



HAL
open science

D'une évaluation à l'autre : des acquis des élèves sur les nombres en sixième à l'élaboration et à l'analyse d'une formation d'enseignants centrée sur le calcul mental.

Jean-François Chesné

► To cite this version:

Jean-François Chesné. D'une évaluation à l'autre : des acquis des élèves sur les nombres en sixième à l'élaboration et à l'analyse d'une formation d'enseignants centrée sur le calcul mental.. Education. Université Paris 7 – Denis Diderot, 2014. Français. NNT: . tel-01081505

HAL Id: tel-01081505

<https://theses.hal.science/tel-01081505>

Submitted on 8 Nov 2014

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITE PARIS 7 – DENIS DIDEROT

UFR de MATHEMATIQUES

Ecole doctorale : Savoirs scientifiques et didactique des disciplines

Thèse

Pour l'obtention du Diplôme de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITE PARIS 7 – DENIS DIDEROT

Spécialité

DIDACTIQUE DES MATHEMATIQUES

Présentée et soutenue publiquement le 3 juillet 2014 par

Jean-François CHESNÉ

Titre

D'une évaluation à l'autre : des acquis des élèves sur les nombres
en sixième à l'élaboration et à l'analyse d'une formation
d'enseignants centrée sur le calcul mental

Directeur de thèse

Aline ROBERT

Membres du jury

Denis BUTLEN, Professeur, Université de Cergy Pontoise

Sylvie COPPÉ, Maître de conférence, Université Lyon 1

Lalina COULANGE, Professeur, Université Bordeaux 4 (Rapporteur)

Christophe HACHE, Maître de conférence, Université Paris Diderot

Aline ROBERT, Professeur émérite, Université de Cergy Pontoise (Directrice de thèse)

Éric RODITI, Professeur, Université Paris Descartes (Rapporteur)

Janine ROGALSKI, directrice de recherche CNRS honoraire, Université Paris 8 (Co-directrice de thèse, invitée)

UNIVERSITE PARIS 7 – DENIS DIDEROT

UFR de MATHEMATIQUES

Ecole doctorale : Savoirs scientifiques et didactique des disciplines



Thèse
Pour l'obtention du Diplôme de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITE PARIS 7– DENIS DIDEROT

Spécialité

DIDACTIQUE DES MATHEMATIQUES

Présentée et soutenue publiquement le 3 juillet 2014 par

Jean-François CHESNÉ

Titre

D'une évaluation à l'autre : des acquis des élèves sur les nombres
en sixième à l'élaboration et à l'analyse d'une formation
d'enseignants centrée sur le calcul mental

Directeur de thèse
Aline ROBERT

Remerciements

Je remercie d'abord tous les enseignants qui ont participé à l'aventure PACEM : les « correspondants » du projet, pour avoir accepté de jouer le jeu de la formation, de remettre en question leurs pratiques et d'avoir été des relais dans leurs collèges ; leur collègues « associés » embarqués, plus ou moins malgré eux, dans le projet ; les enseignants « témoins », écartés de la formation, qui ont accepté de constituer avec leurs élèves le groupe contrôle, ainsi que leur collègues « témoins involontaires » entrés dans la recherche au cours de l'année 2011-2012. Je remercie tout particulièrement le petit groupe de correspondants qui m'a aidé dans l'analyse des items.

Je remercie les principaux des collèges, expérimentateurs et témoins, et leurs équipes administratives, qui ont organisé les tests, favorisé leurs remontées et facilité le suivi des élèves.

Je remercie William Marois, alors recteur de l'académie de Créteil, qui a permis que l'expérimentation PACEM puisse se dérouler, Martine Amiot, doyen des IA-IPR de l'académie de Créteil, pour son soutien, et l'inspection régionale de mathématiques de Créteil, en particulier Ollivier Hunault qui a suivi le projet depuis son lancement et géré la logistique de la formation des enseignants.

Je remercie Sandrine Prost-Dambélé qui m'a assisté à la DEPP dans la gestion du projet, le traitement et l'analyse des données, mes collègues de la DEPP, les chercheurs du LDAR ainsi qu'Arthur Souletie, Raphaël Lardeux, Ming Hung Ho et Mathilde Laporte, pour leurs apports ponctuels, mais néanmoins précieux.

Je remercie Sandrine Pellé pour son aide précieuse dans mon parcours administratif d'étudiant de 3^e cycle.

Je remercie mes collègues (et mes élèves !) des établissements dans lesquels j'ai exercé moi-même comme enseignant ainsi que mes collègues de l'IUFM de Créteil (et les enseignants, stagiaires ou non !) qui occupent une grande place dans la genèse des questions traitées dans mon travail de thèse.

Je remercie ma famille pour sa compréhension et sa patience tout au long de ces mois de travail, de soirées, de weekends et de vacances non partagés, tout spécialement Lou pour son aide finale, et tous mes amis, qui, connaissant depuis longtemps mon engagement en faveur de l'apprentissage des mathématiques, ont compris pourquoi je les ai négligés pendant la rédaction de cette thèse.

Je remercie Michel Quéré et François Dumas, alors respectivement directeur de la DEPP et adjoint au directeur, sans lesquels cette recherche n'aurait pu exister.

Je remercie Denis Butlen, Sylvie Coppé, Lalina Coulange, Christophe Hache et Eric Roditi qui ont accepté de faire partie du jury.

Je remercie enfin Aline Robert et Janine Rogalski qui, par la qualité de leur accompagnement, leur bienveillante exigence et la confiance qu'elles m'ont toujours accordée, m'ont permis de devenir moi-même un chercheur.

Table des matières

INTRODUCTION	15
CHAPITRE 1. UN ETAT DES LIEUX SUR LES NOMBRES ET LE CALCUL ENSEIGNES A L'ECOLE PRIMAIRE ET AU COLLEGE : UNE VISION CROISEE DES PROGRAMMES ET DES EVALUATIONS NATIONALES.	23
I. L'enseignement des nombres et du calcul à l'école primaire et au début du collège en France	27
A. Les programmes et les horaires de l'école primaire depuis 1980	27
1. Le programme de 1980	31
2. Le programme de 1985	33
3. Le programme de 1990	34
4. Le programme de 1995	36
5. Le programme de 2002	37
6. Le programme de 2007	39
7. Le programme de 2008	43
8. Premiers constats, premières analyses	44
B. L'enseignement des nombres et du calcul en sixième.....	50
C. Premières esquisses d'une vision globale : vers un « nouveau relief ».....	54
II. Les évaluations nationales sur les acquis des élèves	57
A. Les évaluations à l'entrée en sixième	59
B. Avant et après les vacances, évolution des acquis des élèves.....	61
C. Les tests en fin d'école et en fin de collège pour le calcul des indicateurs « compétences de base » de la LOLF.....	63
D. Les évaluations bilans CEDRE de fin d'école	64
E. L'évolution des performances des élèves sur 20 ans	67
F. Le panel 2007	68
G. Les évaluations nationales CM2	70
H. Conclusion intermédiaire.....	72
III. Une lecture didactique des résultats des évaluations nationales depuis 25 ans dans le domaine des nombres et du calcul	74

A. La méthodologie adoptée pour l'analyse des résultats.....	75
B. Calculer mentalement (Tableau A-3 à Tableau A-14).....	80
1. Mobiliser les résultats mémorisés des tables d'addition et de multiplication : un retour aux fondamentaux ? (Tableau A-3)	81
2. Calculer mentalement des sommes, des différences, des produits de nombres entiers ou décimaux (Tableau A-4 à Tableau A-7)	84
3. Calculer mentalement des quotients (Tableau A-8).....	92
4. Multiplier et diviser mentalement un nombre entier ou décimal par 10, 100, 1000 (Tableau A-9 à Tableau A-12).....	93
5. Estimer mentalement un ordre de grandeur d'un résultat (Tableau A-13 et Tableau A-14)	99
C. Effectuer un calcul posé (Tableau A-15 à Tableau A-26)	103
1. Additionner, soustraire, multiplier des nombres entiers ou décimaux (Tableau A-17 à Tableau A-23).....	103
2. Effectuer une division (Tableau A-24 à Tableau A-26).....	120
D. Résoudre des problèmes relevant des quatre opérations (Tableau A-27 à Tableau A-30)	123
1. Résoudre des problèmes additifs (Tableau A-27).....	124
2. Résoudre des problèmes multiplicatifs (Tableau A-28).....	124
3. Résoudre des problèmes relevant de la proportionnalité (Tableau A-29 et Tableau A-30)	126
E. Connaissance des nombres (Tableau A-31 à Tableau A-39).....	129
1. Connaissance des nombres entiers (Tableau A-31 à Tableau A-33).....	129
2. Connaissance des nombres décimaux (Tableau A-34 à Tableau A-39)	130
F. Conclusion	134
IV. Vers un « nouveau relief » sur les notions à enseigner.....	138
A. Les décimaux : entre connaissance des nombres et calcul	139
B. Addition/soustraction et multiplication/division	141

CHAPITRE 2. DES APPRENTISSAGES DES ELEVES A LA FORMATION DES ENSEIGNANTS : CADRAGE THEORIQUE, PROBLEMATIQUE ET METHODOLOGIE 145

I. Des tâches vers les activités, et des activités vers les apprentissages des élèves : des distinctions opérationnelles dans notre recherche..... 151

A. Tâches et activités : la théorie de l'activité, une toile de fond pour étudier les élèves et leurs enseignants, notamment en classe.....	151
B. Quels "sujets" : introduction des différences.....	153
1. Traquer localement tâches, activités et différences : analyses <i>a priori</i> et <i>a posteriori</i>	153
2. Des activités aux apprentissages des élèves.....	154
C. Points de vue globaux adoptés sur les apprentissages des élèves, mettant en jeu les enseignements.....	155
II. La complexité des pratiques des enseignants : notre point de vue....	164
III. La formation continue des enseignants : vers PACEM.....	167
A. Les formations d'enseignants en France et le travail des formateurs.....	167
B. Nos expériences personnelles de formation.....	171
1. Une expérience de formation avec des néotitulaires.....	172
2. Des formations continues orientées vers l'amélioration des acquis des élèves..	174
C. Formation des enseignants : vers un dispositif expérimental.....	176
IV. Problématique et méthodologie générale.....	181
A. Vers une double problématique : de formation et d'évaluation.....	181
1. Notre problématique sur la formation.....	181
2. Notre problématique sur l'évaluation de l'expérimentation.....	185
B. Méthodologie générale.....	186
1. Méthodologie générale de la formation.....	186
2. Méthodologie générale d'analyse de la formation.....	186
3. Méthodologie générale de l'évaluation d'impact sur les résultats des élèves.....	187
<hr/>	
CHAPITRE 3. A PROPOS DU CALCUL MENTAL.....	189
I. Introduction : nos références, vers une définition générale du calcul mental.....	192
A. Une prise en compte institutionnelle de référence.....	194
B. Vers une définition plus précise de ce que recouvre le calcul mental.....	197
II. Le calcul mental dans les apprentissages des élèves comme thème de recherche.....	199

A. Le calcul mental et les connaissances des élèves sur les nombres	204
1. Quatre études spécifiques: Bolon (1992, 1996), McIntosch et al. (1997), Steinle (2004) et McIntosch (2005)	205
2. L'estimation d'un ordre de grandeur d'un résultat.....	211
B. Les procédures opératoires utilisées par les élèves et le calcul mental.....	213
1. Un point de vue qualitatif	213
2. Un point de vue quantitatif	217
C. Le calcul mental et les enseignants	220
III. Le calcul mental dans les programmes scolaires français	227
A. Le calcul mental dans les programmes scolaires 2008 de l'école primaire	229
B. Le calcul mental dans les programmes scolaires 2008 du collège.....	233
IV. La mise en œuvre de séances de calcul mental : nos partis pris pour la classe et dans la formation PACEM	240
A. Le calcul mental comme pratique régulière porteuse d'apprentissage	241
B. Le calcul mental comme précurseur de certains apprentissages	244
C. Le calcul mental comme facteur d'installation d'un climat de classe favorable aux apprentissages.....	246
1. Le calcul mental comme facteur d'installation d'un « bon » climat de la classe.	246
2. Le calcul mental comme facteur favorable aux interactions	248
V. Exemples.....	251
A. La compréhension des nombres par le calcul mental	252
B. La résolution de problèmes par le calcul mental.....	258
C. L'apprentissage de connaissances nouvelles par le calcul mental	261
D. Conclusion	263

CHAPITRE 4. PACEM : UN CADRE D'EXPERIMENTATION ADAPTE .265

I. Description globale du dispositif.....	268
II. Méthodologie de l'évaluation de l'expérimentation	271
A. Données	273
1. Description de la population des enseignants.....	273
2. Description de la population des élèves.....	276

B. Les tests passés par les élèves.....	279
1. Structure et composition des cahiers d'évaluation.....	279
2. Validation des tests.....	281
3. La passation des tests.....	283
4. La correction des tests.....	284
C. L'évaluation d'impact.....	285
III. Constitution des tests.....	287
A. Constitution du test 1 (ou pré-test).....	287
1. Notre démarche générale.....	287
2. Nos choix d'items.....	289
B. Constitution du test 2 (ou post-test).....	292
C. Résultats globaux des élèves aux tests 1 (début des années scolaires 2010-2011 et 2011-2012).....	293
IV. Résultats des tests 1 (par item).....	295
A. Les taux de réussite des items.....	298
B. Ce que confirment les tests et ce qu'ils incitent à approfondir.....	301
1. Les élèves réussissent les additions et les soustractions avec des nombres entiers.....	301
2. Les premières difficultés sur les nombres entiers apparaissent sur les multiplications et les divisions.....	302
3. Les opérations sur les nombres décimaux constituent des difficultés pour les élèves entrant en sixième : des difficultés sur les opérations, sur les nombres, ou sur les deux à la fois ?.....	304
4. La multiplication et la division par 10, 100, 1 000 : des « marqueurs » des apprentissages des élèves?.....	309
5. Sur le changement d'écriture d'un nombre décimal.....	311
6. Sur le repérage d'un nombre sur la droite graduée.....	318
7. Des relations additives aux relations multiplicatives dans la résolution de problèmes : un saut conceptuel ?.....	322
C. De nouvelles questions que posent les résultats des tests.....	323
1. Les questions que posent les items dont le r_{bis} est inférieur à 0,2.....	323
2. Entre cadre numérique et cadre des grandeurs : un appui ou un obstacle ?.....	329
D. Bilan des tests 1.....	333

**CHAPITRE 5. LA FORMATION DES ENSEIGNANTS DANS LE
DISPOSITIF PACEM..... 335**

I. Rappels sur l'élaboration de la formation 338

- A. Rappels sur la conception de la formation 338
- B. Le scénario global de la formation..... 340

II. La formation 2010-2011 344

- A. Séance 1 (16/09/10, matin)..... 345
- B. Séance 2 (16/09/10, après-midi)..... 346
- C. Séance 3 (08/11/10, matin)..... 351
- D. Séance 4 (08/11/10, après-midi)..... 357
- E. Séance 5 (14/12/10) 358
- F. Séance 6 (16/03/11)..... 362
 - 1. Exercice 1 362
 - 2. Exercice 2 363
 - 3. Exercice 3 363
 - 4. Exercice 4 364

III. La formation 2011-2012..... 369

- A. Séance 1 (07/09/11) 369
- B. Séance 2 (11/10/11) 370
- C. Séance 3 (09/11/11) 372
- D. Séance 4 (12/12/11)..... 374
- E. Séance 5 (10/02/12) 376
- F. Séance 6 (05/04/12)..... 378

**IV. Notre analyse *a posteriori* de la formation du point de vue du
chercheur 380**

CHAPITRE 6. LES RESULTATS DE L'EXPERIMENTATION PACEM..... 387

**I. Les taux de réussite des items aux tests 2 : des progrès sensibles des
élèves, mais des taux néanmoins très éloignés des attendus
institutionnels de fin de sixième (Tableau C-1 à Tableau C-4)..... 391**

II. Les résultats des élèves : des effets positifs du dispositif pour les élèves des collèges expérimentateurs.....	396
A. Les scores globaux des élèves aux tests 2.....	396
B. Comparaison des évolutions des scores globaux test 1/test 2 en 2010-2011 et en 2011-2012.....	398
1. Année 2010-2011.....	398
2. Année 2011-2012.....	400
C. Croisement des résultats avec des variables individuelles.....	403
D. Prise en compte du niveau initial des élèves (score au test 1).....	409
E. Un impact auprès des élèves qui semble dépasser la seule année d'expérimentation.....	411
1. Résultats du test PACEM de 5 ^e sur la cohorte 2010-2011.....	411
2. Résultats des évaluations nationales de fin de 5 ^e sur la cohorte 2010-2011.....	415
3. Retour sur les contenus : où les différences entre les élèves apparaissent-elles ?	423
III. La pratique du calcul mental : une pratique efficace, mais avec des limites ?.....	425
IV. Conclusion.....	433

CONCLUSION 435

I. Retour sur l'expérimentation PACEM.....	438
II. Portée.....	440
A. A propos de la structure du dispositif.....	440
B. A propos de la formation des enseignants.....	442
C. A propos du calcul mental.....	447
D. La dimension collective du métier d'enseignant.....	448
III. Limites.....	450
A. Des limites liées à la structure du projet.....	450
B. Des limites liées à la méthodologie de l'évaluation.....	451
C. Des limites sur ce qui s'est joué dans l'enseignement et l'apprentissage.....	452
D. Des limites institutionnelles.....	455

IV. Perspectives et nouvelles questions.....	457
---	------------

BILIOGRAPHIE.....	461
--------------------------	------------

ANNEXE A. TABLEAUX DU CHAPITRE 1	475
---	------------

ANNEXE B. TABLEAUX DU CHAPITRE 4	512
---	------------

ANNEXE C. TABLEAUX ET GRAPHIQUES DU CHAPITRE 6.....	516
--	------------

ANNEXE D. TEST 1 PACEM 6^e (SEPTEMBRE 2010)	535
--	------------

ANNEXE E. TEST 2 PACEM 6^e (MAI 2011).....	553
---	------------

ANNEXE F. TEST 1 PACEM 6^e (SEPTEMBRE 2011)	573
--	------------

ANNEXE G. TEST 2 PACEM 6^e (MAI 2012).....	591
---	------------

ANNEXE H. TEST 3 PACEM 5^e (MAI 2012).....	609
---	------------

Introduction

Le travail présenté dans cette thèse s'inscrit dans le cadre d'une démarche dont les racines sont profondes, et qui marque à la fois mon engagement personnel dans la lutte contre les inégalités sociales et la maturation d'une vie professionnelle consacrée à l'enseignement des mathématiques, principalement au collège et au lycée. En bref, je dirais que cette étude « vient de loin ». Il m'a fallu du temps pour qu'elle prenne cette forme, parce que l'action, au sens courant du terme, a toujours été présente dans mon parcours, et également parce que la prise de distance avec ses propres pratiques est un processus long et difficile. C'est finalement par mon activité de chercheur en didactique des mathématiques, entreprise il y a une dizaine d'années, que cela a pu se faire, entremêlant dans une dialectique permanente réflexion et entretien de la mémoire de mes différentes expériences « de terrain ».

Centrale dans cette démarche, la complexité du métier d'enseignement ne me permet pas aujourd'hui de déterminer précisément ce qui en est à l'origine. Un certain nombre de facteurs sont évidemment, pour moi comme pour tout enseignant, d'ordre personnel, mais trois éléments, d'ordre professionnel, me semblent émerger : mon expérience d'enseignant en éducation prioritaire, le rôle du collectif, dans ce que j'ai contribué à mettre en œuvre dans les établissements où j'ai exercé, et dans la construction de mon identité professionnelle, et enfin mon utilisation « forte et précoce » des évaluations nationales.

J'ai exercé pendant dix années dans une cité scolaire (collège et lycée) au début de ma carrière¹, et je considère cette période, comme beaucoup d'autres enseignants, comme « une expérience cruciale ». Mais si je me rappelle bien l'espèce de challenge quotidien qui m'attendait chaque jour, j'en garde aussi le souvenir d'une période heureuse, au cours de laquelle j'ai eu le sentiment de participer sensiblement à la réussite scolaire et à l'épanouissement des élèves. J'en conserve également le souvenir d'un engagement collectif très important, avec mes collègues, avec l'administration, à la fois stimulant et contraignant,

¹ Mais pas « tout au début ».

qui m'a permis d'élaborer et de mettre en œuvre des dispositifs que je n'aurais jamais pu réaliser seul. A également contribué à ce processus l'intérêt que j'ai porté, très tôt, à des évaluations² que j'appellerais pour l'instant « externes », et en particulier à ce qu'elles ont pu m'apporter en tant qu'enseignant de mathématiques exerçant en éducation prioritaire. La connaissance de résultats indépendants de mon propre regard, et complémentaires, sur ce qu'avaient appris les élèves, dans et hors de mes classes, dans et hors de mon établissement scolaire, m'est très rapidement apparue comme un élément de professionnalisation : sources de questionnement sur les tâches à proposer aux élèves et sur mes pratiques, appuis sur l'organisation générale de l'enseignement dans mon établissement, ressources pour des liaisons écoles/collège, ces évaluations se sont ensuite révélés comme des outils possibles dans des formations d'enseignants.

J'ai ainsi acquis progressivement une sorte de conviction intime qu'un enseignant peut jouer, au quotidien, y compris en éducation prioritaire, un rôle déterminant sur les apprentissages des élèves. C'est la posture que j'ai adoptée à mes débuts de formateur, et c'est le questionnement de cette conviction qui m'a amené à suivre la formation de formateurs mise en place pour la première année par Aline Robert³. La structure de cette formation (longue) et ses contenus, mais aussi le positionnement adopté par les formateurs m'ont permis de dépasser le cadre de mon expérience personnelle (sans l'oublier) et de commencer à m'approprier un cadre théorique⁴. De questions d'enseignant, je suis passé à des questions de formateur, puis à celles de chercheur.

Avant de présenter le plan général de notre travail, je voudrais revenir rapidement sur certaines d'entre elles, qui ont évidemment évolué, et qui sont à l'origine de cette recherche.

² Il s'est essentiellement agi d'abord des évaluations EVAPM, puis des évaluations nationales à l'entrée en 6^e menées par le ministère de l'éducation nationale.

³ Et Nicolas Pouyanne

⁴ J'ai poursuivi ce travail lors de mon travail de Master

Contexte

Les évaluations nationales ou internationales conduites par la Direction de l'évaluation, de la prospective et de la performance (DEPP) montrent depuis une dizaine d'années des résultats convergents, parmi lesquels l'augmentation du nombre d'élèves de bas niveau et l'impact croissant de l'environnement socioéconomique des élèves sur leur performance scolaire. Ces résultats, largement mis en avant par PISA⁵, ont joué un rôle dans la mise en place du socle commun en France et dans la définition de nouveaux objectifs généraux pour l'enseignement des mathématiques dans la scolarité obligatoire, à l'école primaire et au collège⁶. Des dynamiques institutionnelles existent avec une volonté affirmée de faire progresser les acquis des élèves en mathématiques et d'accompagner les enseignants dans l'évolution de leurs pratiques : documents ressources pour les enseignants, ou actions nationales en direction des inspecteurs de l'Education nationale (IEN) visant à piloter des missions mathématiques dans chaque département. Il est dès lors important de s'interroger sur la pénétration de ces nouvelles orientations auprès du corps enseignant, de leur interprétation et de l'esprit dans lequel ils peuvent être mis en œuvre. Dans ce contexte, la transition école/collège prend une place tout à fait actuelle dans la réflexion sur la construction d'une école du socle. Se pose également la question de l'éducation prioritaire à laquelle on cherche toujours des réponses après 30 ans de politiques volontaristes successives.

Un deuxième point porte sur la valorisation des évaluations de la DEPP et sur leur utilisation par les enseignants et les formateurs. Cette question renvoie au statut des évaluations exhaustives, à leur légitimité et à leur fonction, aux niveaux national, académique ou local. Entre outils de pilotage et outils pédagogiques, leur place mal définie dans le paysage éducatif français nous semble justifier en partie que les enseignants et les formateurs ne s'en emparent pas. De façon générale, nous faisons aujourd'hui l'hypothèse que, si les évaluations à large échelle (sur échantillons ou exhaustives) ont de plus en plus d'importance

⁵ Programme international de suivi des acquis des élèves piloté par l'OCDE depuis 2000.

⁶ D'autres éléments, liés au processus de Lisbonne, ont pu jouer dans cette mise en place.

dans le pilotage du système éducatif français, la plupart des enseignants et des formateurs semblent considérer qu'elles constituent davantage un outil externe de mesure des acquis des élèves plutôt qu'un ensemble de ressources pour la classe.

Se posent aussi un certain nombre de questions qui renvoient à la formation des enseignants, de leur recrutement à leur formation continue, en passant par leur période de genèse des pratiques, que ce soit en formation initiale ou au cours des premières années d'exercice. Ces questions renvoient à la complexité du métier d'enseignant, nous l'avons déjà évoquée, avec les contraintes qui le déterminent et les marges de manœuvre disponibles, à la notion de climat scolaire, et toutes celles qui tournent autour de ce qu'on appelle l'effet établissement, l'effet classe, l'effet enseignant. Font également partie de cette complexité la question plus floue des pratiques « efficaces » ou des « bonnes pratiques », ou autrement dit de celles qui mèneraient à la qualité des apprentissages, pérennes, pas toujours mesurables, et celle qui lui est liée, de leurs effets dans le temps.

La question de l'impact d'une formation d'enseignants a déjà été l'objet de travaux de recherches (Vergnes, 2000, Masselot, 2000), mais celle-ci a été abordée en liaison avec l'étude de l'effet sur les pratiques enseignantes. On peut citer également le travail de Chesnais (2009) qui explore le transfert d'un scénario global d'un enseignant vers un autre en éducation prioritaire. Ces travaux, qui sont des analyses cliniques portant sur l'observation des pratiques d'un nombre restreint d'enseignants nous livrent des résultats intéressants, en particulier sur les écarts entre le projet du formateur et ce que font effectivement les enseignants dans leurs classes, ainsi que sur la variabilité de ces écarts. En revanche, la question de la portée d'une action de formation⁷, initiale ou continue, sur les résultats des élèves, peut-être parce qu'elle est considérée comme difficile à appréhender, n'a presque jamais été réellement abordée à

⁷Un panorama institutionnel sur cette question est dressé dans le rapport de l'IGEN-IGAENR : Évaluation de la politique de formation continue des enseignants des premier et second degrés (sur la période 1998-2009) d'octobre 2010.

notre connaissance en France⁸. Notre recherche s'inscrit davantage dans la lignée de recherches anglo-saxonnes : elle s'en rapproche par sa dimension quantitative (nombre des enseignants et des élèves impliqués), sa méthodologie (comparaison des résultats des élèves avec un groupe témoin) et sa perspective (les moyens engagés correspondant à une action de formation ordinaire, donc *a priori* reproductible).

On voit donc que mettre en œuvre un projet ayant comme objectif de déterminer quels leviers sont susceptibles de favoriser la réussite scolaire au niveau des enseignants, en particulier dans le domaine de l'éducation prioritaire, est une entreprise essentielle, ambitieuse, et éminemment délicate parce qu'elle porte sur une réalité très variable, et difficile à appréhender. C'est dans ce contexte que nous nous sommes lancé dans la conception et la mise en œuvre d'un « projet pour l'acquisition de compétences par les élèves en mathématiques » (PACEM), qui reprend et teste un certain nombre d'hypothèses issues de travaux de la didactique en mathématiques, et comporte des dimensions innovantes par l'introduction de nouvelles variables, sur la formation des enseignants et sur son évaluation d'impact.

L'expérimentation conçue, décrite et analysée dans notre travail de thèse a été réalisée au sein de la DEPP. Elle porte sur un moment précis de la scolarité, le début du collège, et un domaine précis, celui des nombres et du calcul. Nous commençons donc par nous livrer à un état des lieux sur ce que savent les élèves à leur entrée en sixième dans le domaine visé (chapitre 1). Pour mener cette première étape, nous étudions les programmes scolaires du cycle 3 depuis 1980 et nous confrontons notre analyse avec les résultats disponibles d'évaluations nationales au cours de cette même période, afin de définir notre vision globale sur les notions à enseigner en sixième et des pratiques enseignantes associées dans le domaine que nous avons choisi. Nous précisons ensuite dans quel cadre théorique nous avons développé notre recherche, ce qui nous permet de dégager notre problématique et notre méthodologie générale, en décrivant la structure de la formation que nous adoptons pour notre

⁸ On peut cependant citer le travail de G. Felouzis (1996).

expérimentation (chapitre 2). Puis nous développons une réflexion spécifique sur le calcul mental, et nous exposons quelle part nous comptons lui faire jouer dans la formation des enseignants en formation (chapitre 3).

Une fois ces fondements posés, nous présentons l'architecture globale de l'expérimentation mise en place dans le cadre du projet PACEM, de la conception des tests pour les élèves à la formation des enseignants (chapitre 4). Nous rapportons ensuite comment s'est déroulée la formation des enseignants durant les deux années de mise en œuvre de l'expérimentation, ou plutôt comment nous l'avons reconstituée *a posteriori* (chapitre 5), et nous présentons et analysons les résultats obtenus (chapitre 6).

En conclusion, en croisant des approches pragmatique, institutionnelle et statistique, nous étudions, dans une démarche didactique à la fois holistique et contextualisée, comment certains éléments sont susceptibles de favoriser l'impact d'une formation d'enseignants sur les apprentissages des élèves. Nous souhaitons ainsi contribuer à la réflexion sur la formation des enseignants, et sur celle des formateurs d'enseignants.

Chapitre 1. Un état des lieux sur les nombres et le calcul enseignés à l'école primaire et au collège : une vision croisée des programmes et des évaluations nationales

« On a compris qu'un programme ne vaut que par la manière dont il est appliqué ; que s'il est appliqué à contresens ou avec une résignation passive, ou il tournera contre son but ou il restera lettre morte. Il faut que les maîtres chargés d'en faire une réalité le veuillent, s'y intéressent ; c'est à condition de le vivre qu'ils le feront vivre. Ce n'est donc pas assez de leur prescrire avec précision ce qu'ils auront à faire, il faut qu'ils soient en état de juger, d'apprécier ces prescriptions, de voir leur raison d'être, les besoins auxquels elles répondent. Il faut, en un mot, qu'ils soient au courant des questions auxquelles ces prescriptions apportent des solutions provisoires ; c'est dire qu'il est indispensable de les initier aux grands problèmes que soulève l'enseignement dont ils ont la charge, à la manière dont on se propose de les résoudre, afin qu'ils puissent se faire une opinion en connaissance de cause. » (Durkheim, 1904)

Sommaire du Chapitre 1

I. L'enseignement des nombres et du calcul à l'école primaire et au début du collège en France	27
A. Les programmes et les horaires de l'école primaire depuis 1980	27
B. L'enseignement des nombres et du calcul en sixième.....	50
C. Premières esquisses d'une vision globale : vers un « nouveau relief ».....	54
II. Les évaluations nationales sur les acquis des élèves	57
A. Les évaluations à l'entrée en sixième	59
B. Avant et après les vacances, évolution des acquis des élèves.....	61
C. Les tests en fin d'école et en fin de collège pour le calcul des indicateurs « compétences de base » de la LOLF.....	63
D. Les évaluations bilans CEDRE de fin d'école	64
E. L'évolution des performances des élèves sur 20 ans	67
F. Le panel 2007	68
G. Les évaluations nationales CM2	70
H. Conclusion intermédiaire.....	72
III. Une lecture didactique des résultats des évaluations nationales depuis 25 ans dans le domaine des nombres et du calcul.....	74
A. La méthodologie adoptée pour l'analyse des résultats.....	75
B. Calculer mentalement (Tableau A-3 à Tableau A-14).....	80
C. Effectuer un calcul posé (Tableau A-15 à Tableau A-26)	103
D. Résoudre des problèmes relevant des quatre opérations (Tableau A-27 à Tableau A-30)	123
E. Connaissance des nombres (Tableau A-31 à Tableau A-39).....	129
F. Conclusion	134
IV. Vers un « nouveau relief » sur les notions à enseigner.....	138
A. Les décimaux : entre connaissance des nombres et calcul	139
B. Addition/soustraction et multiplication/division	141

Dans ce premier chapitre, nous commençons par dresser un panorama institutionnel à la charnière école/collège dans le domaine de l'enseignement des nombres et du calcul, en présentant une lecture des programmes scolaires et les horaires d'enseignement à l'école primaire⁹ depuis une trentaine d'années¹⁰, et en dégagant quelques aspects de leur évolution. Nous complétons cette présentation par celle des trois programmes de collège les plus récents, puis nous évoquons quelques questions relevant, de notre point de vue, de la didactique des mathématiques, qui traversent ou qui ont traversé le domaine des nombres et du calcul durant cette période, et qui vont nous permettre de définir les premiers contours d'une vision globale des contenus à enseigner pour le domaine visé.

Dans la deuxième partie du chapitre, nous nous livrons à un inventaire des évaluations nationales menées en France par la direction de l'évaluation, de la prospective et de la performance (DEPP), à l'issue duquel nous faisons le point, dans une troisième partie, sur les acquis des élèves dans le domaine de la connaissance des nombres et du calcul à la fin de l'école primaire. Dans la quatrième et dernière partie du chapitre, nous présentons ce que nous appelons un « nouveau relief » sur les notions à enseigner en sixième sur le domaine visé.

⁹ L'école primaire comprend en France l'école maternelle et l'école élémentaire (grades 1 à 5). Compte tenu du niveau de la scolarité où nous situons notre recherche, nous confondrons souvent école élémentaire et école primaire.

¹⁰ Nous reviendrons en détail dans le chapitre 3 sur les points des programmes en vigueur au moment de notre recherche qui sont liés au calcul mental.

Le point de vue que nous adoptons dans ce premier chapitre est triple, pour des raisons liées à la structure de notre projet. En tant que chercheur, nous étudions les programmes de l'école primaire afin d'étayer notre analyse des résultats des évaluations nationales : nous nous intéressons donc aux programmes en vigueur durant la période au cours de laquelle nous disposons de ces résultats. Notre étude des programmes de sixième est différente, et plus limitée dans le temps, puisque ce qui nous intéresse, c'est à la fois la perspective d'une vision globale de l'enseignement d'un domaine mathématique au début du collège, la compréhension des contraintes et l'exploration des marges de manœuvre institutionnelles qui existent pour un enseignant de sixième. Nous restreignons donc notre étude au programme en vigueur lors de la mise en place de notre recherche, et des deux programmes qui l'ont précédé. Cette démarche contribue évidemment aux deux autres rôles que nous avons occupés dans l'expérimentation comme pilote et comme formateur : d'une part, elle participe à notre expertise en tant que concepteur de tests en renforçant notre connaissance des programmes du cycle 3 et du collège, et en nous donnant des références institutionnelles solides sur les tâches proposées aux élèves ; d'autre part, elle nous donne accès à des éléments de compréhension des pratiques¹¹ des enseignants, et nous permet aussi de construire des outils de formation, adaptés aux programmes en vigueur.

¹¹ Nous entendons par pratiques d'un enseignant l'ensemble de ses activités relatives à l'exercice de son métier, dans et hors de la classe.

I. L'enseignement des nombres et du calcul à l'école primaire et au début du collège en France

« Il est clair que la question qui se pose à l'enseignement n'est pas : « faut-il enseigner le calcul, faut-il enseigner à calculer ? », mais bien plutôt : « que faut-il enseigner aujourd'hui en matière de calcul, compte-tenu de l'évolution scientifique, mais aussi compte-tenu des évolutions sociale et technologique ? » Et, comment le faire de manière à dépasser les obstacles culturels qui s'opposent à la mise en place de rapports satisfaisants au monde du calcul ? »

Cet extrait du rapport de la Commission de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques (2001) ne porte pas exclusivement sur l'école primaire et le collège. Mais à quoi fait-on référence exactement aujourd'hui quand on parle d'enseignement du calcul à l'école primaire? Parle-t-on d'ailleurs toujours de la même chose depuis 30 ans ? Comment a évolué la répartition des contenus des programmes entre l'école primaire et le collège, ou plus précisément entre la dernière année de l'école primaire (grade 5) et la première année du collège (grade 6) ? Avec quelle continuité ? Et comment l'intégration du socle commun de connaissances et de compétences¹² s'est-elle faite à ces deux niveaux scolaires ? C'est en donnant des éléments de réponses à ces questions que nous commençons notre travail.

A. Les programmes et les horaires¹³ de l'école primaire depuis 1980

Nous nous préoccupons donc d'abord de l'évolution des programmes scolaires de la fin de l'école primaire dans le domaine des nombres et du calcul, notamment dans la

¹² Depuis la loi d'orientation et de programmation de la refondation pour l'École de la République du 8 juillet 2013, celui-ci s'appelle le socle commun de connaissances, de compétences et de culture.

¹³ Les horaires peuvent avoir été précisés par des arrêtés différents de ceux qui définissent les programmes.

perspective d'étudier les résultats des élèves aux évaluations nationales à la charnière avec le début du collège. Les programmes auxquels nous nous intéressons ont été choisis sur la base de la reconstitution de la scolarité des élèves pour lesquels nous disposons de résultats d'évaluations nationales au CM2 ou en sixième depuis une trentaine d'années. Nous n'avons pas l'ambition de procéder à une étude intégrale de l'évolution des programmes – ce n'est pas l'objet de notre recherche – mais seulement d'en dresser un historique et de relever quelques points qui nous semblent intéressants dans le cadre de notre démarche. Si les prises de position et les débats sont nombreux à chaque changement de programme, nous n'avons pourtant pas trouvé de recherches exhaustives sur ce sujet. Nous avons trouvé dans les travaux de Neyret (1981) une réflexion sur la numération à partir des programmes de 1980 (en fait de 1978 pour le CP à 1980 pour le cycle moyen). Chambris (2008) se livre dans sa thèse à une sorte de vis-à-vis pour le primaire du travail effectué pour le secondaire par Bronner (1997) et s'intéresse aux programmes lors de son travail d'analyse en référence aux savoirs savants, qu'elle situe dans la théorie anthropologique du didactique (Chevallard 1991). Roditi (2001) s'y penche également dans son travail de thèse sur la multiplication des décimaux, tout comme Hersant (2001) à propos de la proportionnalité ou encore Tempier (2013) sur la numération. Mais, comme dans beaucoup de travaux de recherche en didactique des mathématiques en France, ces chercheurs ont davantage porté leur attention sur les manuels scolaires et l'utilisation qu'en font les enseignants que sur les programmes scolaires eux-mêmes, contrairement à nous. Seul Butlen (2007) s'attache, à notre connaissance, à décrire l'évolution des programmes de mathématiques, en lien avec l'enseignement du calcul mental à l'école élémentaire¹⁴, de 1883 à 2002. Un rapport de l'inspection générale sur l'enseignement des mathématiques au cycle 3 de l'école primaire (2006) nous fournit également une lecture des programmes du 20^e siècle.

Nous allons donc dans cette première section tenter de dégager un certain nombre d'attentes institutionnelles sur l'enseignement des nombres et du calcul, à travers la lecture et

¹⁴ Des travaux similaires à celui de Butlen existent peut-être pour d'autres domaines que le calcul (par exemple en géométrie), mais nous n'avons pas investigué dans cette direction.

l'analyse des programmes depuis ceux de 1980, qui correspondent aux programmes en vigueur¹⁵ au moment des premières évaluations nationales à l'entrée en sixième (1989). Nous adoptons pour cela la méthode suivante : dans un premier temps, nous nous livrons à une analyse interne aux programmes en relevant pour chacun d'eux les grandes lignes qui les structurent. Puis nous cherchons à relever les invariants et les changements relatifs à notre domaine d'étude, en nous centrant plus particulièrement sur quatre points :

- l'introduction des nombres décimaux¹⁶,
- la pratique du calcul, posé et mental,
- l'évaluation d'un ordre de grandeur d'un résultat,
- la proportionnalité, qui n'est d'ailleurs jamais classée dans la partie « calcul » dans les programmes de l'école primaire¹⁷ (ni dans ceux du collège).

Nous n'entrons pas en revanche dans la chronologie des apprentissages, c'est-à-dire la répartition des contenus par cycle, qui constituerait en soi un objet d'analyse, mais sur lequel nous faisons l'impasse. Enfin, nous évoquons, quand c'est possible, les mentions qui sont faites des évaluations nationales dans les programmes successifs.

Pour l'école primaire, six programmes¹⁸ ont successivement été publiés depuis celui du 18 juillet 1980 :

- le programme défini par l'arrêté du 15 mai 1985 (J-P Chevènement¹⁹)
- le programme défini par l'arrêté²⁰ du 1^{er} août 1990 (L. Jospin)

¹⁵ Ou à ceux qui les ont juste précédés.

¹⁶ Nous adoptons la convention adoptée dans les programmes, qui consiste à entendre par nombres décimaux les nombres décimaux non entiers. Nous nous restreignons évidemment ici aux nombres positifs.

¹⁷ A une exception près, en 1995.

¹⁸ Les noms entre parenthèse sont ceux des ministres de l'éducation nationale en poste au moment de la publication des programmes.

¹⁹ En réalité, le programme de 1980 est valable pour le cours moyen. Il succède à celui de 1978 pour le cours élémentaire et celui de 1977 pour le cours préparatoire.

- le programme défini par l'arrêté du 22 février 1995 (F. Bayrou)
- le programme défini par l'arrêté du 25 janvier 2002 (J. Lang)
- le programme défini par l'arrêté du 4 avril 2007 (G. de Robien)
- le programme défini par l'arrêté du 9 juin 2008 (X. Darcos)

L'évolution des horaires hebdomadaires de mathématiques fixés pour l'application de chaque programme (pour une semaine de classe passant de 27 h à 26 h en 1990 puis de 26 h à 24 h en 2008) est la suivante :

Programmes	Horaires pour le cycle moyen, puis le cycle 3
1980	6 h
1985	6 h
1990	6h 30 à 10h 30 (mathématiques, sciences, technologie)
1995	5h30
2002	5h-5h30
2007	5h-5h30
2008	5h

On remarque clairement la diminution progressive des horaires²¹. Un calcul sommaire, analogue à celui souvent effectué pour les horaires de mathématiques au lycée, permet de constater que, si on considère les cinq années d'école élémentaire²², la diminution observée correspond pratiquement à une année scolaire. On peut aisément supposer que ce fait ne peut pas être sans importance sur le métier des enseignants et les apprentissages des élèves.

²⁰ Cet arrêté ne fixe en réalité que les horaires d'enseignement ; le décret n° 90-788 du 6 septembre 1990 définit les nouvelles modalités d'organisation et de fonctionnement des écoles maternelles et élémentaires, et c'est la brochure « Les cycles à l'école primaire » parue en 1991, qui définit les programmes.

²¹ Même si des dispositifs d'aide personnalisée aux élèves ont été – diversement – mis en place dans les écoles.

²² Les horaires, quoique différents sur les premières années de l'école élémentaire, varient de la même façon.

1. Le programme de 1980

Le programme de 1980 comporte, uniquement pour le cycle moyen, 95 pages, et souligne dans son introduction la double mission de ce qui s'appelle alors le cours moyen, à savoir l'achèvement de la scolarité primaire et la préparation au cycle d'observation d'alors du collège (6^e – 5^e), avec un souci de « continuité pédagogique ». Le passage pourrait d'ailleurs fort bien figurer dans les programmes actuels : « Les deux dernières années de la scolarité primaire constituent une période où, à la fois, se poursuivent les objectifs généraux des cycles précédents et se consolident les connaissances et les compétences de base. » Les contenus à enseigner sont d'abord formulés brièvement sous forme de savoir-faire (avec des verbes à l'infinitif : « savoir reconnaître », « savoir organiser », « savoir élaborer et mettre en œuvre », etc.) qui correspondent alors à des compétences, puis chacun des objectifs fixés est ensuite détaillé et éventuellement illustré par des exemples. Ces objectifs « visent d'abord la consolidation des compétences de base, dont il importe que tous les enfants soient munis pour aborder avec profit l'enseignement secondaire. » En mathématiques, le programme est divisé en sept rubriques (situations-problèmes ; écrire, nommer et comparer les nombres naturels ; écrire, nommer et comparer les nombres décimaux ; calculer sur les nombres ; représenter et utiliser des fonctions numériques ; mesurer ; activités géométriques). Le choix de la méthode d'introduction des décimaux est laissé à l'initiative des enseignants, les quatre opérations sur les décimaux sont présentes, excepté les techniques de calcul des quotients de nombres décimaux, et la proportionnalité est mentionnée comme un cas particulier de l'utilisation de fonctions numériques.

On note, également, en parallèle avec l'insistance sur la résolution de problèmes, une volonté explicite de réintroduire le calcul mental dans les pratiques tout en mettant l'accent sur les démarches des élèves :

« Les *séances quotidiennes* de calcul mental prendront des formes variées : la consigne peut être écrite ou orale ; l'exercice peut, ou non, se référer à des situations (vécues ou évoquées) ; les enfants peuvent avoir le droit d'écrire des résultats intermédiaires, ou pas.

Selon la forme adoptée, les exercices sollicitent des types d'attention et de mémoire différents dont il convient de ne négliger aucun.

L'explicitation des différentes démarches sera plus ou moins développée suivant l'objectif assigné à la séance : élaboration ou entretien. Un enfant doit pouvoir rendre compte de sa démarche, la communication étant éventuellement facilitée par diverses représentations, par des écritures avec parenthèses, par des arbres de calcul, etc.

La discussion des diverses méthodes employées n'a pas pour but de valoriser l'une d'entre elles : il n'y a pas une bonne méthode pour un exercice donné, l'appréciation variant en fonction de l'exemple précis et, pour chaque enfant, des outils mathématiques disponibles au moment où l'exercice est proposé. Dans cette phase d'explicitation et de confrontation, chaque enfant pourra choisir les procédures qui lui paraissent les plus adaptées pour lui. »

Il apparaît que bien des éléments, qui seront repris ensuite (Butlen & Pézard, 1992, 2003 ; Butlen, 2007), sont présents dans ce programme : la fréquence des rencontres des élèves avec le calcul mental, la nature de leur activité cognitive, avec par exemple la question de la mémorisation ou la possibilité pour eux d'écrire ou non des calculs intermédiaires ; du côté des enseignants, l'importance accordée aux objectifs visés, à la prise en compte des démarches des élèves et au moment où est demandé tel ou tel calcul. Nous reprendrons largement ces différents aspects dans le chapitre 3, en les développant et en les approfondissant. Par ailleurs, la mémorisation de « résultats élémentaires (que les enfants peuvent organiser, par exemple, en tables de Pythagore) » est attendue. Il est enfin demandé, non seulement qu'un élève sache « évaluer l'ordre de grandeur et trouver des encadrements du résultat d'un calcul », mais aussi qu'il sache « s'assurer de la vraisemblance d'un résultat. »

2. Le programme de 1985

Beaucoup plus court que celui de 1980 (27 pages pour le cours préparatoire, le cours élémentaire et le cours moyen), le programme de 1985 ne comporte pas d'introduction et a une entrée immédiate par discipline. Pour chacune d'entre elles, un texte rappelle la nature et les objectifs de son enseignement et donne des instructions aux enseignants²³. En mathématiques, le programme est divisé en trois grands domaines (arithmétique, géométrie et mesure de quelques grandeurs). Les situations-problèmes sont toujours présentes, mais le terme disparaît : « Lors de l'introduction de notions nouvelles, les élèves sont mis en situation d'apprentissage actif : ils découvrent les notions comme des réponses à des problèmes. » Ces problèmes sont ensuite classés en trois types, comme dans le programme de 1980. L'intention des auteurs était peut-être de lever ainsi des ambiguïtés sur la notion de situation-problème, mais la démarche de construction de ses connaissances par l'élève persiste clairement. L'introduction des décimaux n'est pas détaillée, seule subsiste un morceau de phrase issue du programme de 1980 : « Nécessité d'introduire de nouveaux nombres : nombres décimaux et nombres s'écrivant sous forme de fractions simples. » Le calcul mental y figure toujours également, mais de façon plus légère, sous forme de mentions générales dans les contenus à enseigner, par exemple : « Application des procédures de calcul mental dans l'ensemble des décimaux, en utilisant des techniques opératoires, et les propriétés des fonctions numériques étudiées. » L'ordre de grandeur d'un résultat est également toujours présent, mais sans la notion de « vraisemblance ». La mémorisation de résultats élémentaires est remplacée par la « construction, utilisation et mémorisation » de la table d'addition et de la table de multiplication. Enfin, la notion de « règle de trois » fait, quant à elle, sa réapparition.

²³ Les verbes sont abandonnés au profit de noms qui désignent les contenus à enseigner (écriture, désignation, comparaison, reconnaissance, etc.).

3. Le programme de 1990

Le programme de 1990 fait suite à la loi d'orientation sur l'éducation du 10 juillet 1989 qui organise la scolarité primaire par cycles²⁴ : cycle 1 ou cycle des apprentissages premiers (les trois années d'école maternelle), cycle 2 ou cycle des apprentissages fondamentaux (grande section de l'école maternelle²⁵, cours préparatoire, 1^{re} année du cours élémentaire), cycle 3 ou cycle des approfondissements (2nde année du cours élémentaire²⁶ et les deux années de cours moyen). C'est le programme de « l'enfant au centre du système éducatif », qui vise à faire prendre en compte dans l'enseignement le développement et les acquis personnels des élèves. C'est aussi l'apparition explicite des compétences : compétences transversales (d'attitudes et méthodologiques), compétences dans le domaine de la langue et compétences disciplinaires, détaillées par cycle. Pour les mathématiques, il n'y a pas de modification remarquable des contenus, mais pour la première fois, le mot calculette apparaît dans un programme (« savoir utiliser une calculette dans les situations où son usage s'avère pertinent »).

Pour la première fois, et c'est normal puisque les premières ont eu lieu en 1989, les évaluations nationales à l'entrée en CE2 et en 6^e sont mentionnées dans un paragraphe dédié à la prise en compte des démarches d'apprentissage des élèves :

« De très nombreux maîtres ont, au cours des dernières années, reconsidéré la place de l'erreur. A une utilisation traditionnelle normative, l'erreur servant à sanctionner le travail de l'élève, ils ont ajouté une fonction d'analyse des modalités d'apprentissage. L'erreur devient alors l'outil privilégié du maître pour recenser les lacunes ou les faiblesses, pour explorer les démarches d'apprentissage, pour élaborer et mettre en œuvre les réponses appropriées.

²⁴ Le rapport de l'inspection générale ne fait aucune référence à ce programme, qui est en réalité défini dans la brochure « Les cycles à l'école primaire » parue en 1991.

²⁵ On remarque que la grande section de l'école maternelle appartient à deux cycles

²⁶ Etrangement, on a gardé l'expression « cours élémentaire » dont la 1^{re} année est devenue la dernière année du cycle 2 et la 2nde année la première du cycle 3.

Ainsi l'évaluation à l'entrée en CE2 et en 6^e met à la disposition des enseignants, tôt dans l'année, une information précise sur les acquis des élèves et les obstacles qu'ils rencontrent dans leurs apprentissages. Les enseignants s'appuieront sur cette information pour adapter leurs pratiques. » Notons que la mention de l'évaluation à l'entrée en 6^e dans un programme de l'école primaire entretient un certain flou sur le côté diagnostique qui lui était alors donné officiellement : doit-on comprendre que cette phrase s'adresse aux enseignants du collège qui accueillent les élèves en 6^e, ou au contraire, à ceux de l'école primaire dans une visée rétrospective des résultats des élèves qui ont quitté l'école primaire ?

L'introduction des décimaux occupe une place très réduite, sans indication particulière²⁷. En ce qui concerne le calcul mental, on peut noter une certaine réaffirmation de sa place dans les progressions par cycles où on peut presque parler de certains types de tâches qui sont précisés. Par exemple, on peut lire, pour le cycle 3, qu'un élève devra « utiliser à bon escient le calcul réfléchi (mental ou écrit) : en particulier l'élève aura été entraîné à une pratique régulière du calcul mental dont il maîtrisera les méthodes usuelles (additionner deux nombres mentalement, réaliser certaines multiplications de tête, savoir multiplier ou diviser un nombre entier ou décimal par 10 / 100 / 1000, multiplier le cas échéant un nombre entier ou décimal par 0,1 / 0,01, connaître quelques critères de divisibilité...) ». En revanche, si la mémoire est citée comme une « compétence transversale », il n'y a pas en mathématique de mention explicite de la mémorisation de tables d'addition et de multiplication, hormis le fait que l'élève « sera par exemple capable de mémoriser quelques tables de multiplication (notamment par 2 et par 5). »

Le programme se termine par l'évocation de trois aspects plutôt ambitieux : la définition d'un livret scolaire qui suivra l'élève au cours de sa scolarité, la création d'une banque d'items mise à disposition des enseignants pour l'évaluation des élèves et l'attention particulière qui sera portée à la formation des enseignants.

²⁷ Pour une analyse plus détaillée sur ce sujet, et notamment l'articulation cycle 3/sixième, on se reportera au travail de Bolon (1996)

4. Le programme de 1995

Le programme de 1995 comporte 49 pages (dont 13 pour l'école maternelle), les contenus à enseigner se présentant sous formes des listes très synthétiques, à la manière du programme de 1985. Articulé autour de quatre grands axes (l'organisation de la scolarité en cycles pluriannuels, la cohérence des apprentissages, l'organisation de l'école et de la classe adaptée à la diversité des élèves, la responsabilité du maître), il se présente comme « allégé et recentré ». On y retrouve la mention de « l'erreur dédramatisée » et la référence aux évaluations nationales :

« L'un des moyens privilégiés pour déterminer les meilleures stratégies d'apprentissage » consiste à analyser collectivement les raisons d'une réussite, d'une difficulté ou d'un échec. L'erreur dédramatisée suscite chez l'élève une analyse constructive de son travail et la volonté de progresser. Elle fournit au maître des informations précieuses pour définir, lorsque c'est nécessaire, des actions de remédiation²⁸.

Dans cette perspective, le développement d'une pratique régulière de l'évaluation permet une connaissance plus objective de l'élève et un pilotage de classe mieux assuré. Cette pratique s'appuie notamment sur l'opération d'évaluation mise en place à l'entrée dans les cycles d'approfondissement et d'observation. Cette opération est conçue avec le souci de simplicité d'usage pour les maîtres et pour les parents. »

En mathématiques, le programme est divisé en trois grands domaines : nombres et calcul, géométrie, mesure, et « la résolution de problèmes occupe une place centrale dans l'appropriation par les élèves des connaissances mathématiques ». Le calcul mental ne figure pas explicitement dans le programme, un peu comme dans le programme de 1985, mais apparaît seulement sous la mention de « calcul réfléchi ». La construction, l'utilisation et la

²⁸Notons l'apparition du néologisme « remédiation ».

mémorisation de la table d'addition apparaissent explicitement (au cycle 2), mais aucune mention similaire ne figure pour la table de multiplication. Par ailleurs, en référence à l'allègement annoncé des programmes, le programme de 1995 réduit les opérations sur les décimaux en se limitant à la multiplication et à la division d'un décimal par un entier²⁹. La multiplication des décimaux est ainsi reportée en sixième. Enfin, la proportionnalité n'est citée qu'au travers d'une « première approche », dans la partie « nombres et calcul », sans mention de « la règle de trois », et la calculette devient une calculatrice.

5. Le programme de 2002

« Dans la forme et dans l'esprit, les programmes de 2002 apparaissent comme un retour à ceux de 1980. » Nous partageons sur ce point cette appréciation globale de l'IGEN (rapport 2006) en ce sens que ces programmes cherchent à redéfinir explicitement une culture mathématique à l'école primaire. Largement présentés sous forme de documents d'application, ils ne sont plus seulement écrits en termes de connaissances à acquérir par les élèves, mais précisent également – en partie – l'organisation de l'activité mathématique attendue de la part des enseignants et des élèves. La rédaction des programmes est confiée à une équipe composée en partie de didacticiens des mathématiques parmi lesquels Charnay et Houdement. La partie consacrée au cycle 3, comporte à elle seule 48 pages, uniquement pour les mathématiques. Elle débute par une longue introduction, puis se répartit en 6 domaines³⁰ (exploitation de données numériques, connaissances des nombres entiers naturels, connaissances des nombres fractions et des nombres décimaux, calcul, espace et géométrie, grandeurs et mesures), et se termine par des éléments d'aide à la programmation.

L'introduction, qui réaffirme « une place centrale pour la résolution de problèmes » pose « la question du calcul aujourd'hui » et affirme comme priorité ce que nous lisons comme une disponibilité des connaissances numériques des élèves : « l'objectif prioritaire

²⁹ On peut également la disparition de l'aire du disque alors que le « périmètre » du cercle demeure.

³⁰ C'est en particulier le grand retour dans les programmes des grandeurs en tant que concept.

reste, bien entendu, que les connaissances numériques des élèves soient opératoires, c'est-à-dire au service des problèmes qu'elles permettent de traiter, dans des situations empruntées à l'environnement social ou à d'autres domaines disciplinaires étudiés à l'école. » Trois moyens de calcul sont distingués : le calcul mental, le calcul instrumenté (avec une calculatrice ou dans le cadre d'une initiation à l'usage d'un tableur) et le calcul posé. Dans cette partie, ce qui est nouveau, et remarquable de notre point de vue, c'est le positionnement des auteurs du programme à propos du calcul mental, clairement affiché, que nous citons *in extenso* :

« Automatisé ou réfléchi, le calcul mental doit occuper la place principale à l'école élémentaire et faire l'objet d'une pratique régulière, dès le cycle 2. Une bonne maîtrise de celui-ci est indispensable pour les besoins de la vie quotidienne (que ce soit pour obtenir un résultat exact ou pour en évaluer un ordre de grandeur). Elle est nécessaire également à une bonne compréhension de certaines notions mathématiques (traitements relatifs à la proportionnalité, compréhension du calcul sur les nombres relatifs ou sur les fractions au collège...). Et surtout, une pratique régulière du calcul mental réfléchi permet de familiariser les élèves avec les nombres et d'approcher (en situation) certaines propriétés des opérations (voir les différentes méthodes utilisables pour calculer $37 + 18$ ou 25×16). Dans ce domaine particulièrement, il convient de distinguer ce qu'il faut mémoriser ou automatiser (les tables, quelques doubles et moitiés, le calcul sur les dizaines et les centaines entières, les compléments à la dizaine supérieure...) et ce qu'il faut être capable de reconstruire (et qui relève du calcul réfléchi : idée de rendre plus simple un calcul, souvent en procédant par étapes plus nombreuses, mais en s'appuyant sur ce qui est connu). L'exploitation des diverses procédures mises en œuvre par les élèves pour un même calcul permet de mettre l'accent sur les raisonnements mobilisés et sur les propriétés des nombres et des opérations utilisées « en acte » (certains parlent d'ailleurs à ce sujet de « calcul raisonné »).» Le travail de mémorisation est détaillé, et s'il mentionne bien la connaissance des tables d'addition et de multiplication, il inclut également « des techniques de calcul posé, avec des nombres simples », et « des procédures de résolution expertes de certains problèmes. »

Evaluer un ordre de grandeur d'un résultat est évoqué soit à titre d'anticipation, soit à titre de contrôle, et illustré par un exemple. Enfin, le travail sur la proportionnalité³¹ est lui aussi très détaillé, mais surtout sa place dans l'apprentissage des élèves est bien précisée : « L'étude de la proportionnalité pour elle-même relève du collège. À l'école primaire, il s'agit d'étendre la reconnaissance de problèmes qui relèvent du domaine multiplicatif. Ces problèmes sont traités en s'appuyant sur des raisonnements qui peuvent être élaborés et énoncés par les élèves dans le contexte de la situation. » Il s'agit manifestement que les élèves développent des stratégies de résolution de problèmes relevant de la proportionnalité qui s'appuient implicitement sur les propriétés de linéarité, sur le passage par l'image de l'unité ou sur le coefficient, lorsqu'il a une signification pour les élèves, ces différentes stratégies étant reprises et progressivement étudiées en tant qu'objets au collège.

Par ailleurs, un document spécifique consacré à l'articulation école/collège marque une volonté de construire une réelle continuité dans les apprentissages des élèves. Le programme est complété par des documents complémentaires détaillés (96 pages), publiés 3 ans plus tard, qui portent largement sur la résolution de problèmes et sur le calcul, posé et mental, mais qui ne traitent pas spécifiquement ni des décimaux ni de la proportionnalité.

6. Le programme de 2007

En 2005, apparaît officiellement dans le paysage éducatif français le socle commun de connaissances et de compétences, inscrit dans la loi d'orientation et de programme du 23 avril 2005. L'article 9 de cette loi est très court :

« La scolarité obligatoire doit au moins garantir à chaque élève les moyens nécessaires à l'acquisition d'un socle commun constitué d'un ensemble de connaissances et de compétences qu'il est indispensable de maîtriser pour accomplir avec succès sa scolarité,

³¹ A ce sujet, le calcul du « périmètre » du cercle à l'aide d'une formule n'est plus dans le programme de 2002.

poursuivre sa formation, construire son avenir personnel et professionnel et réussir sa vie en société. Ce socle comprend :

- la maîtrise de la langue française ;
- la maîtrise des principaux éléments de mathématiques ;
- une culture humaniste et scientifique permettant le libre exercice de la citoyenneté ;
- la pratique d'au moins une langue vivante étrangère ;
- la maîtrise des techniques usuelles de l'information et de la communication.

Ces connaissances et compétences sont précisées par décret pris après avis du Haut Conseil de l'éducation. L'acquisition du socle commun par les élèves fait l'objet d'une évaluation, qui est prise en compte dans la poursuite de la scolarité. Le gouvernement présente tous les trois ans au Parlement un rapport sur la manière dont les programmes prennent en compte le socle commun et sur la maîtrise de celui-ci par les élèves au cours de leur scolarité obligatoire. Parallèlement à l'acquisition du socle commun, d'autres enseignements sont dispensés au cours de la scolarité obligatoire. »

Un décret du 11 juillet 2006 – donc plus d'un an plus tard – précise ce qui n'est encore affirmé que comme un principe dans la loi, propose une définition de la notion de compétence et organise le socle commun en sept grandes compétences : « Chaque grande compétence du socle est conçue comme une combinaison de connaissances fondamentales pour notre temps, de capacités à les mettre en œuvre dans des situations variées, mais aussi d'attitudes indispensables tout au long de la vie, comme l'ouverture aux autres, le goût pour la recherche de la vérité, le respect de soi et d'autrui, la curiosité et la créativité. » Les sept compétences retenues sont les suivantes : la maîtrise de la langue française, la pratique d'une langue vivante étrangère, les compétences de base en mathématiques et la culture scientifique et technologique, la maîtrise des techniques usuelles de l'information et de la communication, la culture humaniste, auxquelles s'ajoutent les compétences sociales et civiques et enfin l'autonomie et l'initiative des élèves. On peut noter au passage la redistribution des domaines d'enseignement par rapport à la loi de 2005, puisque les mathématiques se retrouvent associées dans le décret à la culture scientifique et technologique. Toujours selon le décret du

11 juillet 2006, « la définition du socle commun prend largement appui sur la proposition de recommandation du Parlement européen et du Conseil de l'Union européenne en matière de « compétences clés pour l'éducation et l'apprentissage tout au long de la vie ». Elle se réfère enfin aux évaluations internationales, notamment au Programme international pour le suivi des acquis des élèves (PISA), qui propose une mesure comparée des connaissances et des compétences nécessaires tout au long de la vie. » Deux autres points, en dehors de la création de 3 paliers de scolarité³², méritent selon nous d'être soulignés : d'une part, une phrase du décret selon laquelle « l'enseignement obligatoire ne se réduit pas au socle commun » ; d'autre part, l'apparition de la notion de « tâches et des situations complexes » dont la bonne gestion par les élèves caractériserait en quelque sorte la maîtrise du socle commun.

Les programmes de l'école primaire (104 pages au total) sont donc réécrits en 2007 pour être adaptés à cette évolution des objectifs de la scolarité obligatoire³³, à cette « mise en œuvre du socle commun ». Ils se présentent eux-mêmes comme « s'inscrivant dans la tradition qui consistait à expliciter de manière détaillée non seulement les contenus d'enseignement arrêtés, mais aussi les méthodes et l'organisation des activités susceptibles de les appliquer de manière efficace et cohérente » (B. O. du 12 avril 2007). Pour le cycle 3, en mathématiques, l'introduction est cependant très réduite par rapport au programme de 2002 : l'importance du calcul mental y est toujours affirmée – « le calcul mental doit faire l'objet d'une pratique quotidienne d'au moins 15 minutes » – tout comme l'association entre la construction du sens des opérations, la compréhension des propriétés des nombres et des opérations et l'acquisition des techniques opératoires. La place accordée à la résolution de problèmes est toujours « au centre des activités mathématiques ». Les six domaines du programme de 2002 sont conservés. La présentation de chaque domaine commence par un texte court, condensé des programmes de 2002, qui fixe les priorités pour le domaine concerné. Par exemple, pour les nombres décimaux, « les élèves doivent comprendre que la

³² Fin de CE1, fin de CM2 et fin de 3^e

³³ C'était aussi l'occasion pour le ministère de modifier les programmes 2002 qui n'avaient peut-être pas trouvé leur légitimité auprès des enseignants.

valeur d'un chiffre » dépend de sa position dans leur écriture décimale. Pour le calcul mental, les compétences en mémorisation des résultats et calcul réfléchi exact ou approché sont à développer en priorité. Pour cela, une bonne connaissance des tables est indispensable. » Les contenus à enseigner ne sont pas modifiés, mais le programme s'adapte à la fois aux nouvelles composantes de la notion de compétence telle qu'elle est définie par l'institution, et aux restrictions qui peuvent ne concerner que la maîtrise du socle commun. Ainsi, le programme adopte une présentation en deux colonnes – connaissances et capacités, avec dans les deux cas des verbes à l'infinitif, ce choix pouvant signifier de la part des auteurs une volonté de lier les « contenus et savoir-faire » dans une même dynamique d'apprentissage, mais pouvant également susciter des ambiguïtés. Par exemple, « connaître et savoir utiliser dans des situations concrètes (contenance, masse, longueur, monnaie, durée) les écritures fractionnaires et décimales de certains nombres » comme 0,25 et $\frac{1}{4}$ apparaît comme une connaissance relevant du socle commun en fin d'école primaire (donc le palier 2), mais « connaître et savoir utiliser dans des situations concrètes ou non les écritures fractionnaires et décimales de ces mêmes nombre » est en italique. On voit sur cet exemple d'une part la distinction ténue qui peut exister entre connaissance et capacité, et d'autre part la finesse de lecture et de mise en œuvre auprès des élèves qui est demandée aux enseignants³⁴. Par ailleurs, le programme comporte des mentions en italiques qui indiquent des connaissances ou des capacités dont la maîtrise n'est pas retenue pour le palier 2, mais qui constituent toutefois des objectifs du programme pour tous les élèves.

Concernant la proportionnalité, on revient à une formulation beaucoup plus elliptique celle des programmes de 2002 : « résoudre, dans des cas simples, des problèmes relevant de la proportionnalité (pourcentages, échelles, conversions...), en utilisant les propriétés de linéarité, ou par l'application d'un coefficient donné dans l'énoncé ou calculé ». Notons enfin qu'en 2007, un texte spécifique sur l'enseignement du calcul fut adressé aux rectrices et

³⁴ On peut y lire, même si ce n'est pas notre propos ici, un exemple symbolique de l'orientation de la nature des apprentissages des élèves, telle qu'elle peut être interprétée au travers du socle.

recteurs d'académie, aux inspectrices et inspecteurs d'académie, directrices et directeurs des services départementaux de l'éducation nationale, aux directrices et directeurs d'IUFM. Ce texte, précédant la publication du nouveau programme, marque l'importance accordée au calcul, et sera repris dans le programme.

7. Le programme de 2008

Viennent enfin les programmes 2008 que nous présentons ici rapidement, parce que notre étude a débuté en 2010, et donc que les résultats des évaluations dont nous disposions alors relevaient pour l'essentiel d'une période antérieure à la mise en œuvre de ces programmes. Mais dans la mesure où les élèves qui sont arrivés en sixième en 2010, puis en 2011 ont vécu *a priori* l'application de ces programmes durant leurs deux ou trois dernières années d'école, ces programmes méritent toutefois notre attention, et nous y reviendrons en détail dans le chapitre 3 consacré au calcul mental. Ces programmes ont suscité de vifs débats dès leur sortie³⁵, et même avant leur sortie, notamment sur la chronologie des apprentissages visés, et ont été accompagnés par la mise en place d'évaluations nationales exhaustives en fin de CE1 et en cours de CM2 – puis en fin de CM2, qui, elles aussi, ont reçu un accueil pour le moins mitigé de la part des enseignants. Nous nous en tenons ici à la méthode de lecture que nous avons adoptée jusqu'ici, en essayant de rester le plus objectif possible, c'est-à-dire près des textes.

Très courts (39 pages), les programmes 2008 sont d'abord justifiés par le ministère par une baisse des performances des élèves, en français et en mathématiques³⁶. Ils affirment une volonté de clarté, et l'ambition de faire acquérir aux élèves « les connaissances et compétences fondamentales » qui seront nécessaires à la poursuite de leur scolarité en leur proposant « un enseignement structuré et explicite, orienté vers l'acquisition des savoirs de

³⁵ On ignore en particulier les conditions précises de son élaboration.

³⁶ La note d'information de la DEPP « Lire, écrire, compter : les performances des élèves à 20 ans d'intervalle 1987-2007 » datée de décembre 2008, est parue en janvier 2009.

base ». Conformément à cette volonté de structuration, des programmations annuelles, appelées injustement des progressions, sont proposées, et donc non plus seulement par cycle. Du côté des contenus au cycle 3 sur les nombres et en calcul (2 pages), ces programmes ne marquent en réalité pas de changements marquants, hormis le retour de la multiplication des décimaux et de la division avec quotient décimal (y compris avec dividende décimal) relevant depuis 1995 de la sixième³⁷. L'estimation de l'ordre de grandeur d'un résultat est toujours présente, sans davantage de précision. Enfin, le paragraphe sur la proportionnalité accorde toujours une mention particulière aux pourcentages, aux échelles et aux conversions, et y ajoute les vitesses moyennes ; la référence à la linéarité ou au coefficient disparaît, au profit de « procédures variées³⁸ (dont la règle de trois) ». Deux documents complémentaires, « Le nombre au cycle 2 » et « Le nombre au cycle 3 » sont parus respectivement en juillet 2010 et septembre 2012. C'est dans le premier qu'est exprimée clairement par Fayol (p.6) « la question de l'accès à la complexité et de la relation entre la résolution des problèmes mathématiques et l'acquisition d'automatismes » que posent ces programmes.

8. Premiers constats, premières analyses

Ce qui frappe d'abord, c'est le nombre de programmes parus en 30 ans, en moyenne un tous les cinq ans, autrement dit un par cycle normal³⁹ de scolarité élémentaire d'un élève. Le rapport de l'IGEN de 2006 lui-même le fait remarquer, mais à une seule occasion : « Les programmes de 1980 sont à peine installés qu'un nouveau programme paraît en 1985 ». Briand⁴⁰ (2006) le souligne en le regrettant : « Il serait apaisant que les décideurs cessent de changer les programmes trop souvent ; cela a un effet pervers ; les enseignants ne "suivent plus". La parole officielle est, de fait, discréditée. Les professeurs ne peuvent se repérer qu'à

³⁷ Il faut ajouter le retour de la formule de la longueur du cercle, et des ajouts comme l'aire d'un triangle (et la construction d'une hauteur).

³⁸ La « règle de trois » est entre guillemets dans le programme.

³⁹ C'est-à-dire sans redoublement.

⁴⁰ Dans un article paru sur le café pédagogique

l'aide des manuels et non plus en s'appuyant sur des programmes devenus éphémères. » La réaction de la COPIRELEM⁴¹ au projet de programme 2008 est quant à elle catégorique : « Le changement incessant des programmes ne peut qu'avoir un effet démobilisateur sur les enseignants. Même chevronnés, ceux-ci ne peuvent améliorer leurs pratiques qu'à partir de bases stables. Les apprentissages des élèves en pâtiront nécessairement. Ces renouvellements contribuent à délégitimer les programmes dans leur statut de référence officielle. »

Nous partageons ce point de vue, en tant que chercheur, mais aussi comme l'enseignant et le formateur que nous avons été⁴², et nous y voyons plusieurs questions de natures différentes. La première est du côté des enseignants, et porte sur leur connaissance des programmes et des instructions officielles en général. Que les changements effectués soient « didactiquement légitimes ou non », ils ne prennent pas en compte la durée nécessaire à un(e) enseignant(e) pour s'imprégner d'un programme, et le mettre en œuvre dans sa classe : c'est presque au moment où on peut penser qu'il (elle) le maîtrise qu'on lui demande d'en changer, et un nouveau programme induit un nouveau manuel, de nouvelles préparations pour l'enseignant, etc. On peut comprendre, que, dans certaines écoles, – y compris pour des raisons budgétaires – l'attente d'un futur changement de programme se substitue aux changements institutionnels souhaités.

Une deuxième question concerne la formation continue – et initiale – des enseignants : des changements de programme fréquents ne favorise ni le travail des inspecteurs et des conseillers pédagogiques, ni celui des formateurs qui doivent régulièrement expliquer que ce qui était considéré comme « bon pour les élèves » ne l'est plus. Certains changements sont évidemment légitimes et faciles à justifier, comme par exemple la prise en compte de la

⁴¹ La COPIRELEM est la Commission Permanente des IRem pour l'Enseignement ELEmentaire, les IREM étant eux-mêmes des Instituts de Recherche en Enseignement des Mathématiques

⁴² Nous n'évoquons pas ici la façon dont les programmes successifs sont entrés en vigueur selon le niveau de scolarité : par année successive comme les programmes 2002 ou pour tous les niveaux en même temps, comme les programmes 2008.

calculatrice, ou de tout instrument de calcul électronique dont peuvent désormais disposer élèves et adultes ; d'autres changements le sont nettement moins.

Une troisième question qu'on peut poser est de l'ordre de la politique publique éducative : comment peut-on imaginer mener à long terme une politique éducative efficace en changeant des programmes scolaires tous les cinq ans ? Et comment mener une politique d'évaluation de l'application des programmes avec des changements aussi fréquents ?

L'autre constatation marquante, paradoxale par rapport à l'aspect quantitatif évoqué ci-dessus, c'est la grande continuité, en tout cas apparente, des contenus rédigés et des grands axes des programmes successifs. En effet, si on considère qu'*a priori* un nouveau programme correspond à de nouveaux objectifs ministériels, les changements apportés devraient apparaître de façon claire et justifiée. Or, il nous semble très difficile pour un enseignant de percevoir ces changements, ne serait-ce que, comme nous l'avons fait remarquer, parce que les programmes successifs sont écrits dans des formes différentes, avec des degrés de précision différents. On a noté par exemple, que, dans le programme de 1980, une grande importance était accordée au calcul mental, y compris pour la résolution de problèmes. Dans quelle mesure depuis 1980 les réécritures successives des programmes ont – elles été perçues par les enseignants comme apportant des changements de fond, en dehors de la suppression ou de l'ajout de quelques connaissances ? Dans quelle mesure ces réécritures ont-elles influencé leurs pratiques ? On peut supposer que des actions de formation continue, des animations pédagogiques ont été menées pour expliciter les évolutions, pointer les nouveaux objectifs, mais quels effets cet accompagnement a-t-il eu sur les pratiques des enseignants ? Par exemple, dans quelle mesure la réintroduction des grandeurs comme domaine dans les programmes a-t-elle influencé ces pratiques, à l'école primaire et au collège, dans la résolution de problèmes ? Dans quelle mesure l'équilibre entre calcul mental/calcul posé/calcul instrumenté s'est-il modifié au fil des ans ? Dans quelle mesure des modifications sont-elles apparues dans les tâches choisies par les enseignants ? Dans les phases et les contenus d'institutionnalisation ? Autant de questions inspirées par la recherche auxquelles nous ne tenterons pas de donner des réponses rétroactives (sur ce qui s'est effectivement passé à l'école primaire) en tant que chercheur, mais que nous gardons à l'esprit en tant que formateur et chercheur pour concevoir et mettre en œuvre une « nouvelle » formation.

La disparition de l'influence de la réforme des mathématiques modernes s'est faite de façon brutale en 1980 (certains parlent de « contre-réforme »), mais elle a laissé un certain nombre de traces subtiles – visibles comme par exemple la place de la proportionnalité dans le domaine « Organisation et gestion de données », ou « en creux » comme la disparition des notions de relation d'équivalence, de base de numération ou encore des propriétés des opérations vues comme des lois internes – qui risquent fort probablement d'échapper à des enseignants du premier degré⁴³ qui ne sont pas en général des experts⁴⁴ de l'enseignement des mathématiques. On peut ainsi relever ce que nous interprétons comme des compromis entre des mathématiques savantes et une volonté d'être compris, qui peuvent ajouter de la confusion : sur l'écriture des décimaux, sur la séparation « textuelle » des fractions et des décimaux, sur l'évolution de l'introduction des décimaux, sur la multiplication, sur la proportionnalité, ou encore sur les opérations sur les grandeurs. Les mots employés changent parfois aussi de signification (exemple des compétences), des termes apparaissent sans être définis (la valeur d'un chiffre), une expression laisse la place à une autre (des situations-problèmes à la résolution de problèmes) : les programmes comportent en réalité beaucoup d'implicites qui laissent des plages entières d'incertitudes et qui conduisent finalement les enseignants à chercher des réponses dans les manuels, et à accorder à ces derniers, comme l'exprime Briand, un rôle majeur, voire institutionnel. Mais la question va même au-delà, puisque les manuels eux-mêmes sont rédigés par des auteurs qui ont de grandes marges d'interprétation des programmes, qui doivent aussi s'adapter à des contraintes temporelles et éditoriales, et qui doivent souvent chercher à se démarquer d'une éventuelle version précédente correspondant à un « ancien » programme, ou des autres manuels.

⁴³ Et une partie de ceux du second degré.

⁴⁴ Ce terme est utilisé sans intention de jugement ; il correspond à une réalité statistique du profil des enseignants dans le 1^{er} degré.

Cet aspect est renforcé par une quasi absence d'explications « didactiques⁴⁵ » (sauf en 2002) et d'appuis détaillés sur des exemples de tâches, soit attendues des élèves, soit proposées aux enseignants pour favoriser les apprentissages des élèves. On sait par exemple depuis longtemps maintenant « qu'un nombre n'en vaut pas un autre », ni selon la manière dont il est désigné, que ce soit dans un calcul, posé ou mental, ni dans la résolution d'un problème. L'importance de la taille des nombres et de leurs représentations comme variables didactiques a largement été montrée dans la recherche en didactique des mathématiques depuis Brousseau (1981), et il nous semble étonnant que cet aspect n'apparaisse pas de façon flagrante dans les programmes autrement par « gros paquets » de types de nombres. On peut aussi regretter que les résultats des travaux de Vergnaud (1981) sur les structures additives, avec des différences identifiées de difficultés pour les élèves dans différents types de tâches ne soient pas davantage transposés dans les programmes ou dans des documents complémentaires⁴⁶. Quant à l'apprentissage des techniques opératoires, nous partageons un questionnement sur la place des techniques opératoires, qui mérite sans doute en effet plus d'explicitation que celle qu'on lui accorde actuellement. Sans remettre en question leur enseignement, c'est plutôt l'importance qui leur est donnée dans les programmes qui peut paraître disproportionnée par rapport à l'enjeu que représente aujourd'hui leur maîtrise.

Enfin, les formateurs constatent souvent que les modes d'écriture des programmes en favorisent, pour les enseignants une lecture à la fois linéaire et fragmentée, et non une lecture « conceptuelle », c'est-à-dire une lecture qui leur en donne une vision globale en trois, voire quatre, dimensions – domaine visé / durée d'apprentissage / degré d'approfondissement ou niveau de conceptualisation d'un concept donné / compétence ou habileté cognitive travaillée – et conduit à une organisation de l'enseignement morcelée que relevait déjà Vergnaud en 1986 :

⁴⁵ Nous entendons par explications « didactiques » des explications issues de la didactique des mathématiques, transposées et qui éclaireraient les enseignants sur des grandes orientations des programmes, ou sur telle ou telle prescription.

⁴⁶ Les derniers documents parus, « Le nombre au cycle 3 » et surtout « Le nombre au cycle 2 », prennent en compte explicitement ces travaux.

« La lenteur du développement des connaissances est dangereusement mésestimée par les enseignants, les parents et les programmes. Par exemple, on considère trop souvent qu'un chapitre de mathématiques qui a été étudié doit être compris, au moins par une proportion importante des élèves, et qu'on peut le considérer comme acquis l'année suivante. Toutes les recherches empiriques montrent au contraire qu'il serait beaucoup plus sage de revenir sur les mêmes choses année par année, en allant un peu plus en profondeur à chaque fois et en introduisant des situations de plus en plus complexes, contenant de nouveaux aspects, plus puissants, d'un même concept ou d'un même ensemble de concepts, éventuellement d'un concept nouveau.⁴⁷ »

Là encore, la question de l'organisation spiralée⁴⁸ des enseignements, implicitement décrite par Vergnaud, ne semble pas avoir été suffisamment étudiée alors qu'une vraie question se pose en termes d'apprentissages.

Sur un tout autre plan, il nous apparaît étonnant que les programmes ne proposent que très rarement des exemples en termes d'évaluation des acquis des élèves, et encore moins de « standards⁴⁹ » (Klieme et al., 2004). On fait comme si l'énonciation d'un objectif, accompagnée au mieux d'une modalité d'évaluation, suffisait à caractériser le fait que la maîtrise d'une connaissance était définie, ou en tout cas comme si les intentions des auteurs étaient toujours interprétables par les enseignants. Quelles indications sont données aux enseignants ? Ne serait-il pas pertinent de proposer aux enseignants des déclinaisons des contenus en termes de tâches, ou des aides à la décision en cas de réussite partielle ? Là encore, l'écriture des programmes ne permet aux enseignants ni de disposer de repères qui les

⁴⁷ La notion de situation complexe est ici à prendre au sens que Vergnaud lui donne dans ses travaux sur les structures additives, et non pas celui donné par les programmes actuels.

⁴⁸ Ou plutôt hélicoïdale si on prend en compte la profondeur évoquée par Vergnaud.

⁴⁹ On trouve notamment quelques « indications pour l'évaluation » dans les grilles de référence des différents paliers du socle, mais pas en termes de tâches.

aident à savoir où en sont les élèves dans le développement de leurs connaissances, ni d'éléments didactiques qui les guident dans leurs choix pour adapter leur enseignement⁵⁰.

B. L'enseignement des nombres et du calcul en sixième

A la différence des programmes de l'école primaire, les programmes de la classe de sixième⁵¹, auxquels nous nous intéressons sont uniquement ceux qui sont les plus susceptibles de participer aux pratiques effectives des enseignants de mathématiques en sixième. Même si on peut supposer qu'au moins en partie, des programmes plus anciens, notamment celui de 1995, aient une influence sur ces pratiques, ce sont donc les trois programmes les plus récents, que nous allons examiner dans leurs liens, ou leur absence de lien, avec ceux de l'école primaire, et la part qu'ils réservent aux nombres et au calcul. Ces 3 programmes sont :

- le programme défini par l'arrêté du 6 juillet 2004 (F. Fillon)
- le programme défini par l'arrêté du 6 avril 2007 (G. de Robien)
- le programme défini par l'arrêté du 9 juin 2008 (X. Darcos)

A la suite des programmes de l'école primaire en 2002, une actualisation des programmes pour le collège est réalisée en 2004, et un nouveau programme entre en vigueur à la rentrée 2005 pour la sixième. Le programme 2007 intègre quant à lui le socle commun de connaissances et de compétences, et le programme 2008, entré en vigueur à la rentrée scolaire 2009 en sixième, est raccourci (6 pages contre 17 pages en 2007) sans doute avec la même volonté que celle exprimée pour les programmes de l'école primaire. Ces programmes sont complétés par des documents thématiques très détaillés (nommés documents d'accompagnement, puis documents ressources) qui ont été publiés au fil des années depuis

⁵⁰ On peut considérer que la création de la « banque d'outils » par la DEPP allait dans ce sens.

⁵¹ Les programmes de l'enseignement secondaire ont souvent été définis par plusieurs arrêtés successifs. Les horaires peuvent avoir été définis dans des arrêtés spécifiques.

2006, et qui portent sur l'ensemble des niveaux du collège⁵². Nous reviendrons sur deux d'entre eux « Le calcul numérique au collège » et « Les nombres au collège » dans le chapitre 3 sur le calcul mental. Viennent enfin des documents relatifs au socle commun.

Les programmes du collège auxquels nous nous attachons, comme celui de 1995 d'ailleurs, se présentent, après une courte partie introductive, sous forme de tableaux comprenant 3 colonnes pour chacun des 4 domaines suivants : Organisation et gestion de données, fonctions – Nombres et calcul – Géométrie – Grandeurs et mesures, ce dernier domaine étant apparu dans le programme de 2004. Les éléments indiqués dans chaque colonne sont globalement restés stables, voire identiques, avec des changements d'en-têtes : contenus, compétences et exemples d'activités, et commentaires en 2004, puis connaissances, capacités et commentaires après l'apparition du socle commun, avec une colonne supplémentaire en 2007 réservée à des commentaires spécifiques sur le socle. Les « exemples d'activités » qui illustrent les commentaires en 2004 et en 2007 disparaissent en 2008. D'autres changements sont en signaler en 2008 : l'introduction générale pour la classe de sixième disparaît presque totalement au profit de bandeaux pour chacun des domaines, qui précisent les objectifs de la résolution de problèmes relativement au domaine en question ; les attitudes, composantes des compétences avec les connaissances et les capacités pour l'institution, disparaissent également.

Si on s'en tient à la partie « Nombres et calcul » du programme de sixième, on relève dans ces trois programmes une grande stabilité à la fois sur les objectifs centrés sur la résolution de problèmes, sur les contenus – consolidation des acquis de l'école élémentaire (décimaux, techniques opératoires), importance donnée à la division et au quotient de deux nombres entiers – et sur la place accordée au calcul, exact ou approché – mental, posé ou instrumenté. Notons cependant quelques évolutions à l'intérieur de ces programmes : la principale est évidemment l'intégration du socle commun dans les programmes de 2007 et de

⁵² Pour être complet, un document pour l'ensemble du secondaire a également été publié : « Le calcul sous toutes ses formes au collège et au lycée » (février 2013)

2008 qui distinguent explicitement les connaissances ou capacités exigibles en fin de sixième de celles qui le seront dans une classe ultérieure dans la perspective du palier 3 (fin de collège) et de celles qui n'y figurent pas. Les distinctions qui sont faites ne sont d'ailleurs pas toujours cohérentes avec les exigences requises pour la maîtrise du palier 2 (fin d'école primaire) ou plus restrictives que ces dernières : par exemple, « donner une valeur approchée à l'unité près, au dixième ou au centième près » fait partie du palier 2, alors que le programme de sixième l'estime comme non exigible pour le socle en fin de sixième ; pour la division posée, la taille des nombres est limitée en sixième, tout comme le travail sur l'ordre de grandeur d'un résultat, ce qui n'est pas le cas à l'école primaire. Des différences plus flagrantes apparaissent sur la proportionnalité (qui rappelons-le ne figure pas dans le domaine « Nombres et calcul) : la résolution de problèmes sur les pourcentages, les échelles et les vitesses moyennes est étalée sur les 4 années du collège bien qu'elle relève, dans une formulation générale et donc propice à une grande variabilité d'interprétation, du palier 2 du socle. Nous considérons d'ailleurs ce point comme l'un des plus importants à régler dans le travail à effectuer sur la continuité des programmes école/collège, à la fois en termes de progressivité des apprentissages des élèves, et de clarification pour les enseignants du 1^{er} et du 2nd degré sur les degrés de conceptualisation et le temps à y consacrer avec les élèves.

Une autre évolution est celle initiée par le programme de sixième 2004, rédigé dans la même dynamique que celle des programmes 2002 de l'école primaire. Ce programme apparaît en effet comme une version cohérente et épurée du programme de 1995, que les programmes suivants respecteront, en y ajoutant une dimension de progressivité des apprentissages que nous avons mentionnée ci-dessus : report de la division par 0,1 ; 0,01 ; 0,001 en 5^e, tout comme les quotients de nombres décimaux, les nombres relatifs et l'initiation à la résolution d'équations. On peut d'ailleurs questionner ici l'influence des évaluations nationales à l'entrée en sixième.

Reprenons maintenant les quatre axes de lecture que nous avons choisis pour l'école primaire en adoptant le point de vue d'un professeur de mathématiques de sixième :

- sur les décimaux : à la suite des programmes du primaire, connaître et utiliser « la valeur d'un chiffre en fonction de son rang » dans l'écriture décimale d'un nombre décimal apparaît dans les programmes depuis 2004. Il s'agit là d'un « signal

didactique⁵³ » qui nous semble fort et sur lequel nous reviendrons. Le programme précise à ce sujet qu'il ne s'agit pas de « refaire tout le travail réalisé à l'école élémentaire ». L'importance à accorder à l'association de diverses désignations d'un nombre décimal et à l'utilisation appropriée de l'une d'entre elles selon la situation est affirmée, tout comme celle accordée au placement d'un nombre sur une demi-droite graduée⁵⁴. Le travail sur les décimaux est complété par un travail sur le quotient, que nous considérons comme central en sixième, d'une part parce qu'il préfigure en quelque sorte le long travail sur les nombres qui va être effectué tout au long du collège en termes de conceptualisation, et d'autre part parce qu'il est selon nous symbolique de ce qui différencie l'école primaire et le collège.

- en calcul : les 4 opérations figurent dans les programmes, dans une continuité avec le programme du cycle 3 de 2008 (la multiplication des décimaux, nouveauté du programme de sixième de 1995, disparaît comme telle en 2008). Des repères sont donnés (« la capacité à calculer mentalement est une priorité et fait l'objet d'activités régulières », « aucune virtuosité technique n'est recherchée » en calcul posé), mais la question principale nous semble porter sur des objectifs plus précis, la nature et la répartition du travail à effectuer avec les élèves en calcul mental, en calcul posé et à la calculatrice.
- le travail sur l'ordre de grandeur d'un nombre et du résultat d'une opération figure dans les objectifs principaux, en étant associé au calcul mental.
- depuis 2004, la partie réservée à la proportionnalité est détaillée en faisant apparaître différents raisonnements qui permettent de reconnaître et de traiter des situations, qui se situent dans le cadre des grandeurs, ce qui exclut *a priori* un travail sur des tableaux de nombres sans lien avec un contexte. Là aussi, nous observons qu'il y a de grandes marges de manœuvre pour les professeurs sur l'organisation annuelle de leur enseignement, sur un thème, qui comme – et en relation avec – le passage au quotient,

⁵³ C'est nous qui mettons cette expression entre guillemets.

⁵⁴ On ne parle que de droite graduée en primaire.

est symbolique d'un travail progressif de conceptualisation à effectuer tout au long du collège, sans pour autant perdre de vue des applications concrètes. Ce propos s'applique en particulier à la notion de pourcentage.

C. Premières esquisses d'une vision globale : vers un « nouveau relief »

Au terme de cette première partie de notre travail, il nous semble que des grandes lignes se dessinent nettement comme caractéristiques de l'enseignement des nombres et du calcul tel qu'il apparaît, ou qu'il est apparu récemment, dans les programmes du cycle 3 de l'école primaire et de sixième. Comme nous l'avons évoqué plus haut, nous ne sommes évidemment pas le premier à mener ce type de travail, au moins localement. Nous reprenons donc à notre compte un certain nombre d'idées, sans viser l'exhaustivité, à partir de constats effectués ou de résultats mis en évidence auparavant par d'autres que nous, et nous complétons ces formulations par des prises de position que nous considérons comme personnelles.

Le premier aspect, global, concerne l'enseignement du calcul au début du 21^e siècle, et nous trouvons chez Charnay⁵⁵ (2002) des éléments de synthèse que nous partageons : une place centrale à donner au calcul mental, des précisions sur les objectifs du calcul posé et ce qu'il est raisonnable d'attendre des élèves concernant les techniques opératoires, des explications ou des explicitations par ce qu'on entend par « résolution de problèmes », avec un principe permanent en arrière-plan affirmant que « le chemin le plus efficace pour accéder à un concept n'est pas nécessairement le plus court ». Il y a selon nous dans le texte de Charnay un principe fort, qui fonde l'enseignement des mathématiques au cours de la scolarité obligatoire, et qui fait écho à Vergnaud ou encore à Ma, citée par Chambris dans sa thèse (2008) : « Dans la perspective d'atteindre une compétence mathématique, enseigner les mathématiques élémentaires ne signifie pas juste amener les élèves à la fin de l'arithmétique

⁵⁵ Rappelons que Charnay fut l'un des responsables de l'équipe ERMEL (ex-INRP) et l'un des rédacteurs des programmes de 2002 pour l'école primaire.

ou au début de la « pré-algèbre ». Cela signifie plutôt leur fournir les fondations sur lesquelles ils pourront bâtir pour leurs apprentissages mathématiques futurs. » Selon nous, cela ne signifie pas pour autant que l'apprentissage d'automatismes est oublié ou que le rôle de la mémorisation est négligé⁵⁶, mais qu'il s'agit bien de trouver un équilibre entre ce qui peut constituer des « fondamentaux », ce qui peut favoriser le raisonnement dans différents contextes mathématiques et dans quelle mesure ces deux aspects, comme les deux faces d'une même pièce de monnaie⁵⁷, peuvent contribuer à l'acquisition de connaissances disponibles pour les élèves à la fois comme outils et comme objets (Douady 1984, 1992). Ceci vaut pour nous aussi bien pour l'apprentissage des nombres que pour celui du calcul, versant techniques opératoires ou sens des opérations, que nous voyons comme beaucoup plus liés que les programmes ne le font apparaître : autrement dit, une des questions d'ordre épistémologique et didactique qui émergent de notre étude des programmes est l'articulation entre nombres et calcul, et le rôle que chacun peut jouer dans l'apprentissage de l'autre. Deux autres aspects retiennent notre attention : celui des conversions de registres de représentation sémiotique⁵⁸ (Duval, 1993, 1995 ; Rauscher, 2002), et celui des structures multiplicatives (Vergnaud, 1981), avec le cas particulier de la proportionnalité.

Enfin, dans un autre ordre d'idée, et de façon non indépendante, il nous paraît évident qu'une attention spécifique mérite d'être accordée à l'utilisation des calculatrices et des ordinateurs, au développement de tous les outils « numériques⁵⁹ » en général, et que, dans l'accompagnement des élèves à ce développement, nous donnons une place particulière en mathématiques, comme cela figure d'ailleurs, nous l'avons vu plus haut, depuis longtemps

⁵⁶ N'oublions pas que Liping Ma est chinoise, et que la place de la mémorisation dans l'apprentissage en Chine est très importante.

⁵⁷ Nous empruntons cette image à Vergnaud à propos des conceptions et des compétences.

⁵⁸ Pour Duval, un registre est « un système sémiotique producteur d'un type de représentations, et dont la production peut répondre à des fonctions cognitives différentes. » A la suite du travail de Douady (1986) sur les changements de cadres, Duval montre que les changements de registres favorisent les processus de conceptualisation.

⁵⁹ « Numérique » renvoie ici à une extension des technologies de l'information et de la communication (TIC).

dans les programmes scolaires, à la capacité d'anticiper et de contrôler un résultat par l'estimation d'un ordre de grandeur.

II. Les évaluations nationales sur les acquis des élèves

Le débat sur le niveau des élèves est un débat qui se pose régulièrement en France (Baudelot & Establet 1985, 2009), et qui touche, à des degrés divers et pour des raisons différentes, un large public : professionnels de l'enseignement et de la formation, politiques, parents, chercheurs... Depuis les années 1970 qui marquent la volonté institutionnelle de faire accéder tous les élèves au collège, la question revient régulièrement selon différents points de vue : accessibilité à l'emploi, résultats à des examens (diplôme national du brevet ou baccalauréat par exemple), accès à l'enseignement supérieur, taux de redoublement, niveau en orthographe... En ce qui concerne les mathématiques, « on lit ou on entend de temps à autre que les élèves ne savent plus compter, qu'ils n'apprennent plus les tables de multiplication et bien sûr qu'ils ne savent plus faire une règle de trois » (IGEN, 2006). Comme nous l'avons vu dans la partie précédente, plusieurs programmes scolaires se sont succédé depuis l'arrêté du 2 janvier 1970 qui marque l'avènement « des mathématiques modernes » et l'établissement d'un programme en rupture totale avec les instructions officielles précédentes. Plusieurs générations de professeurs (s'appuyant sur des éditions successives de manuels scolaires) ont ainsi formé plusieurs générations d'élèves qui sont presque tous allés à l'école obligatoire jusqu'à 16 ans. Certains de ces élèves sont eux-mêmes devenus des enseignants, chargés d'appliquer aujourd'hui, comme leurs aînés, des programmes, sur des contenus qu'ils n'ont de ce fait pas forcément fréquentés en tant qu'élèves ni en tant qu'étudiants.

Pour éclairer ce débat et apporter des éléments qui peuvent constituer des repères, nous allons faire le point sur ce que les évaluations nationales nous révèlent en France sur les acquis des élèves, dans le domaine de la connaissance des nombres et du calcul à la fin de l'école primaire. La partie qui suit est consacrée à la présentation de ces différentes évaluations qui ont formé notre corpus d'étude, leur méthodologie, leurs contenus, leurs apports et leurs éventuels manques relevés *a priori*.

C'est à partir de 1979, en accompagnement de la réforme des programmes de l'école élémentaire que les premières évaluations nationales ont eu lieu (Levasseur, 1996). Les principales d'entre elles ont été menées par la direction du ministère de l'éducation nationale

qui s'appelle aujourd'hui la direction de l'évaluation, de la prospective et la performance⁶⁰ (DEPP) et sont de plusieurs natures⁶¹ :

- diagnostiques, comme les évaluations menées de 1989 à 2008 à l'entrée en CE2 et l'entrée en sixième⁶² ;
- conçues pour fournir des indicateurs dans le cadre de la LOLF⁶³ (depuis 2007) ;
- bilans en fin d'école et en fin de collège comme le programme CEDRE (Cycle des évaluations disciplinaires réalisées sur échantillons) mené pour la première fois en 2008 pour les mathématiques ;
- à objectif de comparaison temporelle comme l'étude menée en 1999 ou celle de 2007 ;
- à objectif de comparaison longitudinale à partir de panels d'élèves.

Toutes ces évaluations ont fait ou font l'objet d'un traitement statistique basé sur les résultats d'un échantillon représentatif variant entre 3 000 et 8 000 élèves par niveau de scolarité (excepté le suivi du panel 2007 qui porte sur 35 000 élèves). La prise en compte de ces résultats doit se faire avec des précautions importantes liées à la nature des évaluations. En particulier, la mise en regard de résultats issus d'évaluations différentes ne permet pas de comparaison directe, mais favorise la constitution de faisceaux d'informations relativement à une connaissance donnée.

Les évaluations menées en CE1 et en CM2 par la direction générale de l'enseignement scolaire (DGESCO) entre 2009 et 2011, voire 2012, complètent cet inventaire.

⁶⁰ La DEPP est aussi maître d'œuvre pour l'évaluation internationale PISA.

⁶¹ Ou en tout cas considérées comme telles à leur conception.

⁶² Les dernières évaluations nationales à l'entrée en sixième sont disponibles sur : <http://educ-eval.education.fr/>

⁶³ La loi organique relative aux lois de finances (LOLF), promulguée en 2001, a pour objectif d'assurer vis-à-vis du Parlement une transparence budgétaire dans une logique de performances.

A. Les évaluations à l'entrée en sixième

Ces évaluations, mises en place pour la première fois en septembre 1989 et pour la dernière en septembre 2008⁶⁴, étaient destinées « à aider les enseignants à mieux identifier les lacunes de leurs élèves dans les apprentissages de base : lecture, écriture, mathématiques »

« Ainsi, et depuis l'origine, les protocoles d'évaluation préparés chaque année pour les trois niveaux – CE2, sixième et seconde – ne sont pas conçus, du point de vue méthodologique, de façon telle que des comparaisons d'une année sur l'autre, ou encore d'un niveau à l'autre, puissent apparaître pertinentes et méthodologiquement fondées. En effet, ces protocoles n'ont pas pour objet de procéder à un bilan exhaustif des acquisitions en français et en mathématiques ; ils sont conçus principalement pour offrir aux enseignants, dans leur classe, des points de repère sur les acquis et les lacunes éventuelles de leurs élèves. De par leur construction, ces protocoles ne constituent donc pas des prototypes traduisant la continuité pédagogique, mais pointent des éléments importants des savoirs et savoir-faire des élèves. » (DEPP, Note d'information 1999)

C'est en cela qu'elles étaient avant tout définies comme diagnostiques. « Les épreuves ne couvrent pas l'ensemble des compétences acquises ou en cours d'acquisition (par exemple, elles ne disent rien des tracés à main levée). Elles évaluent ce qui peut relever d'une passation collective. Pour la rentrée 2005, le groupe de concepteurs a choisi de mettre l'accent sur certaines de ces compétences qui sont attendues en fin de cycle 3 et dont l'importance est réaffirmée dans le nouveau programme de sixième. Elles pourront être explicitées dans le cadre de la liaison école - collège » (DEPP, Document à l'attention de l'enseignant 2005).

⁶⁴ Leur ont succédé les évaluations de fin CM2 menées par la DGESCO.

Les épreuves

Les épreuves étaient composées de deux à quatre séquences de travail de 30 minutes à 40 minutes chacune. Le rythme des réponses aux items était soit libre (à l'intérieur d'une séquence), soit imposé par l'enseignant (en conformité aux consignes données). Une centaine d'items était répartie à la fois selon les grands domaines du programme et selon ce qui était appelé alors des « compétences », ces deux paramètres étant variables selon les années. Les items étaient proposés aux élèves sous une forme habituelle de celle de la classe, c'est-à-dire avec un énoncé donné, et une réponse à produire par les élèves (calcul, tracé,...). Les tests à partir de 1998 sont disponibles en ligne⁶⁵.

Les procédures

Des consignes de passation étaient données aux enseignants chargés de faire passer les évaluations dans leurs classes respectives. Tous les élèves avaient les mêmes cahiers, identifiés. Ces cahiers étaient corrigés par les enseignants eux-mêmes et restaient à leur disposition tout au long de l'année.

Commentaires

Dès la première de ces évaluations, de nécessaires précautions ont été prises par les différents responsables de la conception, de la passation et du traitement des résultats quant à l'usage et l'exploitation qui pouvaient en être faits. Sans revenir sur les différents contenus de ces évaluations, dépendant des choix effectués en fonction des priorités ministérielles et des objectifs qui en découlent, nous devons, en résumé, rappeler qu'à propos des résultats, toute volonté d'exhaustivité serait abusive, toute tentative de comparaison temporelle normative serait illégitime. La marge d'incertitude due à la correction est également à prendre en compte malgré la précision des consignes données. Cependant, compte tenu du nombre d'années

⁶⁵ <http://educ-eval.pleiade.education.fr/>

pendant lesquelles ces évaluations ont eu lieu et de la présence récurrente de certains types d'items proposés aux élèves, notamment en calcul, la référence aux taux de réussite à certains items et aux analyses déjà menées sur ces items ou leurs résultats se justifie dans la perspective de recherche d'information sur les acquis des élèves relativement à certains types de tâches. La remarquable stabilité des taux de réussite aux items proposés aux élèves entre 2005 et 2008 sur les mêmes protocoles permet en outre de dépasser, dans le domaine de la connaissance des nombres et du calcul qui fut alors privilégié, de simples constats portant sur des items isolés.

B. Avant et après les vacances, évolution des acquis des élèves

En 1999, la DEPP cherche à contribuer au débat sur la fiabilité des outils qu'elle met à la disposition des enseignants, à savoir les évaluations d'entrée en CE2 et en sixième. En particulier, le fait que ces évaluations soient placées en début de cycles est questionné par un certain nombre de voix qui estiment que les résultats seraient meilleurs si les tests étaient effectués en fin d'année scolaire (fin de CE1 et fin de CM2). Pour nourrir la réflexion sur cette question, la DEPP monte un dispositif permettant de comparer les résultats des élèves en fin de CE1 et en début de CE2, et en fin de CM2 et en début de sixième, en faisant passer les mêmes tests non pas aux mêmes élèves, mais à quatre échantillons représentatifs d'environ 3 000 élèves (avec une stratification correspondant aux secteurs public hors ZEP, ZEP et privé). Les élèves appelés à redoubler en CE1 ou en CM2, et ceux qui redoublaient en CE2 ou en sixième ont été exclus du champ de l'enquête.

Par ailleurs, dans le même temps, un questionnaire est adressé aux enseignants de CE1 et de CM2, dans lequel il leur est demandé de hiérarchiser les items selon qu'ils leur paraissent plus ou moins « nécessaires à un élève pour poursuivre sa scolarité dans le cycle suivant ». Pour le CM2, il est intéressant de noter que « les items évaluant les mécanismes opératoires de l'addition et de la soustraction arrivent en premier dans le classement des enseignants » alors que « les items se rapportant au calcul mental arrivent au dernier rang » (Dossier 158 de la DEPP, 2004).

Les épreuves

La comparaison entre « avant et après les vacances » s'est faite à partir des tests de français et de mathématiques utilisés pour les évaluations nationales de septembre 1998. Il aurait pu sembler judicieux d'utiliser ceux prévus pour septembre 1999, mais le fait que certains élèves de 6^e auraient alors déjà passé ces évaluations en fin de CM2 a fait adopter une autre solution.

Les procédures

Nous n'avons pas d'éléments d'information particuliers sur la correction des tests, nous ne savons donc pas si le protocole choisi a été le même que celui des évaluations nationales menées alors, c'est-à-dire que la correction a été effectuée par les enseignants eux-mêmes, ce qui peut alors être questionné : en dépit de consignes précises de correction, un enseignant qui connaît « ses » élèves corrige-t-il comme un enseignant qui les découvre ? Un enseignant du 1^{er} degré corrige-t-il comme un enseignant du 2nd degré ? Le dossier de la DEPP (Chollet-Remvikos & Levasseur 2004) qui rapporte les résultats de l'enquête ne fait pas mention de ces limites éventuelles.

Commentaires

Ces évaluations s'intéressent aux variations qui peuvent apparaître « avant et après les vacances » sur les taux de réussite des items. En mathématiques, sur la comparaison CM2 – sixième, aucun item ne présente une hausse significative après les vacances⁶⁶. En revanche, 25 items (sur 86) présentent de fortes baisses dont 17 portent sur des travaux numériques : cela concerne essentiellement des items de calcul mental, et des opérations posées ou en ligne, ce qui peut renvoyer directement à des questions de mémorisation de procédures, oubliées (jusqu'à quel point ?) pendant l'été.

⁶⁶ Ce qui n'est pas le cas pour le CE1-CE2.

C. Les tests en fin d'école et en fin de collège pour le calcul des indicateurs « compétences⁶⁷ de base » de la LOLF⁶⁸

Parmi les indicateurs retenus en 2007 dans le cadre de la LOLF – loi organique relative aux lois de finances – figurent les proportions d'élèves qui maîtrisent les « compétences de base » en français et en mathématiques en fin d'école et en fin de collège. A l'opposé des évaluations à l'entrée en sixième, la comparabilité dans le temps est le critère fondamental qui a déterminé la méthodologie utilisée pour l'élaboration d'évaluations destinées à fournir les indicateurs demandés, en termes de contenus et de protocoles.

Les épreuves

Les « compétences de base » ont été définies, en plusieurs étapes, relativement au socle commun de connaissances et de compétences. Le test lui-même se présente sous la forme d'un seul et même cahier pour tous les élèves. Tous les items se présentent sous la forme de QCM. La sélection des items a respecté autant que possible l'équilibre entre les différents domaines du programme⁶⁹. La durée de l'évaluation est une heure, et prévue pour que tous les élèves aient le temps de répondre aux items.

Les procédures

Les procédures de passation et de correction des épreuves sont standardisées. La correction est centralisée et fiabilisée, grâce notamment à une double correction.

⁶⁷ Le terme « compétence » n'avait alors pas, pour l'institution, l'acception retenue désormais dans le livret personnel de compétences.

⁶⁸ Méthodologie de l'évaluation des compétences de base en français et en mathématiques, Note d'information de la DEPP 08.37. http://media.education.gouv.fr/file/2008/23/3/NI0837_41233.pdf.

⁶⁹ Nous avons-nous-même participé à l'élaboration des items.

Commentaires

L'objectif de ces évaluations est de fournir des indicateurs globaux en termes de proportions d'élèves. Selon la méthodologie adoptée⁷⁰, ces évaluations font apparaître qu'environ 90 % des élèves maîtrisent les « compétences de base » en mathématiques⁷¹. De plus, la méthode utilisée pour déterminer le seuil de maîtrise des compétences de base a eu comme effet de ne retenir que des items se situant *a priori* dans « une zone flottante », c'est-à-dire des items choisis comme devant permettre de déterminer la maîtrise de ces compétences par les élèves. Une réflexion visant à rendre compte de l'acquisition de connaissances et de compétences relatives au socle commun telles qu'elles sont actuellement définies dans les programmes est actuellement menée afin de faire évoluer ces évaluations. Une autre piste d'évolution est la passation des tests sur support informatique⁷². Compte tenu de l'objectif spécifique de cette évaluation et de son protocole global, nous n'intégrons pas dans nos données la liste des items utilisés avec leurs résultats, mais nous mentionnons le cas échéant ce qu'elle apporte relativement à tel ou tel type de tâches.

D. Les évaluations bilans CEDRE de fin d'école⁷³

La finalité d'une évaluation bilan est d'approfondir la connaissance du système éducatif à une étape clé de la scolarité (en fin de CM2 ou en fin de 3^e). Les évaluations CEDRE ont pour objectifs de repérer quelles sont les connaissances et les compétences acquises par les élèves dans une discipline, ainsi que les facteurs sur lesquels le système

⁷⁰ Note d'information de la DEPP n°08.37.

http://media.education.gouv.fr/file/2008/23/3/NI0837_41233.pdf

⁷¹ Repères et références statistiques 2012, pp224-225

<http://www.education.gouv.fr/cid57096/reperes-et-references-statistiques.html>

⁷² Une phase transitoire destinée à assurer la comparabilité des résultats est alors nécessaire.

⁷³ Note d'information de la DEPP n°10.17.

http://cache.media.education.gouv.fr/file/2010/23/5/NIMEN1017_158235.pdf

éducatif pourrait directement agir pour améliorer la réussite des élèves. Il s'agit donc essentiellement d'un outil de pilotage institutionnel fondé sur la mesure des acquis des élèves au regard des programmes nationaux⁷⁴. Les évaluations 2008 concernant les mathématiques sont les dernières d'un premier cycle de 6 ans. Elles ont concerné un échantillon de plus de 4 000 élèves répartis dans 163 écoles. Les prochaines évaluations CEDRE en mathématiques auront lieu en 2014.

Les épreuves

Pour l'école primaire (Note d'information n°10.17 de la DEPP, 2010), les items, conçus et rédigés par un groupe d'enseignants et d'inspecteurs, ont été répartis « autour de cinq compétences attendues des élèves en fin d'école primaire » qui elles-mêmes ont été déclinées « dans les six champs des mathématiques du programme de 2002 : connaissance des nombres entiers et décimaux, calcul, exploitation de données numériques, espace et géométrie, grandeurs et mesures ». « En raison de contraintes techniques fortes, la majorité des questions posées sont du format « questions à choix multiples » (QCM) et seule une petite proportion (près de 15 %) est d'un format ouvert. » « L'ensemble de ces questions a été élaboré à partir des réponses que les élèves ont fournies lors d'une expérimentation réalisée en mai 2007. » Les items ne sont pas libérés.⁷⁵

Les procédures

Pour ces évaluations, la méthode dite des « cahiers tournants » a été utilisée. C'est une méthode qui est utilisée pour évaluer un nombre important d'items sans allonger le temps de passation pour les élèves. Selon des contraintes très strictes, les items sont répartis dans des cahiers différents, qui comportent des items communs. 12 cahiers différents ont ainsi été

⁷⁴ Cependant, l'institution admet que les programmes ne changent pas suffisamment pour que l'interprétation des résultats en soit affectée.

⁷⁵ On en trouvera cependant quelques exemples dans l'ouvrage du Scéren « Mathématiques en fin de collège : le bilan des compétences », 2012.

utilisés pour l'école. Dans chaque école, la passation s'est effectuée sous la responsabilité d'un enseignant avec des consignes très strictes. La correction est standardisée : les réponses aux QCM sont saisies de manière automatisée, et celles aux questions ouvertes sont numérisées, puis corrigées via une interface Internet par des enseignants formés, avec contrôle par un superviseur.

Commentaires

Ces évaluations font apparaître une hétérogénéité très importante des niveaux des élèves en mathématiques à la fin de l'école primaire : en ne définissant que deux grandes catégories, 59 % des élèves ont des performances qui permettent de considérer qu'ils maîtrisent de façon satisfaisante ou très satisfaisante les compétences attendues en fin d'école primaire, mais 41 % d'entre eux semblent ne posséder que des capacités très fragiles ou très locales. En réalité, six groupes caractérisent les niveaux des élèves selon une échelle de performance élaborée en utilisant des modèles statistiques. A chaque groupe, correspondent des acquis des élèves décrits en termes de capacités ou de types de tâches. Selon la note d'information de la DEPP (2010), les trois groupes définis par les résultats les plus bas « représentent 37,7 % des élèves qui entrent en sixième. Ceux-ci ne maîtrisent pas suffisamment les notions mathématiques attendues en fin d'école primaire pour réussir de façon autonome au collège. Des dispositifs d'aide personnalisée – mis en œuvre dès le début de la scolarité au collège – sont nécessaires pour leur permettre de poursuivre la construction des concepts mathématiques. Il paraît essentiel que les enseignants du second degré soient conscients de cette hétérogénéité pour une meilleure prise en compte de celle-ci dans leurs pratiques d'enseignement. Ce constat renforce l'importance du lien primaire-collège et de la continuité pédagogique à assurer pour chacun des élèves. » Dans le domaine des nombres et du calcul, les lacunes repérées par la DEPP concernent principalement la connaissance des nombres décimaux et leur utilisation dans des procédures opératoires, déjà fragiles sur les entiers, et plus particulièrement pour la multiplication et pour la division.

E. L'évolution des performances des élèves sur 20 ans

En 2007, la reprise d'une enquête de 1987, portant sur la lecture, le calcul et l'orthographe en fin de CM2, permet de comparer les performances des élèves à vingt ans d'intervalle, à partir des résultats observés aux mêmes épreuves. De plus, des points intermédiaires de comparaison sont disponibles, en 1997 pour la lecture et en 1999 pour le calcul. En 1987, la population visée était celle des élèves de CM2 du secteur public en France métropolitaine. Par la suite, les élèves du secteur privé ont été inclus dans les échantillons des enquêtes de 1999 et 2007. Les comparaisons effectuées portent donc uniquement sur les élèves du secteur public⁷⁶. A chaque date, les échantillons sont composés de plusieurs milliers d'élèves – entre 2500 et 4500 selon les périodes – représentatifs de la population visée.

Les épreuves

Pour le calcul, les épreuves de 1987 étaient composées de 33 items (opérations et problèmes numériques). En 2007, les épreuves ont été reprises à l'identique, à l'exception de certains items de calcul, hors programmes aujourd'hui, comme les divisions de nombres décimaux par exemple. Pour remplacer les items éliminés de l'épreuve de 1987, onze items de l'évaluation à l'entrée en sixième de 1998, repris dans le test « avant les vacances » de 1999 ont été utilisés. Bien qu'il n'y ait pas d'items communs entre 1987 et 1999, il est possible d'établir des comparaisons entre les trois années 1987-1999-2007, grâce à des modèles statistiques adaptés. Pas de QCM : les élèves avaient à effectuer des calculs afin d'écrire les résultats d'opérations ou les réponses à des problèmes.

Les procédures

Les procédures sont standardisées : les consignes de passation et de correction des épreuves ont été reprises à l'identique aux différentes périodes. De plus, en 2007, la correction

⁷⁶ Cette différence d'échantillon se traduit par de faibles variations dans les taux de réussite.

a été centralisée et fiabilisée, grâce à des procédures de doubles corrections. Enfin, en 2007, toutes les réponses des élèves ont été numérisées.

Commentaires

Ces évaluations font apparaître globalement une baisse importante des scores obtenus en calcul entre 1987 et 1999 (le score moyen diminue d'environ deux-tiers d'écart-type) qu'il serait imprudent d'attribuer *a priori* au seul fonctionnement de l'école primaire, sans prendre en compte des facteurs économiques. Cette baisse touche tous les niveaux de compétences et s'accompagne d'un accroissement de la dispersion des scores (augmentation de l'écart-type de 1 à 1,2 entre 1987 et 1999).

De 1999 à 2007, il s'opère un « tassement » des résultats : le score moyen est en légère baisse, mais de manière peu significative, au regard des marges d'incertitude inhérentes aux enquêtes sur échantillons. Parallèlement, la dispersion se stabilise avec une légère baisse, là encore peu significative. Ce redressement est peut-être à mettre au compte de la remise à l'ordre du jour du calcul dans les programmes de 2002 avec, en particulier, l'accent mis sur le calcul mental et l'apprentissage des techniques opératoires, dynamique accentuée et portée par la formation des enseignants, notamment la formation initiale au sein des IUFM.

F. Le panel 2007

La DEPP effectue le suivi d'un panel d'élèves entrés en sixième en 2007, qui a pour objectif principal de décrire et d'expliquer les performances et les trajectoires des élèves depuis leur entrée en sixième jusqu'à la fin de leur formation initiale (hors enseignement supérieur). La première collecte de ce panel 2007 a été engagée en mars 2008, en fin de sixième. Une actualisation annuelle de la situation scolaire des élèves est effectuée via les bases académiques de scolarité. Le dispositif de suivi comprend des enquêtes de plusieurs

types, adressées à différents acteurs du système éducatif : des tests sont effectués auprès des élèves afin de mesurer leurs acquis cognitifs et d'autres dimensions conatives⁷⁷ à différents niveaux du cursus (fin de 6^e et fin de collège), des questionnaires sont adressés aux parents pour recueillir des informations précises sur le contexte, les comportements et représentations par rapport à l'école du milieu familial, ainsi qu'aux établissements scolaires pour connaître le déroulement des procédures d'orientation en fin de 3^e et en fin de 2nde.

La mesure des acquis cognitifs et conatifs des élèves est effectuée par administration de questionnaires, construits en collaboration avec des chercheurs de l'Inetop⁷⁸ et des universités de Paris-Ouest, Strasbourg et Rennes 2, au cours de neuf séquences (de huit à trente-cinq minutes, avec des pauses de dix à quinze minutes).

Les tests cognitifs portent sur le français et les mathématiques. Ils sont essentiellement composés d'items ayant déjà été utilisés dans des évaluations antérieures et ne sont pas focalisés, dans la mesure du possible, sur les programmes d'une année scolaire donnée.

Les épreuves

La séquence d'évaluation en mathématiques est composée de 9 exercices de 2 à 12 items chacun, soit un total de 48 items des situations variées : calcul mental, calculs d'horaires, relations entre des unités de mesure de grandeurs, résolution de problèmes numériques, en géométrie et items de logique.

⁷⁷ Ces dimensions concernent des aspects d'ordre affectivo-motivationnels de la conduite d'un élève, comme ses relations avec l'enseignant et avec les pairs, l'estime de soi, sa motivation, ou son anxiété vis-à-vis des mathématiques.

⁷⁸ Institut national d'étude du travail et d'orientation professionnelle.

Les procédures

En raison du petit nombre d'élèves concernés par collège (moyenne d'environ 5 à 6 élèves), la passation est confiée, non pas à des enseignants, mais au conseiller principal d'éducation, au principal adjoint ou au conseiller d'orientation psychologue. La correction des items est centralisée.

Commentaires

Nous avons retenu de ces évaluations les items qui portent sur le calcul mental, comme illustrant bien ce que peut savoir faire un élève au collège actuellement, de façon partiellement indépendante de son niveau de scolarité, dans la mesure où la totalité de ces calculs peut être réussie en fin de sixième.

Les items ne sont pas tous libérés, les données faisant actuellement l'objet d'études au sein de la DEPP.

G. Les évaluations nationales CM2

Nous mentionnons pour terminer les évaluations nationales CM2, même si l'initiative de leur existence, la conception des items et l'organisation de la passation relevaient de la Direction générale de l'enseignement scolaire (DGESCO), la DEPP ayant été sollicitée *a posteriori* pour assurer une comparaison temporelle entre les évaluations successives. Suite à la publication des nouveaux programmes de 2008 et à l'abandon des évaluations à l'entrée en sixième, la DGESCO décide de mettre en place des évaluations bilans « qui ont comme ambition⁷⁹ d'être des outils au service des maîtres pour la réussite de tous les élèves. » (Extrait du dossier de presse de mars 2009)

⁷⁹ Des évaluations ont également été mises en place en fin de CE1, avec les mêmes « ambitions ».

Ces évaluations ont eu lieu en français et en mathématiques pendant trois années, en janvier, puis ont disparu progressivement à partir de 2012-2013, l'année même où leur passation était différée à la fin de l'année scolaire.

Les épreuves

Les épreuves de mathématiques étaient composées de trois séquences d'environ une demi-heure chacune. Le rythme des réponses aux items était imposé par l'enseignant selon des consignes destinées à uniformiser les conditions de passation. Une quarantaine d'items étaient répartis à la fois selon 5 grands domaines (Nombres, calcul, géométrie, mesures et gestion de données numériques). La moitié d'entre eux portait sur les nombres et le calcul.

Les procédures

Comme pour les évaluations nationales à l'entrée au CE2 et en sixième, des consignes de passation étaient données aux enseignants, qui étaient chargés de faire passer les évaluations dans leurs classes respectives. Tous les élèves avaient les mêmes cahiers, qui étaient corrigés par les enseignants eux-mêmes.

Commentaires

Sans entrer dans le débat qui a démarré dès leur présentation officielle, on peut dire que ces évaluations ont été vivement contestées par une partie des enseignants et des chercheurs. La contestation portait sur le choix des exercices, le moment retenu pour leur passation et les modalités de codage. En fait, c'est surtout leur statut et leur finalité mal définis – bilan des acquis des élèves pour l'ensemble de la scolarité primaire ou repérage des difficultés destinés à apporter les aides nécessaires pour des conditions favorables de passage en sixième, outil de pilotage externe ou outil pédagogique interne – qui nous semblent être les raisons principales de leur remise en cause. Des reproches portaient également sur leurs défauts méthodologiques, que les apports scientifiques de la DEPP pour le calibrage des items ont compensés en partie à partir de 2011, en élaborant notamment un protocole destiné à permettre la comparabilité des évaluations dans le temps. Le déplacement de janvier à juin de la période de l'évaluation CM2 en 2012 a d'ailleurs nécessité une adaptation de la

méthodologie pour assurer la continuité de la comparabilité temporelle. Au moment où nous avons commencé notre recherche, seules les évaluations 2009 et 2010 avaient été passées par les élèves. Faute d'une remontée suffisante des résultats, les résultats de l'évaluation 2009 ne sont pas jugés fiables. C'est la raison pour laquelle nous ne mentionnerons que les résultats d'items de l'évaluation 2010.

H. Conclusion intermédiaire

Nous allons nous livrer dans la partie suivante de ce chapitre à un exercice délicat, en cherchant à prendre en compte des résultats issus de toutes ces évaluations, avec des limites importantes, connues *a priori*, et que nous rappelons une fois pour toutes :

- les passations des évaluations sur lesquelles nous nous appuyons n'ont pas toutes eu lieu aux mêmes périodes (mi CM2, fin de CM2, début de sixième, fin de sixième) ;
- la place dans le test d'un item peut avoir un impact sur son taux de réussite (effet de fatigue ou au contraire d'entraînement) ;
- les tests peuvent être rythmés ou non (les élèves ont un temps donné pour un ou plusieurs items, et passer aux suivants sur consigne de l'administrateur du test) ;
- la correction est standardisée ou non ;
- le format des items (QCM ou non) et le choix des distracteurs⁸⁰ dans le cas d'un QCM sont des paramètres qui interviennent dans la réussite à l'item.

La mise en regard de résultats issus d'évaluations différentes ne permet certes pas de comparaisons directes globales, mais nous estimons et prenons le parti qu'elle favorise la constitution de faisceaux de renseignements relativement à un type de tâches donné, voire à un domaine donné. De plus, compte tenu du caractère confidentiel des items des évaluations « Compétences de base » et CEDRE, nous avons choisi une entrée par l'évaluation à 20 ans

⁸⁰ Dans un QCM, les distracteurs sont les autres réponses que la réponse correcte qui sont proposées aux élèves. Leur « pouvoir d'attractivité », ainsi que l'ordre dans lequel ils sont donnés, ont sans doute une influence sur les résultats.

d'intervalle et par les évaluations nationales à l'entrée en sixième, malgré toutes les réserves statistiques qu'elles peuvent susciter. Nous sommes conscients que l'absence d'un dispositif standardisé de correction de ces évaluations analogue à celui de l'évaluation à 20 ans d'intervalle, ou des évaluations bilans CEDRE, constitue un handicap du point de vue de la comparabilité des résultats. Cependant, les nombreux items qu'on retrouve dans ces évaluations dans des années différentes, le fait que les évaluations 2002 et 2003 ont utilisé des protocoles identiques, comme celles de 2005, 2006, 2007 et 2008, nous apportent des éléments d'information tout à fait intéressants, non pas pour caractériser la variation du niveau des élèves, mais pour évaluer le niveau de difficulté d'un type de tâches donné, pour un élève qui arrive au collège. En fait, seul le dispositif mis en place pour l'évaluation des performances des élèves à 20 ans d'intervalle permet strictement une comparaison directe de résultats sur une période qu'on peut considérer comme longue. En outre, l'énorme plus-value de cette étude, en termes d'exploitations possibles, est qu'au-delà du simple codage des résultats obtenus par les élèves, toutes leurs productions ont été numérisées, ce qui permet un travail d'analyse qualitatif de grande ampleur. Nous utiliserons donc ces productions d'élèves, soit pour illustrer notre analyse, soit pour émettre certaines hypothèses sur l'activité des élèves.

