



HAL
open science

L'ensemble vide, ce n'est pas rien !

Frédéric Jaëck

► **To cite this version:**

Frédéric Jaëck. L'ensemble vide, ce n'est pas rien !. 18e rencontres de Physique et Interrogations Fondamentales : De quoi le vide est-il plein ?, Société française de Physique; Bibliothèque nationale de France, Nov 2023, Paris, France. <halshs-05480657>

HAL Id: halshs-05480657

<https://shs.hal.science/halshs-05480657v1>

Submitted on 8 Feb 2026

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



HAL Authorization

L'ensemble vide, ce n'est pas rien !

Synthèse de communication

Frédéric Jaëck
Aix-Marseille Université

18^e rencontre de \acute{u} Physique et Interrogations Fondamentales \acute{z}
De quoi le vide est-il plein ?
Société française de Physique et Bibliothèque nationale de France

Résumé

Cette communication explore le statut paradoxal de l'ensemble vide en mathématiques. Bien qu'il ne contienne aucun élément, l'ensemble vide joue un rôle fondamental dans l'édifice mathématique : il intervient de manière essentielle dans les opérations ensemblistes, constitue un élément structurant dans de nombreuses définitions (topologie, théorie de la mesure, probabilités), et trouve son fondement axiomatique dans la théorie des ensembles. Nous montrons que loin d'être \acute{u} rien \acute{z} , l'ensemble vide est un objet mathématique plein de signification et de fonctions, dont l'existence et l'unicité peuvent être rigoureusement établies à partir des axiomes de Zermelo-Fraenkel.

1 Introduction : premiers contacts avec l'ensemble vide

L'ensemble vide, noté \emptyset ou \emptyset , est l'un des objets les plus paradoxaux des mathématiques. Comment quelque chose qui ne contient rien peut-il être quelque chose ? Cette question, apparemment naïve, touche au cur de la notion d'ensemble et révèle des aspects profonds de la pensée mathématique.

Rencontres ordinaires avec l'ensemble vide. Dans la pratique mathématique courante, l'ensemble vide apparaît naturellement comme solution à certains problèmes. Considérons quelques exemples :

$$\{a, b, c\}$$

est un ensemble à trois éléments.

$$\{n \in \mathbb{Z} \text{ tels que } 2|n\}$$

est l'ensemble des entiers pairs (infini).

$$\{n \in \mathbb{Z} \text{ tels que } n^2 = -1\}$$

est l'ensemble vide — aucun entier ne satisfait cette condition.

De même, l'ensemble solution de l'équation

$$n^7 - 3n^5 + 27n^3 - n = -12$$

dans \mathbb{Z} est vide : $\mathcal{S} = \emptyset$.

Le paradoxe du contenant vide. L'ensemble vide pose immédiatement des problèmes conceptuels lorsqu'on le pense comme un \acute{n} contenant vide \acute{z} . Cette conception intuitive entre en tension avec les usages logiques et mathématiques de l'objet.

2 Problèmes liés à la conception de l'ensemble vide comme contenant

L'exemple de l'addition. Considérons la table d'addition suivante :

+	0	1
0	0	1
1	1	0

Cette table définit une opération sur $\{0, 1\}$. Mais que se passe-t-il si nous voulons définir l'addition sur l'ensemble vide? La table serait vide, mais l'opération elle-même existe-t-elle pour autant?

Les assertions universelles sur l'ensemble vide. Considérons l'assertion suivante :

$$\forall E \subset \mathbb{N}, \forall x \in E, x \geq 0$$

Cette assertion est vraie pour tout sous-ensemble de \mathbb{N} , y compris pour $E = \emptyset$. Mais comment interpréter \acute{n} pour tout x dans l'ensemble vide \acute{z} ? L'absence d'éléments rend l'assertion *vacuumment vraie* (vraie par vacuité) — un concept logique qui heurte parfois l'intuition.

3 Utilisation de l'ensemble vide dans la pratique mathématique

Loin d'être un objet marginal, l'ensemble vide joue un rôle central dans de nombreuses constructions mathématiques.

3.1 Opérations ensemblistes

Les opérations fondamentales — réunion (\cup), intersection (\cap), inclusion (\subset) — font intervenir l'ensemble vide de manière naturelle :

$$x \in E \cup F \text{ ssi } x \in E \text{ ou } x \in F$$

D'où découle immédiatement que $\emptyset \subset E$ pour tout ensemble E : il n'existe aucun élément de \emptyset qui ne soit pas dans E .

Les propriétés algébriques sont simples et élégantes :

$$\emptyset \cup A = A$$

$$\emptyset \cap A = \emptyset$$

$$\emptyset \subset A$$

L'ensemble vide joue ici le rôle d'élément neutre pour la réunion et d'élément absorbant pour l'intersection.

3.2 Topologie

Dans la définition axiomatique d'un espace topologique, l'ensemble vide apparaît comme condition nécessaire :

Un espace topologique est un couple (E, \mathcal{T}) , où E est un ensemble et \mathcal{T} est un ensemble de parties de E vérifiant :

- L'ensemble vide \emptyset et E appartiennent à \mathcal{T} ;
- Toute réunion quelconque d'ensembles de \mathcal{T} est dans \mathcal{T} ;
- Toute intersection finie d'ensembles de \mathcal{T} est dans \mathcal{T} .

