



HAL
open science

LES ANALOGIES OPÉRATOIRES DANS LES NOTATIONS ALGÈBRIQUES

Marie-José Durand-Richard

► **To cite this version:**

Marie-José Durand-Richard. LES ANALOGIES OPÉRATOIRES DANS LES NOTATIONS ALGÈBRIQUES. Sarah Carvallo. Les puissances de l'analogie. Perspectives croisées sur l'imagination inventiveDesançon, Presses Universitaires de Franche-Comté, A paraître. halshs-03949734

HAL Id: halshs-03949734

<https://shs.hal.science/halshs-03949734>

Submitted on 17 Feb 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

LES ANALOGIES OPÉRATOIRES DANS LES NOTATIONS ALGÈBRIQUES

Marie-José DURAND-RICHARD¹

De l'analogie en mathématiques : une incongruité ?

Dès lors que les mathématiques sont envisagées comme un bel édifice de théories déductivement structurées, il peut sembler de prime abord incongru d'oser y chercher trace de quelque analogie que ce soit. La volonté d'univocité des significations qui s'y déploie n'est-elle pas incompatible avec l'indétermination métaphorique ? Robert Blanché (1898-1975) affirmait encore il y a quelques décennies que « le caractère foncièrement subjectif et incontrôlable de l'analogie lui retire toute portée cognitive »². Davantage associée aux fonctions poétique et rhétorique du langage qu'à sa fonction référentielle, il arrive cependant que l'analogie soit mobilisée dans les ouvrages de vulgarisation, lorsqu'il s'agit de recourir au registre de la perception plutôt qu'à celui de l'explication, afin d'éviter une formulation mathématique trop ardue.

En dépit de ces préventions, le mathématicien au travail a pourtant recours à l'analogie, dont il reconnaît la fonction heuristique dans sa pratique de recherche. Mais cette présence est loin de conduire à une pleine reconnaissance, tant ce mode de pensée déroge aux critères qui caractérisent le mythe d'une discipline garante de la certitude scientifique : transparence, rationalité, universalité et univocité de la vérité. Cette image fictionnelle d'une connaissance indépendante du sujet connaissant s'enracine de fait dans la recherche d'une langue parfaite³, à retrouver ou à construire, telle que l'envisage par exemple Descartes dans une lettre à Mersenne, associant une grammaire et un dictionnaire tous deux univoques et bien distincts⁴. Depuis le 17^{ème} siècle, la conception du langage est fortement marquée par cette recherche, où rejaillit une ambition d'inspiration théologique d'avoir à purifier la langue naturelle, qui aurait été corrompue par l'usage.

¹ MCF honoraire Université Paris 8 Vincennes Saint-Denis, chercheuse associée du laboratoire SPHERE, YMR 7219, CNRS-Université de Paris.

² Blanché, p. 180.

³ Eco, pp. 249-251.

⁴ Descartes, p. 912.

Il serait cependant aujourd'hui réducteur de continuer à penser le langage dans un tel cadre, qui s'est trouvé radicalement remis en cause au 20^{ème} siècle, tant sur le plan scientifique que linguistique. Côté scientifique, en 1931, le théorème de Gödel induit que la perfection conférée aux langages artificiels par la rigueur logique les enferme définitivement à l'intérieur de la langue naturelle. Côté linguistique, les travaux de John Austin, Paul Ricœur, ou celui plus récent de Bernard Victorri et Catherine Fuchs⁵, conduisent à considérer la polysémie du langage comme créatrice de sens, dans une dynamique qui l'envisage comme richesse plutôt que comme ambiguïté, et réinterroge les relations entre syntaxe, sémantique et pragmatique.

Ces approches récentes permettent de renouveler la conception des mathématiques comme langage : immergées dans la langue naturelle, les mathématiques s'y expriment aussi par des signes, et la question de savoir ce qu'elles représentent – une réalité concrète ? des idées ? l'expérience de situations contextuelles spécifiques ? – relève de la philosophie. Soulever ces questions permet de réhabiliter la part d'invention, de liberté, et de transgression au sein même de l'édifice théorique des mathématiques, et l'analogie peut y être reconnue comme productrice de sens plutôt que comme imperfection à dissimuler.

De fait, l'analogie est au cœur des pratiques opératoires en algèbre depuis son émergence à partir de l'arithmétique. Elle a permis d'étendre la notion de nombre à partir de celle des entiers, et d'identifier des structures algébriques à partir de leurs propriétés. Le processus au cours duquel l'analogie a ainsi produit en algèbre des significations nouvelles peut être examiné dans les termes de l'analyse qu'en donne Paul Ricœur dans *La métaphore vive*⁶. Elle sous-tend d'abord une métaphore au niveau sémantique ou lexical : elle est alors simple transgression, dérapage, audace, glissement de sens, lorsqu'un mot – ici d'abord le mot « nombre » – est utilisé dans un autre contexte pour suppléer à une absence de dénomination. Mais l'intégration de cette métaphore dans le langage en tant que nouvelle signification suppose qu'elle se répercute d'une part, au niveau syntaxique, sur la structure logique des énoncés, et au niveau référentiel ou pragmatique, sur le discours lui-même, conduisant à la construction de nouveaux champs catégoriels, ce que Ricœur qualifie de « véhémence ontologique ». De fait, l'analogie intervient d'abord en algèbre au niveau

⁵ Voir la bibliographie.