III. Une lecture didactique des résultats des évaluations nationales depuis 25 ans dans le domaine des nombres et du calcul

« Paraissant chaque année depuis 1989, les fascicules des résultats de ces évaluations diagnostiques, passées en français et en mathématiques au début de l'année scolaire, devraient empêcher tout didacticien normalement constitué de dormir. » (Pluvinage, 2000)

Dans cette partie, fondatrice de notre recherche, nous allons tenter de faire le point sur les acquis des élèves dans le domaine de la connaissance des nombres et du calcul à la fin de l'école primaire, à partir de certaines des évaluations nationales menées par la DEPP en France. Que nous apprennent-elles ? Que révèlent-elles des connaissances des élèves sur les nombres ? En calcul ? Sur la résolution de problèmes ? Soyons clair : nous ne cherchons ni à dresser un profil actuel des élèves, ni à déterminer comment un tel profil a évolué au cours des années. Nous cherchons plutôt à établir une sorte de « carte en relief des mathématiques » que les élèves apprennent ou qu'ils sont censés apprendre, dans un domaine donné, en adoptant le point de vue du chercheur qui tente de comprendre comment aider un enseignant susceptible d'accueillir des élèves – à ce stade, encore « non singuliers » – dans une classe de sixième, et qui aura à organiser son enseignement. L'exploration de ces évaluations nationales nous permet-elle de dessiner des grandes lignes de réussite ou d'échec actuel des élèves à l'entrée au collège ? Quelles « catégories d'items » apparaissent comme majoritairement réussies par les élèves, en relation avec les attendus institutionnels relativement aux connaissances prescrites ? Quelles « catégories d'items » apparaissent comme majoritairement échouées ?

Par ailleurs, sommes-nous en mesure de repérer des variations sur lesquelles il serait légitime d'interroger, par exemple l'évolution des programmes, les manuels scolaires ou les pratiques des enseignants ? Pouvons-nous identifier au contraire des sortes d'invariants qui pourraient alors être considérés comme – ou associés à – de réels obstacles d'apprentissage ? En France, des travaux sur ce thème ont déjà été menés par plusieurs chercheurs (Bolon, 1992, 1996 ; Roditi, 2001), par la DEPP elle-même (Pluvinage & Rauscher, 1991) et par l'inspection générale de l'éducation nationale. Ils nous éclairent sur des aspects comme les

décimaux ou la multiplication par exemple, qui, comme nous le verrons, sont toujours d'actualité. Cela dit, mener de façon exhaustive ce type de travail est une entreprise à laquelle nous ne prétendons pas avoir l'ambition de nous livrer.

Enfin, signalons que notre travail se place dans une période charnière où, comme nous l'avons vu dans la première partie de ce chapitre, un nouveau programme pour l'école primaire est entré en vigueur depuis septembre 2008 (B.O. HS n°3 du 19 juin 2008). Or, presque toutes les évaluations sur lesquelles nous nous appuyons ont été réalisées sur des élèves qui n'ont pas connu ce nouveau programme. Les résultats que nous présentons constituent donc en quelque sorte des repères, qui pourront être lus comme ceux d'une année « zéro », et que nous compléterons par quelques résultats d'évaluations nationales de fin de CM2 postérieures à 2008.

A. La méthodologie adoptée pour l'analyse des résultats

Une première question est d'ordre méthodologique, et concerne les choix que nous sommes amené à effectuer pour entrer dans ce travail : privilégie-t-on une entrée par compétences au sens où elles sont actuellement définies par l'institution, comme celles qui concernent le prélèvement des informations, ses applications directes, le raisonnement, et la communication, en recherchant ce qui, dans chacune d'entre elles, relève des nombres et du calcul ? Ou au contraire s'en tient-on à une étude des connaissances mathématiques sur les nombres et le calcul que les élèves sont capables de mettre en œuvre pour effectuer des tâches relatives à ces connaissances ? Nous avons choisi la deuxième solution pour plusieurs raisons : la nature des évaluations dont nous disposons (contenus et modalités) s'y prête davantage et la lecture vis-à-vis des programmes est plus aisée. De plus, outre le fait que le statut de compétence est scientifiquement contesté dans le champ scolaire (Crahay, 2006 ; Schneider-Gilot, 2006), la double référence aux champs conceptuels de Vergnaud et à l'analyse des types de tâches de Chevallard que nous combinerons en les adaptant avec une

analyse du point de vue de l'activité (potentielle) de l'élève (Robert, 1999) nous paraît tout à fait convenir à notre étude comme cela sera détaillé plus loin⁸¹.

Nous nous intéressons donc directement aux items qui portent sur à la connaissance des nombres, au calcul et à la résolution de problèmes à support numérique⁸². Le nombre d'items présents dans l'ensemble des évaluations dont nous disposons semble marquer l'importance réaffirmée du calcul dans l'activité mathématique à la fois par la recherche et l'inspection (Rapport de la CREM⁸³, 2001 ; Jost, 2004 ; Artigue, 2007), et par l'institution en général qui lui accorde une part importante dans les programmes de l'école primaire et du collège. Nous reprenons en particulier à notre compte un extrait du rapport Kahane concernant le calcul, qui dépasse largement le cadre de notre recherche, mais qui va nous servir en quelque sorte de guide non seulement pour les objectifs que nous visons dans cette partie, mais aussi dans la suite de notre travail. « Compte tenu de tout ce qui précède, il est clair que la question qui se pose à l'enseignement n'est pas : « faut-il enseigner le calcul, faut-il enseigner à calculer ? », mais bien plutôt : « que faut-il enseigner aujourd'hui en matière de calcul, compte-tenu de l'évolution scientifique, mais aussi compte-tenu des évolutions sociale et technologique ? Et, comment le faire notamment de manière à dépasser les obstacles culturels qui s'opposent à la mise en place de rapports satisfaisants au monde du calcul ? »

Nous avons décidé de nous en tenir à l'exploitation des données quantitatives fournies par différentes évaluations menées par la DEPP, complétée par celle de productions d'élèves fournies lors d'une évaluation particulière, qui ont été numérisées. Nous n'ignorons pas qu'un certain nombre de composantes, que nous ne prenons volontairement pas en compte ici – nous serions d'ailleurs en difficulté pour le faire – entrent en jeu dans les résultats que nous présentons :

⁸¹ Des éléments théoriques sur l'activité de l'élève (et celle de l'enseignant) seront exposés au chapitre 2.

⁸² C'est-à-dire faisant intervenir des nombres.

⁸³ Tous les rapports d'étape de la commission ont été publiés en mars 2002 aux éditions Odile Jacob.

- du côté des élèves : leur rapport au savoir, leur rapport à l'école, leur rapport au langage ;
- du côté des enseignants du 1^{er} degré : leur savoirs disciplinaires, leurs pratiques d'enseignement, leur positionnement (investissement dans l'école, relations avec les parents,...).

A la lumière des évaluations nationales auxquelles nous avons eu accès⁸⁴, nous tentons de dresser dans cette partie, pour le domaine qui nous intéresse, un « spectre des mathématiques que savent les élèves » en fonction des mathématiques à enseigner telles qu'elles sont définies dans les programme 2008 de l'école primaire⁸⁵, en particulier celui du cycle 3. Nous complétons éventuellement cet éclairage par les programmes antérieurs et les documents complémentaires qui les accompagnaient. Ce spectre est en effet celui que nous sommes en mesure d'esquisser en septembre 2010, au début de l'expérimentation, mais cela ne veut pas dire que nous nous en interdisons une vision plus complète dans le temps, avec toute la prudence nécessaire compte tenu du corpus que nous traitons, comme nous le répèterons à plusieurs reprises.

Nous nous appuyons dans cette troisième partie sur ce que les programmes de l'école primaire appellent « des repères pour l'organisation de la progressivité des apprentissages par les équipes pédagogiques. » Ces repères sont donnés, année scolaire par année scolaire, et sont destinés à jouer auprès des enseignants un rôle de programmation annuelle au sein d'un même cycle, tout en rappelant les éléments du programme de l'année antérieure et en mettant en perspective ceux de l'année suivante.

Voici la programmation au cycle 3 pour le domaine Nombres et calcul telle qu'elle est définie pour le programme 2008 :

⁸⁴ Pour certaines de ces évaluations, les items sont publics (ou « libérés »). Pour d'autres, ce n'est pas le cas : nous ne ferons alors que mentionner si ces évaluations confirment ou non les résultats connus sur les items publics.

⁸⁵ Nous détaillerons davantage certains aspects de ces programmes dans le chapitre 3, en lien avec le calcul mental.

Cours élémentaire deuxième année	Cours moyen première année	Cours moyen deuxième année
<p>Les nombres entiers jusqu'au million - Connaître, savoir écrire et nommer les nombres entiers jusqu'au million. - Comparer, ranger, encadrer ces nombres. - Connaître et utiliser des expressions telles que : double, moitié ou demi, triple, quart d'un nombre entier. - Connaître et utiliser certaines relations entre des nombres d'usage courant : entre 5, 10, 25, 50, 100, entre 15, 30 et 60.</p>	<p>Les nombres entiers jusqu'au milliard - Connaître, savoir écrire et nommer les nombres entiers jusqu'au milliard. - Comparer, ranger, encadrer ces nombres. - La notion de multiple : reconnaître les multiples des nombres d'usage courant : 5, 10, 15, 20, 25, 50.</p>	<p>Les nombres entiers</p>
	<p>Fractions - Nommer les fractions simples et décimales en utilisant le vocabulaire : demi, tiers, quart, dixième, centième. - Utiliser ces fractions dans des cas simples de partage ou de codage de mesures de grandeurs.</p>	<p>Fractions - Encadrer une fraction simple par deux entiers consécutifs. - Écrire une fraction sous forme de somme d'un entier et d'une fraction inférieure à 1. - Ajouter deux fractions décimales ou deux fractions simples de même dénominateur.</p>
	<p>Nombres décimaux - Connaître la valeur de chacun des chiffres de la partie décimale en fonction de sa position (jusqu'au 1/100ème). - Savoir : . les repérer, les placer sur une droite graduée, . les comparer, les ranger, . les encadrer par deux nombres entiers consécutifs, . passer d'une écriture fractionnaire à une écriture à virgule et réciproquement.</p>	<p>Nombres décimaux - Connaître la valeur de chacun des chiffres de la partie décimale en fonction de sa position (jusqu'au 1/10 000ème). - Savoir : . les repérer, les placer sur une droite graduée en conséquence, . les comparer, les ranger, . produire des décompositions liées à une écriture à virgule, en utilisant 10 ; 100 ; 1 000... et 0,1 ; 0,01 ; 0,001... - Donner une valeur approchée à l'unité près, au dixième ou au centième près.</p>
<p>Calcul sur des nombres entiers Calculer mentalement - Mémoriser et mobiliser les résultats des tables d'addition et de multiplication. - Calculer mentalement des sommes, des différences, des produits. Effectuer un calcul posé - Addition, soustraction et multiplication. - Connaître une technique opératoire de la division et la mettre en œuvre avec un diviseur à un chiffre.</p>	<p>Calcul Calculer mentalement - Consolider les connaissances et capacités en calcul mental sur les nombres entiers. - Multiplier mentalement un nombre entier ou décimal par 10, 100, 1 000. - Estimer mentalement un ordre de grandeur du résultat. Effectuer un calcul posé - Addition et soustraction de deux</p>	<p>Calcul Calculer mentalement - Consolider les connaissances et capacités en calcul mental sur les nombres entiers et décimaux. - Diviser un nombre entier ou décimal par 10, 100, 1 000. Effectuer un calcul posé - Addition, soustraction, multiplication de deux nombres entiers ou décimaux.</p>

<ul style="list-style-type: none"> - Organiser ses calculs pour trouver un résultat par calcul mental, posé, ou à l'aide de la calculatrice. - Utiliser les touches des opérations de la calculatrice. <p>Problèmes</p> <ul style="list-style-type: none"> - Résoudre des problèmes relevant des quatre opérations. 	<p>nombres décimaux.</p> <ul style="list-style-type: none"> - Multiplication d'un nombre décimal par un nombre entier. - Division euclidienne de deux entiers. - Division décimale de deux entiers. - Connaître quelques fonctionnalités de la calculatrice utiles pour effectuer une suite de calculs. <p>Problèmes</p> <ul style="list-style-type: none"> - Résoudre des problèmes engageant une démarche à une ou plusieurs étapes. 	<ul style="list-style-type: none"> - Division d'un nombre décimal par un nombre entier. - Utiliser sa calculatrice à bon escient. <p>Problèmes</p> <ul style="list-style-type: none"> - Résoudre des problèmes de plus en plus complexes.
--	---	--

Compte tenu du contexte de notre étude, nous choisissons d'organiser l'analyse des résultats des différentes évaluations selon les capacités présentées dans les repères annuels annexés au programme 2008, que nous considérons ici comme des types de tâches, après avoir éventuellement adapté leur formulation. Notre travail a consisté à la fois à construire des tableaux récapitulatifs des résultats disponibles, et analyser ces résultats. Pour plus de facilité de lecture, tous les tableaux ont été réunis dans un livret disponible en annexe.

Parmi les capacités retenues, nous nous intéressons principalement dans les sections B, C et D à celles (listées dans le Tableau A-1) qui concernent le calcul, mental et posé, et à la résolution de problèmes numériques. Celles qui sont explicitement relatives, selon le programme 2008, à la connaissance des nombres (Tableau A-2) ne feront l'objet que de commentaires généraux dans la section E. Nous assumons le fait que notre analyse n'est pas homogène, c'est-à-dire que nous n'avons pas le même « grain » d'analyse pour tous les types de tâches, et qu'elle n'est ni chronologique dans l'organisation de l'enseignement ni conforme à l'ordre qui est habituellement donné dans les programmes. Cela correspond en fait à notre démarche initiale qui a d'abord consisté à nous intéresser aux habiletés calculatoires des élèves, puis, au fil de notre réflexion, à nous pencher sur le rapport entre ces habiletés et la connaissance des nombres (en tant qu'objets), et en particulier les nombres décimaux et leur différentes désignations orales ou écrites.

Dans notre analyse de données, nous considérons certains pourcentages de réussite comme des « seuils pour la classe », c'est-à-dire comme potentiellement déterminants pour les choix qu'un enseignant effectue. Il n'est évidemment pas question de réduire de façon simpliste l'acquisition d'une connaissance par un élève à la réussite d'un item, nous

raisonnons ici sur des groupes d'items. Mais, pour illustrer notre propos, nous ramenons de façon artificielle les pourcentages à la « réalité » d'une classe moyenne de sixième de 24 élèves. Une connaissance caractérisée par des items réussis à 80 % indique que, dans cette classe moyenne, environ 5 élèves n'ont pas acquis cette connaissance. *A contrario*, une connaissance mise en jeu dans des items réussis à 30 % ou moins, indique que, pour cette même classe, 7 élèves au maximum ont produit des réponses correctes. On voit bien que ce soit en termes d'organisation globale de l'enseignement, en termes de choix de tâches au niveau local, voire en termes de gestion de la classe, ces pourcentages peuvent ne pas impacter de la même façon le travail de l'enseignant. On peut également supposer, que pour des connaissances identifiées comme acquises par environ 50 % des élèves, des stratégies différentes, voire opposées, soient développées, selon les enseignants et selon les classes.

Calculer mentalement (

B. Tableau A-3 à Tableau A-14)

Il est d'abord intéressant de noter que, si on excepte la multiplication ou la division d'un nombre entier ou décimal par 10, 100, 1 000 et quelques rares calculs qui relèvent davantage de la numération, les premiers calculs mentaux apparaissent seulement dans les évaluations nationales à l'entrée en 6^e en 1998, alors que les programmes de 1985 et 1995 y font explicitement référence. Comme nous l'avons déjà dit, dans l'enquête auprès des enseignants de CM2 effectuée lors de l'étude « Avant et après les vacances » en 1999, les items de calcul mental ne recueillent qu'entre 51 % et 66 % d'opinion « indispensable », évaluer l'ordre de grandeur d'un résultat numérique est classé indispensable par environ la moitié des enseignants, et les deux items portant sur la soustraction de deux décimaux et le quart de 100 le sont par environ un enseignant sur trois. Peut-être les concepteurs et responsables de ces évaluations pensaient-ils aussi que le cadre de passation des évaluations n'était pas favorable à des items de calcul mental. En tout cas, voici ce qu'on peut lire dans le bilan de la DEPP de l'évaluation nationale à l'entrée en sixième en 1999, qui dépasse d'ailleurs le constat : « La pratique du calcul mental s'inscrit dans la continuité école-collège, au même titre que le calcul posé ou en ligne. De tels exercices contribuent à donner du sens à la notion de nombre et à utiliser, en acte, certaines propriétés des opérations. »

Mobiliser les résultats mémorisés des tables d'addition et de multiplication : un retour aux fondamentaux ? (

1. Tableau A-3)

La formulation telle qu'elle est rédigée dans le programme prête à confusion : s'agit-il seulement pour un élève d'avoir mémorisé des résultats et de les restituer en tant qu'objets ? Ou de les connaître et de mobiliser en tant qu'outils dans des calculs mentaux (par exemple 40×3 , 44×3 ou $0,4 \times 3$) ou dans des opérations posées ? Par ailleurs, il n'est pas fait mention dans le programme de la durée de la restitution des résultats : doit-on attendre d'un élève une mémorisation et une restitution immédiate de tous les résultats des tables d'addition et de multiplication ? Attend-on de lui qu'il s'appuie sur certains résultats mémorisés et qu'il soit capable de les mobiliser pour en retrouver d'autres (par exemple, 6 fois 8 à partir de 5 fois 8) ? S'agit-il simplement des résultats directs des tables ou d'un ensemble de connaissances liées à ces tables dont l'objectif est la disponibilité, comme le passage de 6 fois 8 à « combien de fois 8 dans 48 ? » ? Nous nous interrogeons d'ailleurs à ce stade sur ce qui peut signifier la notion de mobilisation d'un résultat d'une table d'addition ou de multiplication. Nous sommes tentés d'aller sans doute plus loin que le programme, et de poser comme premier élément à notre cadre de réflexion que la connaissance des nombres, c'est-à-dire leur disponibilité en tant qu'objets, est le produit d'un processus de conceptualisation à laquelle la mobilisation de ces résultats participe largement. Nous reprendrons cette piste dans le chapitre 3 qui traite spécifiquement du calcul mental.

Commentaires et analyse

- Les premiers items portant sur ce type de tâches, les connaissances à utiliser apparaissent explicitement en tant qu'objets (c'est-à-dire hors opérations posées pour lesquelles les élèves ont à mobiliser les tables d'addition et de multiplication). Ils datent de 2005 (sauf 1 item de 2004), ce qui semble traduire une préoccupation nouvelle de l'institution, en tout cas constituer un nouveau signal lancé à l'adresse des enseignants en début de sixième sur ce que savent les élèves, puisque, rappelons-le, les évaluations à l'entrée en sixième étaient étiquetées « diagnostiques » par la DEPP.
- Pour les évaluations à l'entrée en sixième, les élèves avaient deux secondes pour écrire leurs réponses après que l'enseignant eut énoncé le calcul, une seule fois. Si on considère que les enseignants ont respecté les consignes de passation et de correction, on peut alors considérer les taux de réussite aux items comme porteurs d'informations

adaptés au type de tâches évaluées, c'est-à-dire que les élèves avaient bien à restituer un résultat mémorisé.

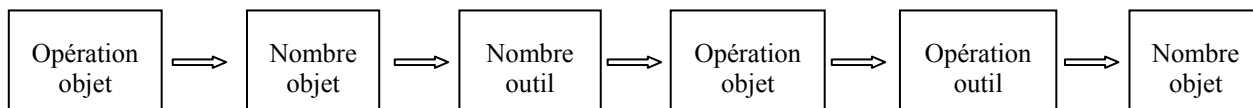
- Tous les items qui concernent l'addition sont réussis par plus de 90 % des élèves ;
- Les items concernant la multiplication sont nettement moins bien réussis, et en particulier ceux qui concernent la table de 8. Ceci apparaît directement pour le calcul « 6 fois 8 » réussi par un peu moins de 3 élèves sur 4, et encore plus à la question « Dans 56 combien de fois 8 ? » pour laquelle environ 1 élève sur deux donne la bonne réponse. On retrouvera cette difficulté dans les multiplications posées, qui montreront également une connaissance fragile de la table de 7.
- Les résultats des deux items de l'évaluation de CM2 (janvier 2010) paraissent surprenants en comparaison des autres résultats, notamment ceux des items 6 et surtout 10 des évaluations à l'entrée en sixième, même si dans chacun des items, on sait *a priori* qu'un seul résultat pose problème pour les élèves (7 fois 8 pour l'item 74 et « En 48 combien de fois 8 ? » pour l'item 75). Faut-il attribuer ces écarts aux différences de moments de passation ? Aux modalités de passation, l'enseignant énonçant deux fois chaque calcul en CM2 ? Au fait qu'en CM2, un enseignant évalue des élèves qu'il connaît, et pour lesquels il se sent en partie responsable des apprentissages ? Chacun de ces aspects intervient sans doute dans l'analyse des résultats.
- Dans les évaluations nationales à l'entrée en sixième comme dans celle de CM2, les produits énoncés n fois m sont systématiquement écrits « $n \times m$ » dans les cahiers pour les enseignants, autrement dit le symbole « \times » apparaît toujours comme un étiquetage du mot « fois » et non comme le symbole de la multiplication dans IN. Cette pratique est-elle anodine ? A-t-elle des incidences, autres que symboliques, sur les apprentissages des tables de multiplication des élèves ? D'ailleurs, comment se fait l'apprentissage de ces tables ? Par exemple, la table de 5 est-elle apprise comme 5 fois 1, 5 fois 2, ou comme 1 fois 5, 2 fois 5, ... ? Nous reprendrons et développerons plus tard cette question de la multiplication.

2. Calculer mentalement des sommes, des différences, des produits de nombres entiers ou décimaux (Tableau A-4 à Tableau A-7)

Cette question présente pour nous un intérêt primordial dans notre démarche, et nous allons nous efforcer de dépasser une simple description des calculs à effectuer et des erreurs des élèves. Au premier abord, on peut concevoir « grossièrement » que le calcul mental est un moyen parmi d'autres de favoriser la conceptualisation des nombres, et en particulier des nombres décimaux, par l'articulation aisée qu'il permet entre différents registres de représentation sémiotique, oraux et écrits (Duval, 1995, Roditi, 2007). Les analyses de tâches que nous présentons ci-dessous nous semblent permettre en outre de faire émerger, au second plan, un jeu de micro-dialectiques outils/objets sur les nombres et sur les opérations. Nous développerons cette piste au chapitre 3, en faisant l'hypothèse générale qu'une certaine pratique du calcul mental permettrait d'optimiser ce jeu, à la fois sur les nombres, décimaux ou non, et sur les opérations, tout en étant très compatible, qui plus est, avec des modalités de gestion favorables à des activités très partagées.

Essayons d'abord de décomposer l'activité attendue des élèves dans une opération en ligne à effectuer mentalement, et de dégager ce qui la distingue de celle(s) qu'ils peuvent avoir quand l'opération est posée. Nous nous appuierons pour cela à la fois sur la dialectique outil/objet attachée à une notion mathématique (Douady, 1986) et sur les derniers travaux de Robert (2014) inspirés de la théorie de l'activité. Dans la mise en œuvre d'un algorithme standard pour effectuer un calcul posé, seul l'aspect objet de l'opération est convoqué, produisant un résultat, presque *indépendamment* des nombres précis qui sont en jeu, avec une très faible activité de reconnaissance (sur l'opération à effectuer et sur l'aspect « global » des nombres) qui déclenchera l'algorithme adapté, une organisation exclusivement externe, et essentiellement une activité de traitement interne (qui peut comporter plusieurs étapes). Dans le cas d'une procédure mentale (distincte d'un algorithme standard effectué mentalement), aucune tâche (sauf les tâches de restitution de résultats mémorisés) n'est simple, et trois types de sous-activités sont fortement sollicités. La reconnaissance de l'opération et des nombres en jeu existe comme dans un algorithme d'opération posée, mais avec une activité de reconnaissance accrue à la fois sur les nombres en jeu et éventuellement sur l'opération. Cette activité de reconnaissance va déterminer une activité d'organisation interne, qui consiste à

anticiper une démarche, en fonction des nombres et de l'opération en jeu et qui sera suivie de la mise en œuvre de cette démarche. C'est dans le déroulement complet de ce processus que nous décelons un jeu de micro-dialectiques outils/objets sur les nombres et sur les opérations, comme le résume le schéma ci-dessous :



Dans le cas d'un calcul donné oralement, interviennent en plus un changement de registre (du langage naturel vers un autre registre, qui n'est pas peut-être pas toujours celui de l'écriture décimale) et une phase de mémorisation des nombres donnés.

Prenons le cas d'une somme à calculer, par exemple $37 + 99$ (item 64 de l'évaluation nationale à l'entrée en sixième 2005 à 2008). Dans un calcul posé, il s'agit d'abord pour un élève de reconnaître qu'il s'agit d'une addition de deux entiers et d'éventuellement noter qu'ils ont le même nombre de chiffres. L'organisation externe consiste ensuite à choisir dans un premier temps une organisation spatiale adaptée (écriture des nombres l'un en-dessous de l'autre avec alignement des chiffres de même rang), puis à gérer l'écriture de nouveaux chiffres, y compris celle de la retenue intermédiaire. Enfin, vient le traitement interne (ou la technique pour Chevallard) qui est ici un algorithme⁸⁶ et qui comporte au moins 2 étapes, voire 3 ou 4 : « $7 + 9 = 16$, je pose 6 et je retiens 1 ; $3 + 1 = 4$ et $4 + 9 = 13$ ». Le résultat est le nombre qui s'écrit avec un 1, un 3 et un 6 dans cet ordre, donc $37 + 99 = 136$. On peut penser d'ailleurs, que cette analyse vaut peu ou prou, à la description singulière des phases d'activité près, pour tous les calculs posés, notamment l'étape finale, « reconstitutrice » du résultat obtenu à partir de chacun de ses chiffres, et éventuellement d'une virgule. Une ultime étape pourrait être – devrait être – un contrôle *a posteriori* de l'ordre de grandeur du résultat, mais l'activité menée dépasse l'application stricte de l'algorithme.

⁸⁶ Une alternative est $1 + 9 = 10$ et $10 + 3 = 13$, qui marquerait une forme d'activité de reconnaissance intermédiaire, proche de celle mise en œuvre en calcul mental. Cette remarque vaut en fait dès que l'associativité est mise en œuvre à des fins « économiques » avec passage à 10, par exemple dans des sommes de 3 nombres où il faut effectuer $3 + 8 + 7$.

Sur la même somme ($37 + 99$) à effectuer mentalement, il s'agit toujours évidemment de reconnaître une addition de deux entiers, mais en identifiant cette fois que l'un des deux est très proche de 100. Le travail d'organisation interne consiste à remplacer la somme à effectuer par celle de 100 et de 37 et de compenser ensuite (ou avant). Le traitement interne qui va suivre a donc été anticipé dans les deux phases précédentes, par la double reconnaissance de l'opération et de la spécificité des nombres en jeu. C'est comme si cette troisième phase a été déclenchée avoir d'avoir réellement débuté, par la transformation de 99 en $100 - 1$. Il reste alors à effectuer $37 + 99 = 37 + (100 - 1) = (37 + 100) - 1$ (ou $(37 - 1) + 100$) ; on remplace un entier par une différence d'entiers (choisie lors de l'anticipation), puis une somme de deux entiers par une somme/différence de trois entiers, et on table sur la disponibilité de $37 + 100$ et de l'expression de l'entier qui précède 100, sans parler de l'associativité en actes, qu'on considère ici comme naturelle. Il y a donc deux étapes et au moins un choix. $99 = 100 - 1$ articule connaissance-objet d'un nombre avec sa représentation comme le résultat d'une opération (objet représenté autrement) – l'idée d'outil étant associée au choix de la représentation, et à la reconnaissance de la facilité à calculer $37 + 100$. Autrement dit le caractère outil est associé à la faisabilité du calcul, elle-même liée à l'utilisation d'une propriété mémorisée (objet).

Remarquons que même en l'absence de non disponibilité de $99 = 100 - 1$, des alternatives consistent à effectuer (voir la partie sur le calcul mental, selon qu'on travaille par décomposition des deux nombres ou d'un seul, Beishuizen, 1993) soit $30 + 90$, puis $7 + 9$, et enfin $120 + 16$, soit $37 + 90$, puis $127 + 9$. Dans les deux cas, une activité d'organisation interne existe et la dialectique objet/outil des nombres est sollicitée. Remarquons enfin pour terminer que si le calcul posé $99 + 37$ conduit à la même analyse que $37 + 99$, le calcul mental $99 + 37$ conduit quant à lui à une analyse différente. En effet, la vision $99 = 100 - 1$ se transforme en $99 + 1 = 100$, qui se traduit par une activité de reconnaissance voisine, mais des activités d'organisation et de traitement interne qui peuvent être différentes, reposant toujours sur l'associativité en acte, avec une disponibilité de $37 = 36 + 1$ si l'élève passe par : $99 + 1 = 100$ et $100 + 36$, traduction opérationnelle de $99 + (1 + 36) = (99 + 1) + 36$.

Calculer mentalement des sommes (Tableau A-4 et Tableau A-5)

Chaque calcul proposé oralement dans les évaluations 6^e est lu deux fois, et les élèves ont ensuite en général 15 secondes pour répondre. Des différences de passation ont pu exister, selon que les élèves devaient attendre le signal de l'enseignant ou non pour écrire leurs réponses. Certains calculs sont écrits en ligne, ce qui peut évidemment induire des stratégies particulières, et influencer sur les taux de réussite des items, tout comme le fait que les calculs soient groupés ou donnés séparément.

Commentaires et analyse

- La plupart des calculs sur les entiers sont réussis par plus de 80 % des élèves, sans évolution temporelle notable, et sans fournir d'information sur les procédures des élèves.
- Trois items spécifiques sur les entiers ont des taux de réussite inférieurs à 80 % sont : $123 + 2$ dizaines ; $37 + 99$ et $3\ 600 + 1\ 400$. Si le premier fait intervenir un changement de registre « élémentaire » qui peut expliquer un taux de réussite inférieur à 80 %, on peut penser que les deux autres ont pu poser des difficultés de calcul proprement dit, ou de mémorisation, aux élèves qui ont effectué les calculs de la droite vers la gauche, d'une manière analogue à un calcul posé (nous n'avons pas évoqué cette alternative à la page précédente) : $37 + 99$ fait ainsi intervenir deux sommes successives avec 9, avec retenue, et on peut supposer qu'une bonne partie des élèves qui procèdent de cette façon ne considèrent pas 9 comme $10 - 1$, ce qui augmente alors encore la difficulté de l'addition. Quant au troisième calcul, la donnée orale des nombres peut avoir orienté des élèves vers un calcul sur des milliers alors que la somme cherchée repose sur une reconnaissance de la somme $36 + 14$ à effectuer en réalité ; autrement dit, on peut faire l'hypothèse que l'absence de disponibilité des nombres en jeu (36 centaines et 14 centaines) disparaît, par déficit de la part des élèves de capacité à changer de registre.
- Trois autres items indiquent des scores moins élevés ; ce sont les items qui portent sur des compléments, que nous avons classés comme des sommes à effectuer mentalement, mais qui peuvent aussi être associés à des différences.

- Aucun item comportant des décimaux ne dépasse 80 %, et il semble que les taux de réussite soient en baisse depuis 1998, année où nous disposons des premiers résultats. Malheureusement, aucun des trois items posés au début des années 2000 n'a été proposé récemment. Enfin, on peut signaler qu'un code permettait pour ces items d'identifier les élèves qui traitaient séparément parties entières et parties décimales comme pour $2,6 + 1,4 = 3,10$ (Grisvard & Léonard, 1981) et que le pourcentage de ces élèves est toujours égal environ à 10 %. Cela signifie donc que, si on prend en compte des taux de non-réponse faibles (environ 3 %), deux fois plus d'élèves environ font d'autres erreurs que celle-ci : s'agit-il d'erreurs de tables ? C'est peu probable compte tenu des chiffres en jeu. S'agit-il alors d'une absence de prise en compte (« d'oubli ») de la virgule ? Les documents de la DEPP que nous avons consultés ne mentionnent pas les erreurs effectivement produites par les élèves. Il est donc difficile d'interpréter ces erreurs en termes de changement objet/outil au niveau des nombres ou d'outil sur l'opération.

Calculer mentalement des différences (Tableau A-6)

Les conditions de passation sont les mêmes que pour les sommes.

Commentaires et analyse

Le calcul mental de différences est réussi très majoritairement par les élèves, avec des taux de réussite entre 70 % et 90 %, quand il s'agit de calculs « élémentaires » sur les entiers (à une étape sur le chiffre des unités, des dizaines ou des centaines) ou sur les décimaux quand les élèves peuvent opérer partie entière avec partie entière et partie décimale avec partie décimale ($2,8 - 1,3$), autrement dit quand il n'y a pas de passage objet/outil sur les nombres. Mais ces taux baissent nettement quand :

- il s'agit de soustraire 19 ; environ un élève sur deux réussit les deux tâches dont nous disposons, ce qui pourrait indiquer que les techniques utilisées ne font pas appel à $19 = 20 - 1$, ou que la procédure est « plaquée » de façon incorrecte pour aboutir à

$$n - 19 = n - 20 - 1.$$

- il s'agit de calculs sur les décimaux : en fait, le seul item qui nous permet de faire cette réserve est $38 - 1,5$ mais le taux de réussite à cette tâche et son écart avec celui de $2,8 - 1,3$ nous semblent suffisamment singuliers pour attirer notre attention.

Calculer mentalement des produits (Tableau A-7)

Les conditions de passation sont les mêmes que pour les sommes et les différences. On peut penser que les phases d'activité de calcul mental que nous avons décrites plus haut sont plus nécessairement mobilisables pour la multiplication ou la division que pour l'addition ou la soustraction, au sens où appliquer mentalement un algorithme d'un calcul posé est encore moins facile. Un élève qui ne disposerait pas de procédures particulières, adaptées aux nombres en jeu, se retrouverait donc dans une situation plus difficile à gérer pour effectuer mentalement une multiplication ou une division. Par ailleurs, nous avons classé ici des items qui pourraient être identifiés comme appartenant à un autre type de tâches, c'est-à-dire relevant davantage de la connaissance de relations entre certains nombres (25 et 100, 15 et 60) que de la capacité à effectuer mentalement des produits. Deux raisons nous ont conduit à ce choix : la première est que nous ne pouvons pas affirmer que les élèves mobilisent effectivement une connaissance sur les relations entre les nombres (pour cela, le temps de réponse aurait dû être plus court) ; la deuxième est que nous pouvons inclure dans ce type de tâches des calculs portant sur les entiers et les décimaux (par exemple 15×4 et $1,5 \times 4$), alors que des déclinaisons aux décimaux des relations sur les entiers ne figurent pas dans les programmes, et que leur mobilisation induit donc *a priori* au moins une étape de traitement.

Commentaires et analyse

- Les calculs en ligne marqués par un astérisque ne sont pas identifiés dans les évaluations comme des items mettant en jeu du calcul mental, mais l'application d'une technique opératoire, au même titre que des multiplications posées. Les techniques utilisées par les élèves peuvent être variées : opérations posées en colonnes, calculs en ligne effectués mentalement comme des opérations en colonnes (de la droite vers la gauche) ou procédures spécifiques de calcul mental (par exemple multiplier par 10 puis diviser par 2 – ou dans l'ordre inverse – pour multiplier par 5).

- Les taux de réussite sur les items 2005 et 2008 (20 fois 18 et 40 fois 25) sont peu élevés (moins de 40 %).
- De façon générale, les résultats sur les produits qui font appel à la disponibilité de la relation entre les nombres 25 et 100, ou 2,5 et 10 sont bas (moins d'un élève sur deux donne des résultats corrects), plus bas que ceux qui font intervenir 15 et 60, ou 1,5 et 6. On peut supposer que cela a ou aura des liens avec d'une part les relations entre les nombres décimaux qui font intervenir des quarts, que ce soit avec des écritures décimales ou fractionnaires, d'autre part avec des changements de registre (comme $1/4$ et $0,25$).
- L'ordre des facteurs semble peu avoir d'impact sur les performances des élèves : « 4 multiplié par 2,5 » et « 2,5 multiplié par 4 » donnent les mêmes pourcentages de réussite ; ces deux calculs sont réussis par un peu moins d'un élève sur deux. L'analyse *a priori* des deux tâches mène pourtant à des activités potentielles des élèves différentes. Si la deuxième peut être effectuée par une addition itérée ($2,5 + 2,5 + 2,5 + 2,5$) ou par une variante ($2,5 + 2,5 = 5$ et $5 + 5 = 10$, qui suppose la disponibilité de 4 comme 2 fois 2), il n'en va pas *a priori* de même pour la première. En effet, si on considère les deux tâches comme distinctes, et si on écarte la possibilité que ces tâches soient simples et isolées en tant qu'applications d'une connaissance sur la relation entre 2,5 et 4, l'activité de reconnaissance consiste à identifier une « multiplication par 2,5 ». L'organisation interne peut amener à deux cheminements : la décomposition de 2 en $2 + 0,5$ puis l'utilisation en acte de la distributivité de la multiplication sur l'addition ou le fait que 2,5 soit le quart de 10, ou la moitié de 5 (mais sans lien avec le premier facteur 4). Le traitement interne qui suivra conduit au remplacement d'une multiplication soit par une somme de deux produits, soit par une multiplication/division (ou l'inverse). Cependant, on peut supposer que, parmi les élèves qui réussissent le premier calcul, certains mettent effectivement en œuvre (en acte) la commutativité de la multiplication.
- L'intervention de 0,5 dans un produit semble être une réelle difficulté pour les élèves, que ce soit sous la forme « 3 fois 0,5 » ou « $62 \times 0,5$ ». Là encore, il est délicat de savoir quelle phase de l'activité des élèves est défailante et quel passage se fait mal ou ne se fait pas dans le processus que nous avons décrit plus haut. On peut chercher à attribuer cette difficulté à l'absence de disponibilité de 0,5 comme objet, mais on peut

noter aussi que le processus pour ces deux calculs n'est pas tout à fait de la même nature, même si tous les deux jouent sur un remplacement de l'opération initiale. Comme pour les calculs précédents, si « 3 fois 0,5 » peut être géré par $0,5 + 0,5 + 0,5$ et « $62 \times 0,5$ » par $62 : 2$, on voit bien que le deuxième calcul passe par une disponibilité de la « multiplication par 0,5 » et pas comme une interprétation de la multiplication en addition itérée⁸⁷.

- Pour compléter, un item avec 3 réponses possibles (0,12 ; 24 et 2,4) correspondant à la tâche $0,2 \times 12$ figure dans l'évaluation LOLF 2007 de fin d'école : 51 % des élèves répondent 2,4 ; 16 % environ répondent 0,12 et 29 % environ d'entre eux répondent 24. Quelles procédures des élèves peuvent être mises en œuvre ? La procédure induite par le programme 2002 est la suivante : 12 fois 2 dixièmes, c'est la somme de 10 fois 2 dixièmes, soit 20 dixièmes, ou encore 2 unités, et de 2 fois 2 dixièmes, soit 4 dixièmes. Cette somme, 2 unités et 4 dixièmes, s'écrit sous forme décimale 2,4. Mais il est loin d'être certain que beaucoup d'élèves utilisent cette procédure. La procédure la plus probable est alors la multiplication de 2 par 12, ou de 12 par 2, et le placement final de la virgule. On aurait d'ailleurs pu imaginer que les réponses proposées favoriseraient la production de la réponse correcte, avec une seule réponse qui offre « un seul chiffre derrière la virgule ». Une autre procédure porte sur une estimation de l'ordre de grandeur : 12 étant « un peu plus grand que 10 », et comme $0,2 \times 10 = 2$, les réponses 0,12 et 24 étaient donc à éliminer. Mais le recours à un ordre de grandeur ne semble pas non plus familier aux élèves, et enfin le calcul $0,2 \times 10$ peut constituer lui-même une difficulté pour certains élèves : comment $0, \dots \times 10$ pourrait-il dépasser $0, \dots$? En tout cas, cet item confirme que la présence d'un nombre décimal dans une multiplication est une difficulté pour les élèves, identifiée à la sortie de l'école primaire.

⁸⁷ On peut également à des stratégies proches de l'algorithme posé, qui consistent à effectuer les calculs sur des entiers et à « placer la virgule » dans l'écriture du produit obtenu.

3. Calculer mentalement des quotients (Tableau A-8)

Le calcul mental de quotients ne figure pas explicitement dans le programme 2008 alors qu'il est mentionné dans le programme 2002 : « Organiser et effectuer mentalement ou avec l'aide de l'écrit, sur des nombres entiers, un calcul de division en s'appuyant sur les résultats mémorisés et en utilisant de façon implicite les propriétés des nombres et des opérations. » Le programme 2002 donne ainsi deux exemples de calculs illustratifs:

« Dans le cas d'une division exacte, $65 : 5 = (50 : 5) + (15 : 5) = 13$.

Pour le calcul du quotient entier et du reste de 127 par 15, on peut essayer d'atteindre 127 en additionnant des multiples simples de 15 : 2 fois 15, c'est 30, 4 fois 15 c'est 60, 8 fois 15, c'est 120, donc le quotient est 8 et le reste est 7. »

Aucune trace du calcul mental de quotients dans le programme de 1995 (le mot « quotient » ne figure d'ailleurs pas dans ce texte), ni dans ceux de 1991 et de 1985, excepté à propos de la division par 10, 100 ou 1 000. En réalité, les items disponibles portent surtout, comme pour la multiplication sur la connaissance des relations entre 15 et 60 et 25 et 100, et/ou sur la moitié ou le quart, éventuellement formulé comme une division par 4.

Commentaires et analyse

- Les taux de réussite se situent majoritairement entre 60 % et 70 %, sauf quand il s'agit de la division par 4 (hormis $100 : 4$). On peut supposer qu'une technique particulière de calcul mental (deux divisions consécutives par 2 ou l'utilisation de la distributivité) n'est mobilisée que par peu d'élèves, et que la plupart ont recours à une division posée (avec potence) effectuée mentalement.
- En 1999, un tiers des élèves ne répondent pas au calcul : « 52 divisé par 4 » et 55 % des élèves ont répondu correctement à la fois aux deux items 2 et 65.

4. Multiplier et diviser mentalement un nombre entier ou décimal par 10, 100, 1000 (Tableau A-9 à Tableau A-12)

Multiplier mentalement un nombre entier ou décimal par 10, 100, 1000 (Tableau A-9 et Tableau A-10)

La multiplication d'un nombre décimal par 10, 100, ou 1 000 occupe une place importante dans le calcul sur les nombres entiers et les décimaux, notamment dans l'estimation de l'ordre de grandeur d'un produit. C'est sans doute un des exemples les plus frappants dans l'enseignement des mathématiques en fin d'école primaire et au début du collège, sur la nécessité de s'interroger sur ce qui se joue en classe sur les apprentissages des élèves. D'un côté, les professeurs n'y voient pas forcément un problème spécifique d'enseignement ; d'un autre côté, les résultats de toutes les évaluations nationales mises en place par la DEPP révèlent des scores de réussite élevés et stables quand il s'agit de nombres entiers, et plutôt bas et de surcroît en baisse quand il s'agit de nombres décimaux. Cet écart très net, entre la réussite à des tâches qui mettent en jeu des nombres entiers et celles qui portent sur des nombres décimaux qui ne sont pas entiers, a déjà été relevé par la recherche (Roditi, 2001).

« Nous remarquons des difficultés des élèves qui sont liées à celles qu'ils éprouvent avec les nombres décimaux et plus exactement avec l'écriture décimale ». Dans la perspective de la suite de notre étude, il nous semble que cette question ne peut pas être ignorée des enseignants des élèves qui arrivent en sixième. Enfin, si les documents d'accompagnement⁸⁸ pour l'école encourageaient à procéder par décalage des chiffres au lieu du décalage de la virgule, en liant cette compétence avec le système de numération décimale, nous ne connaissons pas les pratiques actuelles des enseignants de cycle 3.

⁸⁸ Document d'accompagnement *Le calcul mental à l'école élémentaire*

Commentaires et analyse

- Dès 1989, année de la première évaluation nationale à l'entrée en sixième, l'item 55 (24×10) est réussi à 95,1 %, tandis que les items 56 ($17,89 \times 100$) et 57 ($0,72 \times 1\,000$) sont respectivement réussis par 74,9 % et 64,7 % des élèves. Dix ans plus tard, en 1999, le taux de réussite de l'item 21 ($2,3 \times 10$) est 64,5 % tandis que celui de l'item 22 ($35,2 \times 100$) est 48,9 %. 20 ans plus tard, en 2008, le taux de réussite de l'item 91 (23×10) est 88,9 % tandis que celui de l'item 92 ($35,2 \times 100$) est 31,6 %⁸⁹. Pour ce même item, en 2005, les réponses du type 3500,2 ou 35,200 représentent 27,1 % des réponses.
- En ce qui concerne les deux multiplications M4 et M5 de l'évaluation à 20 ans d'intervalle, les baisses observées par rapport à 1999 sont faibles (respectivement 3,7 % et 0,6 %), et ne sont pas significatives, au regard des marges d'incertitude inhérentes aux enquêtes sur échantillons. L'ordre des taux de réussite est conservé : les élèves savent toujours légèrement mieux faire $7,14 \times 100$ que $1,54 \times 1000$, même si l'écart entre les deux taux de réussite a légèrement augmenté (passant de 3,9 % à 7 %). On peut en tout cas penser que, en 1999 comme en 2007, le fait d'avoir à « ajouter un zéro » pour obtenir 1540 explique la différence entre les deux taux, comme pour l'item 92 de l'évaluation nationale à l'entrée en sixième 2005.
- La comparaison avant/après les vacances d'été faisait apparaître en 1999 une baisse d'environ 5 % sur les deux multiplications M4 et M5. Le score de réussite de l'item 92 de 2005 (ou de 2008) peut être interprété comme une baisse nettement plus marquée.
- Au final, les résultats des items sont très parlants : la multiplication par 10, 100, ... d'un entier n'est pas une difficulté pour les élèves pour lesquels la technique consistant à ajouter des zéros permet de donner un résultat correct ; multiplier par 10, 100, ... un nombre décimal dont la partie décimale comporte autant de chiffres que de zéros dans 10, 100, ... est une difficulté pour un tiers des élèves ($2,3 \times 10$ ou

⁸⁹ Ce taux chute même à 17,6 % en ZEP : <http://evace26.education.gouv.fr/>

$7,14 \times 100$) et le faire quand ce n'est pas le cas ($35,2 \times 100$ ou $1,54 \times 1\,000$) l'est ou l'est devenu pour environ un élève sur deux, voire davantage.

- Les procédures des élèves, qui conduisent à une réponse correcte ou erronée, sont très diverses comme en attestent les productions numérisées auxquelles nous avons eu accès lors de l'évaluation à 20 ans d'intervalle. Les erreurs « classiques »

apparaissent : $1,54\,000$ ou $1000,54$ ou encore $7,1400$ ou $700,140$, d'autres comme $1000,54\,000$ ou 100054 rendent compte de procédures beaucoup plus hésitantes. Enfin, au vu de certaines réponses, on peut même se demander si des élèves identifient vraiment l'opération à effectuer. D'autres élèves posent la multiplication et l'effectuent de façon correcte ou non :

$$\begin{array}{r}
 1000 \\
 \times 7,14 \\
 \hline
 4000 \\
 +50000 \\
 +700000 \\
 \hline
 754000
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 100 \\
 \times 7,14 \\
 \hline
 400 \\
 1000 \\
 7000 \\
 \hline
 714,00
 \end{array}
 \quad
 \text{ou}
 \quad
 \begin{array}{r}
 1000 \\
 \times 7,14 \\
 \hline
 4000 \\
 5000 \\
 10000 \\
 \hline
 1090,00
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 100 \\
 \times 7,14 \\
 \hline
 700 \\
 +7000 \\
 +70000 \\
 \hline
 7770,00
 \end{array}$$

Ces élèves ont-ils appris une « règle » ? Ne l'ont-ils pas mémorisée ? Se montrent-ils tout simplement prudents ?

Diviser mentalement un nombre entier ou décimal par 10, 100, 1000 (Tableau A-11 et Tableau A-12)

Diviser un nombre entier ou décimal par 10, 100, 1000 est également un attendu en fin de cycle 3 et tous les éléments cités dans le paragraphe précédent peuvent être repris dans celui-ci, y compris le fait que les performances des élèves semblent en baisse pour ce type de tâches. Viennent en outre s'ajouter deux nouveaux éléments. Le premier est le passage potentiel d'un entier à un décimal par une division (par exemple $815 : 100$) qu'on n'a pas dans la multiplication, qui peut sans doute être associé avec la rupture avec la division euclidienne, et qu'on trouve dans certaines situations de partage qui peuvent permettre d'accéder à un

quotient décimal (mais qui est impossible dans des situations de groupement). Le deuxième est associé à un obstacle identifié en didactique des mathématiques pour les élèves, quand ils ont à diviser un nombre entier par un nombre plus grand ($67 : 100$), ce qui conduit certains d'entre eux soit à remplacer la division par une multiplication (67×100), soit à transformer la division à effectuer et à la poser comme l'illustre la production d'élèves ci-contre. Une réponse du type « 1 et reste 33 » illustre quant à elle la difficulté à donner un nombre décimal comme réponse⁹⁰.

$$\begin{array}{r} 100 \overline{) 67} \\ \underline{0} \\ 033 \end{array}$$

Commentaires et analyse

- On observe des taux de réussite élevés (supérieurs ou égaux à 70 %) quand les élèves ont des multiples de 10 à traiter (exemple : $630 : 10$).
- Cette observation n'est plus valable pour d'autres entiers, que les nombres soient supérieurs à ceux par lesquels ils sont divisés ($37 : 10$ ou $8\,006 : 100$) ou non ($67 : 100$).
- Ces taux sont légèrement plus faibles quand un « décalage élémentaire » de virgule est possible. Ceci concerne surtout la division par 10 ($38,45 : 10$ ou $325,6 : 10$) avec des pourcentages proches de 70 % alors que la division par 100 et par 1 000, dans ce cas de figure, donne des taux de réussite plutôt proches de 50 %.
- La donnée à l'oral ou à l'écrit, y compris d'un calcul simple ($37 : 10$) semble avoir un impact sur les résultats des élèves. On peut concevoir en effet qu'un déplacement mécanique de la virgule (visible ou non) soit facilité à la fois par un repérage visuel des chiffres sur lesquels doit s'opérer ce déplacement et par celui du « nombre de zéros » qui détermine ce déplacement.
- D5 et D6 renvoient à M4 et M5 avec des taux de réussite analogues, avec des baisses par rapport à 1999 légèrement plus importantes (6,1 % et 5,8 %). Comme pour les multiplications par 10, 100 et 1 000, on peut encore interroger les stratégies utilisées par les élèves. Très vraisemblablement, le décalage de la virgule, voire le recours à un

⁹⁰ On peut penser aussi à un effet de changement de contrat didactique.

tableau de numération, est utilisé par les élèves, avec toujours la même question légitime pour le type de tâches correspondant à D5 (67 : 100) : « Mais comment font les élèves quand il n'y a pas de virgule ? Ils en mettent une ! ». Seuls 55,4 % des élèves semblent le faire correctement en réalité...

La multiplication et la division par 10, 100 et 1 000 : un enjeu d'apprentissage important ?

Les activités qu'on peut imputer aux élèves sur ces types de tâches dépendent sans doute largement des « règles » qui leur ont été enseignées en classe. Ainsi pour la multiplication, si on accepte qu'une grande majorité d'élèves a comme techniques potentiellement mobilisables l'ajout de zéros à droite des nombres entiers, le décalage de la virgule vers la droite pour des nombres décimaux (écrits sous forme décimale), et une combinaison des deux, l'activité des élèves relève alors largement du traitement interne, avec prise d'information sur le nombre de zéros dans la puissance de 10 et organisation spatiale pour placer des zéros, décaler la virgule ou faire les deux. Dans cette dernière situation (par exemple $1,54 \times 1\,000$), on peut considérer comme une forme d'organisation interne l'alternative qui consiste à ajouter des zéros à droite puis à décaler la virgule vers la droite. Le même type d'analyse pourrait être fait pour la division, avec les éléments complémentaires que nous avons cités plus haut. Si on considère au contraire qu'une multiplication par une puissance de 10 a un effet sur la valeur de chacun des chiffres d'une écriture décimale, il n'y a ensuite plus qu'une seule « règle » qui consiste à appliquer l'effet de la multiplication sur le chiffre des unités du nombre multiplié puis à adapter la suite de l'écriture : par exemple, dans $1,54 \times 1\,000$, le 1 de 1,54 devient 1 millier, et il reste à écrire le 5, le 4 et un zéro final pour que le chiffre 1 corresponde effectivement à 1 millier. Ce sont les chiffres qui sont décalés vers la gauche et non la virgule qui est décalée vers la droite, et l'ajout d'un zéro ne correspond pas à l'application d'une « règle », mais à la nécessité d'écrire le résultat attendu correctement. Autrement dit, même si *in fine* les premières « règles » peuvent apparaître comme des conséquences opérationnelles de la deuxième, on retrouve *a minima* un jeu de micro-dialectique objet/outil sur le nombre, décomposé implicitement en puissances de 10, et outil/objet sur la multiplication où encore une fois la distributivité est utilisée en actes.

Les informations fournies par les items relatifs à ces deux types de tâches nous semblent donc « didactiquement significatives », à la fois sur ce qu'elles apportent sur les apprentissages des élèves, et sur les questions qu'elles posent concrètement pour les situations d'enseignement que les professeurs de mathématiques ont à gérer en classe de sixième. Comme nous l'avons déjà évoqué, nous ne connaissons que très partiellement les pratiques effectives actuelles des enseignants du 1^{er} degré sur ces questions, nous ignorons notamment si ces pratiques ont évolué depuis la parution des programmes de 2008. Multiplier mentalement un nombre entier ou décimal par 10, 100, 1000 est une capacité qui figure dans la progression de CM1 du programme 2008 du cycle 3 de l'école primaire, et diviser mentalement un nombre entier ou décimal par 10, 100, 1000 figure dans la progression de CM2. Nous avons constaté également qu'une partie des élèves éprouvent encore le besoin de poser des opérations pour effectuer ces calculs. Nous ne pouvons donc faire que des hypothèses à partir des réponses produites par les élèves dans les tests, et d'éventuelles traces écrites de leurs recherches. Très vraisemblablement, le décalage de la virgule, le recours à un tableau de numération, sont les principales procédures utilisées par les élèves. Cet enseignement précoce et exclusif de techniques aux dépens d'un travail sur le sens, comme le décalage de la virgule, ou l'ajout de zéros, ne semble pas favoriser l'acquisition de compétences relatives à la multiplication d'un nombre décimal par 10, 100 ou 1 000.

Depuis 2002, les documents officiels insistent sur la nécessité de faire réfléchir les élèves sur l'effet de la multiplication par 10, 100 ou 1000 sur la valeur de chacun des chiffres de l'écriture décimale, et non pas d'appliquer la « simple règle » de déplacement de la virgule. Le document d'accompagnement du programme 2002 *Le calcul mental à l'école élémentaire* encourage à procéder par décalage des chiffres au lieu du décalage de la virgule, en liant cette technique avec le système de numération décimale. Le document ressource actuel *Le nombre au cycle 3* est plus ambigu (page 107) : « La multiplication ou division par une puissance de dix peut être justifiée de différentes façons, mais il y a lieu de connaître la règle de déplacement de la virgule. Dans tous les cas, la compréhension du mécanisme s'acquiert en se ramenant aux fractions décimales. » Si la justification qui suit ces propos propose trois exemples qui détaillent des explications fondées sur la compréhension de l'effet d'une multiplication ou d'une division sur la valeur des chiffres dans l'écriture décimale d'un nombre, la référence à la « règle de déplacement de la virgule » est pour le moins surprenante.

Mais ces résultats posent un problème plus global sur l'enseignement des nombres à l'école et au collège sur les apprentissages des élèves : quel sens donne une grande partie des élèves à une multiplication par 10, 100 ou 1 000 ? Quel sens donnent-ils à l'écriture décimale d'un nombre décimal ? Quel contrôle de l'ordre de grandeur du résultat effectuent-ils ? La capacité « Multiplier ou diviser un nombre par 10, 100, 1 000 » est une capacité exigible pour le socle commun à l'issue de la sixième : quelle attitude peuvent alors adopter les professeurs de mathématiques de sixième ? Quelle durée d'enseignement doivent-ils consacrer à cette question ? Sont-ils tous conscients des raisons, en termes de pratiques d'enseignement et de difficultés conceptuelles liées aux décimaux, qui peuvent être des sources de « *misconceptions* » ? Quelles alternatives s'offrent alors à eux pour l'organisation de leur enseignement ? De notre point de vue, toutes ces questions sont symboliques des problèmes liés à l'enseignement des décimaux, et sont des questions centrales de notre recherche, comme nous l'exposons de manière plus détaillée dans le chapitre 2 sur la formation et dans le chapitre 3 sur le rôle du calcul mental.

Enfin, ces résultats soulèvent une dernière question, qui elle-même en appelle d'autres: pourquoi les scores de réussite obtenus à ces items sont-ils en baisse ? Cette question ne fait pas l'objet de notre recherche, qui est centrée sur la prise en compte d'un état des lieux, et tournée vers la suite de la scolarité, sans viser une compréhension rétroactive précise des différents facteurs qui ont pu conduire à cette situation. Mais il est néanmoins légitime de s'interroger sur ces facteurs.

5. Estimer mentalement un ordre de grandeur d'un résultat (Tableau A-13 et Tableau A-14)

L'estimation de l'ordre de grandeur d'un résultat est sans doute un des types de tâches les plus complexes car nécessitant plus que les autres un jeu subtil de dialectiques objet/outil sur les opérations et sur les nombres. C'est en effet, comme dans les types de tâches précédents, à la fois la reconnaissance de l'opération et la nature des nombres qui vont déterminer les choix à effectuer dans les phases d'organisation et de traitement internes, mais la taille des nombres et leur proximité avec d'autres nombres, plus faciles à traiter, vont également intervenir dans le processus. « Les élèves devront prendre conscience que les

approximations de nombres n'ont pas un caractère systématique, mais doivent être adaptées aux nombres en présence ou à la précision recherchée. Ainsi, 427 peut être arrondi à 430 s'il est ajouté à 64 (lui-même arrondi à 60), mais il peut également l'être à 400 s'il est ajouté à 2 615 (lui-même arrondi à 2600) ». (Document d'application pour le cycle 3, 2002). Il y a donc une nouvelle phase, qui consiste à choisir les nombres qui vont remplacer ceux donnés dans le calcul initial. Ce choix peut se faire sur un nombre ou sur plusieurs, et dépend de l'habileté globale de l'élève en calcul mental, autrement dit de sa maîtrise des faits numériques. Par ailleurs, la notion même d'ordre de grandeur d'un résultat est plutôt délicate à introduire auprès des élèves car on leur demande de comprendre que cet ordre de grandeur est en réalité non pas celui d'un résultat, mais le résultat qu'on obtient en remplaçant des nombres par d'autres, qu'il y a plusieurs réponses possibles, et que cela peut dépendre du contexte. De plus, cette notion repose implicitement sur des distances entre des nombres et de l'effet des opérations sur ces distances, ce qui peut être particulièrement obscur pour un élève dans le cas de la multiplication. Par exemple, qu'est-ce qu'un ordre de grandeur de 12×98 ? 1 000 obtenu par 10×100 ? 900 obtenu par 10×90 ? 1 200 obtenu par 12×100 ? Ou 980 obtenu par 10×98 ? 1 000 constitue *a priori* la réponse la plus experte, d'abord parce qu'il a été obtenu par l'opération la plus simple à effectuer, ensuite parce que 900, 980 et 1 200 ont eux-mêmes comme ordre de grandeur 1 000, et enfin parce que 1 000 provient d'une « subtile » compensation entre une baisse de 12 et une augmentation de 98. Mais d'un autre côté, 900, 980 et 1 200 sont suffisants par exemple pour invalider 294, qui provient d'une absence de décalage dans la multiplication posée de 98 par 12.

Les auteurs du rapport d'étape de la CREM sur le calcul (2001) insistent largement sur la nécessaire complémentarité que doivent entretenir calcul exact et calcul approché :

« Le jeu du calcul entre « approché » / « exact » nous semble donc pouvoir et devoir se mettre en place dès les débuts de la scolarité et là encore, il nous semble que l'évolution technologique peut contribuer à aider à établir de meilleurs équilibres. En effet, si l'on prend en compte le fait que, dès que les calculs même élémentaires sont un tant soit peu complexes (la notion de complexité étant ici très relative), ils sont dans toutes les pratiques scientifiques et sociales aujourd'hui pris en charge par des instruments de calcul, le contrôle de ces productions machine prend une importance accrue. Et ce qui est à la base de ce contrôle, c'est

d'abord la capacité, via le calcul mental, d'évaluer des ordres de grandeurs. Bien sûr, cette évaluation d'ordres de grandeur, qui relève du calcul approché, dépend elle-même de compétences de calcul exact, mais pas exactement de celles nécessaires à l'exécution fiable par exemple de multiplications ou divisions de nombres de plusieurs chiffres quelconques. Le calcul avec les puissances de dix, associé à la connaissance d'une base raisonnable de résultats, dont font partie, bien sûr, les tables d'addition et de multiplication, la capacité à décomposer et recomposer les nombres et à jouer sur les propriétés des opérations sont ici les outils de base pour contrôler la taille des nombres produits. A ceci vont s'ajouter des contrôles plus locaux qui peuvent porter par exemple sur les derniers chiffres et mettre en jeu, de façon plus ou moins élémentaire, propriétés arithmétiques des nombres et congruences. »

Cette question de l'estimation d'un ordre de grandeur d'un résultat, essentielle en calcul numérique, et notamment dans la résolution de problèmes, est soulignée depuis des années dans les programmes. Et pourtant on entend cependant très fréquemment les enseignants, depuis l'école jusqu'au lycée (et même après !), regretter le manque « de bon sens » des élèves qui fournissent des résultats aberrants.

Nous ne disposons malheureusement que d'assez peu d'items qui sont en outre très différents les uns des autres, donc à exploiter avec prudence, pour l'évaluation de ce type de tâches. Peut-être faut-il attribuer ce faible nombre d'items au simple fait qu'il est délicat de mettre en œuvre par écrit des modalités qui garantissent que les élèves estiment un ordre de grandeur d'un résultat sans chercher à auparavant calculer le résultat exact.

Commentaires et analyse

- Il apparaît une différence très sensible entre les items portant sur l'ordre de grandeur d'un produit, en particulier portant sur des nombres décimaux, et les autres.
- Le premier item du Tableau A-13 est à considérer à part car il consiste à donner un ordre de grandeur d'un nombre et non du résultat d'un calcul.
- Les distracteurs ne sont sans doute pas équivalents d'un item à l'autre. Par exemple, 31,7 % des réponses, repérées par un code 6 dans l'item 90, correspondaient à la réponse 800, c'est-à-dire au produit de 4 par 200 au lieu de 5 par 200.

- L'item 34 de 1996 présente une difficulté supplémentaire car l'estimation d'un ordre de grandeur conduit à deux réponses possibles (8 208 et 8 197) dont l'une d'entre elles (8 197) est à disqualifier par observation des chiffres des unités des facteurs.
- L'item 84 de 1998 est également à traiter à part : hormis la tâche différente des autres items qui consiste à fournir une explication et non un résultat, les élèves ont non seulement à estimer un ordre de grandeur d'un produit, mais ensuite à le comparer avec une réponse proposée qu'ils doivent rejeter.

Enfin, l'étude des productions des élèves lors de l'enquête 1987-2007 montre l'importance que pourrait avoir l'estimation d'un ordre de grandeur pour le contrôle de la validité des résultats obtenus. En effet, on peut penser que les résultats font écho à cette phrase extraite du rapport de l'inspection générale sur l'enseignement des mathématiques au cycle 3 de l'école primaire (2006) « Certains maîtres, trop rares, conduisent les élèves à effectuer une vérification des opérations calculées : la plus essentielle, qu'il faudrait effectuer systématiquement, porte sur l'ordre de grandeur du résultat. » et qu'ils auraient facilement pu être disqualifiés par un contrôle élémentaire de leur ordre de grandeur . En voici quelques exemples :

<p>Une somme dont un terme est environ 19 milliers ne peut pas être égale à 10 milliers</p>	$\begin{array}{r} 19\ 786 \\ +\ 215 \\ +\ 3\ 291 \\ \hline 10\ 192 \end{array}$	<p>Pas plus qu'à 13 milliers</p>	$\begin{array}{r} 19\ 786 \\ +\ 215 \\ +\ 3\ 291 \\ \hline 13\ 292 \end{array}$
<p>Quand on soustrait un nombre entier (naturel) à 2 143, la différence obtenue ne peut pas être supérieure à 2 143.</p>	$\begin{array}{r} 2\ 143 \\ -\ 527 \\ \hline 2\ 626 \end{array}$		$\begin{array}{r} 2\ 143 \\ -\ 527 \\ \hline 3\ 676 \end{array}$
<p>Quand on soustrait un nombre entier (naturel) à 1 627, la différence obtenue ne peut pas être supérieure à 1 627.</p>	$\begin{array}{r} 1\ 627 \\ -\ 870 \\ \hline 1\ 757 \end{array}$		$\begin{array}{r} 1\ 627 \\ -\ 870 \\ \hline 1\ 857 \end{array}$

C. Effectuer un calcul posé (Tableau A-15 à Tableau A-26)

Nous l'avons dit plus haut, dans un calcul posé, seul l'aspect objet de l'opération est convoqué dans l'activité de l'élève, avec une place presque exclusive de la phase de traitement interne, tout entière dédiée à l'application d'un algorithme standard. Cet algorithme va du plus simple (addition d'entiers) au plus compliqué (division des décimaux), peut ne pas être unique (pour la soustraction), peut donner plus ou moins de place aux phases de reconnaissance et d'organisation externe (par exemple pour la multiplication, le choix de l'ordre des facteurs). On peut éventuellement mettre à part la multiplication de deux nombres décimaux pour les élèves qui s'appuient sur un ordre de grandeur attendu du résultat pour placer la virgule au produit (Roditi, 2001) et la division, qui peut comporter des mini-successions d'activités sur les nombres eux-mêmes et pas seulement sur leurs chiffres. Mais, répétons-le, et c'est ce qui fait, et surtout ce qui a fait historiquement la force à la fois de l'écriture décimale des nombres décimaux et de ces algorithmes, leur caractère universel permet d'obtenir un résultat par écrit aux quatre opérations, de façon assez simple et dans un délai relativement court sur des nombres « usuels », avec une bonne mémorisation des tables d'addition et de multiplication.

1. Additionner, soustraire, multiplier des nombres entiers ou décimaux (Tableau A-17 à Tableau A-23)

Addition de nombres entiers (Tableau A-15 et Tableau A-16)

On peut d'abord observer une cohérence des tâches proposées avec les instructions officielles. Ainsi, le document d'accompagnement pour les programmes de 2002 « Le calcul posé à l'école élémentaire » est très explicite : « Il est important de proposer également des additions de plus de deux nombres que les élèves doivent calculer en une seule fois. » Mais ce qui ressort nettement du Tableau A-15, c'est la régularité des scores de réussite au-dessus de 80 %, voire 90 %, même si l'item 15 posé de 2005 à 2008 laisse entrevoir une légère baisse. On peut clairement constater que les élèves, à la sortie de l'école primaire, savent effectuer une addition posée sur des entiers naturels, ou encore, qu'une addition posée sur des entiers naturels est un type de tâches qui est largement réussi à l'issue de l'école primaire. Les

informations données par les résultats des items des évaluations nationales montrent par ailleurs que l'écart ZEP – hors ZEP se situe entre 4 % et 5 % sur ce type de tâches.

Les causes des erreurs sur les additions sont multiples et se combinent parfois. Nous citerons par exemple quatre catégories dégagées dans une analyse faite par la DEPP en 2005⁹¹ : des erreurs dans les calculs élémentaires de sommes (sur les tables d'addition), des erreurs liées à une mauvaise maîtrise de la numération (signification de la position des chiffres dans l'écriture des nombres), des erreurs liées à la gestion de la retenue et un parasitage par une autre opération. La seule donnée des taux de réussite ne permet pas de déterminer la nature des erreurs des élèves : erreurs de « tables » ou erreurs de retenues ? En particulier, dans le cas d'erreurs de retenues pour des additions posées ne se limitant pas à une retenue « égale à 1 », on pourrait se demander à quels moments des algorithmes ces erreurs ont lieu. Les réponses à ces questions permettraient d'envisager des hypothèses sur les causes de ces erreurs : défaut d'automatisation des tables d'addition, ou lien insatisfaisant entre pratique de la technique de l'addition posée avec retenue et le groupement par dizaines, centaines, ... ou encore difficulté de concentration.

Les additions à trous sur les nombres entiers (Tableau A-16) relèvent d'un type de tâches qui n'est plus présent après 1999 (excepté pour l'évaluation à 20 ans d'intervalle). Ce type de tâches, très fréquent pendant de nombreuses années, est sans doute nettement moins proposé aux élèves en classe⁹² dorénavant. C'est d'ailleurs pour A6 et A7 que la baisse des taux de réussite sur les additions par rapport à 1987 est la plus sensible. En fait, nulle part dans les derniers programmes, dans les documents d'application ou les documents d'accompagnement, il n'est fait référence à des opérations à trous comme objets d'enseignement. Par exemple, « compléter une addition à trous » ne figure pas dans les programmes 2008 parmi les capacités à acquérir par les élèves, ni au cycle des apprentissages

⁹¹ Exploitation pédagogique des résultats des évaluations nationales :

<http://educ-eval.education.fr/pdf/fiche2005.pdf>

⁹² Un examen des manuels utilisés dans les classes permettrait de donner du poids à cette assertion.

fondamentaux, ni au cycle des approfondissements. En revanche, la maîtrise du répertoire additif (tables d'addition), le calcul de compléments à 10, à 100, la décomposition de nombres entiers inférieurs à 20 sous forme additive sont des compétences explicitement spécifiées comme devant être acquises à la fin de l'école primaire. Quant à l'activité des élèves, ces items ne se situent pas au même niveau que les items précédents car ils renvoient au sens de l'addition et de la soustraction, et à leur lien, plutôt qu'aux techniques opératoires⁹³ proprement dites.

Commentaires et analyse

- Un exemple de prudence à tenir est donné par les interprétations des résultats des additions posées. On trouve dans l'évaluation à l'entrée en sixième 1991 l'item 26, repris dans l'évaluation « Avant et après les vacances » en 1999, dont on peut estimer que le type de tâches demandé aux élèves est analogue à celui de l'addition A2 de l'évaluation à 20 ans intervalle : trois termes entiers, dont un qui comporte un chiffre de moins que les deux autres, mais la première retenue, celle qui va porter sur les chiffres de dizaines est un « 2 » puisque $9 + 7 + 8 = 24$, comme dans l'addition A3. Cette différence, qui correspond à une difficulté connue chez les élèves, est à prendre en compte.
- L'item 15 de l'évaluation à l'entrée en sixième 2005 à 2008 se rapproche davantage de l'addition A3, mais comporte deux retenues égales à 2 contre une seule pour A3: la première sur les chiffres des dizaines, et la seconde sur le chiffre des milliers. Cette différence, qui peut sembler « anodine », peut constituer l'argument principal⁹⁴ pour expliquer l'écart entre le score de réussite entre cette addition et l'addition A3.
- Des items proposant des calculs en ligne, c'est-à-dire laissant à la charge des élèves l'écriture en colonnes de l'addition sont également proposés dans les évaluations.

⁹³La DEPP, dans ses tableaux de « compétences », classe ces items dans « Utiliser une connaissance » et non pas dans « Appliquer une technique ».

⁹⁴ Evidemment, les moments différents de la passation, les conditions différentes de la passation entrent certainement aussi en ligne de compte.

Ainsi par exemple, le score obtenu pour A4 dans l'évaluation à 20 ans d'intervalle est cohérent avec les scores précédents, puisque situé entre celui de A1 (2 termes, pas de retenue) et A2 (3 termes, retenue), la baisse observée par rapport à 1987 étant elle aussi cohérente avec les baisses des taux de réussite des additions précédentes.

- L'item A6 est une addition à trous particulière puisqu'un des deux termes de la somme est en fait manquant : les élèves peuvent soit opérer directement à partir de l'addition posée par la recherche de complément chiffre après chiffre, soit travailler sur l'addition en tant qu'objet, autrement dit transformer l'addition proposée en une soustraction équivalente : chercher le nombre tel que $647 + \dots = 1\,506$, c'est chercher la différence $1506 - 647$. Cet item peut être rapproché de l'item 21 de l'évaluation « Avant et après les vacances » de 1999, mais nous manquons de références plus récentes.
- L'item A7 est en revanche une « vraie » addition à trous, c'est-à-dire dans laquelle certains chiffres d'un des deux termes et de la somme manquent. Les élèves ne peuvent alors que procéder de proche en proche, en partant des chiffres des unités, en mobilisant à la fois le sens de l'addition (et de la soustraction) et les techniques opératoires. Il semble alors peu surprenant que la baisse des taux de réussite soit encore plus importante pour A7 que pour A6.

Addition de nombres décimaux (Tableau A-17)

Entre 70 % et 80 % des élèves à l'issue de l'école primaire savent effectuer une addition (posée ou à poser) sur des nombres décimaux, soit de 10 % à 20 % de moins que pour les nombres entiers. Ces pourcentages sont stables sur l'ensemble des années pour lesquelles nous avons des résultats, que ce soit dans des calculs posés ou en ligne, avec un écart peu important dans l'étude « Avant et après les vacances » de 1999. Il convient cependant d'être attentif aux résultats des élèves de ZEP qui ne sont environ que deux sur trois à réussir un tel type de tâches, avec une tendance à la baisse. L'écart des pourcentages de réussite entre des opérations sur des nombres entiers et sur des nombres décimaux est *a priori* à imputer à une difficulté nouvelle liée à l'usage des décimaux. La somme des chiffres des parties décimales des nombres se fait exclusivement en fonction du rang et non plus simplement « de droite à gauche » comme pour les nombres entiers. Cet aspect peut se

rencontrer soit dans un calcul posé (mauvais alignement de 22,4 par rapport à 56,09 et 233,25), soit dans un calcul en ligne (somme malhabile des parties décimales) : dans ce dernier cas, un traitement séparé des parties entières et des parties décimales pourrait en effet conduire à (9 + 4 + 25) centièmes au lieu de (9 + 4) centièmes + (4 + 2) dixièmes.

Les productions numérisées des élèves lors de l'évaluation à 20 ans d'intervalle nous permettent de catégoriser les erreurs des élèves, comme l'illustrent les exemples ci-dessous :

- Erreurs d'addition (tables)

$6 + 2 + 3 = 13$	$\begin{array}{r} 56,09 \\ + 22,4 \\ \hline 233,25 \\ \hline 319,74 \end{array}$	$1 + 3 + 5 + 2 = 9$ oubli du 2 ?	$\begin{array}{r} 233,25 \\ + 56,09 \\ + 22,4 \\ \hline 291,74 \end{array}$
------------------	--	-------------------------------------	---

- Erreurs de recopiage

59,09 au lieu de 56,09	$\begin{array}{r} 59,09 \\ + 22,40 \\ + 233,25 \\ \hline 314,74 \end{array}$	232,25 au lieu de 233,25	$\begin{array}{r} 232,25 \\ 22,4 \\ \hline 56,09 \\ \hline 310,74 \end{array}$
------------------------	--	--------------------------	--

- Erreurs d'alignement

	$\begin{array}{r} 233,25 \\ + 56,09 \\ + 22,4 \\ \hline 291,58 \end{array}$	ou erreur d'énoncé ?	$\begin{array}{r} 56,09 \\ 233,25 \\ + 22,4 \\ \hline 311,38 \end{array}$
--	---	----------------------	---

- « Oubli » de la virgule

	$\begin{array}{r} 56,09 \\ 22,4 \\ 233,25 \\ \hline 311,74 \end{array}$		
--	---	--	--

Soustraction de deux nombres entiers (Tableau A-18 et Tableau A-19)

Les taux de réussite sur les soustractions de nombres entiers sont, comme pour l'addition, très élevés : supérieurs à 90 % quand il n'y a pas de retenue, et proches de 80 % quand il y en a une. Pour les soustractions posées en colonnes comme pour les additions, la seule donnée des taux de réussite ne permet pas de déterminer la nature des erreurs des élèves : erreurs de « tables » ou erreurs de retenues ? Il serait intéressant de connaître les différentes procédures utilisées par les élèves : technique « classique » reposant sur l'invariance d'une différence par ajout simultané d'un même nombre aux deux termes de la soustraction, technique reposant sur « l'échange à 10 contre 1 », ou techniques par recherche d'un complément (ex : pour aller de 2852 à 3000, il faut 148, donc pour aller jusqu'à 5329, il faut $2329 + 148 = 2477$). Il serait intéressant également de connaître la proportion d'élèves qui soustraient systématiquement le plus petit chiffre au plus grand, quels que soient les deux nombres en présence.

Parmi les productions des élèves analysées lors de l'évaluation à 20 ans d'intervalle, comme pour les additions, les retenues ne sont pas toujours visibles, alors même que les soustractions sont fausses. Par ailleurs⁹⁵, nous n'avons pratiquement relevé aucune soustraction avec échange de 1 contre 10. Nous faisons l'hypothèse que cette méthode n'est pas enseignée, ou que, si elle l'est effectivement au cycle des apprentissages fondamentaux, elle est ensuite délaissée par les enseignants qui considèrent la méthode avec retenue comme une méthode « plus experte ». Cet exemple est caractéristique d'une influence culturelle sur l'enseignement.

Des résultats sur les soustractions à trous sur les nombres entiers complètent les données, avec des commentaires proches de ceux effectués sur les additions.

⁹⁵ Cette méthode est pourtant répandue dans de nombreux pays d'Europe et d'ailleurs.

Commentaires et analyse

- Les items S2 et S3 de l'évaluation à 20 ans d'intervalle indiquent tous deux une baisse de 10 points. Il se trouve que ces deux items, contrairement à presque tous les autres items, nécessitent deux retenues.
- Les taux de réussite relevés sur la soustraction « $463 - 167$ », posée 5 fois en 15 ans dans les évaluations à l'entrée en sixième, montrent un fléchissement encore plus important, d'environ 30 points. C'est aussi un calcul qui nécessite deux retenues. Notons enfin que cette tâche, compte tenu des nombres en jeu, se prête plus aisément à un calcul mental qu'à un calcul posé.
- L'item S6 est une soustraction à trous particulière puisqu'un des deux termes de la différence est manquant. Comme pour A6, deux procédures s'offrent aux élèves : la première consiste à transformer la soustraction proposée en addition, autrement dit à mettre en œuvre que chercher le nombre tel que $\dots - 768 = 3\ 290$, c'est chercher la somme $3\ 290 + 768$; la deuxième consiste à opérer directement à partir de la soustraction posée par la recherche de complément chiffre après chiffre.
- L'item S7 est une « vraie » soustraction à trous, c'est-à-dire dans laquelle certains chiffres d'un des deux termes et de la différence manquent. Les élèves ne peuvent alors que procéder de proche en proche, en partant des chiffres des unités. Cet item peut être rapproché de l'item 22 de l'évaluation « Avant et après les vacances » de 1999, mais nous manquons là aussi de références plus récentes. Comme pour les additions, il semble que ce type de tâches, très fréquent pendant de nombreuses années, soit aujourd'hui moins familier des élèves au cours de leur scolarité.
- Les items S6 et S7 sont également caractérisés par des taux de réussite très bas (respectivement 38,6 % et 49,2 % en 2007) et des baisses très importantes par rapport à 1987 (respectivement 23,9 % et 23,0 %). Nous pouvons reprendre les hypothèses et les commentaires faits pour A6 et A7 sur le manque d'entraînement des élèves à accomplir ce type de tâches.
- La comparaison des taux de réussite entre S6 et S7 appelle une remarque supplémentaire. S7 est mieux réussi que S6 en 2007, de 10,6 points, alors que la tâche proposée aux élèves ne permet pas le passage à une addition, ce qui rendrait la tâche plus simple alors à traiter. On peut donc penser que ce passage a effectivement été réalisé par peu d'élèves. Ceci a comme effet de constituer pour S6 une tâche potentiellement

plus difficile à réaliser pour les élèves car les chiffres manquants appartiennent pour S6 au plus grand nombre alors que pour S7 ils servent à écrire le plus petit nombre ou la différence. Or, il n'est pas équivalent, indépendamment du problème du passage au-delà de 10, de chercher pour un élève à quel nombre on soustrait un nombre donné pour obtenir la différence ($? - b = c$), de chercher quel nombre il faut soustraire d'un nombre donné pour en obtenir la différence ($a - ? = c$), ou de calculer directement la différence ($a - b = ?$).

Soustraction de deux nombres décimaux (Tableau A-20)

Un constat immédiat porte sur les différences sensibles de réussite aux items selon qu'il s'agit de deux nombres ayant le même nombre de chiffres dans leurs parties décimales ou non. Les résultats montrent en outre une différence de réussite entre addition et soustraction, avec une diminution régulière des pourcentages de réussite pour la soustraction : en 2008, environ 50 % des élèves savent faire une soustraction sur des nombres décimaux à leur sortie du CM2. La variation des scores selon les nombres mis en jeu dans les opérations incite à penser que c'est autant la maîtrise des nombres décimaux que celle de la technique opératoire qui doit être prise en compte, et qu'il y a une incertitude sur leur stabilisation pour environ 10 % d'élèves. Cette remarque renvoie peut-être à la contradiction observée par Peltier (2004) et son équipe entre la logique de réussite immédiate et la logique d'apprentissage.

Commentaires et analyse

- On peut remarquer une baisse sensible observée sur les deux items (18 et 20) repris dans l'étude « Avant et après les vacances de 1999 ».
- Le taux de réussite de l'item S5 « chute brutalement » à 49,5 %. Ce taux, vu comme un score absolu, peut être considéré comme inquiétant, tout comme la baisse de plus de 22 points par rapport à 1987. Regardons de plus près la tâche proposée aux élèves : seul le nombre à soustraire est un « vrai » nombre décimal (un seul chiffre, celui des dixièmes, dans la partie décimale), l'autre est un entier. Pour cet item, si les élèves n'ont à traiter qu'un seul nombre décimal, ils ont en revanche à utiliser 4 retenues successives pour effectuer la soustraction (on peut supposer qu'ils utilisent ici la

méthode « classique » dite « de conservation des écarts »). Il est probable que dans le cas de cet item qui demande une habileté technique certaine, l'absence d'exercices répétitifs relevant du même type de tâches puisse être évoquée comme explication du pourcentage de réussite de 2007. De plus, il est possible que la manipulation des nombres décimaux en lien avec les techniques opératoires ne rentre pas forcément dans les pratiques usuelles des enseignants au cycle des approfondissements. Mais encore une fois, il faudrait ici connaître les erreurs commises par les élèves, en particulier le mode de traitement des 7 dixièmes du nombre à soustraire. Comme pour les nombres entiers, l'analyse qualitative que nous avons menée fait apparaître un certain nombre d'erreurs, mais nous n'avons pas aujourd'hui approfondi notre analyse sur la répartition des erreurs commises.

- L'item 79 de l'évaluation nationale CM2 de janvier 2010 présente un taux de réussite égal à 51,6 % (et 37,1 % en RAR⁹⁶). La soustraction demandée cumule deux difficultés, l'une calculatoire, l'autre liée à l'écriture décimale. On peut donc penser à un « brouillage algorithmique » pour la soustraction qui n'existe pas pour l'addition : ce phénomène existe sans doute pour la partie décimale (ce qui n'est sans doute pas le cas pour la soustraction posée ici puisque « 85 – 2 » ou « 8 – 2 » sont possibles) et pour la partie entière (8 – 9 ?, 3 – 4 ?). Autrement dit, la gestion des retenues pour la soustraction n'est pas du même niveau de procédure mentale que pour l'addition.

Erreurs rencontrées sur les soustractions dans les productions des élèves lors de l'évaluation à 20 ans d'intervalle

- Erreur de retenues

			$\begin{array}{r} 4700 \\ - 2780,7 \\ \hline 1920,3 \end{array}$
--	--	--	--

⁹⁶ Réseaux Ambition Réussite, créés en 2006, lors d'un plan de relance de l'éducation prioritaire.

- Erreur d'alignement

	$\begin{array}{r} 4700 \\ - 2789,7 \\ \hline 1680,3 \end{array}$		
--	--	--	--

- Erreurs de procédures

	$\begin{array}{r} 4700 \\ - 2789,7 \\ \hline 1910,7 \end{array}$		$\begin{array}{r} 4700 \\ - 2789,7 \\ \hline 1910,7 \end{array}$
--	--	--	--

- « Oublis » de la virgule

	$\begin{array}{r} 4700,0 \\ - 2789,7 \\ \hline 1910,3 \end{array}$		$\begin{array}{r} 4700,0 \\ - 2789,7 \\ \hline 1910,3 \end{array}$
--	--	--	--

- Confusions sur l'écriture des nombres décimaux : le terme le plus petit est celui qui a le plus de chiffres

$\begin{array}{r} 2789,7 \\ - 4700 \\ \hline 3089,7 \end{array}$	$\begin{array}{r} 2789,7 \\ - 4700 \\ \hline 1259,7 \end{array}$	$\begin{array}{r} 2789,7 \\ - 4700 \\ \hline 18089,7 \end{array}$
--	--	---

Ces trois dernières erreurs renvoient à des conceptions erronées sur la comparaison des nombres décimaux liées à leur écriture décimale (plus un nombre a de chiffres dans son écriture décimale, plus il est grand). Cela conduit certains élèves à chercher à effectuer $2789,7 - 4700$, soit en adaptant une technique hybride quand ils arrivent aux chiffres des milliers, soit à modifier l'alignement correct et effectuer ainsi $2789,7 - 470,0$.

Là encore, l'analyse d'un bon nombre de réponses fausses, que nous ne sommes pas en mesure de quantifier, met en évidence des résultats que les élèves « n'auraient pas dû

garder » s'ils avaient effectué un travail sur un ordre de grandeur du résultat. En particulier, les oublis de virgule, et les erreurs de retenues sur les chiffres des milliers pourraient ainsi être remarqués par les élèves⁹⁷ et entraîner une correction de leur part. Mais il semble que cette activité de contrôle ne soit pas disponible chez eux, ou en tout cas, pas mobilisée.

Synthèse sur l'addition et la soustraction de nombres décimaux

Nous reprenons à notre compte l'analyse de la DEPP figurant dans le document Les nombres décimaux dans les évaluations de 1997 à 2003 :

« En étudiant les résultats obtenus par les élèves aux évaluations depuis 1997, on constate une stabilité des résultats sur les points suivants :

- les additions et les soustractions sont globalement bien réussies ;
- les résultats aux items portant sur les additions baissent dès que le nombre de chiffres augmente ;
- le fait de faire poser les opérations diminue sensiblement l'oubli ou l'erreur de placement de la virgule ;
- les résultats aux items portant sur les soustractions sont nettement en baisse dès que les parties décimales des nombres sont de formats différents, et le traitement séparé des parties entières et décimales apparaît plus fréquemment ;
- les résultats aux items portant sur les soustractions sont en baisse dès que le chiffre des dixièmes de la partie décimale du nombre à soustraire est plus grand que celui du premier nombre. »

Cette tendance semble confirmée par l'étude 1987 – 2007. On peut penser que les élèves font beaucoup moins de soustractions de ce type qu'ils n'en faisaient dans les années 80, ce qui confirmerait les travaux de Bolon (1992) « Les algorithmes sur les décimaux

⁹⁷ Nous sommes bien conscient qu'un travail sur les ordres de grandeur ne garantit pas à lui seul l'exactitude d'un résultat.

s'automatisent facilement. Mais en l'absence d'ancrage sur les propriétés des décimaux ou d'exercices répétitifs, ils *dérangent*⁹⁸ ».

Multiplication de deux nombres entiers (Tableau A-21 et Tableau A-22)

Jusqu'au début des années 2000, au moins 60 % des élèves en fin de CM2 savent effectuer une multiplication d'un nombre entier à deux ou trois chiffres par un nombre entier à deux ou trois chiffres. L'écart très important constaté entre la fin de CM2 et l'entrée en sixième en 1999, sur l'item 50, semblerait montrer que la connaissance des tables de multiplication ou la technique opératoire n'est pas stabilisée chez environ 15 % des élèves. L'évolution des pourcentages obtenus à plusieurs items depuis quelques années indique une forte baisse de la réussite des élèves à ce type de tâches, qu'on ne peut évidemment pas éviter de mettre en lien potentiel avec l'usage de la calculatrice.

Les analyses successives des réponses des évaluations nationales à l'entrée en sixième montrent toutes, grâce à des codes intermédiaires, que les erreurs provenant d'une connaissance insuffisante des tables de multiplication sont plus fréquentes que celles qui sont dues à un manque de maîtrise de la technique, en particulier à un mauvais décalage. Ce constat explique les variations importantes dans les taux de réussite des tâches, selon les tables de multiplication qui sont convoquées. Les erreurs commises seraient essentiellement dues à une connaissance insuffisante des tables de 7, de 8 et de 9 et à des erreurs de calculs intermédiaires de produits avec retenues.

Quelques multiplications à trous ont été proposées entre 1989 et 1999 et confirment principalement l'obstacle de la table de 8.

⁹⁸ Le verbe est entre guillemets chez Bolon.

Commentaires et analyse

- On constate sur l'item M1 un taux de réussite très élevé : un seul chiffre pour le deuxième facteur, et des chiffres tous inférieurs ou égaux à 6.
- L'item M2 est un des items qui montrent clairement une baisse très sensible de la réussite des élèves pour ce type de tâches.
- Une multiplication très voisine de M2 est l'item 28 de l'évaluation à l'entrée en sixième de 2005 à 2008, mais on peut être très surpris du taux de réussite très éloigné de celui de M2. Pour cette opération aussi, le score obtenu en ZEP est en particulier très bas, avec un écart de 10 % sur les secteurs hors ZEP. Pour cet item, réussi par environ 47 % des élèves (mais moins de 40 % en ZEP), les erreurs de tables s'élèvent à environ 25 % contre 3 % pour les erreurs de décalage. Or, ce qui distingue principalement la multiplication M2 de celle de l'item 28, c'est le 8, seul chiffre des facteurs à varier d'une opération à l'autre. La mémorisation de la table de 8 semble donc effectivement constituer une difficulté importante pour les élèves. Pourquoi ?
- Lors de l'étude déjà citée sur l'évolution des acquis des élèves avant et après les vacances d'été en 1999 (Chollet-Remvikos & Lévasseur, 2004), des écarts importants étaient constatés, sur les mêmes items, entre les scores moyens en fin de CM2 et en début de sixième. Ainsi la multiplication 759×109 n'était réussie que par 45,8 % des élèves à l'entrée en sixième, soit une baisse de plus de 15 points en ... 3 mois ! Nous reprendrons à notre compte l'analyse faite à propos de ces résultats, qui distinguait les capacités pouvant être considérées comme maîtrisées (scores stables avant et après les vacances d'été) de celles à considérer comme en cours d'acquisition. Cette variabilité de certains scores nous amène d'ailleurs à réaffirmer notre prudence dans les conclusions qui peuvent être tirées des résultats que nous présentons. Nous pourrions même aller jusqu'à envisager que des résultats de fin de CM2 inférieurs à ceux des années précédentes pourraient en fait révéler une hausse des acquis des élèves, sous réserve d'une stabilité plus grande, comme si moins d'élèves réussissaient certaines tâches, mais « mieux » ...
- L'item 46 de l'évaluation à l'entrée en sixième 1997 présente l'intérêt d'avoir été repris plusieurs fois, et pour la dernière, en sixième en 2005-2008. Le taux de réussite de la multiplication posée 523×305 passe donc environ de 80,9 % à 53,4 %. En 2008, les erreurs des élèves représentaient respectivement environ 12 % et 6 % pour chacun

des deux types d'erreurs précédents⁹⁹. Par rapport à l'item 28, le nombre d'erreurs de tables diminue nettement (le chiffre le plus élevé figurant dans les facteurs est 5), et le nombre d'erreurs de décalage augmente très légèrement, à la fois en raison et en dépit de la présence du 0 dans 305. En l'absence de 7 et de 8 dans l'écriture des facteurs, peut-on attribuer la baisse observée à cette présence du 0 ?

- L'écart de 22,7 points entre le taux de réussite de M1 et celui de M2 en 2007 (alors qu'il n'était que de 13,4 points en 1987) s'explique-t-il principalement par le choix des chiffres intervenant dans les différentes opérations ? M1 fait appel aux tables de 5, de 3 et de 6. Un 7 est présent dans M2, un 7 et 9 figurent dans M3. Cette remarque permet d'ailleurs peut-être d'expliquer pourquoi l'ordre des taux de réussite respectifs de M2 (67,8 %) et de M3 (55,3%) est l'inverse de celui des baisses des taux de réussite. On peut cependant s'étonner des scores très voisins de la multiplication M3 en 2007 et de la multiplication de l'item 29 en 2008 : pourquoi avec des chiffres beaucoup plus « simples » à manipuler, le score de l'item 29 n'est-il pas plus élevé ? On peut sans doute mettre en avant la durée impartie aux élèves pour effectuer les deux multiplications des items 28 et 29 (3 min), et la multiplication de l'item 29 venait en seconde position... Malheureusement, aucun code n'était attribué pour des calculs justes dans une opération effectuée partiellement.
- L'item 39 de l'évaluation CM2 de 2010 est une multiplication d'un nombre entier à deux chiffres par un nombre entier à deux chiffres. Elle nécessite un seul décalage d'un produit intermédiaire, et fait *a priori* intervenir la table de 7 et de 9 : en effet, on ne peut pas anticiper sur la gestion par les élèves des produits 9×5 et 3×7 , qui pourront, selon les cas et avec des réussites sans doute variables, convoquer les tables de 3 et de 5.
- La multiplication à trous en M6 propose la détermination de 2 chiffres : l'un compose le deuxième facteur (le multiplicateur, aurait-on dit il y a bien longtemps !), l'autre est

⁹⁹ Cette multiplication avait été proposée dans l'évaluation à l'entrée en sixième 1998, avec un taux de réussite de 44,2 %. 27,2 % des erreurs étaient considérées comme des erreurs de calcul (avec un décalage correct), alors que 3,5 % seraient dues à un oubli de décalage.

un chiffre du produit. Pour trouver le premier chiffre, les élèves ont *a priori* à convoquer la table de 4 en cherchant $4 \times ? = . 2$. Deux possibilités : 3 qui est invalidée par $3 \times 3 + 1 = 10$ alors que le chiffre des dizaines du produit est 9, et 8, validée par $2 \times 8 + 3 = 19$. Il reste alors à effectuer : $3 \times 8 + 1$ pour avoir le 5 comme chiffre des centaines et vérifier le 2 comme chiffre des milliers. Une autre stratégie pourrait être de travailler avec les ordres de grandeur pour choisir entre le 3 et le 8. En effet, $300 \times 3 = 900$, alors que $300 \times 8 = 2\ 400$, mais il n'est pas certain que beaucoup d'élèves y aient eu recours. Quelle que soit la procédure, la tâche proposée repose à la fois sur la connaissance des tables et sur la technique opératoire : la mise en œuvre de ces deux outils successifs constitue assurément une difficulté importante pour bon nombre d'élèves. La difficulté est d'autant plus grande que la connaissance mécanique des tables de multiplication ne suffit pas, puisqu'il s'agit pour les élèves d'identifier des multiples de 4 ou de 8 ayant un chiffre des unités donné ou à déterminer. Cette même multiplication constituait l'item 51 de l'évaluation à l'entrée en sixième 1998, dont le score de réussite n'était que 41,6 %, soit comme pour M3, une baisse d'environ 15 points par rapport à la fin de CM2.

L'analyse qualitative des productions numérisées des élèves pour les multiplications M2 et M3 va donc au-delà des analyses antérieures de la DEPP : elle permet effectivement de mettre en évidence des erreurs de tables, des erreurs de décalage (y compris des erreurs de positionnement « flou » des deux produits intermédiaires), mais aussi des erreurs d'addition finale. Elle permet également de faire l'hypothèse que ce qui est attribué à des erreurs de table peut être aussi causé par l'enchaînement d'une multiplication (plus ou moins automatisée) et d'une addition (la retenue), surtout quand la retenue n'est pas écrite. Les erreurs ne seraient pas alors seulement à chercher du côté de la mémorisation des tables, même si on peut penser qu'une restitution non immédiate du résultat d'une table de multiplication augmente le risque d'erreur quand elle est suivie d'une addition, et que la répétition de tels efforts pour un élève entame sa concentration et augmente elle aussi le risque d'erreur. On peut aussi faire l'hypothèse que les tables d'addition ne sont pas disponibles pour certains élèves en tant qu'outil dans une tâche qui est alors, pour ces élèves, non simple.

Multiplication de deux nombres décimaux (Tableau A-23)

Le programme de 1985 incluait la multiplication de deux nombres décimaux, à la fois au niveau des techniques opératoires et des calculs approchés. On voit que les taux de réussite des rares items proposés alors sont autour de 50 %, y compris sur un item comme l'item 66 en 1991. Le programme de 1995 limita le travail à demander aux élèves à la multiplication d'un décimal par un entier en différenciant la multiplication de deux décimaux à la classe de sixième. Le programme de 2002 réduisit encore l'objectif : pour la multiplication, « calculer le produit de deux entiers ou le produit d'un décimal par un entier (3 chiffres par 2 chiffres), par un calcul posé ». Le programme de 2008, dans le cadre d'une programmation annualisée des apprentissages, a réintégré la multiplication de deux nombres décimaux, en plaçant au CM1 la multiplication d'un nombre décimal par un nombre entier¹⁰⁰.

Commentaires et analyse

- L'item 81 de l'évaluation nationale CM2 de janvier 2010 est caractérisé par le choix du nombre décimal qui s'écrit avec un 2, un 4 et un 3, et celui du nombre entier s'écrivant avec un chiffre différent de 7, 8 et 9. Cette multiplication ne pose donc pas de difficulté particulière du point de vue des tables, ni du décalage (puisque'il n'y en a pas) On pourra donc attribuer la presque totalité des erreurs à un placement incorrect ou une omission de la virgule.
- La seule autre référence récente¹⁰¹ est l'item 30 de l'évaluation à l'entrée en sixième, itérée à l'identique de septembre 2005 à septembre 2008. 13,8 % des élèves ont correctement positionné la virgule au résultat, mais avec des chiffres incorrects. Voici un extrait d'un rapport de la DEPP (2003) : « Les élèves ont plus d'aisance lorsqu'il s'agit d'additionner ou de soustraire des nombres décimaux que de multiplier un décimal par un entier. Les connaissances mises en jeu pour ces derniers items peuvent

¹⁰⁰ Le document ressource « Le nombre au cycle 3 » n'est paru qu'en septembre 2012.

¹⁰¹ Les résultats à cet item sont stables depuis 2005 : en 2007, le taux de réussite était 28,5 %, et en 2006 29,2 %.

s'avérer encore en construction et entraîner des productions erronées comme par exemple l'action séparée sur les parties entières et les parties décimales. Par des situations familières, les élèves arrivent à différencier nombre entier et nombre non entier, à donner du sens à l'addition, la soustraction et la comparaison de ces nombres. En ce qui concerne la multiplication d'un nombre décimal par un nombre entier, l'exploitation de situations de proportionnalité permet, à la fois, de lui donner du sens et de justifier la technique opératoire ». Rappelons à ce sujet que le positionnement dans les programmes de la proportionnalité dans un autre domaine que Nombres et calcul ne favorise pas forcément ce lien.

- Les autres items sont des multiplications de deux décimaux dont les taux de réussite varient entre 35 % et 63 %. Les erreurs de placement ou d'oubli de virgule sur ces items sont de l'ordre de 20 %.

Nous n'avons donc pas d'éléments suffisants pour cerner un niveau de difficulté actuel concernant ce type de tâches, mais les pourcentages disponibles montrent une absence de maîtrise pour environ un élève sur deux. Outre les difficultés repérées et déjà citées pour la multiplication sur les nombres entiers, nous reprenons la conclusion de Roditi (2001) : l'enseignement de la technique opératoire de la multiplication mettant en jeu un nombre décimal est sans doute plus délicat que l'application d'une recette portant sur le nombre de chiffres après la virgule. Ce constat vaut *a fortiori* pour le produit de deux décimaux.

Par ailleurs, la place dans les programmes de la multiplication d'un nombre décimal par un nombre entier, qui renvoie probablement à une addition itérée, nous fait nous interroger sur le lien à faire avec les opérations sur les grandeurs au cours de l'apprentissage, et leurs interactions avec le cadre numérique. Le recours à une justification fondée sur le passage par un nombre entier, donc à une multiplication par 10, 100, ... puis par une division par le même nombre peut également être évoqué, sous réserve d'une utilisation implicite de la définition du quotient. (Document ressource, Le calcul numérique au collège)

2. Effectuer une division (Tableau A-24 à Tableau A-26)

Effectuer une division euclidienne de deux nombres entiers (Tableau A-24)

De façon globale, il faut rappeler que dans les programmes de l'école primaire 2002 et 2007, la division euclidienne de deux nombres entiers était la seule division dont la connaissance est demandée à la fin de l'école primaire. Dans certains cas, et notamment dans des partages de grandeurs, le programme spécifiait que « les décimaux ont pu intervenir dans des problèmes de division au-delà de la virgule, mais aucune compétence technique n'a été mise en place à ce sujet. » (BO hors série n°6 du 19 avril 2007). Rompant avec les programmes précédents, le programme 2008 affiche clairement la volonté de faire débiter tôt dans la scolarité l'apprentissage de la division. Au CE2, les élèves apprennent une technique opératoire de la division et à la mettre en œuvre avec un diviseur à un chiffre » ; au CM1 ils apprennent comment effectuer une division euclidienne et une division décimale de deux entiers – ce qui n'est pas sans poser des questions sur l'introduction des nombres décimaux – et au CM2 la division d'un nombre décimal par un nombre entier. Rappelons que la division de deux décimaux est reportée au collège (en 5^e), c'est-à-dire qu'il est entendu qu'il existe un obstacle sur le sens et/ou sur la technique opératoire de la division de deux décimaux qui semble plus important pour l'institution que ceux sur la multiplication.

Sous réserve de la question de la connaissance des tables de 7, 8 et 9 (et de 6 ?), on peut estimer qu'entre 60 % et 75 % des élèves savent faire une division posée quand le diviseur est un nombre entier à 1 chiffre, et qu'entre 50 % et 60 % savent le faire quand le diviseur est un nombre entier s'écrivant avec deux chiffres.

Commentaires et analyse

- Tous les items sont des divisions euclidiennes à reste nul, sauf deux¹⁰² (74 : 4 et 81 : 6). D'autres divisions avec reste non nul sont présentes dans les évaluations, soit dans des items destinés à évaluer la connaissance des élèves du sens de la division euclidienne que nous n'avons pas gardés dans notre étude, soit dans des items contextualisés, que nous analyserons quand nous traiterons la résolution de problèmes multiplicatifs.
- 72 : 3 est une division avec un diviseur à un seul chiffre ; elle a été posée deux années différentes, et réussie par 3 élèves sur 4.
- 74 : 4 montre l'importance du moment de l'évaluation selon qu'elle est placée avant ou après les vacances d'été, et semble indiquer aussi une baisse des taux de réussite, ce que confirmerait l'item 72 de 2005 et 2008.
- L'item 53 de 1989 peut être rapproché de ces trois items car ne nécessitant lui aussi, comme la division précédente, que 2 étapes (33 divisé par 4 et 16 divisé par 4), une étape dans une division euclidienne posée étant elle-même une succession de plusieurs sous-étapes faisant intervenir une multiplication et une soustraction. On peut noter un écart de 10 points entre ces deux items sur 10 ans (avant 2000).
- Les autres divisions euclidiennes avec un diviseur à un seul chiffre ont un diviseur à 4 chiffres, avec des taux de réussite qui semblent dépendre fortement du diviseur, ce qui confirme une nouvelle fois la difficulté des élèves vis-à-vis de la table de 8.
- Les autres items sont des divisions avec des diviseurs qui s'écrivent avec deux chiffres, mais on peut clairement observer la volonté des concepteurs d'en rester à des diviseurs « simples » qui sont tous, sauf un, inférieurs à 20. Encore une fois, la comparaison temporelle « tâche à tâche » doit être effectuée avec prudence.

¹⁰² Un code 2 faisait considérer les quotients décimaux 18,5 et 13,5 comme des réponses justes.

Effectuer une division décimale de deux nombres entiers (Tableau A-25)

Nous n'avons que peu d'appui sur des items d'évaluations nationales pour ce type de tâches :

- L'item D1, repris de l'évaluation 1998 dans l'enquête sur les acquis des élèves en calcul à 20 ans d'intervalle, ne soulève pas de difficultés au niveau des tables de multiplication, mais nécessite une fois le « franchissement » du rang des unités. On peut d'ailleurs envisager de proposer le même calcul à effectuer mentalement en sixième.
- L'item D2 présente plusieurs difficultés d'ordre divers supplémentaires par rapport à D1 : la table de 7 n'est pas aussi bien maîtrisée que la table de 4, il faut « prendre deux chiffres » au dividende au lieu d'un seul pour le premier quotient partiel, effectuer un deuxième pas pour obtenir le chiffre des centièmes du quotient, et le reste final, relatif à la consigne donnée (donner le quotient au centième près), est non nul. Emblématique de ce qui pouvait être demandé aux élèves de CM2 en 1987, cette division ne s'inscrivait plus ni dans les programmes en vigueur en 2007, ni sans doute dans les pratiques des enseignants. Il n'est donc pas surprenant de voir le taux de réussite chuter de 36,1 % par rapport à 1987. De plus, comme nous l'avons dit plus haut, la division par 7 est sans doute une difficulté en elle-même pour les élèves.
- L'item 83 de l'évaluation CM2 cumule deux difficultés : indépendamment du quotient décimal, le diviseur est 8 et il faut « prendre deux chiffres » au dividende au lieu d'un seul pour le premier quotient partiel. Si on prend en compte en outre que l'évaluation s'est déroulée en janvier, il n'est guère étonnant d'observer un taux de réussite aussi peu élevé.

Diviser un nombre décimal par un nombre entier (Tableau A-26)

Nous ne disposons d'aucun item relatif à ce type de tâches, qui figurait pourtant dans les programmes de 1991 et de 1995 et qui a été réintroduit explicitement dans le programme 2008. Le programme 2002 précisait, quant à lui, avec illustration par un exemple, que : « Le calcul d'un quotient décimal issu de la division de deux entiers ou d'un décimal par un entier n'est donc pas une compétence exigible au cycle 3. Mais, des situations où les élèves sont

conduits à chercher ce type de résultat par des procédures personnelles doivent être proposées. ».

D. Résoudre des problèmes relevant des quatre opérations (Tableau A-27 à Tableau A-30)

Notre ambition dans cette recherche n'est pas d'étudier globalement les habiletés des élèves dans la résolution de problèmes numériques, mais de tenter de comprendre en quoi des habiletés en calcul – et lesquelles – peuvent intervenir dans cette résolution. Nous nous clairement inscrivons en cela dans la continuité du travail mené par Butlen et Pézard (1996) sur les liens entre techniques opératoire et résolution de problèmes.

Nous avons choisi pour cela une typologie désormais classique dans la didactique des mathématiques, établie par Vergnaud (1981) en classant les items disponibles en problèmes additifs (c'est-à-dire mettant en jeu uniquement une addition ou une soustraction), en problèmes multiplicatifs (c'est-à-dire mettant en jeu uniquement une multiplication ou une division), mais en réservant une place particulière pour les problèmes relevant de la proportionnalité qui peuvent être traités selon les cas, de façon additive ou multiplicative, voire par une combinaison des deux¹⁰³. Nous ne traitons pas délibérément le cas des problèmes horaires et des calculs de périmètres et d'aires. Notons enfin que, dans l'évaluation 2007 à 20 ans d'intervalle, le champ des problèmes est le seul pour lequel on peut observer des augmentations des taux de réussite, même modestes, par rapport aux précédentes évaluations 1987 et 1999.

¹⁰³Vergnaud place une partie de ces problèmes dans les problèmes multiplicatifs et d'autres dans les « problèmes arithmétiques complexes »

1. Résoudre des problèmes additifs (Tableau A-27)

Parmi les six grandes catégories de relations additives établies initialement par Vergnaud, seules quatre sont essentiellement travaillées à l'école primaire : la composition d'états, la transformation d'un état, la comparaison d'états¹⁰⁴ et la comparaison de transformations. Sur les dix problèmes que nous avons retenus, deux appartiennent à la première catégorie, cinq à la deuxième, deux à la troisième et un seul à la dernière. Les taux de réussite sont tous supérieurs à 70 % sans que nous puissions dire si ceux renvoyant à l'une des catégories sont plus ou moins élevés que ceux renvoyant à une autre. Par rapport à notre entrée, le trop petit nombre de problèmes ne nous permet pas de tirer quelque conclusion que ce soit : il aurait fallu pour cela des énoncés très voisins qui soit appartiendraient à la même catégorie avec des variables numériques différentes (nature ou taille des nombres), soit appartiendraient à deux catégories différentes avec les mêmes variables numériques, ce que nous n'avons pas. L'item 68 de 1980 repris en 1993 pourrait indiquer que la taille des nombres est un facteur défavorable, mais on peut également questionner la contextualisation choisie.

2. Résoudre des problèmes multiplicatifs (Tableau A-28)

La classification par Vergnaud (1981, 1995) des problèmes de type multiplicatif, qui désigne les problèmes qui comportent soit une multiplication soit une division, comporte deux grandes catégories : les produits de mesures et les isomorphismes de mesures, qui sont respectivement associés à des relations ternaires et quaternaires. Ces deux catégories sont elles-mêmes subdivisées en de nombreuses sous-classes selon les propriétés des nombres en jeu et selon les concepts auxquels ces problèmes renvoient.

¹⁰⁴Vergnaud utilise le terme « mesure » pour les deux premières catégories.

Commentaires et analyse

- Pour les problèmes qui comportent une multiplication, les taux de réussite diminuent dès qu'intervient un nombre décimal, cette diminution étant accentuée quand deux nombres décimaux sont présents dans l'énoncé.
- Les problèmes qui comportent une division (euclidienne) affichent des taux de réussite encore plus bas, avec une différence selon que la réponse demandée est le quotient euclidien ou l'entier consécutif.
- 3 problèmes sur 4 qui comportent une division sont des problèmes de groupement (ou quotition), un seul est un problème de partage (ou partition). Le nombre peu élevé de problèmes ne nous permettent donc pas de statuer sur la difficulté relative que peuvent présenter ces deux types de problèmes pour les élèves.
- Dans ces problèmes de division, la procédure « experte » attendue est la division euclidienne. Ainsi, dans le problème P3 (1987-2007), les élèves ont à prendre en compte le reste (5) et à donner comme réponse l'entier qui suit le quotient obtenu (20). On peut penser que des élèves pour lesquels la division n'est pas encore disponible peuvent passer, par exemple, par $10 \text{ wagons} + 10 \text{ wagons} + 5 \text{ voitures}$: les valeurs numériques mises en jeu dans le problème P3, comme dans les autres problèmes, autorisent en effet l'obtention d'une réponse correcte dans un temps raisonnable, sans recours à la division. On peut même supposer que les élèves les plus à l'aise en calcul mental peuvent économiser la division posée. En fait, comme le montrent à titre d'exemples les deux productions ci-dessous, il semble qu'un certain nombre d'élèves aient privilégié une démarche par essais multiplicatifs successifs.

Handwritten student work showing multiplication facts for the number 9:

$1 \times 9 = 9$	$10 \times 9 = 90$	$21 \times 9 = 180$
$2 \times 9 = 18$	$11 \times 9 = 99$	$22 \times 9 = 189$
$3 \times 9 = 27$	$12 \times 9 = 108$	$23 \times 9 =$
$4 \times 9 = 36$	$13 \times 9 = 117$	
$5 \times 9 = 45$	$14 \times 9 = 126$	
$6 \times 9 = 54$	$15 \times 9 = 135$	
$7 \times 9 = 63$	$16 \times 9 = 144$	
$8 \times 9 = 72$	$17 \times 9 = 153$	
$9 \times 9 = 81$	$18 \times 9 = 162$	
	$19 \times 9 = 171$	

- Le seul problème qui comporte un quotient décimal est réussi par seulement un quart des élèves, mais ce résultat est obtenu en cours de CM2 (janvier).

3. Résoudre des problèmes relevant de la proportionnalité (Tableau A-29 et Tableau A-30)

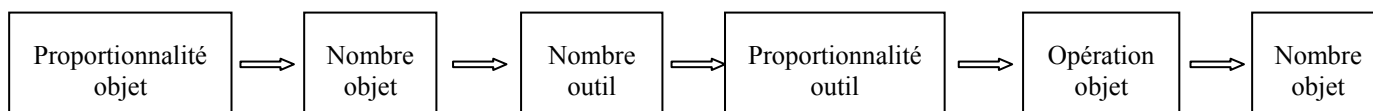
Les aspects historiques et épistémologiques attachés à la proportionnalité du point de vue mathématique sont délicats, en particulier parce qu'ils touchent à la fois au cadre des grandeurs et au cadre numérique¹⁰⁵, avec une succession de plusieurs théories qui se sont succédées, et dont certaines coexistent encore (Hersant, 2001). Cette multiplicité des approches a indiscutablement eu un impact sur l'enseignement de la proportionnalité et les différents programmes scolaires. Même si Hersant met clairement en évidence que l'utilisation du rapport scalaire entre deux grandeurs de même nature est davantage lié à la

¹⁰⁵ D'autres cadres (géométrique, graphique,...) sont concernés, que nous ne prendrons pas en compte dans notre travail.

théorie des proportions, nous nous en tiendrons quant à nous au point de vue « moderne », c'est-à-dire à la modélisation par une fonction linéaire, soit dans le champ des grandeurs, soit dans le champ numérique par passage aux mesures¹⁰⁶, et à son utilisation ou à celle de ses propriétés, en tant qu'objet ou en tant qu'outil. Hersant fait de ce choix entre ces deux modèles une question de transposition didactique : notre objet d'étude n'étant ni l'enseignement de la proportionnalité ni l'analyse des pratiques enseignantes, nous choisissons une seule entrée d'analyse, ce qui nous permet d'homogénéiser nos analyses, même si, du point de vue de l'activité des élèves, nous n'ignorons pas que « plusieurs chemins sont évidemment possibles. Il est indispensable de faire observer aux enfants cette pluralité de chemins pour éviter qu'ils n'imaginent n'avoir qu'une solution » (Vergnaud, 1981). Cette unique entrée nous paraît d'autant plus légitime qu'aucun des énoncés dont nous disposons ne constitue une contextualisation « directe » de la théorie des proportions (comme par exemple des problèmes de concentration de liquides, de calculs élémentaires de probabilité), ce qui, par ailleurs, constitue une information non négligeable sur les limites des évaluations nationales, et par incidence, peut-être sur l'enseignement de la proportionnalité dans les classes à l'école primaire.

Concrètement, dans les productions des élèves lors de l'évaluation à 20 ans d'intervalle, nous avons observé deux grands types de démarches utilisées par les élèves : le retour à l'unité, qui peut s'apparenter au passage implicite par un coefficient de proportionnalité – selon ce qui a été enseigné aux élèves et leurs activités associées – et le recours, là encore implicite, aux propriétés de linéarité, additivité et homogénéité. Dans la continuité de notre interrogation sur la disponibilité des connaissances des élèves sur les nombres et calcul, nous proposons, en nous référant à ce modèle de la fonction linéaire, un jeu de micro-dialectiques outils/objets décliné de celui que nous avons proposé pour le calcul mental :

¹⁰⁶ Cette restriction à des mesures de grandeurs (positives) est légitime au niveau scolaire où nous nous plaçons.



Autrement dit, nous posons la question du déclenchement de la démarche des élèves, qui, une fois la situation de proportionnalité identifiée, pourrait s'effectuer selon la disponibilité de décompositions additives ou multiplicatives des nombres. Inversement, du côté de l'enseignement, c'est par un jeu sur les variables numériques dans des situations relevant de la proportionnalité que cette disponibilité pourrait être développée.

Commentaires et analyse

- Tous les problèmes ne font intervenir que deux grandeurs.
- La recherche en didactique (Brousseau, 1982 ; Levain, 1992) a permis de montrer que le domaine de référence du problème et les données numériques (leur nature et leur taille) interviennent dans la résolution des problèmes relevant de la proportionnalité et peuvent constituer des sources de difficulté pour les élèves. Ainsi, « il existe un effet massif du facteur que nous avons appelé *complexité du coefficient* qui se traduit au niveau global par un taux de réussite de 0,80 pour le coefficient entier 3 et un taux de réussite de 0,36 pour le coefficient décimal 2,5 » (Julo, 1982). Ces facteurs expliquent sans doute à eux seuls certaines des variabilités entre les taux de réussite à des items « apparemment voisins » et montrent toute la difficulté à exploiter des résultats à des items différents pour une comparabilité temporelle des acquis des élèves.
- Il semble néanmoins impossible d'attribuer à la seule variabilité des énoncés les écarts observés entre les taux de réussite aux différents items, et il est vraisemblable que les programmes scolaires successifs et les pratiques d'enseignement induites constituent un facteur explicatif.
- Le problème P1 de l'évaluation à 20 ans d'intervalle, décomposé en 3 items, nous permet d'illustrer le schéma ci-dessus comme exemple générique. On peut en effet penser que c'est la disponibilité de $80 = 50 + 30$ qui enclenche l'utilisation de l'additivité de la linéarité dans P1.1. De même, c'est la disponibilité de la connaissance de la relation entre 30 et 15 qui est déterminante pour P1.2, et c'est celle de la relation entre 400 et 1 200, ou entre 4 et 12, qui peut déclencher une démarche de

résolution pour P1.3 – si on met à part un raisonnement par addition itérée qui a certainement été utilisé par des élèves et si on privilégie 400×3 par rapport à 240×5 . Pour ces deux derniers items, on voit qu'on vise un raisonnement basé sur « ... fois plus... » ou « ... fois moins... », mais la mise en œuvre de ce raisonnement sera nettement facilitée (on peut même évoquer une condition nécessaire) par la disponibilité de relations entre les nombres. Quant aux scores absolus, si les réponses correctes aux deux premiers items du problème P1 sont données par environ 70 % des élèves, le troisième est réussi par un élève sur deux. Si l'impact de la différence de formulation est sans doute à prendre en compte entre P1.1 – P1.2 et P1.3, il est vraisemblable que la taille des nombres à traiter pour appliquer un raisonnement de proportionnalité intervienne aussi dans l'écart important entre les taux de réussite.

E. Connaissance des nombres (Tableau A-31 à Tableau A-39)

Notre analyse concernant la connaissance des nombres est brève, à l'image de celle concernant la résolution de problèmes : elle porte sur les nombres entiers (écriture en lettres et en chiffres, relations entre certains nombres, et comparaison, placée dans le même tableau E.2.b que celle des nombres décimaux pour faciliter la lecture des résultats) et sur les nombres décimaux (valeur d'un chiffre dans une écriture décimale, passage d'une écriture fractionnaire à une écriture décimale et réciproquement, repérage sur une droite graduée).

1. Connaissance des nombres entiers (Tableau A-31 à Tableau A-33)

Les différents items dont nous disposons (Tableau A-31 et Tableau A-32) font apparaître que l'écriture d'un nombre entier, en chiffres à partir de sa désignation orale, ou en lettres à partir de son écriture chiffrée, est acquise pour 80 % des élèves ou plus à la fin de leur scolarité primaire. Les taux de réussite des items récents (53 et 54 des évaluations à l'entrée en sixième 2005 et 2008) sont légèrement inférieurs. Mais d'une part le fait que les nombres en jeu ne sont pas comparables à ceux utilisés dans des items antérieurs, et l'absence de codage intermédiaires d'autre part, ne nous permettent pas d'interprétation en faveur d'une baisse des habiletés des élèves.

Les items identifiés dans les évaluations nationales à l'entrée en sixième comme portant sur la connaissance et l'utilisation de la relation entre des nombres entiers, en particulier 25, 50, 75 et 100 présentent en revanche des taux de réussite nettement moins élevés, et en baisse. L'activité des élèves consiste pour ces items à déterminer la relation, de type multiplicatif, qui existe entre les nombres donnés, puis à associer l'un des deux mots correspondant à cette relation (par exemple, choisir entre double et moitié) : on peut se demander à ces égards si les relations en jeu sont des faits numériques pour les élèves ou non, et donc si ce qui est testé est la connaissance, l'identification de ces relations ou l'utilisation du vocabulaire adapté. Excepté pour l'item « 12 est le double de 6 » dont le taux de réussite dépasse légèrement 70 %, environ un élève sur deux seulement répond en 2008 que 5 est le tiers de 15, que 25 est le quart de 100 et que 25 est le tiers de 75. L'évaluation LOLF 2007 confirme cette tendance¹⁰⁷ : dans un QCM à 3 réponses, 4 est identifié comme le tiers de 12 par 56 % des élèves (23 % répondent 3 et 15 % répondent 6). S'agit-il d'une absence d'identification du lien correct entre les nombres ou de l'utilisation non pertinente du vocabulaire ? Ou encore de l'absence de disponibilité du tiers ou du quart d'un nombre ? Nous ne disposons pas de tous les éléments pour répondre à ces questions (cf Tableau A-33).

2. Connaissance des nombres décimaux (Tableau A-34 à Tableau A-39)

Le premier tableau (Tableau A-34) nous permet de faire principalement trois constats :

- les items portant sur la reconnaissance et la nomination d'un chiffre dans l'écriture décimale d'un nombre décimale ont été posés jusqu'en 2003, et disparaissent ensuite des évaluations nationales. On ne peut pas ne pas lier ce constat à l'entrée en vigueur des programmes 2002. En 1990, « l'activité » de l'élève dans ces items (c'est ainsi qu'est désigné ce qui est à la charge de l'élève dans le document pour l'enseignant) est décrite comme « exprimer la signification des chiffres dans une écriture décimale » ; en 1998, elle consiste à « associer le vocabulaire qui convient à la position d'un chiffre

¹⁰⁷ Dans cette même évaluation, 8 est identifié comme deux tiers de 12 par 52 % des élèves (39 % répondent 4 et 9 % répondent 24).

dans un nombre. ». En 2004, on peut lire dans un dossier de la DEPP sur les décimaux le commentaire suivant : « Ces exercices visent à évaluer la compréhension de la numération décimale dans l'écriture des nombres décimaux. D'une façon presque constante, environ 65 % des élèves réussissent à donner le chiffre des dizaines d'un nombre, alors qu'un peu plus d'un élève sur deux réussit à identifier la valeur d'un chiffre dans l'écriture décimale d'un nombre. Il est normal que certains élèves éprouvent des difficultés car le sens de l'écriture décimale est en cours d'acquisition. Cette compétence continuera à se développer au fur et à mesure des apprentissages liés au sens de l'écriture à virgule du nombre (techniques opératoires, ordre de grandeur, etc.). On constate, que chaque année, environ 15 à 19 % des élèves lisent les nombres à partir du dernier chiffre, sans tenir compte de l'existence de la virgule. C'est le principe de la numération de position qui n'est pas compris. » C'est justement ce principe qu'explicite le programme de 2002, à la différence des programmes précédents : « Déterminer la valeur de chacun des chiffres composant une écriture à virgule, en fonction de sa position. » C'est la première fois qu'un programme mentionne la *valeur* d'un chiffre en insistant sur le fait que « la valeur d'un chiffre est dix fois plus petite que celle du chiffre écrit immédiatement à sa gauche et dix fois plus grande que celle du chiffre qui est écrit immédiatement à sa droite (ce qui est vrai aussi bien pour la partie entière que pour la partie décimale). » Cette évolution du programme a sans doute conduit à modifier le type d'items destinés à évaluer les connaissances des élèves.

- L'écart entre les taux de réussite des items qui portent sur le chiffre des dizaines et ceux qui portent sur le chiffre des dixièmes est plus important que celui relevé par la DEPP.
- Il n'existe pas de variation des taux de réussite avant et après les vacances.

Les deux tableaux suivants (Tableau A-35 et Tableau A-36) confirment la difficulté (pour environ un élève sur 3) de passer de la comparaison des nombres entiers à celle des nombres décimaux. Cette difficulté est depuis longtemps identifiée, et a fait l'objet de nombreux travaux de recherche en France (Grisvard & Léonard, 1981 ; Brousseau, 1981 ; Perrin-Glorian, 1986 ; Bolon, 1996 ; Roditi, 2007) comme à l'étranger (Baturro & Cooper, 1995 ; Steinle, 2004 ; Roche & Clarke, 2006). Stacey (2005) établit ainsi jusqu'à 11 règles

erronées ou *misconceptions* qui mènent à des comparaisons incorrectes de décimaux. Les résultats des évaluations nationales montrent une difficulté persistante au fil des années, qui s'exprime également dans l'intercalation d'un décimal entre deux autres, et semble s'accroître dans l'encadrement par deux entiers consécutifs (Tableau A-37).

Le Tableau A-38 rassemble des items portant sur le changement d'écriture d'un nombre décimal. On remarque que les premiers items datent de 1999 (est-ce un effet des programmes 1995 ?) et que, hormis l'écriture de trois dixièmes et celle d'un quart, les items ont un score de réussite environ égal à 50 %.

