



HAL
open science

Can philosophy think mathematical progress?

Frédéric Jaeck

► **To cite this version:**

Frédéric Jaeck. Can philosophy think mathematical progress?. Aix-Nantes Meeting in Philosophy and History of Mathematics, Feb 2021, Online, France. ⟨halshs-05480662⟩

HAL Id: halshs-05480662

<https://shs.hal.science/halshs-05480662v1>

Submitted on 8 Feb 2026

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



HAL Authorization

La philosophie peut-elle penser la progression des mathématiques ?

Trame exposé

Frédéric Jaëck
Aix-Marseille Université, CGGG

Résumé

Cet article propose une approche philosophique renouvelée de la progression des mathématiques, fondée sur une dialectique interne entre \acute{u} choses-mathématiques \acute{z} et \acute{u} objets-mathématiques \acute{z} . En examinant de façon critique les positions d'Albert Lautman et de Jean-Michel Salanskis, nous montrons qu'il est possible de développer une critique de la raison mathématique qui soit à la fois autonome de la mathématique et en prise directe avec les mathématiques *in agendo*. La notion lautmanienne de \acute{u} mixte \acute{z} , repensée et débarrassée de son cadre platonicien, permet de saisir les conditions de possibilité de la progression de la pensée mathématique. À travers l'exemple des espaces de Banach et du rôle de la complétude, nous établissons comment concepts mathématiques et dialectique chose/objet s'articulent pour rendre compte du mouvement de la pensée mathématique.

1 Introduction : trois traditions en philosophie des mathématiques

La question de la progression des mathématiques représente un enjeu crucial pour toute philosophie des mathématiques qui cherche à établir une critique de la raison mathématique. Avant d'aborder frontalement cette question, il convient de situer le type de philosophie que nous déployons ici.

On peut distinguer schématiquement trois grandes traditions en philosophie des mathématiques actuelle :

1. Philosophie logico-fondationnelle. Une philosophie très technique, à laquelle on peut rattacher une partie de la philosophie analytique, ainsi que des travaux de logiciens ou de mathématiciens qui développent une vision philosophique assumée. On peut penser aux travaux sur les topos chez Grothendieck, ou chez certains de ses continuateurs qui y voient un changement de paradigme fondationnel.

2. Philosophie de la pratique mathématique. Une tradition largement descriptive (*lato sensu*), qui met en uvre une approche au plus proche des mathématiques telles

qu'elles se font. Cette lignée s'oppose au projet hilbertien fondationnel et privilégie l'observation des pratiques effectives.

3. Philosophie mathématique du concept et de la dialectique. Caractérisée par deux aspects indissociables : a) elle est toujours liée à des questions de philosophie générale, faisant sens hors des mathématiques ; b) elle nécessite de pratiquer les mathématiques de l'intérieur. On peut penser ici aux travaux d'Albert Lautman, Fernando Zalamea, ou Colin McLarty.

C'est avec cette troisième tradition que nous entendons discuter, car c'est sur ce champ qu'une bataille essentielle pour toute entreprise de philosophie des mathématiques doit être gagnée : une philosophie des mathématiques doit être une philosophie qui tienne à l'extérieur des mathématiques tout en étant en prise directe avec les mathématiques *in agendo*.

Le problème de la progression. Les mathématiciens semblent avoir défini une fois pour toutes ce que l'on doit entendre par *la* progression des mathématiques \dot{z} : nouveauté vérifiable par comparaison avec l'existant, généralité des résultats, économie de preuve, importance et difficulté. Face à cette *la* artillerie lourde \dot{z} , la philosophie semble désarmée.

Pourtant, deux tâches s'imposent à la philosophie : premièrement, établir une critique de la raison mathématique permettant de saisir les conditions mêmes de la pensée mathématique et de sa progression ; deuxièmement, déterminer l'œuvre des jugements qui accompagnent les mathématiques *in agendo*.

2 Nécessaire autonomie de la philosophie : critique de Salanskis

Un problème important des propositions de philosophie des mathématiques, c'est qu'elles se placent très souvent sous le joug de la mathématique, comme si la philosophie avait contracté une dette éternelle envers elle.

La position de Salanskis. Dans son livre *Philosophie des mathématiques* (2008), Jean-Michel Salanskis propose de distinguer philosophie et mathématiques par le type d'universel dont chaque champ s'occupe. Pour lui, *la* l'universel dont s'occupe la philosophie, c'est plutôt du 'toute chose' que celui du 'tout objet' \dot{z} .