⁶ Durand-Richard, 2008, « Introduction ».

des pratiques opératoires, mais dans un contexte où la signification des opérations est celle de l'arithmétique, qu'elle va donc perturber, et pour longtemps, au niveau lexical. Loin de disparaître lors de l'élaboration de l'algèbre comme discipline, elle s'y manifestera longtemps comme malaise dans les débats entre mathématiciens, avant de s'y intégrer par une modification des significations aux trois niveaux relevés par Ricœur. La signification même du mot « algèbre » est d'abord comprise, chez les mathématiciens arabes – dès al-Khwarizmi au 9^{ème} siècle – comme recherche des méthodes de résolution des équations, en l'absence à cette époque de tout symbole spécifique. Elle tend à devenir recherche d'une théorie générale des équations – à partir de sa symbolisation au 16^{ème} siècle – avant de basculer vers l'étude des structures abstraites à partir du 19^{ème} siècle. Cet article se propose de suivre le cheminement de cette évolution des relations entre niveau lexical, niveau syntaxique et niveau pragmatique. Au non-dit des interventions de l'analogie dans les pratiques calculatoires des mathématiciens arabes succédera une explicitation permettant de l'utiliser massivement tout en la légitimant par des arguments métaphysiques ou géométriques. C'est seulement au 19^{ème} siècle, au moment où se fait jour – dans un contexte spécifique – la nécessité de définir l'algèbre comme science, que s'engage une reformulation de ce recours aux analogies opératoires.

L'unification des problèmes autour de l' « inconnue »

Dans son *Libre concis du calcul de l'al-jabr et l'al-muqabala*, al-Khwarizmi (9^{ème} s.) présente la synthèse des six méthodes de résolution de problèmes du 1^{er} et du 2^d degrés, présentées sous forme d'équations exprimées en langue arabe, et accompagnées de procédures de résolution fondées sur un raisonnement géométrique⁷.

Al-Khwarizmi énonce :	Ce qui s'écrit aujourd'hui :
Les carrés sont égaux aux racines	$ax^2 = bx$
Les carrés sont égaux à un nombre	$ax^2 = c$
Les racines sont égales à un nombre	$ax = c$
Les carrés et les racines sont égaux à un nombre	$ax^2 + bx = c$
Les carrés et les nombres sont égaux aux racines	$ax^2 + c = bx$
Les racines et les nombres sont égaux aux carrés	$bx + c = ax^2$

⁷ *Les Éléments* d'Euclide constituent alors le seule édifice théorique reconnu. Il représentera jusqu'au début du 19^{ème} siècle le « canon » de la démonstration, en dépit des avancées pratiques de l'analyse algébrique.

Ces méthodes nomment l'inconnue, la « racine », et traitent ainsi de façon univoque des questions issues aussi bien de l'arithmétique que de la géométrie. Poursuivant cette voie, les successeurs d'al-Khwarizmi (10^{ème}-12^{ème} s.) vont pratiquer des calculs à la fois sur des quantités simples – puissances de l'inconnue, règles de multiplication et de division – et sur des quantités composées – somme de produits de quantités simples par un nombre. Il s'agit « d'opérer sur les inconnues au moyen de tous les instruments de l'arithmétique, comme l'arithméticien opère sur les connus ». Les calculs sur ces quantités, c'est-à-dire ceux de l'arithmétique, y compris la racine carrée, sont construits par analogie avec les calculs sur les nombres, qui dans les mathématiques grecques ne désignent que les entiers supérieurs à 1. Et des calculs de même type sont pratiqués sur les quantités irrationnelles, sans que jamais ce recours ne soit nommé ou *a fortiori* justifié⁸.

Les analogies opératoires explicites de l'analyse algébrique

La symbolisation de l'algèbre s'établit dans de multiples écoles –germano-hollandaise, italienne, anglaise, française – tout au long du 16^{ème} siècle⁹, pour déboucher sur les œuvres mieux connues que sont *L'Algèbre nouvelle* (1591) de François Viète (1540-1603) et *La Géométrie* (1637) de René Descartes (1596-1650). L'un et l'autre établissent un véritable calcul algébrique littéral, Descartes le légitimant par une correspondance systématique de chaque opération avec des constructions géométriques fondées sur les *Eléments* d'Euclide – d'où le titre de son ouvrage.

Ces écritures littérales ouvrent d'emblée la voie à de multiples transgressions. La possibilité d'écrire $a - b$ sans contrôler systématiquement les valeurs numériques de a et b à chaque étape du calcul peut déboucher sur la manipulation de quantités négatives, voire impossibles dès lors qu'intervient la racine carrée de $a - b$. La difficulté d'ordre sémantique est manifeste dans la dénomination de ces nouvelles quantités, respectivement qualifiées de « moindres que rien » et d'« impossibles » ou « imaginaires », puisqu'elles bousculent la référence classique des quantités réelles. Des difficultés d'ordre syntaxique ou logique émergent aussi, puisque ces nouvelles quantités dérogent à certaines des règles d'une arithmétique initialement conçue pour des grandeurs strictement positives. Par exemple, $a/b = c/d$ implique habituellement que si $a > b$, alors, $c > d$.

⁸ Houzel, pp. 97-110.

⁹ Durand-Richard, 2012.

Mais, alors que $\frac{+1}{-1} = \frac{-1}{+1}$, affirmer que $+1 > -1$ dans le premier rapport conduit, selon la même propriété, à $-1 > +1$ dans le second, donc à une contradiction.

