



**HAL**  
open science

## Une contribution méconnue dans l'histoire de la pensée économique : le modèle de l'Abbé M. Potron (1935)

Emeric Lendjel

### ► To cite this version:

Emeric Lendjel. Une contribution méconnue dans l'histoire de la pensée économique : le modèle de l'Abbé M. Potron (1935). Cahiers d'Economie Politique = Papers in political economy, 2000, 36, pp.145-151. halshs-04007938

**HAL Id: halshs-04007938**

**<https://shs.hal.science/halshs-04007938>**

Submitted on 28 Feb 2023

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Une contribution méconnue dans l'histoire de la pensée économique : le modèle de l'Abbé M. Potron (1935)

Emeric LENDJEL\*

## CLASSIFICATION JEL : B 220

Qui est l'Abbé M. Potron ? Son nom n'évoque aucun écho dans l'histoire de la pensée économique. Pourtant, ses rares contributions à l'économie entre 1935 et 1937 se distinguent par leur originalité, leur rigueur et surtout, par leur étonnante modernité. L'abbé Potron est en effet le premier, en France, à appliquer le théorème de Perron-Frobenius à une représentation matricielle de l'économie. Il anticipe en cela de nombreux travaux développés plus de vingt ans après, principalement autour de l'oeuvre de Sraffa. Pourtant, l'auteur n'est pas un économiste. Il est docteur ès mathématiques, polytechnicien, chevalier de la légion d'honneur et Jésuite de son état. D'où vient son intérêt pour l'économie ? Comment est-il parvenu à établir des résultats aussi novateur en 1935, alors qu'il ne connaît rien à cette discipline ? C'est à ces questions que nous tenterons de répondre à l'aide des quelques éléments biographiques disponibles<sup>1</sup>, avant d'introduire la réédition de son article "Sur certaines conditions de l'Equilibre Economique" (1935).

Né à Paris le 31 mai 1872 et mort le 21 janvier 1942, Maurice Marie Jean Potron intègre l'Ecole Polytechnique en 1890 (11<sup>ème</sup> au concours d'entrée), pour en sortir en 1892 (14<sup>ème</sup> sur 181). Il soutient en 1904 une thèse de mathématique à la Faculté de Sciences de Paris, un an avant son ordination en 1905. Ses activités d'enseignement semblent débuter en même temps que ses recherches, dans la première décennie du 20<sup>ème</sup> siècle. Elles ne concernent que les mathématiques et semblent s'adresser principalement aux élèves préparant le concours d'entrée à l'Ecole Polytechnique. Cet enseignement de "mathématiques spéciales" donne lieu à deux publications, la seconde portant sur le calcul différentiel et intégral ([1922], [1926-7]).

Par la suite il rejoint le corps enseignant de l'Institut Catholique de Paris en 1928 où il enseignera jusqu'en 1940. Il est recruté en tant que "chargé de conférences" et deviendra "professeur hors cadre" en 1934<sup>2</sup>. La matière de son enseignement comprenait deux sortes de cours. Les premiers complétaient l'enseignement d'une chaire : de 1928 à 1932, l'abbé Potron était chargé des "conférences d'analyse et d'éléments de mécanique", rattachées à la chaire de Mathématiques générales; de 1932 à 1940, il fut adjoint à la chaire de Calcul différentiel et

---

\* Université de Paris I, GRESE; Université de Marne-la-Vallée, OEP. Lendjel@yahoo.com

<sup>1</sup> Je tiens à remercier tout particulièrement Mr. Jean-Baptiste Lebigue, archiviste de l'Institut Catholique, pour son aide précieuse sur ce point.

<sup>2</sup> Nous relèverons que Potron n'a jamais été titulaire d'une chaire à l'Institut Catholique de Paris et, qu'en ce sens, il apparaît en marge des institutions qu'il a fréquenté, que ce soit l'Ecole Polytechnique ou l'I. C. P..

intégral chargé d'enseigner un cours public "d'analyse et géométrie supérieures" qui recouvre des contenus variables selon les années :

- 1932-33 "Applications de la théorie des groupes continus de transformations à l'étude des fondements de la géométrie".
- 1933-34 "Applications de la théorie des groupes aux équations algébriques et aux équations différentielles".
- 1934-35 "Applications de la théorie des groupes aux équations algébriques et aux équations différentielles"; "La fonction  $\zeta$  de Riemann et la distribution des nombres premiers".
- 1935-36 "Quelques points d'*analysis situs* et topologie en relation avec la théorie des groupes".
- 1936-37 "Relations entre la théorie des groupes et les principes de la géométrie et de la mécanique".
- 1937-38 "Les divisions régulières de l'espace. Applications à la cristallographie et à la topologie".
- 1938-39 "I. Représentation locale de tout groupe de Lie par un groupe linéaire. II. Variétés euclidiennes topologiquement distinctes à deux et trois dimensions".

A ces activités s'ajoutent la tentative d'instaurer, en 1937, un cours d'économie à la suite d'un cycle de six conférences que Potron donna à l'Institut Catholique, en mars-avril 1937, intitulé "Les rapports existant entre *certaines problèmes économiques* et quelques acquisitions assez récentes *d'une théorie mathématique*". Mais ces conférences, qui ont été accueillies sans chaleur par les autorités de l'Institut Catholique de Paris, n'ont pas été reconduites par la suite<sup>3</sup>.