Concernant l'item 101 des évaluations nationales à l'entrée en sixième 2005 à 2008, on constate qu'en 2005 (comme en 2008) environ un quart des élèves associe les deux écritures 0,25 et $\frac{1}{4}$, tandis que plus de la moitié d'entre eux associent 1,4 et $\frac{1}{4}$ (avec un r_{bis} égal à 0,48) :

Tableau 1-1

code 1	5,63
code 2	8,87
code 3	0,75
code 4	0,84
code 5	0,91

Source : <http://cisad.pleiade.education.fr/eval/pages-05/Evace26/index.htm>

Le code 6 est attribué lorsque 1,4 et $\frac{1}{4}$ sont entourés, le code 7 l'est quand 0,4 et $\frac{1}{4}$ sont entourés. Ajoutons que les taux de réussites en ZEP sont 13,2 % en 2005 et 14,9 % en 2008.

On peut lire dans le document 2005 à l'attention de l'enseignant le commentaire suivant :

« Cet exercice évalue des connaissances des nombres qui devraient avoir été établies en référence à des situations concrètes mettant en œuvre des grandeurs.

Il s'agit ici d'évaluer si les élèves ont développé de bonnes représentations mentales de ces nombres et des relations qui les lient.

En vue d'une analyse pertinente des erreurs commises, il conviendra de croiser le résultat obtenu à cet item avec ceux des items¹⁰⁸ 39, 41 et 80. Le code 6 repère l'erreur qui consiste à ne pas différencier la virgule de la barre de fraction. Certaines erreurs, notamment repérées par le code 7, dénotent une confusion qu'il peut être difficile d'interpréter *a priori*. Il convient alors d'interroger l'élève sur la démarche qu'il a mise en œuvre en vue de concevoir de manière opérationnelle la poursuite des apprentissages. Cet exercice évalue des compétences attendues à l'entrée en sixième. »

Les résultats obtenus révèlent que, pour une partie des élèves, le trait de fraction est assimilé à la virgule, comme si écritures décimale et fractionnaire d'un nombre doivent nécessairement comporter les mêmes chiffres. Ce n'est donc pas tant le faible taux de réussite de cet item qui est remarquable ici, que les choix des élèves testés. En effet, qu'un quart environ des élèves associe $\frac{1}{4}$ et 0,25 comme deux écritures du même nombre n'est en soi pas forcément alarmant dans une conception sur plusieurs années du processus de conceptualisation. Mais, ce constat pose toute une série de questions quant à la mise en perspective des instructions officielles, des pratiques des enseignants et des apprentissages des élèves. Tout d'abord, ce qui est attendu des élèves sur les fractions en fin d'école primaire n'est pas très clair : $\frac{1}{4}$ doit-il avoir le statut de nombre ? Si oui, quels contextes sont mis en œuvre par les enseignants pour viser cet objectif ? Faute d'entretiens avec les élèves, nous ne pouvons pas savoir si la difficulté relevée ici porte sur la conception d'un nombre qui peut s'écrire $\frac{1}{4}$, ou sur le fait que ce nombre ait plusieurs écritures différentes. Par conséquent, ce

¹⁰⁸ Ces items portent sur le passage d'une fraction décimale à une écriture décimale ou l'inverse.

qui est à la charge du professeur de mathématiques d'une classe de sixième n'est pas simple : comment organiser son enseignement afin de gérer les erreurs massivement produites par les élèves ? Quels choix adopter ? Reprendre « tout à zéro » ? Mais qu'est-ce que cela signifie en pratique ? Comment refaire une partie du chemin ou emprunter un autre chemin avec des élèves qui se sont déjà construit des représentations ? Et quelle attitude adopter avec les élèves qui n'en ont pas besoin ?

Enfin, les items rassemblés dans le Tableau A-39 illustrent bien l'importance des variations d'un énoncé, la fragilité de certains apprentissages des élèves et la prudence que nous adoptons vis-à-vis de l'interprétation des taux de réussite aux items. En effet, on constate que le fait que 0,4 soit indiqué ou non au-dessus de la graduation provoque un écart pouvant aller jusqu'à 30 points¹⁰⁹ sur le placement de 0,8.

F. Conclusion

Nous nous sommes efforcé dans cette partie de dresser un « spectre des mathématiques que savent les élèves » en fonction des mathématiques à enseigner telles qu'elles sont définies dans le programme 2008 de l'école primaire, à partir d'un panorama des résultats des élèves aux évaluations nationales depuis 25 ans, et en tenant compte de précautions contextuelles d'objectifs, de passation et de correction de ces évaluations.

Une évaluation, standardisée – ou non d'ailleurs si on considère par exemple les modalités habituelles des « contrôles » en temps limité effectués en classe –, peut être vue comme une photographie des connaissances d'un élève, prise avec un cadrage et un angle de vue donnés : elle exprime ce qu'un élève sait montrer qu'il sait ou qu'il sait faire à un moment donné, avec des variabilités dues aux conditions de production des réponses de l'élève, de sa motivation à effectuer les tâches qui lui sont proposées, à un moment qu'il n'a pas choisi.

¹⁰⁹ Outre la présentation horizontale ou verticale de la graduation.

Mais combien de contrôles de maths sont refaits pendant les récréations en disant « je savais le faire » ? Combien d'écrits ou d'oraux d'examens ou de concours sont repassés la nuit suivante par des étudiants ? Combien de matches sont rejoués par des sportifs ? Bien entendu, savoir faire quelque chose au moment où on est attendu est sans doute une preuve d'adaptation à un contexte, mais c'est aussi un mode de sélection... On peut d'ailleurs considérer comme positif dans le côté flou actuel de la notion de compétence le fait d'inciter à voir en l'élève autre chose que ce qu'il est capable de produire à un moment où l'enseignant attend qu'il le fasse.

Les limites des évaluations standardisées¹¹⁰ existent donc, mais nous considérons aussi qu'elles peuvent être prises d'un point de vue individuel, comme un élément parmi d'autres comme productrices d'informations sur l'état des connaissances d'un élève. Elles peuvent aussi contribuer, comme un élément parmi d'autres, sur ce qu'elles nous apportent sur les attendus des acquis des élèves par rapport à ce qui est prescrit par l'institution, en étudiant à la fois ce qui est produit par les élèves et ce qui est prescrit par les programmes scolaires, mais aussi les conditions d'enseignement et d'apprentissage qui ont conduit à ces résultats, et les éventuels « gaps » qui peuvent exister entre les deux. Nous partageons à ce sujet le point de vue exprimé dans un rapport de l'UNESCO (2011) : « L'évaluation est nécessaire à l'enseignement des mathématiques, à la fois dans sa dimension formative, pour piloter les apprentissages au cours de leur réalisation, et dans sa dimension sommative, pour situer les résultats obtenus par rapport aux attentes et évaluer l'écart entre le curriculum visé et le curriculum atteint. Elle doit pour cela savoir conjuguer des dimensions internes et externes, qualitatives et quantitatives, et s'appuyer sur des méthodologies et instruments appropriés. Il y a là un point de consensus sur lequel il nous semble inutile de nous appesantir. » Il y a là aussi selon nous des enjeux de recherche, auxquels nous apportons des éléments de réponse.

¹¹⁰ Nous parlons ici globalement des évaluations standardisées, sans rentrer dans le débat sur leur aspect bilan ou diagnostique.

Alors, au terme de cette première étape de notre travail, que révèle le spectre que nous avons établi par cette lecture croisée des programmes et des résultats des évaluations nationales ? Et quelles « lignes de niveau » sur les connaissances des élèves à leur entrée au collège sommes-nous en mesure de dessiner ? Quels principaux constats peut-on effectuer ? Lesquels retiendrons-nous pour déterminer la suite de notre démarche ?

En ce qui concerne les nombres entiers, l'addition et la soustraction semblent acquises par la grande majorité des élèves, ce qui n'est pas le cas de la multiplication et la division, en calcul mental comme en calcul posé. Pour les nombres décimaux, seule l'addition posée semble acquise, ou en tout cas, donne l'apparence d'être acquise. Dès qu'un autre calcul, mental ou posé fait intervenir une technique qui met en jeu la spécificité de l'écriture décimale des nombres décimaux, on constate qu'une proportion importante d'élèves (pouvant aller jusqu'à plus de la moitié d'entre eux) se trouve en échec. Ce constat est vrai pour le calcul mental de sommes et de différences, de produits et de quotients, mais aussi pour le calcul posé de soustractions et de divisions décimales, et de manière accentuée pour les multiplications. On retrouve tout particulièrement des difficultés qui apparaissent très nettement dans les multiplications ou les divisions des nombres décimaux par 10, 100 et 1 000. L'ensemble de ces observations se manifeste évidemment dans l'estimation d'un ordre de grandeur d'un résultat.

Ce premier tableau peut être complété par deux autres axes d'analyse : la résolution de problèmes et la comparaison des nombres décimaux. Les résultats que nous avons collectés sur le premier axe confirment que la différence entre addition/soustraction et multiplication/division ne réside pas seulement dans les techniques opératoires, mais qu'on les retrouve dans les opérations à mobiliser pour résoudre des problèmes, en particulier ceux qui relèvent de la proportionnalité. Quant à l'analyse des items sur la comparaison des décimaux, elle confirme ce que la recherche a mis en avant sur les règles ou les conceptions erronées des élèves qui apparaissent dans ce type de tâches.

Alors quelles hypothèses peut-on raisonnablement formuler ? Quelles pistes sur l'état des connaissances des élèves sont à creuser ? Quelles perspectives pour l'enseignement du calcul numérique peut-on alors envisager ? Du côté de l'école primaire, sans aborder des

questions relatives la formation des enseignants, ni celles concernant la formation de formateurs, il y a incontestablement une réflexion à mener à partir de ces résultats pour non pas élaborer un nième nouveau programme, mais pour réfléchir en termes de connaissances à acquérir par les élèves, sur ce qui est enseigné et sur les activités des élèves qu'on vise dans une perspective de continuité avec le collège. Mais notre projet n'est pas de reconstruire un parcours « idéal » d'élèves dans une école primaire « idéale », mais encore une fois, d'explorer les marges de manœuvre qui existent pour un enseignant de mathématiques en sixième, actuellement, dans les structures existantes, ou pour le dire autrement « à école primaire et collège constants ». Une de ces marges de manœuvre est sans doute un travail de concertation¹¹¹, plus ou moins facile, avec les enseignants de CM2 (grade 5). Mais celles que nous allons explorer dès le chapitre 2 sont d'une autre nature ; elles sont relatives à la vision globale des contenus à enseigner en sixième, à l'organisation de ces contenus, au choix des tâches et aux déroulements dans la classe.

Notre ambition est d'aller au-delà de cet état des lieux, qui reprend, confirme et recompose un certain nombre de constats déjà réalisés en France et à l'étranger, et de nous interroger, dans le domaine des nombres et du calcul, sur les enjeux institutionnels et didactiques de l'enseignement des mathématiques au début du collège, afin d'esquisser, à la lumière de cette réflexion, des propositions d'évolution des pratiques professionnelles des enseignants.

¹¹¹ Ce travail prend d'autant plus de sens que la loi d'orientation de 2013 a modifié la structure du cycle 3 de la scolarité obligatoire en le faisant porter sur les deux dernières années de l'école primaire et sur la première année du collège.

IV. Vers un « nouveau relief » sur les notions à enseigner

L'hétérogénéité du spectre que nous avons dressé dans la troisième partie de ce chapitre nous amène à donc présenter des grandes « lignes de niveau » pour un « nouveau relief » sur les notions à enseigner en sixième sur les nombres et le calcul. Le relief « permet de spécifier ce qui est utile à savoir pour l'enseignement d'une ou plusieurs notions des programmes » (Robert et *al.*, 2012). Il prend en compte la caractérisation mathématique des notions, y compris leurs aspects historiques et épistémologiques, la disponibilité des caractères objet et outil de ces notions (Douady, 1986), des exemples de tâches qui peuvent leur être associées, mais aussi leur insertion dans les programmes scolaires, ceux de l'école primaire, en particulier du cycle 3, et du collège, ainsi que d'autres éléments didactiques comme les conceptions erronées des élèves. Cette démarche, qui rappelle celle de Vergnaud (1990) sur les champs conceptuels, amène à préciser le niveau de conceptualisation visé, en termes à la fois de disponibilité et de (ré) organisation pour les élèves des connaissances en jeu, anciennes et nouvelles, relativement à un ensemble de tâches. « De plus la recherche des difficultés des élèves enrichit encore la préparation du travail à prévoir sur les notions, et facilite notamment la dénaturalisation des connaissances de l'enseignant, amenant à une meilleure appréciation des cheminements à installer ou installés chez les élèves. Il s'agit de faire prendre conscience que ce qui est devenu naturel pour un enseignant, ce qui lui paraît évident, ne l'est pas (encore) pour les élèves » (Robert et *al.*, 2012). C'est cette démarche vers les enseignants qui consiste insérer à la fois les notions mathématiques à enseigner et les difficultés d'apprentissage répertoriées par la recherche en didactique, et/ou issues de notre travail d'analyse des évaluations nationales, que nous adoptons et qui nous conduit, comme chercheur et comme formateur, à proposer « un nouveau relief » dans le domaine qui nous intéresse. Nous n'en définissons pas dans le détail les caractéristiques, ce qui constituerait un travail en soi, mais après quelques éléments de réflexion en guise de synthèse, nous présentons les axes principaux qui nous serviront à définir les contenus de la formation, et qui, pour certains, représentent selon nous des pistes nouvelles pour la recherche.

Parmi les aspects historiques et épistémologiques, figure sans doute au premier plan le tournant qu'a constitué l'introduction des mathématiques modernes : « Depuis quelque cent

vingt ans, les programmes de mathématiques de l'école primaire ont évolué dans leur forme et leur contenu. Après un long temps de continuité (1887-1970), une rupture majeure a été effectuée avec l'introduction des « mathématiques modernes ». Si la durée d'application du programme de 1970 a été brève, son influence a été forte et globalement peu favorable à l'image des mathématiques. » (Rapport IGEN, 2006). Nous ne reprendrons pas à notre compte la dernière partie de cette affirmation, qui mérite sans doute davantage de nuances (peu favorable auprès de qui ? de quelles mathématiques parle-t-on ?), mais la question de l'influence de la réforme de 1970 sur l'enseignement des nombres et du calcul sur les connaissances et les pratiques des enseignants actuels, sur leur représentation des mathématiques en général et de celles qu'ils enseignent en particulier, sur les manuels scolaires, sur le rapport que les parents entretiennent avec ce champ spécifique, et au final sur les connaissances des élèves, mérite effectivement d'être posée. « Le terme « calcul » qui ne figure plus dans le programme sauf dans l'expression *calcul mental* fait l'objet d'un commentaire assez restrictif « *les activités désignées jusqu'alors sous le nom de « calcul » restent bien entendu essentielles, mais elles ne constituent qu'une partie du programme, il convient de désigner la matière du programme par le terme " Mathématique ".* » (Rapport IGEN, 2006). Se posent notamment la question du calcul mental, pourtant présent dans les programmes depuis 1985, et celle des problèmes relevant de la proportionnalité.

A. Les décimaux : entre connaissance des nombres et calcul

La première piste qu'il nous apparaît nécessaire de creuser est celle sur les décimaux. De façon générale, il est établi par la recherche en didactique des mathématiques (Brousseau, 1980, 1981 ; Perrin-Glorian, 1986 ; Bolon, 1996 ; Roditi, 2001) que l'apprentissage des décimaux présente de nombreuses difficultés pour les élèves : représentations, traitements opératoires, utilisations dans des procédures de résolution de problèmes, et les évaluations nationales, quelles que soient les minorations dont elles puissent faire l'objet et les précautions contextuelles que nous avons mises en avant, en attestent. Notre point de vue sur cette question reprend et prolonge les travaux issus de la recherche en didactique consacrés à la comparaison des décimaux, qui interrogent la réussite des élèves à différentes tâches et leur compréhension conceptuelle des nombres décimaux. Autrement dit, nous reprenons la conclusion qu'un certain nombre d'élèves se présentent comme des « experts apparents »

(Roche & Clarke, 2006), pouvant réussir certaines tâches (en ajoutant par exemple des zéros dans la partie décimale pour avoir le même nombre de chiffres), mais que cette réussite opérationnelle masque une conceptualisation déficiente des nombres décimaux.

Nous prolongeons ce constat en l'étendant au calcul, en y voyant des éléments de cohérence avec ce qui est mis en avant sur la comparaison des décimaux, dans une vision instrumentale des mathématiques (DeBlois, 2008) dans laquelle règles et habitudes se substitueraient à une réelle construction du savoir : par exemple, une addition posée sur les décimaux peut être réussie avec un ajout adapté de zéros sans compréhension de ce qui se joue sur les nombres eux-mêmes. Autrement dit, nous reprenons à notre compte que les erreurs des élèves en calcul mental et posé renvoient à un déficit de construction des nombres décimaux – par exemple comme dans le calcul mental $2,6 + 1,4$ – et qu'une réussite dans ce domaine ne peut éventuellement traduire qu'un degré apparent de conceptualisation des nombres décimaux, voire des nombres entiers.

De façon plus générale, nous reprenons à notre compte la question de l'enseignement du calcul numérique dans la scolarité obligatoire et de ses enjeux actuels, telle qu'elle fut posée par la CREM en 2001, et nous sommes aujourd'hui en mesure de la compléter. « La place à accorder aujourd'hui à la mise en place puis à la maîtrise des techniques opératoires est source de débat. On assiste à un recul progressif de cette mise en place sur la pertinence duquel on peut s'interroger. Il est évident qu'aujourd'hui, le calcul numérique exact que nous faisons à la main, sans assistance, est très limité. Il semble difficile d'exiger de l'école qu'elle consacre un part importante du temps réduit dont elle dispose pour développer des compétences que plus personne n'utilise. Dans le même temps, nous souhaitons, à juste titre, que les élèves ne soient pas dépendants de leur calculatrice pour le moindre calcul. Ceci nécessite, au-delà de la mémorisation d'un répertoire et de compétences de calcul mental, la mise en place de techniques de calcul écrit, et une fiabilité de ce calcul dans les cas simples. Les nouvelles conditions du calcul écrit permettent sans doute de se satisfaire d'un écrit qui n'est pas nécessairement le plus économique, notamment dans le cas de la division, mais, pour autant, est-il raisonnable de reporter au collège l'apprentissage de cette technique opératoire ? »

Les résultats que nous avons présentés soulèvent en effet un débat crucial pour l'exercice quotidien du métier d'enseignant : les élèves en fin d'école primaire ne réussissent pas un certain nombre de tâches en calcul sur les décimaux, et ont tendance à les réussir de moins en moins. Est-ce qu'on aboutit à ces constatations parce que les connaissances pour réussir ces tâches sont aujourd'hui de moins en moins enseignées ? Que les enseignants y consacrent de moins en moins de temps en classe ? Que les élèves passent de moins en moins de temps en classe à des effectuer des tâches de calcul ? Et à la maison ? Et de quelles connaissances s'agit-il ? Exclusivement des algorithmes standards, enseignés depuis des générations ? Si oui, comment sont-ils enseignés ? Nous n'avons pas les éléments pour répondre à ces questions, et nous ne prétendons pas y répondre dans notre recherche. En revanche, portant notre regard sur ce que les professeurs de mathématiques vont avoir à faire avec les élèves en sixième, nous nous posons la question de l'attitude à adopter si on travaille avec les élèves « à partir de ce qu'ils savent » et non en appliquant un programme indépendamment des acquis antérieurs des élèves. A ce stade, nous nous interrogeons donc sur des alternatives à trouver pour les enseignants, à la fois pour ne pas « abandonner » les élèves qui n'ont pas acquis ce qui attendu quand ils entrent au collège et pour faire évoluer les connaissances de tous, dans une vision prospective, notamment pour le calcul sur les rationnels et pour le calcul algébrique. Nous nous interrogeons en particulier sur la place du calcul mental par rapport aux attentes qu'on peut avoir vis-à-vis des élèves en calcul, à l'heure où calculatrices et smartphones permettent d'obtenir facilement et rapidement les résultats des quatre opérations « élémentaires », et sur son rôle dans une construction dialectique de la connaissance des nombres.

B. Addition/soustraction et multiplication/division

La deuxième piste que nous suivons provient de l'écart existant entre les performances des élèves sur des items mettant en jeu des structures additives et ceux qui font intervenir des relations multiplicatives, aussi bien en calcul mental et posé, qu'en résolution de problèmes. Cette constatation n'est ni nouvelle ni nationale comme le montre cet exemple, rapportée par Fortier (1988) qui demande à des enfants de 4^e année (CM1-CM2) d'une classe dite accélérée au Québec : « Qu'est-ce que vous aimiez mieux obtenir comme résultat à un examen : 8 sur 10 ou 90 sur 100 ? » Les élèves répondent 8 sur 10 en donnant comme raison que « quand on

a 8 sur 10, on a perdu 2 points, et quand on a 90 sur 100, ça veut dire qu'on a perdu 10 points. » L'analyse de Fortier est alors la suivante : « Une telle interprétation donnée par les enfants m'a fait prendre conscience que la notion de différence est très simple pour eux, alors que les notions de rapport entre deux quantités et proportion entre deux rapports sont beaucoup plus complexes. Ces deux notions de différence et de rapport se situent en effet à des niveaux d'abstraction tout à fait différents. » Et pourtant, poursuit Fortier « ces enfants avaient « appris » les fractions et aussi les fractions équivalentes ! Ils savaient faire l'exercice $8/10 = ?/100$ et pouvaient écrire que $80/100 < 90/100$. Les méthodes de calcul étaient connues, mais la compréhension des faits était loin d'être complète. » Comme pour la question précédente sur les nombres décimaux, il nous semble important de pointer cet écart, et de chercher à comprendre dans quelle mesure l'écart constaté peut être expliqué par des pratiques d'enseignement et/ou par des difficultés d'apprentissage.

En France, de nombreux débats ont eu lieu à propos de la division à l'école primaire, Chambris dans sa thèse (2008), citant Brousseau (2001) se demande si « la difficulté à faire des divisions en fin d'école primaire peut être reliée au retard pris dans l'apprentissage de la soustraction et des tables de multiplication tout au long de la scolarité élémentaire », ce qui constitue, selon elle, un argument récurrent en faveur de l'étalement des apprentissages par l'allongement de la scolarité. Si nous partageons ce point de vue sur l'étalement des apprentissages qui touche directement notre réflexion sur la continuité école primaire/collège, nous nous demandons quant à nous si un certain nombre de difficultés antérieures à celles qui apparaissent pour la division ne sont pas liées à l'enseignement de la multiplication, et s'il n'existe pas actuellement chez les enseignants une espèce de « brouillage » ce thème. Ce « brouillage » pourrait provenir à la fois d'un héritage de la réforme des mathématiques modernes, et de la vigilance, soulignée par les didacticiens auprès des enseignants, à s'écarter rapidement de la multiplication vue comme une addition itérée, ce qui nous semble par exemple délicat à gérer dans le champ des grandeurs (avec l'utilisation des unités recommandée dans les programmes du collège), dans l'introduction des écritures fractionnaires (comment distinguer trois quarts vus comme trois fois un quart ou le quart de trois ?), voire dans l'enseignement de la proportionnalité. Sur ce point comme sur le précédent, notre démarche dans cette recherche n'est pas de chercher à déterminer des raisons éventuelles qui ont conduit à ces résultats, mais de réfléchir à des alternatives acceptables par

les enseignants de sixième pour gérer cette situation, au jour le jour, dans leur organisation annuelle, et dans une projection de ce que les élèves pourront apprendre au-delà de la sixième.

C'est dans ce positionnement initial de chercheur, qui débouchera dans un deuxième temps sur une action de formation des enseignants, que nous nous posons à nouveau la question de la place et du rôle du calcul mental. Par exemple, effectuer mentalement un calcul mental comme 25 fois 24 est une occasion de travailler la disponibilité de 25 comme le quart de 100 et non simplement comme $20 + 5$, autrement dit la disponibilité de décompositions multiplicatives. C'est peut-être aussi l'occasion d'associer les écritures 25 et $\frac{100}{4}$, c'est-à-dire de travailler sur les écritures symboliques, des nombres et des opérations, pour justifier des « règles » qui peuvent émerger de procédures individuelles ou non (ici, pour multiplier par 25, on multiplie par 100 et on divise par 4, ou on divise par 4 et on multiplie par 100). Le même calcul, placé dans un contexte de proportionnalité, peut favoriser des formulations personnelles d'élèves qui peuvent contribuer à cette disponibilité. Enfin, c'est peut-être une occasion de « réconcilier » dans une dynamique contemporaine une vision idéale des mathématiques modernes et une vision passéiste de l'enseignement des mathématiques (dans l'exemple donné, on travaille sur une composition de transformations dont l'opérateur est le produit des opérateurs).

En conclusion, nous retenons quatre grands axes pour structurer le « nouveau relief » que nous proposons et qui sont susceptibles d'influencer des pratiques d'enseignement associées :

1. Les décimaux, dans leurs dimensions objet et outil, avec deux focus particuliers, sur les changements d'écriture et sur la valeur d'un chiffre dans l'écriture décimale.
2. Les rationnels (dans les programmes actuels, des écritures fractionnaires de nouveaux nombres, qui peuvent ou non, être décimaux).
3. Les structures opératoires, additives, mais surtout multiplicatives, avec un accent sur la proportionnalité.
4. Et enfin, l'ordre de grandeur d'un résultat.

Ce sont principalement ces quatre points, que nous allons mettre à l'épreuve de notre expérimentation, dans le cadre de la formation des enseignants, en mettant l'accent sur un ensemble de tâches de calcul mental, les liant ou non, et avec des degrés de formalisation associés. Ce sont des éléments d'explicitation de ce relief qui peuvent permettre, selon nous, de favoriser chez les enseignants, des changements de représentations sur les notions à enseigner, et une réflexion sur des alternatives portant sur l'organisation des connaissances et leurs conséquences sur le travail mathématique à proposer aux élèves. La question corollaire est alors de comprendre comment créer chez les enseignants des conditions favorables à une sensibilisation à un « nouveau relief », qui les amènent à des prises de conscience sur les contenus à enseigner et sur leurs pratiques, et qui passent sans doute par une « dénaturalisation » de certaines d'entre elles.

Chapitre 2. Des apprentissages des élèves à la formation des enseignants : cadrage théorique, problématique et méthodologie

Sommaire du Chapitre 2

I. Des tâches vers les activités, et des activités vers les apprentissages des élèves : des distinctions opérationnelles dans notre recherche.....	151
A. Tâches et activités : la théorie de l'activité, une toile de fond pour étudier les élèves et leurs enseignants, notamment en classe.....	151
B. Quels "sujets" : introduction des différences	153
C. Points de vue globaux adoptés sur les apprentissages des élèves, mettant en jeu les enseignements.....	155
II. La complexité des pratiques des enseignants : notre point de vue....	164
III. La formation continue des enseignants : vers PACEM.....	167
A. Les formations d'enseignants en France et le travail des formateurs	167
B. Nos expériences personnelles de formation	171
C. Formation des enseignants : vers un dispositif expérimental	176
IV. Problématique et méthodologie générale	181
A. Vers une double problématique : de formation et d'évaluation.....	181
B. Méthodologie générale	186

Nous abordons ce deuxième chapitre avec nos intentions de chercheur, muni de ses diverses expériences, d'enseignant et de formateur, qui s'interroge sur la manière d'améliorer les acquis des élèves de sixième, dans le domaine des nombres et du calcul, que les analyses effectuées dans le chapitre précédent ont situés. Notre sentiment est qu'on peut y contribuer par une action de formation continue offerte à des enseignants, élaborée à cette fin, et visant à enrichir leurs pratiques, notre ambition ne se limitant pas aux élèves des enseignants participant à la formation, mais à tous les élèves de sixième de leurs collègues. Pour approfondir ce questionnement général, nous allons étayer ces intentions par des éléments théoriques, afin de comprendre en quoi jouer sur les pratiques des enseignants peut influencer les apprentissages des élèves, et dans quelle mesure il est possible d'intervenir sur ces pratiques. Pour cela, nous utilisons le cadre théorique de la double approche, issu de la didactique des mathématiques et de la psychologie ergonomique, afin de dégager notre problématique et de légitimer notre méthodologie.

La genèse de notre projet pourrait donc à l'extrême se résumer en une seule question, à la fois fondamentale, naïve et partagée par de nombreux didacticiens et formateurs : comment former des enseignants (en exercice) dont tous les élèves apprennent des mathématiques ? Fondamentale, car par nature liée au métier d'enseignant – or, nous considérons comme un fait établi que les évaluations étudiées au chapitre 1 révèlent que des proportions importantes d'élèves ne savent pas ce qu'ils « devraient savoir » institutionnellement, dans le domaine des nombres et du calcul à la fin de l'école primaire – , naïve, car nous sommes bien conscients

que les enseignants ne sont pas les seuls acteurs qui interviennent dans les apprentissages des élèves. On peut même s'interroger, et des enseignants se posent eux-mêmes la question, sur leur possibilité – nous ne parlons pas encore de marge de manœuvre – d'intervenir sur ces apprentissages, dans certaines situations. Question partagée enfin, car notre projet, centré sur un contenu spécifique, a l'ambition de participer à la recherche en didactique des mathématiques en adaptant tout en prolongeant des analyses existantes.

Dès lors, on voit bien que cette question initiale mérite d'être affinée, et déclinée à son tour selon plusieurs axes. Le premier de ces axes concerne les élèves – qu'est-ce qu'apprendre des mathématiques pour un élève de collège, et quelles mathématiques¹¹² dans le domaine des nombres et du calcul ? –, le deuxième porte sur les enseignants – quelles influences peuvent avoir les enseignants sur les apprentissages des élèves ? –, et le troisième touche à la formation des enseignants – comment former des enseignants, mais aussi (et surtout) à quoi ? Si beaucoup de recherches, comme on l'a vu, abordent le premier point, le deuxième et le troisième point ne sont que peu approchés « ensemble ».

Pour répondre à notre façon à chacune de ces questions, de manière liée, nous avons adopté un cadre théorique qui nous permet d'avoir à notre disposition des éléments, qui à la fois légitiment notre démarche de formateur, et orientent notre recherche dans le domaine que nous avons choisi. Ce cadre organisateur est celui de la double approche (Robert, 2001 ; Robert & Rogalski, 2002) inclus dans la théorie de l'activité¹¹³, elle-même inspirée des travaux de Vygotsky¹¹⁴, Luria et Leontiev, et replacée dans le contexte de l'enseignement des mathématiques en milieu scolaire.

¹¹² Nous estimons avoir traité cette question à la fin du chapitre 1 en définissant un « nouveau relief ».

¹¹³ En réalité, la théorie de l'activité dont nous parlons, ou plutôt la théorie des activités, s'inscrit elle-même dans la théorie de l'Activité à laquelle nous empruntons quelques outils pour nos analyses.

¹¹⁴ Nous prenons le parti de Rogalski d'écrire Vygotsky avec un « y » final, comme dans la littérature internationale anglophone et dans la littérature canadienne francophone.

Les composantes fondamentales de la théorie de l'activité sont « la distinction entre tâche et activité, le double point de vue de la situation et du sujet de l'action, et le système de double régulation de l'activité, c'est-à-dire les facteurs déterminants et les effets en retour de l'activité portent sur les composants de la situation et sur le sujet lui-même » (Rogalski, 2013).

Robert et Rogalski, dans leur confrontation d'une réflexion didactique et d'un point de vue ergonomique, ont tiré un cadre d'analyse et d'interprétation de l'activité enseignante, articulée avec celle de l'élève. L'imbrication des différents outils construits dans ces deux théories, et le fait qu'on puisse considérer que la théorie de la double approche s'inscrit dans la théorie de l'activité, font que nous n'adoptons pas une présentation alternée de l'une et de l'autre. Nous choisissons plutôt de procéder à un éclairage de chacune des trois questions que nous avons énoncées plus haut, en empruntant directement et largement à Robert et Rogalski elles-mêmes, et en reconstruisant partiellement leur démarche en l'adaptant à notre problématique.

Nous présentons donc d'abord dans ce chapitre, sans les développer, les principaux éléments de la théorie de l'activité qui nous semblent directement en relation avec notre problématique, que nous empruntons essentiellement au travail de Rogalski (2004, 2008, 2013), et ceux de la double approche (Robert & Rogalski, 2002 ; Robert & Hache, 2013). Sans revenir explicitement sur des éléments qui émaillent le travail de recherche en didactique des mathématiques, nous utilisons cependant toutes ces références dans le contexte spécifique de notre étude, en particulier comme hypothèses, reprises et/ou mises à l'épreuve au sein de notre expérimentation. Nous retenons principalement de ces cadres théoriques, les notions d'activités des élèves et des enseignants, et ce qui sera susceptible d'étayer notre démarche au niveau de la conception, de la mise en œuvre et de l'analyse de la formation des enseignants. Plus précisément, nous essaierons de mettre en relation les différents éléments que nous présentons avec ce qui est en jeu dans notre expérimentation, en les appliquant à l'enseignement des nombres et du calcul en sixième, avec un rôle spécifique du calcul mental, et à la formation des enseignants dans ce domaine.

Cependant, la difficulté à laquelle nous nous heurtons est de rendre compte de façon linéaire d'objets d'étude qui sont complexes et qui contrarient *a priori* une telle entreprise. Nous en sommes conscient, sans pour autant renoncer à chercher à décomposer cette situation en « éléments simples », souvent inclassables exclusivement du côté élèves ou du côté enseignant, et même quand c'est le cas, interagissant entre eux quoi qu'il en soit.

Nous choisissons donc de structurer ce chapitre en quatre grandes parties. Dans la première partie, nous présentons des éléments théoriques « opérationnels » pour notre recherche sur l'analyse des apprentissages des élèves, puis nous rassemblons dans une deuxième partie les principaux résultats de la double approche sur les pratiques des enseignants. Dans la troisième partie, nous décrivons brièvement dans une première section, en les catégorisant, des types de formation que l'on peut rencontrer en France, ces formations étant supposées se dérouler hors de la classe, et en présentiel¹¹⁵. Dans la deuxième section, nous décrivons les formations que nous avons mises en œuvre nous-mêmes avant cette étude, en les analysant en regard de la double approche. Dans la troisième partie, nous exposons comment, dans une formation d'enseignants, nous avons l'intention d'adapter les éléments mentionnés dans la première partie, et d'intégrer deux nouvelles variables. Dans la quatrième et dernière partie, nous revenons sur notre projet en tant que chercheur dans le cadre du dispositif PACEM, sur nos questions et nos objets d'étude, y compris en termes d'hypothèses (reprises ou testées), en cherchant à caractériser notre démarche en fonction des objectifs de notre recherche. Il s'agit ainsi de préciser une problématique et de préparer la mise en place de notre méthodologie.

¹¹⁵ Nous entendons par « présentiel » le fait que formateur et formés soient effectivement réunis pendant toute la durée de la formation.

I. Des tâches vers les activités, et des activités vers les apprentissages des élèves : des distinctions opérationnelles dans notre recherche

A. Tâches et activités : la théorie de l'activité, une toile de fond pour étudier les élèves et leurs enseignants, notamment en classe

Le premier point que nous retenons dans la double approche est la distinction entre tâche et activité. Dans le champ scolaire, pour un élève, une tâche est ce qu'il a à faire, souvent dans des énoncés proposés par l'enseignant, et avec des consignes de travail mathématique associées, alors que l'activité est ce qu'il va mettre en œuvre, de façon visible et invisible, pour effectuer cette tâche, ce qu'il fait ou ne fait pas, ce qu'il dit ou ne dit pas. Cette distinction va évidemment à l'encontre de formulations courantes qu'on trouve dans les manuels scolaires telles que « activités d'introduction » ou « activités d'entraînement », ou de celles utilisées dans les programmes¹¹⁶ telles que « activités proposées » ou « activités appropriées » aux élèves. Il est d'ailleurs à noter que ces programmes utilisent aussi le terme « activité » dans une signification plus proche de celle de la théorie de l'activité, dans des expressions comme « activité mathématique centrée sur la résolution de problèmes » ou « mise en activité des élèves ». Rogalski (2013) insiste également sur la distinction entre la tâche prescrite (avec des attentes par celui qui la prescrit) et la tâche effectivement réalisée, auquel le sujet, qu'il soit élève ou enseignant, va répondre par une activité. Ce qui distingue les deux tâches, c'est la redéfinition par le sujet de la tâche prescrite, sujet qui « s'en fait une représentation, s'autorise ou s'interdit des possibles (pas toujours consciemment), lève des contraintes ou au contraire s'en pose, utilise des critères d'évaluation qui peuvent différer de ceux de la prescription ».

¹¹⁶ Par exemple les programmes du collège de 2008.

Il apparaît donc immédiatement dans cette distinction tâche /activité que les activités des élèves dépendent des tâches, considérées une par une, mais aussi considérées dans leur ensemble, dans leur organisation, dans leur diversité, dans leur richesse et dans leur quantité. Mais il est clair aussi que d'autres facteurs vont intervenir dans ces activités comme le rôle des autres élèves, différent *a priori* selon que la tâche est présentée comme individuelle ou collective, ou comme la nature du travail à effectuer, selon qu'il s'agit d'un travail de recherche, de copie ou d'évaluation, plus ou moins contraint dans le temps, noté ou non. Interviennent également bien entendu les connaissances des élèves, leur posture globale face au travail scolaire, ou face à une discipline en particulier, voire leur « moral » au moment où leur demande d'effectuer une tâche.

De façon plus globale, on peut dire que les activités des élèves ne dépendent pas seulement des tâches prescrites, mais aussi des contextes dans lesquelles elles peuvent se dérouler, et que parmi les déterminants de ces contextes, figurent les pratiques des enseignants. Par exemple, le découpage d'une tâche non immédiate en sous-tâches va influencer l'activité d'un élève : ce découpage peut être fait dans l'énoncé, ou au contraire être introduit par l'enseignant. On comprend alors que les choix de découpage effectués par l'enseignant, tout comme les durées qu'il accorde à chacune des sous-tâches, jouent eux aussi un rôle important sur les activités des élèves, de même que les aides qu'il peut apporter à ces derniers au cours de la réalisation de ces sous-tâches.

Et c'est là que la théorie de l'activité nous apparaît comme particulièrement intéressante, car elle offre aussi un découpage qui permet de s'intéresser à l'enseignant. On peut en effet considérer qu'un enseignant a, tout comme un élève, des tâches à effectuer, et qu'il va déployer des activités pour les réaliser. Tout comme pour un élève, ces activités sont extériorisées ou non, et intègrent les décisions que l'enseignant effectue, et tout autant les choix qu'il ne retient pas. Et en regard de ce qui se joue de l'enseignant vers l'élève, « l'élève est un déterminant central de l'activité de l'enseignant. Il peut s'agir de l'élève individuel, de l'ensemble des élèves, et de la classe comme entité » (Rogalski, 2013).

B. Quels "sujets" : introduction des différences

Dans notre approche didactique, si nous nous inspirons, à la suite de nombreux chercheurs des travaux de Piaget et de Vergnaud, nous intégrons aussi que, dans la théorie de l'activité, le sujet, l'élève comme l'enseignant, est un sujet individuel – et non un sujet épistémique comme chez Piaget –, avec des intentions, qui éprouve des sensations et interagit avec autrui dans une situation donnée, même si on n'arrive pas toujours à tenir compte des singularités. Par delà des conditions nécessaires sur l'avancée du savoir, on peut alors chercher d'une part des régularités entre sujets et de l'autre des spécificités de leur activité : qu'est-ce qui est commun dans les déterminants et l'organisation de leur activité ? Quelles en sont les différences individuelles ? Du côté des enseignants, cela permet de poser la question de leur diversité, de leurs conditions singulières d'exercice de leur profession, ou amène à chercher des invariants dans par exemple ce qui relève de l'éducation prioritaire ou ce qui n'en relève pas. Cela permet de poser la question du développement professionnel des enseignants, qui passe par le développement de compétences didactiques individuelles, mais sans doute par d'autres choses aussi. Nous revenons sur chacun de ces deux points dans les deux sections suivantes.

1. Traquer localement tâches, activités et différences : analyses *a priori* et *a posteriori*

Cette double prise en compte de l'élève et de l'enseignant, comme sujets, a des conséquences sur la manière d'exploiter l'analyse *a priori* des tâches (locales) proposées par l'enseignant à ses élèves telle qu'elle est définie par Robert (2008). « L'analyse *a priori* d'un énoncé consiste donc à se demander, compte tenu du programme, de la place des exercices dans ce qu'a fait le professeur, quelle utilisation de leurs connaissances précises, nouvelles et anciennes, les élèves vont avoir à faire, en travaillant sur cet énoncé. Cette analyse *a priori* ne réfère pas seulement au potentiel d'apprentissage d'un exercice. On cherche simplement quelles activités les élèves vont pouvoir développer avec leurs connaissances, sur cet exercice. » Pour le dire autrement, si un énoncé contient en lui-même des activités qu'il peut favoriser pour les élèves, on prend aussi en compte son potentiel d'enseignement, c'est-à-dire son potentiel de mise en œuvre dans la classe pour un enseignant donné avec des élèves

donnés. De notre point de vue, cette conception de l'analyse *a priori* est complémentaire d'autres types d'analyses, comme celles de la TSD ou de la TAD, souvent plus globales, mais moins liées aux déroulements effectifs, dans la mesure notamment où ce sont des conditions nécessaires à l'avancée du savoir, en termes de situations mathématiques ou de praxéologies, qui sont d'abord travaillées. En particulier, l'importance accordée à la diversité des élèves et de leurs connaissances, dans une même classe, (ce qui n'est pas intégré dans la TAD ou la TSD) conduit à envisager, sur une même tâche et en fonction des déroulements, des activités des élèves *a minima* et *a maxima*. (Robert, 2007) définit les activités *a minima* comme celles « que les élèves semblent développer tardivement, après toutes les interventions de l'enseignant, alors que d'autres élèves ont déjà travaillé, sans attendre », ce qu'elle attribue à des activités *a maxima*. En réalité, cette distinction, à l'origine, résulte de l'analyse *a posteriori* de séances, et nous tenterons de l'utiliser différemment en formation. Nous aurions donc envie de dire que, dans ce travail, cette analyse d'un exercice ne réfère pas seulement à son potentiel d'apprentissage, mais qu'elle doit être adoptée pour chercher quelles activités les élèves vont effectivement pouvoir développer avec leurs connaissances, sur cet exercice, mais aussi en fonction de leur engagement, dans cette classe. La notion de robustesse, reprise plus loin, permet de traduire le potentiel d'une tâche à résister à différents déroulements sans trop de modifications de son potentiel d'apprentissage. On peut ainsi supposer qu'une tâche suffisamment robuste engage un élève, avant toute intervention d'aide de l'enseignant, dans une activité *a maxima*, mais qu'elle permet aussi à un élève qui réalise une activité *a minima* d'exécution en fonction de ce que l'enseignant aura fini par indiquer, d'apprendre quelque chose.

Cette démarche d'analyse permet d'inférer l'activité « effective » d'un élève à partir d'observables (sans forcément la reconstituer totalement), et c'est ce qui justifie son emploi, à la fois dans la conception d'items proposés dans des tests standardisés, dans l'analyse des résultats à ces tests et dans la proposition d'alternatives aux enseignants pendant la formation.

2. Des activités aux apprentissages des élèves

L'inscription de notre démarche dans la théorie de l'activité nous permet aussi de comprendre (en partie) dans quelle mesure des élèves acquièrent certaines connaissances,

puisque nous adoptons comme Robert le parti pris que les apprentissages des élèves dépendent directement de leurs activités qui, comme nous l'avons souligné plus haut, sont provoquées par les choix de l'enseignant, mais qui dépendent aussi de chaque élève et de sa classe ainsi que du temps long. Cependant nous admettons qu'il peut y avoir une forme de récurrence, qui associerait les notions de fréquence et de régularité, dans les réactions des élèves et dans les choix des enseignants, en relation avec la cohérence et la stabilité de leurs pratiques, ce qui justifie d'ailleurs les analyses locales et l'espoir qui peut être mis sur des formations courtes. Ce sont tous ces partis pris qui sont à l'origine de notre démarche de formateur, et qui nous ont conduit à susciter dans la formation des enseignants mise en place dans le cadre de notre expérimentation une réflexion collective sur les choix des enseignants, déterminés en partie par les ressources qu'ils utilisent (manuels scolaires, exercices, ressources en ligne) – mais pas seulement –, qui peuvent expliquer les résultats des tests, et à envisager d'autres choix, en termes de tâches et d'organisation de ces tâches dans le temps.

C. Points de vue globaux adoptés sur les apprentissages des élèves, mettant en jeu les enseignements

La prise en compte nécessaire du temps long, même si elle peut être à certains égards détournée par l'hypothèse de récurrence évoquée ci-dessus, nous amène à évoquer des notions relatives au savoir mathématique visé et aux connaissances correspondantes des élèves, en lien avec celle de conceptualisation et d'apprentissage. Nous reprenons notamment dans notre travail des considérations souvent utilisées en didactique des mathématiques sur les concepts et leurs propriétés, comme les notions d'outil/objet, de cadres, de registres, de changement de cadre, ou de registre (Douady, 1986 ; Douady & Perrin-Glorian, 1986 ; Duval, 1995). Sur les connaissances, nous partageons le point de vue de Robert, qui, à la suite de Vergnaud (1990), postule que les acquisitions de connaissances des élèves peuvent être définies « en référence à un ensemble de tâches dont la résolution, attendue, requiert la disponibilité d'un certain nombre d'aspects des notions visées – objets (définition, théorèmes, propriétés) et outils (contextualisés, dans différents cadres et registres) – incluant la réorganisation des nouvelles connaissances dans les acquis antérieurs » (Robert & Hache, 2013). Quant à la disponibilité, Robert (1999) définit trois niveaux de mise en fonctionnement des connaissances des élèves, attachés à des tâches étudiées dans un contexte précis : le niveau du technique, celui du

mobilisable et celui du disponible. Cette distinction entre des tâches correspond, selon les niveaux de mise en fonctionnement cités, à l'application immédiate de connaissances pour le premier, à des adaptations de connaissances dont l'utilisation est en partie indiquée pour le second et à l'identification de connaissances à utiliser avant de les adapter pour le troisième. Nous considérons pour notre part cette question du niveau de mise en fonctionnement des connaissances comme fondamental non seulement dans l'analyse *a priori* locale d'une tâche, mais aussi dans l'organisation et la planification globale des tâches au sein d'un même niveau de conceptualisation¹¹⁷. Cela pose ainsi clairement par exemple la question d'une progression par chapitres : en effet peut-on évoquer le niveau du disponible si la propriété à utiliser pour réaliser une tâche est donnée dans un exercice d'un chapitre qui porte sur cette propriété, même si son utilisation n'est pas « fléchée » dans l'énoncé ? Il y a donc bien là un véritable enjeu – utiliser à bon escient et organiser les connaissances entre elles pour provoquer de la disponibilité – qui sera central dans notre démarche et pour lequel la double approche et la théorie de l'activité nous fournissent des outils d'analyse en quelque sorte opératoires.

Un autre aspect essentiel à prendre en compte porte sur le temps long du développement d'un sujet, en lien avec ses possibilités cognitives, qui ne sont pas seulement liées au didactique : « L'étude par Piaget et ses collaborateurs des stades de développement cognitif sur les grandes catégories de la pensée a mis en avant, régulièrement, le temps long de ce développement. Dans le domaine numérique, Vergnaud a montré que le champ conceptuel des structures additives se développait précocement, avec des opérations additives dès 2 ans, alors que les acquisitions sur les compositions de transformations ou de comparaisons n'étaient pas terminées à l'issue de la scolarité obligatoire. Des données sur l'acquisition des mesures spatiales (Rogalski, 1982), en particulièrement du volume, ont montré la difficulté et la durée du processus de conceptualisation faisant passer d'une notion « unidimensionnelle » du volume (un concept familier en fin de primaire) à la notion de mesure produit (dont la conceptualisation n'est pas achevée en fin de collège). L'insistance

¹¹⁷ Nous avons défini ce que nous entendons par niveau de conceptualisation dans la dernière partie du chapitre 1.

sur le temps long du développement cognitif n'apparaît pas sous la même forme chez Vygotsky, mais il a souligné, que la formation des concepts scientifiques (...) ne fait que commencer lorsque l'enfant assimile pour la première fois une signification ou un terme nouveau, porteur de concept scientifique » (cité dans Rogalski, 2013). Par exemple, est-ce que cette prise en compte du temps long sur le développement d'un élève ne serait pas de nature à légitimer, indépendamment de toute contrainte scolaire ou de tout usage social, le choix d'un enseignement spiralé, structuré autour d'un travail en calcul mental pour l'acquisition de connaissances sur les nombres et en calcul ? Et comment analyser des évaluations selon le moment où elles sont proposées ?

En ce qui concerne les activités des élèves et leur rôle dans l'acquisition des connaissances, si, comme de nombreux didacticiens des mathématiques avant nous, nous intégrons bien entendu largement les travaux de Piaget dans notre démarche, nous devons encore évoquer un outil théorique spécifique que nous utilisons dans notre appréhension du processus de conceptualisation. Nous nous référons pour cela à Vygotsky, et en particulier au chapitre 6 de son ouvrage, *Pensée & langage* (1934/1985, 1997), et nous nous référons aussi aux travaux de Vergnaud et de Brossard (*in* Clot, 2002) ainsi qu'à ceux de Rogalski (2013) auxquels nous empruntons largement des commentaires qu'ils en font. Dans ce chapitre, Vygotsky montre d'abord comment ce qu'il appelle les concepts « quotidiens », issus de la vie courante d'un « enfant d'âge scolaire », et les concepts « scientifiques », enseignés, – qu'il renomme par la suite concepts « spontanés » et concepts « non spontanés » – se développent dans une dialectique de « double germination », puis propose et explicite le concept de « zone proximale de développement » (ZPD). Nous ne nous servons pas directement de ces notions dans notre propre travail, mais nous y puisons en quelque sorte une inspiration soit pour expliquer certains aspects de notre démarche, soit pour ouvrir de nouvelles perspectives de recherche. Ces mises en relation entre des objets dont la « taille » reste imprécise chez Vygotsky et des hypothèses essentiellement fondées sur notre expérience d'enseignant et de formateur sont encore « en gestation », sous forme de conjectures encore grossières, que nous considérons comme des pistes possibles pour une recherche ultérieure.

Cette distinction qui vient d'être évoquée entre concepts quotidiens et concepts scientifiques, nous sert à interroger notre conception de l'enseignement et de ses

conséquences sur les apprentissages des élèves. Nous sommes conscient que nous déformons sans doute en partie, ou en tout cas restreignons, la portée des travaux de Vygotsky, mais nous adoptons comme principe que les apprentissages des élèves développés dans le contexte scolaire en mathématiques sont de nature différente que ceux qu'ils développent hors contexte scolaire. Nous reprenons pour cela deux des caractéristiques qui les distinguent : les concepts scientifiques relèvent d'un processus systématique de transmission des connaissances, avec un rôle essentiel du langage (et d'une diversité de registres sémiotiques) et forment des systèmes tandis que les concepts quotidiens se forment spontanément au cours de l'expérience et sont isolés les uns des autres.

Cette notion de « concept quotidien », lorsqu'il s'agit des mathématiques, fait partie de nos interrogations, notamment à l'école primaire et au collège. De fait, peu d'exemples mathématiques sont donnés à notre connaissance dans la littérature sur ce sujet. On peut citer les travaux de Nunes, Schliemann et Carraher (1993) sur les mathématiques de rue et les mathématiques scolaires. Nous l'illustrons quant à nous par l'exemple suivant qui va selon nous au-delà d'un seul changement de cadre : un enfant qui « fait de la natation » apprend, au fil des séances à la piscine, que, pour faire 100 mètres, il lui faut parcourir 4 longueurs d'un bassin de 25 mètres (ou 2 longueurs d'un bassin de 50 mètres). Il apprend à l'école primaire à connaître et à utiliser le double, la moitié, le quart d'un nombre entier, ou encore certaines relations entre les nombres d'usage courant comme 25, 50 et 100. Il « découvre » aussi à l'école primaire la notion de multiple, qui sera reprise au collège et associée à celle de diviseur. Certes, on ne peut pas parler ici de concept, mais nous voyons bien qu'il y a entre des longueurs de bassin et des multiples de 25 un processus de généralisation et de formalisation sur les nombres et sur les opérations : une distance à nager (100 mètres) peut être pensée sans référence directe ni au nombre 100 ni à son écriture décimale, des relations entre des distances à parcourir en nageant peuvent « se construire » sans un recours explicite à la multiplication, la longueur d'un bassin (par exemple 25 mètres) n'est pas forcément utilisée comme référence par rapport à 100 mètres. Il nous apparaît, qu'à travers cet exemple, qu'il existe un intermédiaire entre concept quotidien et concept mathématique déjà connu (la longueur d'une piscine et des longueurs à parcourir) et concept scientifique de multiple/diviseur, qui serait la notion de concept familier, avec à la clé un levier potentiel et un enjeu pour les enseignants : peut-on s'appuyer sur des « longueurs de bassin » ou tout

simplement des « longueurs », comment le faire, à quels moments, pour quels élèves et en quoi cet appui favorise-t-il le développement d'une connaissance mathématique, qui aura ensuite à s'affranchir d'un contexte particulier ?

L'autre élément auquel nous faisons référence est le concept de « zone proximale de développement » (ZPD). Plusieurs ZPD, externe et interne au sujet notamment, ont été évoquées par Vygotsky et ses successeurs, plusieurs définitions existent pour chacune d'entre elles. Nous entendons quant à nous, comme beaucoup de didacticiens, ce que Vygotsky lui-même définit comme ce qu'un enfant sait faire avec l'aide d'autrui « mieux sachant » et qu'il ne sait pas faire tout seul aujourd'hui, avec l'idée (le pari ?) qu'il saura le faire demain. Notre compréhension, ou notre adaptation, de ce concept réside dans l'importance que Vygotsky accorde dans le processus de développement de l'enfant, que nous déplaçons au processus d'apprentissage des mathématiques dans le contexte scolaire, à la communication ou à la collaboration avec autrui. Dans la classe, cet « autrui » peut être un adulte, l'enseignant de mathématiques en particulier, ou un ou des pairs, d'autres élèves. Cette notion de proximité pourrait laisser à penser qu'il faut nécessairement procéder avec des élèves par « petits pas ». Il n'en est rien, et la recherche en didactique montre au contraire qu'il faut parfois déstabiliser des conceptions pour créer des conditions favorables d'apprentissage.

Ces éléments théoriques empruntés à Vygotsky ne nous font pas oublier le rôle fondamental dans la construction des connaissances de l'activité de l'élève dans la réalisation des tâches mathématiques scolaires. Ils apportent des éclairages sur des complémentarités entre des théories différentes du développement et des apprentissages, adaptées aux mathématiques et à la situation scolaire. Ils nous semblent en particulier essentiels pour ce qui concerne l'autonomie des élèves et les aides apportées par l'enseignant, dont les nécessités respectives sont nuancées par cette double référence à Piaget et à Vygotsky, que nous reprenons à notre compte : « On ne peut ni sous-estimer le poids, dans l'apprentissage, de l'activité propre du sujet qui apprend, ni surestimer le poids de l'activité de médiation de

l'enseignant. La recherche en didactique doit prendre à bras le corps ces deux objectifs à la fois, en analysant l'activité conjointe¹¹⁸ des élèves entre eux et de l'enseignant avec les élèves » Vergnaud (2000).

La double approche nous incite à compléter cette citation en disant qu'on ne peut non plus sous-estimer « le poids de l'activité de médiation de l'enseignant ». Cela nous conduit à revenir sur l'importance des couples (contenus ; déroulements dans la classe), que nous avons évoquée plus haut dans ce chapitre, et sur l'existence d'une double question : comment un énoncé peut-il influencer sur l'activité potentielle des élèves ? Et comment l'activité de l'enseignant peut-elle modifier l'activité potentielle des élèves ?

On voit donc bien comment la prise en compte simultanée du travail de l'élève et de l'idée de ZPD donne du poids à l'enseignant, à la fois dans le choix des tâches qu'il propose aux élèves, et dans la manière dont il va gérer la réalisation de ces tâches, autrement dit comment son activité en classe peut influencer celle des élèves. On voit aussi, sur un tout autre plan, combien il est difficile pour un enseignant, dans le milieu scolaire habituel, d'apprécier des situations très variées au sein d'une même classe, variables d'un élève à un autre, mais aussi variables selon les contextes pour un même élève : la place accordée à l'autonomie des élèves et l'identification de la ZPD par l'enseignant sont bien deux « éléments délicats ». Ces deux éléments renvoient en fait à deux logiques qui sous-tendent la part de l'activité de l'enseignant en classe, en amont de la séance, dans le choix des tâches pour les élèves et dans l'élaboration du scénario¹¹⁹, et dans la conduite de la séance : la première de ces logiques questionne l'équilibre entre l'autonomie de l'élève et les aides que l'enseignant peut lui apporter, y compris sur le temps long, la seconde interroge celui entre les moments d'individualisation de l'enseignement et les phases collectives. Sur ces deux points,

¹¹⁸ Cette expression est à prendre ici au sens courant.

¹¹⁹ Pour l'enseignement d'un contenu précis, nous entendons par scénario l'ensemble ordonné de ce que l'enseignant prévoit de faire avec ou non ses élèves, y compris les évaluations et le travail à la maison, avec des prévisions en termes d'organisation de la classe et de gestion du temps.

nous nous demandons si le calcul mental, par la nature des tâches qui peuvent être proposées aux élèves, ne permettrait pas une analyse *a priori* plus facile des tâches, car plus restreinte, ces tâches se différenciant cependant de tâches simples et isolées. Donc, avec des activités potentielles des élèves plus faciles à identifier, mais pouvant être envisagées même *a minima* comme provoquant un niveau de mise en fonctionnement des connaissances ne relevant pas que du technique, voire visant le disponible. On peut supposer que l'enseignant, s'il a anticipé les activités possibles des élèves, et à condition qu'il prenne suffisamment d'information sur les activités observables des élèves, par exemple en faisant exposer par les élèves les stratégies développées, soit en mesure de construire un scénario qui inclurait *a priori* des éléments de régulation, et puisse réagir plus facilement « en direct ».

Revenons pour terminer sur un aspect qui est largement au cœur des débats sur Piaget et Vygotsky, celui du langage. Dans une situation de classe, nous l'avons dit, l'enseignant exerce une médiation entre les élèves et les connaissances à acquérir, médiation dans laquelle le langage¹²⁰ tient une place importante, en particulier par le rôle qu'il joue dans les changements de registres dans la conceptualisation des connaissances. Nous faisons l'hypothèse supplémentaire que des formulations successives (du langage naturel au langage mathématique en passant par des formulations « mathurelles¹²¹ ») peuvent être un moyen d'amener l'élève à la compréhension d'un concept. Plus que des changements de points de vue, – dans certains cas, une autre version des « petits pas », avec des degrés de formalisation progressive, de précision variable – ils peuvent précéder une exposition finalisée des connaissances (ce qui figurera dans « la leçon à retenir »). Cette hypothèse n'est pas anodine, avec beaucoup d'implicite sur la réflexivité et le méta, et peu de recherches didactiques qui la mettent en jeu, car elle détermine en partie une stratégie d'enseignement qui va à l'encontre du traditionnel quadruplet (découverte ; cours ; application ; approfondissement) pour le

¹²⁰ Parmi d'autres registres d'expression comme le geste ou le regard.

¹²¹ Nous empruntons ce terme à l'équipe du projet «Lingot», sur l'apprentissage de l'algèbre, qui désigne par langage « mathurel » un langage utilisé par les élèves, mélangeant le langage naturel et l'emploi de termes spécifiques aux mathématiques (Delozanne & Chenevotot, 2005).

remplacer par un autre quadruplet (découverte ; appropriation ; cours ; approfondissement) ou même par un autre triplet (imprégnation, appropriation ; cours). Ce que nous entendons par imprégnation ne se résume pas un seul moment de découverte, localisé dans le temps, mais s'étale éventuellement sur plusieurs semaines, à petites touches, avec d'éventuels retours en arrière, le cours arrivant alors comme une forme de bilan des notions rencontrées, après des traces écrites personnelles ou collectives non abouties et transitoires. Cette conception d'un « enseignement à l'envers¹²² » présente *a priori* de nombreux avantages comme celui de pouvoir jouer sur une dialectique éventuelle entre concepts quotidiens et concepts scientifiques (ou inspirés de tels concepts), de contrôler la phase d'appropriation des élèves en ajustant le choix des tâches « au plus près de là où ils en sont » ou encore de proposer de façon précoce des tâches visant la construction de connaissances nouvelles dans un processus progressif de conceptualisation. Et là encore, dans le domaine des nombres et du calcul¹²³, nous adoptons comme parti pris que la pratique du calcul mental s'inscrit facilement dans cette stratégie, avec des évolutions de pratiques acceptables pour les enseignants et des perspectives favorables d'apprentissage pour les élèves.

Nous l'avons dit au départ de ce chapitre, la difficulté principale à laquelle nous sommes confronté est de rendre compte d'une complexité, dans un mode d'expression linéaire par nature inadapté à cette complexité. Précisons que nous entendons par complexité l'acception empruntée à Morin (1982), c'est-à-dire l'imbrication de différentes composantes qui interdisent la reconstitution complète d'un objet étudié en convoquant successivement et séparément ses différentes composantes. Dans cette complexité, figurent les activités des élèves, qui amènent à décoder ou prévoir les activités des enseignants, non (encore ?) spécifiées en elles-mêmes, et il nous semble qu'un problème actuel est qu'on n'étudie pas symétriquement enseignants et élèves. Certaines recherches, comme celles de Butlen par exemple, donnent davantage un accès aux activités locales des enseignants, sous les termes

¹²² A distinguer de la « pédagogie inversée ».

¹²³ On peut sans doute transposer la notion de calcul mental à d'autres domaines mathématiques étudiés.

routines (local) et gestes (micro) que les recherches dans le secondaire, mais peut-être que l'alchimie cognitif/médiatif et ce qui est à la charge des enseignants ne sont pas les mêmes. Nous revenons sur cette notion de complexité dans la partie suivante, consacrée aux pratiques des enseignants.

II. La complexité des pratiques des enseignants : notre point de vue

Dans la première partie de ce chapitre, nous avons adopté l'hypothèse largement partagée en didactique des mathématiques que « ce sont les activités mathématiques des élèves qui déterminent la partie de l'apprentissage dont l'enseignant est (en grande partie) responsable ; ces activités dépendent à la fois de l'ensemble des tâches proposées, organisées dans le scénario global élaboré par l'enseignant, et des déroulements de chaque séance, avec une plus ou moins grande proximité entre ce qui était prévu et de ce qui s'y passe. Mais ces activités dépendent aussi d'impératifs plus indirects, liés au fait que les enseignants sont engagés dans un métier, avec des contraintes propres, dont certaines dépassent la classe » (Robert et *al.*, 2012). Ajoutons que les variations qui existent entre ce qui était prévu et ce qui se passe réellement pendant une séance dépendent à la fois des élèves et de l'enseignant, et rappelons que ces variations sont fortement susceptibles d'entraîner des modifications des activités des élèves.

C'est la considération de contraintes non directement liées *a priori* aux seuls apprentissages tels que le chercheur en didactique des mathématiques les analyse, qui intervient de manière importante dans la théorie de la double approche didactique et ergonomique initiée par Robert et Rogalski (Robert, 2001 ; Robert & Rogalski, 2002 ; Robert & Rogalski in Vandebrouck, 2008) pour étudier les pratiques des enseignants. Pour ces deux chercheurs, l'analyse des pratiques enseignantes ne peut ainsi pas se limiter pas au seul contexte de la classe, ni même au seul contexte des relations strictement didactiques qui lient un enseignant et ses élèves. Si l'enseignant est bien considéré comme une personne engagée dans des relations didactiques avec les élèves, il est aussi perçu comme une personne exerçant un métier, dans sa dimension individuelle et collective. Cette posture, assez originale dans le paysage de la recherche en didactique des mathématiques en France, se propose donc d'étudier les pratiques des enseignants à travers cinq composantes à recombinaison, relatives aux choix *a priori* de contenus et de gestion (composante cognitive), aux décisions pendant les déroulements (médiative), aux respects des contraintes institutionnelle et sociale (composantes du même nom) et aux caractéristiques individuelles (composante personnelle) » (Robert et *al.*, 2012). Encore une fois, nous rappelons que « ce travail professionnel des

enseignants en classe et pour la classe est complexe : il se joue à plusieurs niveaux de temporalité, donnant lieu à des analyses selon plusieurs granularités, et résulte d'une recombinaison de différents objectifs qui ne sont pas tous liés aux seuls élèves » (Robert & Vivier, 2013). Cela a également conduit à une décomposition de ces pratiques en trois niveaux d'organisation, le niveau global des projets et des représentations de l'enseignant, le niveau local des séances en classe, et le niveau micro des routines et des automatismes déployés pendant les séances (Masselot & Robert, 2007).

Cette prise en compte d'autres dimensions que celles strictement liées aux apprentissages nous paraît aujourd'hui nécessaire pour comprendre les pratiques des enseignants, et en particulier ceux du collège, où s'exercent selon nous plus qu'ailleurs, des tensions qui affectent les objectifs et la nature de ces pratiques. « Plusieurs dysfonctionnements de l'enseignement des mathématiques, déjà importants antérieurement, sont devenus, nous semble-t-il, très dommageables pour les apprentissages, au fil de la démocratisation-massification de l'enseignement secondaire, et compte tenu de l'évolution générale des élèves, au sein d'une société complètement pénétrée par Internet : *l'illusion de la transparence du bon exposé, l'augmentation des malentendus entre enseignants et élèves, l'intégration, voulue massive, des nouvelles technologies et les nouvelles injonctions institutionnelles en termes de compétences et de socle*. Toutes ces difficultés sont aggravées par l'hétérogénéité croissante des classes, des établissements, par les réductions d'horaires en mathématiques et par des phénomènes de société qui dépassent l'école et qui peuvent jouer par exemple sur les conditions de travail des élèves. » (Robert et al., 2012)

Notre démarche est originale par rapport à la problématique de la plupart des recherches qui s'inspirent de la double approche. D'une part, nous nous inscrivons bien dans la suite des travaux qui ont cherché à analyser ou en à prendre compte cette complexité (Roditi, 2005 ; Chesnais, 2009). L'ensemble de ces travaux a permis de dégager les diversités et les régularités du métier d'enseignant, et en particulier d'apprécier à quel point les pratiques des enseignants sont stables et cohérentes. L'étude mettant en jeu la décomposition en différents niveaux de pratiques a permis par exemple d'analyser les difficultés de certains enseignants débutants en évoquant « une surcharge du niveau local ». D'autre part, nous détournons la double approche de l'objectif initial pour lequel elle a été élaborée. En effet, en

nous décalant des recherches précédentes qui s'appuient sur la double approche et cherchant à les prolonger avec un « changement d'échelle » sans avoir des moyens pour mener des observations cliniques, nous n'avons pas comme projet de porter notre attention sur l'analyse des pratiques des enseignants. Mais, en adoptant ce même cadre de référence, nous allons l'utiliser autrement, c'est-à-dire que d'un enjeu de compréhension des pratiques, nous allons passer à un enjeu de transposition de ce que nous savons sur ces pratiques, afin de jouer en formation sur ce qui est potentiellement modifiable, tout en gardant en ligne de mire l'amélioration des acquis des élèves. Notons que cette utilisation des résultats de recherche issus de la double approche a déjà été effectuée par Robert elle-même dans le contexte d'une formation de formateurs depuis 2002. Nous allons à notre tour le faire, cette fois dans une formation d'enseignants, dans un protocole expérimental de recherche.

III. La formation continue des enseignants : vers PACEM

Dans cette troisième partie, nous décrivons le double processus, empirique et théorique, qui nous a conduits à concevoir la formation que nous avons mis en œuvre dans le cadre de l'expérimentation PACEM. Ce processus s'est déroulé en plusieurs étapes, sur la durée, influencé par notre expérience d'enseignant (en exercice et ayant lui-même suivi des actions de formation d'enseignants) et de formateur (en exercice et ayant lui-même suivi une formation de formateurs).

A. Les formations d'enseignants en France et le travail des formateurs

Selon nous, le travail du formateur se place bien souvent dans un « entre deux » : entre pratiques effectives des enseignants et théories de l'apprentissage des mathématiques par exemple, entre recherches didactiques et enseignants, entre institution et enseignants, entre local (la classe au quotidien sur un thème donné) et global (l'enseignement des mathématiques à un niveau scolaire donné), entre ce qui intéresse un groupe d'enseignants et qui peut tenir à un genre, spécifié par des régularités communes, des habitudes partagées, pas nécessairement explicites, et ce qui spécifie les pratiques individuelles davantage lié à des questions de styles, etc.

Dans cette perspective, le formateur est amené à analyser diverses pratiques en relation avec les activités possibles des élèves, et cela sans se placer lui-même comme une référence pour tous. Il doit aussi pouvoir repérer des éléments à généraliser dans une pratique singulière, tout en promouvant les adaptations nécessaires, il doit avoir « des mots pour le dire », contribuant à outiller sa propre expérience et celle des enseignants en formation. Il doit pouvoir avoir accès aux ressources disponibles, articles de la littérature professionnelle ou de recherche, ressources en ligne, évaluations diverses, etc., et avoir les moyens de les critiquer et les exploiter dans des délais temporels raisonnables ; il doit aussi avoir à sa disposition diverses modalités de formation à combiner selon les offres et les paramètres attachés aux formations qu'il assure.

Le formateur n'est en général pas maître des offres de formation continue qui sont proposées aux enseignants. Celles-ci correspondent à des besoins supposés par l'institution, voire imposés à certaines catégories d'enseignants (liés à des changements de programmes par exemple), et/ou quelquefois ressentis (formations demandées par des enseignants sur site par exemple). Un certain nombre de paramètres sont fixés par l'institution : les effectifs, les durées, le type de formation, initiale ou continue, le caractère obligatoire ou non de la formation). Il reste néanmoins des variables aux mains des formateurs. Ce sont des éléments globaux des marges de manœuvre correspondantes que nous abordons, en nous limitant ici au travail de préparation que doivent faire les formateurs. Pour cela, nous allons présenter deux types d'études : celle de Kuzniak réalisée à partir d'une analyse de formations existantes dans le 1^{er} degré, et celle de Robert qui définit d'autres catégories.

Kuzniak (1994), puis Houdement et Kuzniak (1996) dégagent quatre stratégies présentes en formation à l'enseignement des mathématiques, essentiellement centrées sur les apports des formateurs en termes de contenus :

- Les stratégies culturelles : il s'agit des stratégies qui privilégient l'accroissement des connaissances des formés dans un domaine précis, sans préjuger de la mise en œuvre opérée dans les classes. Le formateur diffuse des informations afin d'accroître le savoir mathématique ou didactique des formés.
- Les stratégies basées sur la monstration : ces stratégies privilégient la transmission d'un modèle ou d'une façon de faire par l'observation dans les classes. Il s'agit de transmettre une pratique en montrant aux formés sa mise en œuvre effective et en la faisant imiter (que ce soit par un travail sur des situations didactiques ou non).
- Les stratégies basées sur l'homologie : ces stratégies utilisent aussi l'imitation, mais une imitation complexe à transposer par les formés, qui auront à mettre en place une façon d'enseigner inspirée de celle qu'ils ont pu vivre en tant « qu'élèves » pendant la formation. Le formateur transmet sa propre conception de l'enseignement des mathématiques, en la mettant en œuvre pendant la formation à travers des situations d'apprentissage. Il attend alors que les stagiaires mettent en œuvre dans leurs classes soit des situations qu'ils ont vécues comme élèves (homologie directe) soit d'autres situations proches de celles qu'ils ont vécues (homologie indirecte).

- les stratégies de transposition : elles complètent les précédentes par une distanciation théorique explicite. S'appuyant sur l'existence d'un savoir mathématique et didactique chez les stagiaires, elles visent à transmettre des savoirs de référence, mais portant sur les pratiques de classe, ce qui les distingue des stratégies culturelles.

En fondant également son analyse sur des observations de formations effectives, Robert, Roditi et Grugeon (2007) distinguent quant à eux cinq types de formations pour le 2nd degré, qu'ils estiment complémentaires, et qui ne sont pas centrées sur des contenus, mais sur des objets de formation :

- des formations centrées sur les apprentissages des élèves : prescriptives (programmes, activités, cours...) ; didactiques (contenus, gestion, difficultés des élèves)
- des formations centrées sur la personne de l'enseignant (et les représentations), notamment des analyses de pratiques réflexives organisées en formation initiale.
- des formations centrées sur le travail de l'enseignant : contraintes institutionnelles, sociales, marges de manœuvre et pratiques en classe
- des formations intégrées dans la dynamique de pratiques de classe qui résultent de recherches collaboratives associant chercheurs et enseignants (Bednarz, 2004).
- des formations centrées sur des compétences listées par l'institution (notamment en formation initiale) ou sur des tâches précises prescrites, comme certaines actions figurant dans les plans académiques de formations.

Les dernières sont les plus facilement discutables pour Robert car trop limitées, une analyse de tâches en termes d'objectifs à atteindre étant insuffisante selon elle car la « compréhension de l'activité demande la prise en compte des conditions même de cette activité ». Nous partageons ce point de vue.

Revenons aux catégories relevées par Kuzniak. Les deux premières sont explicites : il s'agit de transmission directe de connaissances ou de pratiques. Nous les interprétons simplement, dans le premier cas, comme un apport théorique, de contenus mathématiques ou didactiques, et dans le deuxième, comme un partage de savoir-faire techniques, sur un mode qui se rapproche du tutorat sur le terrain. La dernière stratégie se rapproche des deux premières, en cela qu'elle vise directement une transmission, mais une transmission de savoirs

sur les pratiques, la distinction faite par les auteurs avec les stratégies culturelles sous-entendant de notre point de vue un appui sur des cadres théoriques pas forcément présents pour les premières. Quant à la troisième stratégie, elle se distingue nettement des trois autres, puisqu'elle est la seule à faire intervenir une « mise en scène » de la formation, mêlant par conséquent de façon plus dynamique contenus et déroulements que la deuxième. Mais elle est en réalité transmissive elle aussi, puisqu'elle vise la reproduction ou la transposition en classe de situations proposées en formation. Pour conclure sur cette typologie, si nous concevons que chacune des stratégies proposées peut correspondre à une phase de formation, même courte, et intervenir ainsi en complémentarité avec une autre, notre expérience de formateur nous a conduit à néanmoins nous interroger sur leurs limites. En quoi ne sont-elles pas suffisantes ? Comment les faire évoluer ?

Selon nous, la troisième stratégie peut cependant aller au-delà de ce qu'elle laisse apparaître en première analyse, si son objectif devient réflexif, en prenant comme support la double activité du formateur (jouant le rôle de l'enseignant puis celui du formateur) et celle des stagiaires (jouant le rôle des élèves puis celui des enseignants). Il peut y avoir d'ailleurs selon nous, deux niveaux de stratégie par homologie selon que les stagiaires jouent sciemment le rôle d'élèves – nous parlons alors de simulation – ou qu'ils sont placés, presque à leur insu, par exemple lors d'un problème de recherche, en situation d'élèves. Nous suggérons enfin que cette stratégie est plus ou moins adaptée à la formation initiale ou à la formation continue, aux enseignants débutants ou aux enseignants expérimentés, aux enseignants du 1^{er} degré ou aux enseignants du 2nd degré, les variables qui peuvent intervenir étant par exemple le niveau des connaissances mathématiques, le niveau de stabilité des pratiques ou la durée du stage de formation.

C'est le questionnement de la troisième démarche identifiée par Robert (centrée sur le travail de l'enseignant, comme la quatrième) qui l'a amenée à mettre en cause dans un premier temps les représentations des enseignants dans la difficulté à transmettre les résultats de didactique (Robert & Robinet, 1992) , puis à comprendre dans un deuxième temps l'insuffisance de cette démarche : « l'écart entre le possible et le didactique ne peut pas être seulement imputé aux personnes, il doit aussi être mis en relation avec les conditions même d'exercice du métier d'enseignant ». C'est ainsi qu'a pris forme une double approche des

pratiques professionnelles (Robert & Rogalski, 2002), « qui prétend qu'analyser les pratiques seulement du point de vue des apprentissages des élèves (le but) ne permet ni d'interpréter les pratiques effectives ni de les former. Dans cette perspective, former c'est donner les moyens à chaque futur enseignant de fabriquer, à chaque fois, de l'idéal possible... L'idée de centrer la formation sur le travail est donc tentante. » C'est ce cheminement qui a conduit Robert à concevoir et à mettre en place¹²⁴ dès 2002 une formation de formateurs d'enseignants de mathématiques : « Notre but est de concevoir une formation qui est capable d'armer les participants à conduire des formations professionnelles d'enseignants de mathématiques du second degré, initiales ou continues, en relation directe avec le travail de l'enseignant en classe et pour la classe. » Nous avons d'ailleurs participé, comme « néo-formateur » à la première année de cette formation, qui nous a assurément influencé et guidé dans notre réflexion sur la formation des enseignants.

Dans notre entreprise, nous prolongeons donc d'une certaine façon celle de Robert en la rejoignant dans sa problématique. Notre démarche dans le cadre du dispositif PACEM n'est certes pas de former des formateurs ou de futurs formateurs, mais ne restreignant pas d'emblée notre objectif à la seule évolution des pratiques des enseignants à qui s'adresse la formation, nous nous inspirons de l'idée générale du dispositif qu'elle a mis en place.

B. Nos expériences personnelles de formation

Cette section intègre notre propre expérience de formateur qui a indéniablement contribué, dans une démarche pragmatique, à l'émergence d'un certain nombre de nos hypothèses dans l'élaboration de l'expérimentation PACEM. Les formations continues que nous avons conçues et animées sont diverses, que ce soit du point de vue du public, de leur durée ou de leurs objectifs. Elles se sont adressées essentiellement à des professeurs de mathématiques du second degré, enseignant le plus souvent en collège : professeurs stagiaires,

¹²⁴ Avec N. Pouyanne

néotitulaires¹²⁵, conseillers pédagogiques, et professeurs plus ou moins expérimentés participant à des stages de formation continue. Nous avons également été responsable, pendant une dizaine d'années, de liaisons école/collège, qui s'adressaient à la fois à des enseignants de mathématiques de sixième et à des enseignants du 1^{er} degré (le plus souvent en charge d'une classe de CM2). Nous décrivons plus particulièrement dans ce qui suit deux de ces formations : la première concerne une formation d'enseignants néotitulaires, la seconde décrit plus largement la maturation d'un processus qui a progressivement eu lieu au cours de notre expérience de formation continue. Nous retrouverons un certain nombre d'éléments cités dans ces deux exemples dans le dispositif de formation PACEM.

1. Une expérience de formation avec des néotitulaires

Nous avons conçu dès 2005 et mis en œuvre dans l'académie de Créteil, une action de formation à destination d'enseignants néotitulaires en mathématiques, qui s'appuyait sur un structure existante, et dont nous avons fait évoluer les contenus et les modalités¹²⁶. Cette formation avait pour nous un caractère spécifique puisqu'elle s'adressait à des enseignants dont on peut considérer que les pratiques sont en cours de stabilisation, dans des processus de construction sur lesquels nous avons en partie travaillé dans le cadre de notre master (2006). Dans un travail déjà réalisé autour du calcul mental inspiré de celui effectué dans d'autres formations, nous présentions dès la première demi-journée¹²⁷ des résultats obtenus par les élèves aux évaluations nationales à l'entrée en sixième dans le domaine des nombres et du calcul (Chesné, Pariès & Robert, 2009). Les enseignants étaient ensuite répartis en plusieurs groupes, afin de préparer un épisode d'une séance de calcul mental qu'ils « jouaient » ensuite, l'un des enseignants du groupe étant chargé de jouer le rôle de l'enseignant, les autres jouant le rôle d'élèves. Remarquons que cette modalité de formation se distingue d'une situation

¹²⁵ Les professeurs néotitulaires sont des professeurs débutants, titulaires pour la 1^{re} année.

¹²⁶ C'est au cours de cette formation que nous avons également opérationnalisé avec certains néotitulaires la notion « d'expérience cruciale avec filet » (Chesné, Coulange, Delzongle, Haspekian, 2005).

¹²⁷ La durée de la formation était 4 jours.

homologie décrite plus haut puisque c'est un enseignant lui-même, et non le formateur, qui joue son propre rôle, ou plutôt un rôle recomposé collectivement lors de la préparation. Chaque groupe produisait ainsi une ou plusieurs tâches en calcul mental, et en scénarisait une mise en œuvre, selon différentes modalités suggérées par le formateur (réponses des élèves orales, écrites, avec écriture des procédures ou non, etc.). Après toutes les simulations jouées par les groupes, la parole était donnée à ceux qui avaient joué le rôle d'enseignants afin de les faire réagir sur ce qu'ils avaient vécu : phase de confrontation de leurs représentations sur ce qui pouvait être fait, dit ou écrit, c'était le moment où les « enseignants » tentaient de justifier des techniques, où ils contestaient des explications entendues, où ils énonçaient des interdits (par ex : « on ne met jamais d'unité dans les calculs »). C'était aussi une sorte de confrontation en direct entre ce qui était attendu et ce qui s'était produit dans la mesure où les « faux élèves » étaient capables de rendre accessibles leurs activités. Il s'agissait alors pour le formateur de prendre appui sur les différentes opinions exprimées afin de dégager des différences du point de vue de la gestion, des contenus mis en jeu, des procédures des élèves, de leurs erreurs, de l'organisation générale pour l'enseignant (avant, pendant et après), puis de fournir quelques apports de différentes natures à la portée des enseignants, ou estimés comme tels par le formateur.

Des alternatives étaient alors proposées, puis un bilan était dressé : l'accent était mis d'abord sur la mise en activité des élèves et sur son économie en termes de gestion des débuts de séances pour l'enseignant, puis sur des avantages plus didactiques (liés aux apprentissages des élèves). La formation se terminait par une phase de retour en petits groupes destinée à permettre à chaque stagiaire de repartir effectivement avec une préparation de séance de calcul mental prête à être mise en œuvre dès le lendemain.

2. Des formations continues orientées vers l'amélioration des acquis des élèves

Les formations continues que nous avons conçues et mises en œuvre avec une collègue¹²⁸ dans le cadre du plan académique de formation de l'académie de Créteil étaient clairement orientées vers une évolution des pratiques dans la perspective de l'amélioration des acquis des élèves¹²⁹. Leur objectif principal était d'amener les enseignants à s'interroger sur leurs pratiques, de les outiller afin qu'à la fois ils aient envie et soient en mesure d'enrichir progressivement ces pratiques, voire de les modifier. Les conceptions et les mises en œuvre de ces formations provenaient au départ de nos expériences d'enseignants¹³⁰, distinctes dans leurs histoires respectives, mais présentant *a posteriori* un certain nombre de points communs, et de nos propres parcours (y compris nos auto-formations) en recherche en didactique des mathématiques. Ces formations étaient fondées essentiellement sur des hypothèses pragmatiques, puis furent étayées au fil du temps par des résultats de la recherche, en particulier des hypothèses et des résultats issus de la double approche que nous nous sommes progressivement appropriés.

Les contenus et les modalités de formation étaient conçus pour faire interagir plusieurs composantes : des apports disciplinaires à partir de supports variés (histoire des mathématiques par exemple), avec une mise en relief du savoir à enseigner, des lectures critiques des ressources officielles (programmes, documents ressources), des éclairages didactiques, des prises en compte du contexte de l'exercice du métier (éducation prioritaire par exemple). Un support était en général choisi pour débiter une formation, afin de permettre aux formateurs d'accéder en partie aux représentations ou/et aux pratiques des

¹²⁸ Il s'agit de Marie-Hélène Le Yaouanq, actuellement enseignante à l'UPEC, avec laquelle j'interviens depuis une dizaine d'années dans des actions de formation continue menées en coanimation.

¹²⁹ Ces formations se sont déroulées essentiellement entre 2005 et 2010, mais nous continuons depuis 2010 à intervenir dans quelques stages de formation continue.

¹³⁰ Nous avons pendant plusieurs années été tous les deux enseignants à temps partagé, une moitié de notre service étant effectué dans un établissement scolaire, l'autre à l'IUFM de Créteil.

enseignants. Il pouvait s'agir par exemple de résultats d'évaluations, nationales ou internationales, ou d'énoncés mathématiques plutôt simples, sur lesquels les enseignants pouvaient réagir, et étaient appelés le faire à partir de questions « banales » (comme par exemple « Comment corriger cet exercice ? »), ce qui permettait d'enclencher une discussion collective. C'est à partir de ces réactions que nous, formateurs, interprétions en termes de connaissances mathématiques, institutionnelles, de « façons de faire en classe », de contraintes locales, de représentations du métier – d'état psychologique quelquefois – et entreprenions alors ce qui, pour d'autres formateurs, serait assimilé véritablement à de la formation. Notons pour terminer, que la phase préliminaire aux apports proprement dits n'était pas utile qu'aux formateurs, mais aussi aux enseignants formés qui confrontaient leurs connaissances et leurs points de vue respectifs, entraînent ainsi dans un questionnement collectif et commençaient pour certains un travail de mise à distance par rapport à leurs pratiques.

Nous partons ainsi d'une longue histoire, à la fois personnelle et collective, qui intègre à des degrés divers tous les collègues enseignants, formateurs et chercheurs avec lesquels nous avons travaillé, dans lequel la théorie de la double approche fait écho à nos expériences en tant qu'enseignant, puis en tant que formateur, ce qui nous amène à concevoir comme chercheur qu'il peut y avoir des alternatives dans les pratiques des enseignants. Nous conjecturons en effet que les pratiques ordinaires des enseignants traduisent en actes le plus souvent les seuls compromis acceptables pour eux entre les diverses tensions qui traversent leur métier, mais qu'on peut faire bouger ces pratiques, grâce à des interventions soigneusement préparées et tout aussi soigneusement menées. Nous sommes par ailleurs confortés dans cette voie par de nombreux retours d'enseignants ayant participé à une de nos formations¹³¹. Par conséquent, si comme formateur il y a professionnellement pour nous quelque chose de rassurant dans cette dynamique, nous devons, dans notre activité de chercheur, aller au-delà, afin de définir explicitement sur quels éléments théoriques nous nous

¹³¹ Nous ne parlons pas seulement ici des retours assez proches de la formation, mais aussi de témoignages qui peuvent intervenir des années après la formation.

appuyons pour concevoir, puis pour évaluer, une formation particulière. C'est ce que nous nous proposons de faire dans les deux parties qui suivent.

C. Formation des enseignants : vers un dispositif expérimental

Nous reprenons donc d'abord le positionnement général sur les formations issu des travaux de Robert, Roditi et Grugeon (2007), que nous avons repris et reformulé à partir d'un article s'appuyant en partie sur notre propre expérience de formateur (Chesné, Pariès & Robert, 2009). Nous adoptons ensuite ce parti pris décliné en plusieurs principes et présentés dans l'article de Robert, Roditi et Grugeon. Nous précisons que nous empruntons à ces auteurs uniquement ce qui relève selon nous de la formation continue, même si, comme ils le soulignent, des hypothèses peuvent être communes à la formation initiale et à la formation continue. Nous reprenons en particulier aux auteurs le terme de scénario de formation pour désigner « le projet complet d'une formation, incluant le contenu, les modalités des diverses séances et un certain nombre d'objectifs détaillés, traduisant des hypothèses explicites ou non. ». Nous explicitons enfin en quoi ces principes nous semblent adaptés à notre projet, avant de faire de nouvelles hypothèses dans la partie suivante, liées aux choix que nous avons fait d'inclure dans le dispositif de formation intégré à notre projet, un appui sur des évaluations et liées à la structure du dispositif lui-même – à « double étage » –, pour aboutir au scénario de formation que nous avons conçu.

Notre positionnement général pour penser les formations continues (Chesné, Pariès & Robert, 2009) est inspiré des hypothèses sur les apprentissages des mathématiques transposées aux pratiques (voir la première partie de ce chapitre). D'une part, il s'agit de « partir » des pratiques – et donc y accéder – et de respecter leur complexité, pour les enrichir, en adaptant une formule de Vergnaud (1986) sur la conceptualisation dans l'action pour les enseignants (théorie de l'activité) : utiliser les problèmes (ici les pratiques en classe) comme source et critère des savoirs (ici savoirs professionnels). Ce seraient ainsi les pratiques des enseignants, y compris en classe de mathématiques, dans toute leur complexité, qui joueraient, au moins pour partie, comme source et critère des acquis professionnels, en amont des différents savoirs décomposés qui peuvent ensuite intervenir. La complexité constitutive des pratiques intervient pour ne pas isoler comme objets de formation par exemple les

activités des enseignants avant la classe, puis leurs activités en classe, ou encore pour ne pas séparer le travail sur les tâches proposées aux élèves de celui de gestion de la classe.

D'autre part, nous adoptons l'idée de faire travailler les participants sur des pratiques proches de celles qu'ils ont déjà, pratiques qui seraient en quelque sorte dans leur « Zone Proximale de Développement des Pratiques », pour reprendre un modèle utilisé pour les apprentissages des élèves (Robert & Vivier, 2013). Notre parti pris est qu'on peut faire évoluer des pratiques, à condition de s'appuyer en formation sur du « presque déjà-là », vers des pratiques ayant suffisamment de proximité avec celles des participants pour qu'ils y reconnaissent quelque chose de leurs propres expériences d'enseignement, après avoir, d'une façon ou d'une autre, créé des ouvertures qu'ils n'avaient pas imaginées, voire « ébranlé la stabilité » de certaines de leurs représentations (Robert & Robinet, 1992). Ces représentations¹³² sur les mathématiques, sur l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques, jusque dans leur dimension sociale, engendrent certaines pratiques, et sont à leur tour renforcées par elles. Rappelons que dans le cadre proposé par Robert et Rogalski, les représentations des enseignants, qui portent sur leurs pratiques, et font partie de ces pratiques, en constituent sans doute une composante importante de la stabilité.

Nous reconnaissons aussi, dans ce travail sur les pratiques, l'importance du langage (social) comme outil de communication et de prise de conscience (individuelle), ce qui suggère aussi que la formation individuelle peut suivre des échanges interindividuels. Laisser un espace aux diversités individuelles nous semble ainsi essentiel – le travail sur les alternatives, les palettes de possibles, les aspects globaux, peuvent y contribuer. L'utilisation d'un vocabulaire spécifique, de mots pour le dire élaborés en commun, peut faciliter à certains égards ce développement, les mots jouant le rôle de pré-concepts, repris à chaque occasion et devenant de plus en plus consistants. Ce processus est particulièrement développé dans la formation de formateurs mise en place par Robert que nous avons mentionnée plus haut, et

¹³²Robert et Robinet qualifie ces représentations de « métacognitives »..

favorisé par la durée de la formation. Dans une formation continue d'enseignants habituelle, sur un format horaire plus réduit (entre 12 h et 18 h), on ne peut aller aussi loin : il est donc important de trouver une bonne entrée, une bonne « amorce » qui provoque rapidement un questionnement collectif et individuel, et favorise le partage d'un vocabulaire spécifique, qui dans un premier temps permet de formuler ou de reformuler ce questionnement, puis d'apporter des éléments de réponse.

Ce parti pris, le plus important de notre point de vue, est précisé et complété par d'autres par Robert, Roditi et Grugeon, en précisant qu'ils peuvent être traduits de manière non indépendante (pp 74-76) :

- « Travailler ensemble ce qui relève du cognitif et ce qui relève du médiatif » : cette idée se matérialise par un travail en formation sur le couple (énoncé ; déroulement) qui détermine les activités possibles pour les élèves. Le choix d'un énoncé prédétermine *a priori* des tâches pour les élèves, et le déroulement influence leurs activités. Un tel travail permet d'aborder des questions du type : « qu'est-ce qui est difficile à travailler en classe, même si c'est important pour les apprentissages ? » Quelles sont les alternatives ? Qui est-ce qui est essentiel ? À quoi peut-on renoncer ?
- « Aborder les contraintes et les marges de manœuvre de l'enseignant en classe, y compris contradictoires » : les auteurs suggèrent que des aspects comme « arriver à une connaissance critique des programmes et des documents d'accompagnement, pouvoir critiquer des manuels, se poser des questions comme « qu'est-ce qui est possible de faire en classe dans tel établissement ? » leur semblent participer de la formation, et que « ce serait aussi un moyen de réhabiliter des recherches didactiques jugées trop loin des réalités lorsqu'on les livre en formation sans le travail de transposition préalable que nous pensons nécessaire ». Par ailleurs, la présentation explicite des tensions, par exemple comme celle qui existe entre socialisation et apprentissage apparaît peut-être comme un moyen de chercher à « concilier des facteurs plus ou moins contradictoires ».
- « Adapter aux individus en présence », c'est-à-dire « adapter différents types de pratiques pour respecter les cohérences individuelles ». Ce dernier point peut sembler contradictoire avec l'idée de déstabilisation énoncée plus haut, mais il ne nous semble pas incompatible de poser comme principe dans une formation de prendre en compte *a*

priori les cohérences individuelles et les respecter, tout en cherchant comment jouer sur ce qui peut être susceptible de bouger, même (surtout ?) si c'est « petit »...

Nous reprenons à notre compte chacun de ces principes, qui nous ont déjà conduit plus ou moins, comme nous l'avons évoqué plus haut, à concevoir des formations antérieures à notre recherche, et auxquels nous donnons une importance et une déclinaison en termes de contenus et de modalités de déroulement, variables selon le type de formation (initiale ou continue, enseignants débutants ou expérimentés, enseignants du 1^{er} ou du 2nd degré). Le travail conjoint en formation sur les énoncés et les déroulements nous a même amené, dans notre double volonté d'ouvrir la palette des couples possibles en tout en cherchant à nous adapter aux enseignants en formation, à travailler non pas seulement sur des couples, mais sur des familles de couples obtenues à partir d'une famille d'énoncés et d'une famille de déroulements possibles. Autrement dit, à partir d'un objectif formulé en termes de connaissances visées, quels énoncés sont possibles ? Quels peuvent être des déroulements associés ?

C'est dans ce type d'adaptation que nous poussons en quelque sorte l'idée d'un travail dans une « Zone Proximale de Développement des Pratiques » collective, qui permettrait au formateur d'atteindre les ZPDP des enseignants, et qui favoriserait selon nous une discussion, voire une analyse, entre et par les enseignants, puis leur appropriation individuelle en fonction de leur propre vécu de certains couples qu'ils auraient envie de mettre en œuvre. Ce que soulignent les auteurs, c'est que cette forme de travail permet d'une part de faire apparaître des tâches plus ou moins « robustes », c'est-à-dire des tâches pour lesquelles les activités attendues des élèves sont plus ou moins résistantes au traitement qui en est fait en classe, et d'autre part la notion de mise en fonctionnement des connaissances, variables à la fois selon la tâche et le déroulement.

Quant à la lecture critique des programmes et des documents officiels, des manuels et des ressources en général dont peuvent disposer les enseignants, nous l'intégrons à part entière dans notre conception d'une formation continue professionnelle pour des enseignants, et là encore, selon le moment où elle est abordée, elle peut participer soit à l'accès à leurs pratiques, soit à leur appropriation de contenus de formation. Enfin, compte tenu de nos

expériences antérieures de formation, nous choisissons d'évoquer clairement en formation différentes tensions qui apparaissent dans l'exercice du métier d'enseignant, en particulier celle qui existe entre socialisation et apprentissage, et dont nous considérons aussi que la formation doit apporter des éléments d'analyse, voire de réponses en termes d'alternatives.

Robert, Roditi et Grugeon formulent ensuite un deuxième groupe de principes portant sur l'importance des modalités de formation : nous ajoutons principalement à ce que nous avons déjà dit et repris, l'idée de travailler « petit » (Cauterman et *al.*, 1999), en particulier avec des enseignants non débutants. Il y a derrière cette idée celle d'une formation continue qui ne commence pas par une intervention directe sur le thème destiné à être travaillé (le calcul mental par exemple) mais par des éléments des pratiques en classe en relation avec le thème - ces éléments des pratiques étant pris comme objets d'étude initiaux, permettant de remonter au thème dans un deuxième temps. Par exemple, se demander pourquoi autant d'élèves « confondent » $\frac{1}{4}$ et 1,4, ce qui a pu provoquer cette conception erronée et comment les enseignants s'y prennent pour la gérer, est un « petit » qui permet selon nous au formateur d'aller vers du « plus gros », c'est-à-dire vers des pratiques plus globales des enseignants, puis vers des alternatives¹³³. C'est un abord que Robert appelle quelquefois « holistique » – on part de pratiques dans leur complexité – et « inductif » – on remonte au thème visé. C'est ce positionnement vis-à-vis de la formation, que nous appelons avec Robert une « formation à l'envers », que nous adoptons dans notre projet, et que nous explicitons maintenant, en précisant notre problématique et en définissant notre méthodologie générale.

¹³³ Un autre exemple est celui de la multiplication d'un décimal par 10, 100 ou 1 000.

IV. Problématique et méthodologie générale

A. Vers une double problématique : de formation et d'évaluation

La question générale que nous nous sommes posée au début de ce chapitre est l'amélioration des acquis d'élèves de sixième, dans le domaine des nombres et du calcul, par une formation continue d'enseignants, avec l'ambition de ne pas nous limiter aux seuls élèves des enseignants formés. Notre objectif est donc d'élaborer une telle formation, conçue à cette fin, à propos de laquelle nous avons déjà avancé un certain nombre d'idées, de la mettre en place au sein d'un dispositif expérimental, et d'être en capacité d'évaluer une amélioration éventuelle des résultats des élèves, qui, si elle existe, atteste de façon légitime du succès de l'expérimentation.

À ce stade, nous reprenons les idées développées plus haut afin de préciser notre problématique que nous sommes désormais en mesure de formuler sous la forme de quatre questions, consécutives et emboîtées. Les trois premières concernent le dispositif de formation à élaborer : à partir du moment où l'on suppose que les acquis des élèves dépendent en partie des enseignants via leurs pratiques, quels sont les éléments qui sont susceptibles d'influencer ces pratiques ? Comment favoriser l'appropriation de ces éléments par une formation courte ? Et comment étendre cette formation à d'autres enseignants qui ne participent pas à la formation ? La dernière est relative à l'évaluation de cette formation et porte sur la manière d'apprécier son impact sur les acquis des élèves, ce qui rappelons-le, est notre objectif initial.

1. Notre problématique sur la formation

Les questions que nous nous posons ici sont relatives à la formation des enseignants. Nous reviendrons dans le paragraphe suivant sur celles qui concernent l'évaluation de l'expérimentation. Nous avons d'abord identifié et précisé des éléments qui nous ont servi à construire cette formation : sur les acquis des élèves à leur entrée en sixième et leurs difficultés récurrentes dans le domaine visé; sur les pratiques des enseignants, leur influence sur les activités des élèves, les liens entre ces activités et les apprentissages, et enfin tout ce qui concerne la formation des enseignants. Fort de ce travail préalable, nous sommes

maintenant en position d'élaborer en la justifiant (au maximum) une formation des enseignants supposée appropriée à notre objectif. Compte tenu du cadre théorique dans lequel nous nous plaçons, nous disposons en effet d'un certain nombre de variables qui fondent notre démarche, du côté des enseignants et du côté de la formation, les deux étant évidemment indissociables dans le contexte de notre recherche.

Quels sont les éléments susceptibles d'influencer les pratiques des enseignants ?

Une réponse globale à cette question est contenue dans la double approche, la complexité des pratiques des enseignants qu'elle met en évidence, à travers cinq composantes qui interfèrent les unes avec les autres, à différents niveaux (global, local, micro). Dans notre démarche, notre questionnement est d'une certaine manière plus restreint, puisque nous avons choisi de travailler « toutes choses égales par ailleurs » du point de vue institutionnel : sans modifier les structures ni les conditions générales d'exercice du métier, qu'est-ce qui, dans les apprentissages des élèves, peut dépendre des enseignants ? La visée principale que nous retenons est liée à ce que nous avons largement exposé dans ce chapitre, et repose sur le fait que l'activité de l'enseignant en classe influe sur les activités des élèves, qui elles-mêmes sont déterminantes dans leurs apprentissages : qu'est-ce qui peut alors influencer sur les pratiques des enseignants, encore une fois « toutes choses égales par ailleurs » ? La piste que nous explorons repose sur une explicitation d'un certain relief sur les notions à enseigner¹³⁴, assortie de la déclinaison correspondante en termes d'activités d'élèves supposées adéquates et de pratiques correspondantes au niveau local, celui de la classe. Nous suggérons ainsi qu'une compréhension (globale) de connaissances et d'enjeux, associée à des réponses (locales) possibles à ces enjeux en termes de contenus et de mises en œuvre, permet d'agir dialectiquement sur les pratiques des enseignants. Autrement dit, tout ne se jouerait pas au niveau global, et des changements de pratiques (même petits) agiraient eux-mêmes sur les

¹³⁴ Nous avons dressé ce relief à l'issue du premier chapitre.

pratiques, vues dans un sens plus large, à condition d'avoir commencé à donner des moyens de créer puis de repérer, au moins en actes, ces dynamiques.

Nous partageons ainsi, comme beaucoup de chercheurs avant nous, le fait qu'un enrichissement didactique des enseignants est une condition nécessaire d'une évolution positive (c'est-à-dire ici favorisant les apprentissages des élèves) de leurs pratiques. Mais nous ajoutons une deuxième condition nécessaire à cette évolution, c'est que cet enrichissement, lié à la composante cognitive/médiative des enseignants, ne peut se transformer en pratiques de classe effectives qu'accompagné d'une sorte de décalage de leur posture, ou plus précisément d'une modification d'éléments qui relèvent de leur composante personnelle. Autrement dit, un apport de connaissances didactiques ne peut (en général) « faire bouger » les pratiques des enseignants que si on agit simultanément (ou avant ?) sur leurs représentations métacognitives.

Comment influencer sur les pratiques des enseignants par une formation ?

Dès lors, du côté de la formation, les questions qui se posent portent sur la conception et la conduite d'une formation qui inclurait un travail, au moins, sur les deux dimensions évoquées ci-dessus : comment mettre en œuvre une stratégie efficace de formation, c'est-à-dire qui permette une appropriation de connaissances et débouche sur un enrichissement des pratiques visé par le formateur ? Nous avons vu dans quelle mesure l'inscription dans la double approche, qui permet de comprendre comment différentes composantes, non isolées, déterminent les pratiques des enseignants. Nous avons aussi expliqué comment un travail dans la ZPDP des enseignants, permettant notamment de rapprocher les besoins des enseignants, supposés par les formateurs, de leurs besoins ressentis, contient *a priori* des éléments de réponse. Nous avons vu aussi que la question de « l'amorce » de la formation est cruciale, tout particulièrement dans le contexte d'une formation courte, et c'est pour déclencher cette amorce que nous décidons d'utiliser des évaluations standardisées. L'introduction de ce nouvel élément par rapport aux travaux antérieurs fait surgir de nouvelles questions : en quoi l'utilisation d'évaluations standardisées peut-elle provoquer l'amorce recherchée ? Comment favoriser l'appropriation de leurs résultats par les enseignants ? Nous nous interrogeons sur le potentiel de telles évaluations dans une formation d'enseignants, et cela nous amène à

envisager à élaborer un test *ad hoc*, conçu spécifiquement dans une perspective de formation, à partir de notre connaissance de résultats d'évaluations antérieures. Nous misons donc sur la portée d'un test de ce type – et sur les activités du formateur – à permettre de dépasser un travail incitatif sur les pratiques en ouvrant un accès à la composante personnelle des enseignants. L'utilisation des résultats à un test nous paraît propice à cette démarche, car à la fois en décalage par rapport à la classe, tout en lui étant très lié. Concrètement, le formateur, par inférences rendues possibles et facilitées par ses connaissances, pourrait décrypter les représentations des enseignants, à partir de leurs propres discours sur ce qui relève de leurs composantes cognitive et médiative, discours provoqués par les résultats des élèves au test.

Comment étendre les effets d'une formation ?

La mise en place d'un tel test constituerait en outre le début d'une réponse aux questions que pose l'introduction de la deuxième visée de notre projet : rappelons que nous avons pour objectif l'amélioration des acquis qui dépasse les seuls élèves des enseignants bénéficiant d'une formation « directe », c'est-à-dire participant à une formation en présentiel, avec intervention d'un formateur externe. En quoi un travail collectif peut-il être enclenché à partir d'un test standardisé, en étant étayé lors d'une formation directe ? Cette question est la première d'une série qui porte sur l'élaboration d'un dispositif de formation à structure étagée, contenant des éléments potentiellement transférables, au moins partiellement des enseignants formés directement à leurs collègues, formés alors « indirectement ». Pour y répondre, nous dessinons, à partir des matériaux procurés par le test (items, résultats, analyses, propositions) le projet d'un double couplage : au premier niveau, en formation, celui d'un étayage didactique des enseignants, qui leur procure une « référence positive », avec un certain nombre de ressources en termes de tâches et déroulements, compatibles avec leurs représentations, elles-mêmes interrogées par l'explicitation d'un nouveau relief ; et au second niveau, dans les collèges, en partie conditionné et légitimé par ce premier couplage, celui du partage d'objectifs, de réflexions et de pratiques.

C'est l'ensemble de ces questions que nous avons à l'esprit quand nous nous engageons dans l'expérimentation. Ajoutons pour terminer, avant de présenter la méthodologie générale adoptée pour la formation, que le calcul mental a été considéré

d'emblée, comme tenu du domaine retenu dans l'expérimentation, comme un élément de réponse « transversal » à notre problématique, comme nous l'exposerons plus en détail dans le chapitre 3.

2. Notre problématique sur l'évaluation de l'expérimentation

Au-delà de la problématique de la conception de la formation, la question supplémentaire que nous nous posons dans notre recherche, centrale pour une expérimentation comme celle nous engageons, est celle de l'évaluation de son impact auprès des élèves : comment intégrer dans le dispositif global de l'expérimentation un dispositif d'évaluation qui permette d'apprécier les effets éventuels de la formation sur les acquis des élèves, et qui garantisse que ces effets soient bien dus au projet mis en place ? Compte tenu de l'ensemble de notre questionnement général et des objets d'études que nous avons définis, deux niveaux de réponse sont à envisager : il s'agit d'abord de nous donner les moyens de comparer les résultats des élèves d'enseignants participant directement à la formation avec ceux d'élèves d'enseignants qui n'y participent pas. Le deuxième point, relatif à la diffusion des effets de la formation directe que nous visons, consiste à distinguer les élèves d'enseignants qui peuvent bénéficier de la formation indirecte des élèves d'autres enseignants, non touchés, ni directement ni indirectement par la formation. Il s'agit donc de pouvoir comparer les résultats des élèves des collègues qui enseignent dans les mêmes établissements que les professeurs formés directement avec les résultats d'élèves d'enseignants d'un groupe témoin, exerçant dans d'autres établissements.

Ce double questionnement revient *in fine* à déterminer d'abord comment constituer des populations d'enseignants et d'élèves, adaptées à notre démarche, et pertinentes pour la validité de l'évaluation, puis à élaborer des instruments d'évaluation qui permettent de mesurer l'évolution des acquis des élèves, également adaptés et pertinents, relativement au niveau scolaire et au domaine mathématique visés, et enfin à définir une démarche statistique, appropriée à ce que nous voulons mesurer.

B. Méthodologie générale

La méthodologie globale que nous avons adoptée doit donc à la fois nous permettre de dégager des éléments structurants du dispositif de formation, d'en analyser la mise en œuvre dans le cadre de notre expérimentation, et de mesurer son impact sur les résultats des élèves.

1. Méthodologie générale de la formation

Nous avons déjà évoqué dans les pages précédentes un certain nombre de grands axes de formation, parmi lesquels nous en retenons deux qui structurent et caractérisent le dispositif expérimental mis en place : d'une part, un groupe d'enseignants participant à une action de formation et relayant les éléments reçus auprès de leurs collègues dans leurs établissements ; d'autre part, l'utilisation d'un test standardisé, à la fois amorce pour un travail aux niveaux global et local avec les enseignants présents, et outil de diffusion (pour eux) auprès de leurs collègues. Nous reviendrons en détail sur les modalités de la formation et les contenus, notamment la place du calcul mental, dans le chapitre 4.

2. Méthodologie générale d'analyse de la formation

D'emblée, compte tenu des différents rôles que nous avons dans l'expérimentation, nous savons que l'exercice est délicat. Pour différentes raisons, nous renonçons à une étude qualitative précise, fondée sur l'observation et l'analyse des pratiques des enseignants, ou sur celles des interactions potentielles entre enseignants d'un même établissement¹³⁵. Nous prévoyons cependant de recueillir quelques éléments de la part des enseignants comme le recueil de leurs progressions ou d'exemples de tâches proposées aux élèves, ainsi que des descriptions de séances *a posteriori* (difficultés éprouvées, alternatives envisagées,...), et de proposer en fin d'année scolaire aux enseignants un questionnaire de ressenti. Nous nous

¹³⁵ Nous nous sommes dotés cependant de quelques enregistrements vidéo que nous n'avons pas exploités dans notre recherche.

donnons donc comme méthodologie générale d'analyse la confrontation, à partir de notre travail préparatoire, entre le scénario initial de formation, et la reconstitution *a posteriori* de la formation, effectuée à partir des documents de formation et des éléments de déroulement que nous avons gardés, ainsi que des réactions et des productions des enseignants. Du point de vue de la diffusion de la formation, nous prévoyons de recueillir le maximum de renseignements sur l'organisation et le déroulement du travail collectif dans les collèges, via des comptes rendus, et un questionnaire de ressenti proposé à tous les enseignants en fin d'année scolaire. C'est dans le chapitre 5 que nous décrivons comment s'est déroulée effectivement la formation, et que nous nous livrons à cette forme « d'auto-analyse ».

3. Méthodologie générale de l'évaluation d'impact sur les résultats des élèves

La méthodologie que nous adoptons repose essentiellement sur la comparaison des résultats des élèves des enseignants formés, directement et indirectement, à un pré-test¹³⁶ et à un post-test, avec ceux d'élèves d'enseignants d'un groupe témoin¹³⁷. Nous exposons dans le chapitre 4 comment nous avons procédé pour constituer des échantillons comparables d'enseignants et d'élèves, comment nous avons conçu les tests pour les élèves et comment nous avons construit un protocole rigoureux de passation et de correction de ces tests. Nous y développons également la méthodologie statistique qui nous a permis de mesurer les évolutions différentielles des résultats des élèves. Quant aux résultats proprement dits, nous les présentons dans le chapitre 6.

¹³⁶ Nous verrons aussi comment nous avons utilisé ce pré-test dans la formation des enseignants.

¹³⁷ Et même de deux groupes témoins, que nous avons créés la seconde année de l'expérimentation.

Chapitre 3. A propos du calcul mental

« Le calcul mental est une compétence utile, justement parce qu'il permet d'avancer avec moins de freins dans le traitement des situations impliquant des nombres et dans la résolution de problèmes. » (Vergnaud *in* Butlen, 2007)

Sommaire du Chapitre 3

I. Introduction : nos références, vers une définition générale du calcul mental	192
A. Une prise en compte institutionnelle de référence.....	194
B. Vers une définition plus précise de ce que recouvre le calcul mental	197
II. Le calcul mental dans les apprentissages des élèves comme thème de recherche.....	199
A. Le calcul mental et les connaissances des élèves sur les nombres	204
B. Les procédures opératoires utilisées par les élèves et le calcul mental.....	213
C. Le calcul mental et les enseignants	220
III. Le calcul mental dans les programmes scolaires français	227
A. Le calcul mental dans les programmes scolaires 2008 de l'école primaire	229
B. Le calcul mental dans les programmes scolaires 2008 du collège.....	233
IV. La mise en œuvre de séances de calcul mental : nos partis pris pour la classe et dans la formation PACEM	240
A. Le calcul mental comme pratique régulière porteuse d'apprentissage	241
B. Le calcul mental comme précurseur de certains apprentissages	244
C. Le calcul mental comme facteur d'installation d'un climat de classe favorable aux apprentissages.....	246
V. Exemples.....	251
A. La compréhension des nombres par le calcul mental	252
B. La résolution de problèmes par le calcul mental.....	258
C. L'apprentissage de connaissances nouvelles par le calcul mental	261
D. Conclusion	263

La formation des enseignants dans le dispositif PACEM s'est progressivement articulée autour de la place du calcul mental dans l'enseignement au collège, en termes de choix de contenus, de déroulements, et de programmation. Quel calcul mental, pourquoi y consacrer du temps, dans quels buts, comment l'organiser en classe, quand ? Nous rassemblons dans cette partie les fondements de notre réflexion et de notre travail avec les enseignants lors de cette formation sur le calcul mental. Après une introduction dans laquelle nous proposons une définition du calcul mental, nous présentons dans la deuxième partie de ce chapitre une revue de littérature nationale et internationale¹³⁸ sur les apprentissages des élèves liées au calcul mental, et des résultats d'études se plaçant plutôt du côté des pratiques des enseignants. Nous revenons dans une troisième partie sur les instructions officielles à l'école et au collège en vigueur en France au moment de l'expérimentation, puis nous décrivons dans une quatrième partie nos hypothèses, largement issues de la recherche, que nous nous sommes appropriées, que nous choisissons de chercher à implémenter en formation dans le cadre du dispositif PACEM, et en espérant les voir se répercuter dans les pratiques enseignantes. Nous terminons dans une cinquième et dernière partie par quelques exemples qui nous semblent caractéristiques des aspects sur lesquels nous avons attiré l'attention des enseignants pendant la formation et des démarches alternatives possibles que nous leur avons suggérées.

¹³⁸ Nous avons largement pour cela utilisé un moteur de recherche sur Internet.

I. Introduction : nos références, vers une définition générale du calcul mental

Nous entendons par calcul mental l'ensemble des activités qui consistent à effectuer des opérations avec des nombres, essentiellement sans aide matérielle externe. Nous étendons cette définition du calcul mental à un travail explicite sur les désignations des nombres (écrites, orales, symboliques chiffrées ou non) et un travail participant, tout ou partie, à la résolution de problèmes mettant en jeu des données numériques, dans un cadre intra ou extra mathématique¹³⁹ (de l'amorce de la démarche à la résolution complète). En conséquence, nous entendons par calcul mental bien davantage que la seule activité, fréquente dans les classes de l'école primaire il y a une cinquantaine d'années, qui consistait à exécuter le plus rapidement possible des procédures opératoires sur les nombres, et dont l'objectif principal était l'automatisation de ces procédures.

Nous nous rapprochons ainsi du concept anglo-saxon de « *number sense* » qui n'est pas associé exclusivement au calcul mental. Ce concept fait globalement référence à « la compréhension générale des nombres et des opérations, ainsi que la capacité d'utiliser cette compréhension de façon adaptée dans la gestion de situations numériques, pour porter des jugements mathématiques et élaborer des stratégies utiles et efficaces » (Reys, Reys, McIntosh, Emanuelsson, Johnsson & Yang, 1999). En particulier, nous reprenons fortement à notre compte ce que les auteurs appellent inclination en anglais, et que nous comprenons comme la tendance et l'envie de recourir au calcul mental, associées à la disponibilité de connaissances sur les nombres et les opérations. Ce dernier aspect renvoie à l'idée que quelqu'un qui se sent « à l'aise » avec les nombres saura d'autant mieux les utiliser et les interpréter (Turkel & Newman, 1988).

¹³⁹ Nous étendons également cette définition au calcul mental algébrique que nous ne traitons pas dans notre recherche.

Tout en remarquant qu'il y a autant de définitions du « *number sense* » que de chercheurs, Gersten & Chard (1999) le présentent comme « *a child's fluidity and flexibility with numbers, the sense of what numbers mean and an ability to perform mental mathematics and to look at the world and make comparisons.* » Dans son travail de recherche sur les élèves qui ont des difficultés en mathématiques (*Children with mathematical disabilities*), Berch (2005) a rassemblé les différentes composantes du concept de « *number sense* » dans la littérature internationale : il y relève les notions de connaissances, d'habiletés, et de compétences, de structures conceptuelles et de procédures, de représentation mentale de la droite numérique, mais aussi d'intuition, de sensation et de désir.

La conceptualisation correspondante se développerait par une exploration progressive des nombres, dans des contextes variés, sans les contraintes imposées par les algorithmes standards de calcul (Howden, 1989).

« Number sense can be described as a good intuition about numbers and their relationships. It develops gradually as a result of exploring numbers, visualizing them in a variety of contexts, and relating them in ways not limited by traditional algorithms. »

Nous voyons dans cette assertion une grande proximité avec ce que nous mettons dans un environnement propice à la pratique du calcul mental, selon deux dimensions sous-jacentes que nous retrouverons tout au long de notre recherche. La première de ces dimensions porte sur les contenus numériques et les différentes manières de les mettre en œuvre avec des élèves, la seconde est liée à la nature des objectifs visés en calcul mental : fin en soi pour que les élèves acquièrent des connaissances et des capacités spécifiques parmi d'autres connaissances et d'autres capacités, ou moyen pour faciliter chez eux des apprentissages, voire leur permettre de les amorcer ? Autrement dit, nous nous intéressons au calcul mental comme apprentissage, mais aussi et surtout, comme modalité d'apprentissage le dépassant.

C'est auprès de Case (1998) que nous trouvons une tentative proche de la nôtre puisque, affirmant à la fois la complexité du concept de « *number sense* » et la difficulté à en donner une définition, Case donne plutôt des repères pour l'identifier et le caractériser en actes chez les élèves :

« Students with good number sense can move seamlessly between the real world of quantities and the mathematical world of numbers and numerical expressions. They can invent their own procedures for conducting numerical operations. They can represent the same number in multiple ways depending on the context and purpose of this representation. They can recognize benchmark numbers and number patterns: especially ones that derive from the deep structure of the number system. They have a good sense of numerical magnitude and can recognize gross numerical errors that is, errors that are off by an order of magnitude. Finally, they can think or talk in a sensible way about the general properties of a numerical problem or expression-- without doing any precise computation. »

Ces différentes manifestations de l'acquisition d'un « *number sense* » par les élèves qu'énonce Case sont voisines de celles qui selon nous peuvent se manifester grâce à une bonne maîtrise de leur part du calcul mental : passage du cadre des grandeurs au cadre numérique, choix d'une procédure ou d'un registre adapté au contexte, identification de repères ou de régularités, estimation d'un ordre de grandeur afin d'éviter de donner des réponses absurdes. Mais cette citation de Case va plus loin, et sous-tend en quelque sorte la partie de notre recherche sur le calcul mental : un travail spécifique en calcul mental favorise-t-il le développement chez les élèves des habiletés citées par Case ? Toutes ? En quoi ? Et quelle forme ce travail peut-il prendre en classe ?

Avant de chercher à répondre à ces questions, complétons notre questionnement par un dernier élément que nous procure un éclairage institutionnel national.

A. Une prise en compte institutionnelle de référence

En France en 1999, le ministère de l'éducation nationale donne mission à un groupe d'enseignants et de chercheurs de conduire, en amont du Conseil national des programmes et du groupe d'experts chargés d'élaborer les programmes de mathématiques de l'enseignement secondaire, une réflexion globale et à long terme sur l'enseignement des mathématiques de l'école élémentaire à l'université. Présidée par Jean-Pierre Kahane, la Commission de Réflexion sur l'Enseignement des Mathématiques (CREM), que nous avons déjà évoquée à plusieurs reprises dans le chapitre 1, n'est donc pas à proprement parler un organe de recherche, mais plutôt une interface entre l'institution scolaire et la recherche. Elle a

notamment compté parmi ses membres plusieurs chercheurs en didactique des mathématiques¹⁴⁰ (Artigue, Brousseau, Houdement, Perrin). La partie de son rapport consacrée au calcul (2001) pose explicitement la question de l'enseignement du calcul aujourd'hui, qui pourrait constituer un des fondements de notre recherche si on la restreignait à la scolarité obligatoire. La CREM expose clairement la dialectique entre calcul et raisonnement, et en particulier entre calcul mental et raisonnement. Elle reprend à son compte la notion « d'intelligence du calcul » qui interfère largement avec le concept anglo-saxon de « *number sense* », même si le calcul auquel la commission fait référence dans son rapport ne porte pas seulement sur les nombres¹⁴¹ :

« Renforcer tout au long de la scolarité les rapports entre raisonnement et calcul »

« Les premiers contacts avec le monde du calcul, à l'école élémentaire, ont un rôle clef à jouer dans ce renforcement, à travers des activités de calcul mental, à travers le développement de moyens de contrôle efficaces du calcul papier/crayon et instrumenté, à travers la rencontre de situations suffisamment complexes pour nécessiter le développement de stratégies de calcul.

Il importe aussi d'associer davantage des situations numériques puis algébriques à l'entrée de l'élève dans la rationalité mathématique, au-delà des situations géométriques que l'enseignement tend à privilégier et, au sein de ces dernières mêmes, de ne pas oublier que le calcul est souvent une méthode de résolution particulièrement économique. Renforcer les rapports entre raisonnement et calcul suppose aussi que l'on ne minimise pas la spécificité des raisonnements propres à chaque type de calcul. »

140 Pour un historique de la commission :

http://educmath.enslyon.fr/Educmath/ressources/etudes/crem/index_html

141 Les passages soulignés le sont dans le rapport de la CREM.

La commission met en avant « le rôle privilégié du calcul mental pour mettre en place les rapports entre calcul et raisonnement dès les débuts de la scolarité » :

« Le calcul, dès les débuts de la scolarité élémentaire, peut et doit être pensé dans ses rapports au raisonnement et à la preuve. Le calcul mental a, nous semble-t-il, un rôle essentiel à jouer à ce niveau. Il est une façon privilégiée de lier calcul et raisonnement, en mettant en jeu les propriétés des nombres et des opérations, comme le montrent par exemple les travaux de Butlen et Pézard. Il n'est bien sûr pas question ici de viser l'apprentissage systématique de techniques *ad hoc* de calcul mental, comme on peut en trouver dans certains anciens manuels d'arithmétique. Il s'agit d'utiliser les caractéristiques du calcul mental :

- pour susciter une réflexion sur le calcul, les techniques opératoires usuelles étant trop coûteuses en mémoire pour se prêter à une exécution mentale,
- pour mettre en évidence la diversité des façons possibles d'aborder généralement un calcul, comparer leurs coûts, les connaissances qui les fondent,
- pour susciter des formulations, des généralisations et des preuves. »

Le rapport insiste donc, et à plusieurs reprises, sur cette notion « d'intelligence du calcul ».

« La reconnaissance de formes, la recherche d'analogies, mais aussi le jeu sur les variations possibles, le sens des ordres de grandeur, le sens des expressions manipulées, sur lesquels nous reviendrons ultérieurement jouent un rôle clef dans ce pilotage raisonné que l'on désignera globalement comme « intelligence du calcul ». Développer cette intelligence du calcul qui seule permet de faire face aux situations non routinières, se doit d'être une ambition majeure de l'enseignement du calcul, quels que soient les objets sur lesquels il porte. Elle suppose bien sûr que l'enseignement n'enferme pas l'apprentissage du calcul dans celui d'un certain nombre de routines, qu'il sache mettre en évidence son caractère problématique dans des situations non balisées et armer les élèves pour l'approcher. »

Nous adoptons cette position générale. L'ensemble de ces premières réflexions montre bien que le calcul mental doit être considéré dans une acception beaucoup plus large qu'une vision strictement algorithmique et souvent passéiste de résultats à mémoriser et d'opérations à exécuter mentalement. Cette vision du calcul mental, si elle inclut bien un certain nombre de

connaissances et de capacités à atteindre pour elles-mêmes, va donc bien au-delà puisque non seulement elle intègre la disponibilité de ces connaissances et ces capacités nécessaire à la résolution de problèmes, mais aussi parce qu'elle participerait à la conceptualisation des savoirs numériques à acquérir au cours de la scolarité obligatoire. Nous entendrons donc désormais par calcul mental plus qu'une sous-partie du calcul, mais bien un élément constitutif de ce que nous aurions envie d'appeler la « compétence numérique » comme Grugeon (1995) définit la compétence algébrique, si cette expression n'était désormais liée à l'usage des technologies de l'information et de la communication (TIC). La question est donc de savoir comment le calcul mental participe à la construction de cette « compétence numérique », à la fois en tant qu'élément parmi d'autres du processus de sa construction et comme composante de cette compétence.

B. Vers une définition plus précise de ce que recouvre le calcul mental

Un calcul mental peut être effectué à partir d'un support ou non (le calcul à faire peut être lu ou entendu), et produit sur un support écrit ou non (le résultat peut être écrit ou dit). L'aptitude d'un individu en calcul mental dépend de ses connaissances sur les nombres, et se manifeste en particulier par sa facilité à passer de la désignation d'un nombre à une autre en fonction du contexte. Elle dépend aussi de sa maîtrise de procédures opératoires. Elle comprend non seulement la capacité à appliquer ces procédures, à passer du cadre des grandeurs au cadre numérique, mais aussi le fait de savoir quand et comment les utiliser à bon escient, de savoir les adapter en fonction des nombres en jeu. Elle se caractérise par son efficacité¹⁴², c'est-à-dire par le fait de produire un résultat correct avec des procédures adaptées dans une durée restreinte. Elle repose sur la mémorisation de faits numériques (*number facts*), et sur la disponibilité de procédures automatisées. Les opérations sur les faits numériques de base comprennent l'addition, la soustraction, la multiplication et la division des nombres de 0 à 9, c'est-à-dire sur l'exécution de calculs avec des nombres entiers convoquant de manière automatisée ce qu'on appelle les tables d'addition ou de

¹⁴² Un algorithme de calcul posé serait quant à lui qualifié plutôt d'efficace par son caractère généralisable.

multiplication. Ces faits numériques peuvent s'étendre à d'autres nombres – entiers naturels supérieurs ou égaux à 10, décimaux, écrits ou non en écriture décimale, rationnels ou réels –, et participent à l'aisance dont un individu fait preuve en calcul mental (*procedural fluency*). Cette maîtrise se manifeste également lors de calculs à la main, en ligne ou posés, numériques ou algébriques, qui nécessitent la mobilisation de faits numériques. Elle se reconnaît enfin à l'habileté dont fait preuve un individu pour déterminer un ordre de grandeur, dans un objectif d'anticipation ou de contrôle d'un résultat, lors de nombreuses occasions de la vie quotidienne, même s'il n'est plus aussi utile aujourd'hui que par le passé pour un individu de savoir effectuer des calculs à la main, ou dans une phase d'appréciation d'une quantité.