En dépit de ces contradictions logico-syntaxiques¹⁰, le potentiel opératoire de ces nouvelles quantités conduit à des généralisations qui vont faire de l'algèbre un outil d'analyse incontournable. Ainsi, parmi les algébristes italiens, Raphaële Bombelli (1526-1572) aborde l'équation du 3^{ème} degré : $x^3 = 15x + 4$, du type : $x^3 = px + q$. La procédure de résolution débouche sur la formule ultérieurement nommée formule de Cardan, qui introduit les quantités impossibles, et qui s'écrit aujourd'hui :

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}}$$

13 equale a 15¹ p. 4

Le texte de Bombelli¹¹

13 equale a 15¹ p. 4
 Piglifi il terzo delli Tanti
 ch'è 5
 Cubifi fa 125
 e questo fa caua del quadrato
 del metà del numero
 ch'è 4
 Resta m.121
 e di questo fa piglia il lato
 ch'è p.d.m.Rq 121
 al quale si aggonge, e
 caua il mezzo del numero, e
 della somma, & restante
 se ne piglia il la to cubico
 di cialcuno da se, e questi
 due lati gionti insieme sono
 la valuta del Tanto

Ce qui s'écrit aujourd'hui

$x^3 = 15x + 4$
 On prend le tiers des racines
 5
 le cube est 125
 celui-ci se retranche du carré
 de la moitié du nombre
 qui est 4
 Reste -121
 de celui-ci on prend le côté
 qui est $\sqrt{-121}$
 on ajoute et on retranche
 la moitié du nombre et,
 de la somme comme du reste,
 on prend la racine cubique,
 et ces deux racines ajoutées
 sont
 la valeur de la racine

Bombelli bute ici sur le fait que pour ces valeurs numériques, cette formule donne une

¹⁰ Des tentatives pour exclure ces quantités se manifesteront jusqu'au tournant du 19^{ème} siècle, par exemple chez William Frennd, *The Elements of Algebra*, 1796.

¹¹ Itard, p. 26-27.

écriture dépourvue de signification : $x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$, écrite dans le tableau sous la forme : R.c 2pRq 0m 121 p R.c 2mRq 0m 121. Comble du paradoxe : cette équation a pourtant pour racine réelle évidente $x = 4$, puisque $64 = 15 \times 4 + 4$.

Contrairement aux textes de la science arabe, les algébristes du 16^{ème} siècle expriment leur embarras face à ces entités susceptibles de calcul, mais si difficiles non seulement à définir mais à nommer. Bombelli les qualifie de « plus de moins » et de « moins de moins » :

« J'ai trouvé une sorte de racine cubique très différente des autres, qui paraît au chapitre sur le cube égal à une quantité et à un nombre quand le cube du tiers de la quantité est plus grand que le carré de la moitié du nombre[...]. Cette sorte de racine cubique a pour son algorithme des opérations fort différentes des autres et a un nom différent ; car, lorsque le cube du tiers de la quantité est plus grand que le carré de la moitié du nombre, l'excès ne peut être appelé ni plus ni moins, mais il peut être appelé « plus de moins » quand il a été ajouté, et quand il a été retranché il sera appelé « moins de moins »¹².

Cette difficulté sémantique n'empêche pas Bombelli d'énoncer des règles de multiplication pour ces « plus de moins » et « moins de moins ». Elle n'empêche pas non plus Albert Girard (1595-1632) de les investir pleinement pour affirmer en 1629 ce qui n'est encore qu'une conjecture, et qui deviendra plus tard le théorème fondamental de l'algèbre :

« Toutes les équations d'algèbre reçoivent autant de solutions, que la dénomination de la plus haute quantité le démontre [...] On pourrait dire à quoy sert ces solutions qui sont impossibles, je répond pour trois choses, pour la certitude de la règle générale, et qu'il n'y a point d'autres solutions, et pour son utilité : l'utilité est facile, car elle sert à l'invention des solutions de semblables équations »¹³.

Cette conjecture contribue à installer l'algèbre comme recherche d'une théorie générale de la résolution des équations de degré n , même si la difficulté d'ordre sémantique va longtemps perdurer : ces « solutions » sont successivement qualifiées de sophistiques par Bombelli, d'irrépérables par Girard, d'absurdes par Viète, d'imaginaires par Descartes, de fictions de l'esprit par Leibniz, avant que Gauss ne les appelle complexes, et contribue, avec quelques auteurs moins reconnus, à installer une conception à la fois algébrique et géométrique de ces entités, qui modifie

¹² Bombelli, p. 293.

¹³ Itard, p. 12-16.

profondément la référence à la notion de nombre¹⁴. Et la conjecture de Girard, dont la démonstration accompagnera cette restructuration¹⁵, ouvre l'espoir de trouver, à l'exemple des algébristes italiens pour le 3^{ème} degré, une expression symbolique pour les n racines d'une équation de degré n , espoir qui sera irrémédiablement déçu par les travaux d'Évariste Galois (1811-1832).