La philosophie a son intérêt tourné vers ce qui *la* va pouvoir être pris comme chose \dot{z} , elle s'attache à l'horizon englobant des choses sans présupposer que nous savons déjà tout ce qui peut tenir dans cet horizon. Par contraste, la mathématique serait tournée vers un *la* horizon universel de l'objet \dot{z} , où l'objet désigne *la* une chose bien détachée de toute autre et de tout fond, bien opposée au sujet \dot{z} .

Le problème de la dépendance. Salanskis assume une dépendance de la philosophie aux mathématiques. La philosophie *la* est constitutivement un effort pour récupérer quelque chose de la mathématique dans un domaine qui ne lui convient pas \dot{z} , un domaine *la* chosique \dot{z} . Cette approche platonicienne fonde la philosophie sur une capacité

d'universel limite, toujours au bord des mathématiques, en référence à elles.

Nos objections. Deux objections majeures s'imposent :

1) *Affaiblissement de l'entreprise philosophique.* Si l'on veut qu'une philosophie des mathématiques soit aussi une philosophie générale, elle doit être dégagée de toute dette envers les mathématiques. Le contraire implique d'attribuer *a priori* une qualité universelle et surplombante aux mathématiques, ce qui ruine toute entreprise de critique de la raison mathématique.

2) *Métaphysique problématique.* La distinction chose/objet induit une métaphysique qui a pour horizon un monde \acute{n} chosique \acute{z} diffus, hors des mathématiques, dont la mathématique seule permettrait de se saisir. Toute proposition philosophique serait une proposition limite, un \acute{n} prolongement \acute{z} ou une \acute{n} transposition \acute{z} .

Notre position. Nous ne remettons pas en question le couple dialectique chose/objet, mais nous refusons de fonder une philosophie sur une métaphysique qui installe ce couple entre un \acute{n} dedans \acute{z} mathématique (les objets) et un \acute{n} dehors \acute{z} inaccessible (les choses). Il faut repenser ce couple et l'écart qu'il introduit différemment : la dialectique chose/objet se joue *au sein des mathématiques*, entre les mathématiques et elles-mêmes.

Face au monde des objets-mathématiques, on peut penser à un monde des choses-mathématiques. Le domaine des choses est interne aux mathématiques, autant que le domaine des objets, et c'est de là que celles-ci tirent leur faculté de progresser.

3 Le problème chez Lautman : idées dominatrices et mixtes

Albert Lautman énonçait au Congrès Descartes de 1937 le cur de sa pensée philosophique : \acute{n} le mouvement propre d'une théorie mathématique dessine le schéma des liaisons que soutiennent entre elles certaines idées abstraites, dominatrices par rapport aux mathématiques. \acute{z}

Lautman postule une liaison intime entre \acute{n} le mouvement propre d'une théorie mathématique \acute{z} et \acute{n} les liaisons que soutiennent entre elles certaines idées abstraites \acute{z} . Cette position platonicienne subordonne la mathématique à un monde surplombant des idées.

La notion de mixte. Malgré cette prémisse encombrante, Lautman propose une notion essentielle : le \acute{n} mixte \acute{z} . Reprenant le schématisme kantien, il en fait un outil général pour comprendre les mathématiques. Le mixte désigne une représentation intermédiaire \acute{n} qui soit homogène, d'un côté à la catégorie et de l'autre au phénomène \acute{z} .

Dans l'exemple des espaces de Hilbert, Lautman montre que l'espace de Hilbert des fonctions de carré sommable incarne le \acute{n} mixte \acute{z} : il est \acute{n} homogène au continu par la nature et la topologie de ses éléments, et au discontinu par ses décompositions structurales \acute{z} .

Dégager le mixte du platonisme. L'exemple hilbertien choisi par Lautman montre

(malgré lui) que la notion de mixte peut être débarrassée de la référence à un réel surplombant. Le mixte permet de saisir au cur des textes mathématiques l'incarnation du mouvement qui s'opère entre monde des choses et monde des objets.

Rapprochement des deux auteurs. On peut rapprocher Lautman et Salanskis en considérant qu'ils postulent tous deux une liaison métaphysique qui conditionne leur philosophie : Lautman subordonne la mathématique à un monde surplombant des idées, Salanskis fait peser une dette éternelle de la philosophie envers la mathématique. Dans les deux cas, la mathématique est d'emblée liée à quelque chose qui lui est étranger, ce qui entrave le projet de critique de la raison mathématique.

4 Dialectique chose/objet interne aux mathématiques

Il est possible de construire une dialectique qui se joue au sein des mathématiques, entre les mathématiques et elles-mêmes. Le domaine des choses est interne aux mathématiques, autant que le domaine des objets.