Quant à ses recherches, elles portent uniquement, tout comme son enseignement, sur les mathématiques. Son principal sujet d'étude semble être la théorie des groupes, qui fait l'objet de sa thèse en 1904 et que l'on retrouve tout au long de sa vie ([1904a], [1904b], [1931], [1936], [1938], [1940]). Ces travaux le conduisent ponctuellement à écrire, en 1913, un article sur le théorème de Perron-Frobenius<sup>4</sup> et deux autres sur l'irréductibilité des polynômes à plusieurs variables ([1932], [1935a]). A notre connaissance, ses contributions sont donc essentiellement mathématiques. Au regard de ce parcours de mathématicien, comment Potron a-t-il été conduit à s'intéresser à l'économie ?

Sur ce point, X-Crise semble être un moment déterminant. X-Crise est une association de l'Ecole Polytechnique dont le sigle désignait initialement le "Centre de Renseignements et d'Informations Sociales et économiques" avant de devenir le "Centre Polytechnicien d'études

---

<sup>3</sup> Cette réticence provient probablement d'un malentendu relatif au contenu de la conférence du 18 mars 1937. Dans cette dernière, Potron semble faire référence au "problème de la manne des hébreux", proposant peut-être de lire ce passage biblique sous un angle inhabituel. Le malentendu a partiellement été levé, comme en témoigne une lettre du secrétaire général de l'Institut Catholique adressée à Potron.

<sup>4</sup> C'est également en travaillant sur la théorie des groupes finis que Frobenius établit son théorème sur les matrices à coefficients positifs en 1908 et 1909.

économiques". Cette association fut constituée en 1931 par Bardet, Loizillon et Nicoletis dans le but de réfléchir aux causes et aux solutions éventuelles de la crise mondiale. Regroupant en octobre 1931 une vingtaine de polytechniciens, les adhérents à X-Crise sont déjà près de 500 en mai 1933, pour atteindre le nombre de 2000 membres environ (polytechniciens ou non) en 1939, date de la fin de l'association (Brun [1982], pp. 19-35, Dard [1995]).

Certains facteurs permettent d'expliquer la constitution et le succès croissant d'X-Crise et, par là, d'éclairer ce qui a pu motiver un mathématicien comme Potron à s'intéresser à l'économie. Nous avons recensé quatre principaux facteurs<sup>5</sup>. Au premier plan de ces facteurs figure le progrès technique. Ce dernier est perçu, dans les années trente, comme la cause de la richesse du monde mais aussi de la baisse générale des prix de gros inaugurée en 1920 et du chômage. Pour les ingénieurs, une telle analyse signifiait en quelque sorte une mise en accusation. Le progrès technique dont ils étaient à l'origine n'apportaient pas le bonheur espéré mais, au contraire, le chômage et le marasme économique. Aussi ne pouvaient-ils rester indifférents à cette thèse, ni par conséquent passifs vis à vis de la situation économique. Leur savoir devait apporter une réponse à la crise, eux qui n'avaient jusque-là été intéressés que par des problèmes techniques pratiques, jusque dans le domaine de l'économie (Etner [1978], p.111; Ullmo [1982], p. 273). Montrer que le progrès technique ne pouvait être la cause véritable des difficultés économiques et sociales de l'heure, tel est ainsi un des thèmes centraux qui anime les travaux des polytechniciens d'X-Crise dès l'origine. Le second facteur de l'engouement nouveau de beaucoup de polytechniciens pour les problèmes économiques de leur temps provient du planisme et du sentiment qu'il faut rationaliser l'activité économique dans son ensemble. Cet engouement se situe dans le prolongement du mouvement de rationalisation de l'organisation de la production au sein de l'entreprise impulsé par Taylor, Ford et Fayol. Associé aux thèmes de la rationalisation de l'activité économique, le planisme attire en effet les "esprits «modernistes»" des ingénieurs. Le troisième facteur explicatif de la constitution d'X-Crise provient sans doute de la perception qu'avaient les ingénieurs du caractère doctrinal des débats économiques en France. Une des caractéristiques du contexte intellectuel des années trente en France est l'absence de théorie de la crise. Ce vide théorique suscite d'autant plus le malaise des polytechniciens que, confrontés à une situation de crise, ils ne perçoivent qu'un conflit doctrinaire entre libéraux et interventionnistes, y compris du côté du planisme. Le quatrième et dernier facteur concerne la crise de légitimité institutionnelle que l'Ecole Polytechnique a traversé dans les années vingt. Durant cette période, en effet, un projet de loi avait même proposé de fermer l'Ecole. Dans ce contexte, Le Chatelier avait lancé en 1924 un appel dont le contenu préparait les esprits à une forme de réaction du type de X-Crise, même si cet appel était resté sans suite dans les années vingt (Le Chatelier [1924]). Ce facteur institutionnel joue probablement dans la forte mobilisation des Polytechniciens autour des questions économiques dans les années trente puisque la crise économique réactive leur

---

<sup>5</sup> Ces facteurs sont détaillés dans Fischman et Lendjel [2001].

sentiment d'une perte de légitimité sociale, comme on l'a vu à travers la question du progrès technique.