Sans l'exigence que $\emptyset \in \mathcal{T}$, de nombreux théorèmes fondamentaux de la topologie ne pourraient être formulés correctement.

Espace de Baire. Un espace topologique est un espace de Baire si toute union dénombrable de fermés d'intérieurs vides est d'intérieur vide. Ici, la notion d'intérieur vide (c'est-à-dire égal à \emptyset) est centrale.

Théorème du graphe fermé. Si E et F sont deux espaces de Banach, pour toute application linéaire f de E dans F , si le graphe de f est fermé dans $E \times F$, alors f est continue. La notion de graphe fermé fait intervenir l'adhérence, et donc potentiellement l'ensemble vide.

3.3 Théorie de la mesure et probabilités

L'ensemble vide joue un rôle structurant dans la définition des tribus (ou σ -algèbres).

Tribu. Soit E un ensemble, et \mathcal{A} un ensemble de parties de E vérifiant :

- $\emptyset \in \mathcal{A}$
- $\forall B \in \mathcal{A}, {}^c B \in \mathcal{A}$
- $\forall (B_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}, \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \in \mathcal{A}$.

En théorie des probabilités, les axiomes de Kolmogorov imposent :

1. **Axiome de non-négativité** : $\forall A \in \mathcal{A}, \mathbb{P}(A) \geq 0$
2. **Axiome de normalisation** : $\mathbb{P}(E) = 1$
3. **Axiome de σ -additivité** : Si A_1, A_2, \dots sont deux à deux disjoints, alors

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)$$

De ces axiomes découle immédiatement que $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$: l'événement impossible a une probabilité nulle. Cette propriété n'est pas axiomatique mais dérivée, et elle illustre comment l'ensemble vide s'insère naturellement dans la théorie.

4 Éléments historiques : Bourbaki et la notation de l'ensemble vide

L'histoire de la notation \emptyset est intimement liée à l'aventure collective de Nicolas Bourbaki. André Weil raconte dans ses souvenirs :

Néanmoins nous fûmes presque surpris quand pour la première fois nous pûmes approuver un texte pour l'impression ; ce fut le n^{e} fascicule de résultats z de la théorie des ensembles, adopté définitivement peu avant la guerre. Sur cette théorie un premier texte dû à Cartan avait été lu au congrès dit n^{e} de l'Es-corial z ; Cartan, qui n'avait pu y assister, fut informé de son rejet par un télégramme : n^{e} Union intersection partie produit tu es démembré foutu Bour-baki z .

Sagement nous avons décidé de faire paraître sur la théorie des ensembles un fascicule qui en fixerait les notations sans attendre l'exposé détaillé qui devait suivre ; il fallait bien poser ces notations une fois pour toutes, et en effet celles-ci, qui modifiaient sur plusieurs points les usages reçus, ont été assez généralement approuvées.

Bien plus tard la part que j'avais prise à ces débats me valut le respect de ma fille Nicolette quand je lui dis que j'étais personnellement responsable de l'adoption du symbole \emptyset pour l'ensemble vide, symbole dont elle venait d'apprendre l'usage à l'école. Le \emptyset appartenait à l'alphabet norvégien, et j'étais seul dans Bourbaki à le connaître.

Cette anecdote révèle que même les notations mathématiques les plus fondamentales résultent de choix humains, de débats, et parfois de contingences culturelles (ici, la connaissance par Weil de l'alphabet norvégien).

5 Fondements logiques : l'ensemble vide dans la théorie axiomatique

Pour comprendre pleinement le statut de l'ensemble vide, il faut examiner son fondement dans la théorie axiomatique des ensembles de Zermelo-Fraenkel.

5.1 Rappels de logique

La logique du premier ordre utilise des connecteurs logiques dont les tables de vérité sont fondamentales :

P	Q	non P	P et Q	P ou Q	P ou bien Q	$P \Rightarrow Q$	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	F	V	V	F	V	V
F	V	V	F	V	V	V	F
V	F	F	F	V	V	F	F
F	F	V	F	F	F	V	V

Notons en particulier que $P \Rightarrow Q$ est vrai lorsque P est faux, quelle que soit la valeur de vérité de Q . C'est ce qui rend les assertions universelles sur l'ensemble vide vacuement vraies.

5.2 Les axiomes de Zermelo-Fraenkel (sélection)

Axiome 1 (extensionnalité) :

$$\forall x \forall y (x = y \Leftrightarrow \forall z (z \in x \Leftrightarrow z \in y))$$

Deux ensembles sont égaux si et seulement s'ils ont les mêmes éléments.

Axiome 2 (existence) : Il existe un ensemble.