II. Le calcul mental dans les apprentissages des élèves comme thème de recherche

En France, les recherches effectuées spécifiquement sur le calcul mental sont peu nombreuses (Boule, 1997 ; Butlen & Pézard, 1990, 1992, 2000, 2007 ; Douady, 1994 ; Fayol 1990 ; Fischer 1987) ; elles sont le plus souvent consacrées au début de l'école élémentaire, et portent donc presque exclusivement sur la construction des nombres naturels et des opérations sur ces nombres¹⁴³.

Butlen et Pézard sont les chercheurs français qui se sont le plus intéressés au calcul mental depuis plus de 20 ans. Leurs premiers travaux concernent « les apprentissages numériques des élèves de l'école élémentaire, et plus particulièrement, les rapports qu'entretiennent sens et technique. Il s'agit notamment d'analyser les relations existant entre le développement de la maîtrise de techniques opératoires et le développement de la connaissance des nombres et des opérations en lien avec la résolution de problèmes. Ces relations sont de nature dialectique : connaissances numériques et maîtrise des techniques de calcul se développent en étroite relation. »

Dans une première phase de leurs travaux, ils mettent en évidence la hiérarchie des procédures mentales utilisées par les élèves de différents niveaux scolaires. Ils montrent comment la pratique du calcul mental parmi d'autres permet de faire évoluer ces procédures et amène à un enrichissement des conceptions numériques des élèves. Ils s'intéressent également à différents modes d'institutionnalisation et à leur impact.

Dans une seconde phase, Butlen et Pézard essaient de déterminer dans quelle mesure des procédures de calcul mental peuvent intervenir dans la résolution mentale d'un problème

¹⁴³ Douady a également expérimenté une ingénierie sur le calcul algébrique à l'articulation collège/lycée qui dépasse le cadre de notre étude.

additif. Ils s'intéressent au rôle des variables numériques et montrent que la résolution écrite d'un problème multiplicatif avec de « petits nombres » ne suffit pas pour comprendre sa structure et peut même être un handicap. Par contre, le passage par de « petits nombres » peut permettre à l'élève de reconnaître un type de problème et de l'identifier. Leurs travaux ont également permis de mettre en évidence « un paradoxe lié à la fois à l'automatisation des procédures de calcul (mental) et aux capacités de l'élève à adapter ses stratégies de calcul (mental) en fonction des propriétés spécifiques des nombres et des opérations en jeu dans les calculs. Faute de suffisamment de connaissances numériques disponibles (relatives notamment aux décompositions additives et multiplicatives des nombres entiers) mais aussi de modules élémentaires de calcul mental automatisés, l'élève reste souvent prisonnier de procédures de calcul proches des techniques écrites (ressenties comme sûres car automatisées) mais peu adaptées aux nombres en jeu. Ce défaut d'adaptabilité compromet ses performances mais surtout limite son exploration des nombres et de leurs propriétés, réduit ses expériences numériques et de ce fait, limite voire compromet le développement de ses connaissances en ce domaine. » Ces travaux les amènent à formuler des conclusions nuancées sur l'enseignement du calcul mental que nous retrouverons dans des travaux de chercheurs étrangers, et que nous développons plus loin.

En contrepoint des dimensions évoquées ci-dessus, l'étude menée par Douady (1994) dans une classe de CM2 d'élèves issus de familles socio-économiquement défavorisées permet de mettre en avant un aspect différent du calcul mental, conçu par l'enseignant de la classe comme un point de départ possible pour faire des mathématiques. L'étude souligne un nécessaire changement de contrat, pédagogique et didactique, auprès d'élèves peu habitués à écouter leur enseignant ou à s'écouter entre eux. Sous réserve d'une dévolution du calcul mental acquise au bout de deux mois, Douady ne dit rien de son impact sur les connaissances numériques des élèves, mais observe une évolution de leurs relations sociales au sein de la classe et leurs relations au savoir. Nous reviendrons sur ces deux points dans la partie IV. C.

A l'étranger, le calcul mental fait l'objet d'une très grande attention auprès des chercheurs anglo-saxons, et les travaux de recherche relatifs au calcul mental (*mental calculation* ou *mental computation*) sont très nombreux aux Etats-Unis, au Canada, en Angleterre, en Australie, à Taïwan et Singapour ainsi qu'aux Pays-Bas. Dans la littérature internationale sur le calcul mental, les premiers travaux que nous connaissons sont ceux de

Biggs (1967) qui montre alors qu'une pratique régulière du calcul mental à l'école primaire a surtout comme effet d'augmenter l'anxiété des élèves sans améliorer sensiblement leurs compétences. Briggs attribue cet effet – et cette absence d'effet – à la nature des tâches proposées et à leur seule visée de « *mental arithmetic* ». Depuis lors, de nombreux chercheurs comme Beishuizen (1993, 1997), Reys (1991, 1994) ou Sowder (1990, 1991, 1992) ont investi le champ du calcul mental, notamment sur les aspects qui touchent au *number sense*, qui comprend entre autres la connaissance des faits numériques et l'estimation d'un ordre de grandeur. En Angleterre par exemple, le programme « *National Numeracy Strategy* », plan national d'enseignement des mathématiques développé depuis 1999 à l'école primaire¹⁴⁴ est fondé sur un cadre théorique (*evidence-based framework*) défini par un groupe de travail présidé par D. Reynolds, qui repose à la fois sur des travaux menés par des chercheurs et sur des résultats d'évaluations nationales et internationales (notamment TIMSS), la mise en œuvre de ce programme ayant elle-même ensuite suscité un certain nombre d'études (par exemple, Brown, Askew, Millett & Rhodes, 2003). Les travaux internationaux dont nous avons pris connaissance portent, comme les travaux français, essentiellement sur les premières années de scolarité, et donc sur les nombres naturels et les procédures qui les concernent (Heirdsfield, Cooper, Mulligan & Irons, 1999 ; Threlfall, 2002).

La très grande majorité des recherches s'accorde à présenter les bienfaits du calcul mental, mais il n'y a cependant pas consensus sur un enseignement systématique du calcul mental (Bibby, Askew & Hodgen, 2003). Ceci mérite d'autant plus d'être interrogé que bon nombre de recherches menées sur les pratiques d'enseignement relatives au calcul mental font apparaître le risque de voir ces pratiques réduites à des exercices techniques routiniers (Maclellan, 2001). En dépit d'un corpus important de travaux en faveur de la pratique du calcul mental, des réserves sont ainsi émises par des chercheurs, à la suite de Threlfall (2002) qui estime que les procédures utilisables en calcul mental sont trop nombreuses pour être enseignées, et que, pour un élève, une bonne connaissance des nombres est préférable à

¹⁴⁴ Nous n'avons eu accès qu'aux travaux écrits en français ou en anglais.

l'enseignement de procédures parmi lesquelles il aurait ensuite à choisir pour exécuter un calcul. Nous retrouvons ici les réserves de Butlen et Pézard.

Nous tenterons de montrer plus loin en quoi ces aspects peuvent ne pas être contradictoires selon nous, en dégagant le fait qu'ils s'inscrivent dans une dialectique et une temporalité qui fondent une partie de nos hypothèses sur le calcul mental. Enfin, il est important de préciser que la plupart de ces recherches sont qualitatives, et qu'elles n'ont pas toutes fait l'objet d'évaluations rigoureuses en termes d'apprentissages ciblés, ni en termes d'apprentissages mathématiques plus globaux.

Concernant les années de fin d'école primaire, les recherches sur le calcul mental sont beaucoup moins nombreuses que pour les premières années de la scolarité, et celles du collège (*lower secondary school* ou *middle school*) le sont encore moins, en dépit du fait que ces années post-primaires sont considérées comme une période critique de la construction de la compétence en numératie (Watson & Callingham, 2001). En France, nous citerons à nouveau Butlen et Pézard (2000) qui se sont intéressés à l'articulation entre calcul mental et résolution de problèmes numériques, au cycle 3 (*grades* 4 et 5) et en classes de sixième¹⁴⁵ et de cinquième (*grades* 6 et 7). À l'étranger, nous retiendrons principalement les travaux de McIntosh (2002), ceux de Rezat¹⁴⁶ (2011) portant sur l'addition et la soustraction des nombres décimaux et relatifs ainsi que ceux de Caney¹⁴⁷ (2002) et de Norton (2012). McIntosh (préconise qu'il est essentiel de trouver des moyens efficaces de développer des approches du nombre dans la plupart des classes de collège. Nous ignorons quelle est la part actuellement réservée au calcul mental dans les programmes scolaires étrangers de collège, mais nous suggérons que l'importance des tests standardisés dans certains pays influence les instructions officielles, les pratiques des enseignants et donc peut-être les recherches dans ce domaine. Par

¹⁴⁵ Le *grade* 6 est très souvent la dernière année de l'école primaire dans les systèmes éducatifs étrangers.

¹⁴⁶ Rezat a étudié les stratégies de 8 élèves allemands de 4^e (*grade* 8) pour effectuer 24 calculs mentaux.

¹⁴⁷ Caney s'est intéressée aux pratiques de 8 enseignants en calcul mental en Australie (*grades* 5-8) et a cherché à déterminer quelles pratiques sont perçues par les enseignants comme les plus efficaces.

ailleurs, comme le rappelle Thompson (2000), l'extension des résultats issus de recherches consacrées aux premières années de la scolarité mérite que ceux-ci soient interrogés avant d'être directement transposés. Cet auteur remet très clairement en question les fondements théoriques du cadre utilisé par la NNS lorsqu'ils sont appliqués à l'équivalent du cycle 3 de l'école primaire en France. Un certain nombre d'aspects, comme la répartition du travail entre ce qui relève du procédural et du structural, l'articulation avec la droite numérique, le passage des entiers aux décimaux, le lien avec la résolution de problèmes, sont donc sérieusement à questionner, notamment pour les élèves en difficulté (Threlfall, 2002, Butlen & Pézard, 2007, Norton, 2012). C'est ce que notre recherche a à la fois pris en compte et tenté d'explorer.

Nous ne nous mentionnerons pas les études qui portent sur la mémorisation des tables d'addition et de multiplication, son caractère nécessaire pour la construction de compétences en calcul, la difficulté de certains élèves pour les mémoriser et les voies possibles pour qu'ils y parviennent ; en dépit de leur aspect estimé désormais incontournable dans les apprentissages des élèves, ces études, qui concernent essentiellement les premières années de la scolarité sortent en effet du cadre de notre étude. Nous nous contentons seulement de citer ici l'importance des décompositions multiplicatives que nous avons relevée dans de nombreuses études. Trois grands résultats se dégagent des recherches dont nous avons pris connaissance : le premier porte sur la caractérisation des réponses des élèves à des tâches relatives à la connaissance des nombres, ou plutôt sur la caractérisation des connaissances des élèves sur les nombres à partir de tâches ne nécessitant pas un support écrit ; le deuxième porte sur l'étude des procédures opératoires utilisées par les élèves en calcul mental, ces deux axes ayant en commun la mise en évidence soit de différences de réponses soit de différences de procédures selon le niveau des élèves – niveau de scolarité ou niveau défini par les tests à niveau de scolarité fixé. Nous présentons dans les deux sections suivantes (A et B), de manière plus ou moins développée, quelques-unes des recherches qui ont particulièrement retenu notre attention sur ces questions. Un troisième axe de recherche est consacré aux enseignants, à leurs compétences en calcul mental, la place du calcul mental dans leur formation initiale et leurs pratiques de classe. Nous y consacrerons la section C.

A. Le calcul mental et les connaissances des élèves sur les nombres

Les résultats que nous citons ici concernent les décimaux et les rationnels. Portant sur les représentations et les procédures des élèves, ils sont pour la plupart bien connus en didactique des mathématiques, l'enseignement et l'apprentissage des décimaux en particulier ayant fait depuis de nombreuses années l'objet de nombreux travaux, en France notamment (Brousseau 1980, 1981; Douady & Perrin-Glorian, 1986 ; Grisvard & Léonard 1981, 1983).

Citons également la recherche de Roditi (2007) qui, après avoir étudié les procédures mises en œuvre par des élèves¹⁴⁸ dans l'activité de comparaison des décimaux et repéré des facteurs liés aux difficultés d'apprentissage, a mené une expérimentation auprès de ceux d'entre eux les plus en difficulté. Dans cette deuxième partie, clinique¹⁴⁹, Roditi retient trois axes pour concevoir un scénario d'aide aux élèves en difficulté : le premier consiste à « proposer des situations écrites où les nombres décimaux peuvent être lus et pas seulement entendus » ; le deuxième se propose de « favoriser un traitement sémantique des écritures numériques en demandant aux élèves d'exprimer les nombres par différents registres de représentation, et de donner une approximation des nombres utilisés », et le troisième vise à « faire expliciter et critiquer des procédures de comparaison » par les élèves. Les conclusions qu'en tire Roditi confirment des résultats antérieurs sur l'aspect insuffisant d'un traitement uniquement syntaxique de l'écriture décimale des nombres décimaux, et l'importance de la capacité à changer de registre de représentation dans la qualité de la connaissance de ces nombres. Si cette étude ne propose pas directement de situation nouvelle dans l'enseignement des nombres décimaux, nous considérons cependant les éléments qu'elle comporte comme des supports importants pour notre propre recherche¹⁵⁰.

¹⁴⁸ Roditi a également soumis 40 adultes au questionnaire proposé aux élèves.

¹⁴⁹ Elle concerne 11 élèves parmi 28 élèves de collège ayant répondu au questionnaire sur 402 testés au total.

¹⁵⁰ Nous avons par ailleurs utilisé les travaux de Roditi (2001, 2005) sur l'enseignement de la multiplication des décimaux en sixième dans la formation du dispositif PACEM.

1. Quatre études spécifiques: Bolon (1992, 1996), McIntosh et al. (1997), Steinle (2004) et McIntosh (2005)

Nous avons retenu quatre autres études spécifiques, plus ou moins anciennes, d'une part parce qu'elles reposent toutes sur des analyses de résultats de tests effectués auprès d'élèves à une grande échelle, d'autre part parce qu'elles nous semblent directement liées à la double problématique de la conception des nombres et du calcul mental au sens où nous l'avons défini: il s'agit pour la France, de l'étude de Bolon (1992) et pour l'étranger de celle de McIntosh, Reys, Reys, Bana et Farell (1997) et celle de Steinle (2004). La quatrième étude, de McIntosh (2005) porte spécifiquement sur des résultats d'élèves en calcul mental.

Bolon : l'enseignement des décimaux à l'école élémentaire

Bolon analyse des difficultés d'apprentissages identifiées à partir des résultats des évaluations proposées en 1987 et en 1989 en fin de sixième par l'APMEP auprès d'enseignants volontaires, et de ceux des évaluations nationales proposées en 1991 en début de sixième. Son étude a pour objectif de « mettre en regard les textes officiels, les pratiques ordinaires, et les confronter aux résultats de la recherche pédagogique ». Elle « fait émerger des points de contradiction entre les attentes officielles, les performances des élèves, les pratiques courantes » des enseignants, et « débouche sur des pistes de travail pour des cours de formation initiale ou continue. »

Les items auxquels s'intéresse principalement Bolon portent sur l'écriture d'un nombre décimal et les changements de registres, le placement d'un nombre sur la droite graduée, l'ordre des décimaux, l'intercalation d'un nombre entre deux décimaux, la multiplication et la division d'un décimal par 10, 100, 1 000, et des opérations posées en ligne ou en colonnes. Son analyse confirme des difficultés déjà largement identifiées sur chacun de ces points : traitement séparé des parties entières et des parties décimales lors de traitements d'écritures décimales des nombres (comparaison, opérations), intercalation délicate, passage à la droite graduée difficile, y compris pour des nombres simples ($1/2$; 0,25), contradiction entre automatiser des algorithmes de calcul et compréhension des nombres et de leurs propriétés.

Bolon s'intéresse également à l'enseignement des décimaux, d'un point de vue historique et épistémologique, et à travers la progression proposée par un manuel de CM1. Une partie de son travail est évidemment lié au contexte, et en particulier aux programmes scolaires alors en vigueur : en particulier, nous ignorons quelles étaient alors les pratiques des enseignants en calcul mental. Il est cependant tout à fait remarquable que les difficultés qu'elle évoque sont toujours, voire davantage, d'actualité aujourd'hui.

McIntosh, Reys, Reys, Bana et Farell : les erreurs des élèves sur les fractions et les nombres décimaux

Même si elle ne porte pas non plus directement sur le calcul mental, une des études les plus en rapport avec notre recherche nous semble être celle menée par McIntosh, Reys, Reys, Bana et Farell (1997) en Australie, aux Etats-Unis, en Suède et à Taïwan. Sur la base de résultats de 30 à 45 items se présentant pour la plupart sous forme de QCM proposés à des élèves de 8, 10, 12 et 14 ans¹⁵¹, les auteurs ont cherché à repérer les erreurs des élèves et à caractériser leurs représentations sur les décimaux et les rationnels. Nous précisons que nous ignorons les conditions de production des réponses des élèves à ces tests ainsi les contenus d'enseignement que ces élèves ont reçu avant les tests. Nous ne savons pas en particulier si la pratique du calcul mental était alors inscrite, et si oui sous quelle forme, dans les programmes des différents pays dans lesquels les tests ont été passés.

Au travers de l'ensemble des résultats obtenus, McIntosh et ses collègues constatent que les « conceptions erronées » (*misconceptions*) sur des concepts de base sont répandues chez les élèves, et qu'elles persistent chez les élèves de 14 ans. Parmi les items sélectionnés par les chercheurs, et les questions qu'ils se posent, nous retrouvons des items assez « classiques » avec des erreurs d'élèves « classiques » elles aussi :

¹⁵¹ Les tailles des échantillons varient entre 110 et 160 élèves par âge (et par pays ?). L'article ne dit rien des caractéristiques de ces élèves autres que leur âge, ni des conditions de passation des tests.

- la localisation de 2,19 sur une droite graduée : un pourcentage élevé d'élèves de 10 et de 12 ans placent ce nombre plus près de 3 que de 2 (plus de 60 % aux USA) ; les chercheurs posent comme alternative à cet item une tâche avec \$2,19 ;
- la comparaison de 4 nombres écrits sous forme fractionnaire de même numérateur : plus de la moitié des élèves de 10 ans (en Australie et aux USA) donnent comme plus grand nombre celui qui s'écrit avec le plus grand dénominateur ; cette difficulté persiste pour un cinquième des élèves de 12 ans, et pour un dixième des élèves de 14 ans aux USA ;
- l'intercalation d'un nombre entre deux décimaux : là encore, la moitié environ des élèves de 12 ans répondent qu'il n'y a aucun nombre décimal entre 1,52 et 1,53 ; cette réponse est encore donnée fréquemment à 14 ans (23 % des élèves australiens, et 45 % des élèves américains) ;
- une tâche analogue avec $\frac{2}{5}$ et $\frac{3}{5}$: des taux encore plus élevés de réponses fausses sont constatés (y compris pour cet item chez les élèves suédois et taïwanais de 14 ans, alors que c'était nettement moins vrai pour les items précédents) ;
- l'estimation d'un produit d'un entier par un décimal plus petit que 1 ($87 \times 0,89$) : 10 % à 30 % des élèves de 14 ans selon les pays dans lesquels les tests ont été passés fournissent comme réponse un nombre supérieur à 87 ;
- l'estimation d'un quotient d'un entier par un décimal plus petit que 1 ($29 : 0,28$) ; la moitié des élèves de 14 ans selon les pays fournissent comme réponse un nombre inférieur à 29 ;

Les auteurs de l'étude s'interrogent en conclusion sur ce que révèlent les résultats obtenus, et notamment sur le fait qu'une proportion importante d'élèves de 10 ans, de 12 ans et même de 14 ans parmi les élèves testés ne maîtrisent pas selon eux les décimaux et les rationnels. Ils suggèrent de réfléchir à la place accordée aux calculs de type routinier sur ces nombres, de donner davantage de sens à la compréhension des nombres, et, comme le faisait d'ailleurs Bolon, de s'interroger sur leur place dans les programmes.

Steinle : détection et remédiation des conceptions erronées sur les décimaux

La troisième étude que nous citons est une étude longitudinale à grande échelle de Steinle (2004) qui porte elle aussi sur les « conceptions erronées » (*misconceptions*) sur les nombres décimaux menée à partir de 1997 auprès de plus de 3 000 élèves de Melbourne répartis dans 12 écoles (*grades* 4 à 10). Parmi ces élèves, 600 furent suivis pendant 3 ans. Comme dans le cas précédent, nous ignorons les conditions exactes de production des réponses des élèves à ces tests ainsi que les contenus d'enseignement reçus par ces élèves avant les tests.

L'objet de l'étude est de repérer les « conceptions erronées » des élèves en fonction des niveaux de scolarité et en particulier celles qui « résistent ». Steinle commence par rassembler ce que les chercheurs mettent dans la notion de « conceptions erronées » ou dans des notions voisines¹⁵² (notamment erreurs et obstacles) et reprend à son compte leur caractère souvent temporaire, pouvant provenir, à travers des opérations-en-acte, de constructions « logiques » personnelles fondées sur des connaissances incomplètes autant qu'incorrectes. Steinle rappelle le caractère quasi inévitable de ces conceptions souvent mises en avant dans la littérature ; c'est pourquoi elle souligne d'une part l'importance pour les enseignants de les connaître, d'autre part le fait que ceux-ci fassent en sorte de ne pas les laisser perdurer chez les élèves. Nous retrouvons ici le cas particulier des connaissances acquises sur les entiers fonctionnant comme obstacle au passage aux décimaux. Pour diagnostiquer ces « conceptions erronées », Steinle teste les élèves avec 30 items qui portent sur la comparaison des décimaux et observe deux procédures incorrectes dominantes chez les élèves : celle qui consiste à donner comme le plus grand nombre décimal celui qui a le plus grand nombre de chiffres « après la virgule »¹⁵³ dans son écriture décimale, et celle qui consiste au contraire à choisir celui qui a le plus moins de chiffres après la virgule, chacune de ces deux procédures pouvant donner des résultats justes. Notons que Steinle retrouve ainsi les

¹⁵² « Des conceptions se créent au gré des activités propres, des enseignements et du développement de l'élève, certaines se révèlent plus ou moins inadaptées ou fausses pour certains usages (*misconceptions*). » (Brousseau, 2000)

¹⁵³ Nous choisissons sciemment cette expression courante.

deux règles mises en évidence depuis de nombreuses années en didactique¹⁵⁴ (Grisvard & Léonard, 1981). A partir des comparaisons effectuées par les élèves sur 10 couples de décimaux, dans 3531 tests passés, Steinle observe, de façon attendue, que la première procédure, c'est-à-dire en fait le traitement d'un nombre décimal comme deux nombres entiers séparés par une virgule, est très présente chez les élèves de *grade* 4 (plus de 70 % d'entre eux) et qu'elle diminue progressivement (environ 30 % au *grade* 6 pour passer à moins de 20 % l'année suivante) sans disparaître complètement. De façon plus étonnante, l'autre procédure, moins fréquente au *grade* 4 (à peine 10 %), augmente et reste autour de 15 % les années suivantes. Steinle propose deux modes de pensée pour expliquer ce phénomène : un qui serait de nature « symétrique » à celui utilisé pour les fractions ($0,3 > 0,4$ comme $1/3 > 1/4$) et un autre qui viendrait de la confusion avec la comparaison des nombres négatifs, puis de l'introduction de la notation scientifique. Elle ajoute un troisième mode de pensée, associé à l'usage de l'argent, qui conduirait certains élèves à considérer 17,35 et 17,353 comme égaux car tous deux assimilés à \$17,35.

Selon l'étude, les élèves qui n'auraient pas recours à l'une de deux premières procédures, parce que justement aucune stratégie fortement ancrée ne serait présente chez eux, seraient plus sensibles à l'enseignement et donc plus susceptibles de progresser facilement. Steinle en tire ensuite deux suggestions principales pour l'enseignement : la vigilance vis-à-vis du langage employé (distinction nombres/chiffres) et la place à accorder aux unités, mettant l'accent sur le rôle « repérateur¹⁵⁵ » et non séparateur de la virgule, qu'elle illustre en particulier dans le cas de la multiplication et de la division par 10,100 et 1 000. Elle questionne notamment l'importance de travailler avec des nombres décimaux qui n'ont pas le même nombre de chiffres « après la virgule » (qu'elle appelle « *ragged decimals* », ce que nous aurions envie de traduire par « décimaux dépareillés »).

¹⁵⁴ Grisvard et Léonard énoncent une troisième règle, amélioration de la première, pour la comparaison de plus de deux décimaux.

¹⁵⁵ Le terme est de notre initiative.

McIntosh : évaluation, performance et erreurs fréquentes chez les élèves en calcul mental

La quatrième recherche (McIntosh, 2005) porte quant à elle, non pas sur les stratégies que les élèves utilisent en calcul mental, mais sur la question d'une définition de niveaux de compétence ou de performance en calcul mental. Environ 3000 élèves australiens (*grades* 3 à 10) ont passé des tests composés d'items de deux types enregistrés sur un CD : courts (3 secondes pour répondre) ou longs (15 secondes pour répondre). Le nombre d'items est variable selon le niveau d'étude des élèves, avec des items d'ancrage entre les niveaux. Sans viser une quelconque virtuosité technique, les contenus des tests concernent les quatre opérations sur les nombres (entiers à un chiffre ou deux chiffres, décimaux et rationnels) et sur les pourcentages. Les résultats des élèves sont analysés en utilisant un modèle de Rasch afin de créer une double échelle, associant des groupes définis par les scores des élèves et un niveau de difficulté des items. De plus, les erreurs les plus fréquentes sont répertoriées et analysées.

Si la méthodologie de l'étude est intéressante¹⁵⁶, la constitution d'une échelle commune sur 8 niveaux scolaires nous semble très ambitieuse, et les résultats obtenus nous semblent en deçà des attentes qu'on peut avoir vis-à-vis d'une démarche de ce type. En particulier, nous ne connaissons pas la manière dont a été traité l'impact des programmes sur la constitution de l'échelle, mais les items caractérisant les groupes d'élèves nous semblent correspondre à une progression de type curriculaire. De plus, les erreurs repérées comme fréquentes, si elles confirment des erreurs déjà identifiées (comme $0,3 + 0,7 = 0,10$ ou $3 \text{ fois } 0,6 = 0,18$), ne semblent pas apporter de connaissances nouvelles sur les procédures utilisées par les élèves.

¹⁵⁶ Les évaluations CEDRE 2008 menées par la DEPP en fin de collège ont utilisé le même type de protocole en calcul mental.

Pour ces quatre études, nous ne savons pas quelle pratique du calcul mental avaient les élèves testés, et les trois premières, nous l'avons dit en préambule, ne font pas référence directement au calcul mental. Nous en retenons cependant un certain nombre d'éléments qui vont intervenir dans nos hypothèses sur le calcul mental, en particulier ceux qui touchent aux « conceptions erronées » des élèves.

2. L'estimation d'un ordre de grandeur d'un résultat

Un autre volet de la connaissance des nombres concerne l'estimation d'un ordre de grandeur¹⁵⁷ d'un résultat. Selon une idée largement répandue (par exemple Bell, 1974 ; Northcote & McIntosh, 1999), le calcul mental est utile aux adultes, dans leurs activités sociales ou professionnelles, et il est beaucoup plus fréquent d'avoir à recourir mentalement à l'estimation d'un résultat que d'obtenir un calcul exact. Nous interrogeons donc ici ce que les élèves savent faire et éventuellement s'ils reçoivent un enseignement spécifique dans ce domaine.

Estimer un ordre de grandeur d'un nombre peut consister en une estimation « directe » d'un nombre donné (« grand nombre », mesure d'une grandeur ou proportion par exemple), mais le plus souvent cela se traduit par l'estimation d'un résultat, comme c'est le cas dans les deux items cités plus haut. Selon Sowder (1988), « *estimation is the process of converting from exact to approximate numbers and mentally computing with those numbers to obtain an answer which is reasonably close to the result of an exact computation. In other words, estimation includes, but is more than, computation.* »

Les tests nationaux effectués aux Etats-Unis depuis 1969 dans le cadre du programme *National Assessment for Educational Progress* (NAEP) sont proposés aux élèves des 4^e ; 8^e et 12^e années scolaires (l'équivalent du CM1, de la 4^e et la terminale en France) comme les

¹⁵⁷ Nous ne parlons pas ici de l'estimation perceptive d'une grandeur comme par exemple une longueur ou une masse.

évaluations internationales TIMSS. Leurs résultats fournissent un support riche pour les chercheurs, et pour illustrer notre propos, nous citerons un exemple concernant une estimation tiré d'une des nombreuses analyses issues de ces résultats. (Carpenter et *al.*, 1981)

« On one administration of the National Assessment for Educational Progress (NAEP), only 24% of 13 year olds identified that would be close to 2. The majority of students estimated the answer as 1; 19 or 21. »

NAEP Results of Estimating a Fraction Sum	
Estimate the answer to $\frac{12}{13} + \frac{7}{8}$. You will not have time to solve the problem using paper and pencil.	
Responses	Percent Responding - Age 13
1	7
2	24
19	28
21	27
I don't know	14

Les auteurs du rapport soulignent ensuite l'importance de l'estimation d'un ordre de grandeur en poursuivant ainsi :

« Research also shows that students who are good at computing exact answers are not necessarily good at estimating or judging answers' reasonableness (Reys & Yang, 1998). The development of estimation skills appears to correlate with the development of other mathematical skills and concepts. Studies indicate that computational estimation and mental computation promote students' number sense (Reys & Reys, 1986; Sowder & Wheeler, 1987). Instruction that integrates mental computation, computational estimation and emphasizes the relative magnitude of numbers has been shown to lead to an increase in student performance in numeric situations (Markovits & Sowder, 1994). Seventh-grade students provided instruction on computational estimation were more likely to use and continue to use strategies demonstrating sound number sense (Markovits & Sowder, 1994). Research also shows a correlation between students' estimation skills, their computational skills and mathematics SAT scores (Hanson & Hogan, 2000). »

Le problème n'est d'ailleurs pas réglé pour les élèves au lycée, ainsi que le relève Rosenhouse (2008) faisant état de difficultés d'élèves qui révèlent une faible familiarité avec

les nombres, entiers dans le cas cité: « I see students every day who can't factor quadratic equations with any facility because the problem of, say, finding two numbers whose product is 56 and whose sum is 15 is not something they can do quickly. »

B. Les procédures opératoires utilisées par les élèves et le calcul mental

Le calcul mental se différencie du calcul posé sur les nombres écrits sous forme décimale dont le fondement est l'application d'algorithmes « universels », c'est-à-dire indépendants des nombres en jeu (à leur appartenance à un ensemble donné près). Par exemple, « si l'on pose l'opération $73 - 27$, on fait agir un algorithme qui énonce des manipulations à opérer sur les **chiffres** des unités, puis les **chiffres** des dizaines. Les **nombres** 73 et 27 sont provisoirement perdus de vue, et par conséquent aussi l'ordre de grandeur du résultat. Alors qu'un calcul *approché* conduit à penser que le résultat est proche de $75 - 25$, c'est-à dire 50 » (Boule, 1998).

1. Un point de vue qualitatif

Sowder (1990) affirme que l'on ne devrait pas attendre que les élèves maîtrisent des algorithmes de calcul écrit pour faire avec eux du calcul mental, au risque de les encourager d'utiliser à mauvais escient ces algorithmes :

« *Mental computation should not be delayed until after formal written algorithms have been mastered. In fact delaying it until that time encourages students to mentally use the algorithms meant only for pencil-and-paper calculations.* »

De nombreux exemples de procédures mentales utilisées par les élèves sont proposés dans la littérature, comme par exemple celles que présentent Stacey, Varughese et Marston (2003) pour la soustraction :

$\begin{array}{r} 74 \\ -38 \\ \hline 36 \end{array}$	$\begin{array}{r} 38 \\ 10 \\ 10 \\ 6 \end{array}$	$\begin{array}{r} 83^{+3} \\ -27^{+3} \\ \hline 56 \end{array}$	$\begin{array}{r} 86 \\ 30 \\ \hline 56 \end{array}$	$\begin{array}{r} 568 - 372 \\ 570 - 370 \\ \hline 196 \end{array}$	$\begin{array}{r} 74 \\ -38 \\ \hline 36 \end{array}$	$\begin{array}{r} 44 \\ 40 \\ 36 \end{array}$	$\begin{array}{r} 74 \\ -38 \\ \hline 36 \end{array}$	$\begin{array}{r} 70+4 \\ -38 \\ \hline 32 \\ \checkmark \\ 36 \end{array}$
---	--	---	--	---	---	---	---	---

De la gauche vers la droite, on peut d'abord identifier une procédure par complément (de 38 « pour aller à » 74), puis une méthode qui joue sur la conservation des écarts ; la troisième image illustre une démarche par compensation ($568 - 372 = 570 - 370 - 2 - 2$), la quatrième montre une soustraction par étapes ($74 - 30 = 44$, puis $44 - 8 = 44 - 4 - 4$) et la dernière consiste à décomposer un des nombres.

Threlfall (1998) déclare quant à lui que le choix d'une procédure de calcul mental dépend de la façon dont on « voit » les nombres. Il distingue (Threlfall, 2009) ce qu'il appelle des stratégies de transformation des nombres d'autres stratégies utilisées en calcul mental (comptage ou application d'une procédure opératoire par exemple). Pour Beishuizen (1993, 1997), Heirdsfield et Cooper (2004), ce sens du nombre est un des principaux facteurs de performance en calcul mental

Pour Benjamin (2011), la proximité entre conception des nombres et numération orale a des conséquences directes sur les procédures utilisées en calcul mental, davantage conformes à ce que les élèves entendent – ou à ce qu'ils lisent – que le calcul posé.

“One of the first mental math tips you can practice is to calculate from left to right, rather than right to left. On paper, you might add $2300 + 45$ from right to left, but in your head, it's more natural and faster to add from left to right.”

Askew et Brown rédigent en 2003 une revue de littérature rassemblant les principaux résultats de la recherche portant sur la numératie de base, à l'usage des enseignants de l'école primaire, des directeurs d'école et des décideurs politiques (*policymakers*). Le titre qu'ils donnent à cette revue est « *How do we teach children to be numerate ?* ». Ce n'est pas à proprement parler un article de recherche, mais une présentation synthétique d'un certain nombre de thèmes traités par la recherche. Pour chacun de ces thèmes, les auteurs livrent d'abord quelques résultats issus de la recherche, principalement britannique, qu'ils estiment

comme les plus importants (*key messages*), développent rapidement chacun de ces résultats, ce qui les conduit à donner quelques implications de ces travaux pour les enseignants.

Un chapitre est consacré au calcul mental¹⁵⁸, et 3 points sont cités, à savoir :

- les élèves utilisent une grande variété de procédures mentales pour effectuer des calculs avec des nombres plus grands que 20 ;
- les stratégies mentales efficaces des élèves sont centrées sur un grand nombre de types de décompositions des nombres à plusieurs chiffres ;
- la compréhension de la structure des opérations est essentielle pour des stratégies de calcul mental.

Les deux premiers points ont comme conséquence, selon les auteurs, l'existence d'un flou entre l'enseignement de procédures de calcul mental et l'utilisation effective de ces procédures par les élèves. Des recherches sur l'addition et la soustraction (Thompson, 1999) suggèrent deux procédures communément utilisées par les élèves : l'une consiste à décomposer les deux nombres en dizaines et en unités ($47 + 36 = (40 + 30) + (7 + 6)$), et l'autre consiste à partir d'un des deux nombres et faire deux sauts successifs, le premier sur les dizaines, le second sur les unités ($47 + 36 = (47 + 30) + 6$).

Nous retrouvons ici le travail de droite à gauche mentionné par Benjamin, spécifique en calcul mental, en particulier pour l'addition et la soustraction. Nous retrouvons aussi les deux procédures mises en avant par Beishuizen (*Split* et *Complete*). Ces deux procédures correspondent selon nous à deux visions des nombres, l'une en termes de quantités, l'autre étant davantage lié à la droite numérique. En effet, nous interprétons la première comme une représentation proche de la construction du nombre entier, avec groupement d'unités en dizaines, de dizaines en centaines, etc. alors que la seconde correspondrait à une localisation progressive du nombre, par exemple en centaines, puis en dizaines, en unités, voire en

¹⁵⁸ Un autre thème est consacré au développement professionnel des enseignants.

dixièmes et au-delà, avec une vision plus dynamique (de déplacement) et surtout prolongeable aux décimaux, rationnels et réels.

Par ailleurs, nous ignorons si ces deux procédures correspondent à des méthodes enseignées, mais l'espèce de dichotomie mentionnée dans cet article, comme dans les travaux de Beishuizen, semble faire l'impasse sur une méthode reposant également sur des sauts successifs, mais effectués l'un « en avant », l'autre « en arrière » pour des additions du type $47 + 39$, qui consiste à effectuer $(47 + 40) - 1$. Elle fait aussi l'impasse sur des méthodes de compensation qui peuvent être utilisées par les élèves, pour l'addition $(47 + 36 = 50 + 33)$, comme pour la soustraction $(53 - 17 = 56 - 20)$.

Le troisième point cité par Askew et Brown souligne d'une part l'importance des propriétés des opérations, en particulier de la commutativité de l'addition et de la multiplication, d'autre part celle de la relation entre addition, soustraction et décomposition des nombres.

Ces auteurs terminent leur article par deux recommandations pour les enseignants : l'attention à porter sur l'articulation de l'enseignement des algorithmes « standards » avec les stratégies mentales des élèves, et la nécessité de s'attacher autant à la structure des opérations qu'à la structure des nombres.

Nous retrouvons à travers ces deux recommandations, deux aspects récurrents des travaux de recherche portant sur le calcul mental.

2. Un point de vue quantitatif

Dans une étude menée en 1987 par une agence de recherche (la *National Foundation for Educational Research*), 247 élèves¹⁵⁹ de 11 ans d'écoles d'Angleterre, du pays de Galles et d'Irlande du Nord ont été interrogés oralement, individuellement, ce qui a permis de connaître les procédures qu'ils utilisaient. Les temps de réponse n'étaient pas limités afin que les élèves puissent au maximum faire état de ce qu'ils savaient faire. Les élèves étaient séparés en 3 groupes selon leurs niveaux, déterminés par les scores obtenus à des tests écrits. Foxman (2001) a analysé les résultats obtenus à 3 items sous l'éclairage du classement en deux grandes catégories des stratégies de calcul mental pour l'addition et la soustraction définies par Beishuizen (1998) : celle qui consiste à conserver un des deux nombres tel quel (*Complete*), et celle dans laquelle les deux nombres sont décomposés en dizaines et unités, ou quand il s'agit de mesures de grandeurs, en unités et sous-unités (*Split*).

Les trois items auxquels Foxmann s'est particulièrement intéressé sont :

- $64 - 27$;
- J'achète du poisson et des frites pour £ 1,46. Combien va-t-on me rendre sur £ 5 ?
- Je monte dans un bus à 9:43 am et j'arrive à mon arrêt à 10:12 am. Combien de temps a duré mon trajet ?

Une analyse *a priori* des tâches ci-dessus permet de distinguer la première des deux suivantes : d'une part, c'est la seule des trois à se situer directement dans le champ numérique alors que les deux autres sont contextualisées dans le champ de grandeurs ; d'autre part, si toutes les trois peuvent conduire à des procédures par compléments ($3 + 30 + 4$; $0,04 + 0,50 + 3$; $17 + 12$) avec éventuellement l'utilisation d'unités de mesure pour les deux dernières,

¹⁵⁹ Ces élèves faisaient partie d'un échantillon représentatif de 1 200 élèves ayant passé des tests écrits parmi 13 000 élèves d'environ 200 écoles.

seule la première permet d'envisager d'autres procédures¹⁶⁰ mentales efficaces que l'algorithme standard de la soustraction : $64 - 20 - 4 - 3$ ou $64 - 30 + 3$ ou encore $67 - 30$.

Les principaux résultats relevés par Foxman sont les suivants :

- Dans les 3 items, les élèves qui avaient utilisé des stratégies *Complete* ont réussi le mieux, de façon marginale dans le premier calcul, mais massivement dans le calcul de la durée du trajet du bus. Ceci fut vrai pour les trois groupes d'élèves, excepté pour les élèves de bas niveau qui eurent légèrement plus de réussite sur $64 - 27$ avec l'algorithme standard de la soustraction¹⁶¹ qu'en ayant recours à une stratégie *Complete*.
- Les stratégies de type *Complete* ont été beaucoup plus efficaces que celles de type *Split*, notamment pour les élèves qui ne font pas partie du groupe ayant obtenu les scores les plus élevés aux tests écrits ;
- Pour chacun des 3 items, l'utilisation d'une méthode de type *Complete* décroît avec le niveau des élèves au profit d'une méthode *Split*.
- Les stratégies de type *Complete* ont été beaucoup plus fréquemment utilisées que celles de type *Split* ou que l'algorithme de soustraction posée, excepté pour le premier calcul pour lequel les élèves de niveau moyen ont eu plus souvent recours à l'algorithme standard.

Foxman en tire deux conclusions :

- Alors qu'il suppose peu probable que des stratégies de calcul mental aient été enseignées en 1987, il constate que des élèves de 11 ans ont su en inventer.
- Il constate aussi que les stratégies de type *Complete* ont été plus utilisées et plus efficaces que celles de type *Split*, et regrette à cet égard que le programme *National*

¹⁶⁰On voit sur cet exemple l'intérêt ultérieur de comparer ces différentes procédures d'un point de vue algébrique.

¹⁶¹ Nous supposons que cet algorithme consiste à effectuer $(14 - 7) + (50 - 20)$.

Numeracy Strategy déjà évoqué les réunisse sous la même rubrique de « stratégies de décomposition » (*partitional strategies*).

Pour conclure, nous sommes conscients que nous n'avons pas évoqué tous les aspects du calcul mental, en particulier la question de la place du calcul mental dans la résolution de problèmes. Hormis l'avantage de « libérer de l'espace mental », les travaux de Butlen et Pézard (1996) montrent notamment que le calcul mental permet de libérer la pensée pour d'autres tâches et de favoriser des démarches heuristiques pertinentes, et qu'une pratique du calcul mental accroît les capacités d'initiative des élèves (Butlen & Pézard, 2000).

Quelques rares chercheurs militent pour la pratique du calcul mental au-delà du collège : parmi eux, Rubinstein (2001) qui donne quelques exemples de différentes procédures utilisées par des élèves de lycée. Nous en citons deux qui portent sur l'application d'un pourcentage et qui peuvent être travaillés en France avec des élèves dès le début de collège :

« Mentally calculating a tip, say, 15 percent of \$24.98, and sharing aloud the typical strategy – that of finding 10 percent and then half of that amount for 5 percent and combining – highlights the distributive property. The estimation discussion helps students recognize and extend the property to other situations, in particular, to variables. »

« On the item “Find 80% of 55,” students have shared a variety of responses, including the following:

- I found 10 percent, which is 5.5, then multiplied by 8. To do that, I multiplied 8 by 5 to get 40, then 8 by 1/2 to get 4. The total is 44.*

- I found 10 percent, or 5.5; doubled it to get 11; then subtracted that from 55 to get 44.*

- I knew that 80 percent is 4/5. One-fifth of 55 is 11, so 4/5 is 4 times as much, or 44.*

The last method is often an eye-opener for many students. They realize that knowing fraction-percent equivalences permits a shortcut that makes other work much easier. »

Nous retrouvons ainsi sur ces différents exemples une illustration des préconisations de la CREM dans la perspective d'un enseignement « moderne » du calcul :

« Renforcer les rapports entre raisonnement et calcul, développer l'intelligence du calcul, ne saurait être vu en opposition avec le renforcement souhaité par ailleurs d'approches algorithmiques. Ceci d'autant plus que l'évolution technologique substitue en partie à des besoins qui s'exprimaient en termes de capacités d'exécution d'algorithmes, des besoins qui s'expriment en termes de contrôle d'exécution et d'étude de performances d'algorithmes. »

C. Le calcul mental et les enseignants

La question de l'enseignement du calcul mental est à considérer de façon spécifique, en la distinguant des connaissances des élèves et de ce qu'ils en font pour effectuer différentes tâches. Dit autrement, nous l'avons déjà évoqué plus haut, la question qui se pose porte sur les objectifs didactiques de cet enseignement : vise-t-il des connaissances spécifiques à faire acquérir aux élèves ou/et constitue-t-il un moyen pour favoriser l'apprentissage de connaissances plus larges et améliorer la disponibilité de ces connaissances ? Et quelles sont les pratiques des enseignants de ce point de vue ? Avec quels effets sur les connaissances des élèves ?

Il n'est guère surprenant de constater que l'étude des pratiques des enseignants relativement au calcul mental concerne presque exclusivement l'école primaire, et en particulier les premières années de l'école primaire. En effet, d'une part, les apprentissages premiers sur les nombres encouragent presque naturellement un travail avec les élèves en calcul mental, d'autant plus que les habiletés des élèves à l'écrit au début de leur scolarité inclinent à travailler à l'oral ; d'autre part, il semble peu fréquent que les programmes du secondaire mentionnent un travail spécifique à effectuer en calcul mental avec les élèves.

En France, Butlen et Pézard (1999) ont mis en évidence, sous certaines conditions méthodologiques, des liens positifs entre une pratique régulière du calcul mental et la

résolution d'un problème numérique par des élèves de CM2, de sixième et de cinquième. A l'étranger, les recherches portent surtout l'acquisition du *number sense* par les élèves. Verschaffel et De Corte (1996) soulignent par exemple que les notions relatives *au number sense* ne peuvent être compartimentées ni dans des chapitres de manuels scolaires ni dans des instructions officielles spécifiques. Greeno (1991) affirme quant à lui que le développement du *number sense* ne résulte pas directement pas d'activités conçues et mises en œuvre à cet effet.

L'enseignement exclusif, mécanique, des algorithmes standards de calcul posé semble quasi unanimement rejeté aujourd'hui par les chercheurs, en France comme à l'étranger (Gravemeijer, 2003; Heirdsfield & Cooper, 2004 ; Kamii & Dominick, 1997). Les recommandations actuelles des « réformateurs » de l'enseignement des mathématiques britanniques, néerlandais et américains reposent sur la compréhension par les élèves des méthodes et stratégies utilisées en calcul mental (par exemple Anghileri, Beishuizen & Putten, 2002 ; Thompson, 1999, 2008 ; van de Heuvel-Panhuizen, 2001 ; Yackel, 2001). Cette préconisation a par exemple été testée avec succès dans une recherche clinique réalisée par Heirdsfield et Lamb (2005) auprès des élèves (*grade 2*) d'une classe d'une école de la banlieue de Brisbane (Australie). Un autre point est qu'il serait plus pertinent de consacrer moins de temps pour les élèves à l'apprentissage d'algorithmes et davantage à la production de stratégies personnelles en lien avec la résolution de problèmes, ce qui modifierait notamment la nature et la répartition des tâches réservées au calcul posé et de celles potentiellement liées au calcul mental (Reys et *al.*, 2009 ; Suggate, Davis, & Goulding, 2010 ; Van de Walle, Karp & Bay-Williams, 2007, 2010).

La question d'un enseignement du calcul mental se pose explicitement en France aux enseignants, incités en cela par les instructions officielles, mais sans doute également confrontés à des constats quotidiens de difficultés ou de lacunes chez les élèves. Quoique non considérés comme des travaux de recherche, plusieurs articles consacrés au calcul mental

(Bourdenet, 2007 ; Lacage, 2007 ; Anselmo, 2008) sont parus dans le bulletin de l'APMEP¹⁶² dans un dossier spécial « Le calcul au collège ». Bourdenet (IREM de Strasbourg) à partir de son expérience personnelle, présente un argumentaire exemplifié en faveur du calcul mental ; Lacage (IREM de Montpellier) suggère une mise en activité des élèves favorisée par le calcul mental et Anselmo (IREM de Lyon) pose la question plus globale de la place du calcul mental au collège. Ces trois articles, s'ils ne rendent pas compte de résultats issus de travaux de recherches, ont toutefois l'intérêt de montrer comment leurs auteurs proposent aux enseignants (principaux lecteurs du bulletin de l'APMEP) de tirer parti du calcul mental en faveur des apprentissages numériques des élèves.

Parmi les principaux travaux de recherche qui ont retenu notre attention dans ce domaine, revenons d'abord sur ceux de Butlen et Pézard (1999). Après avoir testé un dispositif caractérisé par une pratique régulière « classique » de calcul mental et étudié ses liens avec la résolution de problèmes numériques, les chercheurs l'enrichissent par deux nouvelles composantes : une explication régulière par l'enseignant des méthodes, et un recours à la production d'écrits d'élèves collectifs, faisant l'hypothèse que cette dernière est un élément favorable à la résolution de problèmes en général. Cette recherche dépasse le cadre de la didactique des mathématiques, puisqu'elle prend en compte à la fois des travaux de sociolinguistique sur le rapport au savoir, les liens entre langage et rapport au savoir (Charlot, Bautier & Rochex, 1992), et des travaux de psychologie cognitive portant sur les systèmes mnésiques et sur les représentations de problèmes (Richard, 1982 ; Fayol, 1990 ; Julo, 1995).

La population étudiée est composée de 3 classes, une de CM2 et deux de 6^e, dont l'une a été suivie pendant deux ans, comparées à des « classes témoins ». L'intérêt de cette recherche réside en particulier dans la production et l'analyse des écrits collectifs des élèves, dans lesquels deux élèves commencent par expliciter ce qu'ils estiment important de retenir collectivement des activités pratiquées en calcul mental. Ces productions sont bien entendu

¹⁶² Association des professeurs de mathématiques de l'enseignement public (français)

des occasions d'avoir accès aux conceptions des élèves des nombres et de leurs propriétés, mais aussi au niveau de disponibilité de ces connaissances. Les résultats sont de trois ordres : l'étude montre d'abord l'émergence d'énoncés intermédiaires dans les classes expérimentales, et la place que ces derniers occupent entre le cas particulier et l'énoncé formel, entre la situation d'apprentissage et le concept. L'étude met également en évidence que les élèves entraînés sont capables de produire plus de méthodes et de façon plus décontextualisée que les élèves des classes témoins. Cette production se manifeste sous différentes formes selon le niveau scolaire étudié, l'un des résultats les plus importants étant peut-être la capacité des élèves à simplifier d'eux-mêmes les données numériques d'un problème, les transformant presque en variables dans un cadre pré-algébrique. Le calcul mental dépasse de ce point de vue la simple dimension calculatoire et devient un outil heuristique, dans la mesure où il aide les élèves à acquérir des stratégies de résolution de problèmes numériques. Un dernier résultat de la recherche relève davantage d'une hypothèse à explorer sur une intégration de ce type d'ingénierie dans une programmation de l'enseignement en algèbre afin de favoriser des apprentissages chez des élèves mis en difficulté par des démarches algébriques arrivées trop vite ou trop formelles.

Nous relevons également une recherche menée en 1995-1996 par Bibby, Askew et Brown, intitulée *Raising Attainment in Primary Numeracy*. Cette recherche a été effectuée auprès de 48 élèves de 3^e année de scolarité primaire (7-8 ans), et a impliqué trois enseignants en leur proposant une formation, menée en parallèle avec leur travail mené auprès des élèves. Les élèves, issus de six écoles différentes, ont été identifiés comme plutôt faibles¹⁶³, sans être des élèves à besoins spécifiques (*special educational needs*), et comparés à un groupe témoin de 48 élèves au profil similaire. Un test initial et un test final ont permis de mesurer les résultats des élèves concernés par la recherche par rapport à ceux d'un groupe témoin. Des observations des activités des enseignants et des élèves ont permis de compléter cette évaluation quantitative par une approche qualitative.

¹⁶³ Le niveau des élèves a été défini par les enseignants et les résultats aux tests nationaux de la fin de cycle (*Key Stage 1*).

Sur le plan quantitatif, Bibby, Askew et Brown ont montré par une analyse statistique que les stratégies d'intervention développées par les enseignants ont été efficaces. Elles ont considérablement accru le nombre de questions auxquelles les élèves du groupe expérimental ont su répondre correctement, et significativement amélioré la qualité des techniques utilisées par les élèves pour arriver à des solutions correctes. L'analyse des données qualitatives a permis quant à elle d'interroger dans quelle mesure un faible niveau peut être le résultat d'un « déficit » chez l'élève. Ce « déficit » relèverait de quelque chose qui se construit – ou ne se construit pas – entre l'enseignant et l'élève, aucun d'entre eux n'étant totalement clair sur les attentes de l'autre. La recherche conclut qu'une attention particulière doit être portée à la reconnaissance des stratégies mentales comme un élément central de la construction de la compétence numérique, une principale implication étant qu'il serait inutile d'attendre que les élèves soient « prêts » pour qu'on leur enseigne de nouvelles stratégies. Un dernier élément qu'il nous semble important de mentionner à propos de cette recherche est une structure-type de séance de calcul mental qui semble s'en être dégagée, en quatre composantes, allant du comptage au travail dans un contexte de résolution de problèmes, alors que ce n'était pas l'objectif initial pour les chercheurs. Précisons cependant qu'il s'agit de séances individuelles.

Une autre recherche menée par Askew, Bibby, Brown and Hodgen (2004) visait à approfondir la compréhension pratique et théorique des chercheurs d'un certain nombre de questions spécifiques à l'enseignement du calcul mental. La population cible était cette fois constituée d'élèves de 1^{re}, 3^e et 5^e années d'école primaire, années à l'issue desquelles il n'y a pas de tests nationaux obligatoires en Angleterre. Les six écoles choisies furent recommandées par les autorités locales de l'éducation (*LEA*) pour leur engagement dans la *National Numeracy Strategy* (NNS). Le choix des enseignants qui pouvaient être des professeurs débutants (*NQT* : *New qualified teachers*) pour cette recherche s'est faite sur ce même critère. Au final, les chercheurs ont retenu 59 séances pour lesquelles ils ont pu observer un enseignement du calcul mental, éventuellement associé à un autre objectif, dans 3 écoles, avec 9 enseignants.

L'objectif des chercheurs était ici d'observer et de comparer les pratiques des enseignants avec les prescriptions de la NNS : temps consacré au calcul mental, équilibre des opérations additives et multiplicatives, importance accordée à « l'intelligence du calcul »

(*strategy thinking*). Des analyses plus qualitatives explorent les interactions entre les enseignants et les élèves.

Dans leurs conclusions, qui ont donné lieu à de multiples publications, et à des recommandations officielles, les chercheurs mettent l'accent sur deux aspects jugés négatifs : les plages introductives de calcul mental ont tendance à s'étendre en début de séances, aux dépens des bilans/ institutionnalisations de fin de séances ; les activités visées chez les élèves sont essentiellement des activités d'automatisation (mémorisation ou application de procédures).

La recherche menée par Caney (2004) s'intéresse quant à elle à la fois aux pratiques des enseignants en calcul mental et à la perception de leurs élèves sur l'utilisation qu'ils ont du calcul mental. Elle porte donc sur des enseignants (16 enseignants des deux dernières années d'école primaire et 18 des deux premières années du collège) et sur des élèves (respectivement 83 et 89). La méthodologie employée pour cette étude a consisté à proposer des questionnaires aux enseignants et aux élèves portant sur la fréquence soit de moments où le développement d'habiletés (*skills*) en calcul mental était visé soit d'occasions où le calcul mental pouvait constituer une aide. La recherche montre que globalement les élèves déclarent utiliser le calcul mental moins souvent que les enseignants ne l'espèrent à travers le travail effectué en classe, en ce qui concerne des tâches qui portent d'une part sur la multiplication et la division, d'autre part sur les fractions et les pourcentages. Une autre conclusion concerne l'estimation d'un ordre de grandeur pour lequel le calcul mental est un outil important aux yeux des enseignants, en particulier lors de l'utilisation d'une calculatrice, alors que les élèves associent davantage le calcul mental à l'obtention d'un résultat exact. La recherche ne fait pas apparaître de « différence » entre les réponses des élèves de l'école primaire et celles des élèves du collège.

« For the teachers mental computation was a frequent component of estimation activities but the students did not report using mental computation as frequently during these activities. Again, the fundamental link between mental computation and estimation may need emphasising by the teachers. Students may only count calculations with exact answers as “mental computation” and not regard estimating in the same manner. » (Caney, 2005)

Citons enfin Fosnot and Dolk (2001) qui avancent que « *many schools today are still teaching the algorithms as if proficiency in them is the main goal of elementary mathematics instruction. They are still teaching to the goal of seventeenth-century mathematics education (when arithmetical procedures became the hallmark of knowledge)!* »

III. Le calcul mental dans les programmes scolaires français

Nous nous intéressons ici uniquement aux programmes 2008 à la fois pour l'école élémentaire et le collège, en complétant notre analyse du chapitre 1 par une entrée spécifiquement consacrée au calcul mental. Nous devons néanmoins considérer que les élèves testés dans le dispositif PACEM ont vécu leurs premières années de scolarité avec des programmes antérieurs aux programmes 2008, et nous ignorons dans quelle mesure ces programmes ont influencé les pratiques des enseignants entre 2008 et 2010. Pour un historique des programmes d'enseignement du calcul mental à l'école élémentaire de 1883 à 1985, on pourra se reporter au chapitre 1, qui prend appui en partie sur le travail de Butlen (2007), qui montre comment les instructions officielles ont évolué, d'un accent mis sur le travail de mémorisation et de recherche d'automatisme jusqu'à 1970 à un point de vue constructiviste sur l'élaboration de procédures personnelles, de formulations collectives et de confrontations adaptées, en passant par la période 1970-1980 où la place accordée au calcul mental fut très réduite.

Ensuite, si les programmes de 1991 de l'école primaire – qui font suite à la loi d'orientation de 1989 – n'apportent rien de nouveau en calcul mental par rapport aux programmes de 1985 qui mettaient l'accent sur la résolution de problèmes, les programmes de 2002 promeuvent explicitement l'enseignement du calcul mental et reprennent des principes déclinés dans le rapport de la CREM sur le calcul (2001). L'introduction des programmes cycle 2 commence ainsi :

« La connaissance des nombres et le calcul constituent les objectifs prioritaires du CP et du CE1. Les automatismes en calcul s'acquièrent aussi tôt que possible, en particulier la première maîtrise des opérations qui est nécessaire pour la résolution de problèmes. La pratique régulière du calcul mental est indispensable à l'acquisition de ces automatismes. »

Et on trouve juste après, dans la partie Nombres et calcul :

« L'entraînement quotidien au calcul mental permet une connaissance plus approfondie des nombres et une familiarisation avec leurs propriétés. »

On voit bien à travers ces deux extraits le double enjeu que les programmes accordent au calcul mental : fin en soi pour l'acquisition d'automatismes, elle-même justifiée par la place qu'elle occupe dans la résolution de problèmes, et moyen d'accéder à la connaissance des nombres et de leurs propriétés.

Les programmes du cycle 3 sont dans la continuité de ceux du cycle 2 :

« L'entraînement quotidien au calcul mental portant sur les quatre opérations permet une appropriation des nombres et de leurs propriétés. »

De plus, un document d'accompagnement de 22 pages est exclusivement consacré au calcul mental¹⁶⁴. Comme il se présente lui-même, « ce document a pour objet de préciser la place et le rôle du calcul mental dans l'apprentissage du calcul à l'école élémentaire et de fournir des indications relatives à son enseignement, pour les cycles 2 et 3. » Il souligne l'importance de faire vivre en classe à la fois un calcul automatisé et un calcul réfléchi, fournit des exemples de contenus et de déroulements (notamment des jeux et des supports possibles), de procédures d'élèves, et propose une programmation pour les deux cycles.

Ce document, comme les autres documents d'accompagnement des programmes 2002, fut alors assez vivement critiqué comme trop difficile d'accès pour les enseignants, trop « didactique ». Nous pensons qu'il n'en constitue pas moins une ressource importante pour des professeurs débutants ou des formateurs.

¹⁶⁴ Ce document a été élaboré par la Commission mathématique rattachée au Groupe d'experts pour les programmes de l'école primaire, avec la contribution de François Boule, professeur de mathématiques, formateur au C.N.E.F.E.I. Cette commission pilotée par Roland Charnay est composée de Luce Dossat, Catherine Houdement, Nicole Matulik et de Jean Fromentin, Guy Pigot et Paul Planchette.

A. Le calcul mental dans les programmes scolaires 2008 de l'école primaire

Les programmes 2008 de l'école primaire sont donc ceux qui étaient en vigueur à la fin de la scolarité primaire des élèves de 6^e testés dans le dispositif PACEM¹⁶⁵. Comme ceux de 2002, ils font une référence explicite au calcul mental en introduction des programmes de mathématiques du cycle 2 (CP-CE1) dans un cadre plus large qui met l'accent sur la connaissance des nombres et le calcul :

« L'apprentissage des mathématiques développe l'imagination, la rigueur et la précision ainsi que le goût du raisonnement. »

*La connaissance des nombres et le calcul constituent les objectifs prioritaires du CP et du CE1. La résolution de problèmes fait l'objet d'un apprentissage progressif et contribue à construire le sens des opérations. **Conjointement une pratique régulière du calcul mental est indispensable.** »*

Cette mention est complétée par deux précisions, l'une sur « l'installation » d'automatismes, idée qui veut probablement faire écho à la notion de progressivité évoquée pour la résolution de problèmes, l'autre sur une association que nous interprétons comme celle d'un entraînement à des techniques opératoires et d'une compréhension des mécanismes mis en jeu dans l'application de ces techniques :

« De premiers automatismes s'installent. L'acquisition des mécanismes en mathématiques est toujours associée à une intelligence de leur signification. »

Cependant, le paragraphe consacré au domaine « Nombres et calcul », même s'il mentionne un entraînement quotidien au calcul mental, atténue fortement les objectifs ci-

¹⁶⁵ Visant une prise en compte du tout récent socle commun de connaissances et de compétences, des programmes transitoires furent publiés en 2007, et stipulaient que « le calcul mental doit faire l'objet d'une pratique quotidienne d'au moins 15 minutes. »

dessus en mettant l'accent sur la mémorisation, et l'apprentissage d'algorithmes, sans illustrer le recours à « une intelligence du calcul. »

« 1 - Nombres et calcul

Les élèves apprennent la numération décimale inférieure à 1 000. Ils dénombrent des collections, connaissent la suite des nombres, comparent et rangent.

Ils mémorisent et utilisent les tables d'addition et de multiplication (par 2, 3, 4 et 5), ils apprennent les techniques opératoires de l'addition et de la soustraction, celle de la multiplication et apprennent à résoudre des problèmes faisant intervenir ces opérations.

Les problèmes de groupements et de partage permettent une première approche de la division pour des nombres inférieurs à 100.

L'entraînement quotidien au calcul mental permet une connaissance plus approfondie des nombres et une familiarisation avec leurs propriétés. »

Cette dernière phrase, reprise à l'identique du programme 2002, affirme clairement le rôle du calcul mental comme élément constitutif de la construction des connaissances numériques et non pas seulement comme objectif d'apprentissage en lui-même.

Or, il faut rappeler que les programmes 2008 de l'école primaire avaient été présentés par l'institution avec des changements marqués par rapport à ceux de 2002. L'une était d'afficher ces programmes comme « plus courts, plus simples et plus précis » que les précédents, l'autre était de mettre « fortement l'accent sur les apprentissages fondamentaux », et en particulier d'affirmer la nécessité de « l'exercice de mémorisation ».

« (...) Il en va de même en mathématiques, puisque les programmes prévoient le renforcement des techniques opératoires. Là où l'on se contentait par exemple d'aborder véritablement la multiplication à partir du CE2, et pas totalement la division, par exemple pour des nombres décimaux, les élèves devront maîtriser parfaitement les quatre opérations avant d'entrer au collège et savoir pratiquer une règle de trois. La pratique quotidienne du

calcul mental sera encouragée pour permettre aux élèves d'acquérir très tôt les automatismes nécessaires pour ne pas se tromper dans leurs calculs¹⁶⁶. »

Il apparaît donc *a posteriori* que la promotion de ces programmes dépasse leurs contenus, ou en tout cas que leurs objectifs soient déformés, ce qui a pu créer une certaine confusion pour les enseignants sur la compréhension de ces programmes, et donc sur les choix et les priorités qu'ils avaient à effectuer dans leurs pratiques professionnelles.

Des repères annuels destinés à organiser la progressivité des apprentissages complètent ces programmes, mais les indications qu'ils fournissent sur le travail à mener en calcul mental sont très réduits : en CP, il s'agit de « Calculer mentalement des sommes et des différences », et au CE1 de « Connaître et utiliser des procédures de calcul mental pour calculer des sommes, des différences et des produits. »

Un document plus détaillé, « Le nombre au cycle 2 », est publié en juillet 2010 afin d'aider les enseignants dans la mise en œuvre des programmes. On trouve notamment dans ce document toute une partie consacrée à la dialectique entre sens et technique, à travers l'exemple du calcul mental, rédigée par Butlen et Masselot, qui rappellent à cette occasion la nécessité d'un minimum de prérequis sur les décompositions des nombres que doivent posséder les élèves pour observer des effets bénéfiques d'une pratique quotidienne du calcul mental.

On retrouve une introduction très proche de celle du cycle 2 pour les programmes du cycle 3 (CE2 – CM1 – CM2) :

« La pratique des mathématiques développe le goût de la recherche et du raisonnement, l'imagination et les capacités d'abstraction, la rigueur et la précision.

¹⁶⁶ Discours de présentation des programmes de l'école primaire par le ministre de l'éducation nationale alors en fonction X. Darcos (22/02/2008)

Du CE2 au CM2, dans les quatre domaines du programme, l'élève enrichit ses connaissances, acquiert de nouveaux outils, et continue d'apprendre à résoudre des problèmes. Il renforce ses compétences en calcul mental. Il acquiert de nouveaux automatismes. L'acquisition des mécanismes en mathématiques est toujours associée à une intelligence de leur signification.

La maîtrise des principaux éléments mathématiques aide à agir dans la vie quotidienne et prépare la poursuite d'études au collège. »

Cet extrait montre à la fois la volonté des rédacteurs des programmes d'écrire un texte court, et la difficulté et la latitude pour leurs lecteurs – les enseignants – de les comprendre. Comment concilier en effet *a priori* le goût de la recherche, l'imagination et l'acquisition d'automatismes ? La capacité d'abstraction et acquisition d'outils pur agir dans la vie quotidienne ? De quels principaux éléments mathématiques est-il nécessaire d'assurer la maîtrise pour préparer la poursuite d'études au collège ? Quel temps consacrer au développement de ces connaissances, capacités ou attitudes ?

Mais, dans la partie « Nombres et calcul », la place accordée au calcul mental reste très laconique.

« Le calcul :

- **mental** : tables d'addition et de multiplication. L'entraînement quotidien au calcul mental portant sur les quatre opérations favorise une appropriation des nombres et de leurs propriétés. »

La désignation orale des nombres entiers naturels et des nombres décimaux est également mentionnée, sans autre explication.

Les indications complémentaires sur les progressions annuelles sont tout aussi prescriptives qu'au cycle 2 sans fournir des éléments plus précis pour les enseignants. Au CE2 :

- « - Mémoriser et mobiliser les résultats des tables d'addition et de multiplication.
- Calculer mentalement des sommes, des différences, des produits.

Au CM1 :

- Consolider les connaissances et capacités en calcul mental sur les nombres entiers.

- Multiplier mentalement un nombre entier ou décimal par 10, 100, 1 000.
- Estimer mentalement un ordre de grandeur du résultat. »

Au CM2 :

« - Consolider les connaissances et capacités en calcul mental sur les nombres entiers et décimaux.

- Diviser un nombre entier ou décimal par 10, 100, 1 000. »

En continuité avec le document publié pour le cycle 2, le document « Le nombre au cycle 3 : apprentissages numériques » paru en septembre 2012 vise à poursuivre le travail d'explication des questions numériques étudiées à l'école primaire. Butlen et Masselot y ont rédigé un texte sur le calcul mental dans la continuité de celui écrit pour le cycle 2. Notons que ce texte ne traite que très peu des nombres décimaux.

B. Le calcul mental dans les programmes scolaires 2008 du collège

Comme nous l'avons évoqué dans le chapitre 1, les programmes 2008 du collège ont été écrits dans une perspective d'articulation avec la mise en œuvre du socle commun de connaissances et de compétences¹⁶⁷. Ils s'inspirent néanmoins largement dans leur présentation et leurs contenus des programmes 2005 et 2007. Nous rappelons brièvement qu'à chaque niveau scolaire, correspond une introduction générale, puis pour chacun des quatre domaines – Organisation et gestion de données, fonctions ; Nombres et calcul ; Géométrie ; Grandeurs et mesures – une introduction spécifique suivie d'un tableau de trois colonnes dans lequel sont mentionnées les connaissances et les capacités relatives au niveau traité, accompagnées de commentaires. Chaque tableau est lui-même introduit par un « bandeau¹⁶⁸ » axé sur la résolution de problèmes qui met en avant les principaux objectifs du domaine correspondant. Les points du programme qui ne relèvent pas du socle commun sont écrits en

¹⁶⁷ Le socle commun de connaissances et de compétences, inscrit dans l'article 9 de la loi du 23 avril 2005, est actuellement le cadre de référence de la scolarité obligatoire en France. Son contenu a été précisé dans un décret du 11 juillet 2006.

¹⁶⁸ Quelques lignes orientant l'enseignement pour un domaine donné.

italiques, ceux qui en relèvent dans une année postérieure à celle où ils figurent pour la première fois dans les programmes sont écrits en italiques, et précédés d'un astérisque. Les programmes annuels sont précédés d'une introduction commune aux trois disciplines de la compétence 3 du socle commun – les mathématiques, les sciences expérimentales et la technologie – et d'un préambule pour les mathématiques.

On trouve une première mention du calcul mental dans l'introduction générale, dans la continuité des programmes de l'école primaire:

« L'apprentissage des techniques opératoires est évidemment indissociable de l'étude des nombres. Il s'appuie sur la mémorisation des tables, indispensable tant au calcul mental qu'au calcul posé par écrit. »

Ces deux phrases, tout autant que leur juxtaposition, nous semblent encore une fois très ambiguës pour les utilisateurs que sont les enseignants. En effet, si la deuxième ne semble pas poser de difficulté particulière d'interprétation, il n'en est pas de même pour la première, beaucoup plus ambitieuse, en cela qu'elle reprend implicitement la notion d'intelligence du calcul et définit tout aussi implicitement des orientations de l'enseignement du calcul. Là encore, on peut imaginer des variations très importantes en termes de choix didactiques et de pratiques de classes.

Une deuxième mention figure dans l'organisation des contenus décrite dans le préambule ; en ce qui concerne la partie Nombres et calcul, la continuité avec les programmes de l'école primaire est affirmée une nouvelle fois du côté de l'acquisition d'apprentissages spécifiques ; il s'agit en effet de « poursuivre l'apprentissage du calcul sous toutes ses formes : mental, posé, instrumenté. »

On peut lire ensuite dans l'introduction de la partie « Nombres et calcul » du programme de sixième :

« Les travaux numériques prennent appui sur la pratique du calcul exact ou approché sous ses différentes formes, souvent utilisées en interaction : calcul mental, calcul à la main ou instrumenté. À la suite de l'école primaire, le collège doit, en particulier, permettre aux

élèves d'entretenir et de développer leurs compétences¹⁶⁹ en calcul mental notamment pour la perception des ordres de grandeur. »

Cet entretien et ce développement des « compétences » en calcul mental se retrouvent dans le bandeau du tableau :

« **La résolution de problèmes** a pour objectifs :

- de consolider le sens des opérations, de développer le calcul mental, le calcul à la main et l'utilisation raisonnée des calculatrices, de conforter et d'étendre la connaissance des nombres décimaux,

- de mettre en place une nouvelle signification de l'écriture fractionnaire comme quotient de deux entiers,

- de savoir choisir l'écriture appropriée d'un nombre suivant la situation,

- de percevoir l'ordre de grandeur d'un nombre. »

Nous voyons combien non seulement le premier point mais aussi les trois autres sont directement liés au calcul mental, dans l'acception que nous avons retenue.

La référence au calcul mental apparaît ensuite plusieurs fois le programme de sixième :

- en commentaires : « La maîtrise des tables est consolidée par une pratique régulière du calcul mental sur des entiers et des décimaux simples. »

¹⁶⁹ On peut s'interroger sur l'utilisation du terme « compétences » dans cette phrase.

- comme capacité : « Savoir effectuer ces opérations sous les diverses formes de calcul : mental, à la main ou instrumenté », accompagnée de ce commentaire très fort dans l'objectif indiqué et sur ce qu'il implique pour les pratiques des enseignants : « La capacité à calculer mentalement est une priorité et fait l'objet d'activités régulières. La maîtrise des différents moyens de calcul doit devenir suffisante pour ne pas faire obstacle à la résolution de problèmes. »

Pour chacun des trois autres niveaux du collège, l'entretien et l'enrichissement de la pratique du calcul mental revient systématiquement aux côtés du calcul écrit et de l'utilisation de la calculatrice dans le bandeau introductif au programme.

Les programmes du collège sont complétés par des « documents ressources » thématiques verticaux (allant de la 6^e à la 3^e). L'un d'entre eux, consacré au calcul numérique, cite en préambule un extrait du rapport de la CREM :

« Dans la culture, les deux termes, calcul mathématique et raisonnement apparaissent comme antagonistes. Le calcul est opposé au raisonnement tant dans les démarches de pensée qu'il met en œuvre que dans les formes d'apprentissage qu'il requiert. Le calcul renvoie à une activité mécanique, automatisable, sans intelligence, il est réduit à sa part mécanisée. Son apprentissage renvoie à l'idée d'entraînement purement répétitif. En bref, le calcul est perçu comme renvoyant aux basses œuvres du travail mathématique, tandis que sa partie noble, celle liée au raisonnement, est plutôt associée à la résolution de problèmes géométriques. Cette image, ancrée dans la culture, est aussi portée par l'enseignement. »

Le document distingue ensuite – sans les opposer – trois types de calcul (mental, écrit et instrumenté) et consacre une partie à chacun d'entre eux. Dans la partie spécifiquement réservée au calcul mental, différents arguments sur la nécessité et les avantages de posséder une bonne maîtrise du calcul mental y sont développés : pour calculer un résultat ou en donner un ordre de grandeur selon les cas sans calculatrice, pour mémoriser les « tables », pour contrôler un résultat – avec cette mention : « actuellement, le développement de ces compétences est trop souvent laissé à la seule charge des élèves, alors que, en ce domaine, l'expérience et l'entraînement jouent un rôle fondamental » –, pour élaborer des stratégies personnelles mettant en jeu l'initiative et le raisonnement, pour effectuer des tâches

numériques reposant sur une familiarité avec les nombres (traitement de la proportionnalité ou calculs en écriture fractionnaire), dans les processus de conceptualisation et dans la résolution de problèmes numériques. Nous ne pouvons que rapprocher ces arguments des conclusions des travaux de recherche menés par Butlen et Pézard cités plus haut. Le document ressource délivre ensuite trois recommandations à l'adresse des enseignants : entretenir la mémorisation des faits numériques de l'école primaire et la développer, viser une diversification des stratégies dans la perspective d'une familiarisation avec les nombres et leurs propriétés, accorder une attention particulière à l'estimation d'un ordre de grandeur. Le document se termine par des éléments d'aide pour une programmation en calcul mental sur l'ensemble du collège.

Un autre document ressource pour l'enseignement des mathématiques au collège est celui qui est consacré au socle commun, et plus particulièrement à l'acquisition du palier 3. Ce document « **a pour ambition de montrer, à la fois par des indications générales et par des exemples, comment l'enseignant de mathématiques peut gérer, en termes de formation et en termes d'évaluation, cette double exigence de l'acquisition du socle par tous les élèves et de l'avancement dans le programme.** »

Les références au calcul mental y sont très nombreuses et très explicites. Le premier extrait que nous citons nous semble important à double titre : d'abord, parce qu'elle affirme le lien entre le calcul mental (nommé ici le calcul réfléchi par rapport à la récitation de faits numériques) et le raisonnement ; ensuite parce qu'elle affirme la place privilégiée du calcul mental par rapport au calcul posé.

« Un calcul réfléchi peut être l'occasion d'un véritable raisonnement.

Par exemple, dès la sixième, un élève qui doit calculer mentalement le produit $4 \times 1,75$ peut¹⁷⁰ :

¹⁷⁰ Nous comprenons en lisant les lignes qui suivent qu'il s'agit de 4 fois 1,75.

- avoir une vision globale de 1,75 sous la forme 1 unité et 3 quarts d'unité, utiliser en acte la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, transformer 12 quarts d'unité en cherchant, puisqu'il sait que 4 quarts d'unité font une unité, le nombre de fois 4 dans 12 et finir en ajoutant 4 unités et 3 unités.
- avoir une vision globale de 1,75 sous la forme 2 unités moins 1 quart d'unité, utiliser en acte la distributivité de la multiplication par rapport à la soustraction puis la vision fraction (4 quarts d'unité font une unité) et finir en soustrayant 1 unité à 8 unités.
- choisir d'effectuer deux multiplications successives par 2 en faisant jouer en acte la commutativité de la multiplication. Dans tous les cas, l'intelligence du calcul est montrée. Dans ce contexte, en donnant le résultat puis en exprimant son raisonnement à l'oral, l'élève peut montrer, sans passage à l'écrit, qu'il a identifié le problème et a élaboré une stratégie pour le résoudre : le contrat est parfaitement rempli.

Outre le fait qu'un calcul réfléchi est pour tout élève une excellente occasion de raisonner, **maîtriser la culture mathématique nécessaire au citoyen impose de façon très prioritaire la maîtrise du sens des opérations et du calcul** (réfléchi c'est-à-dire calcul mental automatisé ou non ou bien instrumenté avec calculatrice ou tableur).

L'aptitude au croisement des différentes techniques de calcul, en particulier pour l'évaluation d'ordres de grandeurs, est essentielle dans la vie courante. Mais contrairement à l'attendu du citoyen de la société des années avant 1970, **la priorité n'est plus la maîtrise du calcul posé.** »

Le deuxième extrait est en relation avec l'organisation de l'enseignement : un « entraînement au quotidien, à petites touches » est préconisé comme exemple de manifestation d'une « progression en spirale » :

« Une préconisation forte consiste à proposer, lors de toute séance, un temps consacré à des activités rapides. Une telle pratique permet de traiter certaines notions dans la durée (sans y consacrer au total plus de temps) ce qui facilite aussi une mobilisation fréquente de ces notions. »

C'est aussi la première fois à notre connaissance qu'un document officiel incite les enseignants à mener ce qui est appelé des « activités rapides », qui incluent des tâches de calcul mental, indépendamment de la suite de la séance : une application concrète est proposée avec l'addition des nombres relatifs en 5^e. Nous relevons dans ce document deux autres points, en relation indirecte avec notre sujet : l'institutionnalisation, qui arrivant trop tôt pour certains élèves, réduit l'activité mathématique à l'application d'une recette, et que le document suggère d'en différer la place, et le principe du « fil rouge » pour quelques concepts importants. Sur ces deux points, c'est également la première fois à notre connaissance qu'un document officiel ouvre autant des possibilités de faire évoluer à la fois la conception d'une séquence et la progression classique d'un enseignement par chapitres. Nous les intégrerons d'ailleurs dans notre formation en cherchant à expliciter comment une intégration du calcul mental dans l'enseignement du calcul nous paraît d'une part compatible avec ces préconisations, d'autre part pouvoir jouer un rôle efficace dans les apprentissages.

Nous terminons en citant un dernier document ressource consacré au « calcul sous toutes ses formes au collège et au lycée », paru en février 2013, qui interroge « aujourd'hui sur ce que peut être, sur ce que doit être, l'enseignement du calcul au collège et au lycée, à la fois dans ses contenus et dans ses formes, compte tenu des besoins culturels, scientifiques et sociaux auxquels il doit répondre. » Ce document reprend un certain nombre d'idées fortes du rapport d'étape sur le calcul de la CREM, notamment sur les liens entre calcul et raisonnement, et marque de façon affirmée un rôle nouveau du calcul mental dans la progressivité des apprentissages.

IV. La mise en œuvre de séances de calcul mental : nos partis pris pour la classe et dans la formation PACEM

Dans cette dernière partie du chapitre, que nous compléterons par des exemples, nous avons donc à notre disposition des éléments de réflexion qui proviennent de trois sources différentes. Nous avons évoqué la première dans le chapitre 2, de nature pragmatique, qui s'est constituée au fil de notre expérience d'enseignant et de formateur. La deuxième est théorique, composée des résultats des travaux de recherche que nous connaissons, parmi lesquels nous avons exposé ceux qui sont en lien avec notre sujet et qui nous ont paru les plus significatifs. Nous qualifions la troisième d'institutionnelle, issue d'une part de notre lecture et de notre analyse des curricula, d'autre part de notre connaissance et de notre analyse des évaluations nationales et internationales réalisées depuis 20 ans. Ainsi, nous nous trouvons en quelque sorte au carrefour de savoirs de différentes natures, fondés eux-mêmes sur différentes composantes – didactique, épistémologique, sociologique, ergonomique, psychologique – qui exigent de notre part la plus grande rigueur en tant que chercheur. En effet, il s'agit pour nous désormais de définir ce que nous aurions envie de « faire passer » aux enseignants au cours d'une formation sur l'intégration du calcul mental dans leurs pratiques, ce que nous estimons possible de faire. Mais il s'agit aussi de préciser ce qu'implique cette intégration en termes d'avantages sur les apprentissages des élèves – et donc pour nous ce qu'elle implique sur l'exercice du métier d'enseignant– en explorant au maximum l'influence de variables diverses. Il s'agit enfin de prendre en considération des conditions favorables à la diffusion de ces éléments auprès des collègues des enseignants formés.

Nous nous proposons donc maintenant d'énoncer nos partis pris sur le calcul mental, en termes de pratiques enseignantes potentiellement porteuses de facteurs favorables pour l'apprentissage des élèves. Les objectifs d'apprentissage concernent des connaissances et des habiletés en calcul mental, vu comme fin mais surtout comme moyen au sens où nous l'avons défini. Ces connaissances et ces habiletés portent sur des calculs exécutés mentalement, mais aussi sur la numération, sur le calcul écrit et sur la résolution de problèmes numériques, voire d'autres domaines des programmes, comme les grandeurs ou l'organisation et la gestion de données.

La posture globale que nous adoptons et que nous nous proposons de mettre à l'épreuve dans notre démarche est la suivante : organiser l'enseignement des contenus numériques visés au collège à partir du calcul mental aujourd'hui est un facteur déterminant de l'amélioration des acquis des élèves et répond – partiellement – à une adaptation nécessaire de l'enseignement actuel des mathématiques. Nous rejoignons en ce sens ces propos d'Askew et al. (2004) en les jugeant particulièrement adaptés au calcul mental : « *It is our opinion that it is possible; the framework, and the research it claims to draw on, would suggest that the two things (the skill and the thinking) should be developed in tandem.* »

Ce qui suit reprend un certain nombre de résultats des travaux de recherche évoqués dans les paragraphes précédents, et comporte également des éléments empiriques nouveaux, fondés sur nos pratiques d'enseignant et de formateur, que nous avons soit adoptés avec nos élèves soit suggérés et travaillés avec des stagiaires, en formation initiale ou en formation continue. Nous avons présenté, de façon partielle et non ordonnée dans leur architecture globale, la plupart de ces éléments dans des documents ou articles antérieurs, ou encore dans des conférences que nous avons présentées. C'est l'ensemble de ces éléments, théoriques et pragmatiques, que nous avons tenté d'articuler dans notre recherche, puis de transposer pour les mettre en œuvre dans la formation des professeurs dans le cadre du projet PACEM, et que nous regroupons maintenant en trois thèmes majeurs.

A. Le calcul mental comme pratique régulière porteuse d'apprentissage

Une première série de questions se pose sur l'intérêt didactique global de la pratique du calcul mental : en quoi des tâches proposées en calcul mental aux élèves peuvent-elles favoriser chez eux des apprentissages ? Quelles tâches ? Quels apprentissages ? Et en quoi ces tâches favoriseraient-elles des apprentissages spécifiques chez les élèves par rapport à des tâches que l'enseignant leur proposerait de faire à l'écrit ? Quelle est la nature de ces apprentissages ?

Les réponses à ces questions sont largement développées dans la recherche comme nous l'avons montré plus haut, pour l'école primaire, et sur les nombres entiers.

Nous admettons donc que le calcul mental permet de participer largement à l'acquisition de connaissances mathématiques¹⁷¹, et qu'il permet de développer leur disponibilité tout au long du collège. « Pendant des années, l'apprentissage des opérations arithmétiques consistait à suivre les instructions de l'enseignant et à s'exercer jusqu'à ce qu'on arrive à une exécution rapide des calculs... Plus qu'un simple moyen d'obtenir un résultat, le calcul est de plus en plus perçu comme une fenêtre ouverte sur la structure profonde du système de numération. » (*National Research Council 2001*). Nous reprenons ainsi à notre compte un premier principe, que nous admettons en l'adaptant au collège, en cohérence d'ailleurs des principes énoncés dans le document ressource pour le collège sur le calcul numérique. Ce principe, qui fonde actuellement une partie des programmes français (et de beaucoup d'autres pays) se décline sous plusieurs aspects : le calcul mental, sous certaines réserves, de contenus, de déroulements, peut permettre aux élèves de mémoriser des faits numériques, il peut contribuer à la conceptualisation des nombres (écriture, ordre, changement de désignation) et de leurs propriétés, il peut autoriser des calculs simples (et rapides) avec des nombres de taille et de nature différentes, il peut faciliter des calculs à la main et permettre de déterminer des ordres de grandeur (anticiper et contrôler des résultats). Certains de ces apprentissages visés ne sont pas spécifiques du calcul mental, mais nous postulons qu'une pratique régulière et fréquente du calcul mental peut les favoriser. Cela passe par des exercices répétitifs qui contribuent à la création et à l'extension de répertoires personnels de résultats mémorisés et l'acquisition de savoir-faire automatisés, mais aussi par des tâches qui nécessitent de la part des élèves des adaptations, qui développent le sens de la recherche de spécificités des nombres et de l'anticipation, qui les incitent à privilégier (ou à éliminer) certaines stratégies, autant de dimensions qui caractérisent à la fois une connaissance d'une palette de procédures et leur application variable en fonction des nombres en jeu. En ce sens, le calcul mental favorise le raisonnement, et développe des habiletés qui sont des éléments constitutifs importants du « *number sense* » ou de « l'intelligence du calcul ».

¹⁷¹ Nous restreignons ici notre propos aux connaissances numériques, mais nous étendons notre hypothèse à d'autres domaines des programmes du collège.

Nous considérons que ce premier principe touche aussi la résolution de problèmes numériques, en la déclinant selon trois directions. Tout d'abord, une aisance en calcul mental peut permettre de libérer la pensée pour d'autres tâches : autrement dit, disposer de techniques calculatoires en lesquelles il a confiance permet à un élève de s'engager plus facilement dans des démarches heuristiques. Mieux, le fait que certaines procédures soient automatisées, ou en tout au moins disponibles, favorise l'émergence de démarches et de solutions nouvelles. Ensuite, un jeu sur les variables numériques est sans doute un moyen facile à mettre en œuvre en calcul mental pour centrer l'activité de l'élève sur les structures opératoires à mobiliser lors de la résolution de problèmes : changement de « taille des nombres » entiers (« grands » ou « petits »), changement de nature des nombres (entiers, décimaux ou rationnels, positifs ou négatifs à partir de la classe de cinquième¹⁷², changement de désignation des nombres. Enfin, le calcul mental peut permettre de travailler spécifiquement certaines aptitudes comme la prise d'information ou de faire des liens entre différentes parties du programme : nombres et grandeurs, nombres et organisation de données.

Par ailleurs, la mise en place de moments de calcul mental en classe nécessite un contrat didactique particulier, et ce changement de la nature du contrat n'est sans doute pas neutre, et pourrait même se révéler positif au niveau des activités des élèves : « Des élèves, qui seraient peut-être bloqués dans un travail écrit habituel par la nécessité de produire une rédaction et une présentation rigoureuses, mettent en œuvre des procédures qui les font avancer dans la compréhension et la résolution du problème. Nous retrouvons ici un résultat déjà mis en évidence par R. Douady (cahier de DIDIREM n°19, IREM Paris 7) à propos du calcul mental : ces activités sont l'occasion pour le professeur de définir de nouveaux contrats. » (Butlen & Pézard, 2000)

En conclusion, nous adoptons comme premier parti pris, en référence aux travaux de recherches évoqués, que le calcul mental développe une compréhension structurale des nombres par opposition à une connaissance procédurale presque exclusivement fondée sur les

¹⁷²Le grade 7 en France.

chiffres, et qu'il intervient positivement dans le développement des capacités liées à la résolution de problèmes.

B. Le calcul mental comme précurseur de certains apprentissages

Un deuxième aspect de notre vision du calcul mental concerne sa place dans l'organisation de l'enseignement au niveau macro. La question ne porte pas seulement sur la manière selon laquelle les tâches de calcul mental peuvent être choisies et organisées les unes par rapport aux autres, autrement dit sur la conception d'une progression spécifique en calcul mental. Elle porte aussi et surtout sur la manière dont elles peuvent l'être par rapport à l'ensemble d'un programme scolaire, c'est-à-dire sur l'intégration du calcul mental dans une progression annuelle. Cette problématique passe par une répartition pensée entre différents types de tâches, à différents moments de l'apprentissage, avec des intentions didactiques diverses de la part de l'enseignant : un premier objectif pour un enseignant serait d'atteindre un équilibre entre des tâches favorisant la mémorisation par les élèves de faits numériques et d'autres qui leur permettent de développer des stratégies de calcul efficaces en fonction des nombres en jeu ; un deuxième serait de préparer des apprentissages ultérieurs.

Le calcul mental a comme avantage d'autoriser une fréquentation des nombres et des opérations qui peut ne pas être directement liée au contenu d'une séance. Sa pratique régulière peut donc définir des temps d'apprentissage différents de ceux d'une progression « classique ». Si l'objectif technique est sans doute le plus facile à atteindre *a priori* pour les enseignants – « *the largest part of all the lessons we saw was procedural.* » (Askew et al., 2004) –, nous prétendons qu'un enseignant peut organiser globalement son enseignement de façon alternative, dans la perspective d'offrir aux élèves des moments d'activités mentales, d'une manière la plus favorable possible à leurs apprentissages numériques, en dépassant des pratiques procédurales d'application immédiate ou d'entretien des notions étudiées. Cette alternative implique pour l'enseignant des choix pouvant considérablement modifier ses pratiques, avec au tout premier plan une organisation de la progression annuelle de son enseignement qui prend en compte des contenus qui seront plus particulièrement, voire presque exclusivement travaillés avec les élèves lors de phases de calcul mental. Elle implique aussi pour lui d'analyser en quoi avoir recours au calcul mental en amont de l'étude d'une notion, d'un « chapitre », est possible et peut être utile pour les élèves. Comme nous

l'avons évoqué au chapitre 2, le calcul mental contribuerait ainsi à la conceptualisation en étant producteur d'objets et de procédures-en-actes qui, en devenant familiers aux élèves, se substitueraient aux concepts quotidiens comme ferments de développement des concepts scientifiques.

Cette conception de l'enseignement ne s'envisage pas dans une vision exclusive, elle va de pair avec des moments destinés à des exercices d'application et des situations de recherche à l'écrit, mais nous suggérons qu'elle serait tout à fait pertinente pour le choix du moment d'institutionnalisation le plus adapté à la classe, parce qu'elle prend en compte les étapes intermédiaires de conceptualisation « à l'envers », c'est-à-dire au fur et à mesure que les concepts se construisent. Nous proposons donc ici que l'enseignant prenne en compte « des représentations mentales intermédiaires entre l'action et la formulation » (Perrin-Glorian 1994) comme alternative à la stratégie situation d'introduction/institutionnalisation/exercices d'application en vue de favoriser la pérennisation des connaissances et la possibilité de leur réinvestissement. Cette conception, qui correspond dans la réalité à un enseignement « à l'envers », nous semble particulièrement bien adaptable à la construction d'une progression en spirale, avec des mises en relation du nouveau dans l'ancien, pour le renforcer ou au contraire le remettre en question, mais aussi avec des niveaux de formalisation et des niveaux de mise en fonctionnement non déterminés *a priori* à un instant donné pour l'ensemble des élèves de la classe¹⁷³. Elle permet enfin l'intégration de « fils rouges » comme la proportionnalité, et une répartition graduée des connaissances tout au long de l'année scolaire. Nous postulons que cette démarche d'enseignement, dans sa globalité, peut être à la fois productrice d'acquis plus nombreux et plus pérennes pour les élèves, et qu'elle permettrait de gagner du temps dans sa mise en œuvre effective. Nous reprenons ici et peut-être même nous dépassons des idées présentées par Askew et *al.* (2004) lors des recherches effectuées pour la BEAM Education dans le cadre de la « *National Numeracy Strategy* » : « *We made the concept of 'opportunity to learn' operational by examining both quantitative and qualitative aspects of the teaching of mental calculation.* »

¹⁷³ On peut donner comme exemple le travail sur les pourcentages.

Nous adoptons donc à ce stade un deuxième parti pris, énoncé sous la forme d'un principe général pour un enseignant au niveau de la conception d'une progression annuelle : l'intégration du calcul mental dans une progression, en créant des occasions fréquentes et graduelles d'apprentissage par imprégnation peut offrir aux élèves des conditions favorables d'acquisition de connaissances qu'ils s'approprieraient plus difficilement, voire ne s'approprieraient pas du tout¹⁷⁴, autrement.

C. Le calcul mental comme facteur d'installation d'un climat de classe favorable aux apprentissages

Le troisième thème associe des modalités de déroulement avec des effets potentiels, et touche à ce que nous appelons un « bon » climat de la classe, c'est-à-dire une ambiance de classe que nous jugeons favorable à l'enseignement et aux apprentissages. A côté des aspects énoncés dans les deux sections précédentes, nous présentons ici des avantages que peut présenter la pratique du calcul mental avec des élèves en termes de gestion de classe.

1. Le calcul mental comme facteur d'installation d'un « bon » climat de la classe

Le premier de ces avantages peut s'énoncer de la façon suivante : le calcul mental peut permettre de créer une gestion dynamique de la classe, voire de participer à l'installation de la « paix scolaire¹⁷⁵ » dans la classe. Autrement dit, nous considérons que commencer une séance de mathématiques par une phase de calcul mental permet de scénariser un rituel d'entrée en classe, de mettre en place des routines qui favorisent l'installation des élèves dans la classe, et « sécurisent » les premières minutes d'une séance tout en facilitant la mise en activité des élèves, de tous les élèves, sous réserve d'un choix adapté de tâches proposées. Cet

¹⁷⁴ Par exemple, la signification d'un quotient.

¹⁷⁵ Nous reprenons ici la définition de Butlen et al (2011) comme le couple « paix sociale » et « adhésion au projet d'enseignement du professeur ».

aspect est loin d'être négligeable dans l'exercice quotidien du métier d'enseignant, en particulier chez les jeunes enseignants, en leur offrant une alternative à la position du « Je ne commence pas à faire cours avant d'avoir le silence ». C'est ici l'activité des élèves qui crée les bonnes conditions de déroulement du début de la séance, et non l'inverse, en installant, au moins provisoirement, une forme de « paix scolaire ». Il n'y a sans doute pas de séance-type de calcul mental, mais nous en donnons néanmoins quelques caractéristiques que nous pensons réalistes – au sens où nous estimons que des enseignants de collège peuvent se les approprier assez facilement –, et dont l'explicitation constituera un élément de la formation donnée aux enseignants dans le dispositif.

Une phase de calcul mental est courte en général (entre 5 et 10 minutes), elle contient des exercices faciles, c'est-à-dire accessibles à tous les élèves et éventuellement d'autres moins faciles, où les stratégies peuvent être nombreuses. Différentes modalités sont possibles, qui varient en fonction de la classe, du niveau des élèves, du moment dans l'année, de l'objectif de l'enseignant. Elles portent sur la manière dont la tâche est proposée aux élèves (oral, type de support, durée de proposition de la tâche, durée pour l'exécuter) et sur le contrat selon lequel l'élève peut effectuer les calculs : sans ou avec la possibilité d'écrire des résultats intermédiaires. On peut même envisager un déroulement en deux temps : individuel d'abord, puis en groupes avec confrontation des résultats obtenus.

Certaines mises en œuvre peuvent être fondées sur une scénarisation plus précise, selon que l'enseignant propose la même tâche à tous les élèves, ou choisit un mode plus dynamique comme par exemple dans le jeu « du furet » ou « de la chaîne ». Dans ce jeu, l'enseignant propose un nombre de départ et un pas de calcul afin de créer une suite numérique que les élèves complèteront à tour de rôle : par exemple en prenant comme nombre de départ 5 et comme pas de calcul « +7 », la suite à créer sera 12, 19, 26, 33, 40, etc.. Le pas peut être additif comme dans notre exemple ou soustractif – avec ou sans contrainte selon le niveau scolaire –, rarement multiplicatif, les nombres en jeu peuvent être entiers ou non. Les élèves peuvent avoir à répondre selon un ordre préétabli dans la classe ; l'enseignant peut aussi choisir de désigner lui-même les élèves, ce qui d'une part mobilise l'attention de tous à tout instant, d'autre part lui laisse la possibilité de choisir l'élève à qui il donne la parole selon la difficulté estimée du calcul à effectuer : la suite: ainsi, dans l'exemple ci-dessus, on peut estimer que le passage 26 à 33 est moins facile a priori que le passage de 33 à 40, et

assurément que celui de 40 à 47. Une autre option consiste à faire désigner par un élève celui qui devra répondre après lui.

Enfin, la vitesse d'exécution d'un calcul est un facteur sur lequel l'enseignant peut jouer. Si elle est un élément caractéristique d'une habileté certaine, elle peut également constituer un frein à l'activité de certains élèves qui se trouveraient en difficulté avec une contrainte forte imposée sur la durée pour effectuer un calcul. L'enseignant peut alors recourir à un support informatique individualisé en utilisant un logiciel qui propose aux élèves des durées variables pour répondre ; ce type de logiciel peut alors présenter le double avantage pour les uns d'avoir suffisamment de temps, et pour les autres de chercher à répondre le plus rapidement possible. Dans les deux cas, on peut supposer que cette option entre dans la motivation des élèves à accomplir les tâches proposées.

2. Le calcul mental comme facteur favorable aux interactions

Dans une deuxième phase, le calcul mental présente, du fait de ses modalités diverses mais spécifiques de mise en œuvre, des avantages en termes de prise d'informations par l'enseignant sur les activités des élèves, et d'exploitation de ces informations. Il lui permet d'abord d'avoir facilement, et rapidement, des renseignements sur les productions des élèves : directement à l'oral ; en circulant dans les rangs ou en ramassant les productions des élèves à l'écrit ; en observant les réponses et les temps de réponses enregistrés avec un logiciel. Selon le type de correction que l'enseignant choisit d'effectuer, il peut ensuite faire expliciter par les élèves leurs procédures et les comparer entre elles. C'est un moment opportun pour avoir accès aux conceptions et aux stratégies des élèves, correctes ou erronées. L'enseignant peut alors décider de laisser en l'état les différentes conceptions ou procédures verbalisées par les élèves, sans chercher à les modifier ni les hiérarchiser, ou au contraire les expliciter, les reformuler afin de les faire évoluer ou de privilégier certaines d'entre elles, voire faire émerger et institutionnaliser des conceptions correctes ou des procédures expertes. Cette phase est particulièrement favorable à la communication entre élèves et les amène à reconnaître qu'une même tâche peut être résolue de plusieurs façons. Nous suggérons d'ailleurs que cette phase collective de médiation entre pairs peut inciter les élèves à s'engager dans une démarche, sans qu'elle soit *a priori* authentifiée et validée par l'enseignant comme *la* bonne démarche.

Cette phase de communication peut aussi constituer une occasion propice pour rassurer les élèves, de leur montrer qu'ils progressent, c'est-à-dire de les faire constater qu'ils parviennent à faire quelque chose qu'ils ne parvenaient à faire quelques jours ou quelques semaines auparavant. Les élèves se construisent ainsi petit à petit une confiance minimale dans leurs capacités de calcul. C'est aussi cette confiance qui leur permettra, entre autres, une utilisation à bon escient de la calculatrice et la mise en place de procédés de test et de contrôle des résultats obtenus à l'écrit. De façon plus globale, nous soulignons que la conduite de ces phases de calcul mental par l'enseignant est susceptible d'avoir d'un impact variable sur l'activité des élèves, quant au positionnement qu'il adopte vis-à-vis d'eux, mais avec des marges de manœuvre individuelles importantes sur des critères plus précis comme le choix des tâches ou le temps laissé aux élèves pour les effectuer.

Enfin, et légèrement en marge de notre propos, nous suggérons que des tâches de calcul mental peuvent constituer des tâches propices à un travail à la maison, car facilement accessibles aux élèves (pas d'ambiguïté sur les consignes), validables (à la calculatrice) et partageables (avec un adulte, voire un autre élève).

En résumé, nous formulons comme dernier principe que l'ensemble des éléments évoqués dans cette section participe à la dynamique de la pratique d'un enseignant dans la classe, non seulement parce qu'ils offrent à la fois un moment dans une séance facile à mettre en œuvre et qu'ils peuvent modifier de façon positive les interactions enseignant/élèves et élèves/élèves, mais aussi parce qu'ils favorisent la relation à l'apprentissage des élèves en respectant leur hétérogénéité. Nous n'aurons pas les moyens de vérifier la validité de ce principe autrement que par les retours des enseignants puisque nous n'avons pas pris l'observation de classes comme entrée dans notre démarche, mais nous supposons que l'adoption effective de la mise en œuvre de tels moments d'enseignement, consacrés spécifiquement au calcul mental, aura un impact positif sur les résultats des élèves des classes dans lesquelles qui ils auront été expérimentés.

Ces trois principes, qui ont constitué les trois axes de la formation PACEM, questionnent les pratiques des enseignants chacune à leur façon et sans doute plutôt chacun sur un niveau donné – respectivement micro, local et macro –, même si on ne peut guère envisager qu'ils puissent s'opérationnaliser de façon strictement indépendante. Le premier

d'entre eux repose sur une sorte de culture de calcul mental de l'enseignant qui déplacerait le curseur des objectifs didactiques d'un procédural « isolé » vers du procédural disponible et du structural, et joue en particulier sur le choix des tâches. Le deuxième interroge une structure classique de progression pour orienter l'enseignant vers une organisation plus spiralée de son enseignement qui respecte différents degrés de conceptualisation en jouant sur des variations de formulation et des processus progressifs de formalisation. Quant au troisième, il joue davantage sur la conduite de la classe par l'enseignant, mais aussi sur l'organisation et la capitalisation des connaissances des élèves.

V. Exemples

Nous reprenons ici les principes énoncés ci-dessus, en les illustrant par quelques exemples que nous estimons significatifs, et que nous avons présentés au cours de la formation du projet PACEM. Nous précisons d'ailleurs que nous sommes souvent partis de ces exemples en formation, et que nous nous en sommes servis comme des exemples génériques sans expliciter la plupart du temps les éléments théoriques correspondants. Nous assumons pour cette raison dans cette dernière section un discours qui est davantage celui du formateur que celui du chercheur. Nous choisissons de présenter ces exemples sans en rédiger une analyse *a priori* complète, c'est-à-dire en restreignant notre présentation aux activités potentielles des élèves *a maxima* ; autrement dit, nous ne prétendons pas donner une liste exhaustive des procédures possibles pour les élèves, correctes ou erronées, mais nous nous limitons à celles d'entre elles qui correspondent selon nous à des connaissances ou des processus de conceptualisation pouvant être visés par les enseignants en classe de sixième. Enfin, nous ne traitons pas dans cette partie les modalités de mise en œuvre alors que, pour chaque tâche proposée, nous rappelons qu'elles peuvent être diverses, et que leurs spécificités interviennent dans l'activité des élèves.

Nous ne nous attardons pas sur le travail de mémorisation des faits numériques de base (tables d'addition, en particulier compléments à 10, et tables de multiplication) sur lequel nous n'avons d'ailleurs pas développé un discours particulier en formation, si ce n'est pour montrer ou rappeler au fil des tâches rencontrées son importance, sa nécessité, même, et sa diversité¹⁷⁶. Les exemples que nous présentons visent donc essentiellement à illustrer la fonction du calcul mental comme moyen potentiel de favoriser des apprentissages chez les élèves. Nous distinguons deux types d'exemples : d'abord ceux qui renvoient plutôt à notre premier parti pris, à savoir que le calcul mental peut développer une compréhension structurale des nombres et qu'il peut intervenir positivement dans le développement des

¹⁷⁶ Ainsi, la connaissance de $7 \times 8 = 56$ inclut la disponibilité de $8 \times 7 = 56$, $56 = 7 \times 8$, $56 : 8 = 7$ et $56 : 7 = 8$

capacités liées à la résolution de problèmes ; ensuite ceux qui renvoient plutôt à notre deuxième parti pris, à savoir que le calcul mental peut offrir aux élèves par « imprégnation » des conditions favorables d'appropriation de connaissances nouvelles. En revanche, nous ne développons pas davantage le dernier, qui est de nature différente.

A. La compréhension des nombres par le calcul mental

En favorisant les décompositions additives et multiplicatives qui structurent les relations entre les nombres, le calcul mental concourt plus globalement au développement du sens des nombres, qui inclut ce que nous avons appelé une familiarité avec les nombres. Cette familiarité est une notion qui a l'avantage pour nous d'associer la signification des nombres, d'ordre conceptuel, et la sensation des nombres, davantage liée à leur perception, visuelle ou auditive, qu'ils soient associés à une unité de grandeur ou non. Cette familiarité est particulièrement mobilisée dans un travail de numération orale. « La traduction chiffrée de quatre-vingt douze ne fait intervenir ni 4, ni 20, ni 12. C'est une première raison pour laquelle il n'est pas équivalent de proposer un calcul à faire mentalement sous la forme écrite $92 + 15 = ?$ et sous la forme orale quatre-vingt douze plus quinze. » Document d'accompagnement (2002) des programmes français de l'école primaire « Le calcul mental ».

Les procédures de calcul mental¹⁷⁷ sont différentes des algorithmes dits « standards », utilisés quand les opérations peuvent être posées. Par exemple, pour effectuer $73 - 27$, on peut effectuer $(73 - 20) - 7$, ou $(73 - 30) + 3$, ou encore $3 + 40 + 3$ (par complément) alors qu'un algorithme standard conduit à effectuer soit $(3 + 10 - 7) + (70 - (20 + 10))$ dans le cas d'une soustraction posée avec retenue, soit $(13 - 7) + (60 - 20)$ dans le cas d'une soustraction posée avec « échange d'une dizaine ». L'application des algorithmes masque d'ailleurs souvent les opérations réellement effectuées : les élèves travaillent alors davantage sur les chiffres que sur

¹⁷⁷ Nous éliminons ainsi les calculs mentaux correspondant directement à des calculs posés.

les nombres eux-mêmes¹⁷⁸. Ainsi, pour calculer mentalement $73 - 27$, la première étape de l'activité de l'élève – en tout cas celle qui est visée – ne consiste pas à se dire que « 3 est plus petit que 7 », mais à prendre de l'information sur les nombres en jeu pour déterminer quelle est la procédure la mieux adaptée. Des procédures spécifiques de calcul mental font donc appel à ce que sont les nombres 73 et 27, et non à leur écriture symbolique détachée de leur valeur sémantique. La pratique d'un travail de la gauche vers la droite, qui est, selon nous, bien plus qu'une astuce (*a tip*), est tout à fait caractéristique d'une réelle familiarité avec les nombres. On peut se dire par exemple que quand un élève « entend » les dizaines d'un nombre entier avant les unités, et qu'il se représente ce nombre « dans cet ordre », cela peut favoriser – ou déjà correspondre – à une représentation sur la droite numérique. Même si on ne sait pas tout sur le sujet, il est possible, comme nous l'avons évoqué plus haut, que ce travail de « la gauche vers la droite » constitue en quelque sorte un aspect conceptuel de l'apprentissage de la construction des nombres chez les jeunes enfants, qui prolonge et remet en question le processus « unités, puis groupements d'unités, puis groupements de dizaines, etc. », celui qui en particulier leur permettra d'accéder aux autres nombres que les nombres entiers.

Donnons quelques premiers exemples d'additions qui illustrent nos propos:

- avec des nombres entiers « petits », par exemple $45 + 29$. La procédure correspondant au calcul posé se fait sur les chiffres, de droite à gauche : « $5 + 9 = 14$, on retient 1 (dizaine), qu'on ajoute à $4 + 2$ ». Plusieurs procédures mentales sont possibles, mais contrairement à la précédente, elles vont plutôt faire fonctionner les dizaines avant de faire fonctionner les unités, autrement dit on traite plutôt en calcul mental le « grand » avant le « petit »:
 - $(40 + 20) + (5 + 9)$: la décomposition de la somme est la même que dans le calcul posé (report de la dizaine contenue dans 14 sur 60), mais le calcul effectué fait d'abord appel à la structure des nombres tels qu'on entend chacun

¹⁷⁸ Cette remarque vaut également très largement pour la multiplication, mais est nettement moins vraie pour la division.

d'entre eux – « quarante-cinq + vingt-neuf » –, puis à la reconstitution du résultat dans le système de numération décimal¹⁷⁹. L'exemple choisi ici offre la particularité supplémentaire de correspondre phonétiquement à la désignation orale du résultat (soixante-quatorze).

- $(45 + 20) + 9$: cette procédure est presque la plus naturelle puisqu'elle correspond pratiquement à ce que l'on entend (quarante-cinq plus vingt... neuf) en ne jouant sur la décomposition d'un seul des deux nombres¹⁸⁰; elle est très opérationnelle puisque le premier calcul $(45 + 20)$ ne fait intervenir qu'une addition sur les chiffres des dizaines ; nous sommes conscients que nous nous appuyons ici sur la disponibilité des tables d'addition, et que des élèves peuvent effectuer $65 + 5 + 4$; on peut aussi imaginer que des élèves choisissent de commencer par le deuxième terme en effectuant $(29 + 40) + 5$, cette procédure paraissant d'ailleurs plus justifiée pour un calcul du type $15 + 79$ par exemple.
- $(40 + 30) - 1$: l'exemple de $45 + 29$ est caractéristique d'une activité mentale sur les nombres ; 29 n'est plus ici vu comme deux dizaines et 9 unités, mais comme 3 dizaines moins une unité.
- avec des « grands nombres entiers » : $3\ 600 + 1\ 400$ s'effectue en colonnes comme n'importe quelle somme de deux nombres entiers à 4 chiffres, avec une particularité sur les deux premières sommes partielles ; oralement, « trois mille six cents plus mille quatre cents » est davantage traité comme la somme de quatre mille (trois mille plus mille) et de mille (six cents plus quatre cents) ; à la lecture, la somme $3\ 600 + 1\ 400$ peut être vue, selon le degré d'explicitation recherché, soit comme $(36 + 14)$ centaines, soit comme « 50 suivi de deux zéros ».
- avec des nombres décimaux : toutes les procédures rencontrées sur les nombres entiers peuvent être réinvesties sous réserve de la disponibilité de la définition d'un dixième,

¹⁷⁹ On reconnaît ici la procédure appelée *Split* par Beishuizen.

¹⁸⁰ C'est la méthode dite *Complete* de Beishuizen, dont Foxman a établi l'efficacité et la fréquence d'utilisation croissantes avec le niveau des élèves.

d'un centième, etc. *A contrario*, nous supposons que le calcul mental permet d'accéder à cette disponibilité et la développe (nous reprendrons cette idée ci-dessous avec des exemples sur les changements de registre). Par exemple, la somme de 4,5 et de 2,9 peut faire appel à des procédures tout à fait « parallèles » à celles utilisées pour la somme de 45 et de 29. Le travail de gauche à droite, « du plus grand vers le plus petit » est d'ailleurs encore plus adapté avec les nombres décimaux écrit sous forme décimale car l'alignement par la droite, fondement du calcul posé sur les nombres entiers, devient caduc avec des nombres décimaux ; ainsi des sommes successives de la gauche vers la droite permettent facilement d'effectuer $2,4 + 3,21$. Cette procédure présente l'avantage de « désamorcer » la tentation d'additionner $4 + 21$, en s'appuyant sur la valeur des chiffres des parties décimales. Les nombres choisis sont ici de « beaux exemples » de variables didactiques : en effet, $23,5 + 4,1$ ne provoque pas la même activité des élèves que $28,1 + 5,9$ ou encore que $53,71 + 9,99$. Enfin, nous n'oublions pas l'activité que nous estimons presque consubstantielle à l'exécution proprement dite d'un calcul qui est celle d'anticipation ou de contrôle du résultat par estimation d'un ordre de grandeur : pour chacun des calculs énoncés dans ce paragraphe, il est clair qu'estimer un ordre de grandeur du résultat, c'est en réalité amorcer le calcul, par une activité sur les nombres (entiers) que cela induit.

Les exemples de produits ou de quotients à effectuer mentalement sont eux aussi potentiellement producteurs d'activités spécifiques pour les élèves :

- 32×25 : un calcul mental de ce type¹⁸¹ oblige quasiment à travailler sur les nombres, puisque même l'algorithme standard exécuté mentalement s'appuie davantage sur l'utilisation implicite de la distributivité de la multiplication sur l'addition que lors d'un calcul écrit qui masque la propriété; un élève peut donc effectuer $30 \times 25 + 2 \times 25$ ou $32 \times 20 + 32 \times 5$, deux procédures cependant coûteuses pour la mémoire, mais qui conviendraient tout à fait pour un calcul du type 31×23 ; en revanche, la présence de 25 comme facteur, contrairement à 31×23 diriger un élève

¹⁸¹ Cet exemple a été largement développé par Butlen.

vers une procédure du type $25 \times 4 \times 8$ ou $32 \times 100 : 4$, selon la disponibilité de $32 = 4 \times 8$ ou de $25 = 100 : 4$; on voit donc bien ici la mise en fonctionnement de connaissances sur les nombres et sur leurs propriétés, ainsi que celle, plus en actes au niveau de la scolarité où nous nous plaçons, sur les propriétés algébriques des opérations. Là encore, on peut supposer que la donnée à l'oral du calcul est une variable importante de l'activité potentielle des élèves, car le calcul proposé comme 32 fois 25 ou 25 fois 32 peut entraîner des procédures différentes selon les élèves. N'oublions là non plus pas le travail d'estimation d'un ordre de grandeur du résultat qui peut se manifester selon différents degrés : 32×25 est « proche » de $30 \times 20 = 600$, mais $32 \times 25 = 800$ pourra lui-même ensuite servir d'ordre de grandeur pour un calcul du type $32,15 \times 24,6$. N'oublions pas enfin le bénéfice potentiel de ce travail pour un élève lors d'un calcul posé ou instrumenté, que ce soit pour la détermination du résultat¹⁸² ou son contrôle.

- l'exemple ci-dessus peut, comme pour les exemples donnés pour l'addition, être déclinés et adaptés aux nombre décimaux : $32 \times 2,5$; $3,2 \times 25$; $3,2 \times 2,5$; $32 \times 0,25$, etc. sont autant de calculs qui font intervenir ou développent le sens des nombres.
- les calculs du type « prendre la moitié, le tiers, le quart d'une quantité » à lier avec une division par 2, par 3 ou par 4 constituent des appuis pour les calculs dans lesquels il s'agira de « prendre les deux tiers, les trois quarts, les trois demis d'une quantité » ; nous reprendrons cet exemple pour illustrer un autre aspect du calcul mental dans la section V.C. ci-dessous.

Le calcul mental est également une occasion privilégiée pour jouer sur des changements de registres dans différentes situations – écriture, comparaison ou calcul – et dans différents cadres – cadre numérique ou cadre des grandeurs :

- avec des nombres écrits sous forme fractionnaire : ainsi, la somme de $\frac{1}{2}$ et de $\frac{1}{2}$ est égale à 1 parce qu'on additionne deux moitiés de l'unité, avec toutes les diversités de

¹⁸² Une des techniques opératoires de la multiplication des décimaux repérées par Roditi (2001) pour « placer la virgule » au produit repose sur l'estimation d'un ordre de grandeur de celui-ci.

formulation auxquelles on peut penser à l'oral ($0,5 + 0,5$ ou 2 fois $\frac{1}{2}$) ; le calcul mental procure ici une occasion adaptée pour éviter, lutter contre, détruire la confusion entre $\frac{1}{2}$ et $1,2$; travailler dans le cadre des grandeurs peut se révéler à cet effet un détour intéressant : une demi-heure plus une demi-heure, deux demi-heures ont en effet peut de chances de produire comme résultat 2,4 heures pour les élèves (de même $0,5 \text{ m} + 0,5 \text{ m}$ peut offrir des possibilités différentes de procédures pour les élèves que le même calcul posé dans le cadre numérique) ; la somme de 1 et de $\frac{1}{2}$, perçue comme la somme d'une unité et de la moitié d'une unité, pourra être représentée soit comme 1,5 soit comme $\frac{3}{2}$; de même, $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$; la moitié de $\frac{2}{3}$, etc., chacun de ces calculs pouvant également être l'occasion de travailler sur la droite numérique ;

- avec différentes désignations : 2 dixièmes + 1,75 ; compter de 3 dixièmes en 3 dixièmes à partir de 0,2 ou de 0,58 sans dépasser 5,...
- à partir de calculs comme $0,1 \times 10$; $0,5 \times 2$; $0,5 \times 3$; $0,2 \times 3$; $0,2 \times 5$; $0,2 \times 7$; etc. sont eux aussi à la fois propices à des changements de désignation et favorables à l'acquisition du sens des nombres : 10 fois un dixième met en fonctionnement la définition d'un dixième, 2 fois 5 dixièmes permet de faire le lien entre 0,5 et $\frac{1}{2}$; 3 fois cinq dixièmes permet de décomposer quinze dixièmes en une unité et cinq dixièmes ; 5 fois deux dixièmes donnera 10 dixièmes comme 3 fois 2 dixièmes aura donné 6 dixièmes, etc., avec encore une fois un jeu sur les désignations comme variables de l'activité potentielle ou effective des élèves, et des choix à faire pour les enseignants, en particulier sur les traces écrites.
- avec des pourcentages¹⁸³ : le travail mental avec des pourcentages ouvre des pistes potentielles d'apprentissage nombreuses, et bien spécifiques par rapport à l'écrit et au calcul instrumenté ; ces pistes sont de plusieurs natures ; tout d'abord, l'application de pourcentages simples comme 50 %, 25 %, 10 % ou 1 % sont autant d'occasions de travailler les changements de désignation en passant à la moitié, le quart, le dixième ou le centième, mais aussi d'associer des multiplications à des divisions

¹⁸³ Le programme de sixième 2008 précise sur ce point : « Les élèves doivent connaître le sens de l'expression « ...% de » et savoir l'utiliser dans des cas simples où aucune technique n'est nécessaire. »

usuelles en s'appuyant sur des connaissances anciennes ; on peut même concevoir dans cet esprit de proposer aux élèves des calculs comme 75 % de 12 min, 20 % de 35 kg ou 5 % de 32 € ; nous reprendrons d'ailleurs ce premier point et le développerons dans le paragraphe V.3. ci-dessous ; calculer 18 % de 50 €, de 200 litres, c'est pouvoir mettre en acte la propriété d'homogénéité sur la proportionnalité ; calculer 15 % de 120 g, c'est pouvoir mettre en acte la propriété d'additivité sur la proportionnalité ; les calculs d'ordre de grandeur sont, dans le cas des pourcentages, quasiment indissociables des calculs exacts, et nous suggérons que déterminer un ordre de grandeur de 19,6 % de 153,28 € est une tâche possible pour des élèves de sixième !

B. La résolution de problèmes par le calcul mental


Nous allons maintenant illustrer sur quelques exemples comment une pratique du calcul mental peut d'une part s'ancrer sur la résolution de problèmes, et d'autre part participer au développement des capacités des élèves dans ce domaine. Certains proviennent des évaluations PISA, d'autres d'évaluations nationales. Nous adoptons dans ce paragraphe le même positionnement que pour le paragraphe précédent, c'est-à-dire celui du formateur plus que celui du chercheur, puisque nous partons d'exemples présentés au cours de la formation des enseignants. Notre intention n'est pas de commenter les scores de réussite des élèves français, mais de montrer en quoi la fréquentation de ces types de situations, en les adaptant à un contexte de calcul mental, peut contribuer au développement de la compétence numérique au sens où nous l'avons définie. Comme pour les exemples de calcul ci-dessus, nous ne ferons pas des analyses *a priori* exhaustives des tâches proposées ; quant aux modalités de mise en œuvre, il est clair ici qu'elles reposent *a minima* sur un support papier ou projeté.

La première tâche que nous présentons est un exercice PISA 2003 dans lequel il est demandé aux élèves de trouver le nombre de carrés d'un motif à partir d'une suite de motifs représentés¹⁸⁴.


Question 1 : MOTIF EN ESCALIER MB06Q01

Rémy réalise un motif en escalier en utilisant des carrés. Il suit les étapes suivantes :

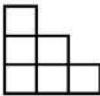
Comme on peut le voir, il utilise un carré à l'étape 1, trois carrés à l'étape 2 et six carrés à l'étape 3.



Étape 1



Étape 2



Étape 3

Combien de carrés devra-t-il utiliser à l'étape 4 ?

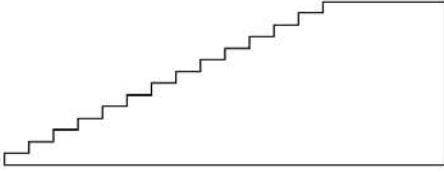
Il s'agit d'abord d'identifier le mode de construction des motifs successifs dans un cadre géométrique. Une fois cette identification faite, les élèves ont *a priori* deux possibilités : dessiner le motif suivant et compter les carrés, ou passer directement dans le cadre numérique et trouver le résultat par une addition ($6 + 4$), ou un surcomptage (6, 7, 8, 9, 10). Indépendamment de l'intérêt de la tâche en elle-même, le fait de la proposer dans un contexte de calcul mental contraint le passage au cadre numérique.

La deuxième situation est également un exercice PISA 2003 dont la solution experte est la division de 252 par 14.

¹⁸⁴ Ce type de situation (*patterns*) était très commun à l'époque dans les manuels scolaires de nombreux pays, mais l'était beaucoup moins en France.

Question 1 : ESCALIER M547Q01

Le schéma ci-dessous représente un escalier de 14 marches, qui a une hauteur totale de 252 cm :



Profondeur totale 400 cm

Hauteur totale 252 cm

Quelle est la hauteur de chacune des 14 marches ?

Le calcul mental de la hauteur d'une marche peut sembler difficile pour un élève, mais l'estimation de cette hauteur peut l'apparaître beaucoup moins. A partir de 14 fois 10 et de 14 fois 20, un élève peut facilement conclure que la hauteur d'une marche est comprise entre 10 cm et 20 cm. On peut même à partir de 14 fois 20 = 280 cm envisager que des élèves estiment l'écart entre 280 et 252, et rapprochent 28 de 2 fois 14 pour en conclure que la hauteur d'une marche est (20 - 2) cm.

Le dernier exemple est un problème proposé aux élèves dans l'évaluation 1987-2007 :

PROBLÈME P1

30 morceaux de sucre pèsent 240 grammes.

50 morceaux de sucre pèsent 400 grammes.

Dans chaque cas, remplace les pointillés par le nombre qui convient.

a) 80 morceaux de sucre pèsent ~~640~~..... grammes

b) 15 morceaux de sucre pèsent ~~120~~..... grammes

c) J'ai mis des morceaux de sucre sur une balance, elle indique 1 200 grammes.

Il y a ~~150~~..... morceaux de sucre sur la balance.

Cet exercice est un exercice mettant en jeu la proportionnalité qui illustre clairement selon nous à la fois une pratique possible du calcul mental en classe et l'importance de la disponibilité des connaissances numériques dans la résolution de problèmes. Toutes les réponses peuvent être obtenues par un retour à l'unité, c'est-à-dire en calculant la masse d'un morceau de sucre. Cependant, pour la question a), une procédure plus « économique » mobilise l'additivité, mais repose sur la disponibilité de $80 = 50 + 30$. De même, la réponse à la question b) s'obtient facilement par homogénéité à partir du moment où 15 est identifié comme la moitié de 30. Quant à la réponse c), elle peut être obtenue soit à partir de la masse de 50 morceaux de sucre, soit à partir de celles de 15 morceaux.

C. L'apprentissage de connaissances nouvelles par le calcul mental

Les exemples qui suivent sont destinés à montrer en quoi le calcul mental, en étant intégré à la progression annuelle conçue par un enseignant, peut offrir aux élèves des conditions favorables d'appropriation de connaissances nouvelles. Nous avons ainsi choisi de rassembler ces exemples dans un seul thème du programme de sixième (*grade 6*) pour illustrer notre troisième hypothèse : l'écriture fractionnaire des nombres. Ce thème comporte de nombreuses composantes liées les unes avec les autres, d'ordre à la fois sémiotique et sémantique, faisant intervenir différents cadres : la référence au partage de l'unité initiée à l'école primaire, le statut de nombre, le passage au quotient, la division décimale, la ou plutôt les significations de la « barre de fraction », comme écriture d'un nombre et comme symbole opératoire, prendre une fraction d'une quantité, les pourcentages. Ce thème nous paraît significatif car il caractérise de notre point de vue ce qui peut distinguer le travail mathématique à faire en classe à l'école primaire et au collège, et en particulier en sixième. D'ailleurs, la seule diversité des composantes qu'il contient justifierait à elle seule selon nous l'intégration de phases de calcul mental dans l'enseignement, au moins comme moments de réinvestissement des connaissances. Mais ce n'est pas là notre propos. Notre propos ici est précisément de montrer en quoi une fréquentation régulière de tâches par les élèves et un positionnement pertinent de l'enseignant en fonction des productions des élèves, en amont de l'institutionnalisation, peuvent favoriser les apprentissages des élèves.