Ces facteurs ont sans doute contribués à attirer un ancien élève de l'Ecole comme Potron dans la mouvance de X-Crise. Potron rejoint ainsi l'association pour en suivre - discrètement - les débats. En effet, les *bulletins du C.P.E.E.* ne font état d'aucune intervention publique de sa part et c'est par une lettre - publiée en 1935 dans le numéro 24-25 - qu'en une seule et unique occasion il prend part au débat économique de son époque. La seule autre publication économique de Potron semble être sa brochure *Les Equilibres consommation-production et prix-salaires*, mentionnée dans la note (1) en 1935, dont on ne conserve, à notre connaissance, aucun exemplaire<sup>6</sup>. Au delà de cette référence en bas de page, son existence semble pourtant être attestée par le cycle de six conférences qu'il donna en 1937 à l'Institut Catholique, dont on peut supposer qu'il s'est appuyé sur une base plus étoffée que la seule "lettre" de 1935.

L'intervention de Gibrat, qui est à l'origine de la lettre de Potron, n'a pas été retranscrite dans le *Bulletin du C.P.E.E.*. On sait par contre que Frisch eu l'occasion de donner six conférences à Paris en 1932 au cours desquelles il proposa une représentation matricielle de l'économie. Gibrat, intéressé dès le départ par le projet économétrique de Frisch, a probablement assisté à ces conférences. En présentant ces résultats, Gibrat fait réagir Potron, un des rares véritables mathématiciens à assister aux réunions d'X-Crise. En familier du calcul matriciel, Potron mentionne l'existence d' "une autre matrice, très intéressante, que je crois bien avoir été le premier à considérer, au moins dans son application aux problèmes économiques" (Potron [1935], p. 62). Il s'agit "[d]es théorèmes de Frobenius (énoncés et démontrés en 1909) sur les *matrices* ou *substitutions linéaires* à coefficients *positifs*" (Potron [1937], p. 57). Nous avons là, plus de vingt ans avant l'ouvrage de Dorfman, Samuelson et Solow [1958] et l'article de Newman [1961] portant sur les travaux de Sraffa, la première application du théorème de Perron-Frobenius à une représentation matricielle de l'économie.

L'originalité de la contribution ne s'arrête pas là. Relevons brièvement quelques autres éléments remarquables de cet article. Tout d'abord, il faut souligner qu'il s'agit d'un des premiers modèles macro-économiques français, prenant en considération des aspects originaux comme le temps de travail ou la consommation de biens et services par des chômeurs<sup>7</sup>. Ce modèle représente ensuite un "état *économico-social* déterminé", caractérisé par des conditions techniques, économiques (organisation du travail, hiérarchie des salaires et des prix, etc.) et sociales (mode de vie, structure de la consommation par catégorie sociale, etc.) qui peut être "satisfaisant et stable" sous un certain nombre de conditions que Potron précise et démontre mathématiquement. Ainsi, en appliquant le théorème de Frobenius à cette

---

<sup>6</sup> Aux *Cahiers d'action religieuse et sociale*, édité par les mêmes Editions du Spes que la "brochure" de Potron, aucune publicité n'en mentionne l'existence.

<sup>7</sup> Pour une présentation des autres modèles macroéconomiques présenté à X-Crise, voir Fischman et Lendjel [1999] et [2000]. Une analyse du modèle de Potron figure dans Fischman et Lendjel [à paraître].

représentation matricielle de l'économie, Potron démontre que l'on peut obtenir une organisation "satisfaisante" de la production et un "régime satisfaisant de prix et salaires". Sur ce point, remarquons que Potron semble établir une hiérarchie entre les équilibres production-consommation et ceux de prix-salaires, les premiers conditionnant les seconds. Cette hiérarchie n'est pas sans évoquer les travaux de Sraffa visant à réactualiser l'approche ricardienne de la valeur. Enfin, Potron arrive à la conclusion que l'absence de mécanisme autorégulateur rend l'équilibre économique "improbable", même s'il est logiquement possible. De ce fait, un organisme central se doit d'assurer la coordination des activités productives et calculer les effets du progrès techniques afin de les mettre en adéquation avec ce qu'il appelle le "train de vie" des consommateurs.

Ces quelques points n'épuisent pas, loin s'en faut, toute l'originalité de l'approche de l'Abbé Potron. Ils signalent en tous cas la nécessité d'opérer un retour sur l'histoire afin de prendre la mesure de la modification du centre de gravité qu'aurait connu notre discipline si ses travaux avaient eu la reconnaissance qu'ils méritaient.