L'irrépressible extension de l'analogie dans les pratiques opératoires

Dès lors, les analogies opératoires ne cesseront d'être investies du fait de leur potentialités heuristiques. Des opérations comme $(a + b\sqrt{-1})(c + d\sqrt{-1})$ sont systématiquement effectuées selon les mêmes règles que $(a + b)(c + d)$. D'où :

$$(a + b\sqrt{-1})(c + d\sqrt{-1}) = ac + bc\sqrt{-1} + ad\sqrt{-1} - bd$$

Dans le domaine du calcul différentiel, Gottfried W. Leibniz (1746-1716) analyse longuement « l'analogie profonde » entre les écritures symboliques de la puissance d'une somme et de la différentiation d'un produit, pour un même indice n . Pour l'indice 3, il écrit ainsi, p désignant l'opération puissance, et d l'opération de différentiation¹⁶ :

$$p^3(x + y) = 1p^3x.p^0y + 3p^2x.p^1y + 3p^1x.p^2y + 1p^0x.p^3y$$

$$d^3(xy) = 1d^3x.d^0y + 3d^2x.d^1y + 3d^1x.d^2y + 1d^0x.d^3y$$

Cette comparaison le conduit à produire le même algorithme pour les deux opérations, permettant de passer de l'indice n à l'indice $n+1$ par un même mécanisme opératoire, et de généraliser cette analogie à la puissance quelconque d'un polynôme et à la différentiation d'un produit de plusieurs facteurs.

Ainsi se développe une extension considérable des méthodes de calcul. Comme dans les cas précédents, les analogies opératoires s'appuient sur les possibilités de substitution de symboles, bien que ni les limites de cette substitution, ni la question de leur signification, ne soient posées. Elles sont particulièrement efficaces dans la résolution des équations différentielles. Par exemple, là où l'intégration d'une fonction rationnelle en $1/(x^2-1)$ procède par décomposition en éléments

¹⁴ Flament, ch. 2.

¹⁵ Friedelmeyer, pp. 259-278.

¹⁶ Leibniz, pp. 416-418. En écriture habituelle : $(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$

simples sur des quantités réelles :

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x^2-1} &= \int \frac{dx}{(x-1)(x+1)} = \int \left(\frac{1/2}{x-1} - \frac{1/2}{x+1} \right) dx = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x+1} \\ &= \frac{1}{2} \ln(x-1) - \frac{1}{2} \ln(x+1) = \frac{1}{2} \ln \frac{x-1}{x+1}\end{aligned}$$

l'intégration d'une fonction rationnelle en $1/(x^2+1)$ suit exactement la même démarche en remplaçant -1 par $+1 = -(-1) = -(\sqrt{-1})^2$, qui s'écrit plus simplement $-i^2$ depuis Leonard Euler (1707-1783). Ce qui donne :

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x^2+1} &= \int \frac{dx}{(x-i)(x+i)} = \int \left(\frac{1/2i}{x-i} - \frac{1/2i}{x+i} \right) dx = \frac{1}{2i} \int \frac{dx}{x-i} - \frac{1}{2i} \int \frac{dx}{x+i} \\ &= \frac{1}{2} \ln(x-i) - \frac{1}{2} \ln(x+i) = \frac{1}{2} \ln \frac{x-i}{x+i}\end{aligned}$$

Jusqu'au tournant du 19^{ème} siècle, lorsque la légitimité de telles pratiques est interrogée du point de vue philosophique, l'analogie est renvoyée à des considérations métaphysiques, comme l'indique ici André Weil (1906-1998) :

« Les mathématiciens du XVIII^e siècle avaient coutume de parler de la "métaphysique du calcul infinitésimal", de la "métaphysique de la théorie des équations". Ils entendaient par là un ensemble d'analogies vagues, difficilement saisissables et difficilement formulables, qui néanmoins leur semblaient jouer un rôle important à un moment donné dans la recherche et la découverte mathématiques. [...]

Rien n'est plus fécond, tous les mathématiciens le savent, que ces obscures analogies, ces troubles reflets d'une théorie à une autre, ces furtives caresses, ces brouilleries inexplicables ; rien aussi ne donne plus de plaisir au chercheur »¹⁷.

Bien plus qu'une théorisation de la résolution des équations, l'algèbre est alors devenue un formidable outil d'analyse, souvent qualifiée d'analyse algébrique, par opposition aux méthodes géométriques d'analyse des problèmes. En dehors des tentatives de légitimation philosophique, lorsque les mathématiciens tentent d'échapper aux analogies opératoires pour légitimer leurs résultats, ils ont recours à des interprétations géométriques, qui ne manquent pas de réintroduire des cas d'impossibilité que l'algèbre tend précisément à dépasser.

¹⁷ Weil, p. 408.

La reconstruction du discours au niveau référentiel ou pragmatique

La première tentative pour constituer l'algèbre comme discipline, logiquement bien fondée et indépendante de la géométrie, provient d'un vaste réseau d'algébristes anglais de la première moitié du 19^{ème} siècle, connu sous le nom d'École Algébrique Anglaise¹⁸. L'algèbre n'y est pas envisagée du strict point de vue de la résolution générale des équations, mais plus largement, comme une science des opérations, réorganisant l'ensemble des pratiques calculatoires sur des combinaisons de symboles. Tournant radical : ces pratiques ne seront plus légitimées par les résultats du calcul, mais par la validité des déductions fondées sur les lois de ces combinaisons. Les plus engagés dans cette démarche, George Peacock (1791-1858), Duncan F. Gregory (1813-1844) et George Boole (1815-1964), soucieux d'embrasser dans cette algèbre tous les acquis de l'expérience, vont intégrer l'analogie à l'élaboration de cette science sous forme d'un principe, tout en cherchant à élaborer des critères qui en régissent l'utilisation.