Pour fonder notre démarche, rappelons deux résultats. Dans les évaluations nationales à l'entrée en sixième de 2005 et 2008, environ un quart des élèves ont répondu que $\frac{1}{4}$ peut

aussi s'écrire 0,25 tandis que plus de la moitié d'entre eux ont donné comme réponse 1,4 (et environ 10 % ont répondu 0,4). Dans l'évaluation nationale CEDRE collège 2008 (fin de 3^e), l'item de calcul mental « trois quarts de 44 » est considéré comme un item « hors échelle », c'est-à-dire comme item que les 10 % des élèves ayant obtenu les scores les plus élevés ont une probabilité de fournir une réponse correcte inférieure à 0,5. Comment prendre en compte ces deux résultats en classe de sixième dans le cadre d'un enseignement en calcul mental dans une dynamique prospective ? Quelles tâches proposer aux élèves ? Comment amener les élèves dans un processus de conceptualisation sans « tout miser » sur l'institutionnalisation accompagnée le plus souvent d'une formalisation prématurée ? C'est ce qui a constitué un des axes importants de la formation PACEM et que nous proposons d'illustrer sur l'exemple particulier de $\frac{1}{4}$ et de $\frac{3}{4}$.

Un « parcours » possible de calcul mental peut être décrit à l'aide des exemples suivants, de façon non exhaustive, dans des situations contextualisées ou non, dans des registres de représentation variés, oralement ou par écrit¹⁸⁵ :

- prendre un quart, puis trois quarts d'une quantité (un quart de 20 chocolats, de 8 milliards d'habitants) ou d'une grandeur¹⁸⁶ (un quart de 20 €, de 60 min) ;
- écrire un quart, puis trois quarts sous forme fractionnaire ;
- reconnaître $\frac{4}{4}$; $\frac{8}{4}$; $\frac{12}{4}$
- donner en cm un quart de m, $\frac{1}{4}$ m, donner en cL un quart de L ou $\frac{1}{4}$ L ;
- dire ou écrire 4 fois $\frac{1}{4}$; 4 fois 1,4 ; 4 fois 0,4 ; 2 fois $\frac{1}{4}$; 2 fois 1,4 ; 2 fois 0,4 ;
- dire ou écrire 4 fois $\frac{3}{4}$; 4 fois 3,4 ;
- calculer 40 fois $\frac{1}{4}$; 20 fois $\frac{1}{4}$;
- repérer sur la droite graduée en quarts $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{4}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{8}{4}$;
- repérer sur la droite graduée en dixièmes $\frac{1}{2}$, placer $\frac{1}{4}$;
- revenir sur la table de multiplication de 4, calculer $28 : 4$, 28 quarts ;

¹⁸⁵ La plupart de ces exemples sont extraits du manuel Hélice 6^e, Editions Didier, 2009.

¹⁸⁶ Le programme de 6^e est a priori restreint à « prendre une fraction d'une quantité ».

- calculer le quart de 1,2 kg, de 2 L ; de 360° ;
- estimer un ordre de grandeur de $19,8 : 4$, de $3978 : 4$, du quart de 31, 87 kg ;
- estimer un ordre de grandeur de $11 : 40$, $10 : 39$; $7 : 29$;
- encadrer par deux entiers consécutifs $5 : 4$; $15 : 4$; 5 quarts, 15 quarts, $5/4$; $15/4$;
- calculer $1 : 4$; $3 : 4$;
- déterminer le côté d'un carré de côté 8 m ; 1 m ; 3 m ; p m ;
- donner une écriture fractionnaire de 25 %, de 75 % ;
- calculer 25 % de 36 €, 75 % de 40 € ;
- calculer le quart de 44, les trois quarts de 44 ; $44 \times 0,25$; $44 \times 0,75$;
- repérer 25 % d'une quantité totale sur un diagramme circulaire ;
- présenter d'autres situations simples de proportionnalité dont le coefficient de proportionnalité est $1/4$ ou $3/4$.

Ces tâches ont pour objectifs d'amener les élèves à donner à $1/4$ et à $3/4$ un statut de nombres, qui peuvent s'écrire de différentes manières, à les amener à concevoir $3/4$ soit comme trois fois $1/4$ soit comme $3 : 4$, à les aider à comprendre que $1/4$ et $3/4$ agissant comme opérateurs produisent des quantités ou des nombres variables. L'activité de l'enseignant est d'organiser *a priori* l'ensemble de ces tâches en fonction de l'organisation annuelle qu'il souhaite adopter, puis de s'adapter en fonction des informations qu'il recueille auprès des élèves : quelles sont leurs réponses ? Quelles sont les stratégies qu'ils utilisent ? Comment les formulent-ils ? Qu'est-ce qui résiste ? Quelles sont les connaissances « en formation » ? Comment les capitaliser ? Quels énoncés intermédiaires ? Quels niveaux de formalisation ? Nous suggérons que toutes ces questions n'ont pas de réponse unique, qu'elles varient selon les classes, selon les élèves, selon l'enseignant ; ce faisant, nous supposons que la pratique du calcul mental permet à la fois de favoriser des processus divers de conceptualisation chez les élèves et d'appréhender pour l'enseignant un moment favorable d'institutionnalisation collective d'un savoir.

D. Conclusion

Pour conclure, nous avons émis trois hypothèses dont la nature et le statut sont différents, mais dont nous supposons que l'implémentation dans les pratiques des enseignants

contribue à favoriser l'acquisition de ce que nous avons appelé la compétence numérique chez les élèves. Tirées de la recherche en didactique et prolongeant en partie nos expériences personnelles, elles fondent une partie de la conception de la formation, afin de nourrir les pratiques visées chez les enseignants, et participent donc potentiellement à l'effet du dispositif sur les résultats des élèves au travers des évolutions qu'elles auront pu générer chez les enseignants du groupe expérimentateur. Cependant, il est possible que, par leur différence de statut, ces trois hypothèses n'aient pas le même effet sur les résultats des élèves. Plus précisément, nous conjecturons que la première et la troisième pourraient avoir un impact dès lors qu'une pratique régulière du calcul mental serait mise en œuvre dans la classe, donc *a priori* plus rapidement visible et plus facilement diffusable, alors que la deuxième pourrait n'avoir d'effet qu'à plus long terme et peut-être seulement sur les enseignants ayant bénéficié de la formation « directe ». Enfin, nous devons prendre en compte que les enseignants qui ont en responsabilité des élèves évalués dans le cadre du dispositif PACEM, que ce soient ceux du groupe expérimentateur ou ceux du groupe témoin, ont des expériences antérieures au dispositif variables de la pratique du calcul mental. Ces différences, que nous ignorons, peuvent avoir une influence sur l'impact global du dispositif.

Chapitre 4. PACEM : un cadre d'expérimentation adapté

Sommaire du Chapitre 4.

I. Description globale du dispositif.....	268
II. Méthodologie de l'évaluation de l'expérimentation	271
A. Données.....	273
B. Les tests passés par les élèves.....	279
C. L'évaluation d'impact.....	285
III. Constitution des tests.....	287
A. Constitution du test 1 (ou pré-test).....	287
B. Constitution du test 2 (ou post-test).....	292
C. Résultats globaux des élèves aux tests 1 (début des années scolaires 2010-2011 et 2011-2012).....	293
IV. Résultats des tests 1 (par item).....	295
A. Les taux de réussite des items	298
B. Ce que confirment les tests et ce qu'ils incitent à approfondir	301
C. De nouvelles questions que posent les résultats des tests.....	323
D. Bilan des tests 1	333

Le projet PACEM peut se définir comme un projet « ambitieux », au sens où il combine différents champs – didactique, statistique, institutionnel – et associe différents niveaux d'intervention – conception du dispositif dans son ensemble, conception des tests d'évaluation des élèves et formation des enseignants. Nous présentons dans la première partie de ce chapitre une vue d'ensemble du dispositif, puis nous exposons dans la deuxième partie la méthodologie adoptée pour son évaluation. La troisième partie du chapitre est consacrée aux résultats des tests de début d'année scolaire, qui jouent un rôle particulier dans le dispositif. Nous nous exprimons ici dans les deux premières parties en tant que concepteur du dispositif de l'expérimentation, au niveau de sa structure globale, puis en tant que concepteur de l'évaluation de ce dispositif, et nous reprenons notre position de chercheur dans la troisième partie. Le déroulement de la formation des enseignants, incluse dans le dispositif, fait l'objet d'une présentation spécifique dans le chapitre 5.

I. Description globale du dispositif

Nous avons conçu et mis en œuvre l'expérimentation que nous allons maintenant présenter dans le cadre d'un projet porté par la direction de l'évaluation, de la prospective et de la performance (DEPP), et destiné à favoriser l'acquisition de compétences par les élèves en mathématiques (PACEM). Cette expérimentation s'inscrit dans une démarche d'« *evidence based research* » en éducation, au sens où, menée à une échelle relativement importante, elle s'appuie à la fois sur des instruments d'évaluation standardisés, intégrés dans une méthodologie statistique quantitative que nous décrivons dans la deuxième partie de ce chapitre. Elle concerne la fin de l'école primaire¹⁸⁷ (CM1/CM2) et le début du collège (sixième/cinquième), et repose, nous l'avons dit, sur un dispositif de formation continue des enseignants qui vise explicitement l'amélioration des acquis des élèves en mathématiques. Pour chercher à atteindre cet objectif, le dispositif repose sur trois caractéristiques qui, si elles ne marquent pas un tournant pour la formation d'un point de vue conceptuel, constituent selon nous une véritable innovation en matière de développement professionnel des enseignants. Tout d'abord, la formation est ancrée sur des évaluations standardisées : elle les intègre comme des objets de culture professionnelle pour les enseignants. En les décryptant avec eux et en faisant émerger des utilisations potentielles, le formateur s'en sert comme des outils pour faire évoluer, voire déconstruire en partie, certaines représentations des enseignants, puis pour accéder à leurs pratiques effectives et les faire évoluer dans une zone proximale de leur développement des pratiques. Ensuite, ce dispositif est étagé, c'est-à-dire qu'il cherche à générer un effet d'entraînement collectif dans les écoles au-delà du changement de pratiques des seuls enseignants ayant bénéficié de la formation. Enfin, les contenus de la formation sont sous-tendus par une vision particulière de l'enseignement des mathématiques au collège que nous avons exposée dans le chapitre 2, relativement à la compétence numérique, et donnent une place important au calcul mental, comme nous l'avons explicité dans le chapitre 3.

¹⁸⁷ L'expérimentation que nous avons mise en œuvre en fin d'école primaire porte sur le domaine des grandeurs et des mesures. Nous ne la traitons pas dans notre recherche.

La formation des enseignants que nous avons conçue vise une évolution des pratiques ordinaires, dans et hors de la classe, en prenant en compte les contraintes liées à l'exercice du métier au quotidien, évolution que nous comptons évaluer par son impact sur les résultats des élèves. Un premier type d'effets escomptés porte sur les résultats des élèves d'enseignants qui bénéficient de la formation ; le deuxième, indirect, concerne ceux des élèves de leurs collègues dans les établissements. Nous ne nous intéressons dans notre travail de recherche qu'à la partie du dispositif qui concerne le début du collège, et plus particulièrement la classe de sixième. Enfin, nous présentons ici l'ensemble du dispositif, mais nous concentrons notre recherche sur l'année 2011-2012.

Dans chaque collège, les élèves passent un test en début d'année scolaire. Une action de formation d'un enseignant par collège est engagée, d'une durée de 18 heures et centrée sur des contenus mathématiques et des mises en œuvre correspondantes. Ces enseignants sont à la fois bénéficiaires de la formation, et intermédiaires entre la formation et leurs collègues dans les établissements. Leur rôle est essentiel dans le dispositif de maillage du projet, dans la mesure où ces enseignants assurent le relais, le suivi et la coordination de la mise en œuvre effective dans leurs établissements des grands axes portés par la formation. Ces enseignants sont en quelque sorte les porteurs véritables du projet par la qualité de leur action auprès des enseignants des autres classes retenues dans l'expérimentation.

Lancée en septembre 2010, l'expérimentation s'est terminée en mai 2012. Sa mise en œuvre en 2010-2011 pour la classe de sixième s'est faite dans l'académie de Créteil, sur un échantillon de 19 collèges. En 2011-2012, le dispositif est reconduit en sixième avec le même protocole, et étendu au niveau cinquième en suivant les élèves testés en 2010-2011, ce qui permet à la fois d'étudier son impact sur deux années auprès des élèves des mêmes

enseignants¹⁸⁸ et sur une cohorte d'élèves suivies sur deux années. L'expérimentation porte sur un domaine spécifique du programme de mathématiques – Nombres et calcul – choisi en accord avec l'inspection régionale de mathématiques de l'académie de Créteil, et plus particulièrement sur les nombres décimaux et le passage au quotient. Les notions travaillées sont l'écriture des nombres, le calcul et la résolution de problèmes.

Le dispositif est évalué par un test en fin d'année scolaire (test 2) qui permet comparer les résultats des élèves à ceux obtenus au test 1 de début d'année scolaire, et par un test 3 de fin de cinquième pour la cohorte d'élèves entrés en sixième en 2010.

¹⁸⁸ Aux mutations ou congés près.

II. Méthodologie de l'évaluation de l'expérimentation

L'objectif final du projet PACEM est l'amélioration des acquis des élèves en mathématiques, et plus particulièrement ceux des élèves du début du collège en calcul. Or, une expérimentation consiste « à déployer à échelle réduite une action ou un dispositif que l'on souhaite tester avant d'en envisager une généralisation ou, plus modestement, un essaimage ou une inflexion » (Gurgand & Valdenaire, 2012). Nous sommes bien dans cette configuration avec PACEM puisque c'est cette perspective d'extension qui a guidé la conception du dispositif lui-même en l'inscrivant dans un format ordinaire de formation continue : un enseignant par collège, et une durée réduite de la formation (18 h). Il est donc nécessaire de disposer d'un protocole d'évaluation qui permette de mesurer les effets de cette expérimentation. Comme nous l'avons dit dans la partie précédente, les élèves sont testés deux fois, une fois en début d'année scolaire et une fois en fin d'année scolaire. Il s'agit donc dans un premier temps de nous assurer de la validité de ces tests au regard des objectifs de l'expérimentation. Mais ceci ne suffit pas, même si le nombre d'élèves engagés dans l'expérimentation est important. Il nous faut aussi disposer d'un groupe témoin d'élèves, ou d'un groupe contrôle, c'est-à-dire un groupe d'élèves qui ne font pas partie du dispositif, ce qui revient ici à constituer un groupe d'élèves dont les professeurs ne bénéficient pas de la formation spécifiquement conçue dans le cadre de PACEM. Les effets éventuels de l'expérimentation sur les acquis des élèves sont alors mesurés par comparaison des résultats des élèves du groupe expérimental avec ceux des élèves du groupe témoin.

Une démarche d'évaluation d'une expérimentation se doit d'être consubstantielle à la élaboration de l'expérimentation, c'est-à-dire être pensée en même temps que l'expérimentation elle-même. Pour garantir une rigoureuse scientificité, elle doit éliminer des biais de sélection, c'est-à-dire les erreurs qui peuvent se produire quand les populations expérimentales et témoins ne présentent pas les mêmes caractéristiques, autrement dit garantir au maximum que les deux populations sont comparables. Dans notre situation, comme souvent dans le champ de l'éducation, ces biais peuvent apparaître à trois niveaux : celui des collèges retenus, celui des enseignants et celui des élèves. Une garantie de l'équilibre recherché, souvent citée dans la littérature sur l'évaluation, consiste à appliquer un processus de randomisation, c'est-à-dire un échantillonnage aléatoire des individus constituant les deux

populations. Mais ce processus est rarement possible dans le contexte scolaire pour des raisons facilement compréhensibles, dont le fondement tient à la fois à des contraintes humaines, et de fonctionnement des établissements. Si on peut envisager une telle méthodologie sur des élèves sélectionnés dans un dispositif éducatif particulier, on peut en effet très difficilement imaginer une répartition aléatoire de tous les élèves d'un collège dans les classes, et une répartition aléatoire des enseignants en charge de ces classes... Il est donc important de construire un protocole de substitution à ce processus de randomisation qui présente des garanties suffisantes de validation des effets éventuels mesurés, c'est-à-dire un protocole qui assure au maximum que ces effets soient bien dus à l'expérimentation, et à elle seule.

Nous devons donc nous doter d'un groupe expérimental, constitué d'élèves dont les enseignants exercent dans des collèges impliqués dans l'expérimentation, et d'un groupe témoin tenu à l'écart du dispositif et servant de référence, afin de permettre une comparaison avec l'évolution des résultats des élèves du groupe expérimental¹⁸⁹. Le premier des écueils à éviter est la différence de caractéristiques des collèges expérimentaux et témoins, et principalement celles qui sont liées au fait qu'ils relèvent ou non de l'éducation prioritaire. Le deuxième obstacle est la composition d'un groupe expérimental effectuée sur la base d'enseignants volontaires pour s'impliquer dans le dispositif, et celle d'un groupe témoin constituée à partir d'enseignants tirés au hasard, ce qui créerait *a priori* un biais de sélection, constitué par une différence de positionnement des enseignants, de leur motivation, et qui aurait pour risque de mesurer davantage des « effets enseignants » que des effets spécifiques de l'expérimentation. Quant aux élèves, nous opérerons *a posteriori* un contrôle des variables habituelles (âge, sexe et PCS des familles) pour nous assurer de la comparabilité des deux groupes.

¹⁸⁹ Pour rendre le texte plus fluide, les termes « expérimental » et « témoin » pourront désigner, selon le contexte, soit le groupe des enseignants, soit celui de leurs élèves.

Dans ce qui suit, nous présentons le mode de sélection des populations d'enseignants étudiées, puis nous décrivons les populations d'élèves. Nous exposons ensuite la conception des tests passés par les élèves, nous justifions leur validité, et nous expliquons dans quelles conditions se sont effectuées leur passation et leur correction.

A. Données

1. Description de la population des enseignants

Nous sommes donc partis des enseignants pour choisir des collèges, et constituer les populations des élèves, c'est-à-dire de retenir dans l'expérimentation les collèges d'enseignants qui ont été remarqués par l'inspection régionale, et volontaires pour s'engager dans le projet.

En juin 2010, 66 enseignants sont identifiés par les inspecteurs pédagogiques régionaux de mathématiques de l'académie de Créteil comme pouvant jouer potentiellement le rôle de correspondant du projet dans leur établissement. Ces enseignants sont tous invités à participer à une réunion de lancement du projet. A l'issue de cette réunion, 43 d'entre eux donnent leur accord pour une participation effective¹⁹⁰ au projet. Finalement, 20 sont retenus comme correspondants et 17 autres acceptent d'entrer dans la constitution du groupe témoin. Autrement dit, nous disposons au départ du projet de 20 collèges expérimentateurs, et de 17 collèges témoins, avec dans chacun d'entre eux un enseignant « référent ». Le choix entre témoins et expérimentateurs est effectué de façon à respecter au mieux un équilibre entre les collèges des trois départements de l'académie de Créteil et une répartition entre les collèges relevant de l'éducation prioritaire et ceux qui n'en relèvent pas. Ce sont ces professeurs choisis comme expérimentateurs qui vont bénéficier d'une formation, et que nous appelons

¹⁹⁰ Ces enseignants avaient en particulier pour contrainte d'avoir en responsabilité une classe de sixième à la rentrée 2010.

correspondants du projet dans leur établissement¹⁹¹. Nous sommes conscients des limites scientifiques de notre choix, guidé par des contraintes locales de répartition dans l'académie de Créteil, mais le fait que tous les enseignants présentent un positionnement commun vis-à-vis du dispositif limite le biais de sélection. Concrètement, sur les 20 collèges retenus comme expérimentateurs, 7 sont situés en Seine-et-Marne (77), 6 en Seine-Saint-Denis (93) et 7 dans le Val-de-Marne (94) ; sur les 17 collèges retenus comme témoins, 6 sont situés en Seine-et-Marne (77), 3 en Seine-Saint-Denis (93) et 8 dans le Val-de-Marne (94). 10 collèges relevant de l'éducation prioritaire (3 sont classés RAR¹⁹² et 7 sont classés RRS¹⁹³) font partie de chaque groupe, expérimental ou témoin. Une fois ces contraintes respectées, on vérifie que les populations des enseignants correspondants et témoins sont proches en comparant des variables de base comme le sexe, l'âge, l'ancienneté dans l'établissement.

Afin de mesurer la potentialité collective du projet, des collègues de mathématiques des correspondants ont également été impliqués dans l'expérimentation. Chaque correspondant a pour contrainte d'associer au dispositif au moins un de ses collègues ayant en charge au moins une classe de sixième. En 2010-2011, les critères d'engagement de ces enseignants dans le projet sont laissés à la discrétion des chefs d'établissement. Il résulte de cette organisation qu'en 2010-2011, nous disposons de trois groupes d'élèves : au sein des collèges ciblés par l'expérimentation, le groupe des élèves des correspondants, celui de leurs collègues « associés » au projet et un groupe constitué par les élèves des professeurs témoins, choisis comme nous l'avons indiqué plus haut. Un des collèges expérimentateurs (ne relevant pas de l'éducation prioritaire) est très rapidement écarté pour indisponibilité du professeur correspondant, si bien qu'au final, 19 professeurs correspondants et 25 professeurs associés déterminent le groupe expérimental, tandis que les classes de 17 autres enseignants permettent de constituer le groupe témoin.

¹⁹¹ Nous les désignerons quelquefois comme « correspondants » par la suite.

¹⁹² Réseau ambition réussite

¹⁹³ Réseau de réussite scolaire

En 2011-2012, l'étude est étendue aux élèves d'autres classes témoins, celles de professeurs qui exercent dans les mêmes collèges que les témoins 2010-2011, afin de permettre une comparabilité avec les enseignants associés, et qui sont nommés par défaut professeurs « involontaires »¹⁹⁴. En 2011-2012, trois collèges disparaissent de l'expérimentation : deux font partie du groupe expérimental, et un du groupe témoin. Dans un des deux collèges du groupe expérimental, l'enseignante correspondante a été en congé de maternité, et n'a pas été remplacée en formation ; dans l'autre, les 4 enseignants en poste en 2010-2011, y compris l'enseignant correspondant, obtiennent leur mutation à la rentrée 2011, et sont remplacés par 4 professeurs néotitulaires¹⁹⁵. Quant au collège appartenant au groupe témoin, son principal n'a pas souhaité prolongé l'expérimentation une année supplémentaire. Aucun de ces trois collèges ne relève de l'éducation prioritaire.

Au final, quatre groupes d'élèves peuvent donc ainsi être étudiés en 2011-2012, ce qui rend possible une double comparaison entre des élèves dont les enseignants présentent *a priori* des profils « similaires » (du point de vue de l'expérimentation), ce qui n'était pas le cas la première année : entre les élèves des enseignants correspondants et témoins d'une part, entre ceux des enseignants associés et involontaires d'autre part.

Collèges	Groupe expérimental	Groupe témoin
Elèves d'enseignants identifiés par les inspecteurs	Ayant participé à une formation spécifique (élèves des correspondants)	N'ayant pas participé à une formation spécifique (élèves des témoins)
Elèves d'enseignants non identifiés par les inspecteurs	N'ayant pas participé à une formation spécifique (élèves des associés)	N'ayant pas participé à une formation spécifique (élèves des involontaires)

¹⁹⁴ Comme les termes « expérimental » et « témoin », les termes « correspondant », « associé » et « involontaire » pourront désigner, selon le contexte, les collèges, les enseignants ou leurs élèves.

¹⁹⁵ C'est-à-dire 4 professeurs exerçant comme titulaire pour la première fois.

Le travail effectué sur les deux années d'étude consiste donc en la comparaison des évolutions des résultats des élèves du groupe expérimental par rapport à celles des élèves du groupe témoin, en prenant en compte la modification de structure de ce dernier au cours de la deuxième année.

2. Description de la population des élèves

La première année de l'expérimentation PACEM en classe de sixième a porté sur 2 621 élèves au début de l'année scolaire 2010-2011, mais seuls 2 276 élèves ont été testés à la fois en septembre 2010 et en mai 2011¹⁹⁶. Ces élèves sont répartis dans 36 collèges au sein des 3 départements de l'académie de Créteil¹⁹⁷ (Seine-et-Marne, Seine-Saint-Denis et Val-de-Marne).

Tableau 4-1 : Structure de la population d'élèves en 2010-2011

Année 2010 - 2011	Élèves		Classes		Garçons		Élèves "à l'heure"		Élèves "en retard"	
	N	%	N	%	N	%	N	%	N	%
Correspondants (19)	661	29,0	32	29,4	520	51,9	520	78,7	121	18,3
Associés (35)	1153	50,7	55	50,4	932	51,3	932	80,8	199	17,3
Témoins (17)	462	20,3	22	20,2	344	48,5	344	74,5	112	24,2
TOTAL	2276	100	109	100	1159	50,9	1796	78,9	432	19,0

Sur la seconde année d'expérimentation, 3 060 élèves regroupés dans 146 classes (86 classes des collèges du groupe expérimental et 60 classes pour le groupe témoin) ont participé aux tests de début et de fin d'année scolaire.

¹⁹⁶ Nous ne retenons dans notre étude que les élèves testés lors des deux prises d'information. Nous avons contrôlé que la structure de la population, avec et sans les élèves qui n'ont pas passé le test 2 de mai 2011, sont analogues.

¹⁹⁷ Par ailleurs, la moyenne des effectifs d'élèves par classe est quasiment la même (21) dans les trois groupes.

Tableau 4-2 : Structure de la population d'élèves en 2011-2012

Année 2011 - 2012	Élèves		Classes		Garçons		Élèves "à l'heure"		Élèves "en retard"	
	N	%	N	%	N	%	N	%	N	%
Correspondants (17)	591	19,3	28	19,2	303	51,3	467	79,0	107	18,1
Associés (39)	1221	39,9	58	39,7	625	51,2	989	81,0	216	17,7
Témoins (16)	524	17,1	25	17,1	255	48,7	416	79,4	92	17,6
Involontaires (28)	724	23,7	35	24,0	362	50	598	82,6	121	16,7
TOTAL	3060	100	146	100	1545	50,5	2470	80,7	536	17,5

Des informations habituelles concernant le sexe et la date de naissance des élèves ont été recueillies. Le Tableau 4-1 et le Tableau 4-2 rendent compte de cette structure pour les années 2010-2011 et 2011-2012. Ils indiquent également les proportions de garçons dans les différents groupes, d'élèves dits « à l'heure » (c'est-à-dire nés en 1999 pour l'année 2010-2011 et nés en 2000 pour 2011-2012) et d'élèves dits « en retard » (c'est-à-dire nés avant 1999 pour l'année 2010-2011 et nés avant 2000 pour 2011-2012). Les élèves dits « en avance » (c'est-à-dire nés après 1999 pour l'année 2010-2011 et nés après 2000 pour 2011-2012), peu nombreux, ne figurent pas dans ces tableaux.

Au regard des caractéristiques des élèves, on constate pour les deux années une forte homogénéité des échantillons selon le sexe : dans chaque groupe d'élèves, les proportions de filles et de garçons sont comprises entre 48 % et 52 % durant les deux années. En 2010-2011, au sein de chaque groupe, entre 75 % et 81 % des élèves sont « à l'heure », entre 1,3 % et 3 % sont « en avance » et entre 17 % et 24 % sont « en retard », les élèves témoins étant un peu plus en retard que les élèves du groupe expérimental¹⁹⁸. Cette répartition se resserre en 2011-2012, pour laquelle entre 79 % et 83 % des élèves sont « à l'heure », avec des taux très comparables entre associés et involontaires d'une part, correspondants et témoins d'autre part. Entre 16 % et 18 % des élèves sont « en retard » dans chaque échantillon. Le

¹⁹⁸ La proportion d'élèves en retard de l'ensemble de la population étudiée est légèrement supérieure à celle de la population nationale à l'entrée en sixième, dans un collège public, qui s'élève respectivement à 17,4 % en septembre 2010 et à 16,1 % en septembre 2011 (Repères et référence statistiques 2011 et 2012, DEPP).

Tableau 4-3 renseigne quant à lui sur la composition des échantillons selon que le collège dans lequel sont scolarisés les élèves relève ou non de l'éducation prioritaire.

Tableau 4-3 : Composition des trois échantillons selon que le collège de scolarisation des élèves relève ou non de l'éducation prioritaire

	Année 2010 - 2011"				Année 2011 - 2012"			
	Education prioritaire		Hors éducation prioritaire		Education prioritaire		Hors éducation prioritaire	
	N	%	N	%	N	%	N	%
Correspondants	299	45,2	362	54,8	232	39,3	359	60,7
Associés	496	47,0	657	53,0	623	51,0	598	49,0
Témoins	308	66,7	154	33,3	238	45,4	286	54,6
Involontaires					474	65,5	250	35,5
TOTAL	1103	48,5	1173	51,5	1567	51,2	1493	48,8

En 2010-2011, la population étudiée apparaît légèrement déséquilibrée si l'on se réfère à sa structure en fonction de la variable « éducation prioritaire », mais avec l'addition de nouveaux élèves la seconde année d'expérimentation, la population étudiée en 2011-2012 s'avère fournir une composition plus homogène¹⁹⁹.

B. Les tests passés par les élèves

1. Structure et composition des cahiers d'évaluation

En sixième, deux tests sont passés par les élèves chaque année. Comme nous l'avons évoqué plus haut, le test 1 situé en début d'année scolaire sert à la fois de mesure initiale des acquis des élèves et de test diagnostique pour les enseignants. Il porte sur quatre capacités mentionnées dans les programmes de l'école primaire : le passage d'une écriture d'un nombre décimal à une autre, le repérage d'un nombre sur la droite graduée, les quatre opérations sur

¹⁹⁹ Cependant, malgré l'absence de traitement des PCS des élèves, aucun collège de l'échantillon ne relevant pas de l'éducation prioritaire ne peut être considéré comme un collège socialement privilégié.

des nombres entiers ou décimaux, et la résolution de problèmes mettant en jeu ces opérations. Le test 2, quant à lui, a pour fonction d'apprécier les effets potentiels du dispositif sur les acquis des élèves, par comparaison des résultats des élèves du groupe expérimental avec ceux des élèves du groupe témoin. Sa construction doit satisfaire à plusieurs critères. Il doit d'abord permettre d'apprécier une évolution des acquis des élèves tout en évitant une reproduction à l'identique du test 1 afin d'éviter de la part des enseignants un effet d'entraînement spécifique à la réussite des items qui le composent (effet « *teaching to the test* »). Remarquons à cette occasion que, sous réserve de la non communication²⁰⁰ aux professeurs formés du contenu du test 2, l'ensemble des enseignants (des groupes expérimental et témoin) étaient en possession des mêmes informations (contenu du test 1, résultats de leurs élèves au test 1 et connaissance de l'existence d'un test 2). Ce test 2 doit ensuite permettre de prendre en compte les apprentissages des élèves au cours d'une nouvelle année scolaire, l'année de sixième ; son contenu ne peut donc pas se limiter au cadre défini pour le test 1. Les items qui le composent portent toujours sur des changements d'écriture d'un nombre, sur des calculs à effectuer et sur des problèmes à résoudre, et viennent s'ajouter des items portant sur la définition d'un quotient écrit sous forme fractionnaire²⁰¹.

Dans chacun des deux tests, les exercices sont regroupés en deux parties : la première porte sur des calculs à effectuer en ligne ou à poser, les élèves ayant, dans cette première partie, à produire des réponses. La partie 2 des tests comporte quant à elle, d'abord des exercices portant sur la connaissance des nombres (changements d'écritures, repérage sur la droite graduée, comparaison), puis des exercices portant sur des résolutions de problèmes²⁰². Les items se présentent dans cette partie sous forme de questions à choix multiples (QCM). La majorité des exercices proposés est issue d'évaluations antérieures, sur lesquels nous avons donc des résultats. Il ne s'agit pas ici de chercher à évaluer quelque virtuosité que ce

²⁰⁰ Cette précaution méthodologique a évidemment été respectée.

²⁰¹ Tous les tests sont consultables en annexes.

²⁰² Nous entendons ici par résolutions de problèmes des tâches dans lesquelles les élèves ont à identifier une ou plusieurs structures opératoires à partir d'un énoncé issu d'un contexte intra ou extra mathématique.

soit de la part des élèves, tous les exercices proposant des tâches correspondant à ce qu'un professeur de mathématiques est susceptible d'attendre d'un élève à son entrée en sixième ou à l'issue de la sixième.

Signalons enfin que le test 1 de septembre 2011 est légèrement modifié par rapport à celui de septembre 2010 : 11 calculs à effectuer mentalement ont été ajoutés au début du test, pour deux raisons. La première est directement liée à notre étude, qui s'est résolument orientée vers le calcul mental au cours de l'année 2010-2011 : il était donc nécessaire de disposer d'éléments de comparaison entre le début et la fin de l'année scolaire sur des tâches spécifiques de calcul mental. La deuxième raison est d'ordre statistique : les tests 1 et 2 ne disposaient pas assez d'items communs pour pouvoir éventuellement interpréter les résultats obtenus en termes de progrès des élèves, et non pas simplement en termes de comparaison de variations des écarts, entre les élèves du groupe expérimental et ceux du groupe témoin.

Quelques questions supplémentaires ont également été posées aux élèves, à la fin des tests, par voie de questionnaire écrit, sur leur ressenti du calcul mental.

2. Validation des tests

Deux questions fondamentales se posent lors de la construction d'un test, et qui seront déterminantes lors de l'analyse des résultats : mesure-t-on ce que l'on souhaite mesurer ? Et avec quel degré de précision ? La première de ces questions renvoie à la notion de validité du test, la seconde à la notion de fidélité.

La validité d'un test est la plus importante parmi les qualités de mesure que doit posséder un test (De Landsheere, 1976 ; Dickes, Tournois, Flieller et Kop, 1994 ; Laveault & Grégoire, 2002). Cette notion de validité est largement appréhendée dans le domaine de l'éducation par la psychométrie. Ce sont les validités de contenu (pertinence des items du test ; couverture du domaine évalué) et de construit (quelles sont les « habiletés » mises en œuvre lors de la passation ?) qui nous intéressent essentiellement dans le protocole d'évaluation du dispositif PACEM : les items sélectionnés dans les tests sont-ils retenus à juste titre ? Manque-t-il des items qui devraient faire partie des tests ? Et en quoi ces items provoquent-ils potentiellement une activité de la part des élèves qui correspond à ce qui est

visé ? Pour garantir cette validité *a priori*, nous cherchons à combiner de façon complémentaire plusieurs entrées, nous plaçant ainsi dans une démarche suggérée par Bodin (2007). Nous nous appuyons en premier lieu sur le choix d'un domaine unique, ici celui des nombres et du calcul, sur une approche institutionnelle des connaissances et capacités visées telles qu'elles apparaissent dans les programmes, et sur une analyse didactique des savoirs en jeu. D'un point de vue statistique, nous utilisons essentiellement des items retenus lors d'évaluations nationales précédentes, sur lesquels nous connaissons à la fois le niveau de difficulté, défini *a posteriori* par leur taux de réussite, et le caractère discriminant. La connaissance des taux de réussite nous permet de constituer un test à spectre large, c'est-à-dire qui ne vise pas uniquement à repérer des élèves en difficulté ou au contraire ceux qui ont un niveau élevé. Le caractère discriminant d'un item, c'est-à-dire sa corrélation avec l'ensemble du test, est fourni quant à lui par un indicateur qu'on appelle le r_{bis} (ou $r_{bis-point}$ pour *point-biserial correlation coefficient*) utilisé dans le cas de variables dichotomiques (réponses correctes ou incorrectes)

En pratique, un r_{bis} positif inférieur à 0,2 indique un item peu discriminant, sauf dans les cas où l'item est très réussi ou très peu réussi, où l'on considère alors qu'un r_{bis} supérieur à 0,1 suffit à garantir la qualité de l'item. Un r_{bis} négatif indique quant à lui une discrimination fournie par l'item différente de celle donnée par le score global au test, autrement dit la réussite à l'item renseigne sur une autre dimension que celle qui est fournie par le test dans son ensemble. Un r_{bis} négatif peut également correspondre à une mauvaise formulation de l'énoncé ou une erreur de codage (dans la correction). Mais il peut aussi apporter des éléments d'analyse ou de questionnement didactique sur la tâche elle-même et l'activité de l'élève pour effectuer cette tâche. Il peut enfin être l'occasion d'interroger le degré de familiarité des élèves avec l'item proposé compte tenu de leurs parcours scolaires. Cette information sur un item est particulièrement importante pour la construction d'une échelle psychométrique unidimensionnelle. Nous n'avons pas fait ce choix dans l'analyse des résultats des élèves, en restant à un niveau basique de traitement, afin d'offrir l'accès et l'exploitation les plus faciles possibles aux enseignants impliqués dans le dispositif. Cependant, les informations détenues *a priori* sur les r_{bis} des items constituant les tests nous assurent en grande partie leur validité statistique, un contrôle *a posteriori* sur ces r_{bis} étant par ailleurs effectué.

Quant à la fidélité (*reliability*) d'un test, elle fait référence à la façon dont le test mesure une dimension donnée (stabilité des résultats, cohérence interne de la mesure). La stabilité des résultats est elle aussi en partie déterminée par notre analyse *a priori* des items, à la fois didactique et statistique. Pour la cohérence interne des tests, nous nous servons *a posteriori* d'un indicateur qui renseigne sur l'homogénéité d'un test, à savoir le coefficient alpha de Cronbach. Compris entre 0 et 1, le coefficient alpha de Cronbach traduit un degré d'homogénéité d'un test d'autant plus élevé que sa valeur est proche de 1 (Dickes et *al.*, 1994). En pratique, un test est considéré comme homogène pour un alpha supérieur à 0,7.

3. La passation des tests

La passation est menée par le professeur de mathématiques de la classe durant la troisième semaine du mois de septembre. La durée maximale de travail accordée aux élèves est égale à 30 minutes pour la première partie et 40 minutes pour la deuxième partie. Ces durées ont été déterminées à partir d'une étude pilote menée sur 2 classes de sixième d'un collège « normal » (c'est-à-dire ne relevant pas de l'éducation prioritaire, mais à public non favorisé) de l'académie de Créteil, et correspondent aux durées effectivement mises par 90 % des élèves pour terminer le test.

Les calculatrices sont interdites durant toute la passation. Pour la première partie des tests, le rythme des exercices est imposé car il s'agit de calculs à effectuer, pour lesquels la durée pour effectuer un calcul ou une série de calculs est à nos yeux un facteur de maîtrise opératoire. Pour la deuxième partie, seules des indications régulières sur la durée restante sont données aux élèves par le professeur (toutes les 10 minutes, et 2 minutes avant la fin des tests). Ne s'agissant pas de tâches simples pour la plupart des exercices de cette deuxième partie, ce choix est effectué comme compromis entre un test « fractionné » – c'est-à-dire pour lequel les élèves ont une durée déterminée pour chaque exercice, et doivent passer à l'exercice suivant au signal du professeur –, et un test dont seule la durée totale compte : ce compromis est destiné à diminuer la pression exercée sur certains élèves par une scansion trop rigide du rythme de travail tout en cherchant à éviter des temps de travail trop longs sur un même exercice.

Des indications peuvent être fournies aux élèves seulement à partir du moment où elles favorisent une activité mathématique sans la déformer. Par exemple, dans le test 1, les enseignants peuvent indiquer aux élèves ce qu'est « un wagon » dans l'exercice 11, ou « une randonnée » dans l'exercice 16, mais ne doivent pas répondre aux questions d'élèves du type « Qu'est-ce que c'est un tiers? », ou « Qu'est-ce que c'est le périmètre ? ». Dans la partie 1 du test 1, pour la division $276 : 8$, pour laquelle la réponse attendue est 34,5, l'étude pilote a révélé que des élèves risquent de poser la question sur la « poursuite de l'opération après la virgule ». La consigne donnée aux enseignants est de répondre : « Faites comme vous avez l'habitude de la faire. » Chaque question posée par un élève doit être reprise par l'enseignant pour toute la classe et la réponse adressée à l'ensemble des élèves.

4. La correction des tests

Les tests ont été conçus afin de permettre une correction externe non experte, c'est-à-dire qu'ils ne sont pas corrigés par les enseignants eux-mêmes et ils ne requièrent pas une expertise mathématique nécessaire pour déterminer si les réponses fournies par les élèves sont correctes ou non. La correction est externalisée, et confiée à une société chargée de numériser les tests des élèves. Pour les items de la partie 1, pour lesquels nous avons nous-même indiqué à cette société les consignes de correction, les réponses sont codées en trois catégories²⁰³ : réponses correctes (1), réponses incorrectes ou illisibles (9), et absence de réponse (0). Pour les items de la partie 2, les codes correspondent aux réponses choisies par les élèves (1, 2, 3 ou 4) ; le code 0 est utilisé pour l'absence de réponse et le code 9 pour une réponse illisible (par exemple lorsqu'un élève a coché deux cases).

²⁰³ La société est chargée de procéder à une double correction des items, et nous avons procédé à une vérification aléatoire des résultats.

C. L'évaluation d'impact

L'objectif est de comparer les résultats des élèves du groupe expérimentateur avec ceux des élèves du groupe témoin. Un protocole « idéal » d'évaluation de différenciation des acquis des élèves consisterait à faire passer aux élèves un post-test (« *endline* ») identique au pré-test (« *baseline* ») et de comparer les résultats obtenus en fonction des groupes expérimentateur et contrôle. Mais ce protocole présenterait deux inconvénients majeurs : d'une part il ne prendrait pas en compte les apprentissages nouveaux visés au cours de l'année scolaire, d'autre part il favoriserait potentiellement des comportements des enseignants à un entraînement des élèves à la réussite au test (effet de « *teaching to the test* ») que nous avons toujours voulu éviter en tant que formateur. Une alternative consiste à placer dans les deux tests des items communs, et d'utiliser les résultats obtenus par les élèves à ces items pour « caler » ou « calibrer » le post-test par rapport au pré-test : cette méthodologie s'inspirerait de celle utilisée pour des évaluations temporelles comme PISA ou CEDRE²⁰⁴ (« *equating* ») qui permet d'élargir la variété des items proposés aux élèves d'un cycle à l'autre. Mais ces évaluations sont différentes d'une évaluation d'une expérimentation, puisqu'elles ne sont pas fondées sur une comparaison pré-test/post-test de la même cohorte d'élèves. Cette différence est fondamentale, et constitue une difficulté importante pour déterminer si des élèves « progressent » au cours d'une année scolaire. Nous ne sommes pas actuellement en mesure de comparer les niveaux « absolus » des deux tests. Autrement dit, nous disposons sur deux années consécutives de résultats à un moment t_1 et des résultats à un moment t_2 , et la seule lecture raisonnable de ces résultats que nous pouvons effectuer est une comparaison relative des différences entre t_1 et t_2 des résultats obtenus par les différents groupes d'élèves²⁰⁵ (méthode dite des « doubles différences »). Cette approche permet à la fois restreindre l'absence d'affectation aléatoire des élèves (randomisation) et de palier l'absence d'harmonisation du niveau des pré-tests et des post-tests. C'est sur cette appréciation des

²⁰⁴ Cycle d'évaluations disciplinaires réalisées sur échantillon (voir le chapitre 1)

²⁰⁵ Nous disposons également des résultats d'une cohorte d'élèves à un moment t_3 (fin de cinquième).

« différences de différences » que nous déterminerons si le dispositif mis en place a eu un impact global sur les acquis des élèves. (Fougère, 2010)

III. Constitution des tests

A. Constitution du test 1 (ou pré-test)

Dans la partie précédente de ce chapitre, nous avons évoqué les principes que nous avons suivis pour constituer le test proposé en début d'année scolaire aux élèves (test 1), à la fois en termes de contenus et de contraintes logistiques et statistiques, sur lesquels nous ne revenons pas. Nous rappelons également que nous avons choisi de nous appuyer le plus largement possible sur des items déjà utilisés, ce qui nous procure de multiples avantages : celui de disposer d'items créés et validés d'un point de vue didactique par des groupes de concepteurs, celui d'avoir des items « valides » du point de vue statistique, et des items sur lesquels nous avons des renseignements quant à leur difficulté pour les élèves. Nous présentons donc dans cette partie les choix que nous avons effectués, à la fois en tant que formateur pour élaborer le test 1, disponible en annexe dans sa version 2010 et dans sa version 2011, mais aussi plus globalement en tant que chercheur engagé dans sa démarche de réflexion sur les modalités d'introduction des nouvelles variables introduites dans la formation et sur leurs effets potentiels.

1. Notre démarche générale

L'élaboration du test 1 s'effectue avec un objectif bien particulier, qui est celui de son utilisation dans une formation d'enseignants, et dans une perspective de comparaison de ses résultats avec ceux d'un test de fin d'année scolaire.

Le choix des items est d'abord déterminé par les questions que nous nous posons en amont de la formation et des perspectives d'exploitation que nous leur attachons : qu'est-ce qu'on veut tester auprès des élèves ? Sur quoi estime-t-on *a priori* qu'il sera nécessaire de mettre un accent particulier auprès des enseignants, dans la « photographie initiale », et dans la perspective de ce qui sera à travailler, pour eux, en sixième avec leurs élèves, et à partager avec les collègues de leurs établissements ? Sur quoi estime-t-on *a priori* qu'un travail sera possible sur les représentations des enseignants, sur les contenus enseignés à l'école primaire et sur les contenus à enseigner en sixième ? Quels items seront susceptibles de favoriser une

réflexion sur le calcul mental, en formation, puis dans les collèges ? Et enfin, quelles connaissances des élèves pourront être réinterrogées en fin d'année scolaire ?

Nous avons ensuite un certain nombre d'intentions globales de formation en termes de relief sur les notions à enseigner en sixième dans le domaine des nombres et du calcul, et sur des pratiques enseignantes pouvant leur être associées. Nous avons défini dans le chapitre 1 les grandes lignes qui structurent notre vision de ce relief, en partie fondée par notre analyse des résultats à des évaluations nationales antérieures. Nous entendons donc, au cours de la formation, et à partir des items et de leurs résultats, aborder des grandes questions qui se posent à un enseignant, à quelque niveau de la scolarité que ce soit d'ailleurs : quelles stratégies d'enseignement et d'apprentissage mettre en œuvre avec des élèves « qui ne savent pas ce qu'ils devraient savoir » ? Comment ne pas tout recommencer ? Comment ne pas tomber dans la « piège du perpétuel retour en arrière » ? Et comment faire pour gérer l'hétérogénéité des connaissances des élèves ?

Nous entendons également poser la question des objectifs du calcul numérique en général au collège, ceux du calcul posé et mettre en avant la place cruciale de notre point de vue à accorder à l'estimation d'un ordre de grandeur d'un résultat. Ces questions font partie de notre projet de formation, nous comptons les aborder avec les enseignants – pour eux-mêmes et pour qu'ils puissent les partager avec leurs collègues –, et comme nous l'avons évoqué dans le chapitre 2, nous les voyons comme des outils potentiels de déconstruction de leurs représentations, d'identification de leurs besoins, exprimés ou non, en termes de contenus, et d'accès à leur « zone proximale de développement des pratiques ». Elles doivent donc être portées par un test initial de la meilleure façon possible, dans des contraintes de passation et de correction données.

Un premier grand principe qui nous a guidé dans la sélection des items est que les tâches soient orientées vers le programme de sixième, même si, nous l'avons dit, puisqu'elles s'appuient sur des capacités mentionnées dans le programme de l'école primaire, elles

peuvent évidemment renseigner de façon rétroactive sur ce qui a été fait, et pourraient être utilisées dans le cadre d'un autre travail, sur le cycle 3 ou d'une liaison école/collège²⁰⁶. Nous avons donc sélectionnés des items, utilisés récemment dans la mesure du possible, dont les taux de réussite connus se situaient plutôt autour de 50 %, que nous avons complétés par des items spécifiquement créés pour l'expérimentation.

Un second principe est que les tâches proposées apparaissent comme relativement familières aux élèves, mais surtout aux enseignants, pour ne pas avoir en quelque sorte à légitimer auprès d'eux leur présence dans un test de début d'année scolaire, et ainsi entrer rapidement dans une réflexion sur la tâche et les réponses des élèves, plutôt que sur sa pertinence à figurer dans un test. Nous estimons ainsi que l'appropriation par les enseignants des résultats de leurs propres élèves en sera facilitée, et favorisera donc plus rapidement un questionnement sur le « comment » et le « pourquoi ».

Il nous a fallu enfin prendre en compte une durée de passation du test que nous souhaitions assez courte, ce qui exclut quasi automatiquement des tâches « complexes », telles qu'elles sont définies dans les documents relatifs au socle commun.

2. Nos choix d'items

Nous allons maintenant rapidement justifier les choix d'items que nous avons effectués en fonction des quatre capacités que nous avons retenues pour la constitution du test 1 : les quatre opérations sur des nombres entiers ou décimaux, le changement d'écriture d'un nombre décimal et le repérage d'un nombre sur la droite graduée (que nous avons regroupés en une), et la résolution de problèmes.

²⁰⁶ Il se trouve d'ailleurs que dans une adaptation du dispositif mise en place dans l'académie de Créteil en 2013-2014, les formations associent enseignants de sixième et conseillers pédagogiques du 1^{er} degré.

Les opérations sur des nombres entiers ou décimaux

Commençons par ce que nous n'avons pas retenu : l'évaluation directe des tables d'addition et de multiplication, la multiplication d'un nombre entier par 10 ; 100 ; 1 000 et les additions/soustractions sur des nombres entiers. Nous avons en effet adopté comme parti pris, à la lumière des analyses faites dans le chapitre 1, que des items relatifs à ces connaissances seraient très majoritairement réussis, donc peu porteurs *a priori* d'analyse didactique prospective (dirigée vers la sixième), et plutôt de mauvais « candidats » à une analyse comparative test 1 / test 2.

Nous avons donc d'abord choisi 8 items de calcul posé : ce choix nous apparaît presque comme « imposé par le métier », au sens où nous estimons que l'école, au sens large (les enseignants, les parents, les programmes), lui donnent une place importante, et que la part qui lui est consacrée oriente en partie l'organisation de l'enseignement en sixième. Nous avons choisi pour cela 6 items, très récents, issus de l'évaluation nationale²⁰⁷ de CM2 de 2010, auxquels nous avons ajouté un item plus ancien (1990) portant sur la multiplication de deux nombres décimaux²⁰⁸, et un item que nous avons créé portant sur la division d'un nombre décimal par un nombre entier. Nous avons choisi de laisser à la charge des élèves le fait d'avoir à poser les opérations.

Viennent ensuite 4 calculs en ligne sur la multiplication et la division d'un nombre décimal par 10 ; 10 ; 1 000 (ou dont le résultat est un nombre décimal). Leur présence n'est pas non plus surprenante, compte tenu comme nous l'avons évoqué précédemment, de l'importance qu'ils revêtent à nos yeux dans la compréhension de l'écriture décimale et de celle qu'ils ont dans l'estimation dans l'ordre de grandeur d'un résultat.

²⁰⁷ Cette évaluation avait été passée en janvier 2010 par les élèves de CM2.

²⁰⁸ Ce choix est justifié par le retour dans les programmes 2008 de l'école primaire de la multiplication des décimaux après son report au collège depuis 1995.

La partie 1 du test se termine par deux derniers items qui portent sur des calculs dans lesquels des fractions « simples » (un tiers, deux tiers) interviennent comme opérateurs. Deux raisons principales nous ont amené à retenir ces items : la première est relative aux questions que nous nous posons sur ce que font les enseignants avec les élèves de ce type de tâches (ce qu'ils écrivent, ce qu'ils expliquent, ce qu'ils formalisent) ; la deuxième est orientée vers la question des cadres dans lesquels des tâches « analogues » peuvent être proposées aux élèves. Cette question fait partie d'une interrogation globale que nous avons sur les apprentissages des élèves, que nous avons l'intention de poser pendant la formation, et c'est pourquoi deux items « jumeaux » sont proposés dans la partie 2 du test, dans le cadre des grandeurs. Enfin, nous reconnaissons que calculer les deux tiers d'un nombre peut être considéré comme à la frontière de l'école primaire et du collège, en tout cas poser *a priori* plus de difficulté aux élèves que calculer le tiers, ou *a fortiori*, la moitié d'un nombre.

Le test 1 de septembre 2011 comporte 11 items de calcul mental de plus que celui de septembre 2010, qui est donc constitué de 42 items au lieu des 31 items initiaux. Après la première année de formation, il nous semblait en effet important d'apporter des informations aux enseignants sur la réussite de leurs élèves en calcul mental, et notamment de les sensibiliser « sur pièce » aux différences de réussite entre calculs portant sur des nombres entiers et ceux sur les nombres décimaux. Par ailleurs, nous nous donnons également, en ajoutant de nouveaux items, potentiellement réutilisables dans le test 2, d'améliorer la comparaison des résultats des élèves.

Le changement de registre d'un nombre décimal

Comme nous l'avons largement évoqué dans le chapitre 1, nous adoptons comme résultat de la recherche en didactique que les changements de registre d'un nombre participent à – et renseignent sur – sa conceptualisation. Nous proposons donc 3 items portant sur le changement d'écriture d'un nombre décimal, et 2 items portant sur le repérage d'un nombre sur la droite graduée, que nous associons à un changement de registre. Ces 5 items ne correspondent pas de la même façon à des attentes qu'on peut avoir de la part des élèves à leur entrée en sixième, deux d'entre eux se situant nettement dans un processus d'apprentissage en cours, voire à construire. Mais ils constitueront clairement, de notre point de vue, des outils d'information et de formation intéressants.

La résolution de problèmes

Pour des raisons évidentes, nous ne pouvions pas proposer un test sans une proportion importante d'items consacrés à la résolution de problèmes, c'est-à-dire ici à la mobilisation des structures additives et multiplicatives dans des situations « simples ». Nous avons donc retenu 12 items, avec des énoncés courts, faisant *a priori* appel à des niveaux de mise en fonctionnement des connaissances de type mobilisable – même si nous savons que ce niveau ne dépend pas uniquement de l'énoncé, mais aussi du développement des connaissances chez les élèves. La plupart de ces items ont été créés pour l'occasion.

B. Constitution du test 2 (ou post-test)

Le double principe qui a prévalu dans la constitution du test 2 est de prendre en compte les connaissances nouvelles du programme de sixième tout en se donnant la possibilité d'apprécier des progrès éventuels par rapport à des connaissances anciennes, évaluées dans le test 1. A cette fin, comme nous l'avons expliqué dans la section précédente, nous avons construit des tests qui tentaient de respecter un équilibre entre des items identiques à des items figurant dans les tests 1 (items dits « d'ancrage »), des items voisins d'items proposés dans les tests 1 et des items nouveaux, afin notamment de ne pas inciter des comportements potentiels des enseignants à un entraînement des élèves à la réussite au test (effet de « *teaching to the test* »). Nous gardons également en arrière-plan l'objectif d'évaluer plus spécifiquement ce qui relève de la multiplication, en particulier sur les décimaux, du changement de registre d'un nombre décimal, et de la résolution de problèmes.

En mai 2011, ceci nous a donc conduit à constituer une partie 1 de 24 items, assez voisine de celle du test 1 de septembre 2010, dans laquelle les élèves ont à produire des réponses : 4 calculs posés (2 multiplications et 2 divisions), 4 multiplications et divisions par 10 ; 100 et 1 000 auxquels nous avons ajouté une multiplication par 0,1 et deux calculs sur des « fractions d'un nombre ». Nous avons complété cette première partie du test par 13 calculs en ligne, à effectuer rapidement, qui peuvent donc être assimilés à des items de calcul mental. La partie 2 est composée de 29 items sous forme de QCM – 12 de ces items sont des « VRAI/FAUX » – qui portent essentiellement sur les représentations d'un nombre décimal (y compris sous forme de pourcentage), sur un ordre de grandeur d'un produit, sur la résolution

de « petits problèmes », et qui se situent dans les uns dans le cadre numérique, les autres dans le cadre des grandeurs.

En mai 2012, le fait d'avoir introduit 11 items de calcul rapide dans le test 1 de septembre 2011 et d'avoir à notre disposition les données métriques du test 2 de mai 2011 nous amène à modifier légèrement ce dernier, en éliminant les items peu satisfaisants au regard de leur r_{bis} , et notamment les « VRAI/FAUX », ce qui nous permet également de raccourcir le test. Par ailleurs, le test 2 de mai 2012 met davantage l'accent sur les quotients, que nous avons sans doute sous-estimés en mai 2011, compte tenu des objectifs du programme de sixième, ce qui nous permet aussi de respecter une contrainte nouvelle, celle de ne pas reproduire à l'identique le test 2 de mai 2011, connu des enseignants. Au total, le test 2 de mai 2012 est constitué finalement de 40 items, 23 pour la partie 1 et 17 pour la partie 2.

C. Résultats globaux des élèves aux tests 1 (début des années scolaires 2010-2011 et 2011-2012)

Nous présentons dans cette section les scores globaux moyens des élèves aux tests de début d'année scolaire. Cette présentation porte sur les deux populations d'élèves successives ayant passé dans leur intégralité à la fois le test 1 et le test 2 (début et fin d'année scolaire), en 2010 - 2011 et en 2011 - 2012.

Tableau 4-4 : Scores bruts moyens (sur 31) des élèves au test de septembre 2010

Collèges	Enseignants	Nombre d'élèves	Moyenne	Ecart-type	Minimum	Maximum
Expérimentateurs	Correspondants	661	12,96	5,87	2	30
	Associés	1153	13,53	5,87	2	30
Témoins	Témoins	462	12,85	5,84	1	30
Ensemble	Tous	2 276	13,22	5,86	1	30

Les moyennes sont très voisines d'un groupe à l'autre – même si celle des élèves des enseignants associés est légèrement supérieure aux deux autres –, avec des écarts-types très proches, ce qui est plutôt intéressant dans le contexte de notre expérimentation, et une étendue

presque maximale dans les trois groupes²⁰⁹. On peut remarquer également que la moyenne pour chacun des groupes est inférieure à 16 (la moitié du nombre d'items proposés), ce qui n'a pas dans l'absolu de valeur particulière, mais, compte tenu de la nature des items, nous renvoie néanmoins à des questions générales sur « le niveau des élèves » à leur entrée en sixième²¹⁰. De plus, la répartition des élèves en fonction des quartiles de score total donne des structures très proches d'un groupe à l'autre.

Tableau 4-5 : Scores bruts moyens (sur 42) des élèves au test de septembre 2011

Collèges	Enseignants	Nombre d'élèves	Moyenne	Ecart-type	Minimum	Maximum
Expérimentateurs	Correspondants	591	19,0	8,0	1	41
	Associés	1221	19,0	7,8	3	41
Témoins	Témoins	524	19,7	7,8	3	41
	Involontaires	724	19,0	7,9	3	40
Ensemble	Tous	3060	19,1	7,8	1	41

Comme en 2010, les moyennes sont toujours très voisines d'un groupe à l'autre, avec des écarts-types très proches, et une étendue presque maximale dans les trois groupes. C'est cette fois la moyenne des élèves des enseignants témoins qui est légèrement supérieure aux trois autres. Tout en restant à moins de 50 % de réussite sur l'ensemble du test, les moyennes sont légèrement supérieures par rapport à celles de 2010, ce qui est certainement dû à la présence des 5 premiers calculs en ligne sur des nombres entiers qui ne figuraient pas dans le test de septembre 2010.

²⁰⁹ Les distributions des moyennes par établissement, et par classe, sont également comparables.

²¹⁰ Comme toujours, les conditions de production des élèves peuvent également être interrogées.

IV. Résultats des tests 1 (par item)

Nous présentons dans cette partie les taux de réussite des items du test de début d'année scolaire. Comme dans la section précédente, nous nous intéressons aux deux populations d'élèves successives²¹¹ ayant passé dans leur intégralité à la fois les tests 1 et 2 (début et fin d'année scolaire), et pour les deux années d'expérimentation. Nous regardons ces taux de réussite comme un état des lieux des connaissances des élèves testés à leur entrée en sixième, dans le domaine numérique, pour deux populations différentes²¹². Nous sommes conscients que nous avons à analyser des résultats produits dans des conditions particulières de passation de tests, que ces résultats ne couvrent que partiellement le domaine visé et que nous n'avons accès directement ni aux procédures des élèves ni aux conditions d'enseignement et d'apprentissage qui ont existé en amont. Il s'agit donc d'une photographie, instantanée, locale, de nature diagnostique, sur laquelle nous allons porter une appréciation qui participe à l'élaboration de la formation du dispositif PACEM.

Nous choisissons de présenter ces résultats parce que ce sont des résultats tels qu'ils ont été utilisés en formation, mais aussi parce qu'ils contiennent des informations sur les acquis des élèves à leur entrée en sixième, à partir de tests que nous considérons comme standardisés par leur format, leur mode de passation et de correction, effectués auprès de 2076 élèves la première année, puis de 3 260 élèves la seconde année²¹³. Certes, les élèves testés ne représentent pas un échantillon représentatif national, ni même représentatif de l'académie de Créteil, et ces résultats présentent des limites que nous avons précisées dans la première partie de ce chapitre. Cependant, ils offrent un intérêt suffisant en eux-mêmes pour que nous les présentions de façon détaillée. Par les informations antérieures recueillies sur d'autres évaluations qu'ils confirment, ou par les nouveaux renseignements qu'ils apportent, ils

²¹¹ Tout en étant très proches, ces résultats ne correspondent pas tout à fait aux résultats utilisés en formation, calculés à partir des résultats de tous les élèves qui avaient passé le test 1.

²¹² Seuls des redoublants peuvent appartenir aux deux populations.

²¹³ En réalité, 2 621 élèves ont passé le test 1 la première année et 3 644 la seconde année.

légitimement à eux seuls qu'ils soient présentés à part dans notre recherche : d'une certaine manière, ils valident même son existence. Cette analyse a été faite partiellement pour la formation des enseignants, dans un document que nous avons mis à leur disposition.

Plus précisément, notre objectif de recherche est de tenter de comprendre où et comment nous pouvons jouer sur les pratiques des enseignants pour améliorer les acquis des élèves dans la connaissance des nombres et en calcul : il ne s'agit donc pas de chercher ici à approcher le niveau des élèves testés, mais plutôt de caractériser un niveau relatif de difficulté des items, qui fait intervenir des explications à la fois du côté de l'enseignement et du côté de l'apprentissage, et d'étudier si et sur quoi des apprentissages différentiels sont observables chez les élèves, en fonction d'une formation spécifique directe ou indirecte, reçue par leurs enseignants.

D'un point de vue méthodologique, si les items qui ont un format de QCM fournissent par construction une distribution des réponses des élèves, les autres items n'offrent qu'un taux de réponses correctes, un taux de réponses incorrectes et un taux de non réponse. Pour ces items, nous n'avons pas procédé à une étude exhaustive des réponses des élèves, mais seulement à un repérage aléatoire des réponses des élèves de 200 réponses²¹⁴ au test de septembre 2011, ce qui nous a permis d'avoir une appréciation des productions des élèves et de dégager des erreurs récurrentes. Nous avons également demandé au cours de l'année 2012-2013, à quelques enseignants impliqués dans l'expérimentation de proposer certains de ces items à leurs élèves de sixième, et d'interroger ces élèves sur les procédures qu'ils avaient utilisées. Nous mentionnerons certaines de ces procédures au cas par cas.

Nous avons également cherché à caractériser le niveau de difficulté des items en fonction du niveau estimé des élèves. Concrètement, nous avons réparti les élèves en 4 groupes en fonction des quartiles de score de réussite au test de septembre 2011 : le groupe 1 est constitué des élèves dont le score de réussite global est inférieur au 1^{er} quartile, les élèves

²¹⁴ Toutes les réponses des élèves aux tests ont été numérisées, et sont donc accessibles.

du groupe 2 ont un score de réussite global compris entre le 1^{er} quartile et la médiane, etc. et nous avons cherché à savoir quels items du test sont réussis par au moins la moitié des élèves d'un groupe. Nous constatons d'ailleurs que certains items ne peuvent pas être attribués au groupe 4, autrement dit qu'ils sont réussis par moins de 50 % des élèves de ce groupe. L'analyse de ces résultats, rassemblés dans le Tableau B-1, est intégrée dans notre analyse item par item et dans notre conclusion.

Dans la première section, nous commençons par présenter les indicateurs statistiques retenus pour l'analyse des tests, c'est-à-dire l'alpha de Cronbach de chaque test, les taux de réussite et de non réponse par item, et le r_{bis} de chaque item. Pour une lecture plus facile, nous avons rassemblé dans le Tableau B-2 l'ensemble des taux de réussite des items retenus en septembre 2010 et 2011, avec les références que nous possédions sur ces items. La deuxième section est consacrée aux items qui confirment des résultats antérieurs. En effet, dans la partie précédente, nous avons montré en quoi nos intentions de formation sont intervenues dans le choix des items du test 1 : en particulier, faire en sorte que les enseignants se sentent « concernés » par un certain nombre d'éléments que nous avons repérés au niveau macro dans le spectre des acquis des élèves au chapitre 1, c'est-à-dire que ces éléments apparaissent effectivement dans les résultats des collègues et des classes des enseignants auxquels nous nous adressons, afin d'être utilisés comme points d'appui dans le dispositif. Autrement dit, la première fonction de ce test 1 est son aspect outil dans la formation, à partir de résultats « certains », que nous présentons dans cette deuxième section. La troisième section rassemble les « surprises » de ces tests 1, c'est-à-dire des résultats inattendus sur lesquels nous devons nous interroger, en tant que chercheur et comme formateur.

Une deuxième fonction de ces tests est de nous offrir, comme chercheur, une photographie initiale sur quelques items, qui met à l'épreuve certaines de nos hypothèses sur les connaissances des élèves : ces résultats seront présentés dans la quatrième section de cette partie. Nous terminons donc par un bilan sur l'apport de ces tests dans notre recherche et sur

leurs limites en termes d'exploitation²¹⁵ : quels résultats antérieurs confirment-ils ? Quels éléments nouveaux apportent-ils ? Quelles hypothèses nouvelles suggèrent-ils ? En quoi concourent-ils à notre démarche ? Quels points d'appui fournissent-ils pour la formation ? Quelles zones d'ombre comportent-ils qui seraient susceptibles d'être explorées par d'autres travaux de recherche ?

Rappelons enfin que les scores antérieurs de réussite dont nous disposons sur certains items, et qui figurent dans le Tableau B-2 sont des scores nationaux, et que les résultats obtenus par les élèves testés dans le cadre des évaluations PACEM ne sauraient leur être strictement comparés.

A. Les taux de réussite des items

Le test 1 de septembre 2010 présente un alpha de Cronbach égal à 0,83, ce qui est tout à fait satisfaisant. Deux items présentent un r_{bis} inférieur à 0,2 : l'item **C1MCR030101** ($r_{bis} = -0,09$) et l'item **C1MCR010101** ($r_{bis} = 0,07$), auxquels on peut ajouter l'item **C1MCR110102** ($r_{bis} = 0,19$). Tous les autres r_{bis} sont compris entre 0,22 et 0,54.

Comme le test 1 de septembre 2010, celui de septembre 2011 présente également un excellent alpha de Cronbach, égal à 0,88. Quatre items de ce test présentent un r_{bis} inférieur à 0,2 : on retrouve les 3 items **C1MCR030101** ($r_{bis} = -0,08$), **C1MCR010101** ($r_{bis} = 0,12$) et **C1MCR110102** ($r_{bis} = 0,15$), auxquels vient s'ajouter l'item **C1MCM010103** ($r_{bis} = 0,17$). Les autres r_{bis} sont compris entre 0,20 et 0,54, et tous proches des r_{bis} de septembre 2010.

Comme l'illustre le graphique 1 ci-dessous, le premier résultat remarquable issu de ces tests est la stabilité des taux de réussite des items, ce qui, compte tenu de la comparabilité des populations d'élèves testés les deux années, confirme l'excellente fidélité de ces tests 1. Seuls les taux de réussite des cinq premiers items portant sur les opérations posées sont

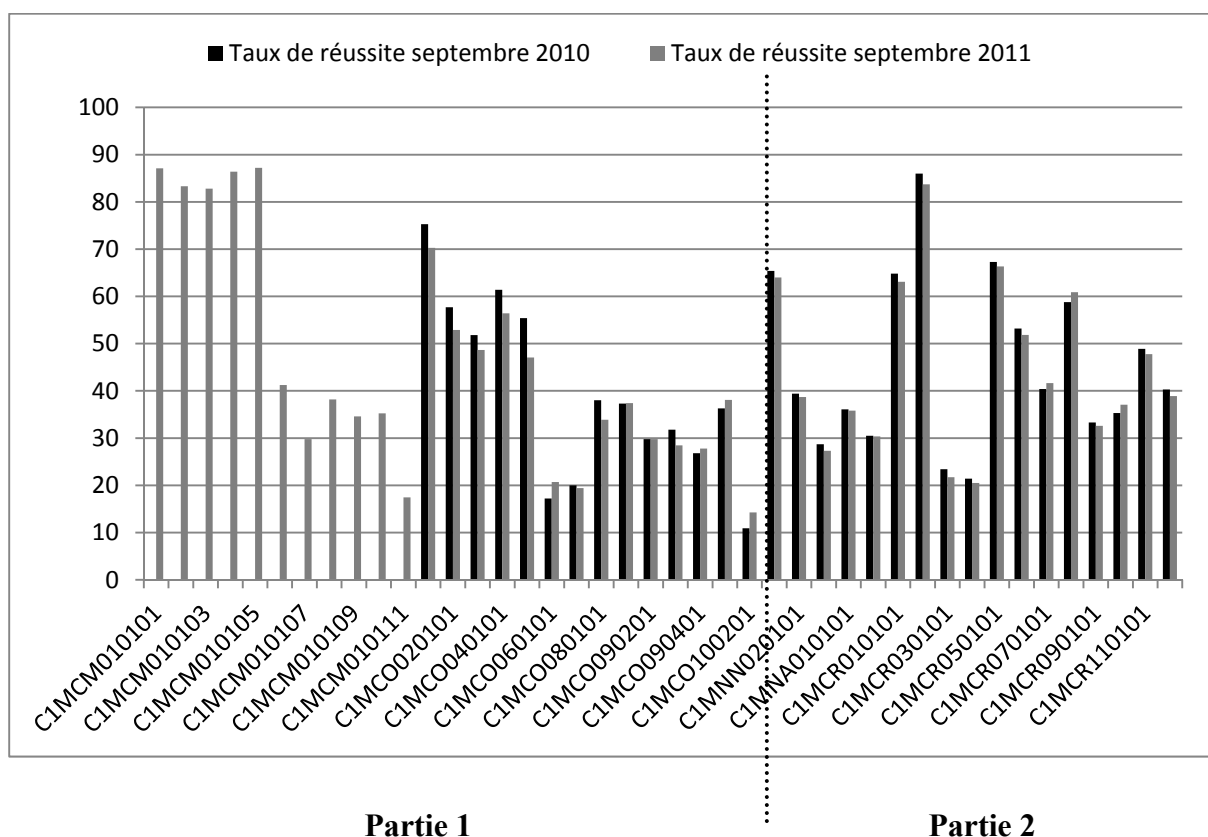
²¹⁵ L'ensemble des tables de résultats aux deux tests de septembre figurent en Annexe B.

systématiquement plus faibles en 2011 qu'en 2010, mais sans être significativement différents, ce qui peut s'expliquer éventuellement par un effet de fatigue des élèves²¹⁶. Sur les items communs aux deux tests de 2010 et 2011, un seul item a un taux de réussite supérieur ou égal à 75 % aux deux tests : c'est l'item C1MCR020101 (problème additif sur des entiers). En 2011, viennent s'ajouter les 5 items de calcul mental sur les entiers, réussis tous les 5 à plus de 80 %. 8 autres items présentent un taux de réussite supérieur ou égal à 50 %. Ces items sont :

- 3 calculs posés ($154,8 + 36,57$; $138,85 - 49,2$ et $24,3 \times 6$) ;
- le passage de l'écriture fractionnaire $\frac{3}{10}$ à son écriture décimale ;
- deux problèmes additifs (un sur une durée à déterminer, un autre portant sur des prix), un exercice mettant en jeu un programme de calcul avec des nombres entiers, et un exercice demandant de prendre une fraction (un tiers) d'une grandeur (60 km).

²¹⁶ En 2011, le calcul en ligne rapide précède les opérations posées, ce qui n'est pas le cas en 2010.

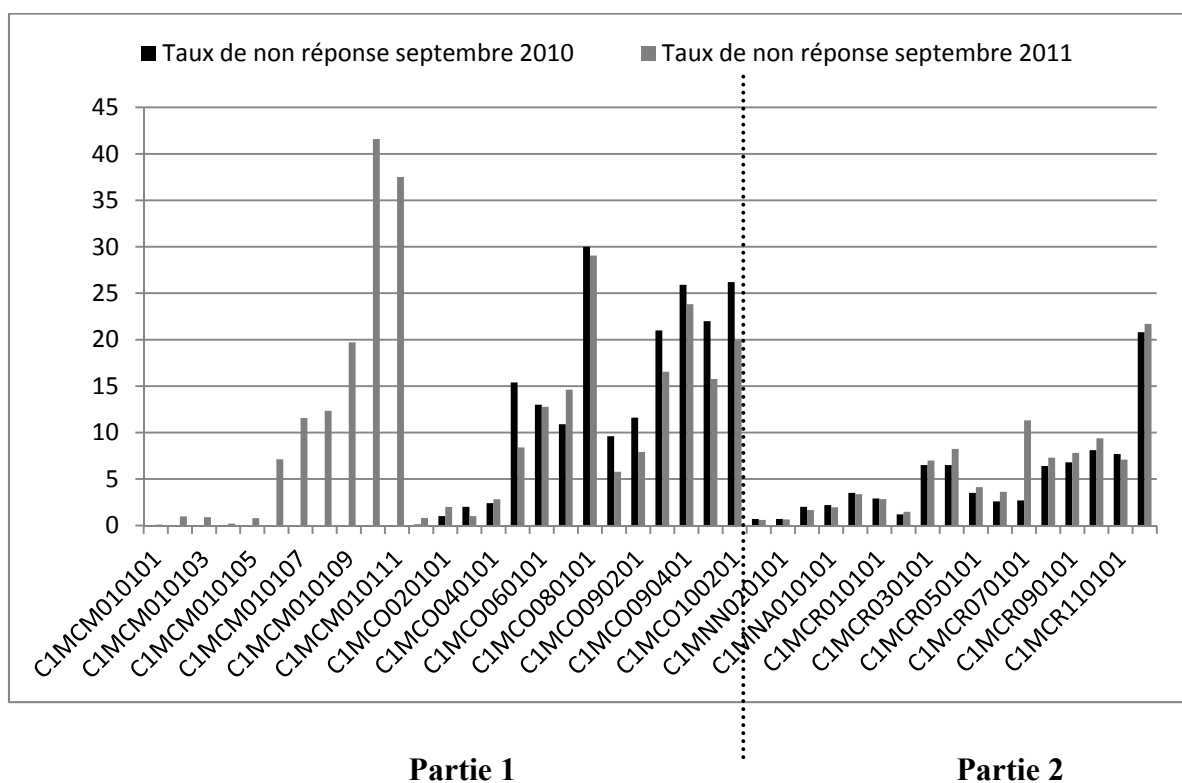
Graphique 4-1 : Taux de réussite par item aux tests 1 de septembre 2010 et septembre 2011 sur l'ensemble des élèves étudiés



Note de lecture : l'ordre des items (sur l'axe des abscisses) est celui de la passation des tests.

3 autres items sont réussis par presque la moitié des élèves à chacun des deux tests. Ces items correspondent à deux calculs posés (39×27 et $544 : 17$) et au calcul du périmètre d'un rectangle. Enfin, si l'on observe les taux de non réponse, ceux-ci varient de 0,1 % (1^{er} calcul mental) à un peu plus de 40 % (avant-dernier calcul mental) : compte tenu des modalités de passation, on peut se demander si ce taux élevé de non réponse est attribuable, non pas à la difficulté de cet item, mais plutôt à un manque de temps, qui lui-même peut découler d'une durée trop importante concédée par les élèves aux calculs précédents. En septembre 2011, le graphique 2 fait en effet nettement apparaître les trois phases successives de la passation de la partie 1 : pour l'exercice 1 par exemple, si la durée totale de l'exercice correspondait en moyenne à 30 secondes par calcul, les élèves pouvaient consacrer davantage de temps aux premiers calculs, quitte à ne pas garder assez de temps pour effectuer les calculs suivants. L'augmentation des taux de non réponses aux six derniers items de l'exercice 1 irait dans ce sens.

Graphique 4-2 : Taux de non réponse par item aux tests 1 de septembre 2010 et septembre 2011 sur l'ensemble des élèves étudiés



Un seul item dépasse les 10 % de non réponse pour les deux tests dans la partie 2, le dernier, qui porte sur l'aire d'un rectangle, alors qu'ils sont plus nombreux dans la 1^{re} partie des tests : ceci peut être expliqué par le fait que la partie 1 est rythmée, et par le format des items de la partie 2 qui sont des QCM, ce qui confirme qu'en général les élèves ont plus tendance à répondre, et plus vite, à des QCM que lorsqu'ils ont amenés à produire eux-mêmes des réponses.

B. Ce que confirment les tests et ce qu'ils incitent à approfondir

1. Les élèves réussissent les additions et les soustractions avec des nombres entiers

Ce sont d'abord les 5 premiers items de calcul en ligne rapide : ils portent sur des additions et une soustraction, et sont réussis par plus de deux tiers des élèves du 1^{er} groupe interquartile. *A fortiori*, ils sont globalement très bien réussis (par plus de 80 % des élèves, avec très peu de non réponses), ce qui confirme les résultats antérieurs que nous avons, et

même les accentue, comme le montrent les taux de réussite des items C1MCM010103 (82,8 % contre 63,9 %) et C1MCM010105 (87,2 % contre 57,8 %). Une hypothèse pour expliquer ces écarts entre les résultats de l'évaluation nationale à l'entrée en sixième en 2005 et ceux obtenus au test 1 de PACEM en 2011 peut être une évolution des pratiques des enseignants en calcul, sur lesquels les programmes 2002 et 2008 ont mis l'accent. Mais nous devons prendre en compte également des différences de passation des tests : en 2005, les calculs étaient donnés oralement, et rythmés par l'enseignant (20 secondes par calcul). Le fait que les calculs soient écrits et non donnés oralement peut également expliquer des taux de réussite supérieurs (en particulier sur un calcul comme $37 + 99$) et faire écho à des questions que nous avons évoquées dans le chapitre 3 : les procédures de calcul utilisées à l'oral par les élèves sont-elles analogues à celles utilisées quand le calcul est écrit ? Quel impact la mobilisation de la mémoire a-t-elle sur ces procédures ? Enfin, nous l'avons dit plus haut, les taux de non réponse élevés des items de l'exercice 1 qui viennent après ces 5 items pourraient en réalité s'interpréter comme une maîtrise insuffisante des habiletés des élèves sur l'addition et la soustraction mentales de nombres entiers, qui demanderaient donc aux élèves trop de temps ou trop d'effort (trop de « concentration »), et qui influeraient défavorablement sur les résultats des items suivants.

2. Les premières difficultés sur les nombres entiers apparaissent sur les multiplications et les divisions

Deux autres items de calcul en ligne rapide concernent les entiers : ce sont les items C1MCM010108 et C1MCM010110. Le taux de réussite du premier item (27×20) est très inférieur (38,2 % contre 60,5 %) à celui obtenu lors de la référence que nous avons pour un test effectué en fin d'année scolaire de sixième, mais il est très proche de celui de l'item 67 des évaluations à l'entrée en sixième 2005 à 2008 (environ 40 %), avec toutefois un taux de non réponse égal à 12,4 %. L'examen des réponses incorrectes les plus présentes dans les productions numérisées montre une fréquence d'environ 10 % pour la réponse 40 ; 5 % pour 54 et 3 % pour 270. Si l'interprétation des deux dernières réponses est aisée – absence de prise en compte d'un des facteurs de la décomposition de 20 en 2 fois 10, celle de la première est plus délicate. Certains des élèves interrogés *a posteriori* ont produit à nouveau cette réponse et l'ont expliquée ainsi : « j'ai fait 2 fois 2 et 7 fois 0 ». On pourrait penser d'abord à une application erronée de la double distributivité, mais il semble plus vraisemblable

d'interpréter cette procédure comme un passage direct de l'addition à la multiplication. Cette observation nous semble être un élément qui confirme la difficulté de certains élèves pour passer de structures additives à des structures multiplicatives. Elle appelle aussi une réserve sur l'utilisation d'une estimation d'un ordre de grandeur comme contrôle d'un résultat : on peut en effet penser que les réponses 40 et 54 seraient automatiquement disqualifiées par une comparaison avec un ordre de grandeur, mais les procédures oralisées des élèves montrent que cela ne va pas de soi si on considère que les élèves ne font pas seulement une confusion au niveau des techniques, mais aussi au niveau des opérations elles-mêmes. Quant au second item ($128 : 4$), son taux de réussite est encore moins élevé (35,2 %), sans réponse erronée « modale » (qui apparaîtrait plus fréquemment que d'autres), mais avec un taux de non réponse très haut (41,6 %), sans doute dû à la place de l'item dans l'exercice. Remarquons enfin que ces deux items relèvent du groupe 4, autrement dit que c'est seulement parmi les 25 % d'élèves qui ont obtenu les scores de réussite les plus élevés que ces items sont réussis par plus de la moitié des élèves.

En calcul posé, deux items portent sur des nombres entiers : les items C1MCO030101 (39×57) et C1MCO050101 ($544 : 17$). Là encore, les résultats obtenus (environ un élève sur deux a réussi chacun de ces deux items) confirment les résultats antérieurs. Mais ce qui est intéressant par rapport aux deux items précédents, c'est que ces deux-là relèvent du groupe 3, ce qui pourrait indiquer une familiarité plus grande des élèves avec le calcul posé qu'avec le calcul mental. Pour la multiplication, environ 30 % des erreurs semblent dues à une erreur de calcul intermédiaire sans erreur de décalage, alors que seulement 3 % des élèves font une erreur de décalage, et 4 % font les deux. Par comparaison, à l'évaluation à l'entrée en sixième 2001, à l'item 11 (64×39), 22,4 % des erreurs sont dues à une erreur de calcul, et 2,7 % à une erreur de décalage, ce qui est tout à fait cohérent. Le rapport de la DEPP comportait alors cette appréciation : « Pour la multiplication, la majorité des réponses erronées provient d'une mémorisation insuffisante des tables et non pas de la technique. Il serait donc souhaitable d'insister sur la mémorisation des tables et sur des activités d'évaluation d'ordres de grandeur plutôt que de proposer des exercices d'entraînement répétitifs portant sur des techniques expertes. » Si la mémorisation des tables et l'estimation d'un ordre de grandeur du résultat constituent sans aucun doute des facteurs d'amélioration des réponses des élèves, nous avons évoqué dans le chapitre 1 une troisième piste, qui est la combinaison d'une multiplication et

d'une addition, fréquente dans une multiplication posée avec retenues, et qui nous semble à approfondir, en particulier dans le contexte d'un travail avec les élèves en calcul mental.

3. Les opérations sur les nombres décimaux constituent des difficultés pour les élèves entrant en sixième : des difficultés sur les opérations, sur les nombres, ou sur les deux à la fois ?

Le constat le plus flagrant est sans doute dans la classification des items par groupe interquartile. Si on regarde en effet la répartition des items comportant des décimaux, on s'aperçoit qu'aucun item ne relève du groupe 1, que deux items relèvent du groupe 2 (l'une est une addition posée et l'autre une multiplication d'un décimal par un entier à un chiffre), que deux autres items relèvent du groupe 3 (une soustraction posée et une addition en ligne), et que tous les autres relèvent du groupe 4 ou au-delà. Ce constat nous semble un des résultats les plus importants à prendre en compte au départ de notre démarche expérimentale.

4 items de calcul en ligne rapide portent sur des nombres décimaux : une addition, une soustraction et deux multiplications :

- Pour l'item C1MCM010106 ($5,2 + 13 + 2,8$), une stratégie experte consiste plutôt à additionner d'abord 5,2 et 2,8 puis 13. Cette utilisation de la commutativité aurait tendance à renseigner sur l'habileté des élèves à gérer un calcul, mais nous n'avons pas d'information sur les procédures réellement utilisées les élèves, que ce soient ceux qui produisent une réponse correcte ou ceux qui produisent une réponse erronée. Une observation aléatoire des réponses numérisées produites par les élèves permet de constater la présence fréquente de 20,10 (environ 10 % des réponses, soit 20 % des réponses incorrectes) qui confirme un traitement séparé des parties entières et décimales. Mais le fait pour des élèves de donner comme résultat 20,10 va, comme nous l'avons évoqué dans le chapitre 1, au-delà d'une simple erreur de procédure. Nous reprenons l'hypothèse qu'elle montre l'absence de familiarité de ces élèves avec les nombres décimaux, autrement dit, que le degré de conceptualisation d'un nombre décimal est sans doute très faible chez la plupart d'entre eux. Cette hypothèse est à prendre en considération pour un travail en calcul mental afin de donner ou redonner de la signification – et de la valeur – aux chiffres utilisés dans l'écriture décimale d'un

nombre décimal. L'idée forte ici est d'oraliser les calculs afin de jouer sur des changements de registres dans différentes situations – écriture, comparaison ou calcul. Des calculs mentaux comme $52 + 28$ ou $0,2 + 0,8$ (deux dixièmes plus huit dixièmes) peuvent amener les élèves à s'approprier l'effet d'un groupement de dix unités ou dixièmes sur une somme et sur son écriture décimale. Un autre exercice consiste à faire compter les élèves, par exemple de 0,2 en 0,2 à partir de 18 pour créer les franchissements d'unités. On peut aussi demander aux élèves d'intercaler 10 nombres compris par exemple entre 7 et 8 : une réponse commune d'élèves donne 7,1 ; 7,2 ; ... ; 7,9 ; 7,10. Il serait également intéressant de demander aux élèves qui ont produit comme réponse 20,10 de calculer $5,2 + 13 + 2$ et de comparer les deux sommes. Cet item fait partie des calculs proposés en 2012-2013, sans apporter d'éléments nouveaux sur les procédures des élèves. Parmi les réponses erronées dans les productions numérisées des élèves, on repère aussi la présence de 9,3 (environ 10 % des réponses) et de 93 (environ 5 % des réponses) : erreurs de lecture ou alignement « forcé » des termes, avec un chiffre des dizaines et un chiffre des unités, ou avec un chiffre des unités et un chiffre des dixièmes pour chacun : comme pour respecter une disposition en colonne mal assimilée? Notons que ces résultats sont l'un comme l'autre à écarter des réponses possibles par un élève qui aurait pris le temps, non pas d'aller jusqu'à estimer un ordre de grandeur du résultat, mais simplement de considérer les nombres en jeu dans le calcul : 9,3 est inférieur à 13 et $13 + 5 + 2$ est beaucoup plus petit que 93. D'autres résultats « aberrants » du point de vue de l'ordre de grandeur apparaissent comme réponses des élèves, sans que nous soyons toujours en mesure de les expliquer comme 110 ou 210,916.

- Le taux de réussite d'environ 30 % à l'item C1MCM010107 (38 – 1,5) confirme à lui seul toutes les difficultés des élèves avec les nombres décimaux. Comment en effet peut-on prévoir un tel taux compte tenu des nombres en présence, et en particulier du nombre à soustraire ? Quels obstacles rencontrent autant d'élèves pour ne pas donner une réponse correcte à un tel calcul ? L'examen de l'échantillon aléatoire parmi les réponses incorrectes des élèves permet de mettre en évidence que la moitié de ces réponses incorrectes est 37,5 : comment un tel résultat peut être aussi fréquent (donné par presque un quart des élèves) ? Là encore, nous suggérons que l'erreur commise révèle davantage un défaut de conceptualisation des décimaux et de leur écriture

décimale plus qu'une erreur de calcul au sens strict comme par exemple une erreur de table ou une erreur de retenue. Nous avons proposé à nouveau cet item à des élèves de sixième en 2012-2013. La même erreur est apparue, accompagnée d'une démarche qui consiste en une espèce de « confusion syntaxique », et qui conduit les élèves à faire $38 - 1$, puis à reporter l'écriture « ,5 » à droite de 37. Cette démarche, peut-être induite par l'écriture en ligne du calcul, va au-delà d'un traitement séparé des parties entières et des parties décimales, et dénote un défaut profond de construction des nombres décimaux²¹⁷. Comme pour l'addition, la non-prise en compte de la virgule a conduit à des résultats comme 23 ou 2,3. On ne sait d'ailleurs pas dans ce dernier cas s'il ne s'agit pas à nouveau d'une confusion « syntaxique » conduisant les élèves à réintroduire une virgule à 23 dans un calcul sur des entiers, un peu comme dans une multiplication posée sur des décimaux. On trouve enfin comme réponse 39,5, qui traduit une confusion (« de surface » ou évitement plus profond ?) avec l'addition.

- Le taux de non réponse à l'item C1MCM010109 ($4,6 \times 3$) est égal à presque 20 %, aussi devons-nous prendre son taux de réussite avec prudence. Mais les erreurs les plus fréquentes renvoient aux deux précédentes analyses : on retrouve d'une part comme réponses 12,18 (traitement séparé de la partie entière et de la partie décimale) et 138 (absence de prise en compte de la virgule), et d'autre part 12,6 qui correspond à la réponse 37,5 pour la soustraction (traitement partiel de la multiplication sur la partie entière, puis juxtaposition de la partie décimale).
- Enfin, l'item C1MCM0101011 ($62 \times 0,5$) a été choisi consciemment dans une vision prospective, pour la formation. En effet, il n'est pas attendu ici que la procédure experte (division de 62 par 2) mettant en jeu un processus de micro-dialectiques objet/outil sur la multiplication et sur 0,5 que nous avons décrit dans le chapitre 1 soit disponible chez les élèves. Cet item est d'ailleurs l'item de l'exercice 1 le moins réussi (17,5 %), un de ceux les moins bien réussis dans l'ensemble du test 1 et également un de ceux auxquels les élèves ont le moins répondu. Notons à nouveau la

²¹⁷ On peut retrouver une erreur analogue dans un calcul posé.

forte présence de la réponse 62,5 qui peut s'interpréter comme une réponse produite par des élèves qui, comme pour la soustraction $38 - 1,5$, juxtaposent « ,5 » à un premier calcul erroné sur la partie entière ($62 \times 0 = 62$).

6 items de calcul posé portent sur des nombres décimaux : une addition, une soustraction et deux multiplications et deux divisions :

- L'item C1MCO010101 ($154,8 + 36,57$) a un taux de réussite légèrement supérieur à celui obtenu lors de l'évaluation nationale de CM2 en 2010, mais reste très conforme aux scores antérieurs relatifs à ce type de tâches. L'addition proposée cumule deux difficultés : une difficulté calculatoire, liée aux tables d'addition et aux retenues (10 % environ des réponses font apparaître une erreur de calcul et une seule ; comme par exemple 190,37 au lieu de 191,37) et une difficulté nouvelle liée à l'écriture décimale des nombres décimaux. Cette rupture de la technique opératoire de l'addition sur les entiers peut entraîner soit des alignements erronés (ici le nombre de chiffres servant à écrire les deux nombres est le même), soit une addition partielle inadaptée ($57 + 8$). Cette erreur apparaît (seule) dans environ 6 % des réponses des élèves. L'étude des taux de réussite par groupe interquartile montre que ce calcul ne constitue une difficulté majeure que pour les élèves du groupe 1.
- Les études précédentes montrent une différence de réussite entre addition et soustraction, avec une diminution régulière des pourcentages de réussite pour la soustraction. On retrouve cet écart pour la soustraction demandée à l'item C1MCO020101 ($138,85 - 49,2$), avec un taux de réussite très proche de celui obtenu lors de l'évaluation nationale de CM2 en 2010. Les erreurs commises sont davantage imputables à des erreurs de calcul, variées comme nous l'avons souligné dans le chapitre 1, qu'à de seules erreurs de positionnement des nombres. On retrouve aussi ce décalage de réussite dans la classification par groupe, puisque cet item relève du groupe 3, et non du groupe 2 comme l'addition.
- Si le taux de réussite de l'item C1MCO040101 ($24,3 \times 6$) est très proche de celui de l'item 81 de l'évaluation nationale CM2 de janvier 2010, l'examen des productions numérisées montre que la majeure partie des erreurs commises proviennent d'erreurs de calcul, ce qui est surprenant comme tenu des tables de multiplication convoquées

pour cette opération. La présence d'une virgule dans un des facteurs serait-elle un facteur perturbant pour les élèves ?

- L'item C1MCO060101 ($276 : 8$) présente un taux de réussite très bas (environ 20 %), bien inférieur à celui obtenu lors de l'évaluation nationale de CM2 en 2010 (34 %), mais 17 % des élèves ont effectué correctement la division euclidienne sans donner le quotient décimal. On peut éventuellement s'interroger sur la latitude de correction en CM2, qui n'a pas existé pour le test de PACEM.
- L'item C1MCO070101 (Multiplication avec des décimaux à poser : $4,28 \times 3,5$) est l'item pour lequel l'écart du taux de réussite avec le taux de référence (Item 61 de l'évaluation nationale à l'entrée en sixième de 1990) est le plus grand. En 1990, environ un élève sur deux avait réussi cet item ; en 2010 et 2011, pour le test 1 de PACEM, un élève sur cinq seulement le réussit. Encore une fois, nous rappelons la prudence dont il faut preuve dans la comparabilité de ces deux taux. Cependant, ce n'est pas la question d'une probable baisse des performances des élèves qui nous préoccupe ici, même s'il semble intéressant et légitime de chercher à y répondre, notamment au regard des nouveaux programmes de 2008 qui ont réintroduit la multiplication des décimaux au CM2. Ce que nous gardons comme résultat, c'est la petite proportion d'élèves qui réussit cette tâche, relevant institutionnellement de l'école primaire, et c'est la question à laquelle doivent répondre, d'une façon ou une autre, les enseignants en sixième, et donc également la formation PACEM.
- L'item C1MCO080101 (Division d'un décimal par un entier : $7,38 : 6$) présente, à côté d'un taux de réussite plutôt bas (environ 35 %) un taux de non réponse élevé (environ 30 %), attribuable à la dernière position de la division dans l'exercice. Si nous n'avons pas de référence quant à ce type de tâches, l'examen des productions des élèves semble montrer que la réponse 123 (au lieu de 1,23) apparaît dans environ dans 10 % des cas (soit environ un tiers des réponses incorrectes).

Nous formulons à ce stade une première synthèse sous forme de trois conclusions intermédiaires. Tout d'abord, les habiletés calculatoires suffisantes pour produire une réponse juste sur une addition ou une soustraction posée avec des entiers ne sont plus efficaces sur les décimaux, la stricte correspondance entre la position spatiale d'un chiffre dans l'écriture décimale d'un nombre et la valeur de ce chiffre ne fonctionnant plus pour assurer la

production d'un résultat juste. Ensuite, il est peu probable que les élèves mettent en œuvre des processus de contrôle de leurs réponses, soit par une prise en compte directe des nombres en jeu dans le calcul à effectuer, soit par une estimation de l'ordre de grandeur du résultat. Ces deux constats confirment des difficultés des élèves déjà identifiées et renvoient selon nous à un déficit partiel ou total du sens des nombres, partiellement ou totalement masqué avec les entiers, et qui apparaît avec les décimaux. Une troisième conclusion, en forme de questionnement, va au-delà des deux premières et interroge le maniement des élèves d'une « écriture à virgule » d'un nombre dans une opération, à la fois sur le plan symbolique et le plan sémantique. Certes, il nous manque ici cruellement des explicitations des procédures utilisées par les élèves ou leurs sources de blocage, mais nous faisons l'hypothèse qu'un certain nombre d'élèves, sans doute parmi ceux qui sont le plus en difficulté, remplacent, peut-être dans le cadre d'un contrat didactique, des procédures correctes par des opérations-en-acte erronées qu'ils se sont constituées, de type hybride, qui mélangent calculs sur les nombres et reports des symboles d'écriture – virgule et chiffres « après la virgule ».

4. La multiplication et la division par 10, 100, 1 000 : des « marqueurs » des apprentissages des élèves?

Dans le test 1, en 2010 comme en 2011, les 4 items concernant cette question présentent des taux de réussite proches de 30 %, avec un taux légèrement supérieur pour le premier d'entre eux ($7,14 \times 100$) et des r_{bis} élevés (entre 0,43 et 0,54) et des taux de non réponse allant en croissant avec l'ordre des items d'environ 5 % à 25 %. Ce sont donc des items discriminants, pour lesquels même si l'ordre dans le test joue, il ne peut expliquer à lui seul les résultats. Ceux-ci confirment, et accentuent des difficultés déjà identifiées en didactique des mathématiques, qui marquent un défaut de conceptualisation globale des nombres décimaux. Ces 4 items relèvent du groupe 4, en étant réussis par environ deux tiers des élèves de ce groupe (ce qui représente environ 15 % de l'ensemble des réponses correctes) : par comparaison, environ un tiers des élèves du groupe 3 les réussissent, 15 % du groupe 2 et 7 du groupe 4, avec des taux de réussite systématiquement légèrement supérieurs dans chacun des groupes pour l'item C1MCO090101 sont des items qui proviennent d'évaluations antérieures, et donc sur lesquels nous avons des informations en termes de taux de réussite :

- L'item C1MCO090101 ($7,14 \times 100$) confirme nos résultats de l'étude préalable du chapitre 1, qui montrait des résultats meilleurs sur ce type de tâches quand le nombre de chiffres « après la virgule » du nombre décimal (ici deux) est inférieur ou égal au nombre de zéros de la puissance de dix (ici deux aussi). L'étude qualitative effectuée sur les réponses incorrectes des élèves confirme essentiellement la présence d'erreurs « classiques », à savoir des zéros mal placés comme 700,14 ou 7,1400, dont la fréquence est la même – de l'ordre de 10 % des réponses de l'échantillon analysé – ou encore 7,140 (7 % des réponses traitées). Mais environ 25 % des erreurs relèvent d'autres résultats comme 700,1400 et d'autres *a priori* inattendus.
- L'item C1MCO090201 ($3,72 \times 100$) révèle également des erreurs connues comme 3,72000 (15 % des réponses traitées) ou 3000,72 (11 % des réponses traitées) ou encore 372,000 (6 % des réponses traitées), mais 30 % environ des élèves produisent une autre réponse incorrecte.
- Pour l'item C1MCO090301 ($16,2 : 10$), les erreurs peuvent provenir d'une confusion avec une multiplication : on trouve ainsi 162 qui correspondrait dans ce cas à la réponse correcte (10 % des réponses traitées) ou 16,20 (10 % des réponses traitées) qui correspondrait à une réponse incorrecte, identifiée dans le cas de la multiplication. La réponse 16 représente également 10 % des réponses traitées, et 25 % environ des élèves fournissent une autre réponse que l'un de ces trois résultats.
- Quant à l'item C1MCO090401 ($67 : 100$), les réponses dominantes incorrectes sont 6 700 (10 % des réponses traitées) et 0 (5 % des réponses traitées). Ici, l'absence de virgule dans 67 cumulée avec l'obstacle éventuel de la division d'un nombre par un nombre plus grand, impossible à concevoir pour un certain nombre d'élèves arrivant en sixième, sont deux explications locales possibles de ces erreurs. Mais, là encore, plus d'un quart des élèves produites des réponses incorrectes autres que ces 3 réponses

En plus de toutes les questions évoquées dans le chapitre 1, ces résultats soulèvent une question très locale : pourquoi les scores de réussite obtenus à ces items dans le test de PACEM sont-ils aussi peu élevés? La structure de la population des élèves testés est-elle la seule en cause (par exemple surreprésentation d'élèves de PCS défavorisées, même dans les collèges ne relevant pas de l'éducation prioritaire) ? Existe-t-il des explications particulières du côté des pratiques des enseignants du 1^{er} degré de l'académie de Créteil (par exemple dues

à leur profil) ? Existe-t-il des pratiques particulières induites par des contextes spécifiques ? A ce stade, ces questions n'ont pas de réponses, notre démarche n'étant d'ailleurs pas orientée vers la recherche de ces réponses, mais vers des modes de prise en compte de ces constatations dans les pratiques des enseignants de mathématiques avec des élèves de sixième. Ce que nous pouvons dire, c'est que nous sommes ici en présence de résultats locaux (mathématiques et géographiques) tout à fait remarquables, et qui interrogent sans doute des conceptions ou des opérations – en – acte erronées d'un grand nombre d'élèves au premier rang de nos préoccupations de formateur.

5. Sur le changement d'écriture d'un nombre décimal

3 items concernant ce type de tâches sont présents dans les tests 1, ayant en commun des r_{bis} élevés (entre 0,36 et 0,54) et des taux très faibles de non réponse (inférieurs à 2 %) certainement imputables au format QCM et à leur position dans les tests (ce sont les 3 premiers items de la partie 2), mais avec des taux de réussite très variables. Comme les 4 items précédents, ils proviennent d'évaluations antérieures, ils sont discriminants et confirment des difficultés déjà identifiées en didactique sur les nombres décimaux. La classification par groupe interquartile fait apparaître que si deux items sur trois (donner l'écriture fractionnaire de 0,38 et l'écriture décimale de $\frac{1}{4}$) relèvent du groupe 4, celui qui demande l'écriture décimale de $\frac{3}{10}$ relève du groupe 2.

Les deux premiers de ces 3 items sont des adaptations des items 66 et 67 de l'évaluation nationale CM2 de janvier 2010.

A/ Entoure la fraction égale à 0,38					
$\frac{38}{10}$	$\frac{0,38}{100}$	$\frac{38}{100}$	$\frac{38}{1000}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{0}{38}$
B/ Entoure l'écriture décimale égale à $\frac{2}{10}$					
2,10	0,2	0,02	20,00	2,0	2,00

Comme les populations ne sont pas les mêmes, il paraît ici intéressant, non pas de comparer les taux de réussite à ces items entre janvier 2010 et septembre 2010, mais d'observer leurs variations relatives. C'est pourquoi nous les avons proposés dans les tests 1, dans les deux adaptations suivantes qui reprennent trois des distracteurs de l'évaluation de janvier 2010 :

- Pour l'item C1MNN010101 :

$\frac{3}{10}$ peut aussi s'écrire :

1 0,03

2 0,3

3 3,0

4 3,10

La distribution des réponses pour cet item (Tableau 4-6) montre clairement que 3,10 est la réponse incorrecte la plus fréquemment choisie par les élèves.

Tableau 4-6 : Distribution des réponses à l'item C1MNN010101 aux tests de septembre 2010 et septembre 2011 sur l'ensemble des élèves étudiés

C1MNN010101	
Test 1 sept 2010	%
0 (non réponse)	0,7
Réponse 1	4,6
Réponse 2	65,4
Réponse 3	8,7
Réponse 4	19,7
9 (réponse illisible)	0,9

C1MNN010101	
Test 1 sept 2011	%
0 (non réponse)	0,6
Réponse 1	5,4
Réponse 2	64,0
Réponse 3	8,3
Réponse 4	21,0
9 (réponse illisible)	0,8

Le format QCM de cet item comme des suivants, nous permet d'affiner cette distribution par groupe interquartile, et le choix de 3,10 se révèle particulièrement fréquent chez les élèves du groupe 1, voire ceux du groupe 2 comme le montre le Tableau 4-7.

Tableau 4-7 : Distribution des réponses à l'item C1MNN010101 au test de septembre 2010 selon le score global

C1MNN010101 (en %)				
Test 1 sept 2010	Gr1	Gr2	Gr3	Gr4
0 (non réponse)	0,9	1,2	0,3	0,2
Réponse 1	6,7	5,0	4,4	1,7
Réponse 2	36,8	60,0	78,7	93,6
Réponse 3	12,7	11,0	7,5	2,5
Réponse 4	41,0	21,6	8,7	1,9
9 (réponse illisible)	1,9	1,2	0,3	0,0

- Pour l'item C1MNN020101 :

0,38 peut aussi s'écrire :

1 $\frac{38}{10}$

2 $\frac{0,38}{100}$

3 $\frac{38}{100}$

4 $\frac{0}{38}$

La distribution des réponses pour cet item (Tableau 4-8) est beaucoup plus hétérogène que pour l'item précédent, chacun des 3 distracteurs ayant été choisi par au moins 10 % des élèves, avec un choix de la réponse 1 effectué par presque un tiers des élèves.

Tableau 4-8 : Distribution des réponses à l'item C1MNN020101 aux tests de septembre 2010 et septembre 2011 sur l'ensemble des élèves étudiés

C1MNN020101	
Test 1 sept 2010	%
0 (non réponse)	0,7
Réponse 1	30,5
Réponse 2	15,8
Réponse 3	39,4
Réponse 4	12,1
9 (réponse illisible)	0,9

C1MNN020101	
Test 1 sept 2011	%
0 (non réponse)	0,7
Réponse 1	30,1
Réponse 2	16,0
Réponse 3	38,7
Réponse 4	13,9
9 (réponse illisible)	0,8

Si les taux de réponses aux réponses 2 et 4 décroissent de façon attendue avec le score global, il est plus étonnant de constater que les proportions d'élèves ayant choisi la réponse 1 sont très voisines dans les groupes 1, 2 et 3 comme le montre le Tableau 4-9. Cette proximité nous semble assez remarquable : traduit-elle une conception erronée de façon générale sur l'écriture décimale, particulièrement résistante, qu'on pourrait retrouver par exemple dans des erreurs sur la comparaison des nombres décimaux ? Traduit-elle une opération-en-acte erronée sur le passage écriture décimale / écriture fractionnaire liée à la présence d'un « zéro mobile » ?

Ou encore marque-t-elle effet de contrat didactique chez certains élèves, qui induirait une réponse systématique de leur part « en dixièmes » dès lors qu'il leur est demandé de passer d'une écriture décimale à une écriture fractionnaire ?

Tableau 4-9 : Distribution des réponses à l'item C1MNN020101 au test de septembre 2010 selon le score global

C1MNN020101 (en %)				
Test 1 sept 2010	Gr1	Gr2	Gr3	Gr4
0 (non réponse)	1,3	0,8	0,3	0,2
Réponse 1	37,7	34,9	31,8	15,6
Réponse 2	20,7	18,7	13,5	9,3
Réponse 3	14,5	29,9	46,9	72,8
Réponse 4	23,5	14,1	7,0	1,9
9 (réponse illisible)	2,3	1,6	0,5	0,2

A la lumière des résultats sur ces deux items, nous pouvons faire au moins deux observations :

- la première est que l'ordre des taux de réussite reste le même entre janvier 2010 et septembre 2010 ; il n'est évidemment pas question d'en conclure que les élèves auraient plus de difficulté à passer de l'écriture décimale d'un nombre décimal à une écriture fractionnaire que l'inverse, les nombres en jeu et les écritures associées proposées, correctes ou incorrectes, n'étant pas les mêmes ; cela indique en tout cas qu'une tâche est plus difficile que l'autre pour des élèves abordant le collège ;
- la deuxième est que, curieusement, l'une des différences entre les taux de réussite entre janvier 2010 et septembre 2010 est positive (celle sur $\frac{3}{10}$) et l'autre négative (celle sur 0,38). Nous n'avons pas d'éléments d'interprétation de ces différences de variation : à quoi cela peut-il correspondre si on considère les périodes de passation des tests ? À une organisation des contenus enseignés ? À une existence effective de phases d'apprentissage des élèves ? À une qualité de la disponibilité des connaissances ?

Le dernier item²¹⁸ sur l'écriture d'un nombre est adapté de l'item 101 de l'évaluation nationale à l'entrée en sixième de 2005 :

Parmi ces quatre nombres, deux sont égaux. Entoure-les.

0,25 0,4 1,4 $\frac{1}{4}$

Pour rappel, cet item avait un r_{bis} égal à 0,48, environ un quart des élèves associe les deux écritures 0,25 et $\frac{1}{4}$, tandis que plus de la moitié d'entre eux associe 1,4 et $\frac{1}{4}$ (0,4 et $\frac{1}{4}$ étant choisis par environ 10 % des élèves). Les programmes de l'école primaire ayant changé en 2008, ce qui nous intéresse ici, c'est de savoir si les apprentissages des élèves sur le changement d'écriture d'un décimal se sont améliorés, et si l'activité d'un enseignant d'une classe de sixième est à réinterroger sur ce sujet particulier, dans un contexte plus large qui est celui de la conceptualisation d'un nombre décimal. Nous avons donc choisi de proposer l'item C1MNN030101 aux élèves sous la forme suivante :

$\frac{1}{4}$ peut aussi s'écrire :

1 0,25

2 0,4

3 1,25

4 1,4

Les réponses des élèves à cet item sont distribuées comme l'indique le Tableau 4-10 ci-dessous:

²¹⁸ Nous rappelons que les tests des évaluations nationales à l'entrée en sixième furent les mêmes de 2005 à 2008. En 2008, le taux de réussite à cet item est égal à 26,9 %.

Tableau 4-10 : Distribution des réponses à l'item C1MNN030101 aux tests de septembre 2010 et septembre 2011 sur l'ensemble des élèves étudiés

C1MNN030101	
Test 1 sept 2010	%
0 (non réponse)	2,0
Réponse 1	26,7
Réponse 2	11,5
Réponse 3	3,1
Réponse 4	54,2
9 (réponse illisible)	0,5

C1MNN030101	
Test 1 sept 2011	%
0 (non réponse)	1,7
Réponse 1	27,3
Réponse 2	11,1
Réponse 3	3,4
Réponse 4	56,0
9 (réponse illisible)	0,5

Les résultats obtenus renvoient aux mêmes grandes tendances que celles observées lors de l'évaluation nationale à l'entrée en sixième en 2005 : une grande moitié des élèves testés a choisi 1,4 comme autre écriture de $\frac{1}{4}$, et plus de 10 % d'entre eux ont choisi 0,4 comme si le trait de fraction était assimilé à la virgule, et/ou comme si écritures décimale et fractionnaire d'un nombre décimal devaient nécessairement comporter les mêmes chiffres. Mais ce qui est encore plus remarquable, c'est que presque aucun élève du groupe 1 ne choisit la bonne réponse, environ un élève sur dix du groupe 2 et un sur trois pour le groupe 3. La distribution des réponses par quartiles donnée dans le Tableau 4-11 met de plus en évidence l'évolution opposée des réponses 1 et 4 selon les groupes des élèves.

Même si l'on admet avec prudence qu'une écriture fractionnaire comme écriture d'un nombre est en cours de construction en fin d'école primaire, ces résultats montrent la présence presque systématique de conceptions erronées chez les élèves des groupes 1 et 2, et de plus de la moitié des élèves du groupe 3.

Tableau 4-11 : Distribution des réponses à l'item C1MNN030101 au test de septembre 2010 selon le score global

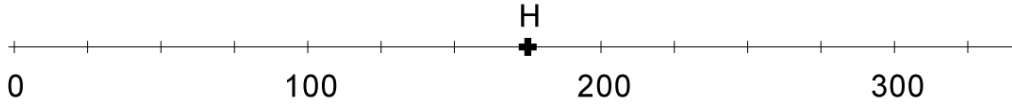
C1MNN030101 (en %)				
Test 1 sept 2010	Gr1	Gr2	Gr3	Gr4
0 (non réponse)	1,9	3,3	2,1	0,2
Réponse 1	3,9	12,2	32,4	72,8
Réponse 2	11,9	14,3	13,0	6,5
Réponse 3	3,3	2,7	4,1	1,9
Réponse 4	78,4	66,2	48,1	17,7
9 (réponse illisible)	0,6	1,3	0,5	0,0

6. Sur le repérage d'un nombre sur la droite graduée

2 items²¹⁹ des tests 1 sont consacrés au placement d'un nombre sur une droite graduée, ou plutôt du repérage d'un nombre sur la droite graduée. Ils ont eux aussi des r_{bis} élevés (entre 0,34 et 0,48), des taux très faibles de non réponse (inférieurs à 3,4 %), et des taux de réussite peu élevés (respectivement 36 % et 30 %). Ces deux items relèvent d'ailleurs du groupe 4 dans notre classification par groupe interquartile.

²¹⁹ Ces deux items ont été empruntés à des évaluations DEPP qui ne sont pas des évaluations nationales de fin de 6^e..

- Pour l'item CIMNA010101 :



La graduation qui correspond au point H est :

1 190

2 130

3 180

4 175

Tableau 4-12 : Distribution des réponses à l'item CIMNA010101 aux tests de septembre 2010 et septembre 2011 sur l'ensemble des élèves étudiés

CIMNA010101	
Test 1 sept 2010	%
0 (non réponse)	2,1
Réponse 1	33,3
Réponse 2	14,3
Réponse 3	13,9
Réponse 4	36,1
9 (réponse illisible)	0,3

CIMNA010101	
Test 1 sept 2011	%
0 (non réponse)	2,0
Réponse 1	33,3
Réponse 2	14,0
Réponse 3	14,9
Réponse 4	35,8
9 (réponse illisible)	0,1

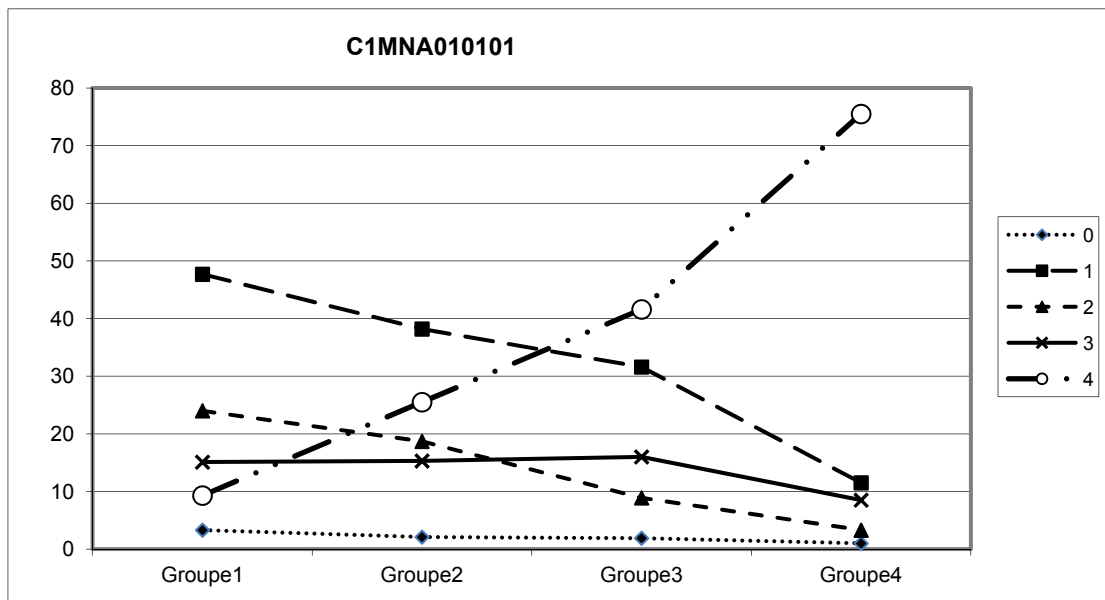
Cet item est intéressant à double titre : d'abord parce qu'il touche à une représentation particulière d'un nombre, et ensuite parce qu'il porte sur des nombres entiers. Or, on constate que les choix des élèves se sont largement portés sur les 3 distracteurs proposés : environ un tiers ont opté pour 190 en associant de manière implicite un pas de graduation à 10 et en « revenant en arrière » à partir de 200 ; environ 15 % ont utilisé le même implicite sur la graduation, mais en partant de 100, et environ la même proportion d'élèves a sans doute identifié que 10 ne convenait pas pour un pas de graduation, sans pour autant donner la réponse correcte.

Le Tableau 4-13 et le Graphique 4-3 illustrent comment les réponses des élèves varient selon leur score global. On observe une forte proportion d'élèves des groupes 1,2 et 3 qui ont choisi 190, et des proportions très proches dans les trois groupes ayant choisi 180.

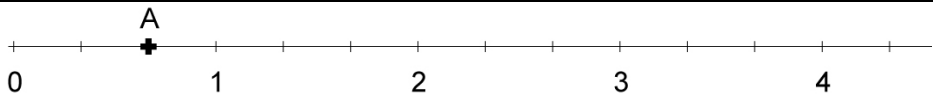
Tableau 4-13 : Distribution des réponses à l'item C1MNA010101 au test de septembre 2010 selon le score global

C1MNA010101 (en %)				
Test 1 sept 2010	Gr1	Gr2	Gr3	Gr4
0 (non réponse)	3,3	2,1	1,9	1,0
Réponse 1	47,7	38,2	31,6	11,5
Réponse 2	24,0	18,7	8,9	3,3
Réponse 3	15,1	15,3	16,0	8,5
Réponse 4	9,3	25,5	41,6	75,5
9 (réponse illisible)	0,6	0,2	0,0	0,2

Graphique 4-3 : Distribution des réponses à l'item C1MNA010101 au test de septembre 2010



Les tests comportent un second item, l'item C1MNA020101 concernant la droite graduée, mais qui ne porte pas sur des nombres entiers :



La graduation qui correspond au point A est égale à :

1 0,2

2 $\frac{2}{3}$

3 $\frac{3}{2}$

4 2

Tableau 4-14 : Distribution des réponses à l'item C1MNA020101 aux tests de septembre 2010 et septembre 2011 sur l'ensemble des élèves étudiés

C1MNA020101	
Test 1 sept 2010	%
0 (non réponse)	3,4
Réponse 1	55,3
Réponse 2	30,4
Réponse 3	5,6
Réponse 4	4,9
9 (réponse illisible)	0,3

C1MNA020101	
Test 1 sept 2011	%
0 (non réponse)	3,4
Réponse 1	55,0
Réponse 2	30,4
Réponse 3	6,7
Réponse 4	4,4
9 (réponse illisible)	0,5

Pour cet item, au contraire du précédent, un seul distracteur a attiré très fortement les élèves, cette attractivité pouvant d'ailleurs avoir été accentuée par l'ordre des réponses proposées : plus de la moitié des élèves ont choisi 0,2 en associant un pas de graduation à 0,1.

S'agit-il réellement d'une erreur, ou d'un choix par défaut pour des élèves pour lesquels $\frac{2}{3}$ (comme $\frac{3}{2}$ d'ailleurs) n'aurait pas de sens, et qui auraient éliminé 2 ? Cette dernière possibilité serait cohérente avec la confusion de $\frac{2}{3}$ avec 2,3 ou de $\frac{3}{2}$ avec 3,2. Pour cet item aussi, la distribution des réponses par quartiles donnée par le Tableau 4-15, en particulier celle des réponses 1 et 2, montre bien la correspondance entre le niveau global estimé des élèves et les réponses qu'ils produisent.

Tableau 4-15 : Distribution des réponses à l'item C1MNA020101 au test de septembre 2010 selon le score global

C1MNA010101 (en %)				
Test 1 sept 2010	Gr1	Gr2	Gr3	Gr4
0 (non réponse)	4,2	4,2	3,2	2,1
Réponse 1	65,5	63,7	58,2	30,7
Réponse 2	14,2	20,3	30,4	61,6
Réponse 3	6,2	5,0	6,1	4,65
Réponse 4	9,1	6,6	2,1	1,0
9 (réponse illisible)	0,7	0,2	0,0	0,0

7. Des relations additives aux relations multiplicatives dans la résolution de problèmes : un saut conceptuel ?

Nous l'avons relevé dans le chapitre 1 lors de notre analyse des résultats des évaluations nationales, des différences de réussites dans des tâches mettant en jeu addition/soustraction et multiplication/division ne semblaient pas résider seulement dans les techniques opératoires, mais aussi dans les opérations à mobiliser pour résoudre des problèmes, en particulier ceux qui relèvent de la proportionnalité. Le test 1, confirme qu'aucun problème multiplicatif (excepté le tiers de 60 km) n'appartient à un des groupes 1, 2 et 3 de notre classification par groupe interquartile. Là aussi, ce résultat nous semble

suffisamment important pour être mis en avant au cours de la formation, et comme piste à approfondir par la recherche.

C. De nouvelles questions que posent les résultats des tests

1. Les questions que posent les items dont le r_{bis} est inférieur à 0,2

Commençons dans ce paragraphe par regarder de près les trois items communs aux deux tests qui ont un r_{bis} inférieurs à 0,2. Ce sont tous les trois des QCM, classés dans la catégorie « Résolution de problèmes » de la deuxième partie des tests.

Le seul d'entre eux qui possède un r_{bis} négatif est l'item C1MCR030101 qui met en jeu une division euclidienne, et dont la bonne réponse est l'entier qui suit le quotient euclidien de la division (13).

On veut transporter 300 voitures par le train.
On charge 24 voitures par wagon.
Combien faut-il de wagons pour transporter toutes ces voitures ?

1 12

2 12,41

3 12,5

4 13

Les 3 distracteurs choisis pour cet item sont le quotient euclidien de 300 par 24 (12), le quotient exact de 300 par 12 (12,5) et un décimal qui pourrait être le résultat de la division de 300 par 12, mais avec une erreur de calcul (12,41). Le Tableau 4-16 rassemble la distribution des réponses des élèves, en % :

Tableau 4-16 : Distribution des réponses à l'item C1MCR030101 aux tests de septembre 2010 et septembre 2011 sur l'ensemble des élèves étudiés

C1MCR030101		C1MCR030101	
Test 1 sept 2010	%	Test 1 sept 2011	%
0 (non réponse)	6,5	0 (non réponse)	7,0
Réponse 1	28,9	Réponse 1	26,1
Réponse 2	12,8	Réponse 2	13,3
Réponse 3	28,2	Réponse 3	31,8
Réponse 4	23,4	Réponse 4	21,7
9 (réponse illisible)	0,2	9 (réponse illisible)	0,1

Une stratégie experte de résolution de cette tâche, mais qui ne serait pas présentée sous forme d'un QCM, passe par une division au sens du groupement (ou de la quotition). On peut également penser à des procédures par essais – erreurs par des additions ou des multiplications du type : avec 10 wagons, on peut transporter 240 voitures, avec 11 wagons, 264 voitures, avec 12 wagons 288 voitures, et donc avec 13 wagons, 312 voitures. En fait, on peut penser que l'item, tel qu'il est présenté, est susceptible de modifier, comme tout QCM, l'activité des élèves en faveur d'une procédure par essais-erreurs. Encore faudrait-il que les élèves adoptent une stratégie adaptée à un tel format de question. Si c'est le cas, on peut supposer que les deux réponses décimales seraient écartées, et qu'il reste alors le choix entre 12 et 13, qu'une simple multiplication permet de trancher. Or, la distribution des réponses montre que la réponse la plus choisie est la réponse 3, c'est-à-dire 12,5. L'analyse conjointe du r_{bis} et de la distribution des réponses semble donc indiquer que les « bons » élèves auraient donc posé la division, et fourni comme réponse le quotient décimal exact.

Indépendamment de son r_{bis} , le taux de réussite de cet item (un peu plus de 20 %) est plutôt bas, de façon relativement inattendue par comparaison avec celui de l'item C1MCR100101 (environ 35 %) qui propose les mêmes nombres dans une situation de division partage (ou de partition). En effet, le fait que la réponse correcte ne soit pas le quotient décimal exact, ni le quotient euclidien de la division euclidienne de 300 par 12, mais l'entier consécutif, semblent être deux éléments suffisamment perturbateurs pour que non seulement beaucoup d'élèves ne donnent pas la réponse exacte (le taux de réussite est faible),

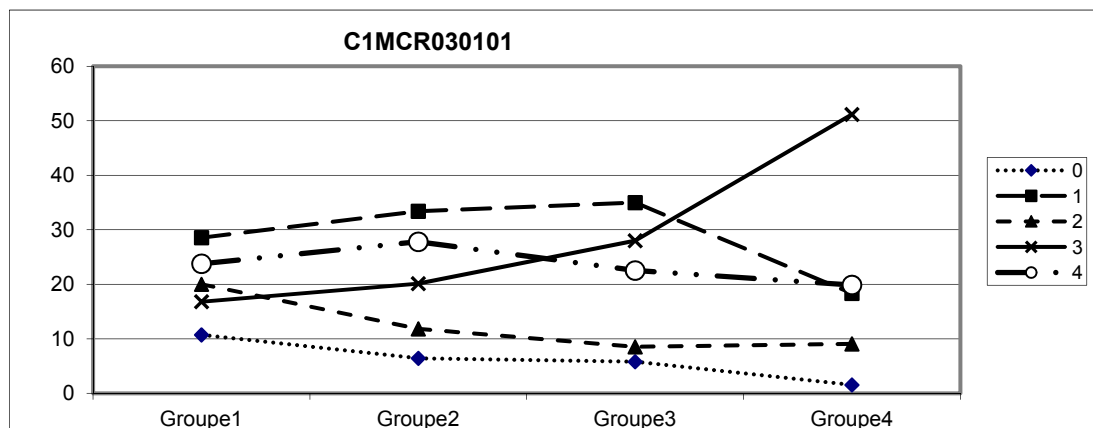
mais en outre, que les « bons » élèves ne la donnent pas (le r_{bis} est négatif). Mais le format d'un QCM et les distracteurs proposés ne nous permettent guère d'en dire davantage, si ce n'est sous la forme d'une hypothèse, à savoir que les « bons » élèves privilégieraient la division posée, ou qu'ils repèreraient des « derniers chiffres » compatibles, et qu'ils donneraient comme réponse 12 ou 12,5 sans prendre en compte la question posée dans l'énoncé. La classification des réponses par groupe interquartile permet de trancher :

Tableau 4-17 : Distribution des réponses à l'item C1MCR030101 au test de septembre 2010 selon le score global

C1MCR030101 (en %)				
Test 1 sept 2010	Gr1	Gr2	Gr3	Gr4
0 (non réponse)	10,7	6,5	5,8	1,5
Réponse 1	28,6	33,4	35,0	18,3
Réponse 2	20,0	11,8	8,5	9,1
Réponse 3	16,8	20,1	28,0	51,2
Réponse 4	23,8	27,8	22,5	19,9
9 (réponse illisible)	0,1	0,4	0,2	0,0

La distribution observée montre en effet que les « bons » élèves ont majoritairement choisi la réponse 3, c'est-à-dire 12,5. Cela signifie qu'ils ont effectué la division, et ont donné comme réponse le quotient décimal correct sans prendre en compte le contexte de l'exercice. Le Graphique 4-4 illustre bien le caractère non discriminant de l'item C1MCR030101 :

Graphique 4-4 : Distribution des réponses à l'item C1MCR030101 au test de septembre 2010



Le deuxième item non discriminant est l'item C1MCR010101 :

Pierre s'est couché à 22 h 15 et s'est levé à 6 h 45.