## Bibliographie

- BRUN G. [1982], "Histoire d'X-Crise," *X-Crise, Centre Polytechnicien d'Etudes Economiques, De la récurrence des crises économiques, son cinquantenaire 1931-1981*, Paris, Economica, 1982, pp. 19-35.
- DARD Olivier [1995], "Voyage à l'intérieur d'X-Crise", *Vingtième siècle*, été (juillet-septembre) 1995, n° 47, pp. 132-146.
- DE SEGUIER J.-A., POTRON M. [1938], *Théorie des groupes abstraits*, Mémorial des sciences mathématiques, fasc. XCI, Paris, Gauthier-Villars, 1938.
- DORFMAN Robert, SAMUELSON Paul A., SOLOW Robert [1958], *Linear Programming and Economic Analysis*, London, McGraw-Hill, 1958.
- ETNER  
F. [1978], *Les Ingénieurs-économistes Français (1841-1950)*, thèse de doctorat, Paris, Université de Paris IX (Dauphine), 418p.
- FISCHMAN M, LENDJEL E. [1999], "X-crise et le débat sur la réduction du temps de travail", in L. Cordonnier et N. Vaneecloo (eds.) [1999], *La réduction du temps de travail, l'espace des possibles*, numéro spécial des *Cahier Lillois d'Economie et de Sociologie*, 1er semestre 1999, pp. 33-56.
- FISCHMAN M, LENDJEL E. [2000], "X-Crise et le Modèle des Frères Guillaume", in P. Dockès (ed.) [2000], *Actes du colloque de l'A. C. G. E. P. E. : La tradition économique française : 1834-1939*, 2000.
- FISCHMAN M, LENDJEL E. [2001], "Le Regard des Ingénieurs Français sur la Machine Sociale : X-Crise et la Construction des Premiers Modèles Macro-économiques dans les Années Trente", in Y. Breton et P. Le Gall (eds.) *L'émergence d'une tradition économétrique française (1838-1939)*, parution en 2001.
- FISCHMAN M, LENDJEL E., [à paraître], "Ingénieurs et formalisation : X-Crise et le débat sur la méthode dans les années trente", *Revue d'Economie Politique*.
- LE CHATELIER H. [1924], "l'enseignement à l'école polytechnique," *X information*, 9, 25 février 1924, pp. 1-22.
- NEWMAN Peter [1961], "Production of Commodities by Means of Commodities. A critique of Piero Sraffa Production of Commodities by Means of Commodities; Cambridge, at the University Press, 1960", réédité in I. Steedman (ed.) *Sraffian Economics*, vol. 1, *Schools of Thought in Economics* vol. 4, Aldershot, Edward Elgar, 1988, pp. 64-81.

- POTRON M. [1904a], *Les groupes d'ordre*, Paris, Gauthier-Villars, 1904, In-4, 174 p.
- POTRON M. [1904b], "Sur quelques groupes d'ordre  $p^6$ ", *Bulletin de la Société Mathématique de France*, t. XXXII, Paris, Gauthier-Villars, 1904.
- POTRON M. [1926-7], *Exercices de calcul différentiel et intégral*, 2 Vol., (T. I. *Résumé théorique et énoncés d'exercices*, 1926; T. II. *Solutions des exercices*, 1927), Paris, J. Hermann, 1926-7.
- POTRON M. [1931], "Sur un théorème fondamental de la Théorie des Groupes continus finis de transformations", *Compte rendu de l'Académie des Sciences*, t. 192, 1931.
- POTRON M. [1932], "Sur l'irréductibilité des polynômes à plusieurs variables", *Bulletin de la société mathématique de France*, reproduit à Paris par l'Institut Henri Poincaré, 1932, In-8, 2 p.
- POTRON M. [1935a], "Sur l'intégrale de différentielle binôme", *Journal de l'École polytechnique* 2<sup>e</sup> série, 33<sup>e</sup> cahier, 24 avril 1935, reproduit à Paris par Gauthier-Villars, In-8, 14 p., 1935.
- POTRON M. [1935b], "Sur Certaines Conditions de l'Équilibre Économique", *bulletin du C.P.E.E.*, n° 24-25, juillet-août 1935, pp. 62-65.
- POTRON M. [1936], *Les groupes de Lie*, Mémorial des sciences mathématiques, fasc. LXXXI, Paris, Gauthier-Villars, 1936, In-8, 64 p.
- POTRON M. [1937], "Les rapports existant entre *certaines problèmes économiques* et quelques acquisitions assez récentes *d'une théorie mathématique*", cycle de 6 conférences à l'Institut Catholique annoncé dans le *bulletin du C.P.E.E.*, 36, mars 1937, p. 57.
- POTRON M. [1940], "Sur la décomposition d'un groupe continu fini", *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 9<sup>e</sup>me série, t. XIX, fasc. 2, 1940.
- POTRON M., MICHEL F. [1922], *La composition de mathématiques dans l'examen d'admission à l'École polytechnique, de 1901 à 1921: Exercices d'application du cours de mathématiques spéciales*, Paris, Gauthier-Villars, 1922.
- ULLMO J. [1982], "Le rôle d'X-Crise et des polytechniciens dans l'histoire économique des quarante dernières années," *X-Crise, Centre Polytechnicien d'Etudes Economiques, De la récurrence des crises économiques, son cinquantenaire 1931-1981*, Paris, Economica, 1982, pp. 273-288.

**Potron [1935] "Sur Certaines Conditions de l'Équilibre Économique; Lettre de M. Potron (90) à R. Gibrat (22)"\***

Vous avez parlé, à la réunion du 22 février dernier, au C.P.E.E., d'une matrice d'offres et de demandes, considérées par FRISCH. Il est une autre matrice, très intéressante, que je crois bien avoir été le premier à considérer, au moins dans son application aux problèmes économiques.

Désignons par

$A_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) les divers "*produits*" ou "*résultats de travail*";

$A_i$  une quantité déterminée, dite "*unité*" de  $A_i$ ;

$P_i$  l'entreprise ou l'ensemble des entreprises produisant  $A_i$ ;

$d_i$  le nombre d'unités  $A_i$  produites annuellement;

---

\* Cet article est paru dans le *bulletin du C.P.E.E.*, n° 24-25, juillet-août 1935, pp. 62-65. Les chiffres entre parenthèses renvoient aux années de promotion (1890 et 1922) de ces deux polytechniciens (n. d. e.).