L'Algèbre Symbolique définie par Peacock

Peacock nomme « Algèbre Symbolique » cet état de l'algèbre conçue comme « langage du raisonnement symbolique », « système de combinaisons » de symboles arbitraires, « généraux dans leur forme comme dans leur valeur ». Ces combinaisons ne sont autres que les lois qui régissent quatre opérations de même type que celles de l'arithmétique, encore nommées addition et soustraction d'une part, multiplication et division d'autre part. Elles sont respectivement définies comme réciproques l'une de l'autre, et régies par une loi qui serait qualifiée aujourd'hui d'associativité-commutativité¹⁹. La signification des calculs, c'est-à-dire l'obtention de valeurs numériques, n'intervient pas dans la validité des calculs, dont l'universalité repose sur ces seules lois. Elle est reléguée au rang d'interprétation possible, mais non nécessaire, et relève de l'algèbre arithmétique, sur laquelle le mathématicien au travail s'est historiquement appuyé dans la pratique pour obtenir les formes symboliques issues de ces calculs. Peacock installe ainsi une séparation radicale entre validité du calcul et signification des résultats.

¹⁸ L'analyse des raisons endogènes et exogènes d'engager cette restructuration dépasserait les limites de cet article. Il s'agit essentiellement, d'une part, d'intégrer à l'enseignement la puissance de l'analyse algébrique révélée par la *Mécanique Céleste* de Laplace, publiée au tournant du siècle, et d'autre part, d'adapter les Universités anglicanes de Cambridge et Oxford aux conséquences de la Révolution Industrielle. Durand-Richard, 1996 et 2020.

¹⁹ Peacock, 1833, p. 196-197. Pour une présentation plus détaillée, voir Durand-Richard 2022.

Ainsi, de la même manière que $b = \frac{a}{c}$ est défini par $a = b.c$:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + etc$$

est valide en algèbre symbolique quel que soit x , parce que :

$$1 = (1-x).(1 + x + x^2 + x^3 + etc)$$

$\frac{1}{1-x}$ et $1 + x + x^2 + x^3 + etc$ sont deux formes symboliques qualifiées d'équivalentes. L'égalité est du domaine de l'algèbre arithmétique : elles n'y sont égales, au sens où elles ont même valeur numérique, que si $-1 < x < 1$ afin que le dénominateur de la fraction ne soit pas nul et que la série converge.

Il est étrange pour le lecteur du 21^{ème} siècle que cette affirmation radicale de l'universalité d'un calcul symbolique ne soit pas fondée sur une présentation axiomatique de l'algèbre. Les formes symboliques sont directement issues des pratiques de l'algèbre arithmétique, dès lors que les symboles ne sont pas porteurs de limitations. Si ces formes ont été obtenues dans la pratique par analogie, pour Peacock, celle-ci n'est qu'apparence, et relève d'un principe plus général :

« "Les opérations et les formes qui en résultent en Arithmétique et en Géométrie, exprimées par des symboles, sont porteuses d'une stricte analogie avec les opérations de même nom, et avec les formes qui en résultent semblablement en Algèbre, quand les symboles sont parfaitement généraux : mais c'est par la loi de permanence des formes équivalentes, et non par analogie, que nous sommes capables de passer de l'une à l'autre : c'est seulement dans la mesure, par conséquent, où l'analogie peut être considérée comme une expression modifiée de cette loi, que nous pouvons légitimement généraliser les conclusions que nous avons obtenues grâce à elle »²⁰.

A l'analogie comme pratique, Peacock substitue un double principe, le principe de permanence des formes équivalentes, qui régit les relations réciproques entre algèbre arithmétique et algèbre symbolique, c'est-à-dire entre l'expérience du mathématicien au travail, et l'énonciation des vérités universelles du calcul symbolique :

« (A) Proposition directe : Toute forme qui est algébriquement équivalente à une autre quand elle est exprimée en symboles généraux doit continuer à lui être équivalente, quel que soit ce que ces symboles représentent.

(B) Proposition réciproque : Toute forme équivalente qui est découverte en algèbre arithmétique considérée comme science de suggestion, lorsque les symboles sont généraux

²⁰ Peacock, 1830, p. 108. Toutes les traductions de Peacock 1830 et 1833 sont de mon fait.

dans leur forme, bien que spécifiques dans leur valeur, doit continuer à être une forme équivalente quand les symboles sont généraux dans leur nature aussi bien que dans leur forme »²¹.

Si l'énoncé (A) semble évident au lecteur moderne, l'énoncé (B) est bien plus problématique. Tout comme l'absence de présentation axiomatique, il s'enracine dans l'empirisme modéré de la philosophie de John Locke (1632-1704), dont l'argumentaire imprègne les textes de ces algébristes anglais depuis le début du siècle²². Elle incite à penser la science comme théorisation des perceptions – sensations et réflexions – qui constitue l'expérience humaine, et la science mathématique comme celle des opérations de l'esprit, dont les facultés demeurent innées :

« L'autre source d'où l'Entendement vient à recevoir des idées, c'est la perception des opérations de nos propres Esprits sur les idées qu'ils ont reçus par les Sens : opérations qui devenant l'objet des réflexions de l'âme, produisent dans l'Entendement une autre espèce d'idées, que les Objets extérieurs n'auraient pu lui fournir. [...] Ainsi, la connaissance est dans l'Entendement, [...], et non dans la nature des choses qui existent hors de nous »²³.