Axiome 3 (paire) :

$$\forall x \forall y \exists u (\forall z (z \in u \Leftrightarrow (z = x \text{ ou } z = y)))$$

Axiome 4 (réunion) :

$$\forall x \exists u (\forall z (z \in u \Leftrightarrow \exists y (y \in x \text{ et } z \in y)))$$

Axiome 5 (parties) :

$$\forall x \exists u (\forall z (z \in u \Leftrightarrow z \subset x))$$

Axiome 6 (schéma de compréhension) : Soit P une assertion. Pour tout ensemble x , il existe un ensemble u contenant exactement les éléments de x qui satisfont P :

$$\forall x \exists u (\forall z (z \in u \Leftrightarrow (z \in x \text{ et } P)))$$

Axiome 7 (infini) :

$$\exists x (\exists y (y \in x) \text{ et } \forall z (z \in x \Rightarrow z \cup \{z\} \in x))$$

5.3 Existence et unicité de l'ensemble vide

Propriété 1 (définition de l'ensemble vide). Il existe un ensemble ne contenant aucun élément :

$$\exists x \forall z (z \notin x)$$

De plus, cet ensemble x est unique. On l'appelle ensemble vide et on le note \emptyset ou \varnothing .

Preuve de l'existence. Soit a un ensemble (qui existe par l'axiome d'existence). Par le schéma de compréhension appliqué à l'assertion $P(z) : (z \neq z)$, il existe un ensemble

$$x = \{z \in a, z \neq z\}$$

Montrons que $\forall z (z \notin x)$. Soit z un ensemble :

$$\begin{aligned} (z \notin x) &\Leftrightarrow \text{non}(z \in x) \\ &\Leftrightarrow \text{non}(z \in a \text{ et } z \neq z) \\ &\Leftrightarrow (\text{non } z \in a) \text{ ou } (\text{non } z \neq z) \\ &\Leftrightarrow (z \notin a) \text{ ou } (z = z) \end{aligned}$$

Or $\forall z (z = z)$ (réflexivité de l'égalité), donc $\forall z ((z \notin a) \text{ ou } (z = z))$, ainsi $\forall z (z \notin x)$.

Preuve de l'unicité. Soient x et y tels que $\forall z (z \notin x)$ et $\forall z (z \notin y)$. Pour tout z :

$$\begin{aligned} (z \in x) &\Leftrightarrow \text{non}(z \notin x) \\ &\Leftrightarrow \text{non}(z \notin y) \\ &\Leftrightarrow (z \in y) \end{aligned}$$

Donc $\forall z (z \in x \Leftrightarrow z \in y)$. Ainsi par l'axiome d'extensionnalité, $x = y$, ce qui montre l'unicité.

5.4 Propriétés fondamentales

Propriété 2 (inclusion et appartenance) :

$$\forall x (\emptyset \subset x) \text{ et } \forall x (\emptyset \in \mathcal{P}(x))$$

Cependant, $\exists x (\emptyset \notin x)$: l'ensemble vide est inclus dans tout ensemble, mais n'est pas nécessairement élément de tout ensemble.

Propriété 3 (opérations ensemblistes) :

$$\forall x (x \cup \emptyset = x) \text{ et } (x \cap \emptyset = \emptyset)$$

Propriété 4 (produit cartésien) :

$$\forall x (x \times \emptyset = \emptyset) \text{ et } (\emptyset \times x = \emptyset)$$

Propriété 5 (fonctions) : Pour tout ensemble x , il existe une unique fonction de \emptyset dans x , à savoir \emptyset (la fonction vide). De même, il existe une unique fonction de x dans \emptyset si et seulement si $x = \emptyset$.

6 Conclusion : l'ensemble vide, objet mathématique à part entière

Loin d'être *rien*, l'ensemble vide est un objet mathématique fondamental, structurant, et plein de signification.

Structuration de la théorie. L'ensemble vide joue un rôle d'élément neutre ou absorbant dans les opérations ensemblistes, apparaît comme condition nécessaire dans les définitions axiomatiques (topologie, tribus), et permet de formuler élégamment de nombreux théorèmes.

Fondement logique rigoureux. Son existence et son unicité peuvent être rigoureusement établies à partir des axiomes de Zermelo-Fraenkel. Il ne s'agit pas d'une convention arbitraire, mais d'une conséquence logique inévitable de la théorie axiomatique des ensembles.

Paradoxe fécond. Le paradoxe apparent de l'ensemble vide — être quelque chose tout en ne contenant rien — révèle la richesse conceptuelle de la notion d'ensemble. Un ensemble n'est pas défini par ce qu'il contient de manière substantielle, mais par les relations qu'il entretient avec d'autres ensembles (inclusion, appartenance, opérations).

Vérités par vacuité. L'ensemble vide oblige à affronter les vérités vacuement vraies, qui heurtent parfois l'intuition mais sont logiquement incontournables. Toute assertion universelle sur l'ensemble vide est vraie : $\forall x \in \emptyset, P(x)$ est vrai quelle que soit l'assertion P .

L'ensemble vide illustre ainsi une caractéristique fondamentale des mathématiques : les objets mathématiques ne tirent pas leur réalité d'une substance qu'ils contiendraient, mais des relations formelles dans lesquelles ils s'insèrent. L'ensemble vide, ce n'est pas rien — c'est un nud relationnel essentiel dans le réseau des concepts mathématiques.