$d_i - f_i$  le nombre d'unités  $A_i$  consommées annuellement;

$a_i$  le prix de l'unité  $A_i$ ;

$b_i$  le bénéfice que réalise  $P_i$  par unité  $A_i$ ;

$c_{ik}$  le nombre d'unités  $A_k$  consommés pour produire l'unité  $A_i$ .

C'est de la matrice des  $c_{ik}$  que je veux parler.

Désignons encore par  $C_h$  les divers *trains de vie*;

$b_{hi}$  le nombre d'unités  $A_i$  consommées annuellement par un consommateur menant le train de vie  $C_h$ ;

$E_{ih}$  la collectivité des employés de  $P_i$  qui mènent le train de vie  $C_h$ ;

$p_{ih}$  le nombre de ces employés;

$q_h$  le nombre de consommateurs, ne travaillant pas, qui mènent le train de vie  $C_h$ ;

$Q_h$  le nombre *total* de consommateurs, travaillant ou non, qui mènent le train de vie  $C_h$ ;

$t_{ih}$  le nombre d'heures de travail que doit fournir la collectivité  $E_{ih}$  pour la production de l'unité  $A_i$ ;

$w_{ih}$  le nombre annuel d'heures de chômage de la collectivité  $E_{ih}$ ;

$N$  le nombre maximum (légal) qu'un travailleur quelconque peut fournir annuellement;

$s_{ih}$  le *salaires horaires* d'un employé appartenant à  $E_{ih}$ ;

$NS_h$  le *coût de vie* annuel d'un consommateur menant le train de vie  $C_h$ ;

$Ne_{ih}$  le total annuel des *économies* d'un travailleur de  $E_{ih}$ .

Entre ces divers nombres, il existe six systèmes de relations : les trois premiers sont les équations de l'équilibre production-consommation; les trois derniers sont les équations de l'équilibre prix-salaires.

Si l'on retranche de la production totale de  $A_i$  sa consommation totale, soit industrielle, soit domestique, on obtient le nombre  $f_i$  d'unités  $A_i$ . Ce fait s'exprime par le système

$$(1) \quad d_i = \sum_k c_{ki} d_k + \sum_h b_{hi} Q_h + f_i \quad (i = 1, 2, \dots).$$

Par définition de  $Q_h$ , on a

$$(2) \quad Q_h = \sum_i p_{ih} + q_h \quad (h = 1, 2, \dots).$$

La collectivité  $E_{ih}$  pourrait fournir annuellement  $Np_{ih}$  heures de travail. Elle en fournit effectivement  $t_{ih}d_i$ . La différence donne son nombre  $w_{ih}$  d'heures de chômage; d'où

$$(3) \quad Np_{ih} = t_{ih}d_i + w_{ih} \quad (i = 1, 2, \dots; h = 1, 2, \dots).$$

Si l'on exprime que le bénéfice  $b_i$  réalisé sur l'unité  $A_i$  est la différence entre le prix de vente et le prix de revient, on obtient

$$(4) \quad a_i = \sum_k c_{ki} a_k + \sum_h t_{ih} s_{ih} + b_i \quad (i = 1, 2, \dots).$$

Les économies représentent la différence entre le salaire et le coût de vie; d'où, pour tout  $E_{ih}$  pris en bloc,



$$(5) \quad d_i t_{ih} s_{ih} = N p_{ih} (S_h + e_{ih}) \quad (i = 1, 2, \dots; h = 1, 2, \dots).$$

Le coût de la vie annuel du consommateur de train de vie  $C_h$  donne

$$(6) \quad NS_h = \sum_k b_{hk} a_h.$$

Il y a lieu de remarquer que (4) et (5)-(6) ne font que traduire respectivement la comptabilité de l'entreprise  $P_i$  et le "budget moyen" d'un membre de la collectivité  $E_{ih}$ .

On ne saurait évidemment contester la réalité objective de ces six systèmes, non plus que celle des conclusions qu'une étude mathématique permettra d'en tirer.

Des divers symboles qui figurent dans ces équations, aucun, par la nature des choses, ne peut être négatif, sauf les  $f_i$ ,  $b_k$ ,  $w_{ih}$  et  $e_{ih}$ . On peut dire que l'ensemble des valeurs attribuées à ces divers symboles caractérise un état *économico-social* déterminé. Un tel état sera satisfaisant et stable si les conditions suivantes sont remplies :

Les  $b_{hi}$  doivent avoir des valeurs "convenables"; Les coefficients de surproduction  $f_i$  doivent avoir des valeurs positives pour que les stocks ne s'épuisent pas, mais pas trop grandes;

Les chômages  $w_{ih}$  doivent être positifs, mais pas trop grands; Enfin il est absolument nécessaire que les  $b_i$  et  $e_{ih}$  n'aient jamais de valeurs négatives, ce qui conduirait les entreprises à faire faillite et les travailleurs à mourir de faim.

L'action possible de la volonté humaine sur ces divers coefficients varie beaucoup avec leur catégorie. Les  $c_{ik}$  et  $t_{ih}$  sont commandés par les procédés de fabrication, l'organisation des diverses entreprises. On peut agir sur eux par des inventions nouvelles, par la "rationalisation"; mais cette action sera toujours assez lente, et, dans l'ensemble, assez restreinte. Au contraire les prix, les salaires, l'effectif du personnel ne sont imposés par aucune nécessité *physique*. Ils résultent de *conventions* qui, théoriquement au moins, sont *libres*. Leurs modifications peuvent être très rapides.