L'arbitraire du signe qu'installe Peacock en algèbre symbolique s'inscrit dans la distinction lockéenne entre la chose, l'idée et le mot. L'universalité des vérités mathématiques ne porte plus sur l'adéquation avec le réel, mais sur le traitement des termes généraux, associés aux idées générales forgées dans l'esprit par abstraction, et qui n'ont qu'une essence nominale : ils correspondent à l'expérience des choses, et non aux choses elles-mêmes, puisque la réalité est inconnaissable²⁴. La connaissance bascule ainsi dans le langage, et la recherche pour ces algébristes va porter sur l'analyse des lois de combinaisons de symboles, corrélatives de la combinaison des idées simples en idées composées.

Du principe de permanence au principe de transfert chez Gregory

L'ambiguïté du principe de permanence des formes équivalentes n'échappe pas aux

²¹ Peacock, 1833, p. 210.

²² Cet ancrage est indispensable à la compréhension du principe de permanence. Il est notamment analysé dans Durand-Richard 2022, qui retranscrit mon intervention au colloque de Besançon 2019 sur « Ancrages matériels et imagination diagrammatique ».

²³ Locke, § II.1.4. et II.8.

²⁴ Lockes, II.21.12 et II.23.13.

critiques des successeurs de Peacock, qui vont en retravailler les conditions d'application. Leurs travaux manifestent de plus la véritable ambition de ce champ de recherche : l'explication de lois symboliques servant de cadre à la résolution des équations différentielles, qui généralise celle des équations algébriques²⁵.

En 1939, Gregory publie cinq articles sur la résolution des équations différentielles dans le nouveau *Cambridge Mathematical Journal* qu'il vient de cofonder pour offrir un lieu de recherche aux étudiants sur ce thème. Disciple de Peacock, il cite les travaux français de Fourier, Poisson, Arbogast, qui ont développé l'usage de ces formes symboliques, en ne les considérant que comme simple commodité d'écriture, là où lui les hisse au statut de « véritables solutions ». L.F.A. Arbogast (1759-1803) a en particulier développé une méthode de séparation des symboles d'opération de ceux de quantités, qui lui a permis d'isoler le symbole de différentiation d/dx du symbole de fonction, et de le soumettre aux opérations usuelles. Gregory explore largement les possibilités d'un tel calcul, et va jusqu'à considérer les nombres eux-mêmes comme des opérations, initialement effectuées sur l'unité.

Il ne se situe plus dans le champ indifférencié du langage du raisonnement symbolique, mais définit des classes d'objets soumis aux mêmes lois d'opération. Ce faisant, il énonce cette fois, non plus un principe de permanence, mais ce que je nomme un « principe de transfert », qui précise les strictes conditions auxquelles des propriétés opératoires démontrées pour une classe donnée d'objets peuvent être considérées directement comme valides pour une autre classe d'objets :

« Tout ce qui est prouvé sur ces derniers symboles, à partir des lois connues de leurs combinaisons, doit être également vrai de tous les autres symboles qui sont soumis aux mêmes lois de combinaison.

Ainsi, les lois de combinaison des symboles a , b , &c., [étant] :

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \quad a \{b(x)\} = b \{a(x)\} \quad a(x) + a(y) = a(x+y)$$

et si f, f_1 , &c. sont d'autres symboles quelconques d'opération (f et f_1 étant de la même espèce) soumis aux mêmes lois de combinaison, tels que :

$$f^m \cdot f^n(x) = f^{m+n}(x) \quad f(f_1(x)) = f_1(f(x)) \quad f(x) + f(y) = f(x+y)$$

alors, tout ce que nous avons pu prouver de a , b , &c. à partir de ces trois lois, doit nécessairement être vrai de f , f_1 , &c. Maintenant, nous savons que le symbole d [de différentiation] est soumis à ces lois

$$d^m \cdot d^n(x) = d^{m+n}(x) \quad d/dx (d/dy(z)) = d/dy (d/dx(z))$$

²⁵ Durand-Richard 2020.

$$d(x) + d(y) = d(x+y)$$

et qu'il en est de même pour Δ [symbole de différence fini] »²⁶.

L'Algèbre symbolique de Peacock devient chez Gregory « calcul des opérations ». Et les propriétés obtenues grâce au principe de transfert sur les opérateurs différentiels et de différences finie sont investies dans ses autres articles pour proposer des résolutions symboliques des équations où ils interviennent. L'enjeu à l'œuvre depuis les articles de Charles Babbage (1791-1871) de 1815-16 sur le calcul des fonctions devient ici explicite : produire des méthodes symboliques fondées sur le caractère algorithmique du calcul algébrique, en étendant aux fonctions, et maintenant aux opérateurs différentiels, les calculs sur les puissances. Et les conditions de validité de ces méthodes symboliques deviennent explicites, et se détachent des fondements philosophiques.