Combien de temps a-t-il passé au lit ?

1 7 h 30 min

2 8 h 30 min

3 15 h 30 min

4 16 h 30 min

Les réponses pour cet item se distribuent ainsi :

Tableau 4-18 : Distribution des réponses à l'item C1MCR010101 aux tests de septembre 2010 et septembre 2011 sur l'ensemble des élèves étudiés

C1MCR010101		C1MCR010101	
Test 1 sept 2010	%	Test 1 sept 2011	%
0 (non réponse)	2,9	0 (non réponse)	2,8
Réponse 1	16,3	Réponse 1	18,5
Réponse 2	64,8	Réponse 2	63,1
Réponse 3	8,3	Réponse 3	7,8
Réponse 4	7,4	Réponse 4	7,7
9 (réponse illisible)	0,3	9 (réponse illisible)	0,1

Cet item est beaucoup mieux réussi que l'item précédent (le taux de réussite est supérieur à 60 %). Il porte sur un calcul de durée, particulier puisque *a priori* on attend davantage des élèves une procédure par complément (1 h 45 min + 6 h 45 min) que par soustraction (30 h 45 – 22 h 15). Nous faisons ici l'hypothèse qu'un nombre important d'élèves qui n'ont pas obtenu un score global élevé ont donné la bonne réponse sans que les « bons » élèves l'aient fait systématiquement ou presque. Le contexte de l'énoncé,

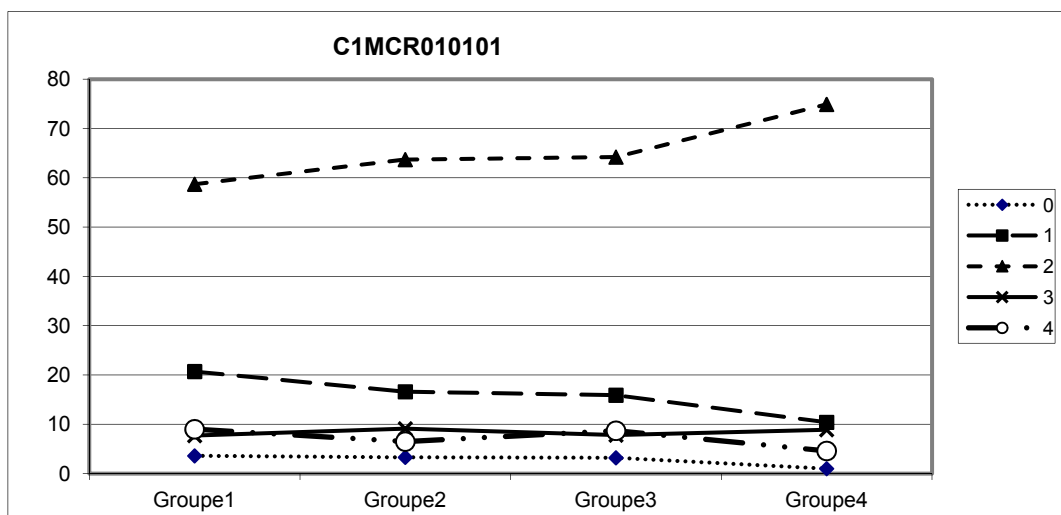
relativement familier pour les élèves, favorise-t-il cette situation ? Pour répondre à cette question, il aurait fallu proposer d'autres énoncés, avec d'autres horaires, et d'autres contextes, ce que nous n'avons pas fait.

Tableau 4-19 : Distribution des réponses à l'item C1MCR010101 au test de septembre 2010 selon le score global

C1MCR010101 (en %)				
Test 1 sept 2010	Gr1	Gr2	Gr3	Gr4
0 (non réponse)	3,6	3,3	3,2	1,0
Réponse 1	20,7	16,6	15,9	10,4
Réponse 2	58,7	63,7	64,2	74,9
Réponse 3	7,7	9,1	7,8	8,9
Réponse 4	9,0	6,5	8,7	4,6
9 (réponse illisible)	0,3	0,8	0,2	0,2

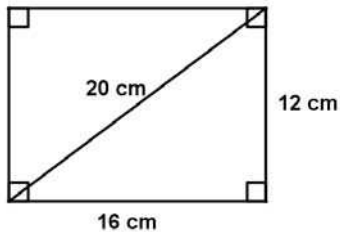
L'étude de la distribution des réponses selon le score global des élèves confirme notre hypothèse sur cet item, comme l'illustre le Graphique 4-5 ci-dessous. On constate également que le choix de la réponse 1 (7h30 au lieu de 8h30) diminue au fur et à mesure que le niveau des groupes augmente, ce qui est cohérent.

Graphique 4-5 : Distribution des réponses à l'item C1MCR010101 au test de septembre 2010



Le troisième item est l'item C1MCR110201 réussi par environ 4 élèves sur 10, et qui présente un r_{bis} presque satisfaisant (0,19 en 2010 et 0,15 en 2011).

Le rectangle ci-dessous n'est pas représenté en vraie grandeur. Quelle est son aire ?



- 1 192 cm²
- 2 240 cm²
- 3 320 cm²
- 4 384 cm²

Tableau 4-20 : Distribution des réponses à l'item C1MCR010101 aux tests de septembre 2010 et septembre 2011 sur l'ensemble des élèves étudiés

C1MCR110102	
Test 1 sept 2010	%
0 (non réponse)	20,8
Réponse 1	40,3
Réponse 2	26,6
Réponse 3	7,3
Réponse 4	4,7
9 (réponse illisible)	0,3

C1MCR110102	
Test 1 sept 2011	%
0 (non réponse)	21,7
Réponse 1	38,9
Réponse 2	21,5
Réponse 3	7,5
Réponse 4	3,3
9 (réponse illisible)	0,1

On peut constater l'influence de la donnée inutile (20 cm) sur les choix des élèves (réponse 2). On constate aussi que la réponse 4 qui correspondrait à l'application de la formule longueur \times largeur \times 2 est très peu choisie. On remarque enfin que, contrairement au

calcul du périmètre du rectangle qui est demandé dans l'item précédent, cet item présente un taux de non réponse très élevé (environ 20 %). Le placement en dernier de cet item explique probablement ce taux de non réponse, et nous faisons l'hypothèse qu'une proportion importante de « bons » élèves n'ont pas répondu à cet item, ce qui expliquerait en partie son r_{bis} . La nature de la tâche avec ses difficultés intrinsèques (bidimensionnalité de l'aire) peut être néanmoins à questionner.

Tableau 4-21 : Distribution des réponses à l'item C1MCR110102 au test de septembre 2010 selon le score global

C1MCR010101 (en %)				
Test 1 sept 2010	Gr1	Gr2	Gr3	Gr4
0 (non réponse)	27,3	25,7	18,6	10,2
Réponse 1	27,0	35,7	41,1	61,6
Réponse 2	30,1	28,0	28,8	18,2
Réponse 3	10,3	6,4	6,5	5,0
Réponse 4	4,9	4,0	4,8	5,0
9 (réponse illisible)	0,4	0,2	0,2	0,0

Le dernier item est l'item C1MCM010103 du test de septembre 2011 ($r_{bis} = 0,17$) que nous avons déjà traité plus haut. Nous sommes en réalité ici face à un item très réussi, dont le relativement faible r_{bis} est dû aux réponses correctes que fournissent les élèves plutôt « faibles » (environ 70 %), mais le fait que le r_{bis} de cet item soit supérieur à 0,1 suffit à considérer celui-ci comme discriminant :

2. Entre cadre numérique et cadre des grandeurs : un appui ou un obstacle ?

La présence de la capacité « Prendre une fraction d'un nombre » dans le test 1, outre son intérêt institutionnel dans l'articulation école - collège, a une double origine : d'une part le fait que l'item « calculer les trois quarts de 44 », à effectuer mentalement dans l'évaluation CEDRE 2008 de fin de collège, relève du groupe 4 de l'échelle CEDRE ; d'autre part, il apparaît que cette question est peu abordée en didactique des mathématiques. Or, nous prenons à notre compte la question de la mobilisation de structures opératoires, qui, dès qu'on

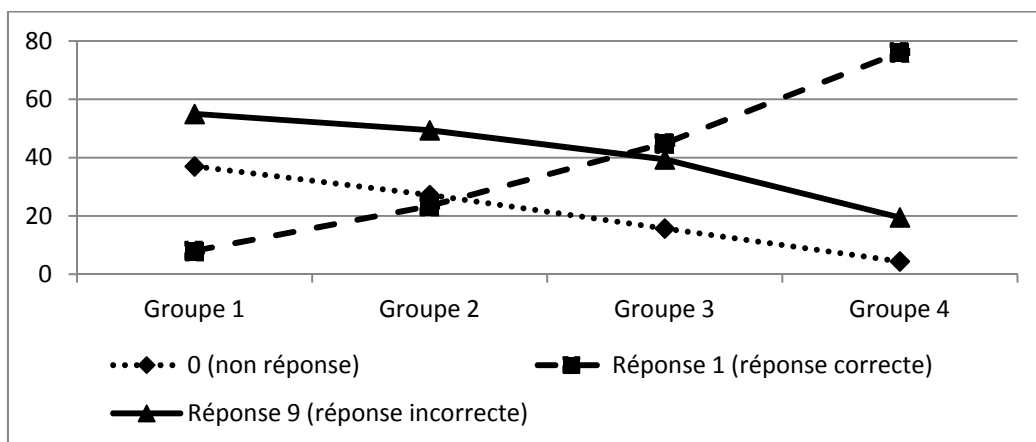
utilise des fractions, pourrait ne pas relever d'un même degré de conceptualisation, selon qu'on se trouve dans le cadre numérique ou dans celui des grandeurs, (Nunes & Bryant, 2009).

Le choix a donc consisté à proposer dans le test 1 une double version de la même structure opératoire à mettre en œuvre, l'une dans le cadre numérique, l'autre dans celui des grandeurs.

Deux items figurent donc dans la première partie du test, avec des réponses à produire, et deux autres sont placés dans la partie 2 des tests, sous forme de QCM. Réussis respectivement par environ 37 % et 12 % des élèves, avec des taux de non réponse élevés (de 16 % à 26 %), ces deux premiers items sont :

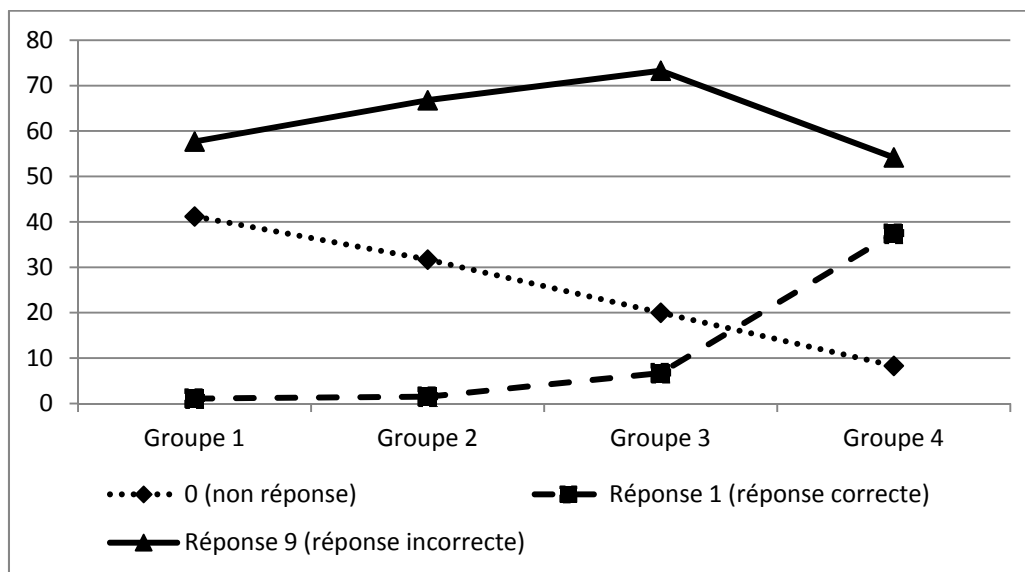
- L'item C1MCO100101 (Le nombre égal au tiers de 60 est ...) : la formulation de l'énoncé et le choix du « tiers » sont évidemment volontaires, et ont pour objectif de placer *a priori* l'activité des élèves dans le cadre numérique, ce qui n'aurait pas forcément été le cas avec une formulation de la forme « Le tiers de 60 est ... » (les élèves pouvant plus facilement introduire eux-mêmes une unité, par exemple des euros ou des minutes) ou avec « Le nombre égal à la moitié de 60 est... » (la notion de moitié semble en effet dépasser le contexte des seuls apprentissages scolaires). Sur l'échantillon des productions analysées, la réponse « 30 » apparaît dans la moitié des réponses, et « 15 » dans un quart des réponses, avec une distribution des réponses très marquées selon les groupes interquartiles.

Graphique 4-6 : Distribution des réponses à l'item C1MCO100101 au test de septembre 2010



L'item C1MCO100201 (Le nombre égal aux deux tiers de 12 est ...) : les commentaires sur cet item sont les mêmes que ceux de l'item précédent, avec les mêmes observations sur l'échantillon de réponses analysées : 6 apparaît dans environ la moitié des réponses, et 3 dans un quart des réponses, ce qui semble indiquer que la notion de tiers (au programme du CM1) n'est pas acquise (pas étudiée ?), ou que les notions de « demi » ou « quart » sont dominantes, et résistantes dans les représentations des élèves. Cet item étant le moins bien réussi des tests, en 2010 et en 2011 (il est situé « hors groupe », c'est-à-dire réussi par moins d'un élève du groupe 4 sur deux), peut-on considérer qu'il existe quelque chose de l'ordre d'un saut conceptuel entre « le tiers de... », qui peut correspondre à un changement de représentation de « ... divisé par 3 », presque à un changement de point de vue, et « les deux tiers de... », qui, même si le calcul peut s'effectuer sans fraction, seraient davantage « du côté des fractions » ? Les pourcentages de réponses incorrectes, y compris dans le groupe 4, suggèrent en tout cas ce genre de question.

Graphique 4-7 : Distribution des réponses à l'item C1MCO100201 au test de septembre 2010



Les deux « versions » de ces deux items sont proposées dans la partie 2 sous la forme suivante :

- L'item **C1MCR080101** :

Une randonnée en vélo est organisée sur un parcours de 60 km.

Un arrêt est prévu au tiers de ce parcours.

Quelle est la distance parcourue avant cet arrêt ?

1 20 km

2 32 km

3 33 km

4 40 km

Le taux de réussite est pour cet item égal à environ 60 %, c'est-à-dire presque deux fois plus grand que celui de l'item **C1MCO100101**, avec un taux de non réponse d'environ 7 %, mais on peut observer que les deux réponses incorrectes les plus produites par les élèves dans l'item **C1MCO100101** (30 et 15) ne sont pas proposées ici comme distracteurs. Cependant, il est intéressant de noter que cet item relève du groupe 2 alors que l'item **C1MCO100101** relève du groupe 4.

- L'item **C1MCR090101** :

Deux tiers de 12 kg font :

1 4 kg

2 8 kg

3 24 kg

4 72 kg

L'analyse des résultats sur cet item confirme les constatations effectuées pour l'item **C1MCR080101**, sur les taux de réussite (environ 33 %) et de non réponse (environ 7 %), et les mêmes restrictions concernant le format de l'item, et l'absence de 3 kg et de 6 kg dans les réponses proposées. Cet item semble confirmer que la fraction « deux tiers » comme opérateur est une réelle difficulté pour les élèves puisque cet item relève du groupe 4.

Nous ne pouvons évidemment pas conclure dans cette comparaison directe des taux de réussite que la réussite des élèves sur ce type de tâches est meilleure dans le cadre des

grandeurs que dans le cadre numérique, compte tenu des formes différentes des items. Mais nous prenons ces résultats comme des éléments didactiques à approfondir, c'est-à-dire comme des pistes à explorer pour la recherche, et comme un point de vigilance tout au long du collège, pour les enseignants, dans leurs classes. C'est dans cette dernière perspective que nous estimons important d'attirer l'attention des enseignants en formation, en lien avec d'autres contenus à enseigner, comme ceux qui relèvent de la proportionnalité par exemple.

D. Bilan des tests 1

Du point de vue du formateur, ces tests ont apporté *a posteriori* ce que nous en attendions, c'est-à-dire des appuis suffisants pour enclencher une réflexion collective pendant les moments de formation avec les enseignants, et déclencher chez eux des prises de conscience *a priori* propices à des évolutions de pratiques professionnelles. En particulier, les résultats obtenus par les élèves nous semblent favorables à la proposition d'un travail dans les classes en calcul mental, qui offre une double alternative, à une « révision » systématique de connaissances anciennes d'une part, et à une gestion de l'hétérogénéité des acquis des élèves en vue de nouveaux apprentissages d'autre part.

Du point de vue du chercheur, nous sommes conscients des limites de ces tests : nous avons déjà évoqué l'ordre et le format et des items, avec en particulier le rôle des distracteurs dans les QCM, qui peuvent influencer en partie les réponses des élèves ; nous avons également souligné le manque d'information sur les conditions de production de ces réponses, et l'analyse partielle des réponses erronées à laquelle nous nous sommes livré, qui ne nous permettent que très partiellement d'accéder aux démarches des élèves, y compris à des démarches inachevées. Mais nous prenons cependant, relativement aux résultats antérieurs dont nous disposons et aux choix que nous avons effectués, les données recueillies comme des résultats à considérer en eux-mêmes, comme dépassant le simple contexte de notre recherche. En particulier, la classification des items par groupe interquartile, qui dépend évidemment de la population testée, nous semble tout à fait intéressante comme source de recherches exploratoires complémentaires.

Chapitre 5. La formation des enseignants dans le dispositif PACEM

Sommaire du Chapitre 5

I. Rappels sur l'élaboration de la formation	338
A. Rappels sur la conception de la formation	338
B. Le scénario global de la formation.....	340
II. La formation 2010-2011	344
A. Séance 1 (16/09/10, matin).....	345
B. Séance 2 (16/09/10, après-midi).....	346
C. Séance 3 (08/11/10, matin).....	351
D. Séance 4 (08/11/10, après-midi).....	357
E. Séance 5 (14/12/10)	358
F. Séance 6 (16/03/11).....	362
III. La formation 2011-2012.....	369
A. Séance 1 (07/09/11)	369
B. Séance 2 (11/10/11)	370
C. Séance 3 (09/11/11)	372
D. Séance 4 (12/12/11).....	374
E. Séance 5 (10/02/12)	376
F. Séance 6 (05/04/12).....	378
IV. Notre analyse <i>a posteriori</i> de la formation du point de vue du chercheur	380

Dans ce chapitre, nous présentons la formation telle qu'elle a été dispensée aux enseignants dans le dispositif PACEM, ou plutôt telle que nous l'avons reconstituée *a posteriori* du point de vue du formateur. En effet, nous ne disposons pas d'enregistrements vidéo de cette formation, ni d'observations par des tiers²²⁰. Nous avons donc recomposé chacune des séances de formation à partir des supports utilisés pendant la formation et de nos propres notes. Cet exercice, qui s'apparente à une chronique, présente des limites dont nous sommes conscient, sur lesquelles nous revenons à la fin de ce chapitre en tant que chercheur au regard des partis pris que nous avons adoptés. Nous revenons également, toujours en tant que chercheur, sur les deux nouvelles variables que nous avons introduites dans cette formation, l'utilisation d'évaluations standardisées et la structure étagée.

Après avoir rappelé brièvement dans la première partie la perspective de la formation, sa structure et décrit le scénario élaboré, nous relatons le déroulement de chacun des moments de formation, tels qu'ils se sont déroulés, du point de vue du formateur. Cette formation n'a pas été identique les deux années de mise en œuvre du dispositif : d'abord parce que la plupart des enseignants ont été impliqués durant les deux années ; ensuite parce que la conjugaison de leurs demandes et de notre volonté d'infléchir notre étude vers un protocole plus précis nous a conduit à travailler plus spécifiquement sur le calcul mental. Nous exposons donc dans la deuxième partie comment la formation s'est déroulée en 2010-2011, puis dans la troisième comment elle a évolué en 2011-2012. Nous complétons cette présentation par une dernière et quatrième partie dans laquelle nous reprenons un positionnement de chercheur, en tentant notamment d'analyser les écarts éventuels entre le scénario *a priori* de la formation et son déroulement effectif, les aspects que nous estimons comme positifs dans cette formation et ses limites, voire les objectifs non atteints.

²²⁰ Nous disposons cependant des remarques de Sophie Rousse dans le cadre de son mémoire de master (2012) et de l'enregistrement vidéo de la 3^e séance de la formation 2010-2011.

I. Rappels sur l'élaboration de la formation

A. Rappels sur la conception de la formation

Une idée initiale originale du projet PACEM est de s'appuyer sur des constats locaux sur les performances des élèves en mathématiques à des évaluations standardisées, et d'aller au-delà de ces constats et de la communication des taux de réussite des élèves à leurs familles qui les accompagnent traditionnellement. Nous nous demandions si l'appropriation et l'utilisation d'une évaluation standardisée par des enseignants pouvaient influencer leurs pratiques. Et comment cette évolution des pratiques, si elle avait lieu, pouvait contribuer à l'amélioration des acquis des élèves ? Notre projet est d'apporter une réponse à ces questions pour le début du collège, pour la classe de sixième²²¹.

Dans cette perspective, nous avons ainsi mis en œuvre une formation, en partie fondée sur l'appui sur un travail dans une « Zone Proximale de Développement des Pratiques » (ZPDP), explorée par la formation, et dont le principe général peut s'énoncer ainsi : nous supposons que les résultats des élèves sont dans une proportion non négligeable déterminés par les pratiques de leurs enseignants, et nous supposons possible de jouer sur des marges de manœuvre disponibles dans l'exercice du métier d'enseignant pour faire évoluer ces pratiques grâce à l'analyse d'items et de résultats d'évaluations standardisées *ad hoc*. Nous supposons pour cela qu'un travail spécifique en formation sur les items et les résultats de ces évaluations permet au formateur, en questionnant les « difficultés des élèves », d'accéder à la ZPDP des enseignants, puis d'ajuster les contenus à apporter. Nous supposons que ce processus, qui vise une prise de conscience des enseignants étayé et relayé par des apports adaptés de la formation, peut permettre de rendre visible l'effet de la formation sur les acquis des élèves. Autrement dit, nous imaginons en quelque sorte un nouveau type de formation, centrée

²²¹ Nous avons également monté un autre projet à Marseille à l'école primaire, en CM1, dont l'étude approfondie des résultats est actuellement en cours.

explicitement sur les acquis des élèves, mais qui intègre, en termes de modalités, les principes formulés pour des formations centrées sur le travail des enseignants. Cela dit, comme ces résultats se voient évidemment *a posteriori*, cela ne peut agir qu'à partir d'une certaine durée, ce que nous prendrons en compte dans la conception et l'analyse de l'expérimentation.

Une deuxième idée originale du dispositif PACEM est d'intégrer une formation, non seulement destinée à modifier des pratiques individuelles ordinaires, mais aussi à encourager un travail collectif au sein des établissements. Le projet cherche en effet à jouer sur les apprentissages des élèves d'enseignants qui ne bénéficient pas de la formation, mais qui exercent dans les mêmes collèges que leurs collègues participant à la formation. Il s'agit donc d'encourager une dynamique d'équipe disciplinaire, en suggérant des échanges plus réguliers sur des pratiques existantes, ou sur la mise en œuvre de pratiques « innovantes ». Pour cela, nous misons également sur la promotion au sein des équipes d'un travail collectif d'analyse des items proposés dans des tests diagnostiques et de leurs résultats. Bien entendu, cette nouvelle dimension entre également en jeu dans la formation à concevoir, puisque tous les enseignants de tous les collèges n'accédaient pas à la formation : nous avons prévu en effet, pour respecter une situation réaliste de formation, qu'un seul enseignant par collège participe à la formation.

L'expérimentation, envisagée dans sa globalité, comporte donc *a priori* une dimension individuelle, à l'échelle de la classe, et une dimension collective, à celle du collège. Au niveau de la classe, elle vise la prise en compte, par chaque enseignant, des réussites des élèves, mais aussi la compréhension de leurs difficultés afin de mettre en œuvre des stratégies pour les traiter. Les apports reçus et les échanges entre enseignants lors de la formation auraient pour objectif de les amener à adapter leur enseignement quotidien, à construire de nouvelles séquences pour leur classe, à les penser différemment dans leur progression annuelle. Au niveau du collège, le projet initial mise sur une « percolation » des éléments qu'ils reçoivent en formation, c'est-à-dire sur leur diffusion auprès de leurs collègues après appropriation (avec transformation éventuelle). Ce questionnement des pratiques personnelles vise à enclencher une dynamique d'établissement puisque ces démarches demandent à être partagées et interrogées. Il y aurait donc un double mouvement à créer, et par conséquent un double défi à relever : en formation, du collectif vers l'individuel, c'est-à-dire que chaque enseignant reparte outillé, avec la volonté et le désir de faire évoluer ses propres pratiques, puis, dans les

collèges, de l'individuel vers le collectif, dans la perspective de partage de matériaux et de questionnements, qui à leur tour, apportent prises de conscience et possibilités d'évolution des pratiques aux collègues qui n'ont pas participé à la formation.

B. Le scénario global de la formation

Le cœur du dispositif, le moment de formation en présentiel, a pour objectif l'outillage didactique des enseignants : pratique, afin d'élargir leur palette des possibles, et intellectuel pour les aider à fonder leurs choix. Il s'articule *a priori* autour de quatre temps successifs, chacun d'entre eux respectant au maximum un travail dans la ZPDP au sens où nous l'avons évoqué plus haut, le premier s'en distinguant légèrement puisqu'il se place en partie en amont de ce travail dans la ZPDP, tous centrés sur les acquis des élèves de sixième dans le domaine numérique et les pratiques en classe, notamment en calcul mental en lien avec ces acquisitions numériques :

- une phase de déstabilisation : il s'agit d'amener les enseignants à accepter de lâcher prise sur certaines de leurs pratiques, et d'abord de leurs représentations, de « faire de la place pour du nouveau ». Pour ce premier temps de formation, nous choisissons d'utiliser des éléments statistiques, issus d'évaluations standardisées antérieures puis du test spécifique au dispositif, ce qui permet d'interroger et donc d'objectiver la difficulté d'une tâche. Mais ces éléments permettent aussi, comme nous l'avons dit, d'accéder aux représentations, aux pratiques de classe des enseignants, c'est-à-dire de déterminer « là où ils en sont » quand ils sont en formation. Cela passe par des questionnements, collectifs, individuels, qui visent de la part du formateur une dénaturalisation de certaines pratiques. Cette première phase de déstabilisation est évidemment délicate puisqu'il s'agit d'une part de ne pas heurter les enseignants avec un étalage « brutal » de résultats qui pourraient les conduire à des réactions uniquement négatives du type « On le sait bien », ou « Quand les élèves arrivent avec ce niveau, on ne peut rien faire », et d'autre part d'ouvrir la porte à des réactions plus ou moins spontanées des enseignants. C'est la raison pour laquelle, non seulement il y a évidemment des précautions à respecter dans la présentation des items et des résultats, mais nous faisons précéder cette présentation d'un préambule qui marque notre connaissance des conditions

d'exercice du métier. Ce préambule permet d'entrer en résonance non pas directement avec des enseignants, que nous allons apprendre plus ou moins à connaître, mais avec eux comme exerçant un métier, avec ses contraintes, et dans lequel tout ne dépend pas d'eux ;

- une phase d'apport de contenus de la part du formateur : contenus mathématiques et éléments de didactique, liens avec les programmes, explicitation des capacités attendues ;
- une phase d'appropriation : des tâches alternatives à celles des manuels utilisés sont proposées aux enseignants, associés à différents déroulements, potentiellement adaptables à la classe ; nous verrons au chapitre 3 en quoi des tâches de calcul mental nous semblent particulièrement bien convenir ;
- une phase d'organisation, de structuration et de contextualisation : ce dernier temps de la formation fait écho au premier puisqu'il s'agit de proposer aux enseignants des éléments leur permettant de reconstruire des séances et, à plus longue échéance, des séquences, puis de réviser la façon dont ils concevaient jusqu'alors leurs progressions.

Le format de la formation est *a priori* restreint par les moyens financiers habituellement disponibles en formation continue, ce qui nous amène donc à concevoir une formation sur 18 heures, format acceptable dans le cadre d'une action académique de formation. Nous sommes cependant conscient dès le départ de notre entreprise que cette durée de formation est faible au regard des enjeux visés, que l'amorce de la formation va avoir une importance considérable et que le suivi des enseignants, avec les moyens dont nous disposons, aura une importance tout aussi grande. C'est la raison qui nous conduit à envisager une formation répartie sur 1 première journée complète (lancement de l'expérimentation, et phase d'amorce), puis sur 4 demi-journées espacées tout au long des deux premiers trimestres de l'année scolaire.

De façon générale, la disponibilité du formateur est importante, d'autant plus importante sur une formation courte. C'est au formateur qu'il revient, à partir de leurs commentaires, de reconnaître et d'attirer l'attention des enseignants, sur les connaissances qu'ils ont évoquées et que les élèves ont mis ou non en fonctionnement pour réussir tel ou tel

item. C'est au formateur qu'il revient de favoriser les liens entre les tâches, les programmes et la nature des notions en jeu, c'est-à-dire d'opérationnaliser sa connaissance de la composante institutionnelle et de la composante cognitive. C'est au formateur qu'il revient aussi de prendre en compte les contraintes sociales qui interviennent dans l'organisation des établissements et des classes, et là aussi d'associer les composantes sociale et personnelle des pratiques, et la composante médiative. En particulier, un enjeu spécifique pour le formateur est de faire en sorte que les enseignants présents en formation intègrent du calcul mental dans leurs pratiques, avec des intentions didactiques précises, adaptées à leurs classes, et qu'ils les partagent, au moins en partie, avec les collègues de leurs établissements.

Notre projet de formateur n'est donc pas de prescrire telle ou telle méthode, mais d'ouvrir la palette des pratiques possibles des enseignants à partir de leurs pratiques existantes, en jouant sur une modification de leurs représentations et sur leur outillage didactique, intellectuel et pratique. Les moyens utilisés pour atteindre ce double objectif sont l'utilisation des résultats aux tests, destinés à sensibiliser les enseignants sur le niveau initial de leurs propres élèves, une mise en relief des notions à enseigner (analyse des programmes, nature des connaissances à enseigner, liens entre elles, hiérarchisation, etc.), un travail sur des contenus à proposer aux élèves et des manières possibles de le faire, et enfin une phase de contextualisation et de structuration, afin de ne pas laisser complètement à la charge des enseignants, en dehors du temps de formation en présentiel, un travail de réorganisation qui favorise leur appropriation des contenus de la formation dans la perspective de leur utilisation en classe.

Quant aux modalités, elles sont fortement contraintes par la durée de la formation, et la nécessité de réguler l'expérimentation, donc de consacrer une partie du temps à une information collective. En réalité, compte tenu de ces éléments, et du nombre relativement restreint d'enseignants, nous choisissons de rester le plus souvent en « grand groupe », avec des supports de formation vidéoprojetés, et l'intention d'installer des échanges collectifs à partir des réactions des enseignants. Cela correspond à nos hypothèses de formation, apporter des connaissances sur les contenus à enseigner et travailler au maximum dans une zone proximale de développement des pratiques, et cela nous contraint à avoir suffisamment de ressources disponibles, afin de pouvoir nous adapter aux représentations et aux besoins exprimés des enseignants. Une plate-forme en ligne a par ailleurs été ouverte aux enseignants,

afin de déposer les documents de formation, et dans un moindre degré, de mutualiser des ressources apportées par les enseignants eux-mêmes.

En conclusion, ce qui devait caractériser notre activité de formateur pendant la formation envisagée, c'est de dégager petit à petit, à partir des résultats des élèves, des ressources et des choix (variabilités, marges de manœuvre) en terme de contenus et déroulements à partir des diversités et des régularités qui s'exprimeront, et finalement d'enrichir la palette des possibles pour les enseignants, avec des possibles pour lesquels ils disposeront d'outils d'analyse, partageables et diffusables au sein de leurs collègues respectifs.

II. La formation 2010-2011

La formation des 19 enseignants « correspondants » (soit un enseignant par collègue expérimentateur) s'est déroulée en présentiel sur 6 demi-journées réparties dans l'année²²². Les moyens mobilisés pour ce dispositif sont donc ceux d'une action de formation continue ordinaire de 18 heures, auxquels il convient d'ajouter 1 heure supplémentaire année (1 HSA) attribuée à chaque enseignant correspondant pour son investissement dans son établissement²²³. Notons aussi que la participation des professeurs correspondants qui repose sur le volontariat, renvoie assez bien à la réalité puisque les stages de formation continue à destination des enseignants du second degré sont eux-mêmes organisés sur la base de l'engagement volontaire des professeurs.

Si la conception globale de la formation est claire pour nous quand le projet démarre, ses contenus et ses modalités ne sont pas encore précisément définis, et dès le départ, nous savons que nous allons disposer d'une durée restreinte pour des objectifs ambitieux. Nous avons choisi de grouper les deux premières demi-journées pour nous donner suffisamment de temps pour lancer le projet²²⁴ et amorcer la formation elle-même. Cette première journée est donc déterminante. De façon générale, le premier contact avec des enseignants pendant un stage de formation continue est particulièrement important. Cette première phase, dite « d'enrôlement », n'est absolument pas spécifique à PACEM, d'autant plus qu'un contrat est passé avec les enseignants correspondants ; elle a presque plus d'importance dans un stage de formation continue « ordinaire » d'un plan académique de formation, où les enseignants sont susceptibles de ne pas revenir en formation d'une séance à l'autre. Toutefois, même si le contexte est cette fois différent, cette première rencontre reste délicate : il s'agit du début de la

²²² L'organisation logistique de la formation a été gérée par Ollivier Hunault, IA-IPR de mathématiques dans l'académie de Créteil.

²²³ L'attribution de cette HSA a été décidée par William Marois, alors Recteur de l'académie de Créteil.

²²⁴ Cette première journée est placée avant la passation des tests.

première phase, au cours de laquelle un questionnement profond sur les connaissances et les pratiques est visé, pouvant aller jusqu'à une déconstruction de certaines représentations, avec, en parallèle, le développement postérieur d'un objectif d'animation au sein des établissements qui demande au contraire une certaine assurance pour les enseignants correspondants. En effet, nous allons en quelque sorte leur demander de jouer un rôle d'animateur pédagogique en mathématiques dans leurs collèges. Ils seront ainsi chargés localement à la fois d'assurer l'organisation de l'expérimentation²²⁵ dans leur établissement, et d'assumer un rôle de « diffuseur » auprès de leurs collègues des grands axes et des contenus travaillés pendant la formation. Du point de vue de l'expérimentation, nous devons donc aussi responsabiliser les enseignants qui viennent en formation afin qu'ils endossent pleinement la mission qui est attendue d'eux, sans leur faire toutefois porter une charge trop lourde pour eux, et d'une certaine façon illégitime, auprès de leurs collègues. Enfin, du point de vue de la formation elle-même, et pour amorcer le questionnement qui justifie nos propositions, nous devons profiter de tous les instants de la journée²²⁶ pour commencer à cerner où en sont les enseignants du point de vue de leurs pratiques. Cet aspect est lui aussi crucial pour la suite.

Dans ce qui suit, nous présentons rapidement les objectifs assignés à chaque moment de formation, en les rapportant aux partis pris explicités dans le chapitre 3, puis nous en relatons les déroulements, vécus en tant que formateur.

A. Séance 1 (16/09/10, matin)

La séance, antérieure à la passation du test 1 par les élèves, est essentiellement consacrée à la présentation du projet, à l'organisation de la passation des tests par les élèves et

²²⁵ Ce point se révélera beaucoup plus chronophage que nous ne l'avions prévu dans les moments de formation au cours de l'année 2010-2011. En revanche, nous y consacrerons beaucoup moins de temps en 2011-2012.

²²⁶ Il faut avouer ici qu'un élément important de la journée est le déjeuner qui est pris en commun, et au cours duquel la parole peut se libérer avec des anecdotes qui rendent compte des contextes professionnels des enseignants présents. C'est un moment informel privilégié où le quotidien des enseignants s'exprime très rapidement, par les mots des uns ou par le silence des autres.

au déroulement prévu du dispositif pendant l'année scolaire. Même si tous les enseignants présents connaissent le projet et sont volontaires, nous avons prévu de consacrer à nouveau du temps à sa description et à l'explicitation de ses objectifs. Il s'agit en quelque sorte que ces collègues se l'approprient et qu'ils en deviennent à leur tour les porteurs, dans un processus de dévolution. Cela passe à nos yeux par des mots pour le dire, mais surtout par une compréhension globale de leur part qui doit comporter une articulation avec leurs propres activités avec les élèves, dans et en dehors de la classe (notamment avant la classe). Dès le début, nous avons décidé d'exposer l'esprit général de la formation : elle n'a pas de visée prescriptive, il s'agit d'ouvrir la palette des pratiques possibles individuelles en apportant du relief à certaines notions au regard des résultats des élèves à l'entrée en sixième²²⁷ et de favoriser des dynamiques collectives entre enseignants. Nous présentons également la manière dont nous envisageons d'appréhender l'étude de l'activité des enseignants, directement formés ou non, au cours de l'année scolaire. Enfin, la création d'une plate-forme collaborative et son rôle *a priori* sont décrits, tout comme l'inscription du projet dans une recherche.

Le déroulement de cette première demi-journée, très informative, est conforme à ce qui était prévu, avec de nombreuses questions, très concrètes, des enseignants relatives à l'organisation des tests dans leur collège et le rôle qu'ils auront à y jouer : réception des cahiers d'évaluation, communication et partage des responsabilités avec leur administration, envoi des cahiers à la société de numérisation, etc.

B. Séance 2 (16/09/10, après-midi)

Nous entrons au cours de cette deuxième séance dans le cœur de la formation dont l'objectif global, nous le rappelons, est d'outiller, pratiquement et intellectuellement, les enseignants dans le domaine particulier des nombres et du calcul. Le contenu de l'après-midi

²²⁷ Les résultats dont nous parlons ici sont ceux d'évaluations standardisées antérieures et qui nous permis de concevoir une partie de la formation *a priori*.

consiste principalement en des premiers apports sur les acquis des élèves à leur entrée en sixième, au moyen d'un diaporama reprenant un travail que nous avons effectué à partir de plusieurs évaluations menées par la DEPP sur plusieurs années²²⁸. Mais, fidèlement à notre projet, il ne s'agit pas de procéder à un monologue purement informatif, mais bien d'utiliser les résultats présentés pour faire réagir les enseignants, et commencer à accéder avec eux ; et à les faire accéder, à ce qu'ils voudront bien dévoiler de leurs connaissances, de leurs représentations, de leurs besoins et de leurs pratiques. Nous l'avons souligné dans le chapitre 2, nous avons déjà souvent recouru à cette stratégie lors de stages de formation continue, notamment pour la formation de néotitulaires dans l'académie de Créteil. En effet, après nous être appuyé pendant plusieurs années sur des simulations d'épisodes de séances²²⁹ en classe pour amorcer des actions de formation continue, nous avons ensuite choisi de partir exclusivement de résultats des évaluations nationales. Cette entrée en matière nous semble présenter l'avantage d'être moins coûteuse en temps avec des effets assez similaires, tout en étant moins risquée sur le plan émotionnel vis-à-vis des stagiaires²³⁰. Nous avons également souvent utilisé cette nouvelle stratégie pour des liaisons école/ collègue.

²²⁸ Une synthèse de ce travail a fait l'objet d'un article dans le n°79 de la revue Education et formations, publiée par la DEPP en décembre 2010.

²²⁹ Colloque Versailles, 2005, Scénario-dispositif pour la formation continue d'enseignants néotitulaires de mathématiques au collège, Chesné, Coulange, Haspékian et Delzongle.

²³⁰ Partir de simulations a en revanche l'avantage potentiel de créer des dynamiques de groupes plus rapides, intéressantes ensuite dans la conduite du stage.

Le diaporama commence par la présentation des contenus des programmes du CM1 et du CM2, ou plus exactement de la programmation donnée dans les instructions officielles pour ces deux niveaux :

CM1	CM2
<p style="text-align: center;">Calculer mentalement</p> <ul style="list-style-type: none"> - Consolider les connaissances et capacités en calcul mental sur les nombres entiers. - Multiplier mentalement un nombre entier ou décimal par 10, 100, 1 000. - Estimer mentalement un ordre de grandeur du résultat. <p style="text-align: center;">Effectuer un calcul posé</p> <ul style="list-style-type: none"> - Addition et soustraction de deux nombres décimaux. - Multiplication d'un nombre décimal par un nombre entier. <ul style="list-style-type: none"> - Division euclidienne de deux entiers. - Division décimale de deux entiers. - Connaître quelques fonctionnalités de la calculatrice utiles pour effectuer une suite de calculs. <p style="text-align: center;">Problèmes</p> <ul style="list-style-type: none"> - Résoudre des problèmes engageant une démarche à une ou plusieurs étapes. 	<p style="text-align: center;">Calculer mentalement</p> <ul style="list-style-type: none"> - Consolider les connaissances et capacités en calcul mental sur les nombres entiers et décimaux. <ul style="list-style-type: none"> - Diviser un nombre entier ou décimal par 10, 100, 1 000. <p style="text-align: center;">Effectuer un calcul posé</p> <ul style="list-style-type: none"> - Addition, soustraction, multiplication de deux nombres entiers ou décimaux. - Division d'un nombre décimal par un nombre entier. <ul style="list-style-type: none"> - Utiliser sa calculatrice à bon escient. <p style="text-align: center;">Problèmes</p> <ul style="list-style-type: none"> - Résoudre des problèmes de plus en plus complexes.

Cette entrée a pour objectif de faire un point institutionnel. Nous supposons (et allons vérifier) que le peu de connaissances qu'ont en général les enseignants du second degré sur les programmes du premier degré²³¹ va déjà provoquer des commentaires et des réactions de leur part sur ce que les élèves savent et ne savent pas faire. Cela constitue pour nous en tant que formateur des premières indications sur les représentations des enseignants.

La deuxième étape préliminaire avant l'exposition de résultats est la présentation rapide de « grands problèmes de la profession » qui touchent actuellement le collège. Nous l'avons également rappelé dans le chapitre 2, l'objectif que nous visons ici, et qui peut aller

²³¹ Les programmes de l'école primaire ont été modifiés en 2008, intégrant un certain nombre de notions, comme la multiplication de deux décimaux ou la longueur du cercle, qui relevaient depuis 1995 de la sixième (et avant 1995 de l'école primaire).

jusqu'à une déconstruction, est *a priori* délicat, et il s'agit ici de marquer notre connaissance des conditions d'exercice du métier d'enseignant, et des contraintes qui pèsent sur elles. Parmi celles-ci, nous mettons d'abord en avant notre proximité empirique²³², vis-à-vis des questions de gestion de classe, notamment en éducation prioritaire, et d'hétérogénéité du niveau des élèves. Nous abordons également les questions relatives à la mise en œuvre du socle commun, à l'utilisation de la notion de compétence, à la part donnée à la résolution de problèmes, et à l'utilisation des TICE. L'idée centrale est de mettre en avant dès ce moment que l'objectif final d'apprentissage visé dans le projet pour les élèves n'est pas la reproduction de mécanismes, mais l'acquisition de connaissances disponibles, dans une conception dynamique qu'offre la résolution de problèmes. En regard de ces aspects dont nous savons qu'ils impactent les pratiques des enseignants, nous présentons rapidement en quoi la réforme des mathématiques modernes, l'introduction des calculatrices, l'accent mis sur la résolution de problèmes, le profil et la formation des enseignants du 1^{er} degré et du 2nd degré, les ressources disponibles (manuels et sites) peuvent constituer des sources de réflexion pour comprendre à la fois les difficultés que rencontrent les enseignants et les résultats des élèves à des évaluations standardisées. Cette deuxième phase d'introduction complète la précédente avec le même double objectif, à savoir fonder la suite de la séance tout en la « sécurisant », et recueillir des informations sur « là où en sont les enseignants », en instaurant un dialogue à partir de questions naïves.

Vient ensuite ce qui constitue le « noyau dur » de la séance, c'est-à-dire une présentation des principaux résultats issus de différentes évaluations menées par la DEPP au cours des vingt dernières années sur les acquis des élèves en calcul à leur entrée en sixième. Cette présentation est une synthèse des résultats exposés dans la deuxième partie du chapitre 1. Elle s'effectue toujours en favorisant des réactions de la part des enseignants, des constats exprimés à partir de leurs propres expériences, allant dans le sens des résultats présentés ou non, ... et les premières questions de leur part sur le projet. Les résultats présentés portent sur le calcul mental et le calcul posé. Concernant le calcul mental, nous ne savons pas, au début

²³² Nous aurions envie d'ajouter « humaine ».

de la formation, quelles sont les pratiques des enseignants, et ce premier contact est l'occasion d'en savoir un peu plus. Nous découvrirons très rapidement que nos hypothèses dans ce domaine étaient optimistes : non seulement la plupart des enseignants ne proposent pas d'activités régulières de calcul mental, mais certains d'entre eux se révéleront eux-mêmes plutôt malhabiles dans la gestion de calculs élémentaires. Notre rôle de formateur consiste à ce moment-là à prendre en compte cette réalité, en improvisant, et pour cela, nous choisissons d'explicitier plusieurs procédures possibles associées à des tâches à proposer aux élèves, en faisant comme s'il s'agissait uniquement d'explorer l'ensemble des possibles, du point de vue des élèves, et de les comparer entre eux. La problématique concernant le calcul posé est tout autre, nous l'avons déjà évoquée, et interfère avec les choix qu'ont à faire les enseignants en classe de sixième : combien de temps accorder à ce travail avec les élèves ? Quelles exigences en termes de performances ? Les questions des procédures utilisées par les élèves et des méthodes d'enseignement ne se posent pas encore...

Outre notre stratégie d'approche des connaissances et des représentations des enseignants en tant que formateur, l'ensemble des éléments présentés lors de cette première séance a pour objectif d'aboutir à dégager un certain nombre de questions, liées aux résultats exposés, sur les contenus sur lesquels portera en partie la formation pour la classe de sixième : quelles activités des élèves sont *a priori* privilégiées par les enseignants dans les tâches sur les fractions et les décimaux ? Quelles activités des élèves sont *a priori* privilégiées en calcul mental ? Quelle attention est portée au quotidien sur l'utilisation de « fois » et du symbole « × » ? Est-il fait un travail spécifique avec les élèves sur l'apprentissage des tables de multiplication ? Avec tous les élèves ? Seulement certains ? De quel type ? Quel travail est effectué avec les élèves sur le passage du partage au quotient ? Quelle attention est portée à l'articulation entre opérations mentales sur les nombres et opérations mentales sur les grandeurs ? Les réponses qui seront progressivement données à chacune de ces questions (quand, par qui, au nom de quoi ?) détermineront pour l'essentiel les ajustements qui seront apportés de la formation.

Pour justifier l'importance de ces questions, nous défendons devant les enseignants trois hypothèses étayées à des degrés divers par des travaux antérieurs de recherche : la distinction chiffres/nombres est une affaire de contenu et pas seulement de vocabulaire, la mémorisation de faits numériques (au minimum les tables d'addition et les tables de

multiplication) est fondamentale et la nature du travail effectué sur la multiplication des différents types de nombres (au primaire et en sixième) est déterminante. Pour donner des premières pistes de réponses aux questions précédentes en termes de pratiques de classes, nous suggérons une pratique du calcul mental et du calcul posé fortement articulée avec la numération, et des activités de calcul mental élargies vers la résolution de problèmes. L'idée est de commencer à faire prendre conscience aux enseignants, à travers des exemples et leur association avec des tâches correspondantes, que le travail à faire avec les élèves en calcul, et en calcul mental en particulier, peut ne pas se restreindre à l'exécution de tâches mécaniques. Pour ouvrir encore la réflexion et offrir une perspective plus globale, nous évoquons un enseignement conçu à partir d'une double spirale, celle qui consiste à la fois à revenir plusieurs fois dans l'année scolaire sur les mêmes notions et à travailler sur différents « degrés de conceptualisation », comme nous l'avons précisé dans le chapitre 2.

Nous rappelons que cette deuxième séance constitue pour nous à la fois une phase de déconstruction de certaines connaissances et représentations des enseignants et d'accès à leur « zone proximale de développement des pratiques » dans laquelle nous travaillerons ensuite.

Elle est aussi là pour commencer à enclencher des prises de conscience chez les enseignants, sur les résultats des élèves, mais aussi sur des questions comme celle du travail collectif au sein d'un même établissement. L'ensemble de ces amorces est, nous l'avons dit, délicat, la séance décrite ci-dessus l'a confirmé, et nous savons que nous aurons à revenir sur ces aspects (au moins...) au cours de la séance suivante.

C. Séance 3 (08/11/10, matin)

Cette deuxième journée de formation (qui comprend deux séances consécutives, S3 et S4) vient après le passage du test 1 de début d'année par les élèves. Nous rappelons aux enseignants que la correction des cahiers d'évaluation des élèves a été effectuée de façon standardisée par un prestataire, par saisie numérisée des productions des élèves. Le traitement

des résultats des élèves, fait à la DEPP, a permis d'obtenir des taux de réussite par item²³³. Leur communication aux enseignants et leur analyse collective en séance va constituer le cœur du travail de la journée, ce moment répondant d'ailleurs à une attente forte de la part des enseignants présents en formation. Le travail prévu est une étape importante de la formation, sur plusieurs plans : analyse *a priori* des tâches, analyse *a posteriori* des résultats, débuts de réponses concrètes en termes de pratiques de classes, avec toujours en arrière-plan notre prise en compte « au fil de l'eau » comme formateur des réactions des enseignants afin de placer au mieux notre niveau d'intervention, en restant le plus proche possible des besoins ressentis, dans des contraintes de temps imposées par la durée limitée du travail en présentiel.

Cela étant, le choix de placer deux séances consécutives dans une même journée est fondé sur les mêmes intentions que celles qui ont guidé les deux premières séances : éviter de travailler sur des données isolées de leur environnement, et consacrer une séance entière à reformuler les enjeux de l'expérimentation en ancrant celle-ci dans un questionnement plus large, plus riche que celui qu'offrait la première fois une « simple » appréciation des performances d'élèves à un moment donné de leur scolarité par le biais des évaluations. Pour cela, nous avons ainsi décidé de présenter succinctement dès le matin le cadre théorique de la double approche et les partis pris qui nous lui associons en lien avec la théorie de l'activité (l'importance des activités des élèves sur leurs apprentissages, l'importance des tâches sur les activités des élèves, l'influence de l'activité de l'enseignant sur ces activités) en insistant sur la complexité du métier d'enseignant.

Nous déclinons d'abord, sous forme de questions, quelques aspects qui relèvent de ce qui permet de décrire la « composante personnelle »²³⁴ des pratiques, en suscitant éventuellement chez les enseignants des réactions sur les points suivants : éduquer ou instruire ? Un professeur de mathématiques de collège peut-il/doit-il n'avoir que des objectifs

²³³ Un traitement sera également fait plus tard par collège et par classe, et non travaillé directement en formation.

²³⁴ Notre mémoire de master sur la formation des pratiques chez les enseignants débutants nous a notamment mené à faire l'hypothèse que cette composante est déterminante. C'est cette hypothèse qui justifie en partie la conception et la gestion de la formation.

de savoirs disciplinaires ? Dans quelle mesure un professeur de mathématiques peut-il/doit-il mener son action pédagogique et sa réflexion didactique avec ses collègues ? Quel comportement peut/doit adopter un professeur de mathématiques dans l'organisation de l'enseignement dans son établissement ? Faire réussir les élèves : quelle(s) interprétation(s) ? Ces questions ne sont pas posées pour susciter un débat avec et entre les enseignants, mais plutôt pour continuer à amorcer leur prise de conscience sur des sujets que nous abordons en arrière-plan pendant la formation, comme les marges de manœuvre d'un enseignant, sa posture vis-à-vis de ses élèves, les liens entre les tâches proposées qu'il leur propose et le climat de travail dans la classe, en fait ce qui peut déterminer en partie la composante médiative.

Nous abordons ensuite la part de la composante sociale dans l'enseignement en éducation prioritaire : mission impossible ou défi à relever ? Sur ce dernier point, nous nous référons aux travaux de van Zanten (2001) et à la notion intermédiaire « d'adaptation contextuelle » qu'elle développe pour définir aussi bien les objectifs des enseignants d'éducation prioritaire que leurs manières de les atteindre. Nous présentons également des résultats de la recherche²³⁵ menée en 2002 par des membres de l'équipe DIDIREM de l'université Paris 7 sur les pratiques des professeurs d'école. Ces travaux font émerger cinq « contradictions » ou « tensions » (et il peut y en avoir plus !) auxquelles les enseignants du 1^{er} degré exerçant en éducation prioritaire sont confrontés, que nous rapportons en formation à ce moment-là, en les reformulant, sous forme de thèmes à questionner pour le collègue (Peltier et al., 2004). Cette forme de transposition est un exercice « classique » de formation au cours duquel nous nous efforçons, dans le rôle de formateur que nous nous donnons, d'apporter des résultats issus de la recherche en les adaptant au public qui est en face de nous. C'est l'occasion pour nous de gagner en légitimité, en fonction de ce que nous savons, de ce que nous essayons d'en faire, et selon la manière de le dire. C'est en effet l'occasion d'utiliser un langage, des mots, des expressions que les enseignants pourront reprendre à leur tour et qui

²³⁵ Il s'agit d'une recherche soutenue par le Centre Alain Savary de l'INRP regroupant des chercheurs de l'IUFM de Créteil (D. Butlen, P. Masselot, M. Pézard) et de Rouen (M.-L. Barbier-Peltier, B. Ngono, N. Dubut).

constitueront une espèce de bien commun autour duquel l'enrichissement individuel va pouvoir se développer (Robert et *al.*, 2007). On trouve en fait ici un type d'apport fondamental de la formation, qui va du collectif au particulier, par les mots. Cette légitimité est accrue si nous parvenons, comme formateur, à contextualiser ce que nous présentons, montrant ainsi que nous connaissons « par le bas » le milieu scolaire et l'exercice du métier d'enseignant.

Nous insistons plus particulièrement sur ces cinq contradictions relevées lors de cette recherche, et que nous reprenons à notre compte. Nous ne les présentons évidemment pas sous la forme énoncée ci-dessous, mais comme précédemment, nous nous efforçons cependant dans notre restitution d'attirer l'attention des enseignants sur ce que nous appelons des tensions et qui, nous le supposons, font écho, au moins en partie, à leurs propres pratiques :

- Une tension entre logique de socialisation et logique des apprentissages : ce premier point reprend la question de l'éducation et de l'instruction posée précédemment, et se pose sans aucun doute très différemment selon qu'on enseigne dans le 1^{er} ou le 2nd degré ; au collège, la question renvoie à ce que les enseignants appellent la « discipline » (au sens du calme, de l'attention des élèves) et le « cours » (au sens de leur travail), et à la difficulté de dégager du temps pour « faire cours » pendant une séance. Cela correspond peut-être à une conception de la gestion de la classe indépendante du scénario, en particulier pour ce qui concerne la mise en activité des élèves, mais cela exprime souvent le désarroi des enseignants devant des situations dans la classe qu'ils ont du mal à gérer. Les chercheurs déjà cités pointent qu'un des enjeux les plus importants de l'enseignement en éducation prioritaire dans le 1^{er} degré est le dépassement de cette contradiction. Nous questionnons cet enjeu pour le collège

avec les enseignants présents à la formation, y compris dans d'autres zones que celle de l'éducation prioritaire²³⁶.

- Une tension entre logique de réussite immédiate et logique des apprentissages : les enseignants du premier degré exerçant en éducation prioritaire ont tendance à proposer très largement aux élèves des tâches qui les mettent en situation de réussite rapide, donc des tâches simples, ou très découpées, avec un étayage de leur part tellement important que l'activité des élèves est encore plus fortement diminuée. Cette deuxième tension renvoie évidemment à la première, et la notion d'adaptation contextuelle de van Zanten (2001). Sur le plan didactique et méthodologique, elle renvoie aux travaux de Robert (1999) qui permettent d'étudier des tâches selon les mises en fonctionnement des connaissances attendues. Nous reprenons également ce dernier point à notre compte pendant la formation parce qu'il nous sert d'appui à deux moments : d'une part, pour expliquer un certain nombre de résultats des tests (effet à court terme de l'enseignement) ; d'autre part, pour justifier le protocole global du dispositif d'expérimentation (calcul mental inséré dans une progression spiralee avec explicitation régulière et évolutive des procédures et des connaissances des élèves).
- Une tension entre logique de remédiation et logique des apprentissages : les professeurs ont tendance à chercher à combler ponctuellement les lacunes des élèves aux dépens de nouveaux apprentissages, sans prise en compte de l'insertion de l'ancien dans le nouveau. Là encore, nous questionnons l'existence de ces pratiques au collège, en particulier en classe de sixième. On peut se demander d'ailleurs si l'existence pendant 20 ans des évaluations diagnostiques nationales à l'entrée en sixième²³⁷ n'a pas renforcé cette tendance chez les enseignants. Ce troisième point constitue un autre appui pour le protocole de l'expérimentation.

²³⁶ Nous partageons à ce sujet l'idée du rôle de « loupe » attribué à l'éducation prioritaire par les chercheurs, et nous nous demandons même si les problèmes de comportement des élèves, induits par de nouveaux rapports aux savoirs scolaires, n'existent pas tout autant ailleurs, mais en s'exprimant autrement.

²³⁷ De 1989 à 2008.

- Une tension entre individuel et collectif : la part consacrée à des démarches individuelles de l'enseignant vis-à-vis des élèves prend le pas sur des phases collectives, comme une réponse que les enseignants sont en mesure d'apporter à l'hétérogénéité des classes et à la difficulté de la gérer. Là encore, une attention particulière aux acquis des élèves peut aussi entraîner ce type de pratiques, encouragées par tous les types d'accompagnement et d'aide aux élèves mis en place ces dernières années.
- Une tension entre le temps de la classe et le temps d'apprentissage²³⁸ : cet aspect ne nous semble pas très explicite dans la recherche effectuée car intégré aux deux premières tensions évoquées. Nous nous en saisissons encore une fois dans le cadre du protocole proposé aux enseignants, en particulier au moment de l'explicitation des différents objectifs du calcul mental. Enfin, il prend d'autant plus d'importance au collège avec la question des devoirs à la maison, qui ne se pose pas, ou en tout cas pas de la même façon, à l'école primaire.

Une dernière contradiction mentionnée par les chercheurs, que nous ne développons pas sans prétendre la minorer, est celle qui existe entre une logique de projet, notamment hors classe, sur des sujets non directement scolaires, logique liée à des questions de motivation, d'intérêt, et une logique d'apprentissage. Enfin, nous évoquons quelques aspects rattachés à la composante institutionnelle, qui nous permettent, en posant collectivement la question de sa prise en compte, de montrer que nous sommes conscients qu'influent sur les pratiques le respect des programmes, l'existence des documents ressources, la mise en œuvre du socle commun, les conseils ou prescriptions des inspecteurs régionaux.

Nous revenons ensuite sur PACEM, soulignons la dimension de l'expérimentation (environ 60 enseignants et 2 500 élèves) et rappelons ses objectifs et ses liens avec ce que nous venons d'évoquer : donner des éléments qui pourraient enrichir les représentations des

²³⁸ Cette tension n'est en fait pas citée dans le rapport de recherche. Elle apparaît en revanche dans l'ouvrage tiré de la recherche, *Dur d'enseigner en ZEP*, 2004, La pensée sauvage.

enseignants formés, influencer leurs pratiques, celles de leurs collègues afin d'avoir un impact sur les acquis des élèves, sans pour autant rechercher une visée prescriptive.

Quelques autres aspects quotidiens du métier, presque des « fondamentaux » pour nous du métier de professeur de mathématiques au collège, sont enfin évoqués, certains faisant d'ailleurs écho aux tensions présentées plus tôt : profiter au maximum²³⁹ de toutes les plages de l'emploi du temps, suivre régulièrement le travail des élèves autrement que par les « contrôles » habituels (en particulier corriger les cahiers de leçons et d'exercices), organiser une structuration des connaissances (nous en resterons à ce stade à un échange très large et consensuel sur le sujet), accorder de l'attention au langage, celui des élèves et celui de l'enseignant, distinguer les moments qui relèvent du collectif et ceux qui peuvent/doivent être individualisés, et enfin associer ou alterner plaisir et effort des élèves.

D. Séance 4 (08/11/10, après-midi)

L'après-midi²⁴⁰ est centré sur le test passé par les élèves quelques semaines plus tôt. Nous rappelons que notre objectif n'est pas la simple communication aux enseignants présents des résultats aux items, accompagnée d'une analyse des erreurs et de conseils pour les traiter. L'expérimentation affiche en effet une double ambition qui dépasse cette stratégie jusqu'ici en usage sur les évaluations nationales²⁴¹ : d'une part, il s'agit de permettre aux enseignants de s'approprier les contenus des tests et leurs résultats dans une perspective formative individuelle globale ; d'autre part, le dispositif étagé de PACEM impose d'outiller les enseignants formés dans une perspective de diffusion de la formation auprès de leurs

²³⁹ Nous posons souvent en formation sous forme de calcul mental la question suivante : « Combien de semaines un enseignant de mathématiques « gagne-t-il » au cours de l'année en « ne perdant pas » 5 minutes au début de chaque séance ? (On suppose qu'il y a 4 séances d'une heure par semaine, sur 36 semaines).

²⁴⁰ Comme lors de la première journée, le déjeuner pris en commun sert d'exutoire et permet des premiers commentaires sur le passage des tests dans les classes.

²⁴¹ Les résultats des évaluations PISA, et celles du CEDRE (Cycle d'évaluations disciplinaires réalisées sur échantillons) sont donnés de manière différente puisqu'ils utilisent une double échelle construite à partir du modèle de réponse à l'item.

collègues. C'est à cette fin qu'a été mis sur la plate-forme évoquée plus haut le document de formation rédigé à leur intention.

Le scénario de la séance est largement contraint par sa durée, c'est la raison pour laquelle nous avons choisi une formule dialoguée sans réflexion préalable en petits groupes²⁴² : partir des tâches proposées aux élèves, laisser la parole aux enseignants pour une analyse *a priori*, quitte à la reprendre ou à la compléter, situer ces tâches dans ce que nous en savons d'après des résultats d'évaluations antérieures et faire des propositions didactiques non pas de remédiation, mais d'inscription d'un travail sur de l'ancien dans du nouveau, avec des liens avec d'autres domaines du programme de sixième. Des pistes en calcul mental sont évidemment évoquées, et c'est aussi l'occasion d'aborder des notions plus précises comme l'importance des changements de registre ou le travail sur la multiplication, que nous avons explicitées dans les chapitres 1 et 2.

E. Séance 5 (14/12/10)

La séance, placée quelques jours avant les vacances de Noël, est *a priori* consacrée au suivi et aux perspectives de l'expérimentation. Après un point d'étape sur le déroulement du projet dans les classes des enseignants correspondants et dans leurs collègues, et un bilan intermédiaire de l'utilisation de la plate-forme collaborative, il est prévu d'aborder des questions de contenus. Mais des échanges avec les enseignants vont nous amener à prendre la décision de faire évoluer l'expérimentation dans sa conception et sa mise en œuvre.

Malgré leurs emplois du temps très chargés en cette fin d'année, avec des rencontres avec les parents pour les remises de bulletins, et des temps de transports souvent très longs au regard d'une durée courte de formation, tous les correspondants sauf deux (l'une pour inspection, l'autre en voyage scolaire) sont présents.

²⁴² Une des critiques qui sera formulée par les enseignants à l'issue de la formation est le manque de temps consacré aux échanges entre eux.

Les cahiers d'évaluation des élèves ont été retournés aux établissements et les fichiers des résultats définitifs des élèves ont bien été reçus par les professeurs correspondants. Un retard de 3 à 4 semaines a été pris sur le calendrier prévu, dû essentiellement à des délais de vérification d'identifiants élèves non remplis ou mal remplis et à des problèmes de routage. Ce contretemps ne semble pas mal vécu par les enseignants, mais on peut faire l'hypothèse qu'il peut avoir retardé des initiatives individuelles²⁴³.

En ce qui concerne la plate-forme, trois dossiers principaux sont accessibles à l'ensemble des correspondants :

- un dossier « Collèges », qui contient les documents déposés par les correspondants pour leurs classes ou leurs établissements;
- un dossier « Thèmes », qui contient deux sous-dossiers à l'heure actuelle, un sur le calcul mental et portant sur le passage « du partage au quotient »;
- un dossier « Ressources » sur lequel sont déposés les documents distribués ou cités pendant les journées de formation.

La question du statut des documents déposés sur la plate-forme dans les dossiers « Formation » est posée. En principe, ce sont des documents internes à l'expérimentation. Cela signifie qu'ils sont d'abord destinés aux professeurs des collèges expérimentateurs, mais il est convenu qu'ils peuvent cependant aussi servir dans le cadre de liaisons écoles/collèges. En revanche, ils ne peuvent pas être diffusés largement à ce stade pour des raisons liées à l'expérimentation elle-même.

La plupart des rapports d'étape ont été déposés par les professeurs correspondants dans les dossiers propres aux collèges faisant partie de l'expérimentation, comme il leur avait été demandé. Une première lecture de ces rapports fait apparaître des situations variables selon les collèges, avec des dynamiques d'équipes très engagées dans le projet ou au contraire

²⁴³ Le protocole de l'expérimentation n'est pas remis en cause puisque enseignants expérimentateurs et témoins ont reçu les fichiers élèves en même temps ; en revanche, son impact auprès des élèves des enseignants expérimentateurs peut être amoindri.

des résistances assez fortes de la part des collègues associés. La question du temps nécessaire pour un travail d'équipe est signalée plusieurs fois. Une mise en place régulière du calcul mental semble effective pratiquement dans tous les collègues.

Les questions qu'il est prévu d'aborder lors de cette séance sont les suivantes :

- celle des stratégies d'enseignement et des processus d'apprentissage en éducation prioritaire, les exemples génériques, le cas des élèves en grande difficulté en référence aux travaux de Butlen (2007) ;
- deux questions particulières en termes de contenus : le changement d'écriture d'un nombre décimal et la multiplication des décimaux.

Mais rapidement, les enseignants manifestent une forme d'insatisfaction, voire de frustration, et expriment une demande très forte de pistes opérationnelles. Ils font part au formateur de leur compréhension globale du projet, de leur adhésion à ses grandes lignes, de leur prise de conscience d'un certain nombre de difficultés exposées lors des séances précédentes, de leur satisfaction d'avoir les résultats des élèves à un test standardisé de début d'année, « et APRÈS » ? Que faire de tout cela ? Comment le transformer en pratiques de classe effectives ? Ces questions sont, nous l'avouons, très surprenantes pour nous à ce stade, presque déconcertantes, car elles marquent apparemment un mauvais positionnement du curseur de la formation, comme s'il était allé de soi qu'un travail large auprès de ces enseignants²⁴⁴ sur les résultats des élèves, tel que nous l'avons décrit plus haut, entraînerait un changement de leurs pratiques. Manifestement, ce n'est pas le cas, et les échanges qui suivent montrent qu'il est désormais essentiel d'opérationnaliser la formation, ce qui correspond en fait à préciser le protocole de l'expérimentation, et à restreindre notre problématique de recherche. C'est donc tout naturellement que le projet s'oriente vers les effets positifs d'une pratique fréquente et régulière du calcul mental sur les acquis des élèves. Les échanges portent alors rapidement sur la manière de faire du calcul mental avec les élèves : en début ou en fin de séance ? Quelle durée ? Uniquement à l'oral ? Sur quel support ? Comment gérer les

²⁴⁴ Rappelons qu'ils avaient été identifiés comme de « bons enseignants ».

différentes procédures des élèves ? Force est alors de constater que peu d'enseignants ont une pratique régulière et systématique du calcul mental avec leurs élèves. Nos éléments de réponses en tant que formateur s'appuient alors sur notre propre expérience d'enseignant, et sur une proposition d'alternatives. Deux nouveaux documents seront transmis aux enseignants via la plate-forme.

Comme une réponse rassurante à leur incertitude, une décision en marge du projet est par ailleurs prise de façon collective et spontanée sur une « micro-expérimentation » à mettre en œuvre durant la deuxième semaine de janvier 2011, à deux séances d'intervalle. Il s'agit de proposer 10 calculs mentaux portant sur les tables de multiplication, dans un ordre (le facteur le plus petit en premier), puis dans l'ordre inverse en inversant aussi l'ordre des calculs (le facteur le plus grand en premier, en commençant par le dernier calcul de la liste précédente).

La fin de la séance est consacrée à la communication de dispositions qui seront prises pour recueillir des informations sur les pratiques des enseignants. Sous réserve de conditions administratives à réunir, l'observation de deux séances par des étudiants de l'université Paris Descartes (en L3 ou en M1) pour chaque correspondant et pour un des professeurs associés du collège est prévue en mars/avril 2011. Afin d'organiser au mieux les déplacements des étudiants, il est demandé aux correspondants de déposer sur la plate-forme dans le dossier de leur collège leur emploi du temps ainsi que celui ou ceux de leur collègues engagés dans le projet. La séance observée²⁴⁵ sera une « séance classique » avec un focus tout particulier sur la partie consacrée au calcul mental. Une autre question sur ce sujet est l'accueil réservé à ces observations par les collègues associés : le rôle du correspondant et celui du chef d'établissement seront essentiels. Une deuxième séance sera filmée par les correspondants eux-mêmes avec une caméra fixe placée au fond de la classe. Le thème de la séance est imposé : il s'agira de la leçon sur le quotient. Un formulaire d'autorisation par les familles sera communiqué (déposé sur la plate-forme).

²⁴⁵ Il était envisagé à l'origine d'observer deux séances pour chaque professeur, mais le montage de l'organisation s'est révélé trop lourd.

Enfin, il est demandé aux correspondants de communiquer les moyennes trimestrielles en mathématiques de leurs élèves (repérés par leurs identifiants utilisés pour le premier test). Le projet est en effet une occasion d'étudier la pertinence des productions des élèves dans le cadre d'évaluations standard au regard de celles effectuées dans le cadre habituel de la classe²⁴⁶.

F. Séance 6 (16/03/11)

Cette dernière séance est consacrée à l'articulation du calcul mental avec la résolution de problèmes. Cette question, cruciale à nos yeux, a déjà été évoquée avec les enseignants pendant la formation, l'idée étant cette fois de montrer plus précisément comment ouvrir les perspectives du travail qu'on peut mener avec des élèves dans cette voie. Pour cela, nous choisissons de présenter quelques exercices PISA permettant de mettre en évidence les avantages que posséderait un élève capable de mobiliser des faits numériques et de faire appel à des processus d'anticipation ou de contrôle des résultats pour résoudre un problème. Les énoncés sont présentés aux enseignants, une analyse *a priori* rapide est réalisée en commun, et nous posons la question de l'activité potentielle des élèves sans passage à l'écrit. Voici ces exercices, dont nous choisissons ici de ne restituer que très succinctement les aspects évoqués avec les enseignants.

1. Exercice 1

Cet exercice permet d'évoquer comment un enseignant peut choisir un problème multiplicatif pour susciter une activité chez les élèves sans aller jusqu'à la résolution finale : prise et traitement de l'information, identification de la structure opératoire, estimation d'un ordre de grandeur.

²⁴⁶ Ces données seront élargies en 2011-2012 à tous les élèves.

Mademoiselle Mei-Ling, de Singapour, prépare un séjour de 3 mois en Afrique du Sud dans le cadre d'un échange d'étudiants. Elle doit changer des dollars de Singapour (SGD) en rands sud-africains (ZAR).

Question 1 : TAUX DE CHANGE M413Q01 - 0 1 9

Mei-Ling a appris que le taux de change entre le dollar de Singapour et le rand sud-africain est de :

1 SGD = 4,2 ZAR.

Mei-Ling a changé 3 000 dollars de Singapour en rands sud-africains à ce taux de change.

Combien Mei-Ling a-t-elle reçu de rands sud-africains ?

Question 2 : TAUX DE CHANGE M413Q02 - 0 1 9

Lorsque Mei-Ling rentre à Singapour après 3 mois, il lui reste 3 900 ZAR. Elle les reconvertit en dollars de Singapour, constatant que le taux de change a évolué et est à présent de :

1 SGD = 4,0 ZAR.

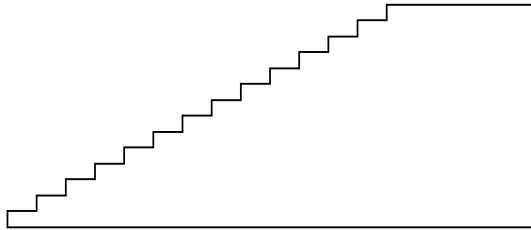
Combien Mei-Ling reçoit-elle de dollars de Singapour ?

2. Exercice 2

Cet exercice, présenté dans le chapitre 3., permet d'évoquer les mêmes aspects dans un autre contexte.

Question 1 : ESCALIER M547Q01

Le schéma ci-dessous représente un escalier de 14 marches, qui a une hauteur totale de 252 cm :



Hauteur totale 252 cm

Profondeur totale 400 cm

Quelle est la hauteur de chacune des 14 marches ?

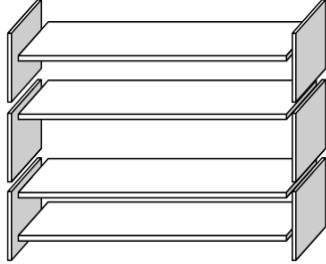
3. Exercice 3

Cet exercice se distingue des précédents par la quantité d'informations contenues dans l'énoncé, mais peut également offrir une situation intéressante en calcul mental.

Question 1 : ÉTAGÈRES M484Q01

Pour construire une étagère complète, un menuisier a besoin du matériel suivant :

- 4 planches longues ;
- 6 planches courtes ;
- 12 petites équerres ;
- 2 grandes équerres ;
- 14 vis.



Le menuisier dispose d'un stock de 26 planches longues, 33 planches courtes, 200 petites équerres, 20 grandes équerres et 510 vis.

Combien d'étagères complètes le menuisier peut-il construire ?

En effet, une estimation mentale du nombre d'étagères est rapidement possible en utilisant les deux informations, portant sur les planches longues et les planches courtes, l'ordre de grandeur des autres données (qu'on travaille sur des quotients ou plus simplement par produits) permettant ensuite à lui seul de conclure.

4. Exercice 4

Cet exercice (PISA 2000) est considéré comme un exercice d'algèbre, sa première partie pouvant cependant être considérée comme numérique, en étant légèrement adaptée.

Un fermier plante des pommiers en carré. Afin de protéger ces arbres contre le vent, il plante des conifères tout autour du verger.

Vous pouvez voir ci-dessous un schéma présentant cette situation, avec la disposition des pommiers et des conifères pour un nombre (n) de rangées de pommiers :

n = 1	n = 2	n = 3	n = 4
X X X	X X X X X	X X X X X X X	X X X X X X X X X
X ● X	X ● ● X	X ● ● ● X	X ● ● ● ● X
X X X	X X X	X X X	X X X X
	X ● ● X	X ● ● ● X	X ● ● ● ● X
	X X X X X	X X X X X	X X X X X X X
		X ● ● ● X	X ● ● ● ● X
		X X X X X X X	X X X X X X X X X
			X ● ● ● ● X
			X X X X X X X X X

X = conifères
● = pommiers

La première question est la suivante :

Question 1 : POMMIERS

Complétez le tableau :

n	Nombre de pommiers	Nombre de conifères
1	1	8
2	4	
3		
4		
5		

Le score de réussite pour la France fut 41,8 % (contre 49,8 % pour la moyenne OCDE)

On peut lire alors dans le dossier n°137 de la DEP (novembre 2002) :


« C'est un excellent exercice de recherche, difficile en évaluation. On peine à situer à quel niveau de l'enseignement en France pourrait se glisser cette activité.(...) La difficulté à anticiper, à généraliser est sans doute une des causes de cet échec massif, le cas pour $n = 5$ n'étant pas représenté. »

Nous suggérons que cette démarche, de repérage de régularité sur des *patterns*, reconnue comme une démarche pré-algébrique, peut se faire très tôt et qu'elle se prête à une mise en œuvre en calcul mental. C'est le cas dans des situations plus simples que celle des pommiers, par exemple comme celle du motif en escalier que nous avons déjà présentée :


Question 1 : MOTIF EN ESCALIER M806Q01

Rémy réalise un motif en escalier en utilisant des carrés. Il suit les étapes suivantes :

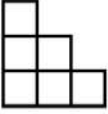
Comme on peut le voir, il utilise un carré à l'étape 1, trois carrés à l'étape 2 et six carrés à l'étape 3.



Étape 1



Étape 2



Étape 3

Combien de carrés devra-t-il utiliser à l'étape 4 ?

Nous complétons la présentation de ces exercices par celle d'un exercice sur la proportionnalité, extrait de l'évaluation menée en 2007 par la DEPP en fin de CM2 sur l'évolution des performances des élèves à 20 ans d'intervalle. Cet exercice, que nous avons également déjà présenté dans les chapitres 1 et 3, est destiné à montrer aux enseignants

comment le déclenchement opératoire d'un raisonnement peut être déterminé par une relation identifiée entre des nombres.

PROBLÈME P1

30 morceaux de sucre pèsent 240 grammes.

50 morceaux de sucre pèsent 400 grammes.

Dans chaque cas, remplace les pointillés par le nombre qui convient.

a) 80 morceaux de sucre pèsent ...~~640~~..... grammes

b) 15 morceaux de sucre pèsent ...~~120~~..... grammes

c) J'ai mis des morceaux de sucre sur une balance, elle indique 1 200 grammes.

Il y a ...~~150~~..... morceaux de sucre sur la balance.

Pour terminer cette séance, nous proposons aux enseignants d'analyser des productions d'élèves afin d'illustrer différentes procédures, correctes ou incorrectes :

- Utilisation des propriétés de linéarité pour les 3 réponses:

80 morceaux :

$$240 + 400 = 640 \text{ g}$$

30 morceaux :

$$240 \div 2 = 120 \text{ g}$$

1 200 grammes :

$$1200 \div 400 = 3$$

$$3 \times 50 = 150$$

Il y a 150 morceaux

- Retour à l'unité, pas de mobilisation de la division quotiention :

un morceau de sucre = 8 grammes

BROUILLON

$$\begin{array}{r} 240 \overline{) 30} \\ \underline{-240} \\ 000 \end{array}$$

$80 \times 8 = 640$
 $75 \times 8 = 720$

$8 \times 900 = 7200$
 $8 \times 800 = 6400$
 $8 \times 600 = 4800$
 $8 \times 500 = 4000$
 $8 \times 400 = 3200$
 $8 \times 300 = 2400$
 $8 \times 200 = 1600$
 $8 \times 100 = 800$

$8 \times 180 = 1440$
 $8 \times 160 = 1280$
 $8 \times 150 = 1200$

- Procédure mixte (retour à l'unité et linéarité) :

BROUILLON

$\begin{array}{r} 560 \\ +160 \\ +160 \\ \hline 880 \end{array}$

$\begin{array}{r} 840 \\ + 80 \\ \hline 920 \end{array}$

$\begin{array}{r} 1040 \\ + 160 \\ \hline 1200 \end{array}$

$\begin{array}{r} 720 \\ +160 \\ \hline 880 \end{array}$

$\begin{array}{r} 880 \\ +160 \\ \hline 1040 \end{array}$

$\begin{array}{r} 960 \\ +160 \\ \hline 1120 \end{array}$

$\begin{array}{r} 1120 \\ +160 \\ \hline 1280 \end{array}$

$\begin{array}{r} 1280 \\ +160 \\ \hline 1440 \end{array}$

$\begin{array}{r} 1440 \\ +160 \\ \hline 1600 \end{array}$

$\begin{array}{r} 1600 \\ +160 \\ \hline 1760 \end{array}$

$\begin{array}{r} 1760 \\ +160 \\ \hline 1920 \end{array}$

$\begin{array}{r} 1920 \\ +160 \\ \hline 2080 \end{array}$

$\begin{array}{r} 2080 \\ +160 \\ \hline 2240 \end{array}$

$\begin{array}{r} 2240 \\ +160 \\ \hline 2400 \end{array}$

$\begin{array}{r} 2400 \\ +160 \\ \hline 2560 \end{array}$

$\begin{array}{r} 2560 \\ +160 \\ \hline 2720 \end{array}$

$\begin{array}{r} 2720 \\ +160 \\ \hline 2880 \end{array}$

$\begin{array}{r} 2880 \\ +160 \\ \hline 3040 \end{array}$

$\begin{array}{r} 3040 \\ +160 \\ \hline 3200 \end{array}$

160
 70
 30
 20
 10
 5

560 = 70
 720 = 90
 880 = 110
 1040 = 130
 1200 = 150

160
 70
 30
 20
 10
 5

160
 70
 30
 20
 10
 5

En conclusion de cette séance, nous revenons auprès des enseignants sur le fait qu'une mise en fonctionnement de notions travaillées en calcul mental peut d'une part favoriser la conscience des nombres et l'utilisation plus ou moins explicitée des propriétés des opérations, et rendre disponibles ces connaissances dans le cadre de la résolution de problèmes d'autre part. Nous suggérons enfin de prêter une attention toute particulière aux ordres de grandeur.

A la demande des collèges participant à l'expérimentation, une présentation des premiers résultats des tests de mai 2011 est organisée en présence d'une IA-IPR de mathématiques de l'académie de Créteil²⁴⁷ à la fin du mois de juin 2011.

²⁴⁷ Chantal Perfetta

III. La formation 2011-2012

La durée de la formation 2011-2012 est la même que celle de 2010-2011. En raison de mutations, cinq des enseignants correspondants sont nouveaux, dont un qui n'était pas associé au dispositif 2010-2011²⁴⁸. Ce turnover des enseignants, habituel dans l'académie de Créteil, constitue néanmoins une difficulté nouvelle pour le suivi de l'expérimentation. L'organisation de la formation est assez voisine de celle de l'année précédente, avec cette fois 6 séances de 3 heures réparties de septembre 2011 à avril 2012. Enfin, l'amorce de la formation est évidemment complètement différente de celle de l'année précédente, puisque nous connaissons la grande majorité des enseignants, qu'ils nous connaissent comme formateur, et qu'ils ont expérimenté pendant une année scolaire le dispositif PACEM, avec des ressentis, individuels et collectifs, divers. En cohérence avec le bilan de l'année 2010-2011, il est convenu avec les enseignants correspondants que d'une part nous orienterons explicitement et dès son début la formation 2011-2012 sur le calcul mental, et que d'autre part, nous consacrerons des moments explicites de formation à deux notions qui posent des difficultés d'enseignement et d'apprentissage : la multiplication des décimaux et le passage au quotient. Enfin, nous choisissons explicitement nous en tenir au niveau sixième, même s'il est prévu de suivre les élèves de la cohorte 2010-2011 en classe de cinquième.

A. Séance 1 (07/09/11)

Comme en 2010-2011, cette première séance est placée très tôt dans l'année scolaire afin de préparer l'organisation du test 1 dans les établissements. Une deuxième raison pour l'avoir placée à cette date est notre volonté de fournir rapidement des matériaux pour la classe aux enseignants afin qu'ils puissent commencer à réfléchir, individuellement et avec leurs collègues de mathématiques, à l'organisation de leur enseignement.

²⁴⁸ Le cas de cet enseignant est particulier : néotitulaire comme 3 autres de ses collègues dans son établissement en 2011-2012, il n'est pas volontaire pour participer à la formation. Son chef d'établissement demandera finalement un retrait du collègue de l'expérimentation.

Après avoir rappelé les fondements et les enjeux du dispositif, nous présentons rapidement la place institutionnelle du calcul mental dans les instructions officielles et les apports potentiels de sa pratique avec les élèves. Notre présentation comme formateur reprend et transpose nos deux premières hypothèses en tant que chercheur, à savoir d'une part qu'une pratique du calcul mental constitue un moyen d'enseignement potentiellement efficace pour développer chez les élèves une compréhension structurale des nombres des capacités liées à la résolution de problèmes, d'autre part qu'elle participe à la mise en place d'une dynamique positive de classe, favorisant ainsi les apprentissages. Ces aspects étaient déjà apparus en cours de formation 2010-2011, et nous savons que nous devons aller au-delà en apportant des éléments opérationnels. Nous décidons ainsi que le protocole PACEM 2011-2012 reposera sur la mise en œuvre d'une phase de calcul mental de début de séance la plus fréquente possible. Pour alimenter cette mise en œuvre, nous communiquons aux enseignants l'ensemble des séries de calcul (72) empruntées au manuel²⁴⁹ Hélice 6^e (Editions Didier, 2009). Celles-ci peuvent évidemment être complétées ou adaptées par les enseignants, et les modalités selon lesquelles les phases de calcul mental sont mises en place sont laissées à leur initiative. Nous nous livrons avec les enseignants à une analyse des tâches sur quelques séries, en terminant par la distribution d'un document récapitulatif, et en reportant des exemples de mises en œuvre concrètes à la prochaine séance de formation.

B. Séance 2 (11/10/11)

Cette séance complète la séance précédente, au sens où nous présentons des déroulements potentiellement associables aux contenus présentés lors de cette séance. Pour ce faire, nous nous appuyons sur les observations de séances de classes effectuées par les étudiants en 2010-2011. Nous sommes ainsi en mesure de mettre en avant une variété de pratiques possibles que nous proposons aux enseignants de commenter au fur et à mesure de la présentation. Notre objectif à ce stade comme formateur n'est pas de prescrire des « bonnes

²⁴⁹ Nous sommes co-auteur de ce manuel, avec Marie-Hélène Le Yaouanq, Lalina Coulangue et Nadine Grapin, et en particulier concepteur de ces séries de calcul mental.

pratiques », mais de faire émerger, du point de vue des enseignants, avantages et inconvénients de telle ou telle mise en œuvre, en fonction des contextes, et des choix effectués par les enseignants. Nous gardons en outre en arrière-plan la question d'une introduction pertinente du troisième parti pris que nous avons adopté dans le chapitre 3, sur les variabilités de la programmation de phases de calcul mental, et notamment celle qui consiste à les programmer de façon étalée dans le temps, avec des bilans intermédiaires gradués jusqu'à une institutionnalisation « définitive ».

Parmi les éléments retenus, figurent la durée des phases de calcul mental observées, le nombre de tâches proposées aux élèves, le fait que les tâches soient centrées sur un seul thème ou sur plusieurs, le fait que l'enseignant annonce ou non l'objectif visé, enfin les modalités concrètes de mise en œuvre : à l'écrit ou à l'oral, le type de support utilisé par l'enseignant, par les élèves, et le fait qu'une correction, détaillée ou non, suive la phase de calcul. Les enseignants prennent librement la parole pour expliquer pourquoi ils adoptent eux-mêmes telle ou telle modalité de déroulement, ou au contraire pourquoi ils ne l'adoptent pas.

Cette première partie est suivie d'une présentation plus précise de 7 phases de calcul mental observées en 2010-2011. Les déroulements sont cette fois associés à des contenus, et les enseignants sont à nouveau invités à commenter les séances décrites. Là encore, notre objectif est, à travers ces diverses observations, d'outiller en pratique les enseignants en leur « montrant » des exemples concrets, et de les aider à réfléchir à leurs choix en les faisant commenter les différentes situations présentées et en les faisant réagir aux commentaires de leurs collègues. Notre rôle comme formateur, outre le choix préalable des situations présentées, consiste essentiellement à poser les « bonnes » questions aux enseignants, les faire préciser leurs propos, voire à les reformuler. Il consiste aussi à faire avancer auprès des enseignants l'idée de progressivité des apprentissages qu'offre le calcul mental, et les avantages qu'il procure, en termes d'organisation du temps d'enseignement et d'accès aux procédures et aux conceptions des élèves.

La deuxième partie de la séance est consacrée à l'articulation du calcul mental avec la résolution de problèmes, qui avait constitué le corps de la dernière séance de la formation 2011-2012. Nous avons choisi comme formateur de revenir très tôt sur cet aspect afin de chercher à orienter des enseignants vers des pratiques de calcul mental comme moyen, et en

particulier comme moyen de favoriser la résolution de problèmes. Les exercices sont les mêmes que ceux présentés en 2010-2011.

C. Séance 3 (09/11/11)

Nous avons choisi de consacrer essentiellement cette séance à la multiplication des décimaux, en lui ajoutant deux volets : une lecture collective d'un exemple de fichier de restitution des résultats du test 1, envoyés à chaque collège, et la préparation d'une liaison école/collège qu'est chargée d'animer une enseignante faisant partie des professeurs correspondants.

Dans une organisation en groupes, il est donc d'abord demandé aux enseignants de comparer leurs stratégies d'enseignement de la multiplication de décimaux, de dresser un catalogue des situations qui selon eux font intervenir une multiplication pour leur résolution²⁵⁰ et de faire des propositions sur les manières dont ils peuvent/comptent intégrer le calcul mental dans leur enseignement. Cette réflexion collective s'appuie sur la communication des scores de réussite des items du test 1 portant sur la multiplication des décimaux.

La première des questions qui émerge de la réflexion collective porte sur le positionnement à adopter en sixième : quels choix effectuer quand à peine 20 % des élèves donnent un résultat correct pour l'opération à effectuer $4,28 \times 3,6$ du test 1 ? Faut-il en faire un objectif d'apprentissage de fin de sixième²⁵¹ ? Les enseignants ont plutôt tendance à répondre par l'affirmative à cette question, tout en reconnaissant une réelle difficulté à atteindre cet objectif. Comment procéder alors ? Les stratégies d'enseignement qui sont proposées par les enseignants sont les suivantes : sur des situations d'aire ou avec des changements d'unités – situations contextualisées ; avec des fractions décimales, des

²⁵⁰ Nous ne parlons pas à ce stade de la formation de problèmes multiplicatifs au sens de Vergnaud (1990)

²⁵¹ Rappelons que la multiplication des décimaux fait à nouveau partie des programmes de l'école primaire depuis 2008 après en avoir disparu pour être reportée à la classe de sixième en 1995.

opérateurs, ou en utilisant des ordres de grandeur – situations non contextualisées²⁵². Selon les enseignants, deux stratégies peuvent parfois être menées de front en classe, voire s’entrecroiser. Une des principales difficultés qu’ils signalent est que, si les élèves ne savent pas effectuer une multiplication avec des décimaux, ils ont cependant souvent appris à le faire. Les discussions en groupes, puis les échanges collectifs qui suivent portent sur un consensus en forme de compromis, d’adaptations aux différents contextes où il s’agit de « faire le mieux possible avec ce qu’on a ». Notre rôle de formateur est assez délicat à ce moment compte tenu de la position non prescriptive que nous avons choisi d’adopter a priori : nous choisissons d’une part de recentrer le débat sur les apports potentiels du calcul mental sur ce thème précis de la multiplication des décimaux, et d’autre part de faire le lien avec la résolution de problèmes qui a été éludée par les enseignants faute de temps. En particulier, nous orientons la synthèse dans deux directions : le traitement des situations multiplicatives dans le cadre des grandeurs ou dans le cadre numérique, avec les différences que cela peut impliquer dans la nature des opérations effectuées ; le traitement des situations mettant en jeu la proportionnalité, avec divers modes de résolution et liens possibles avec le calcul mental. Nous renvoyons finalement les enseignants à un article de Roditi²⁵³ que nous déposerons sur la plate-forme collaborative pour d’éventuels compléments sur la multiplication des décimaux.

La fin de la séance est consacrée à l’interprétation des fichiers de résultats envoyés au collège, et à leurs exploitations possibles, en direction de la classe ou de l’ensemble du collège, et à quelques conseils énoncés collectivement à l’enseignante chargée d’animer une liaison/collège en partant du dispositif PACEM, et en particulier des résultats du test 1.

²⁵² Il est à remarquer qu’aucun enseignant ne déclare s’appuyer sur le comptage des « chiffres après la virgule » ni sur l’utilisation de la calculatrice.

²⁵³ Bulletin de l’APMEP n°431, Novembre - Décembre 2000

D. Séance 4 (12/12/11)

Cette séance intervient en fin de trimestre : nous devons tenir compte de l'arrivée des vacances de Noël et de la fatigue éventuelle des enseignants, ce qui nous amène à concevoir la séance comme un bilan d'étape, traitant ainsi de plusieurs sujets, plutôt liés au dispositif qu'à la formation elle-même, à l'exception du dernier.

Le premier d'entre eux est un bilan de la liaison école/collège faite par l'enseignante elle-même, qui effectue un rapide compte-rendu de son intervention, et qui déposera l'ensemble des documents utilisés sur la plate-forme. Nous supposons que cette expérience personnelle peut d'une part susciter d'autres initiatives du même type, d'autre part donner des idées aux uns et aux autres pour diffuser les résultats en les commentant au sein de leur propre collège, et en cela contribuer au développement du dispositif.

Le deuxième des sujets abordés est une comparaison des taux de réussite obtenus aux items des tests 1 par les élèves en septembre 2010 et en septembre 2011 : il est remarquable que ces taux de réussite sont très proches les uns des autres pour les items communs aux deux tests. Ceci nous permet en tant que formateur d'illustrer une notion assez confuse chez les enseignants, celle d'un niveau de difficulté d'une tâche. La comparaison des scores moyens des élèves par collège confirme la stabilité des taux de réussite des items d'une année à l'autre, à l'exception de deux collèges dans lesquels les résultats 2011 sont significativement moins élevés qu'en 2010.

Nous revenons ensuite sur l'évaluation des élèves de la cohorte 2010-2011 qui seront testés en cinquième, rappelons les raisons de cette évaluation et donnons quelques informations sur son organisation.

En prenant prétexte du débat qui existe alors sur le report des évaluations nationales CM2 de janvier en mai, nous présentons les exercices proposés aux élèves en janvier 2011 pouvant être considérés comme des problèmes à résoudre. Nous sollicitons collectivement les enseignants sur des éléments d'analyse *a priori* des tâches, de leur point de vue, en cherchant à mettre en regard ces éléments avec une pratique du calcul mental orientée vers la reconnaissance de structures opératoires et l'estimation d'un ordre de grandeur. Cette

présentation est complétée avec des exemples de situations pouvant être qualifiées de tâches complexes, au sens donné dans les documents institutionnels, et qui permettent de retrouver des avantages potentiels d'une approche de telles situations en calcul mental.

Nous concluons cette séance en suggérant aux enseignants deux types de conception d'une séquence pouvant chacun être découpé en trois phases. Le premier type est présenté comme convenant plutôt à des processus de généralisation d'une connaissance ancienne. Il s'agit de d'abord travailler la notion visée (par exemple la proportionnalité) très tôt dans l'année, par petites touches, en calcul mental, en jouant sur des variables numériques, mais aussi grâce à des devoirs à la maison, ce qui permet ainsi de prendre des informations sur les connaissances des élèves, et d'éventuellement agir sur elles par des dispositifs d'aide individualisée. À un moment donné, déterminé par l'enseignant en fonction du contexte, on suscite, dans le cadre de la résolution d'une tâche complexe, la mise en fonctionnement d'une connaissance ancienne pour la transformer en une connaissance nouvelle (par exemple l'utilisation d'un coefficient de proportionnalité décimal ou sous forme d'un quotient) qui fera ensuite l'objet d'une institutionnalisation et d'exercices d'appropriation et de réinvestissement.

Le deuxième type part d'une conception plus classique de l'organisation de l'enseignement : situation d'introduction, puis institutionnalisation partielle ou complète en fonction du contexte, avec extraction de méthodes, en termes de techniques (comment faire ?) et d'objectifs (pour quoi faire ?). Autrement dit, on tente de jouer explicitement sur les deux aspects objet/outil d'une même connaissance, toujours en s'adaptant au maximum aux élèves, c'est-à-dire avec des formulations éventuellement transitoires. Cette phase peut être concomitante, ou en tout cas très rapidement suivie, d'une phase destinée à rendre les nouvelles connaissances des élèves mobilisables, phase au cours de laquelle le calcul mental est susceptible de jouer un rôle important : dans l'identification de classes de problèmes (« c'est comme... », « on peut faire comme... ») ou dans des changements de registre. C'est alors seulement qu'intervient dans cette deuxième configuration, dans des temps d'apprentissage décalés, la présentation de tâches complexes aux élèves, destinées à favoriser cette fois la disponibilité des connaissances, qui auront été par ailleurs entretenues au cours de calculs mentaux ou de situations présentées en calcul mental.

E. Séance 5 (10/02/12)

Comme cela était convenu au début de la formation, une séance est consacrée au passage au quotient de deux entiers, question centrale en classe de sixième compte tenu des programmes scolaires alors en vigueur. Nous rappelons (voir I.4.) que nous entendons par passage au quotient le passage d'une vision à une autre d'un nombre écrit sous forme fractionnaire $\frac{a}{b}$ (a et b étant deux entiers positifs, b non nul), celle qui consiste à concevoir que a parties de l'unité partagée en b parties égales est aussi le résultat de la division $a : b$, autrement dit le nombre dont le produit par b est égal à a ²⁵⁴.

En fait, nous avons déjà abordé en formation cette question²⁵⁵, par petites touches, en fonction de la rencontre d'une tâche particulière ou pour répondre à une question d'un enseignant. La question du quotient est en effet déjà apparue par exemple lors d'une discussion sur les désignations orales : comment dit-on $\frac{3}{4}$ en début de sixième ? Peut-on justifier que $\frac{4}{3}$ n'est pas l'écriture d'un nombre décimal en divisant 4 par 3 ? Comment écrire et justifier le calcul correspondant à « prendre une fraction d'une quantité » ?

Nous avons peu de repères diagnostiques issus des tests de septembre : un quart environ des élèves associent $\frac{1}{4}$ à 0,25 et plus de la moitié d'entre eux l'associent à 1,4. Nous rappelons également que plus de la moitié des élèves identifient 0,2 comme $\frac{2}{3}$ sur une graduation dans laquelle les unités sont découpées en tiers, et que seuls 30 % des élèves donnent la réponse correcte. Nous savons aussi que l'écriture d'un nombre sous la forme d'un quotient est problématique pour bon nombre d'élèves, y compris au-delà de la sixième, qui voient le trait de fraction horizontal comme un symbole de division dès lors que les fractions

²⁵⁴ Nous éludons ici volontairement d'une part la question de la commutativité, d'autre part celle d'un quotient de nombres décimaux.

²⁵⁵ Nous nous retrouvons presque dans une situation de formation par homologie, où nous exposons un savoir après l'avoir utilisé ponctuellement.

en jeu ne sont plus des fractions usuelles comme $\frac{1}{2}$ ou $\frac{1}{4}$. Nous suggérons en outre que cette question est une réelle difficulté, conceptuelle et opérationnelle, pour les enseignants. L'enjeu est donc ici, du point de vue du formateur, de faire le point avec les enseignants sur les contenus à enseigner, et de les aider à les mettre en œuvre, avec toujours cette entrée particulière que peut offrir le calcul mental. C'est ce que nous efforçons de faire en revenant sur la résolution de problèmes multiplicatifs qui, selon ce qui est cherché, mobilisent la division au sens du partage (division partition), soit au sens du groupement²⁵⁶ (division quotition). Nous attirons aussi l'attention des enseignants sur le fait que la division permet de résoudre d'autres problèmes que les deux types ci-dessus, comme la recherche d'un coefficient de proportionnalité ou d'une dimension d'un rectangle connaissant son aire et l'autre dimension. Nous rassemblons ensuite avec les enseignants ce que, selon eux, les élèves savent plutôt à leur entrée en sixième (partager une unité présentée sous la forme d'une bande ou d'une surface (rectangle, disque) et ce qui constitue plutôt des difficultés (partage d'un segment, fractions supérieures à l'unité, écriture fractionnaire, fraction comme nombre).

Nous en profitons pour faire un détour institutionnel par le programme de sixième et notamment pour expliciter auprès des enseignants l'extrait suivant :

« À l'école élémentaire, l'écriture fractionnaire est introduite en référence au partage d'une unité. Par exemple $\frac{7}{3}$ est 7 fois un tiers.

*Le programme de la classe de 6^e a pour objectif d'interpréter aussi $\frac{7}{3}$ comme²⁵⁷ :

- le tiers de 7
- le nombre qui multiplié par 3 donne 7 ;
- un nombre dont une valeur approchée est 2,33. »

²⁵⁶ Cette distinction très présente dans le 1^{er} degré est quasi inconnue des professeurs de mathématiques du 2nd degré.

²⁵⁷ Pour rappel, l'astérisque est placé au début de cette phrase pour signifier que la maîtrise de cette capacité relève du socle commun, mais qu'elle n'est pas exigible en fin de sixième.

Cette distinction entre « 7 fois un tiers » et « le tiers de 7 » n'est pas familière pour les enseignants : nous nous y arrêtons donc, nous fixons les deux visions graphiquement, et nous comparons les approches de deux manuels²⁵⁸ sur le passage d'une vision à l'autre, l'idée principale étant à la fois de faire passer auprès des enseignants la nécessité de créer de nouveaux nombres (comme le résultat de $7 : 3$) et de leur faire prendre conscience que ces nombres ayant déjà été rencontrés par les élèves, il existe un enjeu pour faire coexister les deux conceptions.

Nous terminons par des éléments concernant le fait de « prendre une fraction d'une quantité » (pourquoi cette « action » se traduit-elle par une multiplication ?), par des prolongements sur les pourcentages, et bien entendu par l'évocation de pistes d'intégration du calcul mental pour le thème traité. Notons enfin que nous avons ressenti comme formateur, un investissement didactique très fort de la part des enseignants au cours de cette séance, à la fois dans leur volonté de parfaire leurs connaissances des contenus à enseigner, et sur l'enseignement de ces contenus.

F. Séance 6 (05/04/12)

Cette ultime séance de formation est une séance un peu à part dans la formation. Il s'agit d'abord pour nous de faire un bilan oral collectif auprès des enseignants sur le dispositif PACEM dans son ensemble, sur ce qui semble avoir évolué, dans les classes, dans les collèges, sur leur ressenti de la formation. Il leur est ensuite demandé un rapide bilan écrit individuel qui complétera le questionnaire en ligne proposé à tous les enseignants concernés par le projet, qu'ils exercent dans un collège expérimental ou non, qu'ils soient correspondants ou non. Nous présentons ensuite un bilan de l'expérimentation de notre point de vue de formateur, puis nous donnons les consignes nécessaires pour l'organisation des tests

²⁵⁸ Phare 6^e, 2009, Hachette et Hélice 6^e, 2009, Didier.

de mai 2012, pour la sixième et pour la cinquième²⁵⁹. Cette phase est assez lourde, puisqu'elle nécessite un suivi des élèves tout en respectant une procédure d'anonymisation de remontées, et le fait que les élèves de cinquième soient impliqués cette année en augmente la lourdeur. Ce moment de la séance, qui n'est pas à proprement parler un moment de formation, est donc important. Nous terminons enfin en évoquant des suites potentielles de développement de l'expérimentation avec trois perspectives envisagées pour 2012-2013 : un bilan écrit de l'expérimentation du point de vue des enseignants correspondants, réalisé par quelques-uns d'entre eux, l'animation de liaisons écoles/collèges et la participation à des actions de formation continue en tant que formateurs, notamment en cas d'extension du dispositif dans l'académie de Créteil.

²⁵⁹ Rappelons que les élèves ayant été testés en 2010-2011 en sixième dans le cadre de PACEM le sont aussi en cinquième en 2012.

IV. Notre analyse *a posteriori* de la formation du point de vue du chercheur

Nous allons maintenant nous livrer à un exercice difficile pour nous, mais nécessaire pour notre recherche, c'est-à-dire doubler notre démarche expérimentale d'une analyse de notre propre formation en tant que chercheur. L'exercice est délicat à plusieurs titres : comme toute auto-analyse d'abord, il est risqué, en cela qu'il présente des possibilités de ne pas voir certains aspects de la formation et de notre activité de formateur, qu'il expose à des tendances à majorer tel ou tel aspect, ou à minorer tel ou tel autre, voire à l'ignorer – et nous savons que pour un enseignant cet exercice peut déboucher sur des dénis, voire des mises en danger potentielles. Nous nous heurtons ensuite à une difficulté majeure, qui est l'absence presque totale d'observations par un tiers des séances de formation, et l'absence également de vidéos de ces mêmes séances. Comme nous l'avons indiqué en introduction, la reconstitution des séances de formation a donc été effectuée à partir des supports utilisés pendant la formation et de nos propres notes de formateur. Nous disposons également d'éléments d'information recueillis à travers des questionnaires en ligne proposés à tous les enseignants à la fin de chaque année scolaire. La combinaison réduite de ces trois éléments nous conduit à être très prudent dans notre analyse, filtrée à double titre : celui de la mémoire et celui d'une forme d'auto-censure.

Nous décidons de nous replacer dans un cadre qui, selon nous, va nous permettre de prendre en compte au maximum ce principal obstacle – l'absence d'observations directes –, et qui est en quelque sorte un versant transposé de celui développé dans le chapitre 2, qui a nous conduit à concevoir la formation mise en œuvre dans PACEM. Nous reprenons donc le cadre de la double approche, que nous adaptons ici à ce que nous avons reconstitué de la formation. Il s'agit donc ici, en tant que chercheur, de repérer et d'analyser des éléments de la formation, selon les composantes de la double approche, du côté des enseignants et du côté du formateur. Quelles contraintes existaient *a priori* ? Lesquelles sont apparues ? Comment avons-nous investi en fonction de nos objectifs les marges de manœuvre que nous avons repérées ? Et dans quelle mesure sommes-nous capable d'identifier, avec les limites exposées ci-dessus, les

différences éventuelles entre notre scénario initial et le déroulement de la formation, tel que nous l'avons décrit ?

L'objectif principal de la formation en présentiel, nous l'avons dit dans le chapitre 2, était d'abord de permettre aux enseignants correspondants d'élargir la palette de leurs pratiques, en termes de contenus, de déroulements, et de leur apporter des connaissances pour les aider à fonder leurs choix et enrichir leurs analyses. Un second objectif était de chercher à rendre possible la diffusion de ces pratiques et de ces connaissances auprès de leurs collègues, qui ne participaient pas à la formation. Il y avait donc une sorte de double prise en compte de l'ensemble des contraintes qui pèsent sur le travail des enseignants, que nous avons déjà évoquées, et qui rendaient l'expérimentation à la fois originale et risquée.

Du point des vue des conditions institutionnelles, le format de la formation de 18 heures, choisi dès le départ du projet comme une condition nécessaire de « reproductibilité » éventuelle s'est révélé une contrainte plus forte que nous l'avions prévue, notamment la première année, à cause du temps consacré à la mise en œuvre logistique de l'expérimentation et de son évaluation dans les collèges. Sur un autre plan, le fait que l'expérimentation soit portée par le ministère et par le rectorat de Créteil, et le fait que les enseignants correspondants soient volontaires, ont sans doute favorisé le processus de formation, au moins dans une première phase que nous aurions envie d'appeler de « dévolution », en ce sens que nous avons en tant que formateur des enseignants plutôt ouverts au projet, explicitement décrit comme visant l'amélioration des acquis des élèves²⁶⁰. Mais en même temps, ce double « avantage », apportait avec lui sa part de responsabilité aux enseignants, peut-être difficile à assumer pour certains d'entre eux, d'autant plus difficile qu'il ne donnait pas une réelle légitimité institutionnelle aux correspondants au sein de leurs collèges : un correspondant, s'il avait bien été « repéré » par l'inspection régionale, n'était pas forcément pour autant identifié comme coordonnateur en mathématiques dans son collège, et même s'il l'était, la question du partage de pratiques restait posée de toute façon.

²⁶⁰ Cette question ne nous apparaît pas comme spécifique à la formation PACEM.

Certains correspondants ont clairement exprimé cette difficulté pendant la formation, au cours de la première année, et il a donc fallu en quelque sorte compenser cette absence de légitimité institutionnelle.

C'est donc bien la confrontation de résultats sur les acquis des élèves et de la stabilité des pratiques qui était au centre de nos préoccupations – de formateur : comment provoquer une évolution des pratiques pour améliorer les acquis des élèves ? – et l'analyse qualitative de cette « réaction » – en tant que chercheur : un processus s'est-il déclenché ? Lequel ? Comment ? – avant l'analyse quantitative des résultats des élèves aux post-tests que nous ferons dans le chapitre 6. D'une certaine façon, on peut donc dire qu'il y avait potentiellement « de la place pour du nouveau » chez les enseignants participant à la formation, ce qui n'était pas forcément le cas chez leurs collègues. Mais quel « nouveau » ? Quel écart entre celui prévu *a priori* par le formateur, et celui qui pouvait répondre à des besoins ressentis par les enseignants ? Et comment ce « nouveau » pouvait-il trouver sa place compte tenu de la stabilité des pratiques des enseignants ? Pour cela, nous (formateur et chercheur) misions beaucoup sur la phase d'amorce, fondée sur l'utilisation d'un test de début d'année, pour déconstruire certaines représentations, et pour accéder à la « Zone Proximale de Développement des Pratiques » (ZPDP) des enseignants. Il nous semble *a posteriori* que le pré-test a bien joué son rôle de catalyseur, pour les enseignants en formation, et au sein des collèges, que nous lui accordions *a priori*. Partir des résultats des élèves, de « ses » élèves, de ceux de « son collègue », les comparer avec l'ensemble des résultats, en allant au-delà des simples constats de scores de réussite, les lier aux programmes de l'école primaire et à celui de sixième, tout cela est bien apparu comme un élément initial de la formation, favorable à une réflexion individuelle et collective, entre les enseignants en formation et dans les collèges. Nous aurions envie de dire que nous avons joué à la fois sur les informations apportées par les évaluations standardisées et sur leur utilisation, qu'elles soient nationales (avant le pré-test), et surtout locales (le pré-test). La structure globale de l'expérimentation, avec notamment l'existence d'un post-test favorise sans doute aussi la prise en compte du pré-

test. Il est possible enfin que du point de vue médiatif (et personnel), le fait de dire ou de rappeler aux enseignants que tout ne dépend pas d'eux, mais qu'ils peuvent concourir à la réussite de leurs élèves, y compris en éducation prioritaire, ait donné, renforcé ou redonné selon les cas, de la motivation ou de la confiance en eux aux enseignants²⁶¹.

C'est sur le comment prolonger et exploiter ce démarrage plutôt favorable et plutôt conforme à ce que nous avons prévu que des adaptations en partie programmées, en partie nouvelles, ont eu lieu, et c'est sans doute sur l'analyse de ces adaptations que nous nous retrouvons (comme chercheur) le plus en difficulté. Les deux enjeux déclarés (pour le formateur) lors de cette phase d'amorce étaient un questionnement de certaines connaissances et représentations des enseignants sur les contenus à enseigner, qui conditionnent en partie leurs pratiques, et l'accès à leur ZPDP, afin de tenter d'identifier, avec ce que nous apporte la théorie de la double approche, leurs profils et leurs besoins. Nous n'avons pas les éléments suffisants pour savoir réellement si et à quel niveau ces objectifs ont été atteints. Il est cependant pratiquement certain que les enseignants présents la première année ont été déstabilisés, ils l'ont exprimé explicitement, à la fois de façon positive (« Je vois les choses autrement », « c'est plus clair pour moi maintenant ») et négative (« je faisais tout mal avant », « mais il faut que je change tout », « maintenant que j'ai compris que ce que je faisais n'allait pas, qu'est-ce que je fais ? »). En ce qui concerne la ZPDP, nous dirons que nous avons travaillé à « ZPDP moyenne estimée », en prenant en compte régulièrement et systématiquement la composante sociale. En effet, d'une part, il est apparu, sans surprise, que les connaissances et les pratiques des enseignants étaient très variables d'un enseignant à l'autre, et que les relations et les habitudes de travail entre enseignants au sein d'un même collège étaient très variables d'un collège à l'autre ; d'autre part, nous avons constaté, une de fois de plus, que les contraintes du quotidien laissent moins de marge de manœuvre aux enseignants dans les collèges relevant de l'éducation prioritaire, ou, ce qui est différent, que les enseignants exerçant dans des collèges relevant de l'éducation prioritaire ont à composer avec des contraintes telles qu'elles font disparaître auprès d'eux des marges de manœuvre

²⁶¹ Ceci n'est pas un aspect spécifique de la formation PACEM.

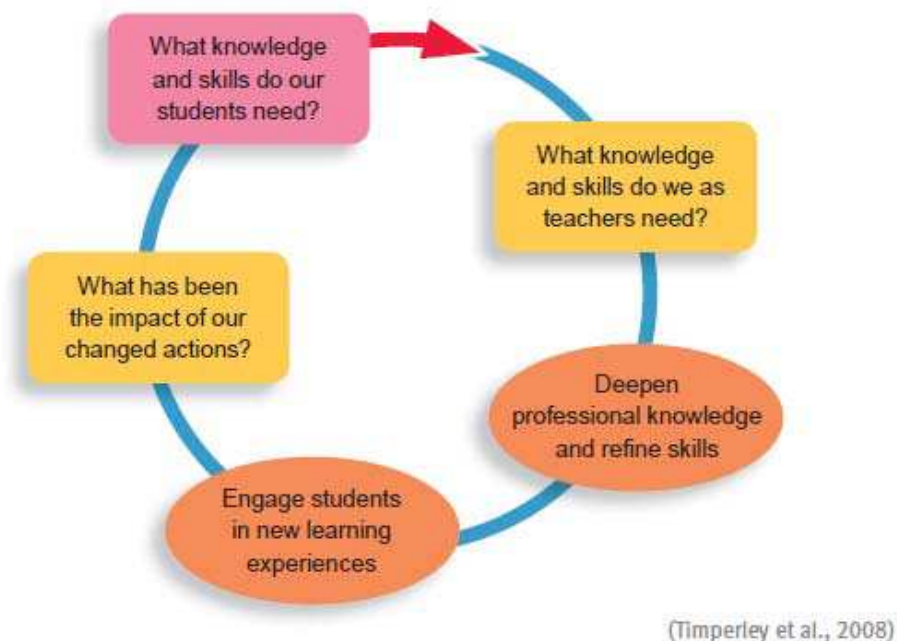
potentielles. Et il nous semble clair qu'un formateur, sur ce type de formation, peut « rapidement perdre ses stagiaires », enseignants en éducation prioritaire, comme « un enseignant peut perdre ses élèves » s'il ne se place pas à la bonne distance.

C'est sans doute là en tout cas, dans la réponse à apporter aux enseignants (« Et maintenant ? ») que l'adaptation la plus importante a eu lieu : d'une formation plutôt partie pour jouer (trop vite ?) au niveau macro, même si son point de départ était une somme d'éléments intervenant souvent au niveau local, nous sommes revenus explicitement, via le calcul mental, à la classe, à des tâches précises, à des possibilités de déroulements très locaux, en oubliant provisoirement des ambitions plus globales. C'est sans doute ce qui a constitué la « pierre angulaire » de la formation, à la fois comme outil personnel pour les enseignants en formation, et comme élément à partager avec leurs collègues. On y retrouve en réalité toutes les composantes de la double approche, qui sont certainement intervenues, qui ont certainement interagi à des degrés divers chez les enseignants, selon « là où ils en étaient », selon leur ancienneté dans le collège, leur expérience comme professeur de sixième, et qui les ont conduit à mettre en place du calcul mental dans leurs classes, à faire évoluer leurs façons de le faire ou à repenser la place du calcul mental dans leur enseignement et les apprentissages des élèves.

Du point de vue de la mise en œuvre de la formation, la contrainte de sa durée et les choix que nous avons faits ont eu deux conséquences qu'il nous semble intéressant de relever : peu d'occasions d'échanger sur leurs pratiques entre les enseignants, en tout cas trop peu selon eux, ce qu'ils ont ressenti comme un manque, et peu de retours détaillés d'expériences au fil de la formation, comme nous l'avions prévu, en tout cas trop peu selon nous.

Nous terminons cette section par la mention des travaux de Timperley et d'autres chercheurs néo-zélandais (2008) que nous avons découverts non seulement après la conception de notre expérimentation, mais même après sa réalisation complète. On retrouve dans le dispositif PACEM la prise en compte et l'organisation d'éléments du cadre théorique sur lequel Timperley s'appuie pour ses travaux, et qui concourent, selon elle, à un « développement professionnel » efficace (*professional development* ou *professional learning*) : identification des acquis des élèves, appui sur les connaissances et les pratiques

des enseignants, dispositif de formation des enseignants, mise en place de nouvelles stratégies d'enseignement et d'apprentissage, évaluation d'impact avec analyse des résultats et nouveau cycle.



Une première conclusion, en forme de regard rétrospectif sur la formation en amont des résultats des tests 2, c'est-à-dire finalement en termes « d'efficacité perçue », est le sentiment global que notre projet initial « a tenu », aux adaptations près que nous avons mentionnées ci-dessus, et « qu'il s'est passé quelque chose », chez les enseignants formés directement, et sans doute dans leurs collègues, à des degrés très variables. Comme nous l'avions annoncé au chapitre 2 dans notre méthodologie, nous avons renoncé à nous donner les moyens de recueillir des éléments d'observations des pratiques des enseignants dans leurs classes, ou dans leurs échanges avec leurs collègues. Les retours écrits de la part des enseignants formés, essentiellement par manque de temps, ont été moins nombreux que prévu, et nous nous en tenons donc à leur réactions, reçues et interprétées le plus objectivement possible. Et c'est donc dans le chapitre qui vient, où nous allons confirmer, ou non, cette perception et cette analyse, en cherchant à mesurer l'efficacité « réelle » du dispositif, c'est-à-dire à apprécier l'évolution des résultats des élèves entre les deux tests de début et de fin d'année scolaire.

Chapitre 6. Les résultats de l'expérimentation PACEM

Sommaire du Chapitre 6

I. Les taux de réussite des items aux tests 2 : des progrès sensibles des élèves, mais des taux néanmoins très éloignés des attendus institutionnels de fin de sixième (Tableau C-1 à Tableau C-4).....	391
II. Les résultats des élèves : des effets positifs du dispositif pour les élèves des collèges expérimentateurs.....	396
A. Les scores globaux des élèves aux tests 2.....	396
B. Comparaison des évolutions des scores globaux test 1/test 2 en 2010-2011 et en 2011-2012.....	398
C. Croisement des résultats avec des variables individuelles	403
D. Prise en compte du niveau initial des élèves (score au test 1).....	409
E. Un impact auprès des élèves qui semble dépasser la seule année d'expérimentation.....	411
III. La pratique du calcul mental : une pratique efficace, mais avec des limites ?.....	425
IV. Conclusion.....	433

Nous présentons et nous analysons dans ce chapitre des résultats obtenus lors de l'évaluation de l'expérimentation PACEM. Nous rappelons que cette évaluation a été effectuée sur les deux années de mise en œuvre de l'expérimentation (2010-2011 et 2011-2012) avec, pour chaque année, un test en début de sixième (test 1) et un test en fin de sixième (test 2). Ce dispositif est complété par un suivi sur deux ans des élèves entrés en sixième en 2010 (test 3 effectué en fin de cinquième en mai 2012).

Dans une première partie, nous livrons une analyse des taux de réussite aux items des tests de fin d'année scolaire, pour les deux années d'expérimentation. Nous ne détaillons pas dans cette partie les résultats des élèves selon leur groupe d'appartenance (groupe expérimental ou groupe témoin), ou selon d'autres variables que nous retiendrons plus loin dans ce chapitre. Ce qui fait l'objet de notre analyse ici, c'est l'identification du degré de maîtrise des connaissances évaluées par les élèves testés en fin d'année de sixième.

Dans la deuxième partie, centrale dans l'évaluation de l'expérimentation, nous nous intéressons aux scores moyens des élèves, c'est-à-dire aux scores obtenus à l'ensemble des tests 2 (mai 2011 et mai 2012) et à leur évolution par rapport aux scores obtenus aux tests 1 (septembre 2010 et septembre 2011). Puis nous restreignons notre analyse à la comparaison de l'évolution des résultats des élèves sur la deuxième année de l'expérimentation (2011-2012) en fonction de leur score initial, obtenu au test de septembre 2011. Nous présentons ensuite les résultats des élèves qui ont été obtenus sur deux ans, c'est-à-dire les résultats des élèves ayant passé le test 1 en début de sixième en septembre 2010, et les résultats de ces mêmes élèves en mai 2012 en fin de cinquième.

Dans une troisième partie, nous centrons notre présentation et notre analyse sur des résultats plus locaux, que sont les comparaisons des taux de réussite de certains items du test 2 de mai 2012 selon le groupe d'appartenance des enseignants. Ces items portent d'une part sur des connaissances anciennes (relevant de l'école primaire), d'autre part sur des connaissances nouvelles (relevant du programme de sixième).

La quatrième partie de ce chapitre est plus qualitative : elle s'appuie à la fois sur les réponses des élèves à un questionnaire sur le calcul mental et sur celles des enseignants à un questionnaire sur leurs pratiques.

Les données que nous avons recueillies sont nombreuses, et nous n'en présentons qu'une exploitation partielle, orientée vers l'évaluation du dispositif mis en place, c'est-à-dire vers la recherche d'une appréciation globale de son impact sur l'ensemble des acquis des élèves sur la dimension globale que nous avons définie comme la compétence numérique. Nous ne nous sommes pas livré à des analyses partielles sur telle ou telle sous-dimension que nous aurions pu faire émerger dans une lecture séquencée des résultats des élèves par regroupement d'items. En particulier, nous ne sommes pas intéressé de façon spécifique à ce qu'on pourrait appeler une « sous-compétence » en calcul mental, notre objectif initial n'étant pas fondamentalement de faire progresser les élèves en calcul mental, mais d'étudier comment un enseignement intégrant des séances de calcul mental pouvait contribuer à l'acquisition d'une compétence plus globale. Par conséquent, même si nous nous attardons sur des résultats à quelques items qui nous semblent didactiquement intéressants, nous nous en tiendrons essentiellement à une approche « non –analytique » des résultats des élèves.

I. Les taux de réussite des items aux tests 2 : des progrès sensibles des élèves, mais des taux néanmoins très éloignés des attendus institutionnels de fin de sixième (Tableau C-1 à Tableau C-4)

Pour un panorama le plus large possible, nous regroupons les items des tests 2 de septembre 2011 (53 items) et de septembre 2012 (40 items), 9 items étant communs aux deux tests. Le regroupement choisi comprend 6 groupes d'items, construits à partir de la répartition des taux de réussite des items sur les deux années.

Les items réussis à plus de 75 %

Les 5 premiers items du test de mai 2011 (de C1MCM010101 à C1MCM010105), qui sont 5 calculs rapides sur des entiers, sont réussis par plus de 80 % des élèves. Ces 5 items ont été placés l'année scolaire suivante en test 1 (en septembre 2011), et ils ont obtenu des taux de réussite comparables. On peut donc estimer, comme nous l'avons écrit dans le chapitre 4, qu'ils renvoient à une maîtrise de ce type de tâches acquise à l'école primaire, avec toutefois une réserve de taille, induite par le protocole de passation : les élèves pouvaient passer beaucoup de temps à effectuer ces calculs, avec des procédures mentales « lourdes », aux dépens des calculs rapides suivants du même exercice²⁶², comme en attestent les taux de non réponse des derniers calculs.

Restent 3 items pour mai 2011 et 2 en mai 2012 : quels sont-ils ? On trouve d'abord le premier item proposé en calcul rapide en mai 2012 (C1MCM010105, addition de deux décimaux) : nous considérons ce résultat comme une information positive, avec la même réserve toutefois que celle exprimée sur les calculs sur les entiers. Les 4 autres items sont des QCM : on trouve deux items (C1MCR140101 en mai 2011 et C1MNN290101 en mai 2012) dont le r_{bis} est inférieur à 0,2 et qui peuvent être considérés comme des items que les élèves

²⁶² Pour rappel, les élèves avaient à effectuer 13 calculs en 5 minutes.

ayant des scores globaux peu élevés ont réussis²⁶³. Le premier item est un problème mettant en jeu une division, dont la réponse correcte se distingue parmi les quatre réponses proposées, puisque c'est la seule inférieure à 1 € : si on ajoute un contexte d'énoncé et des tailles de nombres plutôt favorables, on peut probablement interpréter cet aspect « facile » et non discriminant de cet item. Le deuxième item renvoie au passage d'une écriture littérale (« 4 fois un tiers ») à une écriture fractionnaire ($\frac{4}{3}$), là aussi peut-être avec des distracteurs peu pertinents (deux écritures décimales, et deux écritures fractionnaires, mais avec une seule, la réponse correcte, faisant apparaître un 4). Les deux derniers items de cette catégorie sont l'item C1MCP010101 (50 % de 80 € sous la forme d'un Vrai/Faux) et l'item C1MNN210101 (rangement de 3 décimaux, également sous la forme d'un Vrai/Faux). Compte tenu du format de ces deux items, nous ne pouvons guère en dire davantage par un traitement isolé de leur taux de réussite.