Quoi qu'il en soit de son application pratique, on peut, en tout cas, se poser le problème suivant : les  $c_{ik}$ ,  $t_{ih}$ ,  $b_{hi}$  et  $N$  étant supposés connus, comment déterminer les valeurs des autres symboles pour avoir un régime satisfaisant et stable.

Parmi les autres symboles, on pourra distinguer les inconnues "principales", à savoir :

Les  $d_i$ , qui déterminent la production;

Les  $p_{ih}$ , qui déterminent la répartition des travailleurs;

Les  $a_i$ , c'est-à-dire les prix;

Les  $s_{ih}$ , c'est-à-dire les salaires;

et les inconnues "secondaires", à savoir:

Les  $q_h$ , nombres de non-travailleurs;

Les  $w_{ih}$ , qui représentent le chômage;

Les  $f_i$ , qui représentent la surproduction;

Les  $b_i$ , bénéfices des entreprises;

Les  $e_{ih}$ , économies des travailleurs.

Le système (1)-(2)-(3) ne renfermant que les deux premiers groupes d'inconnues principales, il est avantageux de commencer par lui. C'est l'organisation théorique de la Production. Par des combinaisons mathématiques (8), on peut en déduire un système ne renfermant plus que le premier groupe d'inconnues principales; il a la forme

$$(7) \quad d_i - \sum_k C_{ki} d_k = F_i,$$

les coefficients  $C_{ki}$  ne dépendant que des données, et les  $F_i$  renfermant linéairement les inconnues secondaires des trois premiers groupes. Une fois que l'on connaîtra des valeurs de toutes les inconnues vérifiant (7), le système (3) fera connaître le deuxième groupe d'inconnues principales, les  $p_{ih}$ .

De même, des systèmes (4)-(5)-(6), on peut déduire un système ne renfermant plus que les inconnues principales du troisième groupe. Il a la forme

$$(8) \quad a_i - \sum_k C'_{ik} a_k = B_i;$$

les  $C'_{ik}$  ne dépendent que des données et des inconnues déjà déterminées par les systèmes (7)-(3), les  $B_i$  renferment linéairement les inconnues secondaires des deux derniers groupes. Une fois que l'on connaîtra les valeurs de toutes les inconnues vérifiant (8), le système (5)-(6) fera connaître le quatrième groupe d'inconnues principales, les  $s_{ih}$ .

Il faut remarquer que la définition des  $C'_{ik}$  suppose que les  $d_i$  vérifiant (7) sont tous positifs (non nuls). En ce cas ces mêmes  $d_i$  vérifient un système de la forme

$$(9) \quad d_i - \sum_k C_{ki} d_k = F'_i = f_i + \sum_h b_{hi} q_h,$$

les coefficients  $C'$  sont les mêmes que dans (8); ils forment le même tableau carré, après change des lignes et colonnes de même rang. Les coefficients  $C$  de (7) et  $C'$  de (8)-(9) sont tous des nombres non négatifs. Il en est de même des  $F_i$ ,  $B_i$ ,  $F'_i$  si l'on donne aux inconnues secondaires des valeurs non négatives. Ces seconds membres sont d'ailleurs tous nuls si l'on donne à toutes les inconnues secondaires la valeur 0.

Ici intervient un théorème de Mathématique pure (9). On appellera *racine caractéristique* d'un tableau carré  $\|c_{ik}\|$  la racine (toujours réelle) de module maximum de l'équation en  $s$  obtenue en annulant le déterminant  $|u_{ik}s - C_{ik}|$  ( $u_{ii}$  désignant 1, et  $u_{ik}$  désignant 0 si  $k \neq i$ ). Alors, pour qu'il existe des valeurs positives des  $x_i$  donnant à toutes les expressions  $x_i - \sum_k c_{ik} x_k$  des valeurs positives, il faut et il suffit que la racine caractéristique du tableau  $\|c_{ik}\|$  soit  $< 1$ . Si elle est égale à 1, on peut seulement affirmer qu'il existe des valeurs positives ou nulles (non toutes nulles) des  $x_i$  donnant à toutes les expressions  $x_i - \sum_k c_{ik} x_k$  la valeur 0. Si la racine caractéristique est  $< 1$ , le système d'équations  $x_i - \sum_k c_{ik} x_k = b_i$ , les  $b_i$  étant des nombres arbitraires positifs, détermine, pour les  $x_i$ , des valeurs toutes positives.

<sup>8</sup> On peut voir le détail de ces combinaisons, expliqué sur trois équations, dans ma brochure : *Les Equilibres production-consommation et prix-salaires* (Editions S.P.E.S., 17, rue Soufflot, Paris-5<sup>e</sup>).

<sup>9</sup> Ces théorèmes sont dus à : PERRON, *Math. Ann.*, t. 44, p. 261; FROBENIUS, *Sitz. Acad. Berlin*, 1908, p. 471; POTRON, *Ann. de l'Ec. Norm.*, t. 30, 1913, p. 53.