Le principe de transfert appliqué à l'algébrisation de la logique chez Boole

Si Boole est aujourd'hui reconnu comme logicien, il fut pourtant d'abord un mathématicien, et son travail s'inscrit dans le prolongement direct de celui de Gregory. Ses premiers articles sont publiés dans le *Cambridge Mathematical Journal* dès 1841, et ses deux derniers traités de 1859 et 1860 portent respectivement sur les équations différentielles et le calcul des différences finies. En 1844, il présente un très important article à la Royal Society, « A General Method of Analysis », entièrement consacré à l'extension des méthodes de Gregory, où il reprend immédiatement le principe de transfert :

« De nombreux théorèmes de l'algèbre ordinaire, bien qu'apparemment démontrés seulement pour des symboles représentant des nombres, admettent une application beaucoup plus étendue. De tels théorèmes ne dépendent que des lois de combinaison auxquelles ces symboles sont soumis, et sont donc vrais pour tous les symboles, quelle que soit leur nature, qui sont soumis aux mêmes lois de combinaison »²⁷.

Lorsque il aborde la logique en 1847, Boole propose une écriture algébrique de la logique scolastique en se réclamant explicitement de l'Algèbre Symbolique²⁸, et réaffirme la subordination

²⁶ Gregory 1939, pp. 33-34. Traduction personnelle.

²⁷ Boole, 1844, p. 115.

²⁸ Boole, 1847, p. 3.

de toute interprétation à la validité des écritures formelles²⁹. Son ouvrage majeur de 1854, *An Investigation of the Laws of Thought*, investit le vocabulaire de Locke et de Gregory pour reconstruire tout l'édifice de la logique sous la forme d'un calcul algébrique, à partir du principe de transfert. Le but ultime est de proposer une théorie générale de l'élimination – des prémisses intermédiaires –, comme dans la résolution des équations algébriques, en lieu et place des syllogismes aristotéliens, qui n'en sont plus qu'un cas particulier. Le langage étant posé comme « instrument du raisonnement », Boole affirme d'emblée la proposition I :

« Toutes les opérations du langage [...] peuvent se conduire dans un système de signes composé des éléments suivants :

1. Des symboles littéraux, tels que x , y , etc., représentant les choses en tant qu'objets de nos conceptions.
2. Des signes d'opérations, tels que $+$, $-$, $.$, qui traduisent les opérations de l'esprit par lesquelles les conceptions des choses sont combinées ou séparées de manière à former de nouvelles conceptions comprenant les mêmes éléments.
3. Le signe d'identité $=$ »³⁰.

Alors, si x représente la classe des moutons *et* y la classe des choses blanches, Boole peut écrire, en se référant à la langue naturelle, que $xy = yx$. De même, si x représente la classe des hommes et y celle des femmes, la classe des hommes *ou* des femmes s'écrit indifféremment : $x + y = y + x$. En outre, si z représente la classe des Européens, $z(x + y) = zx + zy$ ³¹. Partant, d'après le principe de transfert, ces propriétés ayant été démontrées pour les nombres, tout ce qui en découle pour les nombres en découle également pour les lois *et* *ou* de la logique, ce qui permet de mettre en place un calcul sur les classes d'objets. Et Boole revendique cette mise en œuvre du principe de transfert comme expression d'une même loi formelle, excluant toute référence à l'analogie :

« La loi [$xy = yx$] sera mieux caractérisée si l'on souligne que les symboles littéraux x , y , z sont commutatifs comme les symboles algébriques. En disant cela, on n'affirme pas que l'opération de multiplication en algèbre, dont la loi fondamentale est exprimée par l'équation $xy = yx$ présente en elle-même une analogie avec l'opération de composition logique, représentée plus haut par xy : mais seulement que si les opérations arithmétique et logique

²⁹ Boole, 1847, p. 3.

³⁰ Boole, 1992, p. 45.

³¹ Boole, 1992, pp. 46-51. Il convient de remarquer ici que le « ou » logique de Boole est un « ou » exclusif : cette restriction est indispensable au transfert des propriétés de l'algèbre à la logique. Ainsi, l'écriture algébrique de la logique chez Boole ne correspond pas encore à l'algèbre de Boole telle qu'elle est identifiée aujourd'hui.

sont exprimées de la même manière, leurs expressions symboliques seront sujettes à la même loi formelle »³².

Ce transfert n'empêche pas de constituer cette algèbre de la logique comme une algèbre spéciale dans laquelle $x^2 = x$, puisque la sélection réitérée d'une classe $(x.x)$ donne la même classe. Écrite sous la forme $x(1-x) = 0$, elle exprime le principe aristotélien du tiers exclu, qui découle de cette expression mathématique, et n'est donc plus un principe philosophique *a priori*. Ses seules solutions sont en effet 0 et 1, que Boole interprète comme représentant respectivement le Rien et l'Univers, au sens de l'univers du discours.

De Gregory à Boole, le principe de transfert installe ainsi les mathématiques et la logique comme deux expressions possibles d'un même calcul symbolique, qui restent chez ces auteurs l'expression des opérations de l'esprit.

