BROMLEY Allan C. Charles's Babbage Analytical Engine 1838, *IEEE Annals of the History of Computing*. 1982, 4(3), 196-217.
- CANNON Walter F. Scientists and Broadchurchmen : An Early Intellectual Network. *Journal of British Studies*, 1964, 4(1), 65-88.
- CORRY Leo. 2004, *Modern Algebra and the Rise of Mathematical Structure*, 2^{ème} édition. Basel-Boston-Berlin : Birkhäuser Verlag, 2004.
- DUBBEY John Michael. *The Mathematical Work of Charles Babbage*. Cambridge : Cambridge University Press, 1978.
- DURAND-RICHARD Marie-José. La Genèse de l'Algèbre Symbolique : Une Influence Possible de J. Locke. *Revue d'Histoire des Sciences*. 1990, 43 (2-3), 129-180.
- DURAND-RICHARD Marie-José. L'Ecole Algébrique Anglaise : les conditions conceptuelles et institutionnelles d'un calcul symbolique comme fondement de la connaissance In GOLDSTEIN C., GRAY J., RITTER J. *L'Europe Mathématique : Mythes, histoires, identités*., Paris : M.S.H, 1996, 445-77.
- DURAND-RICHARD Marie-José. (2011a). Peacock's Arithmetic : an Attempt to Reconcile Empiricism to Universality. *Indian Journal of History of Science*, 46(2), 251- 311.
- DURAND-RICHARD Marie-José. (2011b). Le regard français de Charles Babbage (1791-1871) sur le déclin de la science en Angleterre. *Documents pour l'histoire des techniques*, 19(2), 287-304.
- DURAND-RICHARD Marie-José. Fondements symboliques des pratiques algébriques en Angleterre (1801-1849), *Mélanges en l'honneur de Hourya Sinaceur*, Paris : Garnier, 2011.

GRATTAN-GUINNESS IVOR, 2003, The computation factory : de Prony project for making tables in the 1790s, in M. Campbell-Kelly, M. Croarken, R. Flood, E. Robson (eds), *The History of Mathematica Tables, from Sumer to Spreadsheets*, Oxford, Oxford University Press.

GREGORY Duncan F.

HOLLINGS C, MARTIN U. et RICE A. The Lovealce-De Morgan Correspondance, a mathematical re-appraisal . *Historia Mathematica*, 2007, 44, 202-231.

HYMAN Anthony. *Charles Babbage, Pioneer of the Computer*. Princeton : Princeton University Press, 1983.

LACROIX Sylvestre F. *An Elementary Treatise on the Differential and Integral Calculus, translated from the french, with an Appendix and Notes*. Traduction : C. BABBAGE, J. F. W. HERSCHEL, G. PEACOCK Cambridge : Deighton and sons. London : Law & Whittaker, 1816.

LOVELACE Ada. Sketch of the Analytical Engine invented by Charles Babbage, by L. F. Menabrea of Turin, Officer of the Military Engineers, from the *Bibliothèque de Genève*, october 1842, n° 82, with Notes upon the Memoir by the Translator Ada Augusta, Countess of Lovelace, *Scientific Memoirs*, 1843, 3, 666-731. BABBAGE *Works*, 3, 89-170.

MACLEOD Poy. Whigs and Savants : Reflection on the Reform Movement in the Royal Society, 1830-48. In (eds) L. Inkster, J. Morrell *Metropolis and Province : Science in British Culture 1780-1850*, London : Hutchinson, 1983.

MENABREA Luigi F. Notions sur la machine analytique de M. Charles Babbage. *Bibliothèque Universelle de Genève*, octobre 1842, 41, 352-376. BABBAGE *Works*, 3, 62-82.

MORREL Jack, THACKRAY Arnold. *Gentlemen of Science, Early Years of the British Association for the Advancement of Science*, Oxford : Clarendon Press, 1981.

NOVY Lubos. L'Ecole Algébrique Anglaise.

PEACOCK George. *A Treatise on Algebra*. Cambridge : Deighton, 1830. Réed. 2 vols, 1842-45.

PEACOCK George A Report on the recent progress and actual state of certain branches of analysiss. *Proceedings of the British Association for the Advancement of Science, held in Cambridge*, 1833, 3, 85-351.

STEIN Dorothy. *Ada Byron, la comète et le génie*. Traduction : M. GABAIL. Paris : Seghers, 1990.

VATTIMO Gianni. *Ethique de l'interprétation*. Paris : La Découverte, 1991.