Les items réussis entre 60 % et 75 %

11 items (sur les deux tests) se situent dans cet intervalle. Nous les rangeons en trois catégories :

- ceux qui étaient proposés en test 1 et pour lesquels on observe un écart positif sur les taux de réussite, autrement dit ceux pour lesquels on peut estimer que l'année de sixième a permis aux élèves de progresser :
 - C1MCR080101 (mai 2011 et mai 2012, le tiers de 60 km, d'environ 60 % à 70 %),
 - C1MCO090501 (mai 2011, $3,72 \times 100$, d'environ 40 % sur une tâche similaire ($7,14 \times 100$) à 70 %) qui correspond à un des cas favorables observés dans notre étude préalable au chapitre 1 (nombre de chiffres de la partie décimale égale au nombre de zéros),

²⁶³ On rappelle qu'un r_{bis} inférieur à 0,2 indique un item peu discriminant, par rapport à la dimension globale évaluée par le test.

- C1MCO020101 (mai 2012, soustraction posée avec des décimaux, de 53 % à plus de 60 %),
- C1MCM010106 (mai 2012, somme mentale de 3 décimaux, d'environ 40 % à 60 %) qui renvoie d'une part à l'item C1MCM010105 réussi à plus de 75 %, et d'autre part à un taux de réussite antérieur²⁶⁴ connu sur cet item en fin de sixième, égal lui aussi à 60 % environ. Notons que cet item a été un peu moins bien réussi en mai 2011, mais dans le même ordre de grandeur.
- ceux qui étaient proposés en test 1 et pour lesquels on n'observe pas de progression :
 - C1MCR050201 (mai 2011, programme de calcul sur des entiers, réussi par environ deux élèves sur 3, en début et en fin de sixième),
 - C1MCO010101 (mai 2012, addition posée avec des décimaux, réussi par un peu plus de 70 % des élèves).
- ceux sur lesquels nous n'avons pas d'information en test 1 :
 - C1MNN210102 (mai 2011, rangement de 3 décimaux, sous la forme d'un Vrai/Faux), à rapprocher de l'item C1MCR050201 réussi à plus de 75 % et de l'item C1MNN240101 (mai 2012, réussi seulement à 51 %),
 - C1MCR180101 (mai 2012) à rapprocher de l'item C1MCR140101, réussi à plus de 75 % lui aussi,
 - C1MCR170101 (mai 2012), qui met en jeu la proportionnalité sur des nombres entiers,
 - C1MNM010101 (5 kg = 5 000 g),
 - C1MNM010103 (1,25 km = 1 250 m) réussis tous les deux par un peu plus de 60 % des élèves.

²⁶⁴ Voir Tableau A-5

Les items réussis entre 50 % et 60 %

Nous choisissons de ranger les 22 items de cet intervalle dans le tableau ci-dessous, sans reprendre en détail chaque item :

Items marquant une progression par rapport aux tests1	Nouveaux items
Multiplication et division par 10, 100 et 1 000 (3 items en 2011 et 1 en 2012) : la progression observée se situe entre 20 % et 30 %. A noter que l'item C1MCO091001 ($35,2 \times 100$) a un taux de réussite légèrement inférieur à 50 % (mai 2012).	Ordre de grandeur d'un résultat (2 items en 2011)
Le passage de l'écriture décimale d'un nombre décimal à une écriture fractionnaire : on passe de 39 % environ à 55 % en mai 2011.	Le passage d'une écriture fractionnaire à l'écriture décimale d'un nombre décimal
Multiplication et division rapides en ligne sur des entiers (2 items en 2011) : la progression observée se situe autour de 15 %.	Abscisse fractionnaire d'un point sur une droite graduée (mais le numérateur correspond au nombre de graduations)
Le tiers de 60 : on passe de 37 % environ à 55 % en mai 2011 (et à 49 % en mai 2012).	Application d'un pourcentage à des quantités (Vrai/Faux)
Division euclidienne d'une difficulté supérieure à celle des tests 1, avec taux de réussite égal (environ 55 %).	Expression d'un quotient (2 items de mai 2012) : $? \times 4 = 5$ (réponse en écriture décimale) et $2 : 3 = ?$

Les items réussis entre 40 % et 50 %

Nous adoptons la même présentation que pour le paragraphe précédent pour classer les 14 items concernés :

Items marquant une progression par rapport aux tests1	Nouveaux items
Ecriture décimale d'un quart, avec une progression d'environ 20 % par rapport aux tests1.	Utilisation de nombres faisant intervenir « un quart » : $\frac{3}{4}$ km = 750 m ; $\frac{3}{4}$ de 20 kg = 15 kg ; 25 % de 32 € = 8 €
Soustraction en ligne ($38 - 1,5$) avec également une progression d'environ 20 % par rapport aux tests1 et qui renvoie à un taux de réussite connu provenant d'une évaluation antérieure de fin de 6 ^e (2008).	Multiplication par de 70 par 0,1
Multiplication d'un décimal par un entier (calcul rapide en ligne, avec une progression de 15 %).	Multiplication posée avec des décimaux
	Résolution de problèmes faisant intervenir la proportionnalité et des nombres décimaux

Les items réussis entre 30 % et 40 %

Les 13 items qui se situent dans cet intervalle renvoient presque tous à des décimaux, sauf trois qui concernent des fractions. On y trouve pratiquement toutes les difficultés évoquées dans notre analyse du chapitre 1, et en particulier 4 items qui portent sur la multiplication des décimaux.

Les items réussis par moins de 30 % des élèves

14 items sont très peu réussis par les élèves : 10 d'entre eux concernent des calculs sur des nombres en écriture fractionnaire et les 3 autres des calculs sur les décimaux. Presque tous ces calculs sont des multiplications.

Conclusion

Sur les 84 items dont nous disposons, 43 sont réussis par 50 % ou plus des élèves, et 41 par moins de 50 % des élèves. Si certains items sont nettement mieux réussis en fin d'année scolaire (par exemple ceux qui portent sur la multiplication et la division d'un décimal par 10, 100 et 1 000), les difficultés identifiées lors de notre analyse préalable (au chapitre 1) sur l'acquisition des nombres décimaux et des structures multiplicatives restent présentes. On voit également apparaître des difficultés liées aux écritures fractionnaires d'un nombre, vu comme un quotient ou non. Ces résultats confirment de réelles difficultés de conceptualisation de la part des élèves, et renvoient à toutes les conceptions erronées déjà repérées. Nous en déduisons qu'il est légitime d'interroger les tâches proposées par les enseignants, les manières de les mettre en œuvre dans la classe ainsi que l'architecture globale des organisations choisies par les enseignants relativement aux connaissances visées. Même si les élèves testés n'appartiennent pas tous au groupe expérimental, nous y voyons aussi une raison supplémentaire de questionner de façon plus détaillée le rôle du calcul mental dans les apprentissages des élèves. Ne disposant que très partiellement de ces éléments dans notre recherche, nous allons donc nous pencher maintenant vers les effets différentiels de l'impact du dispositif, de façon globale d'abord, puis en regardant de façon plus analytique les résultats aux items selon les groupes des enseignants des élèves.

II. Les résultats des élèves : des effets positifs du dispositif pour les élèves des collèges expérimentateurs

A. Les scores globaux des élèves aux tests 2

Nous nous intéressons maintenant aux scores moyens globaux obtenus par les élèves aux tests 2 (mai 2011 et mai 2012) selon la catégorie à laquelle appartient leur professeur de mathématiques. Nous rappelons que le groupe expérimental est constitué d'élèves dont les enseignants sont des professeurs correspondants, qui ont suivi la formation PACEM, ou des professeurs associés, les collègues de ces derniers. Quant au groupe témoin, ou groupe contrôle, il est formé en 2010-2011 des élèves dont les enseignants sont des professeurs témoins, au profil similaire à celui des professeurs correspondants, c'est-à-dire identifiés comme eux par l'inspection régionale de mathématiques, mais dont les collèges n'ont pas été retenus dans le groupe expérimental. Aucun d'entre eux n'a été « formé » spécifiquement dans le cadre du dispositif PACEM.

Tableau 6-1 : Scores moyens des élèves au test de mai 2011

Collèges	Enseignants	Nombres d'élèves	Moyennes des scores bruts (sur 53)	Ecart-type	Minimum	Maximum
Expérimentateurs	Correspondants	661	28,3	10,0	7	52
	Associés	1153	28,2	9,8	5	53
Témoins	Témoins	462	26,8	9,7	6	51
Ensemble	Tous	2276	28,0	9,9	5	53

Nous rappelons qu'en 2011-2012 l'étude est étendue aux élèves d'autres classes témoins que celles des professeurs identifiés en 2010-2011 : ce sont celles des collègues de ces témoins de la première année d'expérimentation, et qui exercent dans les mêmes collèges qu'eux. Cette extension du champ d'étude a pour objectif, si ce n'est de neutraliser *a priori* un effet enseignant, au moins de viser une comparabilité entre les résultats d'élèves ayant des

enseignants de profils similaires. Ajoutons enfin, que les collèges témoins étaient les mêmes que l'année précédente, que presque tous les enseignants témoins de la première année d'expérimentation étaient encore témoins pour la deuxième année, et que les résultats des élèves testés en 2010-2011 avaient été retournés aux collèges témoins comme aux collèges expérimentateurs.

Tableau 6-2 : Scores standardisés moyens des élèves au test de mai 2012

Collèges	Enseignants	Nombres d'élèves	Moyennes des scores bruts (sur 40)	Ecart-type	Minimum	Maximum
Expérimentateurs	Correspondants	591	18,2	8,5	1	40
	Associés	1221	18,0	7,9	1	40
Témoins	Témoins	524	17,9	7,6	3	39
	Involontaires	724	16,5	7,3	2	37
Ensemble	Tous	3060	17,7	7,8	1	40

Sur les deux années, on observe donc des résultats qui semblent indiquer un impact positif du dispositif sur les résultats des élèves : d'une part les résultats des élèves des enseignants du groupe expérimentateur sont supérieurs à ceux des élèves des enseignants du groupe contrôle, d'autre part, les résultats des élèves des enseignants formés (correspondants) sont supérieurs à tous les autres.

Pour confirmer cette tendance, il est nécessaire de comparer les écarts entre les résultats des tests 2 et ceux des tests 1, selon les enseignants que les élèves ont eus pendant l'année scolaire considérée. Afin de réaliser cette comparaison, nous travaillons sur les scores standardisés (de moyenne égale à 0 et d'écart-type égal à 1) pour les deux types de tests.

B. Comparaison des évolutions des scores globaux test 1/test 2 en 2010-2011 et en 2011-2012

Nous comparons ici les résultats des élèves du groupe expérimentateur avec ceux des élèves du groupe témoin pour les deux années d'expérimentation, tout en rappelant encore une fois la prudence dont il est nécessaire de faire preuve dans l'analyse en l'absence d'harmonisation du niveau des tests 1 et 2 (voir chapitre 4).

1. Année 2010-2011

Tableau 6-3 : Moyennes des scores standardisés des élèves au test 1 de septembre 2010 et au test 2 de mai 2011

Collèges	Enseignants	Nombre d'élèves	Moyenne test 1	Moyenne test 2	Différence
Expérimentateurs	Correspondants	661	-0,045	0,036	0,081
	Associés	1153	0,052	0,027	-0,025
Témoins	Témoins	462	-0,064	-0,117	-0,053

Notes de lecture :

1. Une moyenne négative est l'indice d'un moins bon résultat d'un groupe d'élèves donné (ici les élèves des enseignants témoins) par rapport à l'ensemble des élèves testés.
2. La variation des moyennes des tests 1 et 2 ne peut pas s'interpréter en termes de hausse ou de baisse de niveau des élèves, les deux tests n'étant pas « calibrés » l'un par rapport à l'autre. En revanche, elle peut s'interpréter de façon relative, en comparant les groupes d'élèves les uns par rapport aux autres.

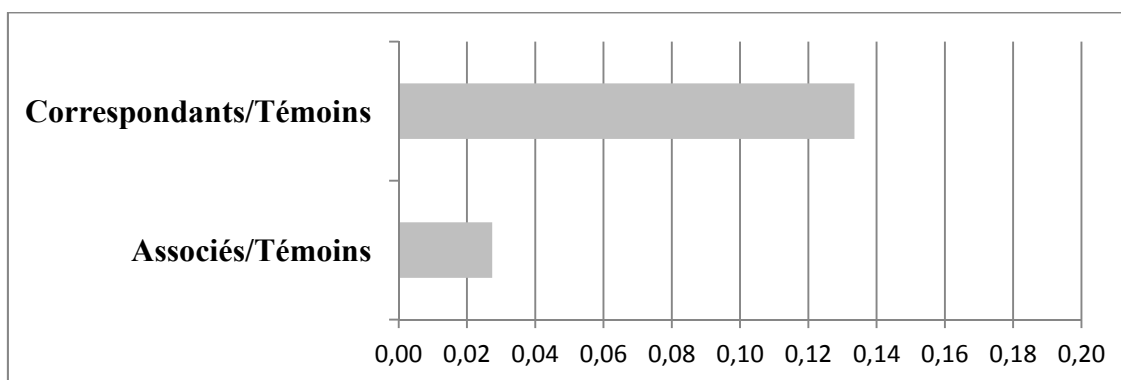
On constate une augmentation des scores des élèves des enseignants correspondants, alors que les scores des élèves des enseignants associés et témoins baissent, ceux des élèves des enseignants témoins diminuant davantage que ceux des élèves des professeurs associés. Nous pouvons alors mesurer l'évaluation d'impact du dispositif PACEM sur les acquis des élèves au cours de la première année de sa mise en œuvre en calculant les écarts entre les différentes évolutions de scores entre les deux tests, en prenant comme référence la moyenne des scores des élèves des enseignants témoins :

Tableau 6-4 : Evolution entre les deux tests des scores standardisés des élèves des collèges expérimentateurs par rapport aux élèves des enseignants témoins en 2010 - 2011

Collèges	Enseignants	Evolution par rapport aux élèves des enseignants témoins
Expérimentateurs	Correspondants	0,134*** (0,042)
	Associés	0,028 (0,038)

*Note de lecture : les nombres indiqués entre parenthèses dans la colonne de droite sont les erreurs standards. Nous utilisons la signalétique habituelle : *** pour une évolution statistiquement significative au seuil de 1 %, ** pour un résultat significatif au seuil de 5 %.*

Graphique 6-1 : Evolution entre les deux tests des moyennes des scores standardisés des élèves des collèges expérimentateurs par rapport aux élèves des enseignants témoins en 2010 - 2011



Note de lecture : le score moyen des élèves des enseignants correspondants est supérieur d'environ 13 points d'écart-type par rapport à celui des élèves des enseignants témoins.

Au terme de la première année de la mise en œuvre du dispositif, on observe donc une progression très nette et statistiquement significative (au seuil de 1 %) des scores des élèves des enseignants ayant participé à la formation (correspondants) par rapport aux scores des élèves des enseignants à profil similaire qui n'ont pas participé à la formation (témoins), ce qu'on peut attribuer à un effet positif direct de la formation spécifique du dispositif. On peut

en outre faire l'hypothèse qu'une diffusion dans les collèges des apports de la formation s'est amorcée, conduisant à une évolution comparable, voire légèrement positive²⁶⁵, des scores des élèves des enseignants des collèges expérimentateurs n'ayant pas participé à la formation (associés) avec ceux des élèves des enseignants témoins.

2. Année 2011-2012

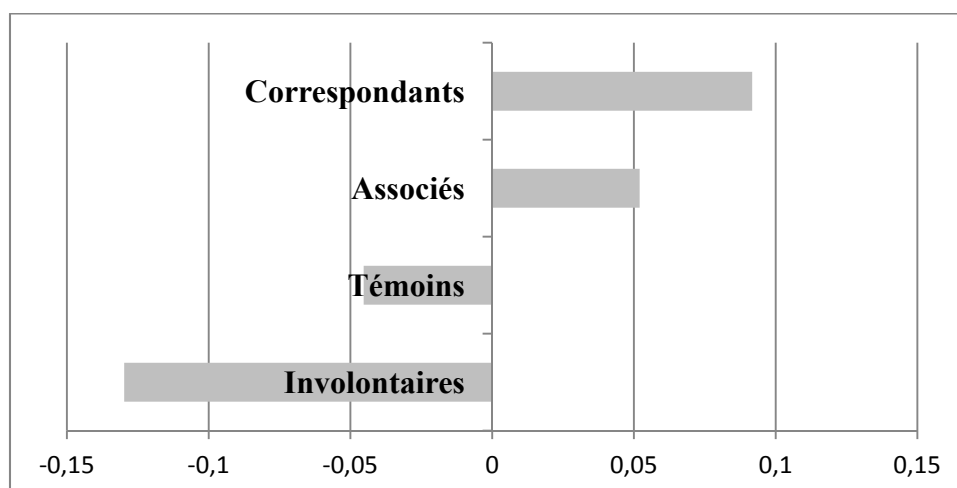
Tableau 6-5 : Moyennes des scores standardisés des élèves au test 1 de septembre 2011 et au test 2 de mai 2012

Collèges	Enseignants	Nombres d'élèves	Moyenne test 1	Moyenne test 2	Différence
Expérimentateurs	Correspondants	591	- 0,019	0,073	0,092
	Associés	1221	- 0,015	0,037	0,052
Témoins	Témoins	524	0,081	0,036	- 0,045
	Involontaires	724	-0,017	- 0,147	- 0,130

Ces résultats confirment les tendances observées en 2010-2011 : les scores des élèves des collèges expérimentateurs augmentent tandis que ceux des élèves des collèges témoins diminuent, avec une baisse très marquée des scores des élèves des enseignants involontaires. La comparaison des évolutions des scores apparaît plus nettement sur le graphique suivant :

²⁶⁵Mais non significative.

Graphique 6-2 : Evolution entre les deux tests des moyennes des scores standardisés des élèves en 2011 - 2012



Note de lecture : le score moyen des élèves des enseignants correspondants a augmenté d'environ 9 points d'écart -type.

Comme pour 2010-2011, l'impact du dispositif PACEM sur les acquis des élèves au cours de la deuxième année est finalement traduit par les écarts entre les évolutions des scores entre les deux tests, toujours en prenant comme référence la moyenne des scores des élèves des enseignants témoins.

Tableau 6-6 : Evolution entre les deux tests des scores standardisés des élèves par rapport aux élèves des enseignants témoins en 2011 - 2012

Collèges	Enseignants	Evolution par rapport aux élèves des enseignants témoins
Expérimentateurs	Correspondants	0,137*** (0,044)
	Associés	0,097*** (0,038)
Témoins	Involontaires	- 0,085** (0,042)

La deuxième année de la mise en œuvre du dispositif confirme un impact direct très net, comparable à celui de 2010-2011 et significatif (au seuil de 1 %) sur l'évolution des scores des élèves des enseignants ayant participé à la formation (correspondants) par rapport aux scores des élèves des enseignants témoins. Elle confirme également ce qui était pressenti en 2010-2011, c'est-à-dire un impact indirect désormais visible sur l'évolution des scores des élèves des enseignants associés par rapport aux scores des élèves des enseignants témoins.

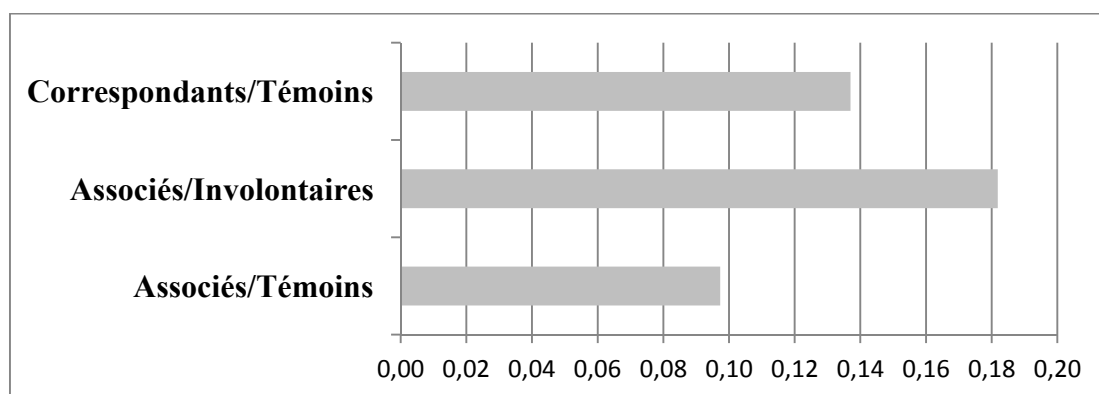
C'était déjà le cas en 2010-2011, très légèrement (3 points d'écart-type), mais l'écart devient beaucoup plus marqué en 2011-2012 (presque 10 points d'écart-type). Ceci renforce donc l'effet positif indirect du dispositif, d'autant que les élèves des enseignants témoins portaient en 2011-2012 avec des scores au test 1 supérieurs à ceux des élèves des enseignants associés. On peut donc parler ici d'un effet de rattrapage qui mérite d'être souligné.

L'hypothèse d'une dynamique collective avec évolution des pratiques de tous les enseignants des collèges expérimentateurs est donc confortée. On peut invoquer un effet Hawthorne²⁶⁶ pour expliquer ces résultats. Cependant, même si cette explication peut être mentionnée à juste titre, elle nous semble intéressante puisqu'aucun des enseignants de ces deux groupes n'a participé à une activité de formation intégrée au dispositif hors de son collège d'exercice, et pourtant une différence forte, et même plus forte que la précédente, apparaît sur l'évolution des scores des élèves. Cela tendrait donc à indiquer, au pire, une sorte d'enrôlement indirect des enseignants associés dans l'expérimentation. Au mieux, cela signifie que la percolation attendue de la formation dispensée aux enseignants correspondants dans les collèges a été effective dans les collèges expérimentaux. Rappelons également que les conditions d'évaluation de l'expérimentation par un pré-test et un post-test étaient connues de la même façon par les enseignants correspondants et les enseignants témoins, et que les retours des résultats des élèves au pré-test ont été effectués selon le même protocole dans les collèges expérimentaux et les collèges témoins.

Le dernier point qui mérite d'être souligné est l'écart très important qui sépare la différence de l'évolution de la moyenne des scores des élèves des enseignants associés avec celle des scores des élèves des enseignants involontaires (presque 20 points d'écart-type), et qui confirme un effet indirect positif du dispositif dans les collèges expérimentateurs.

²⁶⁶ L'effet Hawthorne décrit la situation dans laquelle les résultats d'une expérience ne sont pas dus aux facteurs expérimentaux mais au fait que les sujets ont conscience de participer à une expérience dans laquelle ils sont observés et testés, ce qui se traduit généralement par une plus grande motivation.

Graphique 6-3 : Différences des différences des moyennes entre les scores standardisés des élèves au test 1 de septembre 2011 et au test 2 de mai 2012



Note de lecture : le score moyen des élèves des enseignants correspondants est supérieur d'environ 14 points d'écart-type par rapport à celui des élèves des enseignants témoins.

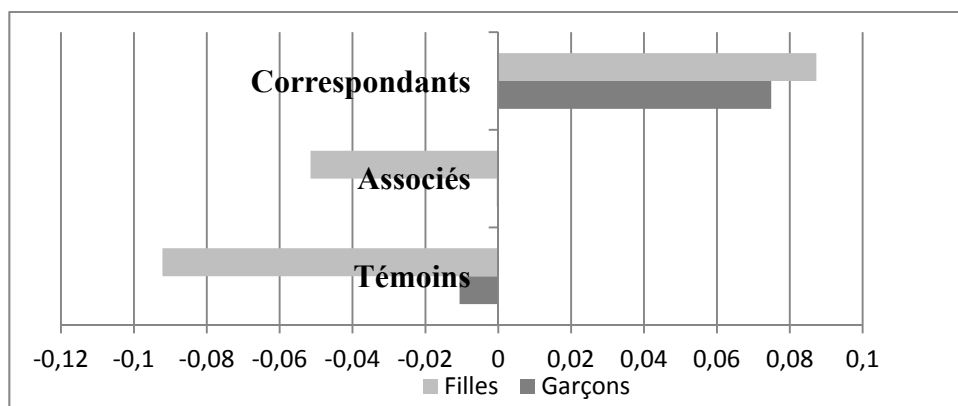
Il nous semble raisonnable d'interpréter les résultats de notre recherche comme imputables à un impact sur « l'effet enseignant » induit par le dispositif mis en place, sans pouvoir dire en l'état actuel de l'analyse des données dans quelle mesure intervient la part de la formation, celle du travail collectif dans les établissements ou la présence de post-tests en fin d'année, ou encore et comme toujours pour des tests standardisés, le degré d'investissement des élèves lors de la passation de ces tests.

C. Croisement des résultats avec des variables individuelles

Des statistiques descriptives (tris à plat, tris croisés) appliquées aux moyennes des scores standardisés selon certaines variables mettent en évidence des résultats qui méritent d'être soulignés. Cependant, ces résultats doivent être pris avec une certaine prudence compte tenu de leur occurrence plus ou moins marquée, sur l'une ou l'autre des deux années d'expérimentation. Ainsi, en 2010-2011, comme l'indique le graphique ci-dessous, les filles

élèves des enseignants correspondants sont les seules filles dont l'évolution des scores est supérieure en moyenne à celle des garçons²⁶⁷.

Graphique 6-4 : Moyennes des différences entre les scores standardisés des garçons et des filles au test 1 de septembre 2010 et au test 2 de mai 2011



Note de lecture : le score moyen des élèves filles des enseignants correspondants a augmenté de presque 9 points d'écart-type tandis que celui de leurs homologues garçons a augmenté d'un peu moins de 8 points d'écart-type. La variation du score moyen des garçons élèves d'enseignants associés est quasi nulle, et donc très peu visible sur le graphique. Les enseignants témoins sont ceux de 2010-2011, c'est-à-dire ceux ayant un profil comparable aux correspondants.

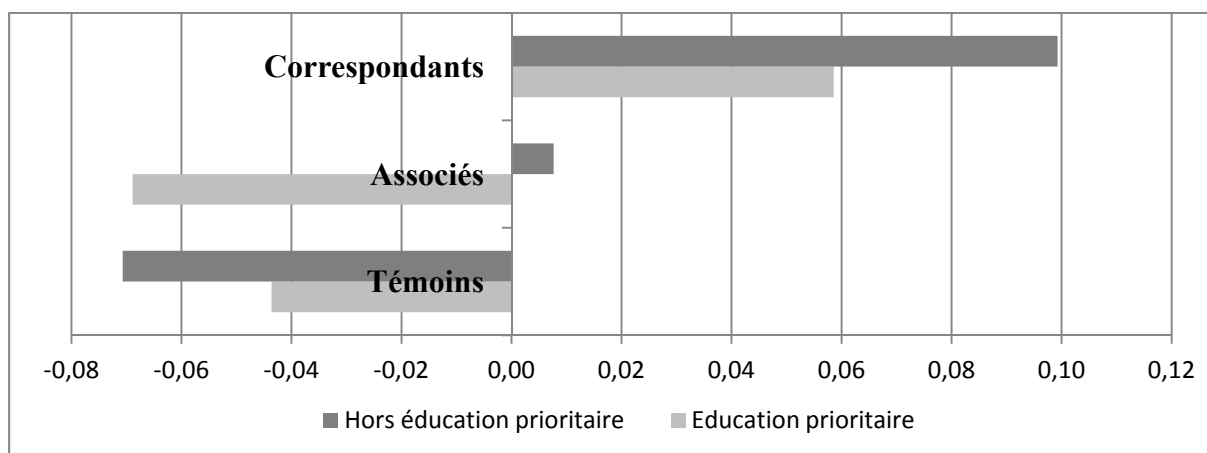
Cette constatation se double d'un deuxième effet qui est un écart plus important pour les filles que pour les garçons entre élèves d'enseignants correspondants et élèves d'enseignants témoins, puisque les filles élèves d'enseignants correspondants ont un score supérieur en moyenne de 18 points d'écart-type à celui des filles élèves des enseignants témoins. Cette observation ne se reproduit pas à l'analogie en 2011-2012, ce qui, sans écarter un effet d'échantillon, incite à des investigations plus approfondies sur les données recueillies

²⁶⁷ Le score moyen de l'ensemble des élèves filles au test 1 était inférieur de presque 20 points d'écart-type à celui des élèves garçons, et a encore baissé de 4 points d'écart-type au test 2.

et/ou à de nouvelles explorations, par exemple pour chercher à comprendre en quoi la pratique du calcul mental peut se révéler différenciatrice²⁶⁸.

Pour ce qui concerne l'éducation prioritaire²⁶⁹, les résultats sont plus ambigus dès la première année. En 2010-2011, seul le score moyen des élèves des enseignants correspondants augmente (de 6 points d'écart-type). Certes, cette augmentation est moindre que celle des scores des élèves des enseignants correspondants des collèges ne relevant pas de l'éducation prioritaire (10 points d'écart-type). Pour les élèves des enseignants témoins des collèges relevant de l'éducation prioritaire, le score moyen baisse (de 4 points d'écart-type), mais moins que celui des élèves des enseignants témoins des collèges ne relevant pas de l'éducation prioritaire (de 7 points d'écart-type). Quant aux élèves enseignants associés des collèges relevant de l'éducation prioritaire, le score moyen des élèves baisse (de 7 points d'écart-type).

Graphique 6-5 : Moyennes des différences entre les scores standardisés des élèves au test 1 de septembre 2010 et au test 2 de mai 2011 selon qu'ils sont scolarisés en éducation prioritaire ou non



²⁶⁸ Le score moyen de l'ensemble des élèves filles au test 1 était à nouveau inférieur d'environ 20 points d'écart-type à celui des élèves garçons, mais a augmenté de plus de 5 points d'écart-type au test 2.

²⁶⁹ La différence entre les scores moyens passe de 36 points d'écart-type au test 1 en défaveur des élèves d'éducation prioritaire à 41 points d'écart-type au test 2.

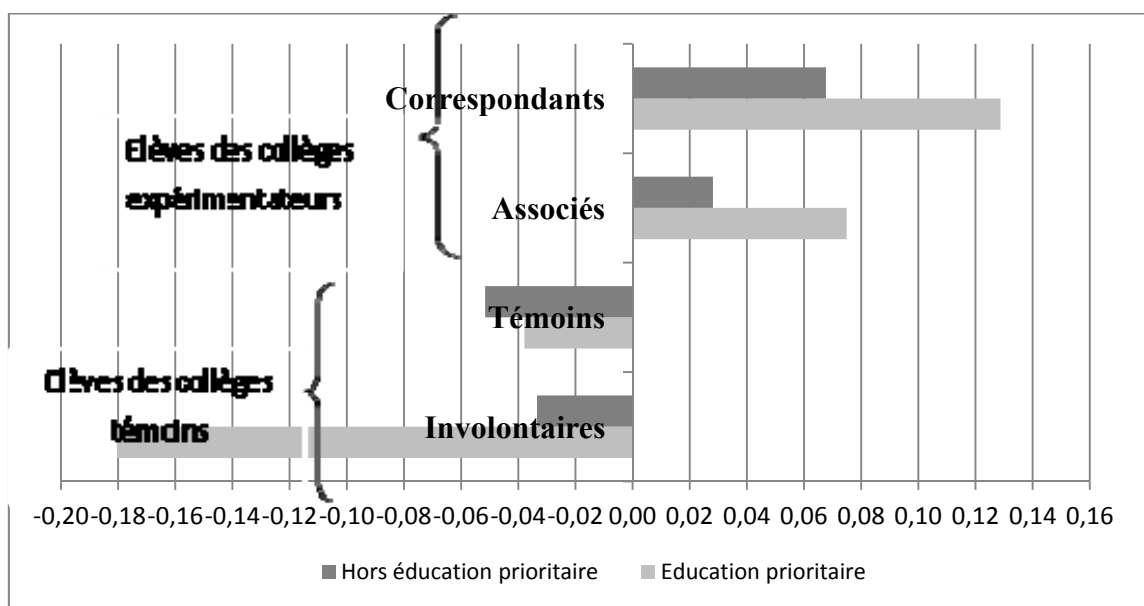
On peut faire des hypothèses ici à la fois sur le profil des enseignants et leur adaptation à des publics spécifiques, qui primeraient sur des effets du dispositif, et sur la difficulté d'évolution des pratiques dans des conditions difficiles d'exercice du métier. Par exemple, on peut se demander, si, pour des enseignants peu expérimentés²⁷⁰, dans des classes où la gestion des élèves est souvent délicate, une surcharge du niveau local²⁷¹ (Massetot & Robert, 2007) ne rend pas difficile d'accepter l'idée que faire évoluer ses pratiques d'enseignement peut avoir une influence positive sur la « discipline » en classe. Dans ces conditions, modifier *a priori* une organisation de son enseignement, des contenus, des modalités de mise en œuvre peut ne pas paraître prioritaire.

Ces tendances évoluent très nettement en 2011-2012 à partir d'une situation initiale différente : en effet, si la différence entre les scores moyens au test 1 entre éducation prioritaire et non prioritaire est à peu près la même qu'en 2010-2011 pour les collèges expérimentateurs (37 points d'écart-type), elle est nettement moins élevée pour les collèges témoins (18 points d'écart-type). Au test 2, l'écart entre éducation prioritaire et non prioritaire augmente pour les collèges témoins (de 10 points d'écart-type) alors qu'il diminue légèrement (de 5 points d'écart-type) dans les collèges expérimentateurs. L'analyse des évolutions des scores en fonction des enseignants se révèle tout à fait intéressant :

²⁷⁰ Ce qui semble correspondre plutôt au profil des enseignants associés. L'ancienneté moyenne des enseignants associés ayant répondu au questionnaire de fin d'année est 4 ans. Rappelons que l'académie de Créteil accueille de nombreux enseignants débutants

²⁷¹ Dans les pratiques des enseignants, nous rappelons que Masselot et Robert définissent un niveau local, intermédiaire entre un niveau macro et un niveau micro, qui est celui de la classe au quotidien, c'est-à-dire le niveau de toutes les adaptations du professeur en classe.

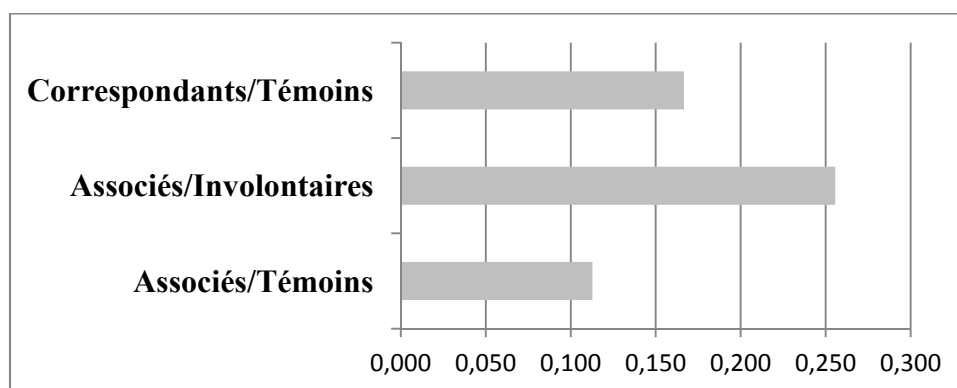
Graphique 6-6 : Moyennes des différences entre les scores standardisés des élèves scolarisés en éducation prioritaire au test 1 de septembre 2011 et au test 2 de mai 2012



Pour cette deuxième année d'expérimentation, le graphique fait apparaître de façon saillante la différence d'évolution entre les scores des élèves des collèges expérimentateurs et ceux des collèges témoins. En effet, on observe très nettement que les scores des élèves scolarisés dans des collèges expérimentateurs relevant de l'éducation prioritaire augmentent (respectivement de 13 points et 7,5 points d'écart-type pour les élèves des correspondants et ceux des associés) alors que ceux des élèves scolarisés dans des collèges témoins relevant de l'éducation prioritaire diminuent (respectivement de 4 points et 18 points d'écart-type pour les élèves des témoins et ceux des involontaires). Ce qui signifie qu'en éducation prioritaire, les élèves d'enseignants associés ont amélioré leurs résultats de 25,5 points d'écart-type par rapport à ceux des élèves d'enseignants involontaires, et que les élèves des correspondants ont amélioré les leurs d'environ 17 points par rapport à ceux des élèves des enseignants témoins.

La durée, facteur si souvent mis en avant dans la formation et l'évolution des pratiques des enseignants, semble donc avoir effectivement permis un partage de pratiques et bénéficié cette fois aussi aux élèves des enseignants associés. Mais ce qui est également remarquable, c'est que l'évolution positive des scores pour les élèves des collèges expérimentateurs est plus marquée en éducation prioritaire que dans les collèges ne relevant pas de l'éducation prioritaire.

Graphique 6-7 : Différences des différences des moyennes entre les scores standardisés des élèves scolarisés en éducation prioritaire au test 1 de septembre 2011 et au test 2 de mai 2012



Enfin, on notera deux autres résultats, qui doivent être pris avec prudence compte tenu des effectifs, et qui ne sont illustrés par aucun graphique : le premier est que parmi les élèves de collèges en éducation prioritaire, le score moyen des élèves filles des enseignants correspondants augmente plus que celui des élèves garçons de ces mêmes enseignants par rapport à leurs homologues filles et garçons des enseignants témoins (20 points d'écart-type contre 14 points d'écart-type). Chez les élèves des enseignants associés, on retrouve la même tendance avec un écart encore plus grand puisque le score moyen des élèves filles augmente de presque 30 points par rapport à celui des élèves filles des enseignants involontaires²⁷² (contre 22 points d'écart-type pour les garçons).

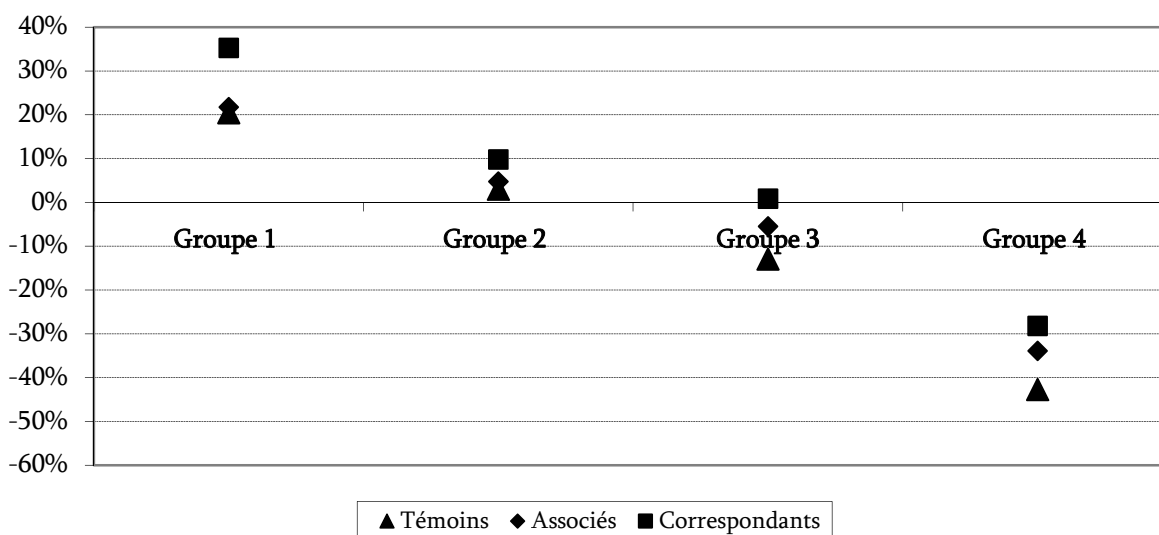
Le second est que le score des élèves « en retard » augmente de 8 points d'écart-type de plus que les élèves à l'heure pour les élèves des enseignants correspondants, alors qu'il n'y a pas de différence chez les élèves « en retard » des enseignants témoins. En revanche, cette différence n'existe quasiment pas entre les élèves des enseignants associés et ceux des enseignants involontaires.

²⁷² Seule cette différence est significative (au seuil de 1 %).

D. Prise en compte du niveau initial des élèves (score au test 1)

Les observations précédentes peuvent être complétées par une analyse prenant en compte le niveau initial des élèves, défini ici par leur score global au test 1 des élèves. Nous avons donc partagé l'échantillon d'élèves en groupes déterminés par les quartiles de la distribution des scores standardisés aux tests de début d'année. Quatre groupes ont ainsi été constitués, allant du groupe 1 constitué par les élèves dont les scores sont les moins élevés au groupe 4, formé par les élèves dont les scores sont les plus élevés. En analysant la différence de score standardisé des élèves de chacun de ces groupes entre les tests de début et de fin d'année, il nous est alors possible de cerner plus précisément l'impact de l'expérimentation sur les groupes d'élèves.

Graphique 6-8 : Ecart moyen des scores standardisés entre septembre 2010 et mai 2011 selon le niveau initial des élèves

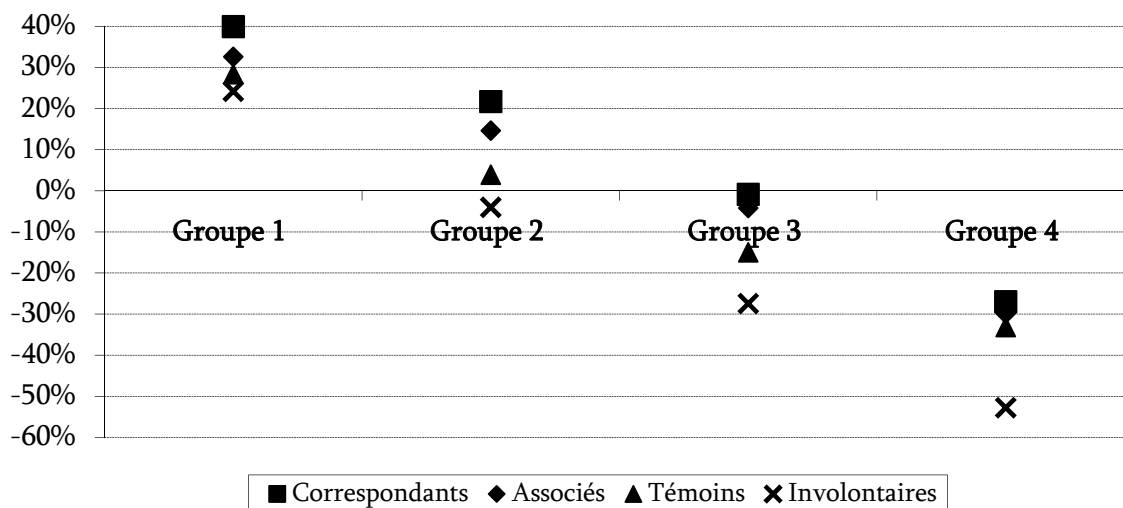


Note de lecture : les élèves du groupe 2 ont un score standardisé au test 1 compris entre le premier quartile et la médiane. Les scores standardisés au test 2 des élèves des enseignants correspondants augmentent en moyenne d'environ 10 points d'écart-type (10 %), ceux des enseignants associés d'environ 5 points et ceux des enseignants témoins d'environ 3 points. Pour le groupe 1, l'écart moyen est environ 20 points, aussi bien pour les élèves d'enseignants associés que pour ceux des enseignants témoins.

Plus que jamais, il est nécessaire de faire preuve de prudence pour analyser le Graphique 6-8. En particulier, les positions des points du groupe 4 n'indiquent pas une baisse de performance des élèves ayant obtenu les meilleurs scores. Elles montrent que l'évolution des scores des élèves est décroissant selon leur score initial, ce qui peut se dire autrement : plus les élèves avaient un score bas en septembre, plus leur marge d'évolution était grande²⁷³, et ceci pour tous les élèves, quel que soit leur enseignant. Mais on observe aussi que pour tous les groupes, la position relative des points est la même (avec éventuellement de faibles écarts) : les évolutions de scores des élèves des enseignants correspondants sont supérieures à celles des élèves des enseignants associés, qui sont elles-mêmes supérieures à celles des enseignants témoins.

On retrouve ces tendances en 2011-2012 (Graphique 6-9) ce qui confirme nos analyses préalables, avec les informations supplémentaires que procurent les résultats des élèves des enseignants involontaires.

Graphique 6-9 : Ecart des scores standardisés entre septembre 2011 et mai 2012 selon le niveau initial des élèves



²⁷³ Ceci est en partie lié à la constitution des tests.

E. Un impact auprès des élèves qui semble dépasser la seule année d'expérimentation

Une des questions importantes de l'impact d'une expérimentation sur les acquis des élèves est son effet dans le temps. Nous avons donc cherché à savoir si les tendances observées en 2010-2011 se confirment, en proposant des tests en fin de 5^e aux élèves scolarisés en 6^e en 2010-2011 et passés en 5^e en 2011-2012. Ces tests sont de deux types : l'un, très court, reprend 13 items du test PACEM de mai 2011 de fin de 6^e et porte uniquement sur le domaine Nombres et calcul ; l'autre est le test national proposé en mathématiques aux élèves en fin de 5^e pour la première fois en mai 2012. Ce test porte sur les acquis en mathématiques, en référence au socle commun de connaissances et de compétences. Les exercices, répartis en 3 séquences d'exercices écrits de 45 minutes chacune, vont des questions simples aux tâches complexes, portant sur l'ensemble des domaines des programmes de mathématiques jusqu'à la classe de 5^e. L'ensemble du test représente 66 items répartis sur les 4 domaines des programmes de mathématiques de collège, et sur les 4 capacités de la compétence 3 définis dans le socle commun de connaissances et de compétences. Ce test national, parce qu'il intègre l'ensemble des composantes des programmes et prend en compte le socle commun, permettra ainsi d'apporter des éléments de réponse à une deuxième question légitimement posée lors d'une expérimentation : qu'en est-il des autres domaines qui font partie de l'enseignement (ici des mathématiques puisque nous sommes au collège) ? L'accent n'a-t-il pas été mis par les enseignants expérimentateurs sur le domaine visé par l'expérimentation – Nombres et calcul – au détriment des autres domaines – Organisation et gestion de données, Géométrie, Grandeurs et mesures ? N'a-t-il pas été mis sur des capacités purement techniques ?

1. Résultats du test PACEM de 5^e sur la cohorte 2010-2011

80 % environ des élèves testés en 6^e ont passé le test PACEM de fin de 5^e, avec une répartition parfaitement équivalente des effectifs selon le type d'enseignant que les élèves ont eu en 6^e en 2010-2011, comme l'indique le tableau ci-dessous²⁷⁴ :

²⁷⁴ Nous avons également contrôlé la structure de l'échantillon du test 3 en fonction des résultats obtenus par les élèves au test 1 de septembre 2010.

Tableau 6-7 : Effectifs des élèves de 5^e ayant passé le test PACEM en mai 2012

	Correspondants	Associés	Témoins	Total
Effectifs test 2 (mai 2011)	661	1153	462	2276
Pourcentage	51 %	29 %	20 %	100 %
Effectifs test 3 (mai 2012)	519	921	366	1806
Pourcentage	51 %	29 %	20 %	100 %

Note de lecture : les élèves des enseignants témoins sont ici ceux scolarisés en 6^e en 2010-2011, donc uniquement ceux d'enseignants de profil comparable à celui des enseignants correspondants.

Les résultats obtenus montrent un effet positif persistant à l'avantage des élèves des collèges expérimentateurs (ex-élèves d'enseignants correspondants et associés en 6^e), qu'on pourrait qualifier « d'inertie », comme si le travail réalisé l'année précédente avait produit certains apprentissages pérennes, en tout cas suffisamment robustes pour résister une année supplémentaire, quel que soit « le vécu scolaire mathématique » des élèves en 5^e. En effet, nous n'avons pas d'information sur l'organisation des classes de 5^e dans les collèges testés (expérimentateurs et témoins), pas plus d'ailleurs que les enseignants qui ont pris en charge ces classes.

Tableau 6-8 : Moyennes des scores standardisés des élèves au test 1 de septembre 2010, au test 2 de mai 2011 et au test 3 de mai 2012

Collèges	Enseignants	Nombre d'élèves	Moyenne test 1	Moyenne test 2	Moyenne test 3
Expérimentateurs	Correspondants	519	-0,006	0,107	0,065
	Associés	921	0,080	0,078	0,057
Témoins	Témoins	366	-0,003	-0,057	-0,238

L'évolution des résultats montre d'une part que les différences entre les scores au test 3 des élèves des collèges expérimentateurs et ceux des élèves des collèges témoins augmentent pour atteindre environ 30 points d'écart-type, et d'autre part qu'il s'est opéré au

cours de la deuxième année un « tassement » des résultats des élèves des enseignants correspondants par rapport à ceux des élèves des enseignants associés, ou un « rattrapage » de ces derniers, alors qu'on peut observer une nette « chute » des scores des élèves des enseignants témoins. Toutes les différences entre les écarts test 2 / test 3 et test 1 / test3 des scores des élèves des collèges expérimentateurs et ceux des collèges témoins sont significatives au seuil de 1 %. Par ailleurs, la comparaison des taux de réussite par item révèle des écarts systématiquement à l'avantage des élèves expérimentateurs²⁷⁵, avec des écarts allant jusqu'à environ 15 points sur les items sur la multiplication²⁷⁶.

²⁷⁵ En fin de 5^e la moitié des élèves testés associent $\frac{1}{4}$ à 0,25 tandis qu'un tiers l'associent encore à 1,4 ce qui était à peu près la situation de fin de 6^e.

²⁷⁶ A noter cependant qu'un élève sur deux ne réussit pas ces deux calculs.

Tableau 6-9 : Taux de réussite aux items du test 3 PACEM fin de 5^e en mai 2012

Item	Tâche	Format	Expérimentateurs	Témoins
C1MCM010106	$5,2 + 13 + 2,8$	Production	77,4%	69,7%
C1MCM010107	$38 - 1,5$	Production	69,4%	65,8%
C1MCM010111	$62 \times 0,5$	Production	47,1%	32,8%
C1MCM010113	$4,2 \times 0,1$	Production	37,4%	24,9%
C1MCO100101	Le tiers de 60	Production	70,3%	64,2%
C1MCO100301	Les deux tiers de 15	Production	38,7%	25,1%
C1MNN030101	Ecriture décimale de $\frac{1}{4}$	QCM	52,9%	42,9%
C1MCR080101	Le tiers de 60 km	QCM	77,4%	73,0%
C1MCR160101	Proportionnalité	QCM	53,6%	45,9%
C1MCP010101	50 % de 80 €	V/F	89,0%	87,7%
C1MCP010102	25 % de 32 kg	V/F	62,5%	54,1%
C1MCP010103	10 % de 3 €	V/F	64,0%	58,5%
C1MCP010104	75 % de 200 km	V/F	73,3%	66,9%

Base : 1806 élèves de 5^e qui ont passé les tests PACEM en 6^e en 2010-2011

2. Résultats des évaluations nationales de fin de 5^e sur la cohorte 2010-2011

En complément de ce test court et très ciblé, les collèges expérimentateurs et témoins ont été invités par le rectorat de Créteil à faire passer à leurs élèves de 5^e le test national présenté au début de la section E. Tous les collèges expérimentateurs ont joué le jeu, tandis que les collèges témoins ont marqué davantage de réticence, compte tenu de la relative lourdeur du protocole d'évaluation, lequel n'était pas initialement prévu dans le dispositif global d'évaluation de l'expérimentation. Il faut en effet rappeler que le test national de fin de 5^e était proposé pour la première fois en 2012, avec une participation volontaire des collèges. Le fait d'avoir à mettre en œuvre l'évaluation, pour toutes les classes de 5^e, alors que seuls certains élèves étaient concernés par le dispositif PACEM, est alors apparu comme une contrainte trop forte pour certains collèges témoins. Au final, l'échantillon étudié comporte 1 202 élèves de 91 classes de 6^e réparties dans 27 établissements (Tableau 6-10), ce qui représente une perte importante d'effectifs par rapport à la cohorte 2011-2012, et nous incite donc à modérer *a priori* notre analyse des résultats, même si la structure globale de notre échantillon est à peu près conservée.

Tableau 6-10 : Composition de l'échantillon en fonction du type d'enseignant

	Correspondants	Associés	Témoins	Total
Effectifs test 1 (septembre 2010)	661	1153	462	2276
Pourcentage	29 %	51 %	20 %	100 %
Effectifs évaluation nationale fin de 5^e (mai 2012)	351	636	190	1202
Pourcentage	31 %	53 %	15 %	100 %

Nous avons donc cherché à connaître plus finement les élèves testés en fonction des caractéristiques dont nous disposions :

Tableau 6-11 : Description des 1 202 élèves de l'échantillon initial ayant passé le test national de fin de 5^e en mai 2012

	Correspondants	Associés	Témoins
Filles	50 %	49 %	52 %
Scolarité en retard	15 %	14 %	18 %
Scolarité à l'heure	83 %	83 %	81 %
Scolaire en avance	2 %	3 %	1 %
Education prioritaire	55 %	50 %	53 %

Malgré l'attrition²⁷⁷, ces statistiques descriptives concernant les caractéristiques individuelles des élèves montrent une relative homogénéité des différents groupes d'élèves selon le statut de leur enseignant ayant participé à l'expérimentation PACEM. En effet, la proportion de filles, la proportion d'élèves « à l'heure », et la proportion d'élèves en éducation prioritaire sont tout à fait similaires dans les différents groupes.

Regardons maintenant les scores des élèves, en leur comparant l'ensemble des autres résultats dont nous disposons, et en les détaillant en fonction des capacités, transversales ou disciplinaires, telles qu'elles étaient définies alors dans le livret personnel de compétences²⁷⁸ pour le palier 3.

²⁷⁷ L'attrition est la perte de participants à l'expérimentation, qu'ils soient expérimentateurs ou témoins. Ce phénomène est évidemment susceptible d'entraîner un biais, qu'il est possible de contrôler avec des tests statistiques.

²⁷⁸ http://media.eduscol.education.fr/file/socle_commun/18/2/socle-Grilles-de-referenc-palier3_169182.pdf

**Tableau 6-12 : Scores standardisés moyens des 1 202 élèves
ayant passé le test national de fin de 5^e en mai 2012 (et les 3 autres tests PACEM)**

	Correspondants	Associés	Témoins
Score test 1 PACEM (sept 2010)	0,033	0,026	0,030
Score test 2 PACEM (mai 2011)	0,155	0,042	- 0,027
Score test 3 PACEM (mai 2012)	0,084	0,019	- 0,217
Score test national (mai 2012)	0,146	0,113	- 0,399
Rechercher, extraire et organiser l'information utile	0,137	0,057	- 0,386
Réaliser, manipuler, mesurer, calculer, appliquer des consignes	0,113	0,115	- 0,242
Raisonner, argumenter, pratiquer une démarche expérimentale ou technologique	0,094	0,080	- 0,296
Présenter la démarche suivie, les résultats obtenus, communiquer	0,146	0,083	- 0,052
Organisation et gestion de données	0,195	0,047	- 0,689
Nombres et calculs	0,088	0,117	- 0,231
Géométrie	0,091	0,100	- 0,357
Grandeurs et mesures	0,081	0,088	- 0,173

Ces résultats nous donnent d'abord des informations sur les élèves qui composent le sous-échantillon étudié : les élèves testés en fin de 5^e ont un niveau initial moyen similaire quel que soit le type d'enseignant qu'ils avaient en 6^e.

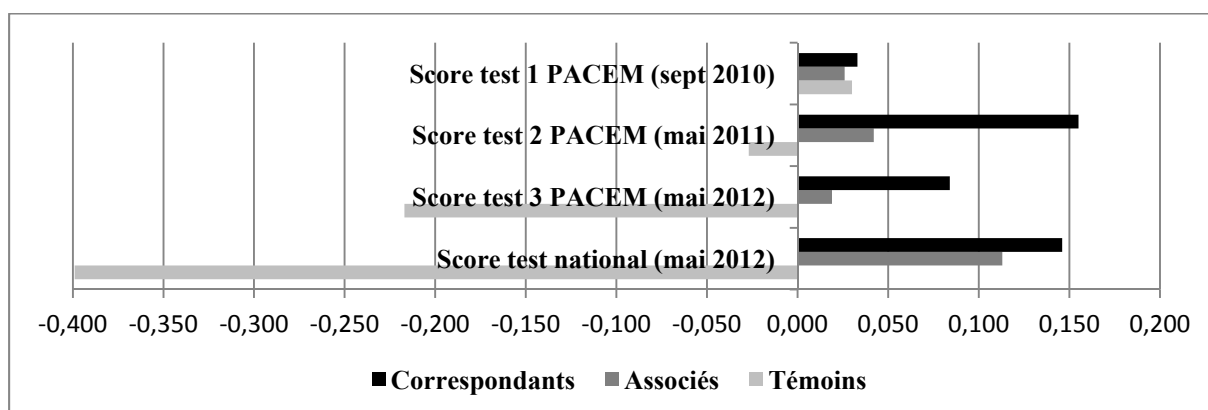
En réalité, si l'ensemble de la structure du sous-échantillon est conforme à celle de la population initiale d'élèves en représentant pour chaque groupe environ la moitié des élèves, la répartition selon les enseignants est légèrement déformée quand on prend en compte le niveau initial (score au test 1) des élèves comme l'indique le tableau ci-dessous :

Tableau 6-13 : Effectifs ayant passé le test national de fin de 5^e en mai 2012 en fonction de leur score au test 1 de septembre 2010

		Correspondants	Associés	Témoins	Total
Groupe 1	Septembre 2010	222	329	139	690
	Mai 2012	104	186	54	344
	Proportion	47%	57%	39%	50%
Groupe 2	Septembre 2010	131	239	112	482
	Mai 2012	80	134	42	256
	Proportion	61%	56%	38%	53%
Groupe 3	Septembre 2010	169	303	114	586
	Mai 2012	107	169	44	320
	Proportion	63%	56%	39%	55%
Groupe 4	Septembre 2010	139	282	97	518
	Mai 2012	85	147	50	282
	Proportion	61%	52%	52%	54%

La répartition par groupe sur l'ensemble de l'échantillon et sur les élèves des enseignants associés est équilibrée, les élèves du groupe 1 des enseignants correspondants sont sous-représentés tandis que ceux du groupe 4 des enseignants témoins sont surreprésentés.

Graphique 6-10 : Scores standardisés moyens des 1202 élèves de la cohorte 2010-2011 ayant passé la totalité des tests

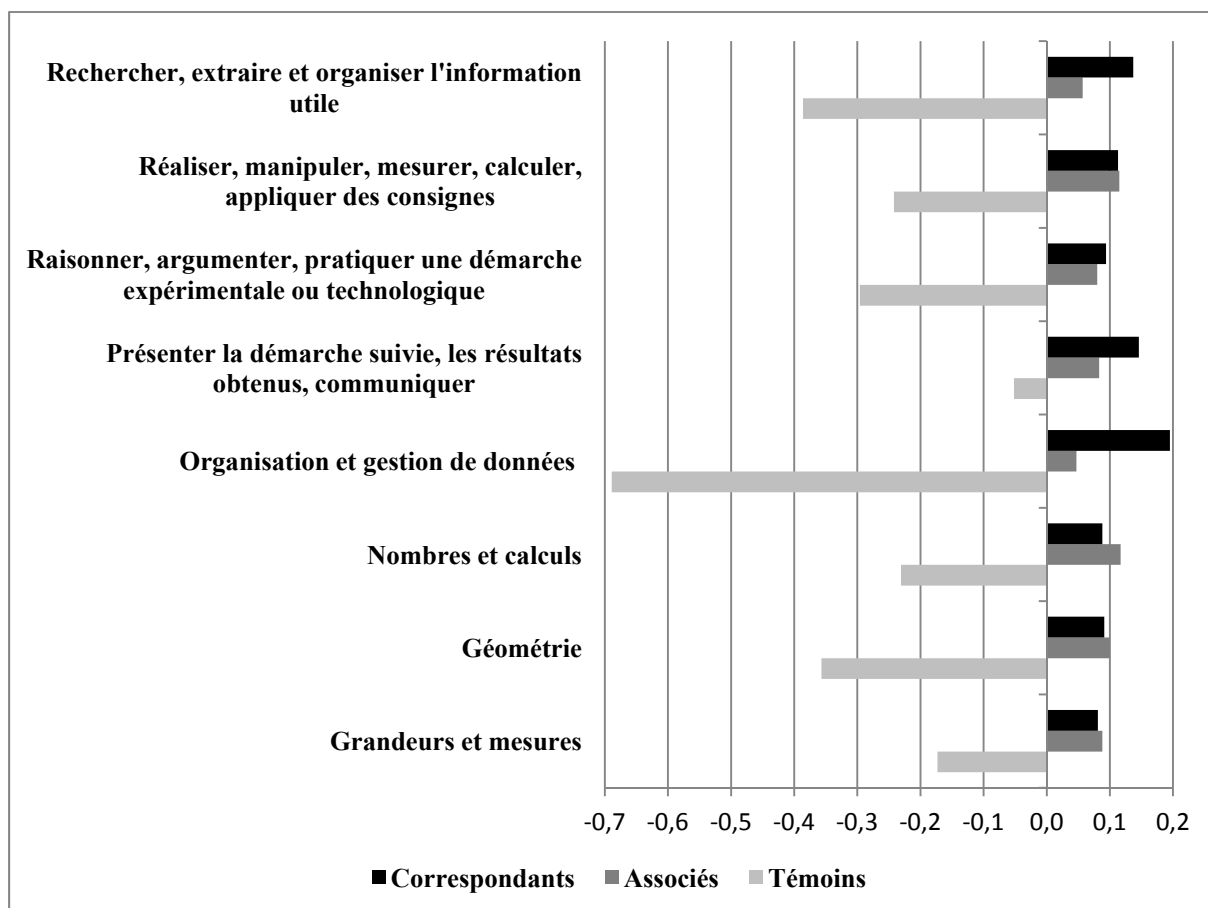


On retrouve au test 2 de mai 2011 les mêmes grandes tendances que pour l'ensemble de la cohorte 2010-2011, là aussi accentuées en positif pour les élèves des enseignants correspondants (de + 3,5 à + 15,5 points d'écart-type), et pour les élèves des enseignants témoins (de - 11,7 à - 2,7 points d'écart-type) et à peu près stables pour les élèves des enseignants associés. Au test PACEM de fin de 5^e, on retrouve sensiblement les mêmes tendances par rapport à celles observées sur l'échantillon plus important que nous avons présentées au début du paragraphe, avec un écart plus net en faveur des élèves ayant eu un enseignant correspondant en 6^e.

Mais ce qui paraît le plus remarquable, ce sont les résultats obtenus par les élèves au test national : on observe une différence de plus de 50 points d'écart-type entre les élèves des enseignants correspondants et associés et les élèves des enseignants témoins. Les scores des tests 1 de septembre 2010 étant très proches, ces 50 points d'écart-type correspondent donc, avec une significativité au seuil de 1%, à l'écart qui s'est créé entre les élèves des collèges expérimentateurs et ceux des enseignants témoins. Ces résultats sont pour nous très étonnants, et nous ne nous risquons pas à ce stade à une quelconque analyse.

Cependant, nous allons décomposer le score global obtenu à l'évaluation nationale par capacité²⁷⁹ en utilisant le tableau 6-12, afin d'essayer de voir où on peut observer des écarts.

Graphique 6-11 : Scores standardisés moyens par capacité des 1202 élèves de la cohorte 2010-2011 ayant passé le test national de fin de 5^e



En décomposant le score global obtenu à l'évaluation nationale par capacité, on observe d'abord que les élèves ayant eu un enseignant correspondant ou associé en 6^e obtiennent systématiquement un score moyen plus élevé que les élèves ayant eu un enseignant témoin. En particulier, ceci est vérifié pour le domaine « Nombres et calculs » sur la base d'items créés dans un contexte différents de celui de PACEM.

²⁷⁹ Nous préférons ici le terme de « capacité », transversale ou disciplinaire au terme « item » utilisé dans le livret personnel de compétences.

Mais, là aussi, l'observation détaillée des résultats des élèves fait apparaître des résultats remarquables : ainsi sur les deux capacités transversales « Rechercher, extraire et organiser l'information utile » et « Reasonner, argumenter, pratiquer une démarche expérimentale ou technologique », on constate des écarts moyens d'environ un demi écart-type (50 points) entre élèves des collèges expérimentateurs et élèves des collèges témoins. Nous devons cependant largement modérer ces résultats par le petit nombre d'items se rapportant à chacune des capacités (entre 2 pour « Réaliser... » et 8 pour « Reasonner... »). Sur les domaines mathématiques, la surprise est encore plus grande puisque sur « Organisation et gestion de données », ces écarts sont les plus élevés avec presque un écart-type, ce qui correspond des écarts réellement très importants²⁸⁰, avec un nombre d'items par domaine variant de 9 (pour la géométrie) à 15 (pour les nombres et le calcul). Même sur la géométrie les écarts entre élèves des collèges expérimentateurs et élèves des collèges témoins s'élèvent à plus de 40 points d'écart-type ! Cette décomposition des résultats nous laissent tout aussi perplexe que les données globales, et fait cruellement apparaître le manque d'informations qualitatives de notre recherche qui auraient pu nous fournir quelques éléments de réponse. En l'état, nous sommes dans l'incapacité de nous risquer à toute analyse que ce soit.

Pour terminer, nous nous sommes livré à deux tris croisés : le premier a permis de mettre en évidence que l'ordre des différents scores obtenus est respecté aussi bien pour les filles que pour les garçons, mais avec des écarts de scores entre le test 1 et le test national qui s'amplifient nettement pour les filles. Cette observation renvoie à l'observation faite sur l'ensemble de la cohorte 2010-2011 à l'issue du test de mai 2011, mais semble aussi confirmer une sorte de « durabilité » des effets de l'expérimentation. Le second tri croisé prend en compte une différenciation par zone d'éducation : même si là encore l'ordre est conservé, ce tri nous indique sans surprise que les élèves scolarisés dans un collège relevant de l'éducation prioritaire obtiennent en moyenne des résultats aux évaluations nationales

²⁸⁰ Par exemple, un écart-type dans PISA correspond environ la différence entre la moyenne des élèves « à l'heure » (donc ceux qui sont en 2^{nde}) et celle des élèves « en retard » (ceux qui sont en 3^e).

inférieurs aux élèves scolarisés hors zone d'éducation prioritaire. Mais, il nous indique aussi que dans les collèges relevant de l'éducation prioritaire, les scores des élèves des enseignants correspondants et ceux des élèves des enseignants associés sont toujours en moyenne bien supérieurs à ceux des élèves témoins.

En tant que concepteur et pilote du dispositif PACEM, nous ne pouvons qu'accueillir ces résultats avec satisfaction. En tant que chercheur, nous ne pouvons que les considérer avec prudence, voire avec méfiance. Comme nous l'avons dit plus haut, nous ne pouvons raisonnablement pas considérer ces résultats comme robustes. Certes, nous pouvons nous livrer à quelques hypothèses en forme de nouvelles questions sur les élèves, qui pourraient être nées d'une modification du rapport des enseignants formés aux contenus enseignés et aux questions didactiques qui s'y rapportent (mise en relief, conceptions et stratégies d'élèves). Par exemple, si nous supposons que le travail en classe effectué en calcul mental favorise une disponibilité des concepts numériques en associant de façon dynamique les aspects outil/objet, quelle incidence ce travail a-t-il sur le raisonnement des élèves, leur façon de s'engager dans une résolution de problèmes, d'appréhender une nouvelle notion en mathématique ? Quels transferts une confiance, même partielle, que les élèves acquièrent dans le domaine numérique, peut-elle permettre dans les autres domaines ? Quel engagement dans un « parcours conceptuel » des élèves un travail différent peut-il enclencher ? Et de façon encore plus globale, dans quelle mesure une attitude des enseignants favorisant une activité effective des élèves en classe, même courte, même locale, peut-elle être un facteur de modification du rapport des élèves aux mathématiques, voire de leur rapport à l'apprentissage et à l'école ? Evidemment, notre recherche n'offre pas de réponses à ces questions, mais les différences de résultats observées offrent peut-être des raisons supplémentaires d'investiguer des dimensions explorées par certains sociologues.

3. Retour sur les contenus : où les différences entre les élèves apparaissent-elles ?

Revenons dans ce troisième paragraphe sur les contenus mathématiques afin d'essayer très brièvement de déterminer sur quels items le dispositif a pu avoir une influence. Pour cela, nous allons tenter de repérer, au travers des résultats de l'année 2011-2012, des variations sur les taux de réussite des items selon le statut de l'enseignant des élèves²⁸¹. Nous ferons pour cela une observation en deux temps, le premier en séparant élèves des collèges expérimentateurs et élèves des collèges témoins, et le deuxième en regardant s'il apparaît des variations au sein de ces sous-populations. Quant aux contenus, nous distinguons ce qui relève de l'école primaire, que nous appelons des connaissances anciennes, qui ont été testées en septembre 2012, de ce qui relève de la classe de sixième et que nous nommons tout naturellement des connaissances nouvelles. Du côté des connaissances anciennes, nous avons relevé 23 items : 9 items communs aux tests 1 et 2, 4 items de calcul mental, 3 items portant sur la multiplication et division par 10, 100 et 1 000, 2 multiplications posées, 1 comparaison de nombres décimaux, 1 changement d'unité (1 « conversion ») et 3 résolutions de problèmes. Les connaissances nouvelles sont quant à elles testées avec 17 items.

Ce qui apparaît, c'est que des différences statistiquement significatives entre les élèves des collèges expérimentateurs et ceux des collèges témoins portent évidemment plutôt sur des items « proches » du calcul mental, aussi bien d'ailleurs sur des connaissances anciennes (soustraction de décimaux, multiplications de décimaux, division par 100, écriture décimale d'un quart) que sur des connaissances nouvelles (multiplication d'un entier par un nombre écrit sous forme fractionnaire, multiplication par 0,1, changement d'écriture d'un nombre décimal, quotient non décimal de deux nombres entiers). On retrouve alors presque toujours pour ces items des taux de réussite qui sont dans l'ordre correspondants/associés/témoins/involontaires. En revanche, il n'existe pas de différence significative pour les items portant sur les additions mentales sur les décimaux, sur les opérations posées et sur

²⁸¹ On pourra consulter l'ensemble des résultats en Annexe C

les résolutions de problèmes faisant intervenir la proportionnalité. Il est évident qu'ici le manque d'informations sur les contenus et les déroulements proposés par les uns et les autres se fait cruellement sentir, et que nous ne pouvons que regretter, en tant que chercheur, l'absence d'explications, au moins partielles, sur ces résultats. Quoi qu'il en soit, il semble cependant que les « points faibles » repérés chez les élèves à leur entrée en sixième (nombres décimaux et structures multiplicatives) aient été, au moins partiellement, améliorés davantage chez les élèves des enseignants correspondants et associés que chez ceux des enseignants témoins et involontaires.

III. La pratique du calcul mental : une pratique efficace, mais avec des limites ?

Notre protocole d'évaluation de l'expérimentation n'incluait que peu d'observations ou de vidéos de séances²⁸². Nous avons donc tenté de recueillir via des questionnaires en ligne adressés aux enseignants un certain nombre d'informations contextuelles sur leurs pratiques, et en particulier celles relatives au calcul mental. Parallèlement, les tests élèves étaient complétés par quelques questions portant sur le calcul mental. L'échantillon final obtenu en faisant la fusion entre les réponses disponibles d'enseignants et les réponses d'élèves en 2011-2012 comporte 1978 élèves répartis dans 96 classes et 27 collèges (14 expérimentateurs et 13 témoins).

Tableau 6-14 : Composition de l'échantillon final ayant répondu aux questions sur le calcul mental en 2011-2012

		Correspondants	Associés	Témoins	Involontaires	Total
Elèves	Effectif	516	619	496	347	1978
	%	26,09	31,29	25,08	17,54	100,00
Classes	Effectif	25	29	24	18	96
	%	26,04	30,21	25,00	18,75	100,00

C'est sur la base de cet échantillon que nous allons tenter de dégager quelques informations supplémentaires qui éclairent la pratique du calcul mental dans l'enseignement des mathématiques dans le cadre de l'expérimentation PACEM, et notamment nous allons nous préoccuper du lien éventuel de la fréquence des séances de calcul mental au cours de l'année avec les résultats des élèves. Parallèlement, nous avons posé la même question aux

²⁸² Nous disposons cependant d'observations d'une séance d'enseignants de presque tous les correspondants et de quelques associés de 2010-2011, et de plusieurs vidéos de séances de correspondants pour cette même année scolaire.

enseignants dans le questionnaire en ligne qui leur a été adressé en juin 2012. Les réponses ont été différentes (49 %, 26 %, 17 % et 6 % par ordre décroissant de fréquence), mais nous n'avons pas encore réalisé la fusion entre les différentes bases de données. Nous nous en tiendrons donc dans cette section aux déclarations des élèves.

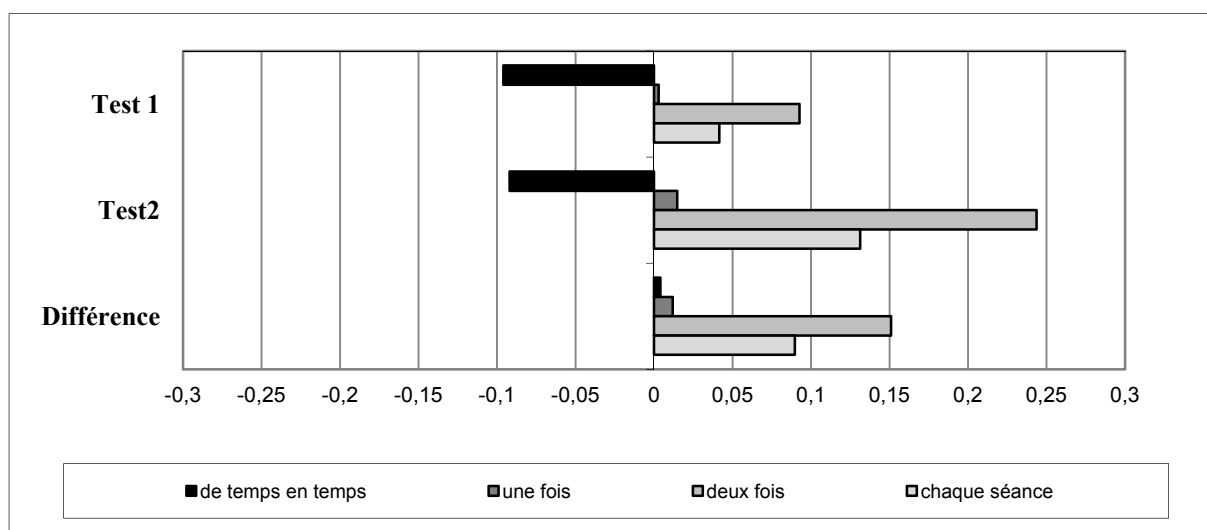
Sur l'ensemble de l'échantillon, une majorité des élèves (52 %) déclarent avoir des moments de calcul mental à « chacune des séances de mathématiques ou presque » alors que 32 % des élèves déclarent n'en avoir qu'une « de temps en temps ». Les fréquences intermédiaires, « une fois par semaine » ou « deux fois par semaine » ne concernent qu'une partie faible de l'échantillon (environ 8 % pour chacune).

Tableau 6-15 : Fréquence des séances de calcul mental en 2011-2012

Cette année, en mathématiques, tu as fait du calcul mental :	Effectif	Pourcentage	Fréquence cumulée	% cumulé
A chaque séance ou presque	1019	51,5 %	1019	51,5 %
Deux fois par semaine	155	7,9 %	1174	59,4 %
Une fois par semaine	163	8,2 %	1337	67,6 %
De temps en temps	641	32,4 %	1978	100 %

Dans un premier temps, nous avons croisé ces données avec les résultats des élèves, sans prendre en compte le statut de leur enseignant :

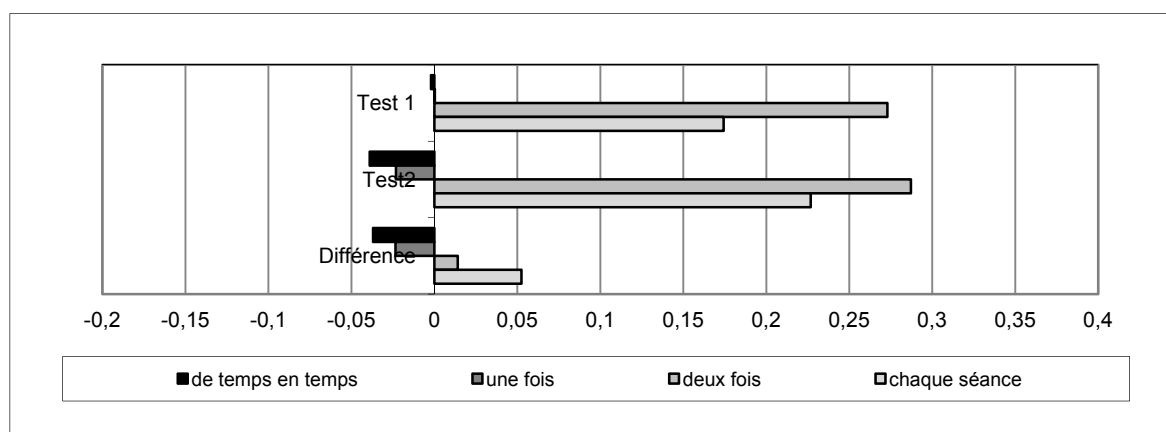
Graphique 6-12 : Evolution des scores entre septembre 2011 et mai 2012 en fonction de la fréquence des séances de calcul mental



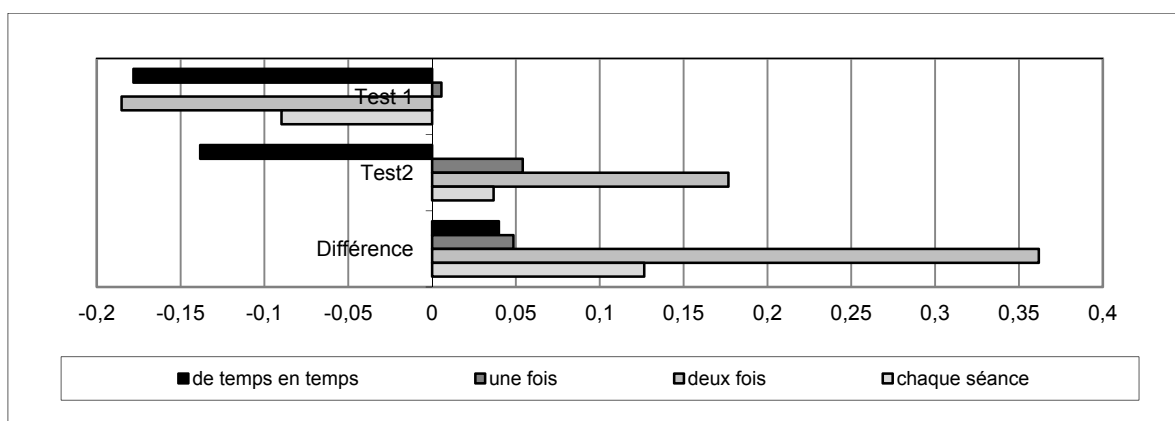
Les résultats globaux montrent que, plus le calcul mental est abordé de façon fréquente en cours de mathématiques, plus les scores obtenus par les élèves sont élevés. Une distinction entre les différentes fréquences apparaît nettement entre faire du calcul mental « de temps en temps » et « une fois par semaine » d'un côté, et « deux fois par semaine » et « à chaque séance ou presque » de l'autre. En effet, les élèves appartenant à cette dernière catégorie voient leurs scores s'améliorer de façon nette (entre 9 et 15 points d'écart-type entre les deux tests) relativement à ceux des élèves appartenant à la première catégorie. Toutefois, les résultats montrent aussi un effet moins important pour les élèves qui ont fait du calcul mental « à chaque séance ou presque » que pour élèves qui ont fait du calcul mental « deux fois par semaine », comme si, au-delà de « deux fois par semaine », la pratique du calcul mental devenait « contre-productive », en s'effectuant par exemple au détriment d'autres choix qui auraient un effet positif sur la réussite des élèves ou en devenant une pratique éventuellement ennuyeuse pour les élèves, les amenant ainsi à réduire leur activité.

Si on creuse un peu plus, on constate des différences marquées entre les garçons et les filles comme le montrent les deux graphiques ci-dessous :

Graphique 6-13 : Evolution des scores des garçons entre septembre 2011 et mai 2012 en fonction de la fréquence des séances de calcul mental



Graphique 6-14 : Evolution des scores des filles entre septembre 2011 et mai 2012 en fonction de la fréquence des séances de calcul mental

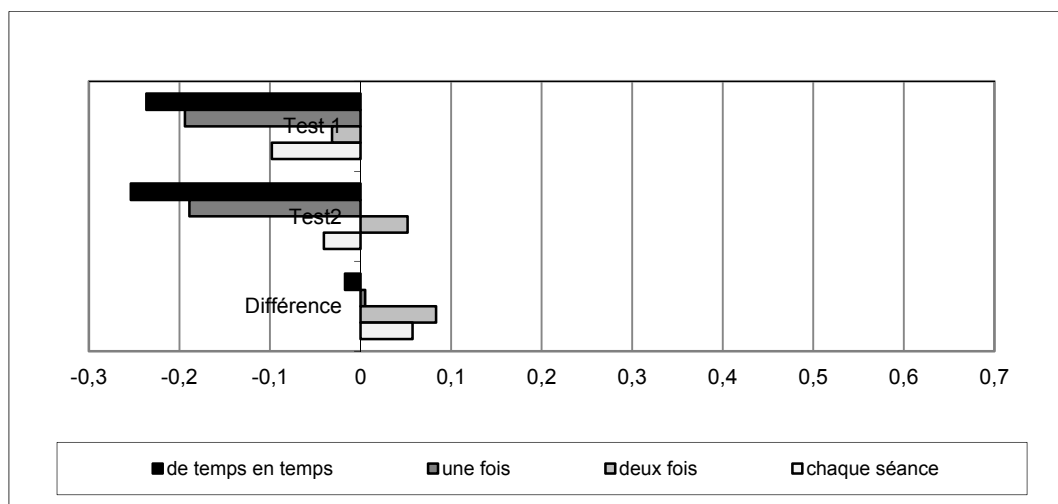


Si les résultats des filles et des garçons du sous-échantillon étudié se révèlent très différents au test 1, l'analyse des résultats au test 2 montre que les filles et les garçons ne semblent pas réagir de la même façon au calcul mental. En effet, non seulement une fréquence faible (« de temps en temps » et « une fois par semaine ») a eu un effet « négatif » sur le score des garçons là où les filles ont vu leurs scores progresser, certes dans des proportions faibles, mais il s'avère en outre qu'une fréquence élevée (« deux fois par semaine » et « à chaque séance ou presque ») semble davantage profiter aux filles qu'aux garçons, avec toujours un seuil d'une fréquence de « deux fois par semaine » qui semble se dégager. Sans pouvoir constituer un résultat robuste compte tenu des effectifs considérés, cette observation pose la question de l'influence du calcul mental sur les activités des élèves pendant les cours de mathématiques, et en particulier celles des filles dans un secteur où on ne les attend peut-être pas *a priori* au début du collège : est-ce à dire par exemple qu'une pratique régulière du calcul

mental tend à améliorer la confiance des filles en elles-mêmes en calcul, voire à leur permettre de retrouver cette confiance éventuellement perdue ?

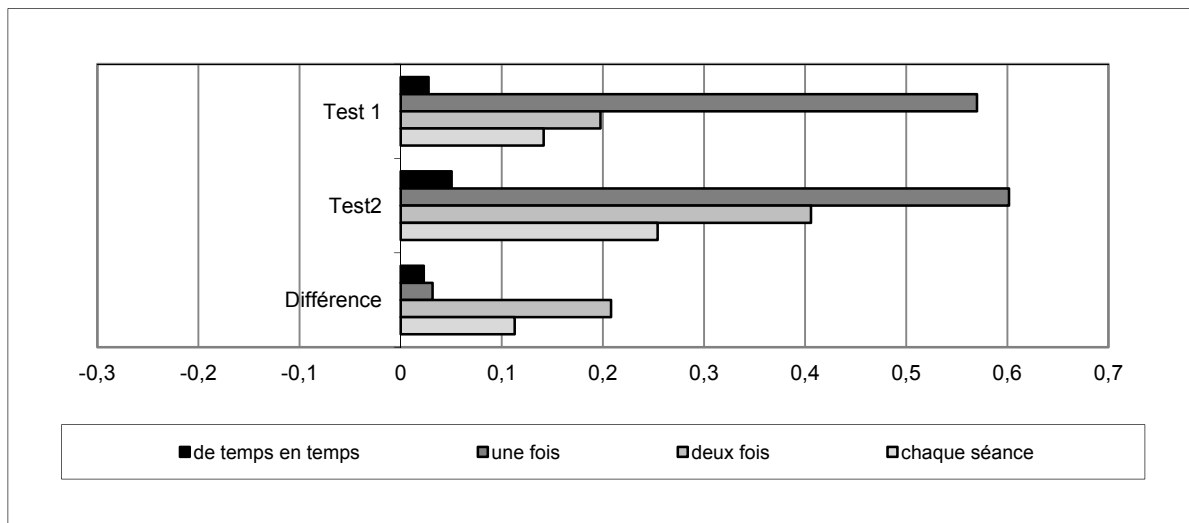
Une autre question est celle de la corrélation entre la fréquence de la pratique du calcul mental et les résultats des élèves selon qu'ils sont scolarisés ou non en éducation prioritaire.

Graphique 6-15 : Evolution des scores entre septembre 2011 et mai 2012 pour les élèves scolarisés en éducation prioritaire



On constate d'abord que les élèves qui déclarent avoir fait souvent du calcul mental pendant leur année de sixième ont de meilleurs scores en moyenne au test 1 que les autres : s'agit-il de pratiques locales, partagées avec des écoles primaires ? En tout cas, l'évolution des scores, tout en allant dans le même sens que la tendance générale, apparaît nettement moins importante pour les élèves scolarisés en éducation prioritaire, que pour l'ensemble des élèves, et donc contrairement aux élèves non scolarisés en éducation prioritaire.

Graphique 6-16 : Evolution des scores entre septembre 2011 et mai 2012 pour les élèves scolarisés en éducation prioritaire



On observe ici une situation initiale plutôt surprenante de la situation des élèves d'éducation prioritaire, puisque ce sont les élèves qui déclarent n'avoir fait qu'une fois par semaine du calcul mental qui ont en moyenne les meilleurs scores au test 1. En revanche, on peut suggérer un « effet de rattrapage » en faveur des élèves ayant fait du calcul mental deux fois ou plus par semaine pendant leur année de sixième.

Regardons maintenant du côté des enseignants. Une décomposition selon le statut de l'enseignant met en évidence une hétérogénéité de la fréquence de la pratique du calcul mental sur l'échantillon étudié.

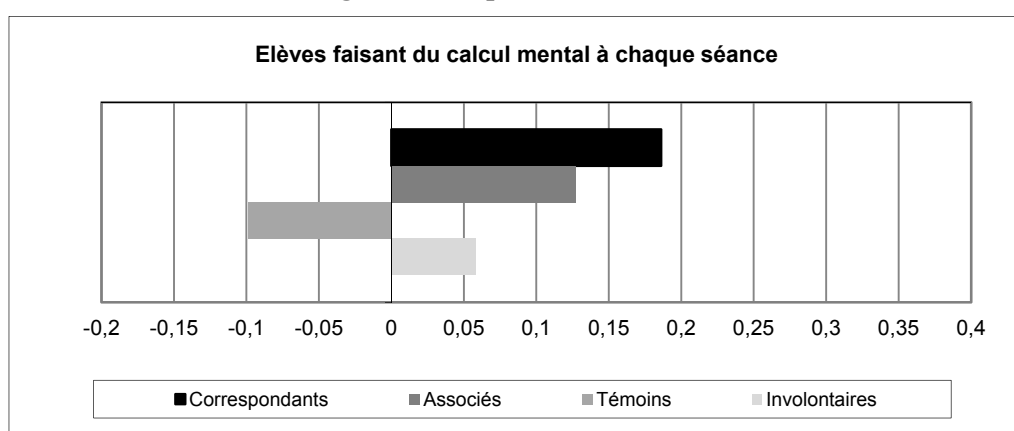
Tableau 6-16 : Composition de l'échantillon en fonction de la fréquence des séances de calcul mental et du statut de l'enseignant

Statut de l'enseignant		Cette année, en mathématiques, tu as fait du calcul mental :				
		A chaque séance ou presque	Deux fois par semaine	Une fois par semaine	De temps en temps	Total
Correspondants	Effectif	357	42	26	91	516
	%	69,2	8,2	5,0	17,6	100
Témoins	Effectif	208	29	64	195	496
	%	41,9	5,9	12,90	39,3	100
Associés	Effectif	275	60	32	252	619
	%	44,4	9,7	5,2	40,7	100
Involontaires	Effectif	179	24	41	103	347
	%	51,6	6,9	11,8	29,7	100
Ensemble	Effectif	1019	155	163	641	1978
	%	51,5	7,9	8,2	32,4	100

En effet, les élèves ayant eu un enseignant correspondant sont une large majorité à déclarer avoir fait du calcul mental « à chaque séance ou presque » (69 % contre 52 % sur l'échantillon total) alors que les élèves des enseignants témoins sont 42 % à bénéficier d'une même pratique. Il est cependant étonnant que 18 % des élèves d'enseignants correspondants déclarent n'avoir fait du calcul mental que de temps en temps. Les élèves des enseignants associés et involontaires déclarant en faire à chaque séance ou presque restent dans des proportions assez similaires (respectivement 44 % et 52%). Cette répartition est décalée de façon homogène quand on ajoute la modalité « deux fois par semaine ».

Enfin, une analyse de l'effet de la fréquence de la pratique du calcul mental en classe en fonction du statut de l'enseignant à l'expérimentation PACEM (Graphique 6-17) nous montre qu'il pourrait exister un impact de l'expérimentation, et en particulier de la formation des enseignants, sur l'efficacité de l'enseignement du calcul mental proposé aux élèves. En effet, si on compare l'évolution des résultats des seuls élèves qui déclarent avoir fait du calcul mental à chaque séance ou presque, on observe encore une fois des différences très nettes entre les élèves, notamment entre ceux des élèves des enseignants expérimentateurs et ceux des enseignants témoins (presque 30 points d'écart-type).

Graphique 6-17 : Evolution des scores entre septembre 2011 et mai 2012 selon le statut de l'enseignant à l'expérimentation PACEM



Puisque la fréquence est la même, comment expliquer ces différences ? Par le choix des contenus effectués par les enseignants ? Par les modalités selon lesquelles les enseignants proposent les phases de calcul mental ? Par le feedback qu'ils retournent aux élèves sur leurs procédures ? Par l'utilisation, même provisoire, des verbalisations de ces procédures ? Ou plus globalement, par l'articulation des séances de calcul mental avec une progression annuelle, plus ou moins spiralée ? Là encore, nous avons pris le parti dans notre recherche, et c'est ce qui en fait une partie de sa spécificité, de rendre compte des phénomènes étudiés en mettant l'accent sur un recueil de données de nature statistique aux dépens d'un recueil d'informations comme un corpus d'observations des séances ou une analyse des préparations des enseignants, qui nous auraient permis d'être en mesure d'apporter des éléments de réponse à ces questions.

IV. Conclusion

En conclusion, il nous semble raisonnable de dire que l'impact global du dispositif mis en place pour l'expérimentation PACEM a été positif pour les élèves des enseignants correspondants, c'est-à-dire des enseignants ayant bénéficié d'une formation spécifique, dès la première année, et la deuxième année pour l'ensemble des élèves des collèges expérimentateurs. Bien sûr, nous sommes conscients des limites de ce dispositif. Du point de vue méthodologique d'abord, même si nous avons tout fait pour neutraliser des biais d'échantillonnage dus à l'expérimentation elle-même, nous n'écartons pas de possibles spécificités des collèges retenus, qu'ils soient expérimentateurs ou témoins, ou de compositions de classes, qui pourraient expliquer les différences observées. Concernant les effets enseignants, ils existent bien entendu et peuvent expliquer une partie de ces différences, même si l'objet *a priori* du dispositif est d'agir sur les pratiques enseignantes, et donc de jouer sur ces effets. Ces réserves potentielles, et par ailleurs justifiées, nous ont amené à prolonger notre travail par des approches « toutes choses égales par ailleurs », actuellement en cours. Ce travail a été commencé pour l'année 2010-2011 et confirme les tendances observées. Même si les différences sont légèrement moins importantes que celles présentées dans notre étude, à score équivalent au test 1 de septembre 2010 et à caractéristiques similaires, les élèves des enseignants correspondants ont obtenu des scores plus élevés au test 2 de mai 2011 que les élèves des enseignants témoins, tandis qu'on ne constate pas de différence entre les élèves des enseignants associés et ceux des enseignants témoins. Cette exploration est destinée à être poursuivie pour l'année 2011-2012, sur l'échantillon d'élèves suivi sur deux ans, et sur la deuxième cohorte d'élèves.

On peut également interroger les tests proposés aux élèves, leurs contenus, le format des items, les conditions de passation, que nous avons essayé de standardiser au maximum, afin de garantir la qualité de l'évaluation. Du point de vue des apprentissages mathématiques des élèves qui ont été testés, et en adoptant une position la plus prudente possible, nous nous contentons d'un bilan en termes de grandes tendances liées à des évolutions de pratiques des enseignants. En effet, même si nous savons que tout ne dépend pas de ces pratiques, même si nous connaissons l'importance de la durée, pour les enseignants, pour les élèves, nous prenons les résultats obtenus comme des résultats positifs. En toute conscience là aussi des

facteurs qui interviennent dans les apprentissages des élèves, et qui limitent les marges de manœuvre des enseignants, en particulier en éducation prioritaire, nous voyons cependant les résultats de PACEM comme un réel encouragement à jouer, individuellement et collectivement, sur les pratiques des enseignants.

Conclusion

PACEM :

une expérimentation positive, une recherche à prolonger

« En conclusion, la didactique, outre son objectif d'explication des phénomènes d'enseignement et d'apprentissage, a un rôle à remplir dans la formation initiale et la formation continue des enseignants en mathématiques. » (Douady, 1984)

L'objet de notre recherche était d'étudier l'impact d'une formation d'enseignants sur les acquis des élèves. Nous rappelons que, dès le départ, nous avons fait des choix méthodologiques, qui ont largement déterminé la nature – et les limites – des résultats que nous avons obtenus. Tout d'abord, nous avons d'emblée pris le parti d'une recherche quantitative, menée à une assez grande échelle, ce qui, quasi mécaniquement, en tout cas avec les moyens dont nous disposions, gomme les approches et les analyses locales « fines », en particulier sur les pratiques des enseignants et sur les synergies intra-établissements potentiellement existantes. De plus, nous nous sommes posé d'entrée de jeu la question d'une extension éventuelle de l'expérimentation, et pour cela, nous avons pris en compte des contraintes liées à toute action ordinaire de formation, notamment celle de sa durée²⁸³. Enfin, nous rappelons que nous avons joué un quadruple rôle dans PACEM : celui du chercheur qui a conçu le dispositif et a cherché ensuite à en analyser la mise en œuvre et les résultats, celui du pilote de l'ensemble du dispositif, celui du formateur et celui de l'évaluateur. Nous ne pouvons que répéter ici que nous sommes tout à fait conscient des limites que cette quadruple posture peut engendrer quant à l'expérimentation elle-même, et nous y reviendrons d'ailleurs dans le courant de notre conclusion. Nous sommes conscient, en tant que chercheur, de la difficulté, que nous avons déjà mentionnée, à faire la part des choses, entre l'implémentation d'une expérimentation et la distance à prendre nécessaire à l'analyse de cette expérimentation et de son impact. Mais c'est sans doute parce que nous avons cette possibilité d'intervenir à plusieurs niveaux, cités ci-dessus, que cette recherche a existé ; de plus, ce qui constitue à nos

²⁸³ En réalité, au-delà de la durée, c'est le coût de la formation que nous avons intégré, en limitant à la fois le nombre de demi-journées en présentiel et en imaginant un dispositif de formation étagée.

yeux son originalité, et un point de départ pour de nouvelles études, c'est justement que, par notre parcours personnel, nous ayons pu adopter et réunir ces différentes démarches.

Partant du constat porté aujourd'hui de façon récurrente par les évaluations nationales et internationales sur l'augmentation en France de la proportion d'élèves de bas niveau, notamment d'origine sociale défavorisée, notre problématique s'est construite en cherchant sur quelles variables il était possible de jouer pour réduire ce phénomène, en prenant en compte les contraintes existantes de notre système éducatif. Plus précisément, nous nous sommes demandé si, sous certaines conditions de formation, une évolution des pratiques des enseignants en mathématiques pouvait contribuer à améliorer les connaissances des élèves en mathématiques, au début du collège, dans le domaine des nombres et du calcul, « toutes choses égales par ailleurs » au niveau institutionnel. Même si certains travaux semblent indiquer qu'il est difficile pour l'école de rompre avec le déterminisme social, nous fondant sur notre expérience d'enseignant et de formateur, nous avons fait une sorte de pari que des marges de manœuvre existent bien, pour les enseignants, y compris dans les collèges relevant de l'éducation prioritaire. Nous avons cherché à explorer ces marges de manœuvre et à comprendre comment il était possible de les investir par de la formation à partir de trois questions : à partir du moment où l'on suppose que les acquis des élèves dépendent en partie des enseignants via leurs pratiques, quels sont les éléments qui sont susceptibles d'influencer ces pratiques ? Comment favoriser l'appropriation de ces éléments par une formation courte ? Et comment étendre cette formation à d'autres enseignants qui ne participent pas à la formation ? Une quatrième question portait sur la manière d'apprécier son impact sur les acquis des élèves.

Depuis la conception et la mise en œuvre de l'expérimentation en 2010, certains éléments de réponse à ces questions nous sont apparus conformes à nos attentes, d'autres au contraire, et presque de façon surprenante pour nous, sont survenus, nouveaux, modifiant ainsi notre rapport aux problématiques initiales et même modifiant ces problématiques. Nous nous étions engagés dans une recherche, presque dans un positionnement militant, avec la volonté première de « faire bouger les choses ». L'écriture de cette thèse nous a en quelque sorte obligé à aller au-delà de ce positionnement, et à l'issue de notre travail, nous nous retrouvons dans une posture différente, où la nécessité d'analyser ce qui s'est joué, y compris dans notre propre action, est devenue une évidence.

I. Retour sur l'expérimentation PACEM

Pour concevoir l'expérimentation PACEM sur laquelle nous avons mené cette étude, nous avons construit une démarche à partir de plusieurs sources :

- nos connaissances empiriques d'abord, construites au fil des ans par notre expérience de professeur et de formateur, largement empreintes des conditions spécifiques d'enseignement dans des établissements relevant de l'éducation prioritaire – mais pas seulement. En particulier, l'approche du calcul mental que nous développons a été mise à l'épreuve pendant plusieurs années dans nos classes, puis dans des actions de formation initiale et continue. Enfin, nous avons nous-mêmes été « formé » à travers une formation de formateurs conçue et mise en œuvre par Robert (2002-2003). Ces expériences multiples nous ont conduit à développer des pratiques d'enseignant et de formateur susceptibles de se présenter quelquefois comme des alternatives, voire des positionnements paradoxaux par rapport à des résultats de recherche. L'ensemble de ces connaissances « de terrain » nous a sans doute permis d'adapter facilement un dispositif de formation directe (c'est-à-dire en présentiel) spécifique à l'expérimentation PACEM, et de concevoir comme possible une percolation de cette formation au sein des collègues des enseignants formés.
- des savoirs théoriques sur les apprentissages des élèves, que nous avons cherché à transmettre et à décliner en pratique pendant la formation d'enseignants. Les hypothèses admises ici touchent à la fois l'importance des activités des élèves pour leur apprentissage et une conception de l'apprentissage en termes de conceptualisation sur un ensemble de tâches, avec comme objectif de construire une disponibilité outil/objet à partir des registres, cadres, points de vue mobilisés, le niveau de rigueur et les types de raisonnements attendus, et une organisation progressive et imbriquée des connaissances nouvelles et anciennes.
- des savoirs théoriques sur les activités des élèves spécifiques au domaine choisi et sur les pratiques des enseignants, que nous avons cherché à adapter à une formation d'enseignants. L'analyse des items des pré-tests passés par les élèves et de leurs résultats procure des occasions, sur des exemples concrets et relativement à des populations identifiées par les enseignants, de chercher les mises en fonctionnement

des connaissances attendues par les élèves et les formes de travail qui provoquent ou non, ou encore partiellement, ces mises en fonctionnement. Rapprocher les besoins supposés par la formation des besoins ressentis par les enseignants, leur apporter des connaissances sur les contenus à enseigner pour donner un relief sur ces contenus, nécessaire à la compréhension des enjeux explicites ou implicites des programmes, cela constitue les deux premières dimensions de la formation. Proposer alors des alternatives possibles à leurs pratiques à portée des enseignants formés, que ceux-ci puissent partager avec leurs collègues, et intégrer ces pratiques dans un aménagement de leur progression annuelle, en ont été les deux dernières.

- nos connaissances sur les évaluations nationales et internationales : le corpus d'items proposés aux élèves en mathématiques depuis plus de 20 ans est riche et les résultats sont remarquables de cohérence et de régularité. Nous avons donc pris le parti de nous appuyer sur ces résultats, quelles que soient les réserves qui peuvent modérer leur interprétation, pour échafauder les grands axes de la formation, construire les pré-tests et les post-tests, et apporter du relief sur les notions abordées.

L'évaluation du dispositif mis en place dans le cadre de l'expérimentation PACEM a montré que celui-ci avait eu dans son ensemble un impact positif sur les acquis des élèves dans le domaine visé, celui des nombres et du calcul, via un effet direct ou indirect d'une formation spécifique des enseignants. Cet impact a touché les élèves dès la première année, a perduré la seconde année avec des élèves d'un nouvel échantillon, ce qui indique une robustesse des résultats. Pour les élèves suivis sur deux ans, l'impact semble s'être fait sentir au-delà de la première année, et ne pas concerner le seul domaine explicitement travaillé.

Ces résultats globaux sont évidemment en eux-mêmes très encourageants pour le porteur du projet, mais ils suscitent aussi un certain nombre de questions pour la recherche. Ces questions peuvent être rassemblées dans trois grandes rubriques : la portée du projet, ses limites, y compris méthodologiques, et enfin les perspectives qu'il ouvre, avec de nouvelles questions.

II. Portée

L'analyse *a posteriori* des résultats de l'expérimentation PACEM va au-delà d'une simple validation de son efficacité à court terme sur les résultats des élèves. La recherche que nous avons menée débouche en effet sur des questions relatives à la structure globale du dispositif, à la formation (en présentiel) des enseignants, au calcul mental, et enfin à l'utilisation de tests standardisés par des enseignants. Nous présentons donc ici les principaux aspects de cette analyse en forme de bilan, tout en sachant que ces différents aspects ne sont pas indépendants les uns des autres dans le dispositif, comme si la complexité du métier d'enseignant ne pouvait trouver un écho que dans une autre complexité.

A. A propos de la structure du dispositif

Nous rappelons que le dispositif de formation est conçu comme une « structure étagée » dont l'objectif est d'agir non seulement sur les acquis des élèves des enseignants participant à la formation en présentiel, mais aussi indirectement sur ceux des élèves des collègues de ces enseignants dans leurs établissements.

Le premier résultat observé, que nous considérons comme robuste, est l'impact positif du dispositif sur l'évolution globale des résultats des élèves des enseignants « correspondants²⁸⁴ », ceux qui ont suivi la formation « directe » : nous avons observé cet effet sur deux années consécutives, sur deux cohortes d'élèves différentes, avec des écarts comparables par rapport la population d'élèves témoins.

²⁸⁴ Nous rappelons que les enseignants « correspondants » sont ceux qui ont participé à la formation spécifique PACEM.

Le deuxième résultat, qui concerne l'évolution globale des résultats des élèves des enseignants « associés²⁸⁵ », collègues des précédents, est tout aussi intéressant. En effet, la conduite de l'expérimentation sur deux années successives a non seulement permis de mettre à jour une évolution des résultats en faveur de ces élèves par rapport à ceux des « témoins involontaires²⁸⁶ », qui avaient *a priori* des profils semblables, mais aussi par rapport à ceux des témoins, comparables à ceux des correspondants. On peut donc en conclure un impact positif direct du dispositif sur les professeurs formés, mais aussi discerner le signe d'une dynamique collective enclenchée par un enseignant ayant le statut de correspondant PACEM et d'une diffusion de pratiques enrichies au sein des équipes pédagogiques. Nous avons ainsi montré qu'une structure étagée de formation d'enseignants, sous certaines conditions, peut être efficace. Ce résultat nous semble remarquable pour deux raisons : d'abord parce qu'il montre qu'une action de formation continue peut avoir des effets positifs directs sur les résultats des élèves, ce qui est attendu, mais rarement, voire jamais évalué, mais surtout parce qu'il montre que des dynamiques collectives intra-établissements peuvent être suscitées à travers une action de formation continue, avec un effet positif sur l'ensemble des élèves.

Enfin, il apparaît, au terme de deux années d'expérimentation qui ont permis de travailler sur deux cohortes successives d'élèves de sixième, avec les mêmes enseignants ou presque, que la « structure en boucle » du dispositif a plutôt bien fonctionné, autrement dit que, si une boucle correspond à un cycle annuel, l'impact observé au cours de la deuxième boucle a confirmé celui de la première, traduisant même un effet croissant de la formation (et l'importance de sa durée...) sur les pratiques individuelles et sur ce qui peut se jouer dans les établissements.

²⁸⁵ Les « associés » sont les collègues enseignants de mathématiques des « correspondants » dans leurs établissements.

²⁸⁶ Les « témoins involontaires » ou « involontaires » sont les collègues enseignants de mathématiques des témoins dans leurs établissements, et constituent une population d'enseignants comparable aux associés.

B. A propos de la formation des enseignants

Nous parlons ici de la phase de formation en présentiel des enseignants que nous avons appelés « correspondants » du projet dans leurs collègues respectifs. En tant que formateur, nous avons construit et tenté de mettre en œuvre cette action de formation sur la base de deux grandes hypothèses imbriquées l'une dans l'autre que nous avons érigées en quelque sorte comme « colonne vertébrale » du dispositif.

Le premier de ces grands principes est de faire en sorte que la formation joue sur au moins deux composantes (Robert, 2005) identifiées dans la théorie de la double approche. Pour mémoire, ces composantes sont cognitive et médiative, institutionnelle, socio-culturelle et personnelle. Nous sommes partis en fait sur une stratégie ambitieuse, consistant à introduire à un moment ou un autre de la formation, et non isolément, chacune de ces cinq composantes. L'utilisation des évaluations standardisées était censée les faire intervenir une première fois, notamment les trois premières. Quant aux deux dernières, elles nous semblaient plus délicates à appréhender, et il nous semblait difficile de définir explicitement *a priori* des contenus ou des modalités qui permettraient de les appréhender et de les introduire. Pour tout dire, nous faisons confiance d'une part à notre connaissance du milieu scolaire, notamment celui de l'éducation prioritaire, d'autre part à notre capacité de formateur d'interpréter en direct les réactions, les questions – et les silences – des enseignants pour adapter la formation afin de faire intervenir ces composantes.

Le deuxième principe est issu d'hypothèses sur un travail de formation des enseignants situé dans une « Zone Proximale de Développement des Pratiques » (Robert & Vivier, 2013), que nous avons testées à cette occasion. Nous avons déjà longuement détaillé comment ces hypothèses nous ont conduit à élaborer une formation en quatre phases, avec en particulier une première phase dite d'amorce que nous considérons comme fondamentale, et un souci permanent de nous trouver ensuite « à bonne distance » des enseignants, pour faire en sorte que les apports de la formation relatifs aux composantes de la double approche soient les plus efficaces possibles (dans notre vision de formateur).

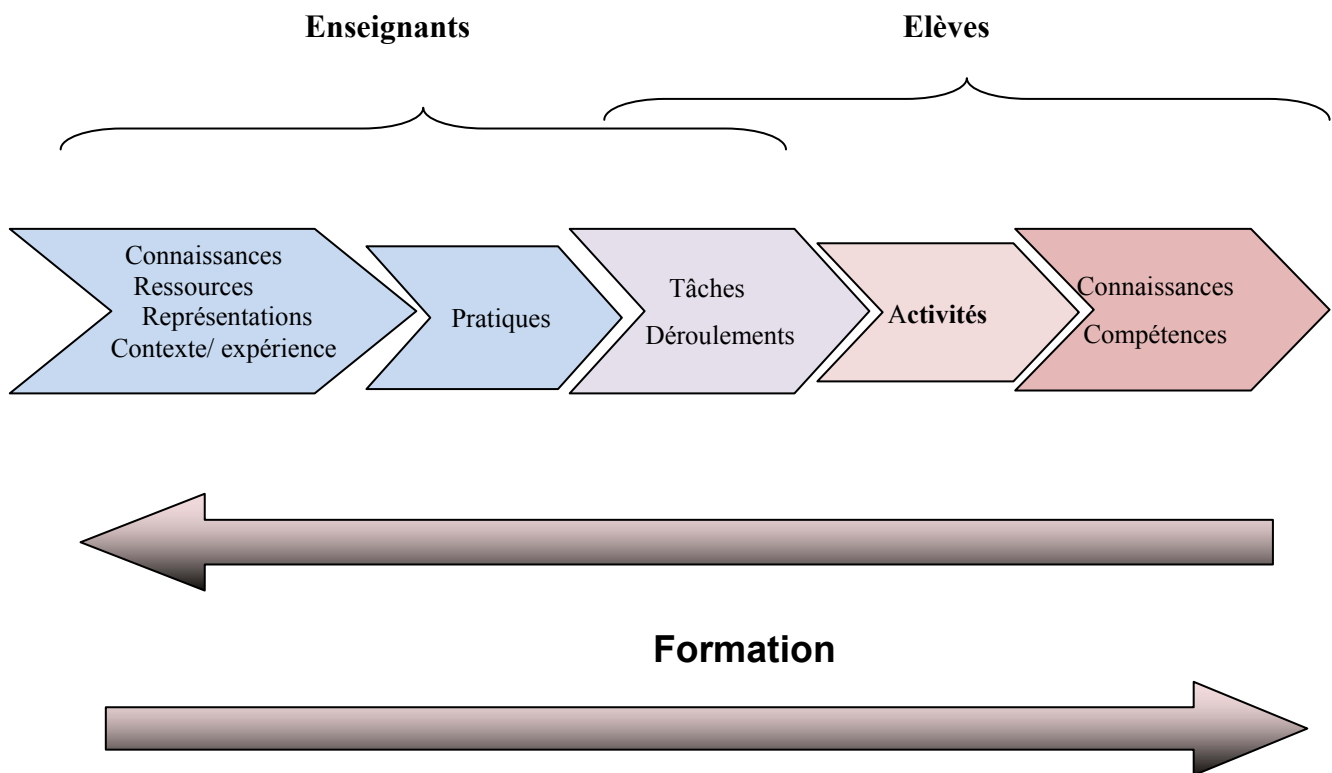
Maintenant que la formation s'est déroulée, sur deux années consécutives, il nous apparaît en tant que chercheur que le processus global de la formation peut se traduire par une

dynamique d’aller-retour. Nous décrivons la première phase de la formation, qui fait intervenir d’abord des évaluations standardisées antérieures au pré-test PACEM, puis le pré-test lui-même, comme une phase réflexive collective. Elle part des résultats sur les connaissances et les compétences des élèves, nationaux et par classe, pour interroger les enseignants sur leurs interprétations des activités potentielles des élèves qui peuvent conduire aux résultats observés, puis sur leurs pratiques et leurs propres choix en termes de tâches et de déroulements, qui peuvent alors induire ces activités chez les élèves. C’est au cours de cette phase que le formateur est conduit à interroger, voire à dénaturer des connaissances et des représentations des enseignants, à interroger les ressources utilisées avec les élèves (manuels scolaires, ressources en ligne) dans un contexte donné (lié aux caractéristiques de l’établissement). C’est cette phase de questionnement suivi de prises de conscience que nous estimons nécessaire pour favoriser l’enrichissement des pratiques professionnelles des enseignants, qui les amèneront à s’approprier et à élaborer des alternatives, qui elles-mêmes les conduiront à d’autres choix pour d’autres activités des élèves et *in fine* à une amélioration de leurs apprentissages.

Un des enjeux de la formation était justement le « potentiel de formation » que pouvait contenir l’utilisation d’évaluations standardisées, notamment par rapport à celle de vidéos. A ce sujet, nous formulons deux remarques qui nous apparaissent aujourd’hui, l’une comme une régularité, l’autre comme une différence, par rapport à la démarche utilisée par Robert dans sa formation de formateurs.

La première porte sur la conception globale d’une « formation à l’envers » et le fait que nous cherchons à travailler comme elle dans une zone proximale de développement des pratiques des enseignants participant à la formation. Et sans nous en rendre compte, nous avons adopté en réalité une démarche parallèle à la sienne, à savoir une démarche en deux temps : en travaillant d’abord sur des matériaux « extérieurs aux enseignants » – les résultats d’évaluations antérieures pour nous, des vidéos d’autres classes pour elle –, puis en travaillant sur des matériaux plus proches d’eux – les résultats obtenus aux tests par leurs élèves, des vidéos de leurs séances pour elle. Nous y voyons une stratégie analogue qui consiste à préparer, à partir d’une réflexion collective sur des objets qui n’impliquent pas encore complètement les enseignants, une deuxième étape, qui, parce qu’elle est plus personnelle, est aussi plus risquée pour le formateur si elle n’est pas abordée avec prudence.

La deuxième remarque porte sur ce qui distingue l'utilisation d'évaluations standardisées de celle de vidéos. Indépendamment de la question non négligeable de la durée de la formation, il nous apparaît aujourd'hui que ce qui les distingue, ce sont les départs et les chemins différents (et convergents ?) qu'elles favorisent *a priori*, dans la phase d'amorce et dans leur objectif d'enrichissement des pratiques des enseignants. L'une – l'utilisation de vidéos – part de la classe et porte le focus sur les tâches et les activités possibles des élèves suite aux interactions avec l'enseignant, à l'échelle de séances ; l'autre – l'utilisation d'évaluations standardisées – incite davantage à un questionnement initial sur les tâches et les activités potentielles des élèves sur l'ensemble d'un domaine visé. Il s'agit alors pour le formateur d'être conscient de la différence de ces points de départ, afin de favoriser, dans un cas comme dans l'autre, mais dans des processus distincts, l'émergence d'un questionnement, de besoins exprimés ou non, dans une perspective d'enrichissement collectif, puis individuel des pratiques.



Le deuxième élément qui a influencé notre réflexion de chercheur est la découverte au cours de notre travail de thèse, du concept de développement professionnel des enseignants²⁸⁷. Ce concept, très présent dans les travaux des chercheurs anglo-saxons et asiatiques, est certes présent depuis longtemps en France en didactique professionnelle en général, les enseignants inclus, mais est aujourd'hui quasi absent de la recherche en didactique des mathématiques. Pour résumer, on peut dire que le développement professionnel inclut la notion de formation continue telle qu'elle existe en France. Selon les travaux des chercheurs dont nous avons pris connaissance (Hawley & Valli, 1999 ; Villegas-Reimers, 2003), le développement professionnel des enseignants (les Australiens utilisent l'expression *professional learning*) présente les principales caractéristiques suivantes : il est fondé sur une approche constructiviste, il est intimement lié aux réformes scolaires, il est perçu comme un processus collaboratif, à long terme, dans lequel les enseignants sont considérés comme des praticiens réflexifs. Alors que de nombreuses études s'intéressent à la recherche de variables explicatives des résultats des élèves au niveau des caractéristiques des enseignants (ancienneté, salaire, formation initiale), les effets d'une formation continue font moins l'objet d'attention. Des études se sont récemment penchées sur la recherche d'éventuelles caractéristiques d'actions visant le développement professionnel des enseignants et qui favoriseraient l'amélioration des résultats des élèves. La très grande majorité de ces recherches porte sur la formation d'enseignants de l'école primaire (Guskey & Yoon, 2009), avec des limites méthodologiques, comme par exemple dans certains cas l'absence de groupes témoins. Elles semblent converger vers l'idée qu'une action efficace de développement professionnel nécessite du temps, et qu'elle doit être structurée avec des objectifs bien déterminés et centrée sur des contenus disciplinaires et/ou pédagogiques²⁸⁸. Des recherches utilisant des modèles économétriques (dits de « valeur ajoutée ») ont mis en avant, notamment pour les mathématiques, des gains importants (Yoon et al., 2007). Des conditions d'efficacité

²⁸⁷ Il se trouve aussi que nous avons, dans le cadre de notre fonction de chef de bureau à la DEPP, été responsable pour la France de la mise en œuvre de l'enquête TALIS 2013 réalisée à l'initiative de l'OCDE auprès des enseignants, et que cette enquête consacre une large part au développement professionnel.

²⁸⁸ Cette traduction renvoie aux 3 notions anglo-saxonnes de *content knowledge*, *pedagogical knowledge* et de *pedagogical content knowledge*.

de ce processus ont été identifiées par les chercheurs : être intégré dans des objectifs d'amélioration de l'enseignement, reposer sur des résultats d'élèves, être conçu en accord avec des besoins identifiés des enseignants et à partir de la résolution conjointe de problèmes (*collaborative problem-solving*), être principalement mené au niveau d'un établissement (*school-based*), fournir de solides connaissances « académiques » et didactiques, être en lien avec la recherche en didactique, permettre aux enseignants de travailler avec leurs collègues, en dehors et au sein des locaux de leur établissement, s'inscrire dans un processus continu, sur une durée longue, qui respecte les principes de la formation pour adultes, et qui est évaluée par son impact sur l'efficacité des enseignants et l'apprentissage des élèves. Plus spécifiquement pour les professeurs en mathématiques, Koellner, Jacobs & Borko (2011) se sont intéressées à trois aspects du développement professionnel : favoriser ce que les Nord-Américains²⁸⁹ appellent une « communauté apprenante professionnelle²⁹⁰ » (*professional learning community*), développer un savoir mathématique pour enseigner et adapter l'action de formation en fonction des contextes locaux.

Sans revenir en détail sur la formation mise en place dans le cadre du dispositif PACEM, et plus globalement sur l'ensemble du dispositif, il nous semble qu'*a posteriori*, la plupart des caractéristiques citées ci-dessus font partie du dispositif, et permettent donc de considérer celui-ci comme davantage qu'une simple action de formation continue, isolée dans un plan de formation académique. D'ailleurs, nous avons trouvé, une fois terminée l'expérimentation, des similitudes assez frappantes avec le dispositif PACEM dans les travaux de Timperley et *al.* (2008) en Nouvelle-Zélande que nous avons cités dans le chapitre 5, mais aussi de Hellmig (2010) en Allemagne et de Whitehouse (2011) en Angleterre. Nous avons donc le sentiment que notre travail contribue à la réflexion internationale actuelle sur le développement professionnel des enseignants tout en lui apportant des spécificités nationales

²⁸⁹ Nous ne sommes pas certains que la notion de communauté soit employée de la même façon aux Etats-Unis qu'en France.

²⁹⁰ Qui prolonge en l'adaptant la notion de « communauté de pratique » développée par Wenger (1998).

et disciplinaires, et de peut-être de nouvelles pistes comme la prise en compte du métier et le travail effectué dans la « Zone Proximale de Développement des Pratiques ».

C. A propos du calcul mental

La portée de l'expérimentation apporte une réflexion globale actualisée et adaptée à la sixième sur le calcul mental, son exploitation à bon escient, et une réflexion didactique sur un matériel important presque « laissé en jachère » jusqu'ici par les enseignants. Pour le formateur, les retours des professeurs participant à la formation ont incontestablement valorisé la démarche choisie, mais suscité dans le même temps un certain nombre de questions « naïves », auxquelles nous ne nous attendions pas toujours, ou en tout cas pas aussi clairement explicitées : du côté des contenus (comment énoncer un calcul ? Peut-on proposer des tâches qui ne sont pas du « calcul » au sens strict ? Peut-on proposer des tâches de calcul mental qui ne sont pas directement liées à la suite d'une séance ? Etc.), du côté des mises en œuvre (Combien de temps ? Sur quels supports ?), du côté des prises d'information (Faut-il « corriger » les productions des élèves ? Faut-il les noter ?), et enfin du côté de l'exploitation de ces prises d'information (Comment ? Quelle durée ?). Ces retours constituent évidemment des indices sur les pratiques des enseignants, et obligent à des adaptations en cours de formation. Pour le chercheur, ces mêmes retours offrent des renseignements sur des pratiques dont on peut faire l'hypothèse qu'elles renvoient à des pratiques génériques, et procurent des éléments de compréhension sur les apprentissages des élèves. Par ailleurs, elles provoquent des réflexions, sur la formation des enseignants, et ce qui peut apparaître comme des conditions nécessaires, et sur le calcul mental en particulier. La première de ces réflexions confirme l'importance de la durée d'une formation d'enseignants, prêts à faire évoluer leurs pratiques, mais en même temps, parce qu'elles sont stabilisées, d'une certaine façon rassurés par elles, voire semblant les « subir », dans une cohérence contextuelle collective (notamment en éducation prioritaire) et individuelle. Elle confirme aussi l'importance de l'amorce dans une formation qui favorise la prise de conscience chez un enseignant, mais, qui, confrontée à la stabilité de ses pratiques professionnelles, de son environnement professionnel (« culture » de l'établissement, relations avec ses collègues, manuel utilisé avec les élèves, etc.) et plus généralement des contraintes liées à l'exercice de son métier, ne suffit pas à le « faire basculer » vers des pratiques alternatives.

Concernant le calcul mental, nous devons convenir que ce qui devait constituer un élément de formation parmi d'autres est devenu l'axe principal, le fil rouge, de la formation. De nouveaux questionnements sont donc apparus tout naturellement au cours de notre travail de recherche : en quoi et sur quoi la pratique du calcul mental apporte un plus pour l'apprentissage des élèves ? Dans quelle mesure est-il profitable pour les élèves d'enseigner des procédures de calcul mental ? Comment concilier un enseignement de procédures de calcul mental et prendre en compte les procédures personnelles des élèves ? A quel moment doit-on passer à une « procédure experte » ? Est-il toujours pertinent de le faire ? Plus largement, une des questions, de notre point de vue fondamentale actuellement, porte sur la pertinence d'élaborer des progressions pour le collège autour de tâches spécifiques à effectuer mentalement, en faisant jouer à celles-ci les différentes fonctions dans l'apprentissage des élèves que nous avons détaillées au chapitre 3. C'est finalement ce qui s'est dessiné comme perspective au cours de l'expérimentation, sans aller au-delà d'une simple esquisse, à partir de propositions de tâches et de déroulements associés. Mais on peut pressentir l'intérêt de recherches allant dans ce sens, par exemple en explorant plus précisément comment la proposition régulière et fréquente aux élèves de tâches à effectuer mentalement avec la résolution de tâches complexes (au sens où les documents institutionnels les définissent) ou avec l'utilisation des matériels numériques (tableau numérique interactif, tablettes).

D. La dimension collective du métier d'enseignant

Sur un tout autre plan, le nombre important de classes touchées dans l'expérimentation et la diffusion de la formation au sein des collèges expérimentateurs mettent en jeu le caractère collectif du métier, dimension encore diffuse en France, mal définie, et qui peut conduire à l'esquisse d'une modification en profondeur des pratiques²⁹¹. Des notions comme celle de « formation de proximité » pour les enseignants, de « communauté apprenante », des questions portant sur la légitimité des établissements scolaires comme lieux de formation pour les enseignants apparaissent aujourd'hui comme des réponses institutionnelles possibles pour

²⁹¹ Cet aspect rejoint des caractéristiques du développement professionnel des enseignants évoqué plus haut.

lutter contre l'échec scolaire : il nous semble que notre recherche peut contribuer à cette réflexion.

III. Limites

Nous avons déjà maintes fois fait preuve de prudence en évoquant les limites de l'expérimentation conduite et ses résultats. Nous renouvelons cette précaution, en récapitulant et en organisant ces limites selon qu'elles sont liées à la structure du projet, à la méthodologie de l'évaluation, à des questions didactiques et à des facteurs institutionnels. Certaines d'entre elles sont classiques dès qu'on s'intéresse à l'évaluation de l'impact d'une expérimentation dans le champ scolaire, d'autres sont spécifiques du dispositif que nous avons mis en place et du rôle que nous y avons occupé.

A. Des limites liées à la structure du projet

Les premières limites que nous identifions sont directement liées au projet lui-même et à sa mise en œuvre :

- les limites liées à la durée de la formation : un des facteurs d'efficacité d'une formation clairement identifié est la durée, et nous nous sommes clairement « coulé » dans un format court, au risque de compromettre les effets espérés. D'ailleurs, si les résultats montrent un impact positif dès la première année, cet impact apparaît plus largement au cours de la deuxième année. Dès lors, la question de l'extension d'un tel dispositif se pose d'un point de vue strictement budgétaire. Une évolution vers un dispositif hybride de formation, c'est-à-dire intégrant des phases de formation en présentiel puis un environnement conçu pour de la formation à distance, pourrait-elle être envisageable sans dénaturer le projet initial ?
- les limites liées aux facilités dont nous avons bénéficié, à la fois comme chef de bureau à la DEPP et ex-formateur de l'IUFM de l'académie de Créteil. Cette double entrée a incontestablement rendu possible le montage du dispositif, ce qui *a contrario* induit un engagement et une collaboration des rectorats et des actuelles ESPE pour une éventuelle reproduction d'un dispositif analogue.
- les limites liées au formateur lui-même : dans quelle mesure nos compétences individuelles, notre personnalité ont-elles eu une influence sur l'efficacité du

dispositif ? Ne pourrait-on pas mettre en avant un éventuel « effet-formateur » comme on parle de l'effet-enseignant ?