L'application de ces théorèmes est immédiate. Si, dans (7), la racine caractéristique du tableau  $\| C_{ki} \|$ , laquelle, comme les  $C_{ki}$ , ne dépend que des  $c_{ik}$ ,  $b_{hi}$ ,  $t_{ih}$  et  $N$ , est  $> 1$ , il est *impossible* de vérifier (7) par des valeurs positives de toutes les inconnues. Si elle est  $< 1$ , on peut donner aux inconnues secondaires  $q_h$ ,  $w_{ih}$ ,  $f_i$  des valeurs positives arbitraires. Les  $F_i$  seront positifs; et (7) déterminera pour le  $d_i$  des valeurs toutes positives. Comme ces valeurs vérifient (9), si les  $F_i$  ne sont pas tous nuls (ce qui arriverait si les  $f_i$  et  $q_h$  avaient tous reçu arbitrairement la valeur 0), on est sûr que la racine caractéristique du tableau  $\| C'_{ki} \|$  est  $< 1$ . On peut alors donner aux autres inconnues secondaires  $b_i$  et  $c_{ih}$  des valeurs arbitraires positives. Les  $B_i$  seront tous positifs, et (8) déterminera pour les  $a_i$  des valeurs toutes positives.

Ainsi tout dépend de la racine caractéristique du tableau  $\| C_{ki} \|$ . Si elle est  $< 1$ , il est théoriquement possible d'organiser la production d'une façon satisfaisante, comportant d'ailleurs nécessairement une certaine surproduction, un certain chômage, un certain nombre de non-travailleurs. Supposant cette organisation réalisée, il est théoriquement possible d'établir un régime satisfaisant de prix et salaires, comportant certains bénéfices, et, pour les travailleurs, certaines économies, résultant de l'excès du salaire *effectivement touché*, sur le coût de vie.

Un tel régime demeurera satisfaisant tant que les conditions représentées par les  $c_{ik}$ ,  $b_{hi}$ ,  $t_{ih}$  ne changeront pas.

La découverte d'un nouveau procédé industriel peut modifier considérablement certains des  $c_{ik}$  ou  $t_{ih}$ . Il faut alors distinguer deux périodes. Pendant la première, on fabrique, *au moyen de ce qui existe déjà*, les nouvelles machines, le nouvel outillage. C'est là une production qui, n'étant pas destinée à la consommation courante, ni à l'entretien courant, constitue une véritable surproduction. Ce sont les  $f_i$  qui prennent de grandes valeurs. Les régimes, qui étaient satisfaisants avant cette période, peuvent cesser de l'être pendant. La seconde période est la période d'utilisation des nouvelles machines, du nouvel outillage. Les régimes satisfaisants pendant la première période peuvent cesser de l'être pendant la seconde, pour deux raisons: d'abord à cause de la modification de certains  $c_{ik}$  et  $t_{ih}$ , puis parce que les  $f_i$ , considérables pendant la période d'équipement, ont disparu; il n'y a plus qu'à *entretenir* ce qui existe. Cela explique en partie pourquoi les progrès techniques, qui devraient procurer aux hommes plus de bien-être pour un moindre travail total, sont souvent au contraire cause de misères et de ruines.

On parle souvent de lois économiques, assez vagues d'ailleurs qui se vengent de ceux qui les méconnaissent. Je crois que l'oubli de six systèmes d'équations est beaucoup plus dangereux. Chaque entreprise  $P_i$  connaît assez bien ses propres  $c_{ik}$  et  $t_{ih}$ . Mais il n'y a personne pour former et résoudre le système (7). Chacun prend son  $d_i$  au petit bonheur, et l'on est tout surpris d'avoir d'énormes  $F_i$ , qui supposent un grand chômage ou une forte surproduction ou, au contraire, on tombe sur des  $F_i$  négatifs, ce qui n'est pas moins désastreux.

Si, par miracle, on a réussi une organisation convenable de la production, les difficultés recommencent pour les prix et salaires.  $P_i$  veut avant tout sauver son bénéfice  $b_i$ . Si elle augmente son prix  $a_i$ , cela augmente, ou le coût de vie de ses employés, ou le prix de revient d'autres marchandises. C'est la course aveugle à la hausse entre prix et salaires.

En somme, tout le mal vient de la méconnaissance de cette distinction entre inconnues principales et inconnues secondaires. Les mathématiques disent : si une certaine condition est remplie par vos exigences de train de vie ( $b_{hi}$ ) et l'état de votre industrie ( $c_{ik}, t_{ih}$ ), la condition "racine caractéristique  $< 1$ ", vous pouvez donner à *toutes les inconnues secondaires* des valeurs positives *absolument arbitraires*; il en résultera pour les inconnues principales, des valeurs positives telles que tout aille au mieux. Mais vous ne pouvez pas donner aux inconnues principales des valeurs *absolument arbitraires* telles que tout aille bien. Malgré cet avertissement, on s'obstine à donner aux inconnues principales, parce que c'est plus facile, des valeurs arbitraires. Il y a bien des chances pour que l'on ne tombe pas sur une des combinaisons favorables. Soit  $n$  le nombre des équations (7) ou (9). Considérons, dans un espace à  $n$  dimensions, le point ( $d$ ) de coordonnées  $d_1, \dots, d_n$ , et, dans un autre espace le point (F) de coordonnées  $F_1, \dots, F_n$ . Il y a correspondance biunivoque entre ces deux points. Mais lorsque (F) parcourt la région de son espace où les  $F_i$  sont tous positifs, il se peut que ( $d$ ) ne parcourre qu'une toute petite partie de la région analogue de son espace. La chose est claire pour  $n = 2$ . Soient les deux équations