Le monde des choses-mathématiques. Il s'agit d'un donné du mathématicien, un contexte constitué d'un champ diffus de connaissances accessible à un mathématicien donné, ou à un groupe de mathématiciens partageant un rapport à un certain champ de connaissances, c'est-à-dire partageant un *ethos*.

Exemple : les rapports qu'entretiennent les mathématiciens actuels avec \mathbb{R} les nombres réels \mathbb{Z} non pas le corps des nombres réels, ni l'ensemble, ni l'ordre, mais un donné diffus qui n'est jamais tout à fait le même à chaque instant, ni pour chaque mathématicien, mais qui pourtant reste accessible et partageable.

Cette variabilité permet de concevoir les mathématiques dans leur dimension historique et de rendre compte de leur permanence et de leur unité. Quelque chose échappe à l'analyse selon un modèle prescrit à l'avance, ne se laisse saisir que sous une forme malléable, protéiforme, aux qualités irréductibles, emmêlées et évolutives.

Nécessité d'une philosophie descriptive. Toute philosophie des mathématiques doit comporter une dimension descriptive, afin de saisir ce qui échappe dans le produit final que donne à voir la mathématique ce qui échappe à l'axiomatisation, à la structure, à la logique démonstrative.

Cette approche descriptive doit être compatible avec la dialectique que nous proposons, laquelle met en tension les choses-mathématiques avec les objets-mathématiques et permet de rendre compte du mouvement de la pensée mathématique dans un va-et-vient entre les unes et les autres.

Exemples d'irréductibilité. La dimension descriptive permet de ne pas tenir à l'écart certaines situations constatées par les mathématiciens : par exemple, l'irréductibilité de certains résultats qui s'appuient sur des propositions issues de domaines distincts (analyse et algèbre dans la théorie des algèbres duales).

Dans ce domaine, les travaux de Bercovici et Chevreau sur les sous-espaces invariants né-

cessitent parallèlement un travail algébrique (structure d'opérateurs) et l'utilisation d'un résultat sur les fonctions (le Approximate Factorisation Property). Cette irréductibilité, probablement passagère, illustre un type de situation dont la philosophie doit rendre compte.

Liaisons et structures. J'utilise le mot "structure" pour désigner les ordonnancements du monde des objets-mathématiques (groupes, espaces, topologies, etc.). Par contraste, j'utilise "liaison" pour désigner l'organisation du diffus des choses-mathématiques où de nombreuses qualités se trouvent emmêlées, dépendent les unes des autres, se combinent ou se dissocient au gré de leur exploration.

5 Le rôle de la complétude dans les espaces de Banach

Pour illustrer concrètement comment la dialectique chose/objet s'incarne dans les mathématiques, examinons le cas de la complétude dans les espaces de Banach.

Contexte. En 1922, Banach publie sa thèse où il définit les espaces vectoriels normés complets (espaces de Banach) par une liste d'axiomes. On a un espace vectoriel E sur \mathbb{R} , muni d'une norme $\| \cdot \|$.

La notion de complétude crée une dépendance logique entre deux propositions :

- Une suite $\{X_n\}$ vérifie $\lim_{p,r \rightarrow \infty} \|X_p - X_r\| = 0$ (suite de Cauchy)
- Il existe un élément X tel que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|X_n - X\| = 0$

Le mixte incarné. Au moment d'instituer cette règle, Banach a à sa disposition une propriété similaire valant pour \mathbb{R} . Mais l'ensemble \mathbb{R} n'est pas encore pensé comme espace de Banach ; dès qu'on invoque les réels, on embarque une multitude de propriétés qui viennent à l'esprit de tout mathématicien.

La propriété de complétude permet de sélectionner certaines propriétés lues à travers l'utilisation des réels et les relie à une propriété d'existence dans l'espace abstrait. La norme et le concept de complétude incarnent le lien entre monde des choses et monde des objets le mixte sur lequel s'appuie la progression des mathématiques.

Un théorème révélateur. Banach démontre rapidement :

Théorème. *Lorsque*

1) $\{X_n\}$ est une suite d'éléments,

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \|X_n\|$ existe (dans \mathbb{R}),

la série $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ est convergente suivant la norme.

Analyse philosophique de la preuve. Plusieurs remarques philosophiquement significatives :

1) *Complétude de l'espace vs complétude de \mathbb{R}* . Dans cette démonstration, la complétude de \mathbb{R} n'intervient à aucun moment ! La série des normes est convergente (propriété lue dans \mathbb{R}), donc elle vérifie la condition de Cauchy la complétude n'intervient pas. Via l'inégalité triangulaire, cela entraîne que la série de vecteurs est elle-même de Cauchy.