Conclusion

Si l'analogie soutient l'extension de la notion de nombre et des pratiques de calcul de l'arithmétique à l'algèbre, elle ne disparaît pas lors de l'élaboration des théories mathématiques. Elle s'y intègre, au prix parfois d'un changement de nom, et toujours, de l'explicitation de critères qui en régulent l'utilisation, et d'une restructuration de la signification des opérations elles-mêmes. L'ambitieux projet du réseau des algébristes anglais du début du 19^{ème} siècle marque un changement du référentiel des opérations et de leurs objets. Depuis Gregory, les propriétés opératoires sont considérées isolément, et des objets peuvent être délibérément produits, qui n'en respectent que certaines, comme les octonions d'Arthur Cayley (1821-95), ou les biquaternions de William Clifford (1845-1879). L'algèbre symbolisée a perdu la position de surplomb épistémologique que lui conférait Peacock par rapport à la pratique du mathématicien au travail. Une fois précisés les critères pour un transfert valide des propriétés opératoires, l'analogie va pouvoir structurer explicitement les relations réciproques entre démarche inventive et activité démonstrative, comme en témoigne aujourd'hui la théorie des modèles³³, ainsi que l'étude des

³² Boole, 1992, pp. 48-49.s

³³ Durand-Richard 2008, « De l'algèbre à la théorie des modèles ».

structures algébriques abstraites (groupes, corps, anneaux, etc...), où elle apparaît sous forme d'isomorphisme organisant la correspondance des opérations entre leurs différents représentants.

Bibliographie

AUSTIN John. *Quand dire, c'est faire*. Traduction J. Cachin. Paris : Seuil, 1962.

BOOLE George. A General Method of Analysis. *Philosophical Transactions*. 134, 225-282.

BOOLE George. *Mathematical Analysis of Logic, being an Essay towards a Calculus of Deductive Reasoning*. Cambridge : MacMillan, 1847.

BOOLE George. *Les lois de la pensée*. Traduction S. B. Diagne. Paris : Vrin, 1972.

BLANCHE Robert. *Le raisonnement*. Paris : PUF, 1973.

BOMBELLI Raphaële, *Algebra*. Bologne : 1572.

DESCARTES René, Lettre à Mersenne du 20 novembre 1629, *Œuvres et Lettres*. Paris : Gallimard La Pléiade, 1953, 911-915.

DURAND-RICHARD Marie-José. L'Ecole Algébrique Anglaise : les conditions conceptuelles et institutionnelles d'un calcul symbolique comme fondement de la connaissance. In (éd.) GOLDSTEIN C., GRAY J., RITTER J., *L'Europe mathématique - Mythes, histoires, identités*, Paris : Editions de la Maison des sciences de l'homme, 1996, 445-498.

DURAND-RICHARD Marie-José. « Introduction » et « De l'algèbre à la théorie des modèles : structuration de l'analogie comme méthode démonstrative ». In (éd.) DURAND-RICHARD M.-J. *L'analogie dans la démarche scientifique. Perspective historique*. Paris : L'Harmattan, 2008.

DURAND-RICHARD Marie-José. Calcul et signification, *Image des mathématiques*, Paris : CNRS, en ligne, 2012. URL : <http://images.math.cnrs.fr/Calcul-et-signification.html>

DURAND-RICHARD Marie-José. Fondements symboliques des pratiques algorithmiques en Angleterre (1801-1860). In HAFFNER E., RABOUIN D. (dir.). *L'Épistémologie du dedans. Mélanges en l'honneur de Hourya Benis-Sinaceur*. Paris : Garnier, 2020. 301-339

ECO Umberto. *La recherche de la langue parfaite dans la culture européenne*. Traduction J.-P. Manganaro. Paris : Seuil, 1994.

DURAND-RICHARD Marie-José. *The Analytical Engine : Diagrammes de fonctionnement de Babbage à Lovelace. Ancrages matériels*. Besançon: PUFC, 2022 (à paraître).

- FLAMENT Dominique. *Histoire des nombres complexes*. Paris : CNRS Editions, 2003.
- FRIEDELMYER, Jean-Pierre, La première démonstration de Gauss du théorème fondamental de l'algèbre, *In IREM, Images, Imaginaires, Imaginations, Une perspective historique pour l'introduction des nombres complexes*. Paris : Ellipses, 1998, 279-324.
- GREGORY Duncan F. On the solution of linear differential equations with constant coefficients. *Cambridge Mathematical Journal*, 1, 22-33, *Mathematical Writings*, Cambridge, 1865, 14-27.
- HOUZEL Christian. L'analogie entre théorie des nombres et théorie des fonctions, *In DURAND-RICHARD M.-J.*, 2008.
- ITARD Jean. Matériaux pour l'histoire des nombres complexes, *Brochure A.P.M.E.P.*, Paris, Bibliothèque d'information sur l'enseignement mathématique, 1969, 2, 12-16.
- LEIBNIZ Gottfried. Symbolismus Memorabilis Calculi Algebraici et Infinitesimalis in Comparatione Potentiarum et Differentiarum, et de Lege Homogeneorum Transcendantali, *Naissance du calcul différentiel*. Traduction M. Parmentier. Paris : Vrin, 1989, 409-421.
- LOCKE John. *Essai philosophique sur l'entendement humain*. Traduction M. Coste. Paris : Vrin, 1983.
- PEACOCK George. *A Treatise on Algebra*. Cambridge : Deighton, 1830. Réed. 2 vols, 1842-45.
- PEACOCK George A Report on the recent progress and actual state of certain branches of analysis. *Proceedings of the British Association for the Advancement of Science, held in Cambridge*, 1833, 3, 85-351.
- RICŒUR Paul. *La métaphore vive*. Paris : Seuil, 1975.
- VICTORRI Bernard, FUCHS Catherine. *La polysémie, construction dynamique du sens*. Paris : Hermès, 1975.
- WEIL André. De la métaphysique aux mathématiques. *Œuvres Scientifiques*. New York Heidelberg Berlin : Springer Verlag, 1960, 3 vols, II, 408-412.