$$x - ax - by = u, \quad y - a'x - b'y = v.$$

Les coefficients sont positifs. La racine caractéristique est la plus grande de l'équation  $(s - a)(s - b) - ba' = 0$ , dont le discriminant  $(a + b')^2 - 4(ab' - ba') = (a - b)^2 + 4ba'$  est  $> 0$ . Pour que cette racine soit  $< 1$ , il faut et suffit  $(a + b') < 2$ ,  $(1 - a)(1 - b') - ba' > 0$ . On voit aisément que ces diverses conditions entraînent  $a$  et  $b' < 1$ . Tout point  $(x, y)$  tel que  $u$  et  $v$  soient  $> 0$  doit être au-dessous de la 1/2 droite  $y = (1 - a)x/b$ , et au-dessus de la 1/2 droite  $y = a'x/(1 - b')$ , toutes deux dans le premier quadrant. L'angle de ces deux 1/2 droites a pour tangente trigonométrique l'expression

$$[(1 - a)(1 - b') - ba'] / [(1 - a)a' + (1 - b')b].$$

Si la racine caractéristique est voisine de 1, le numérateur est voisin de 0, la région favorable n'occupe qu'une petite partie du premier quadrant. Si la racine caractéristique est exactement 1, les deux 1/2 droites se confondent. Si le point  $(x, y)$  se trouve sur cette unique 1/2 droite,  $u$  et  $v$  sont nuls. Sinon, ils sont toujours de signes contraires.

On peut d'ailleurs former un autre tableau carré, dont les éléments dépendent seulement des  $c_{ik}, t_{ih}, b_{hi}$ . La racine caractéristique de ce second tableau est placée, par rapport au nombre  $N$ , comme celle du premier tableau par rapport au nombre 1. Cette 2<sup>e</sup> racine caractéristique a d'ailleurs une signification intéressante : c'est le nombre moyen d'heures de travail que doit fournir annuellement chaque travailleur pour que la production ainsi obtenue suffise juste à ce que consomme l'industrie pour les besoins des seuls travailleurs.

Une autre combinaison (1) des formules établies donne

$$(10) \quad \sum q_h NS_h + \sum f_i a_i = \sum \sum p_{ih} Ne_{ih} + \sum d_i b_i..$$

Si la production équilibre exactement la consommation ( $f_i = 0$ ), toute la production  $d_i$  ayant été absorbée, le dernier terme représente le total des bénéfices réalisés par les entreprises. La formule montre alors que *la somme des bénéfices des entreprises et des économies des travailleurs est exactement égale au coût de vie des non-travailleurs.*

S'il y a surproduction de certaines marchandises, par exemple à la fin d'une "période d'équipement", la formule (10) peut s'écrire

$$(11) \quad \sum \sum p_{ih} Ne_{ih} + \sum (d_i - f_i) b_i - \sum q_h NS_h = \sum f_i (a_i - b_i).$$

Les marchandises en surproduction n'étant pas encore vendues, le second terme du premier membre représente la somme des bénéfices *effectivement réalisés*. Le deuxième membre représente le "prix-coûtant" des marchandises surproduites. En ce cas, la somme des bénéfices réalisés et des économies des travailleurs surpasse le coût de vie des non-travailleurs; mais la *différence représente exactement le prix-coûtant des marchandises surproduites*. On voit donc quelles difficultés vont se présenter si les fournisseurs d'une nouvelle machine, par exemple, veulent à toute force réaliser un bénéfice sur sa *première* vente. Pour éviter les perturbations, il faudrait que les producteurs du nouvel équipement le cèdent au prix coûtant, et que, sitôt ce nouvel équipement mis en service, soit établi, s'il y a lieu, un nouveau régime de production, prix et salaires, correspondant aux nouvelles conditions de l'industrie, et en particulier, au *seul* entretien de ce nouvel équipement.

Toutes ces considérations sont quelque peu décourageantes. C'est une maigre consolation que de se dire : la probabilité pour que l'on tombe par hasard sur un régime satisfaisant de production prix et salaires est tellement faible que la rencontre d'un tel régime est à peu près impossible. La *seule* manière *rationnelle* de procéder, résolution des systèmes (7) et (8), est pratiquement irréalisable, étant donné le nombre immense de ces équations, égal au nombre de toutes les choses qui se produisent dans le monde. Il est vrai que beaucoup des  $c_{ik}$  sont nuls. Si l'on avait commencé ces calculs il y a quelque mille ans, il y avait alors beaucoup moins d'équations. Les retouches nécessitées par chaque nouvelle invention sont en somme peu de chose. Quelques coefficients seulement sont modifiés. On aurait le temps d'achever les calculs avant sa mise en service.

En tout cas, il semble bien qu'il n'y a pas lieu d'incriminer notre tableau actuel des  $C_{ik}$ . L'industrie pourrait sûrement produire de quoi satisfaire à tous les désirs des consommateurs, malgré la diminution de N (journée de 8 heures). Il y a eu sans doute surproduction d'objets inutiles. Ils restent chez leurs producteurs; l'argent qui représente leur valeur (formule 11) dort dans les banques ou a perdu sa valeur par suite de diverses manipulations. Il n'est pas allé à ceux qui en auraient besoin pour acheter des objets de première nécessité.

Excusez cette longue lettre, mon cher Camarade, et croyez à mes sentiments bien dévoués.

POTRON (90).