2) *Le rôle central de la norme*. La norme possède deux propriétés importantes : être une application de E dans \mathbb{R} , et satisfaire l'inégalité triangulaire.

L'inégalité triangulaire révèle le rôle profond des concepts mathématiques : définir un espace vectoriel normé sur \mathbb{R} implique que les réels soient vus non seulement avec leurs propriétés algébriques, mais comme un *corps ordonné*. C'est l'ordre qui permet de définir l'inégalité triangulaire.

Définir la norme sur un espace abstrait se fait en même temps qu'une sélection de certaines propriétés de \mathbb{R} parmi une multitude d'autres.

3) *Différence de nature entre chose et objet*. Les axiomes bordent précisément la structure d'espace de Banach, alors que les réels interviennent de façon presque sous-jacente, toujours intimement liés à de nombreuses propriétés non listées et non isolées.

Parler de \mathbb{R} corps ordonné \mathbb{z} semble cerner les objets nécessaires, mais cette notion réaffirme immédiatement son appartenance au monde des choses-mathématiques : un corps totalement ordonné possède de multiples propriétés qui le rapprochent de \mathbb{R} (il est \mathbb{R} formellement réel \mathbb{z} , etc.).

Pourtant, ces propriétés, immédiatement embarquées avec \mathbb{R} , n'interviennent pas dans la démonstration ! Banach ne cherche pas à délimiter certaines propriétés de \mathbb{R} il laisse courir une indétermination que j'analyse en termes dialectiques, une indétermination qui fait que les mathématiques ne sont pas un langage au sens strict, ni un code, mais bien une langue partagée, fluctuante et transmissible, liée à un *ethos*.

4) *Le mixte et le schéma de liaison*. En vocabulaire lautmanien : c'est la notion de *complétude en norme* qui incarne le schéma de liaison accompagnant le mixte. La norme permet de distinguer certaines suites (de Cauchy). La complétude assure leur convergence.

La sélection de ces suites, opérée à travers la norme, permet l'émergence d'êtres particuliers dans l'espace grâce à la complétude. \mathbb{R} apparaît comme \mathbb{R} domaine de base du schéma de genèse \mathbb{z} . C'est le rôle de la norme associée à la complétude qui dessine les rapports entre les deux tenants de notre dialectique.

6 Conclusion : progression et dialectique interne

En dégagant les philosophies de Lautman et de Salanskis de leurs prémisses encombrantes, nous avons montré qu'on peut fonder une véritable critique de la raison mathématique en s'appuyant seulement sur ce qui est accessible à la pensée mathématique.

Dialectique chose/objet repensée. En reprenant la dialectique chose/objet de Salanskis et en la repositionnant au sein des mathématiques, nous établissons que ce qui est

accessible à la pensée mathématique se conçoit selon cette dualité, mais internalisée.

L'exemple de \mathbb{R} dans les espaces de Banach illustre la distinction entre chose-mathématique et objet-mathématique, et précise les deux registres de pensée associés.

Emmêlement et participation réciproque. En mettant au jour l'emmêlement permanent de ce qui relève de la chose ou de l'objet, nous montrons une participation réciproque de l'un dans l'autre.

La dialectique permet de distinguer comment le mathématicien exerce sa force de synopsis différemment dans les deux registres : d'un côté, perception progressive du monde des choses (universel diffus) ; de l'autre, accès au *ú* tout objet *ž* à travers les axiomes (universel structurel).

Le mixte libéré du platonisme. La notion lautmanienne de mixte, débarrassée de son cadre platonicien, permet de saisir les conditions de possibilité de la progression. L'ambivalence de notions comme celle de fonction tantôt objet bien détaché, tantôt élément diffus exprime un mouvement de va-et-vient entre monde des choses et monde des objets.

Progression comme engendrement mutuel. Ce mouvement entre monde des choses et monde des objets, cet engendrement mutuel, est celui de la progression des mathématiques. Il peut être saisi dans l'analyse des concepts qui incarnent les schémas de liaisons et les mixtes.

Autonomie philosophique. Ainsi sont établis les prolégomènes à une philosophie des mathématiques qui embrasse des questions de philosophie générale (autonomie hors des mathématiques) tout en restant au contact de mathématiques *in agendo*.

Il conviendra, dans des travaux ultérieurs, de préciser à travers d'autres exemples comment s'incarne dans les textes et les théories l'entrelacement dynamique entre les choses et les objets de la pensée mathématique.