B. Des limites liées à la méthodologie de l'évaluation

La question sous-jacente ici est la question de l'objectivité dans l'évaluation d'impact d'un dispositif mis en place dans le champ scolaire, ou pour le dire autrement, de la validité et de la fiabilité de la méthodologie de l'évaluation. Nous avons déjà mentionné tout au long de notre travail un certain nombre de réserves dont nous sommes conscient. Nous revenons ici sur celles qui nous semblent les plus importantes :

- le fait que le choix des collègues expérimentateurs et témoins ait été effectué à partir des enseignants volontaires parmi ceux qui avaient été « repérés » par l'inspection : si d'un côté, nous n'avons pas choisi les collègues en fonction de critères qui auraient pu *a priori* favoriser la réussite du dispositif, d'un autre, nous ne pouvons pas exclure un biais d'échantillonnage dû à des contextes particuliers locaux (par exemple l'influence du chef d'établissement, ou une « bonne ambiance » régnant au sein de l'équipe pédagogique prédisposant des échanges entre les enseignants) qui seraient allés plutôt dans un sens pour les collègues expérimentateurs et plutôt dans le sens opposé pour les collègues témoins. On ne peut donc pas écarter des « effets-collèges » différenciateurs, compte tenu du nombre de collègues retenus. Les contrôles effectués *a posteriori* sur les caractéristiques des élèves testés et sur celles des enseignants engagés ont tendance à nous faire considérer les résultats obtenus comme robustes, mais on ne peut pas écarter non plus des « effets-classes ».
- le fait que l'on ait « réduit » les apprentissages des élèves à des scores mesurés par des tests standardisés évaluables par des tests. Les évaluations standardisées, y compris les plus connues d'entre elles qui sont menées actuellement en France (internationales comme PISA ou nationales comme CEDRE) ne peuvent qu'apporter des informations incomplètes sur les acquis des élèves, et notamment sur leurs degrés de conceptualisation : par exemple peu ou pas de prise en compte de raisonnements partiels, pas d'aide intermédiaire. Pour ces évaluations, la méthodologie sur laquelle elles sont construites (modèle de réponse à l'item) est unidimensionnelle et impose de ne conserver dans les tests que des items qui satisfont le modèle choisi. Nous n'avons

pas adopté un tel modèle pour l'analyse des résultats, mais nous avons néanmoins sélectionné les items selon la même logique. Il est donc tout à fait légitime d'interroger une telle méthodologie, qui pourrait imposer une conception disciplinaire spécifique (sans aller jusqu'à une attitude de *teaching to the test*), et par ricochets, on peut questionner une certaine conception cumulative des apprentissages et l'influence que cela peut avoir sur l'enseignement. Quid des connaissances des élèves, « en partie là », mais non visibles dans un test standardisé ? Quid du développement d'autres dimensions cognitives, disciplinaires ou non qu'un enseignant de mathématiques peut (doit ?) favoriser ? Quid du développement de dimensions non cognitives, comme la confiance en soi ou la motivation ?

- les limites des conditions de passation des tests, liées à l'investissement des élèves, dont on a par ailleurs constaté lors d'évaluations antérieures des différences, notamment en éducation prioritaire, comme par exemple lors de PISA 2009. On peut en effet « s'interroger sur la motivation des élèves et sur l'effort qu'ils investissent pour réaliser un travail « qui n'est pas noté ». Le taux élevé de non-réponses des élèves français a pu être attribué à la peur de mal faire. Il est peut-être dû aussi à un manque de motivation pour un travail à faible enjeu dans un environnement scolaire où la note est prépondérante » (DEPP, 2010). Nous n'avons pas d'éléments concernant notre expérimentation qui nous a alerté ce sujet.
- les limites liées à l'analyse des données : il est évident que les résultats présentés dans notre étude méritent d'être approfondis en vue de développer des raisonnements « toutes choses égales par ailleurs » sur les effets de nouvelles variables (classe d'appartenance de l'élève, PCS des parents). Ce travail statistique est encore à mener. De même, une étude qualitative des réponses des enseignants au questionnaire qui leur a été proposé pourrait compléter ce premier bilan, et permettrait peut-être de dégager quelques variables explicatives des résultats obtenus. Ces analyses nous apparaissent comme complémentaires de notre travail de thèse, mais en dépassent le « périmètre ».

C. Des limites sur ce qui s'est joué dans l'enseignement et l'apprentissage

Les principales limites que nous voyons à notre étude d'un point de vue didactique résident dans l'absence ou la quasi absence d'études "cliniques" qui auraient pu être effectuées

pendant le déroulement de l'expérimentation. Nous n'avons donc que très peu d'éléments, hormis quelques vidéos de séances, les réponses des enseignants aux questionnaires et les retours en direct des correspondants, pour analyser ce qui s'est joué dans les classes et dans les collèges. C'est une évidence de constater que ce manque prive notre recherche d'éléments d'information primordiaux, et qu'il y aurait eu avantage à compléter notre méthodologie par des analyses de déroulement dans différents contextes, notamment une prise en compte de la variable temporelle (sur une année, voire sur deux années). Nous ne pouvons ici que rappeler nos choix initiaux, et convenir que nous avons en quelque sorte perdu au niveau local ce que nous avons gagné à un niveau macro. Quel a été l'impact du dispositif sur les activités des enseignants et des élèves en classe ? Quelles adaptations ont été effectuées en classe par les enseignants ? Quels ont été les effets sur les activités des élèves sur d'autres apprentissages que ceux qui ont été évalués ? Nous ne connaissons pas non plus comment les enseignants dans les collèges se sont emparés – ou non – des résultats des pré-tests, dans quelle mesure une stratégie collective existait avant l'expérimentation, s'est mise ou ne s'est pas mise en place pendant l'expérimentation. Enfin, nous avons très peu d'information sur les conditions dans lesquelles la diffusion des éléments reçus pendant la formation s'est faite – ou ne s'est pas faite –, sur les interactions entre les enseignants correspondants et leurs collègues associés.

Nous ne savons pas non plus à quelles conditions et comment le dispositif a pu avoir une influence sur les activités des enseignants, en jouant en partie sur une diminution du phénomène de différenciation passive²⁹² (Sensevy, Maurice, Clanet & Murillo, 2008) par leur choix des tâches de calcul mental proposées aux élèves et la modification des aides qu'ils leur apportent, sans pour autant tomber dans les contre-effets d'une différenciation active²⁹³ (Rochex & Crinon, 2011). L'évolution des scores des élèves en fonction de leur niveau initial

²⁹² Nous entendons par différenciation passive la tendance à travailler pour des élèves moyens qui augmenterait ainsi l'écart entre les élèves et à terme, renforcerait les inégalités scolaires.

²⁹³ A l'inverse, la prise en compte de de la prise en compte des différences de niveaux d'élèves telles qu'elles sont perçues par les enseignants peuvent conduire ceux-ci à proposer par exemple des tâches plus simples ou à les simplifier par leurs aides, ce qui conduirait également à une augmentation de l'écart entre élèves.

pourrait indiquer qu'en mathématiques, au début de collège, le calcul mental constitue un outil de lutte contre les inégalités scolaires, mais faute d'observations cliniques, nous ne pouvons guère en dire plus sur les choix effectifs et les activités des enseignants.

Nous avons cependant mis en évidence qu'une caractéristique du calcul mental, tel que nous l'avons défini, est d'offrir à tous les élèves de résoudre – et en quelque sorte de les obliger à résoudre – des tâches un peu complexes tout en étant robustes parce qu'à la fois « accessibles et insécables », notamment sans intervention majeure du langage. Les résultats obtenus montrent que cela fait progresser les élèves dans le domaine numérique, mais cela aurait-il le même effet dans des domaines où ils ont besoin de rédiger – explicitation de raisonnements en géométrie, justifications, argumentations – quand ce qui est en jeu ne peut pas être atteint par le calcul mental ? Evidemment, cette remarque peut aussi porter sur ce qui est « régulièrement » accompagné en classe par une part importante d'intervention langagière de l'enseignant, avec d'ailleurs un effet différenciateur qu'elle peut avoir sur les élèves qui est encore largement à étudier dans l'enseignement des mathématiques. Les résultats observés aux évaluations nationales en fin de cinquième semblent ne pas aller dans ce sens, mais le faible nombre d'items incite, comme nous l'avons déjà souligné, à la prudence. Une interprétation optimiste de ces résultats consisterait à suggérer qu'une amélioration de la réussite des élèves dans les tâches où le travail sur le calcul mental les aide, contribue à ce que certains élèves soient plus investis dans le travail en classe, incluant par exemple une écoute active de l'enseignant.

Enfin, nous sommes conscient que d'autres facteurs interviennent dans la réussite scolaire des élèves, en particulier celui que mettent en avant certains sociologues (Bautier & Rochex, 1997 ; Broccolichi et *al.*, 2007) qui renvoient à la question fondamentale du partenariat de l'école avec le monde extérieur, et notamment avec les familles. Nous n'avons pas cherché à éluder ni à minorer cette question, que nous nous posons également, et que nous avons sans doute intégrée de façon implicite dans notre discours pendant la formation. Mais, si nous l'avons souvent prise en compte dans nos formations antérieures, nous ne l'avons pas définie comme un axe d'évolution explicite dans le cadre de notre démarche auprès des enseignants, démarche par ailleurs déjà complexe (structure étagée, intervention de tests, approche de la formation et contenus spécifiques).

D. Des limites institutionnelles

Nous terminerons enfin par des limites de nature institutionnelle, en ce sens qu'elles sont déterminées par des contraintes académiques qui ne dépendent pas du dispositif mis en place. Les points que nous présentons ici sont d'ailleurs davantage des éléments de réflexion qui concerneraient un éventuel prolongement du dispositif, que des limites à l'expérimentation elle-même. La première concerne les conditions d'affectation des enseignants et leur mobilité. L'académie de Créteil accueille en effet un nombre très important de « néo-titulaires » (ou entrants dans le métier d'enseignant) venant d'autres académies. D'une part, la question d'une formation pendant la première année d'exercice à temps plein, souvent dans des contextes difficiles, au moment où les pratiques se construisent, est sans doute à appréhender de façon spécifique ; d'autre part, la question du travail entre pairs au sein de leurs établissements pour ces jeunes enseignants mérite sans doute également une attention particulière. À cette caractéristique de l'académie, vient s'ajouter la pénurie actuelle de professeurs de mathématiques qui oblige à faire appel à des contractuels non ou peu formés. Ces deux contraintes interrogent évidemment la pertinence d'une formation à visée collective touchant des enseignants avec des niveaux de maturité professionnelle très différents les uns des autres. Elles renvoient aussi plus globalement à la problématique de ce que nous appelons un cadre commun de travail au sein d'un établissement, qui, sans parler ni de structures particulières comme des groupes de besoin par exemple ni de progressions communes, fait référence à une organisation de l'enseignement et un « esprit » de sa mise en œuvre qui seraient adoptés par tous, afin de construire sur la durée une cohérence pour les apprentissages des élèves. De façon corollaire à cette situation particulière de l'académie, il faut prendre en compte la mobilité de ces jeunes enseignants qui rejoignent souvent au bout de quelques années leur académie d'origine, ou en tout cas aspirent à exercer leur métier dans un contexte moins difficile.

Nous n'oublions pas non plus la mobilisation de l'inspection régionale dans la mise en place du dispositif en général et de la formation des enseignants en particulier, qui rappelle la nécessaire implication de l'institution, locale, dans une organisation telle que celle de PACEM. Enfin, nous mentionnons un dernier rôle que nous avons sous-estimé dans l'expérimentation, en partie parce que nous voulions nous placer dans les conditions

« normales » d'une formation continue : celui des chefs d'établissements. Il est là encore évident, et sans avoir d'éléments objectifs d'appréciation de ce qui s'est réellement passé dans les collèges « expérimentateurs », que les principaux ont une place importante, voire essentielle, dans la dynamique qu'ils créent ou contribuent à créer dans leurs établissements ou dans le soutien qu'ils apportent à une dynamique émanant des enseignants, et dans le positionnement qu'ils adoptent vis-à-vis de la formation en général, et d'une formation du type PACEM en particulier.

IV. Perspectives et nouvelles questions

Notre recherche s'est inscrite d'entrée de jeu dans un contexte « de contraintes » : une contrainte de formation d'abord, puisque, rappelons – le, nous avons fait le choix de partir sur une formation de 18 h, qui correspond à un format académique fréquent (dans l'académie de Créteil), mais en réalité des contraintes beaucoup plus fortes puisque nous avons pris le parti d'accepter l'ensemble des « règles du jeu » du système scolaire telles qu'elles existaient en 2010 – fonctionnement des établissements scolaires, services des enseignants, organisation des enseignements, programmes – que nous avons confrontées, en les imbriquant, avec nos connaissances empiriques et théoriques des pratiques des enseignants au sens large, c'est-à-dire incluant par exemple la gestion de la classe. Nous avons donc cherché à répondre à notre question initiale – dans quelle mesure et comment peut-on jouer sur les pratiques des enseignants pour améliorer les acquis des élèves ? – dans un cadre restreint en cherchant à explorer des marges de manœuvre possibles pour un enseignant sans modifier, au moins explicitement, les autres variables : pas de constitution particulière de classes, pas de modification des horaires de mathématiques, prise en compte des programmes, etc.

Nous voyons finalement notre travail comme un élément contribuant à la réflexion sur le développement professionnel des enseignants en mathématiques – une réflexion sur une formation continue réflexive, collaborative, intégrée aux contextes et aux enjeux locaux, et prioritairement centrée sur les apprentissages des élèves – et nous avons clairement souligné un certain nombre d'aspects qui certes en limitent la portée, mais ouvrent aussi des perspectives pour la recherche.

Par ailleurs, les enseignants français, par leur formation initiale, par l'organisation générale de l'enseignement, par le mode de fonctionnement des établissements scolaires, ont des démarches professionnelles plutôt individuelles et une culture collective d'établissement relativement faible. Dès lors, si on considère que des solutions pour améliorer les acquis des élèves passent par une dynamique collective, comment favoriser le feedback d'une action de formation continue d'un enseignant envers ses collègues ? Sur quels facteurs externes et internes aux établissements peut-on jouer ? Et comment intégrer les nouveaux enseignants ? Ces questions sont en partie étudiées en France : du point de vue de l'institution, l'accent est

mis actuellement sur la formation des enseignants, sur leur collaboration au sein des écoles et des établissements, et la notion de formation de proximité semble faire son chemin, parallèlement à la construction de formations hybrides ; du point de vue de la recherche, l'utilisation dans la formation des enseignants de matériels comme des vidéos ou des productions d'élèves, l'analyse des pratiques enseignantes et des différenciations qu'elles sont susceptibles de générer sont des pistes explorées actuellement et sont sans doute à approfondir ... en lien avec l'évaluation des élèves.

Vers de nouvelles variables pour la didactique

Les travaux actuels de la recherche en didactique, dans lesquels nous incluons cette étude, cherchent à cerner un certain nombre d'éléments qui font encore défaut aux chercheurs dans leur compréhension des processus d'enseignement et d'apprentissage. Parmi ces éléments à investiguer, nous considérons comme nécessaire une réflexion approfondie à moyen terme sur les évaluations standardisées, sur ce qu'elles disent, ce qu'elles ne disent pas, et ce qu'elles peuvent apporter dans l'élaboration de nouvelles variables intervenant dans l'exercice du métier d'enseignant et dans la formation des enseignants. Autrement dit, nous regardons aujourd'hui la didactique des mathématiques comme un champ de recherche qui doit prendre en compte l'existence des évaluations standardisées, nationales et internationales, de les interroger comme elle le fait pour d'autres objets de recherche, afin de problématiser la question de l'évaluation externe des élèves. Compte tenu du cadre théorique qui est le nôtre, et de l'orientation de nos travaux, nous voyons ces nouvelles pistes de recherche comme autant de perspectives pour favoriser une compréhension de ce qui peut se jouer dans une formation d'enseignants, autrement dit autant d'occasions de préciser des variables sur lesquelles nous avons plus ou moins implicitement travaillé. En effet, si on cherche à faire en sorte que les activités attendues des élèves en classe soient les plus proches des activités possibles, nous suggérons qu'un croisement entre un travail d'analyse des tâches proposées en classe par les enseignants et des informations fournies par des évaluations standardisées permet de construire des variables qui peuvent permettre à la fois de comprendre et d'influencer la nature des activités des élèves : de comprendre, à travers des résultats « forts » et récurrents des évaluations (par exemple l'assimilation de $\frac{1}{4}$ et de 1,4 pour la moitié des élèves qui entrent en sixième, et qui peut être une source d'erreurs implicite comme dans

$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{8}$) comment des stratégies d'enseignement (cours, explications) peuvent ne pas permettre à des élèves de faire évoluer des conceptions erronées ; et d'influencer, justement en faisant en sorte que les enseignants s'approprient ces connaissances pour élargir leur palette de recueil d'informations et d'adaptations de leurs pratiques. Nous suggérons que ce croisement est un moyen potentiel de travailler au plus près des pratiques existantes des enseignants, des choix qu'ils effectuent, de ce qui se fait tous les jours dans les classes tout en favorisant des changements, éventuellement « petits », de ces pratiques, compris et acceptés par les enseignants. C'est en tout cas ce que nous ne nous sommes pas donné comme possibilité d'observer finement dans notre recherche et que nous considérons comme une ouverture à explorer. Ce travail d'analyse comparée entre tâches et résultats d'évaluations nous semble également intéressant à approfondir pour fournir des variables intéressantes à considérer dans les investigations sur le développement professionnel des enseignants au sein de leur propre établissement ou dans des liaisons inter-établissements. Dans le même esprit, mais dans des directions différentes, il nous semble essentiel de poser de nouvelles questions, et peut-être autrement, pour des études didactiques des évaluations standardisées, qui demanderaient un travail de recherche pour passer des résultats quantitatifs à des analyses cliniques, par exemple avec des tests plus réduits, en petits groupes, pour entendre et observer les élèves, ou avec des aides ponctuelles.

En ce qui concerne le calcul mental, là aussi, des études cliniques de différents déroulements possibles de séances sur un temps long avec des essais de mises en relation tâches/activités/productions des élèves nous paraissent un prolongement cohérent de notre travail. D'autres pistes s'ouvrent, comme des analyses de l'articulation du calcul mental avec le reste des séances de mathématiques, avec l'utilisation de calculatrices ou de logiciels intégrés à des supports informatiques (notamment des tablettes), comme ce qui pourrait être généralisé à d'autres classes du collège que la sixième sur des pratiques de calcul mental ou s'en inspirant.

A propos de la formation des enseignants en général, nous avons fait un choix, celui de l'utilisation d'évaluations standardisées, pour l'amorce et le support de la formation : quel rôle ont joué les pré-tests ? Et les post-tests ? Dans quelle mesure des transferts sont-ils possibles pour des formations à venir ? Quelles adaptations ou alternatives sont possibles ?

Nous avons effectué également des choix dans la conception de la formation qui ont conduit à des déroulements effectifs : quels sont alors les facteurs qui ont joué un rôle significatif auprès des enseignants ? Si nous avons identifié des conditions qui nous apparaissent comme nécessaires pour favoriser la mise en proximité des besoins ressentis des enseignants et de leurs besoins supposés, quelles seraient des conditions suffisantes ? Comment les identifier dans la perspective d'un passage d'un dispositif expérimental à une action de formation intégrée dans un plan de formation académique ?

Enfin, si on considère que la formation que nous avons menée a été efficace, et si on accepte comme nous l'avons fait dès le départ la proposition suivante : *“The evidence is clear that teaching is one of the most important school-related factors in student achievement, and that improving teacher effectiveness can raise overall student achievement levels”* (Darling-Hammond & Rothman, 2011), on constate que ces questions ajoutent en réalité un étage à la structure actuelle, qui est celui de l'activité du formateur, qui reste à analyser : quelles leçons peuvent être tirées de notre travail dans ce domaine, notamment dans la perspective de formation de formateurs ? Les questions et les enjeux pour la recherche sont nombreux, et fondamentaux, pour faire en sorte que la complexité qui caractérise les pratiques des enseignants puisse être appréhendée afin que les uns et les autres, en fonction de leurs connaissances, de leur personnalité, de leurs élèves, de leur établissement d'exercice puissent faire évoluer leurs pratiques, presque imperceptiblement ou de façon plus radicale, avec une farouche volonté de faire apprendre leurs élèves. C'est finalement la question des relations entre la didactique des mathématiques et les enseignants qui est posée, et la place des formateurs dans ces relations.

Bibliographie

Références bibliographiques

- Anghileri, J., Beishuizen, M. & Putten, K. (2002). From informal strategies to structured procedures: Mind the gap! *Educational Studies in Mathematics*, 49, 149-170.
- Anselmo, G. (2008). Quelle place pour le calcul mental au collège. *Bulletin de l'APMEP*, 475, 206-214.
- Artigue, M. (2007). Quelques réflexions suscitées par la lecture du texte élaboré par l'Académie des Sciences sur la place du calcul dans l'enseignement primaire. http://educmath.ens-lyon.fr/Educmath/en-debat/place-du-calcul-enseignement-primaire/michele_artigue
- Askew, M., Bibby, T. & Brown, M. (2001). Raising attainment in primary numeracy : from counting to strategy. *BEAM Research Papers*, RES01. Londres : BEAM.
- Askew, M., Bibby, T., Brown, M. & Hodgen, J. (2004). Examining children's opportunity to learn mental calculation. *BEAM Research Papers*, RES05. Londres : BEAM.
- Askew, M. & Brown, M. (2003). *How do we teach children to be numerate?* Southwell : British Educational Research Association.
- Baturo, A. & Cooper, T. (1995). Strategies for comparing decimal numbers with the same whole-number part. In: *Proceedings of the 18th Annual Conference of The Mathematics Education Research Group of Australia*. Northern Territory University, Darwin, North Territories.
- Baudelot, C. & Establet, R. (1989). *Le niveau monte*. Paris, Le Seuil
- Baudelot, C. & Establet, R. (2009). *L'élitisme républicain. L'école française à l'épreuve des comparaisons internationales*. Paris : La République des idées, Seuil.
- Bautier E. & Rochex J-Y. (1997) Apprendre : des malentendus qui font la différence. In *La scolarisation de la France. Critique de l'état des lieux*. Terrail J-P (dir.), 105-122. La Dispute.
- Bednarz, N. (2004). Collaborative Research and Professional Development of Teachers in Mathematics. Dans M. Niss, E. Emberg (Eds.) *Proceedings of the International Conference on Mathematics Education*. Copenhagen.
- Beishuizen, M. (1993). Mental strategies and materials or models for addition and subtraction up to 100 in Dutch second class. *Journal for Research in Mathematics Education*, 24(4), 294-323.
- Beishuizen, M. (1997). Mental arithmetic: Mental recall or mental strategies? *Mathematics Teaching*, 160, 16-19.
- Bell, M. S. (1974). What does "everyman" really need from school mathematics? *Mathematics Teacher*, 67, 196-202.
- Benjamin, A. T. (2011) *The Secrets of mental math*. Chantilly, Virginia : The Great Courses.
- Berch, D. (2005). Making Sense of Number Sense: Implications for Children With Mathematical Disabilities. *Journal of learning disabilities*, 38, 4, 333-339.
- Bibby, T., Askew, M. & Hodgen, J. (2003). Strategic Thinking and the National Numeracy Strategy: an Oxymoron? Paper presented at the *British Educational Research Association Annual Conference*. Heriot-Watt University, Edinburgh.

- Biggs, J. B. (1967). *Mathematics and the conditions of learning*. Slough: National Foundation for Educational Research.
- Bodin, A. (2007). Dissonances et convergences évaluatives. De l'évaluation dans la classe aux évaluations internationales : quelle cohérence ? *Bulletin de l'APMEP*, 474, 47-214.
- Bolon, J. (1992) L'enseignement des décimaux à l'école élémentaire. *Grand N*, 52, 49-79. IREM de Grenoble
- Bolon, J. (1996). *Comment les enseignants tirent-ils parti des recherches faites en didactique des mathématiques ? Le cas de l'enseignement des décimaux à la charnière école - collège*. Thèse de doctorat de l'Université Paris 5.
- Boule, F. (1997). *Performances et démarches de calcul mental au cycle III. Éléments pour une pédagogie du calcul mental*. Thèse de doctorat, Villeneuve d'Ascq, Presses universitaires du Septentrion.
- Boule, F. (1998). Etapes du calcul mental. *Grand N*, 62, 15-33. IREM de Grenoble
- Bourdenet, G. (2007). Calcul mental. *Bulletin de l'APMEP*, 472, 710-732.
- Briand, J. (2006). http://www.cafepedagogique.net/lesdossiers/pages/contribs_briand2.aspx
- Broccolichi, S, Ben Ayed, C., Mathey-Pierre, C. & Trancart, D. (2007). Fragmentations territoriales et inégalités scolaires : des relations complexes entre la distribution spatiale, les conditions de scolarisation et la réussite des élèves. *Education et formations*, 74, 31-48.
- Brousseau, G. (1980). Problèmes de l'enseignement des décimaux, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 1.1, 11-59. Grenoble : La Pensée Sauvage
- Brousseau, G. (1981). Problèmes de l'enseignement des décimaux, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 2.1, 37-127. Grenoble : La Pensée Sauvage
- Brousseau, G. (1982). Les objets de la didactique des mathématiques, in *Actes de la deuxième école d'été de didactique des mathématiques*, France.
- Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage
- Brousseau, G. (2001). L'enseignement des mathématiques dans la scolarité obligatoire : Micro et Macro – didactique. Article Publié in *la matematica et la sua didattica*, 1,5-30. Traduction Maria Polo du texte non publié en français.
- Bronner, A. (1997). *Etude didactique des nombres réels: I-décimalité et racines carrées*. doctorat de l'Université de Grenoble 1.
- Brown, M, Askew, M, Millett, A. & Rhodes V. (2003). The key role of educational research in the development and evaluation of the national numeracy strategy. *British Educational Research Journal*, 29, 5, 655-672.
- Butlen, D. (2007). *Le calcul mental entre sens et technique. Recherches sur l'enseignement des mathématiques aux élèves en difficulté, du calcul mental à la résolution des problèmes numériques*. Presses universitaires de Franche-Comté.
- Butlen, D. & Pézard, M. (1990). Calcul mental, calcul rapide, *Grand N*, 47, 35-59. IREM de Grenoble, université Joseph Fourier, Grenoble.

- Butlen, D. & Pézard, M. (1992). Calcul mental et résolution de problèmes multiplicatifs, une expérimentation du C.P. au CM2, *Recherche en Didactique des Mathématiques*, 12, 2.3, 319-368. Grenoble : La Pensée Sauvage.
- Butlen, D. & Pézard, M. (1996), Rapports entre habileté calculatoire et prise de sens dans la résolution de problèmes numériques, étude d'un exemple : impact d'une pratique régulière de calcul mental sur les procédures et performances des élèves de l'école élémentaire. *Cahier de DIDIREM n°27*. Paris, IREM Paris 7.
- Butlen, D. & Pézard, M. (2000). Calcul mental et résolution de problèmes au début du collège. *Repères IREM*, 41, 5-24. Topiques Editions.
- Butlen, D. & Pézard, M. (2003). Une contribution à l'étude des rapports entre habiletés calculatoires et résolution de problèmes numériques à l'école primaire et au début du collège. *Spirale, Revue de Recherche en Education*, 31, 117-140. Lille.
- Butlen, D. & Pézard, M. (2007) Conceptualisation en mathématiques et élèves en difficulté, *Grand N*, 71, 7-32, IREM de Grenoble, université Joseph Fourier, Grenoble 1.
- Caney, A. (2002). Exploring mental computation in the middle years. In B. Barton, K. C. Irwin, M. Pfannkuch, & M. O. J. Thomas (Eds.). *Mathematics education in the South Pacific. Proceedings of the 25th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia, Auckland*, 163- 170. Sydney : MERGA.
- Caney, A. (2004). Perception of mental computation practice : reports from middle school teachers and students. *Proceedings of the 27th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia*, 159-166. Townsville, Australie.
- Carpenter, T., Corbitt, M., Kepner, H., Lindquist, M. & Reys, R. (1981). Decimals : Results and implications from the second NAEP mathematics assessment. *Arithmetic Teacher*. 28(8), 34-37.
- Case, R. (1998). Changing views of knowledge and their impact on educational research and practice. In D. Olson, & N. Torrance (Eds.). *Handbook of education and human development*, 75-99. Malden, MA: Blackwell
- Cauterman, M.-M., Demailly, L., Suffys, S. & Bliez-Sullerot, N. (1999). *La formation continue des enseignants est-elle utile ?* Paris : P.U.F.
- Chambris, C. (2008). *Relations entre les grandeurs et les nombres dans les mathématiques de l'école primaire. Évolution de l'enseignement au cours du 20e siècle. Connaissances des élèves actuels*. Thèse de doctorat de l'Université Paris Diderot.
- Charlot, B., Bautier, E. & Rochex, Y. (1992) *École et savoir dans les banlieues et ailleurs*. Paris : Armand Colin.
- Charnay, R. (2002). Pour une culture mathématique dès l'école primaire, *Bulletin de l'APMEP*, 441, 409-417 Paris.
- Chesnais, A. (2009). *L'enseignement de la symétrie axiale en sixième dans des contextes différents : les pratiques de deux enseignants et les activités des élèves*. Thèse de doctorat de l'Université Paris Diderot.
- Chesné, J.-F. (2006). *La formation des pratiques chez les enseignants du second degré : des passages obligés ?* Mémoire de master 2, Université Paris 7.

- Chesné, J.-F., Pariès, M. & Robert, A. (2009). « Partir des pratiques » en formation professionnelle des enseignants de mathématiques des lycées et collèges. *Petit x* n°80, 25-46. Grenoble
- Chevallard, Y. (1991). *La transposition didactique, du savoir savant au savoir enseigné*. Grenoble, France : La Pensée Sauvage.
- Chollet-Remvikos, P. & Levasseur, J. (2004). *Avant et après les vacances, évolution des acquis des élèves. Evaluation en fin de CE1 et début de CE2. Evaluation en fin de CM2 et en début de sixième*. Dossier de la DEP, N°158.
- Clot, Y. (dir) (1999). *Avec Vygotski*. La Dispute.
- Crahay, M. (2006). Dangers, incertitudes et incomplétude de la logique de la compétence en éducation. *Revue française de pédagogie*, 154, 97-110.
- Darling-Hammond, L. & Rothman, R. (2011). *Teacher and leader effectiveness in high-performing educational systems*. Washington, DC: Alliance for Excellent Education and Stanford, CA : Stanford Center for Opportunity Policy in Education.
- De Landsheere, G. (1976). *Evaluation continue et examens – Précis de docimologie*. Bruxelles : Labor. Paris : Nathan.
- DeBlois, L. (2008). Un autre joueur dans la classe de mathématique : le contrat didactique. Dans J. Myre-Bisaillon & N. Rousseau (Éd.). *L'élève en grande difficulté : Contextes d'interventions favorables*, 193-211. Québec : Presses de l'Université du Québec.
- Delozanne, E. & Chenevotot, F. (coord.) (2005). *Modélisation et mise en œuvre d'environnements informatiques pour la régulation de l'apprentissage, le cas de l'algèbre avec le projet LINGOT*. Rapport de fin de projet.
- Dickes, P., Tournois, J., Flieller, A. & Kop, J.-L. (1994). *La psychométrie. Théories et méthodes de la mesure en psychologie*, Paris : P.U.F.
- Douady, R. (1984). *De la didactique des Mathématiques à l'heure actuelle*. Cahier blanc n°6, IREM Paris Diderot.
- Douady, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet, *Recherches en didactique des mathématiques*, 7 (2), 5-31. Grenoble : La pensée sauvage.
- Douady, R. (1992). Des apports de la didactique des mathématiques à l'enseignement. *Repères IREM*, 6, 132-158. Topiques Editions.
- Douady, R. (1993). L'ingénierie didactique, un moyen pour l'enseignant pour organiser les rapports entre l'enseignement et l'apprentissage. *Cahier de DIDIREM*, 19, IREM de Paris VII.
- Douady, R. (1994). Ingénierie didactique et évolution du rapport au savoir : une chronique en calcul mental, un projet en algèbre à l'articulation collège-seconde. *Repères IREM*, 15, 37-61. Topiques Éditions
- Douady, R. & Perrin-Glorian, M.-J. (1986). *Liaison école-collège : les nombres décimaux*. Brochure de l'IREM de Paris 7.
- Durkheim, E. (1938). *L'évolution pédagogique en France* (Cours pour les candidats à l'Agrégation dispensé en 1904-1905). Paris : P. U. F.

- Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée, *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 5, 37-65. ULP, IREM, Strasbourg.
- Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine*. Berne : Peter Lang
- Fayol, M. (1990). *L'enfant et le nombre*. Neuchâtel : Delachaux et Niestlé.
- Felouzis, G. (1996). Evaluation et efficacité pédagogique des enseignants du secondaire : le cas des mathématiques. *Revue française de sociologie*, 1, 77-105.
- Fischer, J.-P. (1987). L'automatisation des calculs élémentaires à l'école. *Revue Française de Pédagogie*, 80.
- Fortier, M. (1988). La fraction "décimale" avant la fraction "ordinaire" pourquoi pas? *Instantanés Mathématiques*, 25, 1, 5-9.
- Fosnot, C. & Dolk, M. (2001). *Young mathematicians at work : Constructing number sense, addition and subtraction*. Portsmouth, NH : Heinemann.
- Fougère, D. (2010). Les méthodes économétriques d'évaluation", *Revue Française des Affaires Sociales*, 1-2, 105-128.
- Foxman, D. (2001). The frequency of selection and relative effectiveness of different mental calculation methods: some evidence from the 1987 APU surveys. In C. Morgan and K. Jones (eds.), *Research in Mathematics Education Volume 3*.
- Gersten, R. & Chard, D. (1999). Number sense: Rethinking arithmetic instruction for students with mathematical disabilities. *The Journal of Special Education*, 33, 19–28.
- Gravemeijer, K. (2003). Facts and algorithms as products of students' own mathematical activity. In Kilpatrick, J., Martin, W. G., & Schifter, D. (Eds.). *A research companion to Principles and Standards for school mathematics*, 114–122. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Greeno, J. G. (1991). Number sense as situated knowing in a conceptual domain. *Journal for Research in Mathematics Education*, 22, 170-218.
- Grisvard, C. & Léonard, F. (1981). Sur deux règles implicites utilisées dans la comparaison des nombres décimaux positifs. *Bulletin de l'A.P.M.E.P*, 327, 47-60.
- Grisvard, C. & Léonard, F. (1983). Résurgences de règles implicites dans la comparaison des nombres décimaux positifs. *Bulletin de l'A.P.M.E.P*, 340, 450-459.
- Grugeon, B. (1995). *Etude des rapports personnels et institutionnels à l'algèbre élémentaire dans la transition entre deux cycles d'enseignement : B.E.P. et Première G*. Thèse de doctorat de l'Université Paris 7.
- Gurgand, M. & Valdenaire, M. (2012). Le Fonds d'expérimentation pour la jeunesse et les politiques éducatives : premier retour d'expérience. *Education et formations*, 81, 27-37.
- Guskey, T. R. & Yoon, K. S. (2009) What Works in Professional Development? *Phi Delta Kappan*, 90, 7, 495-500. k0903gus.pdf
- Hawley, W. & Valli, L. (1999). 'The essentials of effective professional development: A new consensus' in Darling-Hammond, Linda and Sykes, Gary, Editors (1999) *Teaching as the Learning Profession. Handbook of Policy and Practice*. Jossey-Bass Publishers, San Francisco.

- Heirdsfield, A. (1999). Mental addition and subtraction strategies: Two case studies. *Mathematics Education Research Group of Australasia*.
- Heirdsfield, A. & Cooper, T. (2004). Inaccurate Mental addition and subtraction: Causes and Compensation. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 26, 3, 43-65.
- Heirdsfield, A. M., Cooper, T. J., Mulligan J. & Irons, C. J. (1999). Children's mental multiplication and division strategies. *International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 20.
- Heirdsfield, A. & Lamb, J. (2005). Mental Computation: The Benefits of Informed Teacher Instruction. In Clarkson, Philip and Downtown, Ann and Gronn, Donna and Horne, Marj and McDonough, Andrea and Pierce, Robyn and Roche, Ann (Eds). *Proceedings MERGA 28 - 2005 Building connections: Theory, research and practice*, 2, 419-426, Melbourne.
- Hellmig, L. (2010). Effective “blended” professional development for teachers of mathematics : design and evaluation of the “UPOLA” program. *Proceedings of CERME 6. Lyon, France*. <http://ife.ens-lyon.fr/publications/edition-electronique/cerme6/wg10-01-hellmig.pdf>
- Hersant, M. (2001). *Interactions didactiques et pratiques d'enseignement, le cas de la proportionnalité au collège*. Thèse de doctorat de l'Université Paris 7.
- Hersant, M. (2005). La proportionnalité dans l'enseignement obligatoire en France, d'hier à aujourd'hui. *Repères-IREM* ; 59, 5-41. Topiques Editions
- Houdement, C. & Kuzniak, A. (1996). Autour des stratégies utilisées pour former les maîtres du premier degré en mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques*, 16, 3, 289-322.
- Howden, H. (1989). Teaching number sense. *Arithmetic Teacher*, 36, 6, 6-11.
- IGEN (2006). *L'enseignement des mathématiques au cycle 3 de l'école primaire*. <http://media.education.gouv.fr/file/46/0/3460.pdf>
- Jost, R. (2004). Le calcul numérique en question. *Les revues pédagogiques de la Mission laïque française. Activités mathématiques et scientifiques*, 54, 17-28.
- Julo, J., (1982). Acquisition de la proportionnalité et résolution de problèmes, Thèse de 3^e cycle de l'Université de Rennes.
- Julo, J. (1995). *Représentations des problèmes et réussite en mathématiques*. Rennes : Presses Universitaires de Rennes.
- Kahane J.-P. (Ed) (2002). *L'enseignement des sciences mathématiques : Commission de réflexion sur l'enseignement des mathématiques*, Paris, Odile Jacob
- Kamii, C. & Dominick, A. (1997). To teach or not to teach algorithms. *Journal of Mathematical Behaviour*, 16, 1, 51-61.
- Kaminski, E. (1997). Teacher education students' number sense: initial explorations. *Mathematics Education Research Journal*, 9, 2, 225-235.
- Klieme, E. et al. (2004). *Le développement de standards nationaux de formation : une expertise*. Bundesministerium für Bildung und Forschung / Ministère fédéral de l'Education et de la Recherche (BMBF). Traduction française prise en charge par la Conférence suisse des directeurs cantonaux de l'instruction publique (CDIP), Berne.

- Koellner, K., Jacobs, J. & Borko, H. (2011) Mathematics professional development: critical features for developing leadership skills and building teachers' capacity. *Mathematics Teacher Education and Development*, 131, 1, 115-136.
<http://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ960952.pdf>
- Kuzniak, A. (1994). Étude des stratégies de formation en mathématiques utilisées par les formateurs de maîtres du premier degré. Thèse de l'Université Paris 7.
- Lacage, M. (2007). Le calcul mental, outil de motivation en ZEP ou le calcul mental, volcan éteint ? *Bulletin de l'APMEP*, 472, 710-732.
- Laveault, D. & Grégoire, J. (2002). *Introduction aux théories des tests en psychologie et en sciences de l'éducation*. Bruxelles : De Boeck.
- Levain, J.-P. (1992). La résolution de problèmes multiplicatifs à la fin du cycle primaire. *Educational Studies in Mathematics*, 23, 139-161.
- Levain, J.-P. & Vergnaud, G. (1995). Proportionnalité simple, proportionnalité multiple (cycle III). *Grand N*, 56, 55-66.
- Levasseur, J. (1996). L'évaluation nationale des acquis des élèves. *Revue internationale d'éducation de Sèvres*, 11, 101-114.
- Ma L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics: Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States*. Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.
- Masselot, P. (2000) *De la formation initiale en didactique des mathématiques (en centre IUFM) aux pratiques quotidiennes en mathématiques, en classe, des professeurs d'école (une étude de cas)*. Thèse de doctorat de l'Université de Paris VII.
- Masselot, P. & Robert, A. (2007). Le rôle des organisateurs dans nos analyses didactiques de professeurs enseignant les mathématiques. *Recherche et formation*, 56, 15-32.
- MacLellan, E. (2001). Mental calculation: its place in the development of numeracy. *Westminster Studies in Education*, 24, 2, 145-154.
- McIntosh, A. (2002). Common errors in mental computation of students in grade 3 – 10. In B. Barton, K. C. Irwin, M. Pfannkuch & M. O. J. Thomas (Eds.), *Mathematics education in the South Pacific* (Proceedings of the 25th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia Incorporated, 2, 457 - 464). Sydney : MERGA.
- McIntosh, A., Reys, B., Reys, R., Bana, J. & Farrell, B. (1997). *Number sense in school mathematics: Student performance in four countries*. Perth: MASTEC, Edith Cowan University.
- Morin, E. (1982). *Science avec conscience*. Fayard.
- Neyret, R. (1981). Numération dans N à l'école élémentaire. Réflexions à partir des nouveaux programmes. *Grand N*, 24, 21-45. IREM de Grenoble.
- Northcote, M. & McIntosh, A. (1999). What Mathematics Do Adults Really Do in Everyday Life? *Australian Primary Mathematics Classroom*, 4, 1, 19-21.
- Norton, S. (2012). The use of alternative algorithms in whole number computation. *International Journal of Mathematics Teaching and Learning*, 2-16

- Nunes, T., Schliemann, A. D. & Carraher, D. W (1993). *Street mathematics and school mathematics*. Cambridge : Cambridge University Press
- Peltier-Barbier, M.-L. (Ed.), Butlen, D., Masselot, P., Ngono, B., Pézard, M., Robert, A., Vergnès, D., (2004). *Dur pour les élèves, Dur pour les enseignants, Dur d'enseigner en ZEP*. Grenoble : La pensée sauvage.
- Perrin-Glorian, M.-J. (1986). Représentations des fractions et des nombres décimaux chez des élèves de CM2 et de collège. *Petit x*, 10, 5-29. Grenoble.
- Perrin-Glorian M.-J. (1994). Contraintes de fonctionnement des enseignants au collège : ce que nous apprend l'étude de « classes faibles », *Petit x*, 35, 5-40. Grenoble.
- Pluvillage, F. (2000). Mathématiques et maîtrise de la langue, *Repères IREM*, 39, 115-126. Topiques Editions.
- Pluvillage, F. & Rauscher, J.-C. (1991). Les élèves et leur enseignement en mathématiques en sixième. *Education et formations*, 27, 83-95.
- Rauscher, J.-C. (2002). Le rôle de l'écrit dans les travaux numériques au collège, *Repères IREM*, 48, 85-108. Topiques Editions
- Reys, B. (1991). Number sense: Building on student's intuitive knowledge. In C. J. Irons (Ed.), *Challenging children to think when they compute: Developing number sense, mental computation and computational estimation*, Proceedings of the 1st annual conference on Mathematics Teaching and Learning presented by The Centre for Mathematics and Science Education, Queensland University of Technology, Brisbane.
- Reys, B. (1994). Promoting number sense in the middle grades. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 1, 3, 114-120.
- Reys, R., Lindquist, M., Lambdin, D. & Smith, N. (2009). *Helping children learn mathematics*. Kendalville: John Wiley & Sons.
- Reys, R., Reys, B., McIntosh, A., Emanuelsson, G., Johnsson, B. & Yang, D. C. (1999). Assessing number sense of students in Australia, Sweden, Taiwan, and the United States. *School Science and Mathematics*, 99(2), 61-70.
- Rezat, S. (2011). Mental calculation strategies for addition and subtraction on the set of rational numbers www.cerme7.univ.rzeszow.pl/WG/2/CERME7_WG2_Rezat.pdf
- Richard, J.-F. (1982) Mémoire et résolution de problèmes. *Revue Française de Pédagogie*, 60, 9-17.
- Robert, A. (1988). *Une introduction à la didactique des Mathématiques*. Cahier blanc n°50, IREM Paris-Diderot.
- Robert, A. (1999). Recherches didactiques sur la formation professionnelle des enseignants de mathématiques du second degré et leurs pratiques en classe. *Didaskalia*, 15, 123-157.
- Robert, A. (2001). Les recherches sur les pratiques des enseignants et les contraintes de l'exercice du métier d'enseignant. *Recherches en didactique des mathématiques*, 21, 1-2, 57-80.
- Robert, A. (2005). De recherches sur les pratiques aux formations d'enseignants de mathématiques du second degré: un point de vue didactique, *Annales de didactique et de sciences cognitives de Strasbourg*, 10, 209-250.

- Robert, A. (2007). Stabilité des pratiques des enseignants de mathématiques (second degré) : une hypothèse, des inférences en formation. *Recherches en didactique des mathématiques*, 27, 3, 271- 311.
- Robert, A. & Hache, C. (2013). Pourquoi, comment comprendre ce qui se joue en classe de mathématiques ? Dans Cahiers du laboratoire de didactique André Revuz. *Activités des élèves et pratiques des enseignants en classe de mathématiques*, 5, 3-24. Paris : Université Paris Diderot.
- Robert, A., Lattuati, M. & Penninckx, J. (1999). *L'enseignement des mathématiques au lycée, un point de vue didactique*. Ellipses.
- Robert, A., Lattuati, M., Penninckx, J. & al. (2012). *Une caméra au fond de la classe de mathématiques. (Se) former au métier d'enseignant du secondaire à partir d'analyses de vidéos*. Besançon : Presses universitaires de Franche –Comté.
- Robert, A., Roditi, E. & Grugeon, B. (2007). Diversité des offres de formation et travail du formateur d'enseignants de mathématiques du secondaire. *Petit x*, 74, 60-90.
- Robert, A. & Robinet, J. (1992). Représentations des enseignants et des élèves. *Repères*, 7, 93-99. Topiques Editions
- Robert, A. & Rogalski, J. (2002). Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques : une double approche. *Revue canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et des technologies*, 2, 4, 505-528.
- Robert, A. & Rogalski, J. (2005). A Cross-Analysis of the Mathematics Teacher's Activity. An Example in a French 10th-Grade Class. *Educational Studies in Mathematics*, 59, 1-3, 269-298.
- Robert, A. & Vandebrouck (2014). Proximités-en-acte mises en jeu en classe par les enseignants du secondaire et ZPD des élèves : analyses de séances sur des tâches complexes. *Recherches en didactique des mathématiques* (à paraître).
- Robert, A. & Vivier, L. (2013). Analyser des vidéos sur les pratiques des enseignants du second degré en mathématiques : des utilisations contrastées en recherche en didactique et en formation de formateurs – quelle transposition ? *Education & Didactique*, 7, 2, 115-144.
- Roche, A. & Clarke, D. M. (2006). When successful comparison of decimals doesn't tell the full story. In Novotná, J., Moraová, H., Krátká, M. & Stehlíková, N. (Eds.). *Proceedings 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 4, 425-432. Prague : PME.
- Rochex, J.-Y. & Crinon, J. (dir.) (2011). *La construction des inégalités scolaires. Au cœur des pratiques et des dispositifs d'enseignement*. Rennes : Presses universitaires de Rennes.
- Roditi, E. (2000). Ordre de grandeur et multiplication des nombres décimaux, *Bulletin de l'APMEP*, 431, 719-727.
- Roditi, E. (2001). *L'enseignement de la multiplication des décimaux en sixième. Étude de pratiques ordinaires*. Thèse de doctorat. Université Paris Diderot.
- Roditi E. (2005). *Les pratiques enseignantes en mathématiques. Entre contraintes et liberté pédagogique*. Paris : L'Harmattan.
- Roditi, E. (2007). La comparaison des nombres décimaux, conception et expérimentation d'une aide aux élèves en difficulté. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 12, 55-81.

- Roditi, E. (2008). La comparaison des nombres décimaux, comprendre les difficultés et aider à les surmonter. *Bulletin de l'APMEP*, 477, 479-483.
- Rogalski, J. (2003). Y a-t-il un pilote dans la classe ? Une analyse de l'activité de l'enseignant comme gestion d'un environnement dynamique ouvert. *Recherches en didactique des mathématiques*, 23(3), 343-388.
- Rogalski, J. (2013). Théorie de l'activité et cadres développementaux pour l'analyse liée des pratiques et des enseignants et des apprentissages des élèves. Dans Cahiers du laboratoire de didactique André Revuz. *Activités des élèves et pratiques des enseignants en classe de mathématiques*, 5, 3-24. Paris : Université Paris Diderot.
- Rosenhouse, J. (2008)
<http://scienceblogs.com/evolutionblog/2008/02/01/are-fractions-obsolete/>
- Rubenstein, R. (2001). Mental mathematics beyond the middle school. *Mathematics Teacher*, 94, 6, 442.
- Schneider-Gilot, M. (2006). Quand le courant pédagogique « des compétences » empêche une structuration des enseignements autour de l'étude et de la classification des questions parentes. *Revue française de pédagogie*, 154, 85-96.
- Sensevy, G., Maurice, J-J., Clanet, J. & Murillo, A. (2008). La différenciation didactique passive : un essai de définition et d'illustration. *Les Dossiers des Sciences de l'Education*, 20, 105-122.
- Sowder, J. (1988). Mental computation and number comparisons: Their roles in the development of number sense and computational estimation. In J. Hiebert & M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Sowder, J. (1989). Introduction. In J. Sowder & B. Schappelle (Eds.), *Establishing foundations for research on number sense and related topics: Report of a conference*, 1-5. San Diego, CA: San Diego State University.
- Sowder, J. (1990). Mental computation and number sense. *Arithmetic Teacher*, 37, 7, 18-20.
- Sowder, J. (1991). Teaching computation in ways that promote number sense. In C. J. Irons (Ed.), *Challenging children to think when they compute: Developing number sense, mental computation and computational estimation, Proceedings of the 1st annual conference on Mathematics Teaching and Learning*. Queensland University of Technology, Brisbane.
- Sowder, J. T. (1992). Estimation and related topics. In D. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, 371-389. New York: Macmillan.
- Stacey, K. (2005). Travelling the road to expertise: A longitudinal study of learning. In H. L. Chick & J. L. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 1, 19-36. Melbourne: PME.
- Stacey, K., Varughese, N. & Marston, K. (2009). *Mental computation and estimation*. <https://www.eduweb.vic.gov.au/.../public/.../readmentalcompest.pdf>
- Steinle, V. (2004). *Changes with age in students' misconceptions of decimal numbers*. Thèse. Université de Melbourne.
- Suggate, J., Davis, A., & Goulding, M. (2010). *Mathematical knowledge for primary teachers*. New York : Routledge.

- Tempier, F. (2013). *La numération décimale de position à l'école primaire. Une ingénierie didactique pour le développement d'une ressource*. Thèse de doctorat. Université Paris Diderot.
- Thompson, I. (1999). Mental calculation strategies for addition and subtraction - Part 1, *Mathematics in School*, 28, 5, 22-25.
- Thompson, I. (2000). Mental calculation strategies for addition and subtraction - Part 2, *Mathematics in School*, 29, 1, 24-26.
- Thompson, I. (2000). Is the National Numeracy Strategy evidence-based? *Mathematics Teaching*, 171, 23-27.
- Thompson, I. (2008). Mental Calculation. *Mathematics Teaching*, 213, 40-42.
- Threlfall, J. (1998). Are mental calculation strategies really strategies? Bills, L. (Ed.) *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics*, 18, 3.71-76.
- Threlfall, J. (2002). Flexible mental calculation. *Educational Studies in Mathematics*, 50, 29-47.
- Threlfall, J. (2009). Strategies and flexibility in mental calculation. *ZDM*, 41, 5, 541-555.
- Timperley, H., Wilson, A., Barrar, H. & Fung, I. (2008). *Teacher Professional Learning and Development: Best Evidence Synthesis Iteration [BES]*. Wellington, Nouvelle Zélande : Ministère de l'éducation. www.educationcounts.govt.nz/goto/BES
- Turkel, S. & Newman, C. (1988). What's your number? Developing number sense. *Arithmetic Teacher*, 36(6), 53-55.
- UNESCO (2011). *Les défis de l'enseignement des mathématiques dans l'éducation de base*. Paris.
- Van de Heuvel-Panhuizen, M. (2001). Realistic mathematics education in the Netherlands. In J. Anghileri (Ed.). *Principles and practices in arithmetic teaching: Innovative approaches for the primary classroom*, 49-64. Buckingham: Open University Press.
- Van de Walle, J., Karp, K. & Bay-Williams, M. (2007). *Elementary and Middle School Mathematics: Teaching Developmentally* (6th ed.). New York: Pearson Education, Inc.
- Van de Walle, J., Karp, K. & Bay-Williams, J. (2010). *Elementary and middle school mathematics: Teaching developmentally*. Boston: Allyn & Bacon.
- Van Zanten, A. (2001). *L'école de la périphérie – Scolarité et ségrégation en banlieue*. Paris : P. U. F.
- Vandebrouck, F. (coord.) (2008). *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants*. Toulouse : Octares.
- Vergnaud, G. (1981) *L'enfant, la mathématique et la réalité*. Berne : Peter Lang.
- Vergnaud, G. (1986). Psychologie du développement cognitif et didactique des mathématiques. *Grand N*, 38, 21-40. IREM de Grenoble.
- Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10, 23, 133-170. Grenoble : La Pensée Sauvage.
- Vergnaud G. (2000). *Lev Vygotski pédagogue et penseur de notre temps*. Paris : Hachette Education.

Vergnès, D. (2000). *Analyse des effets d'un stage de formation continue en géométrie sur les pratiques d'enseignants de l'école primaire*. Thèse de doctorat. Université de Paris VII.

Verschaffel, L. & De Corte, E. (1996). Number and arithmetic. In A. J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, & C. Laborde (Eds.), *International handbook of mathematics education*, 99–137. Dordrecht, Pays-Bas : Kluwer.

Villegas-Reimers, E. (2003). *Teacher professional development: an international review of the literature*. Paris : UNESCO International Institute for Educational Planning.

Vygostky, L. (2002). *Pensée et langage*, La Dispute.

Watson, J. M. & Callingham, R. A. (2001). Preparing teachers for a middle school mathematics classroom: Creating connections. *Paper presented at the second annual conference of the Middle Years of School Association, Inc*. Brisbane.

Wenger, E. (1998). *Communities of Practice : Learning, Meaning and Identity*. New York : Cambridge University Press.

Whitehouse, C., (2011) *Effective continuing professional development for teachers*. AQA Centre for Education Research and Policy. Manchester, Royaume-Uni.

https://cerp.aqa.org.uk/sites/default/files/pdf_upload/CERP-RP-CW-19052011.pdf

Yackel, E. (2001). Perspectives on arithmetic from classroom-based research in the United States of America. In J. Anghileri (Ed.). *Principles and practices in arithmetic teaching: Innovative approaches for the primary classroom*, 15-32. Buckingham: Open University Press.

Yoon, K. S., Duncan, T., Lee, S. W-Y., Scarloss, B., & Shapley, K. (2007). *Reviewing the Evidence on How Teacher Professional Development Affects Student Achievement*. Issues & Answers Report, REL 2007, 33. Washington, DC : Etats Unis.

Textes officiels

Pour l'école élémentaire

Horaires, objectifs et programmes. Cycle moyen, arrêté du 18 juillet 1980.

Horaires, programmes et instructions pour l'école élémentaire, arrêté du 15 mai 1985.

Horaires de l'école élémentaire, arrêté du 1^{er} août 1990.

Les cycles à l'école primaire, CNDP-Hachette écoles, 1991.

Programme de l'école primaire, arrêté du 22 février 1995.

Horaires et programmes d'enseignement de l'école primaire, arrêté du 25 janvier 2002.

Programmes d'enseignement de l'école primaire, arrêté du 4 avril 2007.

Programmes d'enseignement de l'école primaire, arrêté du 9 juin 2008.

Pour le collège

Programme de l'enseignement des mathématiques en classe de sixième du collège, arrêté du 6 juillet 2004.

Programme de l'enseignement des mathématiques, des sciences de la vie et de la Terre, de physique-chimie du collège, arrêté du 6 avril 2007.

Programmes du collège. Programme d'enseignement de mathématiques, arrêté du 9 juin 2008.

Autres documents

M.E.N. (2002). *Mathématiques, cycle des approfondissements (cycle 3)*. CNDP.

M.E.N. (2005). *Documents d'accompagnement des programmes, Mathématiques, école primaire*. CNDP.

M.E.N. *Ressources pour faire la classe au collège et au lycée*.

<http://eduscol.education.fr/cid45766/mathematiques-pour-le-college-et-le-lycee.html>

M.E.N. (2010). *Le nombre au cycle 2*. CNDP.

M.E.N. (2012). *Le nombre au cycle 3*. CNDP.

Dossiers de la DEPP

Evaluation CE2 - 6ème, Résultats nationaux, septembre 1989, Éducation & Formations, Hors série, 1990, D.E. P., Ministère de l'Éducation nationale, Paris

Evaluation CE2 - 6ème, Résultats nationaux, septembre 1990, Éducation & Formations, Hors série, 1991, D.E. P., Ministère de l'Éducation nationale, Paris

Evaluation CE2 - 6ème, Résultats nationaux, septembre 1991, Éducation & Formations, Hors série, 1992, D.E. P., Ministère de l'Éducation nationale, Paris

Evaluation CE2 - 6ème, Résultats nationaux, septembre 1992, Éducation & Formations, n°21, 1992, D.E. P., Ministère de l'Éducation nationale, Paris

Evaluation CE2 - 6ème, Résultats nationaux, septembre 1993, Éducation & Formations, n°33, 1993, D.E. P., Ministère de l'Éducation nationale, Paris

Evaluation CE2 - 6ème, Résultats nationaux, septembre 1994, Éducation & Formations, n°50, 1995, D.E. P., Ministère de l'Éducation nationale, Paris

Evaluation CE2 - 6ème, Résultats nationaux, septembre 1995, Éducation & Formations, n°65, 1996, D.E. P., Ministère de l'Éducation nationale, Paris

Evaluation CE2 - 6ème, Résultats nationaux, septembre 1996, Éducation & Formations, n°79, 1997, D.E. P., Ministère de l'Éducation nationale, Paris

Evaluation CE2 - 6ème, Résultats nationaux, septembre 1997, Éducation & Formations, n°100, 1998, D.P.D., Ministère de l'Éducation nationale, Paris

Evaluation CE2 - 6ème, Résultats nationaux, septembre 1998, Éducation & Formations, n°111, 1999, D.P.D., Ministère de l'Éducation nationale, Paris

A partir de 1999, les publications des résultats des évaluations CE2 – sixième sont disponibles en ligne : <http://cisad.pleiade.education.fr/eval/>

Annexe A. Tableaux du Chapitre 1

<i>Tableau A-1</i>	477
<i>Tableau A-2</i>	478
<i>Tableau A-3 : Mobiliser les résultats mémorisés des tables d'addition et de multiplication</i>	479
<i>Tableau A-4 : Calculer mentalement des sommes (de nombres entiers)</i>	480
<i>Tableau A-5: Calculer mentalement des sommes (de nombres décimaux)</i>	481
<i>Tableau A-6 : Calculer mentalement des différences de nombres entiers ou décimaux..</i>	482
<i>Tableau A-7 : Calculer mentalement des produits de nombres entiers ou décimaux.....</i>	483
<i>Tableau A-8 : Calculer mentalement des quotients de nombres entiers ou décimaux.....</i>	484
<i>Tableau A-9 : Multiplier mentalement un nombre entier ou décimal par 10.....</i>	485
<i>Tableau A-10 : Multiplier mentalement un nombre entier ou décimal par 10, 100, 1000</i> <i>(suite)</i>	486
<i>Tableau A-11 : Diviser mentalement un nombre entier ou décimal par 10, 100, 1000...</i>	487
<i>Tableau A-12 : Diviser mentalement un nombre entier ou décimal par 10, 100, 1000</i> <i>(suite)</i>	488
<i>Tableau A-13 : Estimer mentalement un ordre de grandeur d'un résultat</i>	489
<i>Tableau A-14 : Estimer mentalement un ordre de grandeur d'un résultat (suite).....</i>	490
<i>Tableau A-15 : Additionner des nombres entiers</i>	491

<i>Tableau A-16 : Effectuer une addition « à trous » de deux nombres entiers.....</i>	<i>492</i>
<i>Tableau A-17 : Additionner des nombres décimaux.....</i>	<i>493</i>
<i>Tableau A-18 : Soustraire un nombre entier à un nombre entier.....</i>	<i>494</i>
<i>Tableau A-19 : Effectuer une soustraction « à trous » avec deux nombres entiers.....</i>	<i>495</i>
<i>Tableau A-20 : Soustraire un nombre décimal à un nombre décimal.....</i>	<i>496</i>
<i>Tableau A-21 : Multiplier deux nombres entiers.....</i>	<i>497</i>
<i>Tableau A-22 : Effectuer une multiplication « à trous » de deux nombres entiers.....</i>	<i>498</i>
<i>Tableau A-23 : Multiplier deux nombres décimaux.....</i>	<i>498</i>
<i>Tableau A-24 : Effectuer une division euclidienne de deux nombres entiers.....</i>	<i>499</i>
<i>Tableau A-25 : Effectuer une division décimale de deux entiers.....</i>	<i>500</i>
<i>Tableau A-26 : Diviser un nombre décimal par un nombre entier.....</i>	<i>500</i>
<i>Tableau A-27 : Résoudre des problèmes additifs.....</i>	<i>501</i>
<i>Tableau A-28 : Résoudre des problèmes multiplicatifs.....</i>	<i>502</i>
<i>Tableau A-29 : Résoudre des problèmes relevant de la proportionnalité.....</i>	<i>503</i>
<i>Tableau A-30 : Résolution de problèmes relevant de la proportionnalité (suite).....</i>	<i>504</i>
<i>Tableau A-31 : Savoir écrire et nommer les nombres entiers jusqu'au milliard.....</i>	<i>505</i>
<i>Tableau A-32 : Savoir écrire et nommer les nombres entiers jusqu'au milliard.....</i>	<i>506</i>
<i>Tableau A-33 : Connaître et utiliser des relations entre les nombres.....</i>	<i>506</i>
<i>Tableau A-34 : Donner la valeur de chacun des chiffres de la partie décimale en fonction de sa position (jusqu'au 1/10 000).....</i>	<i>507</i>
<i>Tableau A-35 : Comparer, ranger des nombres entiers ou décimaux.....</i>	<i>508</i>
<i>Tableau A-36 : Comparer, ranger des nombres entiers ou décimaux.....</i>	<i>509</i>
<i>Tableau A-37 : Encadrer un nombre décimal par deux entiers consécutifs.....</i>	<i>509</i>
<i>Tableau A-38 : Passer d'une écriture fractionnaire d'un nombre décimal à son écriture décimale et réciproquement.....</i>	<i>510</i>
<i>Tableau A-39 : Repérer, placer des nombres décimaux sur une droite graduée.....</i>	<i>511</i>

Tableau A-1

Types de tâches	Evaluations nationales* à l'entrée en 6e	Evaluations nationales en fin de CM2	Evaluation à 20 ans	Panel 2007
Calculer mentalement	X	X	X	X
Mobiliser les résultats mémorisés des tables d'addition et de multiplication	X	X	X	X
Calculer mentalement des sommes, des différences, des produits de nombres entiers ou décimaux	X	X		X
Multiplier mentalement un nombre entier ou décimal par 10, 100, 1 000	X	X	X	
Diviser un nombre entier ou décimal par 10, 100, 1 000	X	X	X	
Estimer mentalement un ordre de grandeur d'un résultat	X	X	X	
Effectuer un calcul posé				
Additionner, soustraire, multiplier des nombres entiers ou décimaux**	X	X	X	
Effectuer une division euclidienne de deux entiers	X	X	X	
Effectuer une division décimale de deux entiers	X	X	X	
Diviser un nombre décimal par un nombre entier.				
Problèmes	X	X	X	
Résoudre des problèmes relevant des quatre opérations.				

* : y compris les évaluations « Avant et après les vacances »

** : sans doute par homogénéité de formulation, le programme 2008 limite à deux nombres l'addition de nombres entiers ou décimaux.

Tableau A-2

Types de tâches	Evaluations nationales à l'entrée en 6e	Evaluations nationales en fin de CM2
<p>Les nombres entiers Savoir écrire et nommer les nombres entiers jusqu'au milliard.</p> <p>Comparer, ranger, encadrer ces nombres.</p> <p>Utiliser des expressions telles que : double, moitié ou demi, triple, quart d'un nombre entier.</p> <p>Connaître et utiliser certaines relations entre 5, 10, 15, 20, 25, 50, 100 et 15, 30 et 60.</p>	<p>X</p> <p>X</p> <p>X</p> <p>X</p>	<p>X</p> <p>X</p> <p>X</p> <p>X</p>
<p>Fractions Nommer les fractions simples et décimales en utilisant le vocabulaire : demi, tiers, quart, dixième, centième.</p> <p>Utiliser ces fractions dans des cas simples de partage ou de codage de mesures de grandeurs.</p> <p>Encadrer une fraction simple par deux entiers consécutifs.</p> <p>Écrire une fraction sous forme de somme d'un entier et d'une fraction inférieure à 1.</p> <p>Ajouter deux fractions décimales ou deux fractions simples de même dénominateur.</p>	<p>X</p> <p>X</p>	<p>X</p> <p>X</p>
<p>Nombres décimaux Donner la valeur de chacun des chiffres de la partie décimale d'un nombre décimal en fonction de sa position (jusqu'au 1/10 000).</p> <p>Repérer, placer sur une droite graduée un nombre décimal</p> <p>Comparer, ranger des nombres décimaux</p> <p>Encadrer un nombre décimal par deux nombres entiers consécutifs,</p> <p>Passer d'une écriture fractionnaire d'un nombre décimal à son écriture décimale et réciproquement.</p> <p>Produire des décompositions liées à une écriture décimale, en utilisant 10 ; 100 ; 1 000... et 0,1 ; 0,01 ; 0,001...</p> <p>Donner une valeur approchée à l'unité près, au dixième ou au centième près.</p>	<p>X</p> <p>X</p> <p>X</p> <p>X</p> <p>X</p>	<p>X</p> <p>X</p> <p>X</p> <p>X</p> <p>X</p>

Tableau A-3 : Mobiliser les résultats mémorisés des tables d'addition et de multiplication

Tâche	Passation	Evaluation	Année	Item	TR
9 + 9	Oral	EN 6 ^e	2005	1	98,5 %
			2008	1	98,9 %
8 + 7	Oral	EN 6 ^e	2005	2	95,0 %
			2008	2	95,6 %
Quel nombre faut-il ajouter à 5 pour obtenir 11 ?	Oral	EN 6 ^e	2005	3	94,7 %
			2008	3	97,0 %
Quel nombre faut-il ajouter à 2 pour obtenir 10 ?	Oral	EN 6 ^e	2005	4	95,2 %
			2008	4	96,7 %
Quel nombre faut-il ajouter à 9 pour obtenir 13 ?	Oral	EN 6 ^e	2005	5	95,7 %
			2008	5	96,4 %
6 fois 8	Oral	EN 6 ^e	2005	6	69,4 %
			2008	6	71,4 %
9 fois 9	Oral	EN 6 ^e	2005	7	87,8 %
			2008	7	90,7 %
Dans 35 combien de fois 5 ?	Oral	EN 6 ^e	2005	8	81,4 %
			2008	8	83,5 %
Dans 27 combien de fois 9 ?	Oral	EN 6 ^e	2005	9	75,0 %
			2008	9	76,9 %
Dans 56 combien de fois 8 ?	Oral	EN 6 ^e	2005	10	54,4 %
			2008	10	56,5 %
36 : 4	Oral	EN 6 ^e	2004	5	56,2 %
2 fois 9 ; 3 fois 4 ; 5 fois 5 ; 6 fois 7 ; 7 fois 5 ; 8 fois 9 ; 7 fois 9 ; 7 fois 8 ; 9 fois 9 ; 3 fois 8	Oral	EN CM2	2010	74*	76,8 %
En 18 combien de fois 6 ? En 56 combien de fois 8 ? En 36 combien de fois 4 ? En 35 combien de fois 7 ? En 49 combien de fois 7 ?	Ecrit	EN CM2	2010	75**	77,1 %

* la réussite à cet item correspond à 9 réponses justes ; on ignore les produits qui n'ont pas été restitués correctement.

** la réussite à cet item correspond à 4 réponses justes ; on ignore quelles réponses ne sont pas correctes

Tableau A-4 : Calculer mentalement des sommes (de nombres entiers)

Tâche	Passation	Evaluation	Année	Item	TR
198 + 10	Oral	EN 6 ^e	2002	1	84,1 %
			2003	1	80,8 %
123 + 2 dizaines	Oral	EN 6 ^e	2002	2	73,8 %
			2003	2	74,8 %
47 + 33	Oral	EN 6 ^e	2002	31	86,1 %
			2003	32	84,0 %
			1998	1	86,4 %
		Avant les vacances	1999	1	89,9 %
		Après les vacances	1999	1	87,3 %
33 + 27	Oral	EN 6 ^e	1998	1	86,4 %
			1999	4	83,4 %
			2000	4	83,3 %
			2001	1	87,7 %
			2004	4	85,4 %
126 + 9	Oral	EN 6 ^e	2005	61	84,5 %
			2008	61	83,6 %
7 + 13 + 24	En ligne	Panel 2007	2008	M40	89,5 %
37 + 99	Oral	EN 6 ^e	2005	64	63,6 %
			2008	64	63,9 %
11 + 18 + 9	En ligne	Panel 2007	2008	M44	86,3 %
3 600 + 1 400	Oral	EN 6 ^e	2005	65	57,8 %
			2008	65	59,6 %
Combien faut-il ajouter à 47 pour obtenir 60?	Oral	EN 6 ^e	1998	2	74,5 %
		Avant les vacances	1999	2	81,7 %
		Après les vacances	1999	2	74,4 %
		EN 6 ^e	1999	63	78,3 %
			2000	65	79,9 %
			2004	65	81,1 %
Je pense à un nombre. J'ajoute 15 et je trouve 60. Quel est ce nombre ?	Oral	EN 6 ^e	2001	24	Erreur*
Quel nombre faut-il ajouter à 25 pour obtenir 100?	Oral	EN 6 ^e	2005	24	72,2 %
			2008	24	73,9 %

* : Erreur dans le document DEPP

Tableau A-5: Calculer mentalement des sommes (de nombres décimaux)

Tâche	Passation	Evaluation	Année	Item	TR
38,45 + 10	En ligne	EN 6 ^e	1992	69	81,5 %
27,1 + 100	En ligne	EN 6 ^e	1992	73	77,7 %
2,6 + 1,4	Oral	EN 6 ^e	1998	5	63,3 %
		Avant les vacances	1999	5	74,2 %
		Après les vacances	1999	5	64,0 %
		EN 6 ^e	1999	67	67,8 %
			2000	66	Erreur*
2004	69	72,5 %			
3,5 + 1,5	Oral	Oral	2001	26	78,2 %
1,7 + 2,3	Oral	EN 6 ^e	2002	34	64,0 %
			2003	35	61,3 %
5,2 + 13 + 2,8	En ligne	Panel 2007	2008	M42	60,4 %

* : Erreur dans le document DEPP

Tableau A-6 : Calculer mentalement des différences de nombres entiers ou décimaux

Tâche	Passation	Evaluation	Année	Item	TR
31 - 3	Oral	EN 6 ^e	2005	60	88,3 %
			2008	60	89,1 %
53 - 8	Oral	EN 6 ^e	2005	66	72,9 %
			2008	66	72,9 %
405 - 10	Oral	EN 6 ^e	2002	5	80,8 %
			2003	5	78,3 %
105 - 10	Oral	EN 6 ^e	2005	62	87,8 %
			2008	62	87,8 %
65 - 30	En ligne	Panel 2007	2008	M41	83,3 %
60 - 19	Oral	EN 6 ^e	2002	33	67,1 %
			2003	34	65,0 %
57 - 19	Oral	EN 6 ^e	1998	10	46,1 %
		Avant les vacances	1999	10	59,0 %
		Après les vacances	1999	10	46,8 %
		EN 6 ^e	1999	3	53,1 %
57 - 9	Oral	EN 6 ^e	2000	3	77,2 %
			2001	5	74,8 %
			2004	3	79,1 %
38,45 - 10	En ligne	EN 6 ^e	1992	70	80,2 %
222,2 - 100	En ligne	EN 6 ^e	1980	61	72,6 %
			1993	61	72,1 %
8,73 - 5	En ligne	EN 6 ^e	1994	39	66,5 %
2,8 - 1,3	Oral	EN 6 ^e	1998	7	73,9 %
		Avant les vacances	1999	7	84,8 %
		Après les vacances	1999	7	74,5 %
		EN 6 ^e	1999	7	73,9 %
38 - 1,5	En ligne	Panel 2007	2008	M43	52,0 %

Tableau A-7 : Calculer mentalement des produits de nombres entiers ou décimaux

Tâche	Passation	Evaluation	Année	Item	TR
$36 \times 5^*$	En ligne	EN 6 ^e	1989	49	93,9 %
$300 \times 70^*$	En ligne	EN 6 ^e	1989	50	85,2 %
$480 \times 50^*$	En ligne	EN 6 ^e	1990	64	67,9 %
$420 \times 30^*$	En ligne	EN 6 ^e	1992	68	75,3 %
27×20	En ligne	Panel 2007	2008	M45	60,1 %
15 multiplié par 4	Oral	EN 6 ^e	1998	3	77,0 %
		Avant les vacances	1999	3	85,7 %
		Après les vacances	1999	3	77,7 %
		EN 6 ^e	1999	1	82,0 %
			2000	1	79,9 %
			2001	2	77,2 %
			2004	1	79,9 %
4 fois 25	Oral	EN 6 ^e	2005	25	70,7 %
			2008	25	72,9 %
43 multiplié par 20	Oral	EN 6 ^e	1998	8	55,6 %
		Avant les vacances	1999	8	67,5 %
		Après les vacances	1999	8	57,2 %
		EN 6 ^e	1999	64	64,0 %
			2000	66	62,9 %
			2004	66	73,1 %
20 fois 18	Oral	EN 6 ^e	2005	67	35,5 %
			2008	67	39,2 %
40 fois 25	Oral	EN 6 ^e	2005	68	34,6 %
			2008	68	36,8 %
3 fois 0,5	Oral	EN 6 ^e	2002	32	46,2 %
			2003	33	43,6 %
4 multiplié par 2,5	Oral	EN 6 ^e	2001	27	48,8 %
2,5 multiplié par 4	Oral	EN 6 ^e	2002	35	49,1 %
			2003	36	43,5 %
$62 \times 0,5$	En ligne	Panel 2007	2008	M52	28,8 %
$1,5 \times 4$	En ligne	EN CM2	2010	69	54,0 %

* Appliquer une technique opératoire (calculs écrits autorisés)

Tableau A-8 : Calculer mentalement des quotients de nombres entiers ou décimaux

Tâche	Passation	Evaluation	Année	Item	TR
128 : 4		Panel 2007	2008	M46	49,4 %
La moitié de 9		EN 6 ^e	2001	28	87,3 %
Le quart de 100	Oral	EN 6 ^e	1998	6	65,6 %
		Avant les vacances	1999	6	72,8 %
		Après les vacances	1999	6	66,3 %
		EN 6 ^e	1999	2	70,1 %
			2000	2	67,0 %
			2001	3	66,4 %
			2004	2	68,1 %
100 : 4	Oral	EN 6 ^e	1999	65	64,5 %
			2000	67	60,9 %
			2004	67	63,9 %
60 : 4	Oral	EN 6 ^e	2005	26	40,3 %
			2008	26	41,8 %
Dans 45 combien de fois 15 ?	Oral	EN 6 ^e	2005	27	70,7 %
			2008	27	73,2 %
52 : 4		EN 6 ^e	1998	9	32,7 %
		Avant les vacances	1999	9	51,3 %
		Après les vacances	1999	9	33,6 %
		EN 6 ^e	1999	5	39,1 %
			2000	5	35,0 %
			2001	4	37,2 %
La moitié de 130	Oral	EN 6 ^e	1998	4	66,8 %
		Avant les vacances	1999	4	73,3 %
		Après les vacances	1999	4	68,0 %
		EN 6 ^e	1999	66	67,1 %
			2000	68	64,4 %
			2004	68	65,8 %

Tableau A-9 : Multiplier mentalement un nombre entier ou décimal par 10

Tâche	Passation	Evaluation	Année	Item	TR
24×10	En ligne	EN 6 ^e	1989	55	95,1 %
240×10	En ligne	EN 6 ^e	1990	65	94,3 %
63×10	En ligne	EN 6 ^e	1991	70	94,3 %
		EN 6 ^e	1995	36	91,5 %
		EN 6 ^e	1997	49	91,0 %
		EN 6 ^e	1998	41	92,1 %
		Avant les vacances	1999	41	95,6 %
		Après les vacances	1999	41	92,5 %
23×10	En ligne	EN 6e	2004	21	91,0 %
			2005	91	90,1 %
			2008	91	88,9 %
$2,3 \times 10$	En ligne	EN 6e	1994	1	77,4 %
			1999	21	64,5 %
			2000	20	62,3 %
			2001	34	64,2 %
	Oral	2001	30	55,8 %	
$10 \times 2,3$	En ligne	EN 6 ^e	1994	48	75,1 %
$38,45 \times 10$	En ligne	EN 6 ^e	1992	71	60,0 %
$2,34 \times 10$	En ligne	EN 6 ^e	1996	29	63,3 %
$10 \times 2,34$	En ligne	EN 6 ^e	1996	46	64,1 %
$17,89 \times 100$	En ligne	EN 6 ^e	1989	56	74,9 %
$281,28 \times 100$	En ligne	EN 6 ^e	1990	66	66,8 %
$3,72 \times 100$	En ligne	EN 6 ^e	1990	67	63,4 %
$7,14 \times 100$	En ligne	EN 6 ^e	1991	72	72,8 %
		EN 6 ^e	1995	38	63,3 %
		EN 6 ^e	1997	51	56,6 %
		En 6 ^e	1998	43	60,9 %
		Avant les vacances	1999	43	65,9 %
		Après les vacances	1999	43	61,1 %
		20 ans	1999	M5	65,1 %
2007	M5	64,5 %			
$27,1 \times 100$	En ligne	EN 6 ^e	1992	74	47,3 %

Tableau A-10 : Multiplier mentalement un nombre entier ou décimal par 10, 100, 1000 (suite)

Tâche	Passation	Evaluation	Année	Item	TR
$35,2 \times 100$	En ligne	EN 6 ^e	1994	2	59,5 %
			1999	21	48,9 %
			2000	21	46,2 %
			2001	35	47,3 %
			2004	22	40,5 %
			2005	92	32,9 %
			2008	92	31,6 %
$0,72 \times 1\ 000$	En ligne	EN 6 ^e	1989	57	64,7 %
$54,60 \times 1\ 000$	En ligne	EN 6 ^e	1980	63	50,8 %
			1993	63	44,8 %
$1,54 \times 1\ 000$	En ligne	EN 6 ^e	1991	71	68,9 %
		EN 6 ^e	1995	37	59,3 %
		En 6 ^e	1997	50	52,6 %
		En 6 ^e	1998	42	56,2 %
		Avant les vacances	1999	42	62,2 %
		Après les vacances	1999	42	56,8 %
		20 ans	1999	M4	61,2 %
			2007	M4	57,5 %
$18,7 \times 1\ 000$	En ligne	EN 6 ^e	1992	76	48,0 %
$7 \times 10\ 000$	Oral	EN 6 ^e	2002	4	87,9 %
			2003	4	84,9 %

Tableau A-11 : Diviser mentalement un nombre entier ou décimal par 10, 100, 1000

Tâche	Passation	Evaluation	Année	Item	TR
1 800 : 10	En ligne	EN 6 ^e	1989	58	80,2 %
630 : 10	En ligne	EN 6 ^e	1994	3	81,4 %
			1999	23	72,8 %
			2000	22	71,0 %
			2001	36	71,9 %
			2004	23	70,8 %
			2005	93	69,2 %
			2008	93	69,7 %
68 : 10	En ligne	EN 6 ^e	1996	48	57,7 %
37 : 10	Oral	EN 6 ^e	2002	3	56,0 %
			2003	3	41,6 %
16,2 : 10	En ligne	EN 6 ^e	1990	68	53,9 %
325,6 : 10	En ligne	EN 6 ^e	1991	74	62,1 %
		EN 6 ^e	1995	40	57,8 %
		EN 6 ^e	1997	53	53,0 %
		En 6 ^e	1998	45	59,6 %
		Avant les vacances	1999	45	67,2 %
		Après les vacances	1999	45	60,3 %
		20 ans	1999	D6	66,0 %
			2007	D6	60,2 %
0,1034 : 10	En ligne	EN 6 ^e	1980	65	29,4 %
			1993	65	30,5 %
67 : 100	En ligne	EN 6 ^e	1991	73	58,2 %
		EN 6 ^e	1995	39	53,9 %
		EN 6 ^e	1997	52	49,0 %
		En 6 ^e	1998	44	54,5 %
		Avant les vacances	1999	44	62,7 %
		Après les vacances	1999	44	55,4 %
		20 ans	1999	D5	61,5 %
			2007	D5	55,4 %
38,45 : 10	En ligne	EN 6 ^e	1992	72	63,8 %
825 : 100	En ligne	EN 6 ^e	1990	69	52,9 %

Tableau A-12 : Diviser mentalement un nombre entier ou décimal par 10, 100, 1000 (suite)

Tâche	Passation	Evaluation	Année	Item	TR
8 006 : 100	En ligne	EN 6 ^e	1980	64	46,7 %
			1993	64	42,5 %
			1996	49	44,0 %
9 367 : 100	En ligne	EN 6 ^e	2005	94	46,9 %
			2008	94	41,9 %
258,3 : 100	En ligne	EN 6 ^e	1989	59	56,1 %
27,1 : 100	En ligne	EN 6 ^e	1992	75	47,7 %
936,7 : 100	En ligne	EN 6 ^e	1994	4	53,6 %
			1999	24	48,6 %
			2000	23	44,9 %
			2001	37	45,5 %
			2004	24	42,0 %
732 : 1 000	En ligne	En 6 ^e	1989	60	67,3 %
2 127 : 1 000	En ligne	En 6 ^e	1990	70	53,4 %
18,7 : 1 000	En ligne	EN 6 ^e	1992	77	37,0 %
3 000,6 : 1 000	En ligne	EN 6 ^e	1991	75	53,2 %
		EN 6 ^e	1995	41	47,3 %
		EN 6 ^e	1997	54	44,6 %
		En 6 ^e	1998	46	51,4 %
		Avant les vacances	1999	46	59,4 %
		Après les vacances	1999	46	52,1 %

Tableau A-13 : Estimer mentalement un ordre de grandeur d'un résultat

Tâche	Evaluation	Année	Item	TR
On effectue un calcul sur une calculatrice. Voici l'affichage du résultat : 1987,3925 De quel nombre ce résultat est-il le plus proche ? Entoure ta réponse. 1 000 2 000 4 000 10 000 000 20 000 000	EN 6 ^e	1999	89	76,1 %
		2000	90	68,2 %
Parmi les nombres proposés, entoure la réponse qui te semble la meilleure : La somme 3 641 + 23 250 est proche de 5 500 6 000 15 000 30 000 50 000	EN 6 ^e	1998	29	87,8 %
	Avant les vacances	1999	29	90,7 %
	Après les vacances	1999	29	88,1 %
	EN 6 ^e	2001	21	89,1 %
Entoure le nombre qui est le plus proche de $5\,525 + 535^*$: 1 000 ; 5 000 ; 6 000 ; 10 000 ; 55 000	EN 6 ^e	1997	38	67,1 %
		2002	36	71,8 %
		2003	37	71,2 %
		2004	89	75,2 %
Une classe de collège compte en moyenne 25 élèves. Le nombre d'élèves dans un collège de 21 classes est proche de : 300 400 500**	EN 6 ^e	1994	36	44,7 %
Observe les résultats proposés, puis entoure le bon : 12×98 est égal à : 11 716 ; 2 166 ; 976 ; 1 176	EN 6 ^e	1996	32	56,7 %
Observe les résultats proposés, puis entoure le bon : 27×304 est égal à : 5 208 ; 908 ; 8 208 ; 8 197	EN 6 ^e	1996	34	40,7 %
Christophe et Aïcha effectuent le calcul suivant : 39×19 Aïcha calcule mentalement et dit : « c'est à peu près 40×20 , qui fait 800 ». Christophe pose l'opération et affirme : « ça fait exactement 811 ». Aïcha lui dit : « c'est impossible ». Elle a raison. Explique pourquoi, sans effectuer l'opération.	EN 6 ^e	1998	84	31,3 %
	Avant les vacances	1999	84	40,4 %
	Après les vacances	1999	84	33,3 %

* calcul dicté avec opération écrite au tableau, puis effacée

*** réponse correcte donnée avec ou sans explication (qui était demandée pour ces items).

Tableau A-14 : Estimer mentalement un ordre de grandeur d'un résultat (suite)

Tâche	Évaluation	Année	Item	TR
Martine affirme que $72 \times 1,9$ est proche de 140. Es-tu d'accord avec Martine ou non ?***	EN 6 ^e	1994	35	32,0 %
Une école achète 5 dictionnaires à 29,97 € l'un. Donne un ordre de grandeur de la dépense totale.	EN 6 ^e	2001	69	30,7 %
Entoure le nombre qui est le plus proche de $4,9 \times 202^*$: 100 ; 500 ; 800 ; 1 000 ; 10 000	EN 6 ^e	1997	36**	43,5 %
		2002	37	30,6 %
		2003	38	26,9 %
		2004	90	27,7 %
Entoure le nombre qui est le plus proche de $250 : 11^*$: 2 ; 2,5 ; 25 ; 250 ; 2 500	EN 6 ^e	1997	37	62,9 %
		2002	38	66,6 %
		2003	39	61,2 %
		2004	91	66,1 %
Observe les résultats proposés, puis entoure le bon : $13\ 604 : 92$ est égal à : 142 ; 1 142 ; 512 ; 12	EN 6 ^e	1996	33	31,1 %

* calcul dicté avec opération écrite au tableau, puis effacée

** la tâche est contextualisée en 1997

*** réponse correcte donnée avec ou sans explication (qui était demandée pour ces items).

Tableau A-15 : Additionner des nombres entiers

Tâche	Passation	Evaluation	Année	Item	TR
235 + 562	Calcul posé	20 ans	1987	A1	98,3 %
			2007	A1	96,7 %
542 + 7 154	Calcul posé	EN 6e	1989	16	98,4 %
			1995	29	96,7 %
			1997	29	96,8 %
			1999	11	95,9 %
			2000	13	96,2 %
			2004	14	97,1 %
674 + 496	Calcul posé	EN 6e	1994	37	92,8 %
673 + 8 295	Calcul posé	EN 6e	2001	10	93,2 %
19 786 + 215 + 3 291	Calcul posé	20 ans	1987	A2	93,6 %
			2007	A2	82,8 %
3 435 + 2 164 + 4 148 + 2 015	Calcul posé	20 ans	1987	A3	90,2 %
			2007	A3	82,4 %
4 254 + 729 + 3 038	Calcul posé	EN 6 ^e	1989	17	92,0 %
3 421 + 513 + 5 092	Calcul posé	EN 6 ^e	1990	22	95,2 %
4 129 + 357 + 9 008	Calcul posé	EN 6e	1991	26	88,7 %
		EN 6e	1998	16	86,6 %
		Avant les vacances	1999	16	89,4 %
		Après les vacances	1999	16	86,9 %
4 376 + 817 + 3 901	Calcul posé	EN 6 ^e	1992	19	88,9 %
9 278 + 314 + 709	Calcul posé	EN 6 ^e	1993	24	88,6 %
314 + 509 + 9 278	Calcul posé	EN 6 ^e	1996	26	86,9 %
6 493 + 604 + 39 + 143	Calcul posé	EN 6 ^e	1994	46	90,6 %
1 357 + 728 + 463 + 506	Calcul posé	EN 6 ^e	2005	15	77,4 %
			2008	15	77,6 %
5 392 + 629	En ligne	20 ans	1987	A4	97,3 %
			2007	A4	92,2 %
367 + 69	En ligne	EN 6e	1989	19	93,3 %
1 285 + 625	En ligne	EN 6e	2001	12	88,7 %

Tableau A-16 : Effectuer une addition « à trous » de deux nombres entiers

Tâche	Passation	Evaluation	Année	Item	TR
$649 + \dots = 1\,506$	Posé, à trous	20 ans	1987	A6	87,1 %
			2007	A6	70,2 %
$8\,68 + 1\,75 = \dots 613$	Posé, à trous	20 ans	1987	A7	83,8 %
			2007	A7	62,0 %
$524 + 8 \dots = 609$	Posé, à trous	EN 6 ^e	1989	21	98,2 %
$3 \dots 9 \dots + 825 = 4\,615$	Posé, à trous	EN 6 ^e	1989	22	78,8 %
$4 \dots 2 \dots + 213 = 4\,241$	Posé, à trous	EN 6 ^e	1990	27	91,9 %
		EN 6 ^e	1991	31	89,2 %
		EN 6 ^e	1998	21	83,4 %
		Avant les vacances	1999	21	87,3 %
		Après les vacances	1999	21	84,5 %
$2 \dots 2 \dots + 654 = 2\,681$	Posé, à trous	EN 6 ^e	1992	24	89,2 %

Tableau A-17 : Additionner des nombres décimaux

Tâche	Passation	Evaluation	Année	Item	TR
56,09 + 22,4 + 233,25	Calcul posé	20 ans	1987	A5	84,3 %
			2007	A5	74,8 %
5,13 + 4,56	En ligne	EN 6 ^e	1989	20	95,3 %
168,75 + 42,50	Calcul posé	EN 6 ^e	1989	18	87,0 %
			1995	31	78,9 %
			1997	31	75,0 %
			1999	13	72,6 %
			2000	14	78,0 %
			2004	15	75,6 %
6,25 + 4,68	En ligne	EN 6 ^e	1990	25	88,3 %
6,25 + 12,85	En ligne	EN 6 ^e	1991	29	79,7 %
			1995	32	81,2 %
			1997	32	79,2 %
			1998	19	70,5 %
		Avant les vacances	1999	19	77,4 %
		Après les vacances	1999	19	71,5 %
		EN 6 ^e	1999	16	78,0 %
			2000	18	82,6 %
2004	19	81,0 %			
7,4 + 18,71	En ligne	EN 6 ^e	1992	22	72,5 %
18,5 + 3,67	En ligne	EN 6 ^e	1994	40	63,3 %
15,7 + 23	En ligne	EN 6 ^e	1993	27	83,2 %
			1996	28	76,9 %
164,8 + 26,57	En ligne	EN 6 ^e	2005	17	72,8 %
			2008	17	71,0 %
8,32 + 15,87	En ligne	EN 6 ^e	2001	7	77,9 %
			2002	48	84,6 %
			2003	49	80,9 %
15,672 + 352,21	En ligne	EN 6 ^e	2001	16	73,9 %
			2002	49	79,2 %
			2003	50	74,7 %
154,8 + 36,57		EN CM2	2010	78	66,9 %

Tableau A-18 : Soustraire un nombre entier à un nombre entier

Tâche	Passation	Evaluation	Année	Item	TR
749 – 217	Calcul posé	20 ans	1987	S1	97,7 %
			2007	S1	94,5 %
5 329 – 2 852	Calcul posé	20 ans	1987	S2	91,3 %
			2007	S2	80,1 %
2 143 – 527	Calcul posé	20 ans	1987	S3	92,1 %
			2007	S3	80,9 %
567 – 24	Calcul posé	EN 6 ^e	1989	23	96,1 %
485 – 32	Calcul posé	EN 6 ^e	1990	23	95,6 %
789 – 83	Calcul posé	EN 6 ^e	1991	27	92,5 %
			1995	30	88,3 %
			1997	30	90,7 %
			1998	17	89,3 %
		Avant les vacances	1999	17	93,7 %
		Après les vacances	1999	17	89,9 %
		EN 6 ^e	1999	12	90,6 %
			2000	15	89,4 %
2004	16		90,3 %		
575 – 43	En ligne	EN 6 ^e	1989	26	94,9 %
			1999	14	91,7 %
			2000	16	92,4 %
			2004	17	90,2 %
453 – 246	Calcul posé	EN 6 ^e	1994	38	82,1 %
742 – 136	Calcul posé	EN 6 ^e	1996	25	89,3 %
1 627 – 870	En ligne	20 ans	1987	S4	92,4 %
			2007	S4	81,4 %
748 – 65	Calcul posé	EN 6 ^e	1992	20	90,3 %
958 – 73	Calcul posé	EN 6 ^e	1993	25	90,0 %
1 564 – 887	En ligne	EN 6 ^e	1996	24	80,3 %
1 285 – 625	En ligne	EN 6 ^e	2001	13	80,4 %
2 809 – 543	Calcul posé	EN 6 ^e	2001	47	82,4 %
937 – 46	En ligne	EN 6 ^e	2001	14	77,8 %
	Calcul posé		2001	46	87,1 %
445 – 238	Calcul posé	EN 6 ^e	2005	16	80,3 %
			2008	16	81,7 %
463 – 167	En ligne	EN 6 ^e	1989	27	83,8 %
			1995	33	75,8 %
			1999	15	70,7 %
			2000	17	70,8 %
			2004	18	54,7 %

Tableau A-19 : Effectuer une soustraction « à trous » avec deux nombres entiers

Tâche	Passation	Evaluation	Année	Item	TR
$\dots + 768 = 3\,290$	Posé, à trous	20 ans	1987	S6	62,5 %
			2007	S6	38,6 %
$4\,572 - 1\,110 = 2\,844$	Posé, à trous	20 ans	1987	S7	72,1 %
			2007	S7	49,2 %
		EN 6 ^e	1993	29	54,3 %
$7\,608 - 800 = 714$	Posé, à trous	EN 6 ^e	1989	28	88,6 %
$2\,008 - 800 = 149$	Posé, à trous	EN 6 ^e	1989	29	52,6 %
$3\,808 - 800 = 283$	Posé, à trous	EN 6 ^e	1992	25	61,8 %
$2\,607 - 700 = 154$	Posé, à trous	EN 6 ^e	1990	28	74,5 %
			1991	32	70,3 %
		EN 6 ^e	1998	22	62,9 %
		Avant les vacances	1999	22	73,5 %
		Après les vacances	1999	22	63,7 %

Tableau A-20 : Soustraire un nombre décimal à un nombre décimal

Tâche	Passation	Evaluation	Année	Item	TR
19,78 – 2,42	En ligne	EN 6 ^e	2001	61	87,6 %
			2002	76	86,8 %
			2003	77	83,2 %
6,33 – 4,57	Calcul posé	EN 6 ^e	1989	24	79,4 %
7,25 – 2,38	Calcul posé	EN 6 ^e	1990	24	69,8 %
20,14 – 8,82	En ligne	EN 6 ^e	2001	62	76,5 %
			2002	77	73,2 %
			2003	78	69,5 %
19,67 – 5,4	En ligne	EN 6 ^e	1993	28	58,6 %
127,85 – 13,2	En ligne	EN 6 ^e	2005	18	69,8 %
			2008	18	65,6 %
138,85 – 49,2	En ligne	EN CM2	2010	79	51,6 %
7,24 – 4,3	En ligne	EN 6 ^e	1990	26	50,9 %
			1995	35	49,7 %
			1997	33	49,9 %
			1999	17	45,6 %
			2000	19	60,2 %
			2004	20	61,5 %
9,37 – 4,6	En ligne	EN 6 ^e	1991	30	54,5 %
		EN 6 ^e	1998	20	35,5 %
		Avant les vacances	1999	20	47,9 %
		Après les vacances	1999	20	36,7 %
8,38 – 3,7	En ligne	EN 6 ^e	1992	23	57,6 %
			1996	27	55,7 %
8,73 – 5	En ligne	EN 6 ^e	1994	39	66,5 %
6,48 – 4,6	En ligne	EN 6 ^e	1994	41	57,6 %
4 700 – 2 789,7	En ligne	20 ans	1987	S5	71,7 %
			2007	S5	49,5 %
75 – 8,37	Calcul posé	EN 6 ^e	1994	42	60,4 %
30,9 – 13,64	Calcul posé	EN 6 ^e	1989	25	71,9 %
9,4 – 6,78	Calcul posé	EN 6 ^e	1991	28	54,4 %
		EN 6 ^e	1998	18	43,2 %
		Avant les vacances	1999	18	54,4 %
		Après les vacances	1999	18	45,1 %
64,2 – 18,67	En ligne	EN 6 ^e	1992	21	54,4 %
19,4 – 7,66	Calcul posé	EN 6 ^e	1993	26	63,6 %

Tableau A-21 : Multiplier deux nombres entiers

Tâche	Passation	Evaluation	Année	Item	TR
513 × 6	Calcul posé	20 ans	1987	M1	97,1 %
			2007	M1	90,5 %
45 × 19	Calcul posé	EN 6 ^e	1989	45	83,4 %
			1995	45	74,5 %
			1997	39	70,7 %
			1999	28	71,3 %
			2000	24	66,7 %
			2004	25	64,1 %
35 × 60	En ligne	EN 6 ^e	1991	69	70,3 %
		EN 6 ^e	1998	52	60,1 %
		Avant les vacances	1999	52	71,4 %
		Après les vacances	1999	52	62,4 %
64 × 39	Calcul posé	EN 6 ^e	2001	11	53,8 %
39 × 57	En ligne	EN CM2	2010	80	58,3 %
204 × 20	Calcul posé	EN 6 ^e	1994	47	84,5 %
247 × 36	Calcul posé	20 ans	1987	M2	83,7 %
			2007	M2	67,8 %
876 × 34	Calcul posé	EN 6 ^e	2005	28	47,2 %
			2008	28	46,5 %
			1996	30	66,7 %
759 × 109	Calcul posé	20 ans	1987	M3	62,9 %
			2007	M3	55,3 %
		EN 6 ^e	1991	65	51,0 %
		EN 6 ^e	1998	50	44,2 %
		Avant les vacances	1999	50	63,2 %
Après les vacances	1999	50	46,0 %		
523 × 305	Calcul posé	EN 6 ^e	1989	46	80,9 %
			1995	46	69,6 %
			1997	40	65,1 %
			1999	29	64,9 %
			2000	25	60,5 %
			2004	26	60,8 %
			2005	29	55,9 %
			2008	29	53,4 %
314 × 702	Calcul posé	EN 6 ^e	1990	63	72,1 %
231 × 305	Calcul posé	EN 6 ^e	1992	63	77,8 %
452 × 107	Calcul posé	EN 6 ^e	1993	58	68,3 %
			1996	30	66,7 %

Tableau A-22 : Effectuer une multiplication « à trous » de deux nombres entiers

Tâche	Passation	Evaluation	Année	Item	TR
$32 \times . = 192$	En ligne, à trous	EN 6 ^e	1989	51	86,5 %
$247 \times . = 1 . 82$	Posé, à trous	EN 6 ^e	1989	52	70,9 %
$432 \times . = 3 . 24$	Posé, à trous	EN 6 ^e	1992	66	70,3 %
$324 \times . = 2 . 92$	Posé, à trous	EN 6 ^e	1990	62	51,9 %
		EN 6 ^e	1991	67	50,8 %
		20 ans	1999	M6	56,1 %
			2007	M6	45,5 %
		EN 6 ^e	1998	51	41,6 %
		Avant les vacances	1999	51	56,2 %
		Après les vacances	1999	51	41,9 %

Tableau A-23 : Multiplier deux nombres décimaux

Tâche	Passation	Evaluation	Année	Item	TR
$4,12 \times 2,9$	Calcul posé	EN 6 ^e	1989	47	62,3 %
$4,28 \times 3,5$	Calcul posé	EN 6 ^e	1990	61	53,6 %
$11,4 \times 5,3$	Calcul posé	EN 6 ^e	1991	66	58,3 %
$7,46 \times 3,1$	Calcul posé	EN 6 ^e	1992	65	52,0 %
$62,34 \times 45$	Calcul posé	EN 6 ^e	1993	59	35,9 %
			1996	31	34,1 %
$63,4 \times 2,12$	Calcul posé	EN 6 ^e	1994	57	49,6 %
$27,5 \times 23$	En ligne	EN 6 ^e	2005	30	30,9 %
			2008	30	29,1 %
$24,3 \times 6$	En ligne	EN CM2	2010	81	59,3 %

Tableau A-24 : Effectuer une division euclidienne de deux nombres entiers

Tâche	Passation	Evaluation	Année	Item	TR
72 : 3	Calcul posé	EN 6 ^e	1995	47	77,3 %
			1997	41	75,8 %
			1999	30	75,6 %
74 : 4	Calcul posé	En 6 ^e	1998	67	63,4 %
		Avant les vacances	1999	67	78,0 %
		Après les vacances	1999	67	65,6 %
		En 6 ^e	2004	33	54,7 %
81 : 6	Calcul posé	En 6 ^e	2005	72	61,6 %
			2008	72	63,1 %
336 : 4	Calcul posé	EN 6 ^e	1989	53	85,1 %
9 216 : 4	Calcul posé	EN 6 ^e	1990	63	69,4 %
			1991	68	71,9 %
7 242 : 6	Calcul posé	EN 6 ^e	1992	67	66,8 %
3 968 : 8	Calcul posé	EN 6 ^e	1993	60	44,3 %
			1996	45	57,9 %
4 584 : 8	Calcul posé	EN 6 ^e	1994	49	63,7 %
432 : 12	Calcul posé	EN 6 ^e	1998	68	55,7 %
		Avant les vacances	1999	68	76,7 %
		Après les vacances	1999	68	58,1 %
		20 ans	1999	D3	76,3 %
			2007	D3	63,8 %
		EN 6 ^e	2004	34	41,2 %
1 530 : 15	Calcul posé	20 ans	1987	D4	74,4 %
			2007	D4	59,2 %
408 : 12	Calcul posé	EN 6 ^e	2005	73	53,7 %
			2008	73	54,2 %
2 782 : 26	Calcul posé	EN 6 ^e	1989	54	63,5 %
			1995	48	46,3 %
			1997	42	43,2 %
			1999	31	43,7 %
544 : 17	En ligne	EN CM2	2010	82	50,4 %

Tableau A-25 : Effectuer une division décimale de deux entiers

Tâche	Passation	Evaluation	Année	Item	TR
74 : 4	Calcul posé	20 ans	1999	D1	77,7 %
			2007	D1	76,3 %
186 : 7* (au centième près)	Calcul posé	20 ans	1987	D2	73,6 %
			2007	D2	37,5 %
276 : 8	En ligne	EN CM2	2010	83	34,1 %

Tableau A-26 : Diviser un nombre décimal par un nombre entier

Tâche	Passation	Evaluation	Année	Item	TR
Aucune					

Tableau A-27 : Résoudre des problèmes additifs

Tâche	Evaluation	Année	Item	TR	Démarche
(1) Dimanche, Bernard a fait une promenade en vélo. Le matin, il a parcouru 65 km. Puis il a mangé et s'est reposé. L'après-midi, il a fait 59 km pour revenir chez lui. Quelle distance a-t-il parcourue dans la journée ?	EN 6 ^e	1989	5	91,4 %	94,1 %
(2) J'achète un livre à 73 F. Après cet achat, il me reste 19 F. Combien avais-je d'argent ?	EN 6 ^e	1989	11	Erreur*	Erreur*
(2) Jean paie un disque 48 F, il lui reste alors 26 F. Combien d'argent avait-il avant l'achat du disque ?	EN 6 ^e	1990	9	78,5 %	86,2 %
		1995	5	85,0 %	
(3) Marie fête son anniversaire le 22 septembre : elle a 11 ans. Elle dit à sa maman : « J'ai exactement 32 ans de moins que toi ! » Quel est l'âge de maman ?	EN 6 ^e	1991	17	78,4 %	
	EN 6 ^e	1998	49	70,5 %	
	Avant les vacances	1999	49	72,8 %	
	Après les vacances	1999	49	71,0 %	
(2) Frédéric a 40 francs. Il lui manque 4 francs pour acheter une bande dessinée. Quel est le prix de la bande dessinée ?	EN 6 ^e	1993	1	93,2 %	
(4) Lucie aime jouer aux billes. A la fin de la journée, elle a 8 billes de plus que le matin. Pourtant, la journée avait mal commencé : à midi, elle avait perdu 2 billes ! Que s'est-il passé l'après-midi ?	EN 6 ^e	1994	14	26,7 %	
(2) En un an, Dominique a grandi de 9 cm. Dominique mesure maintenant 112 cm. Quelle était sa taille il ya un an ?	EN 6 ^e	1989	7	89,3 %	91,8 %
(1) Pour composer 3 bouquets, une fleuriste dispose de 53 tulipes, des jaunes et des rouges. Il ya 17 tulipes jaunes. Combien y a-t-il de tulipes rouges ?	EN 6 ^e	1990	13	85,6 %	87,2 %
(3) Je possède 137 billes. J'en ai 42 de plus que mon frère. Combien mon frère en possède-t-il ?	EN 6 ^e	1989	9	Erreur*	Erreur*
(2) Un employé a reçu une avance de 750 F sur le salaire qu'il doit recevoir en fin de mois. Son salaire est de 8 275 F. Combien recevra-t-il à la fin du mois ?	EN 6 ^e	1980	?	48,3 %	52,8 %
		1993	68	43,7 %	49,8 %

* Erreur dans le document DEPP

Tableau A-28 : Résoudre des problèmes multiplicatifs

Tâche	Evaluation	Année	Item	TR	Démarche
Dans une salle de spectacle, il ya 57 rangées de 32 fauteuils chacune. Calcul le nombre de fauteuils de cette salle.	EN 6 ^e	1989	68	80,6 %	89,0 %
A la récréation de 10 heures, 83 petits pains ont été vendus par un groupe de 4 élèves. Chaque petit pain a été vendu 3 F. Quel est le montant de cette vente ?	EN 6 ^e	1991	16	81,2 %	
	EN 6 ^e	1995	6	75,9 %	
On achète 7,20 m de fil électrique à 4 F le mètre. Combien a-t-on payé ?	EN 6 ^e	1989	71	70,2 %	74,4 %
		1992	13	69,4 %	
On avait demandé aux 25 élèves d'une classe d'apporter chacun 6,50 F pour une sortie. Seulement 20 élèves ont apporté l'argent. Quelle est la somme recueillie ?	EN 6 ^e	1990	11	64,4 %	84,2 %
J'achète 7 kilos de pommes à 1,60 € le kilo*. Combien ai-je dépensé ?	EN 6 ^e	2005	38	65,6 %	
		2008	38	67,3 %	
J'achète 3,70 mètres de tissu à 9,50 F le mètre. Combien dois-je payer ?	EN 6 ^e	1980		45,5 %	77,5 %
		1993	66	35,2 %	80,5 %
Monsieur Martin est chargé de ranger 80 bouteilles dans des casiers. Chaque casier peut contenir 12 bouteilles. Combien de casiers seront nécessaires pour que Monsieur Martin puisse ranger toutes les bouteilles ? Justifie ta réponse.	EN 6 ^e	1989	15**	34,2 %	
Pour le repas de la cantine scolaire, on a besoin de 325 gâteaux. Les gâteaux sont vendus par paquets de 20. Combien doit-on acheter de paquets de gâteaux ?	EN 6 ^e	1990	16	32,1 %	35,5 % (16 : 20,9 % Quotient décimal : 10,6 %)
M. Bron veut carreler sa terrasse. Il dispose d'une boîte de 160 carreaux et il a besoin de 13 carreaux par rangée. Combien de rangées complètes pourra-t-il poser ?	EN 6 ^e	1993	2	62,1 %	78,7 %
On veut transporter 185 voitures par le train. On charge 9 voitures par wagon. Combien faut-il de wagons pour transporter toutes les voitures ?	20 ans	1987	P3	43,3 %	
		2007	P3***	45,0 %	
Une enseignante décide d'acheter des calculatrices pour ses 24 élèves de CM2. Le prix total est de 300 €. Quel est le prix d'une calculatrice ?	EN CM2	2010	77	24,2 %	68,0 %

* kilo ?

** nous ignorons si la démarche a été prise en compte ou non dans le codage ?

*** Lors de la correction en 2007, la réponse 20 wagons et un wagon de 5 voitures a été considérée comme juste. Il n'est pas certain qu'il en fût ainsi en 1987.

Tableau A-29 : Résoudre des problèmes relevant de la proportionnalité

Tâche	Evaluation	Année	Item	TR								
<table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td>Nombre de petits pains</td> <td>5</td> <td>10</td> <td>15</td> </tr> <tr> <td>Prix à payer en francs</td> <td>15</td> <td>30</td> <td>45</td> </tr> </table> <p>Utilise ce tableau pour trouver le prix de vente de 25 petits pains.</p>	Nombre de petits pains	5	10	15	Prix à payer en francs	15	30	45	EN 6 ^e	1989	65	67,6 %
Nombre de petits pains	5	10	15									
Prix à payer en francs	15	30	45									
Un train roule toujours à la même vitesse. Il met 6 minutes pour parcourir 9 kilomètres et 10 minutes pour parcourir 15 kilomètres. Quelle est la distance parcourue en 16 minutes ?*	EN 6 ^e	1990	53	58,2 %								
		1992	51	61,0 %								
Un train roule toujours à la même vitesse. Il met 6 minutes pour parcourir 9 kilomètres et 10 minutes pour parcourir 15 kilomètres. Quelles est la distance parcourue en 30 minutes ?*	EN 6 ^e	1990	54	44,9 %								
		1992	52	45,3 %								
Lorsque je fais une mousse au chocolat pour 9 personnes, j'utilise 6 œufs. Lorsque je fais la même mousse au chocolat pour 15 personnes, j'utilise 10 œufs. Combien faudra-t-il d'œufs si je fais la même mousse au chocolat pour 24 personnes ?	EN 6 ^e	1991	57	40,0 %								
Lorsque je fais une mousse au chocolat pour 9 personnes, j'utilise 6 œufs. Lorsque je fais la même mousse au chocolat pour 15 personnes, j'utilise 10 œufs. Combien faudra-t-il d'œufs si je fais la même mousse au chocolat pour 30 personnes ?	EN 6 ^e	1991	58	46,2 %								
Pour faire de la confiture, on utilise des fruits et du sucre. Pour 6 kilogrammes de fraises, il faut 4 kilogrammes de sucre. Pour 9 kilogrammes de fraises, il faut 6 kilogrammes de sucre. Combien faut-il de kilogrammes de sucre pour 15 kilogrammes de fraises ?*	EN 6 ^e	1993	43	43,6 %								
Pour faire de la confiture, on utilise des fruits et du sucre. Pour 6 kilogrammes de fraises, il faut 4 kilogrammes de sucre. Pour 9 kilogrammes de fraises, il faut 6 kilogrammes de sucre. Combien faut-il de kilogrammes de fraises pour 12 kilogrammes de sucre ?*	EN 6 ^e	1993	44	32,8 %								
Avec un pot de 6 kg de peinture, on peint une surface de 15 m ² . Avec un pot de 10 kg de peinture, on peint une surface de 25 m ² . Combien de m ² peut-on peindre avec 16 kg de peinture ?	EN 6 ^e	1994	19	64,1 %								
Avec un pot de 6 kg de peinture, on peint une surface de 15 m ² . Avec un pot de 10 kg de peinture, on peint une surface de 25 m ² . Combien de kg de peinture faut-il pour peindre 50 m ² ?	EN 6 ^e	1994	20	47,8 %								
Avec un pot de 6 kg de peinture, on peint une surface de 15 m ² . Avec un pot de 10 kg de peinture, on peint une surface de 25 m ² . Combien de m ² peut-on peindre avec 4 kg de peinture ?	EN 6 ^e	1994	21	36,7 %								

Tableau A-30 : Résolution de problèmes relevant de la proportionnalité (suite)

Tâche	Evaluation	Année	Item	TR																				
30 morceaux de sucre pèsent 240 grammes. 50 morceaux de sucre pèsent 400 grammes. 80 morceaux de sucre pèsent ... grammes.	EN 6 ^e	1998	26	63,0 %																				
	Avant les vacances	1999	26	70,7 %																				
	Après les vacances	1999	26	64,2 %																				
	20 ans	1999	P1.1	70,2 %																				
		2007	P1.1	70,6 %																				
	EN 6 ^e	2001	18	61,5 %																				
30 morceaux de sucre pèsent 240 grammes. 50 morceaux de sucre pèsent 400 grammes. 15 morceaux de sucre pèsentgrammes.	EN 6 ^e	1998	27	68,3 %																				
	Avant les vacances	1999	27	75,4 %																				
	Après les vacances	1999	27	68,7 %																				
	20 ans	1999	P1.2	75,2 %																				
		2007	P1.2	72,8 %																				
	EN 6 ^e	2001	19	64,1 %																				
30 morceaux de sucre pèsent 240 grammes. 50 morceaux de sucre pèsent 400 grammes. J'ai mis des morceaux de sucre sur une balance, elle indique 1 200 grammes. Il y a morceaux de sucre sur la balance.	EN 6 ^e	1998	28	43,2 %																				
	Avant les vacances	1999	28	53,0 %																				
	Après les vacances	1999	28	44,0 %																				
	20 ans	1999	P1.3	52,5 %																				
		2007	P1.3	55,6 %																				
	EN 6 ^e	2001	20	42,5 %																				
6 objets identiques coûtent 150 €. Combien coûtent 9 de ces objets ?	EN 6e	2005	23	33,4 %																				
		2008	23	35,9 %																				
10 objets identiques coûtent 22 €. Combien coûtent 15 de ces objets ?	EN 6e	2005	100	30,5 %																				
		2008	100	30,4 %																				
<table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: top;"> <thead> <tr> <th>Nombre de personnes</th> <th>Prix à payer</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>2</td><td>36 €</td></tr> <tr><td>3</td><td>54 €</td></tr> <tr><td>4</td><td>72 €</td></tr> <tr><td>5</td><td>90 €</td></tr> <tr><td>6</td><td>108 €</td></tr> <tr><td>7</td><td>126 €</td></tr> <tr><td>8</td><td>144 €</td></tr> <tr><td>9</td><td>162 €</td></tr> <tr><td>10</td><td>180 €</td></tr> </tbody> </table> <p>La caissière du théâtre municipal a fabriqué un tableau indiquant le prix à payer selon le nombre de places. Complète le tableau. **</p>	Nombre de personnes	Prix à payer	2	36 €	3	54 €	4	72 €	5	90 €	6	108 €	7	126 €	8	144 €	9	162 €	10	180 €	20 ans	1987	P4	64,4 %
	Nombre de personnes	Prix à payer																						
2	36 €																							
3	54 €																							
4	72 €																							
5	90 €																							
6	108 €																							
7	126 €																							
8	144 €																							
9	162 €																							
10	180 €																							
2007	P4	52,7 %																						

* Réponse juste avec ou sans unité

** Il s'agissait en 1987 d'un cinéma dont les prix étaient donnés en francs. Ce problème était considéré comme réussi, quand toutes les réponses à donner étaient correctes.

Tableau A-31 : Savoir écrire et nommer les nombres entiers jusqu'au milliard

Tâche	Passation	Evaluation	Année	Item	TR
Ecris en chiffres quatre cent vingt-et-un	Oral	EN 6 ^e	1989	38	95,5 %
Ecris en chiffres quatre cent quatre vingt quatorze	Oral	EN 6 ^e	1990	41	88,5 %
Ecris en chiffres sept cent quatre vingt douze	Oral	EN 6 ^e	1994	50	95,8 %
Ecris en chiffres quatre cent soixante quinze	Oral	EN 6 ^e	2005	51	93,0 %
			2008	51	93,6 %
Ecris en chiffres mille huit cent cinquante-deux	Oral	EN 6 ^e	1991	47	88,2 %
			1992	40	88,8 %
			1999	20	84,8 %
			2000	9	85,9 %
			2004	9	84,9 %
Ecris en chiffres trois cent quatre	Oral	EN 6 ^e	1991	45	93,4 %
			1999	18	89,5 %
			2000	7	90,4 %
			2004	7	91,4 %
Ecris en chiffres sept cent cinq	Oral	EN 6 ^e	1992	38	94,3 %
Ecris en chiffres sept mille deux	Oral	EN 6 ^e	1989	40	91,9 %
Ecris en chiffres deux mille trois	Oral	EN 6 ^e	1990	43	87,6 %
Ecris en chiffres mille vingt quatre	Oral	EN 6 ^e	1994	51	93,8 %
Ecris en chiffres trois mille trois	Oral	EN 6 ^e	2005	52	94,5 %
			2008	52	94,2 %
Ecris en chiffres six cent vingt sept mille	Oral	EN 6 ^e	2005	53	74,7 %
			2008	53	75,9 %
Ecris en chiffres un million six cent mille	Oral	EN 6 ^e	2005	54	73,3 %
			2008	54	76,1 %
Ecris en chiffres quatre millions	Oral	EN 6 ^e	1989	39	86,1 %
Ecris en chiffres sept millions	Oral	EN 6 ^e	1990	42	80,5 %
Ecris en chiffres cinquante-six millions	Oral	EN 6 ^e	1991	42	80,4 %
			1992	39	84,1 %
Ecris en chiffres cinquante-neuf millions	Oral	EN 6 ^e	1999	19	76,9 %
			2000	8	79,1 %
			2004	8	79,2 %
Ecris en chiffres quarante huit francs cinq centimes*	Ecrit	EN 6 ^e	1995	3	40,4 %
Ecris en chiffres mille douze francs trente centimes*	Ecrit	EN 6 ^e	1995	4	86,8 %

* : les sommes étaient écrites sur des images de chèques

Tableau A-32 : Savoir écrire et nommer les nombres entiers jusqu'au milliard

Tâche	Passation	Evaluation	Année	Item	TR
Ecris en lettres 1112*	Ecrit	EN 6 ^e	1989	41	95,8 %
			1995	1	95,5 %
Ecris en lettres 472	Ecrit	EN 6 ^e	1990	44	94,9 %
Ecris en lettres 10008*	Ecrit	EN 6 ^e	1989	42	86,0 %
			1995	2	85,1 %
Ecris en lettres 2030*	Ecrit	EN 6 ^e	1990	45	95,4 %
Ecris en lettres 4003*	Ecrit	EN 6 ^e	1991	48	96,1 %
Ecris en lettres 5 006**	Ecrit	EN 6 ^e	1992	41	96,1 %
Ecris en lettres 120012*	Ecrit	EN 6 ^e	1991	49	71,9 %
Ecris en lettres 210 021**	Ecrit	EN 6 ^e	1991	49	82,1 %

* sans espace séparateur des milliers ; réponse correcte acceptée avec erreur d'orthographe ;

** avec espace séparateur des milliers

Tableau A-33 : Connaître et utiliser des relations entre les nombres

Tâche	Evaluation	Année	Item	TR
Complète la phrase par un des mots de la liste* (moitié, double, tiers, triple, quart) 12 est de 6	EN 6 ^e	2002	7	72,0 %
		2003	7	72,1 %
		2005	55	70,7 %
		2008	55	73,1 %
Complète la phrase par un des mots de la liste (moitié, double, tiers, triple, quart) 5 est de 15	EN 6 ^e	2002	8	52,9 %
		2003	8	51,3 %
		2005	56	50,8 %
		2008	56	54,1 %
Complète la phrase par un des mots de la liste (moitié, double, tiers, triple, quart) 17 est de 34	EN 6 ^e	2002	9	63,3 %
		2003	9	62,8 %
		2005	57	55,0 %
		2008	57	56,6 %
Complète la phrase par un des mots de la liste (moitié, double, tiers, triple, quart) 25 est de 100	EN 6 ^e	2002	10	75,1 %
		2003	10	74,5 %
		2005	58	49,6 %
		2008	58	54,1 %
Complète la phrase par un des mots de la liste (moitié, double, tiers, triple, quart) 25 est de 75	EN 6 ^e	2005	59	41,3 %
		2008	59	44,8 %

* : en 2005 et en 2008, « quadruple » a été ajouté à la liste de mots.

Tableau A-34 : Donner la valeur de chacun des chiffres de la partie décimale en fonction de sa position (jusqu'au 1/10 000)

Tâche	Evaluation	Année	Item	TR
Dans le nombre 328,315 le chiffre des dizaines est ...	EN 6 ^e	1990	48	62,1 %
		1991	52	60,6 %
		1992	45	62,7 %
Dans le nombre 248,517 le chiffre des dizaines est ...	EN 6 ^e	1993	37	66,7 %
Dans le nombre 134,678 le chiffre des dizaines est ...	EN 6 ^e	1998	38	64,6 %
	Avant les vacances	1999	38	65,0 %
	Après les vacances	1999	38	65,3 %
	EN 6 ^e	2002	50	70,5 %
	EN 6 ^e	2003	51	65,0 %
Pour le nombre 451,27 le chiffre des centaines est ...	EN 6 ^e	1989	43	70,0 %
Dans le nombre 124,753 le chiffre des centaines est ...	EN 6 ^e	1990	46	64,4 %
		1991	50	60,6 %
		1992	43	62,2 %
Dans le nombre 1 405,38 le chiffre 4 est le chiffre des...	EN 6 ^e	1993	38	68,9 %
Pour le nombre 451,27 le chiffre des dixièmes est ...	EN 6 ^e	1989	44	61,7 %
Dans le nombre 180,254 le chiffre des dixièmes est ...	EN 6 ^e	1990	47	43,9 %
		1991	51	42,4 %
		1992	44	52,0 %
Dans le nombre 42,758 le chiffre des dixièmes est ...	EN 6 ^e	1993	36	46,1 %
Dans le nombre 123,456 le chiffre 4 est celui des ...	EN 6 ^e	1990	49	43,5 %
Dans le nombre 13,456 le chiffre 4 est celui des ...	EN 6 ^e	1991	53	42,2 %
		1992	46	52,1 %
Dans le nombre 302,156 le chiffre 5 est le chiffre des...	EN 6 ^e	1993	39	45,5 %
Dans le nombre 754,61 le chiffre 1 est le chiffre des...	EN 6 ^e	1998	39	52,2 %
	Avant les vacances	1999	39	53,8 %
	Après les vacances	1999	39	53,2 %
	EN 6 ^e	2002	51	61,8 %
	EN 6 ^e	2003	52	51,1 %
	EN 6 ^e	2001	32	55,8 %

Tableau A-35 : Comparer, ranger des nombres entiers ou décimaux

Tâche	Evaluation	Année	Item	TR
Place le symbole qui convient : 12...5	EN 6 ^e	1989	30	96,7 %
Place le symbole qui convient : 2,50...2,5	EN 6 ^e	1989	31	95,8 %
Place le symbole qui convient : 125...130	EN 6 ^e	1989	32	96,8 %
Souligne le plus grand des nombres : 6 987 6 879	EN 6 ^e	1980	30	87,2 %
		1993	30	90,8 %
Entoure le plus petit des nombres : 203,95 204,25	EN 6 ^e	1990	33	90,2 %
		1991	37	91,6 %
Entoure le plus petit des nombres : 217,89 218,43	EN 6 ^e	1992	30	91,7 %
Entoure le plus petit des nombres : 2151,3 215,13	EN 6 ^e	1992	32	90,4 %
Entoure le plus petit des nombres : 4253,2 425,32	EN 6 ^e	1990	34	86,1 %
		1991	38	85,6 %
Entoure le plus petit des nombres : 150,65 150,7	EN 6 ^e	1990	35	64,2 %
		1991	39	63,5 %
Entoure le plus petit des nombres : 76,42 76,5	EN 6 ^e	1992	31	74,2 %
Souligne le plus grand des nombres : 0,51 0,072	EN 6 ^e	1980	31	57,7 %
		1993	31	70,0 %
Souligne le plus grand des nombres : 1,015 1,05	EN 6 ^e	1980	32	51,7 %
		1993	32	66,4 %
Range les nombres du plus petit au plus grand : 4732 ; 4532 ; 4705	EN 6 ^e	1989	33	93,6 %
Réécris les 3 nombres du plus petit au plus grand : 3528 ; 3228 ; 3515	EN 6 ^e	1990	36	95,6 %
Range les quatre nombres du plus petit au plus grand : 2731 ; 2364 ; 2759 ; 2345	EN 6 ^e	1991	40	94,4 %
Range les quatre nombres du plus petit au plus grand : 17 025 ; 17 250 ; 17 205 ; 17 520	EN 6 ^e	1992	33	93,0 %
Range les nombres du plus petit au plus grand : 3,8 ; 3,25 ; 2,99	EN 6 ^e	1989	34	68,5 %
Range les 3 nombres du plus petit au plus grand : 2,7 ; 2,15 ; 1,923	EN 6 ^e	1990	37	62,7 %
Range les quatre nombres du plus petit au plus grand : 19,9 ; 19,19 ; 1,991 ; 9,191	EN 6 ^e	1991	41	58,8 %
		1992	34	55,3 %
Voici les résultats obtenus par cinq sportifs au lancer du javelot : Rachid : 50,38 m ; Ivan : 53 m ; Yohan : 50,8 m, Eric : 51,5 m ; Stan : 50,08 m. Classe ces résultats du meilleur au moins bon.	EN 6 ^e	1993	33	45,1 %
Range les nombres suivants du plus petit au plus grand : 7,25 ; 7,8 ; 6,148 ; 7,09	EN 6 ^e	1994	58	58,3 %
Range les nombres suivants du plus petit au plus grand : 2 ; 2,02 ; 22,2 ; 22,02 ; 20,02 ; 0,22	EN 6 ^e	1999	50	68,3 %
		2000	54	65,9 %
		2002	26	72,4 %
		2003	26	69,0 %

Tableau A-36 : Comparer, ranger des nombres entiers ou décimaux

Tâche	Evaluation	Année	Item	TR
Ecris un nombre compris entre 73 et 76	EN 6 ^e	1989	35	97,5 %
Ecris un nombre compris entre 82 et 87	EN 6 ^e	1990	38	97,1 %
Ecris un nombre compris entre 64 et 68	EN 6 ^e	1991	42	95,8 %
Ecris un nombre compris entre 38 987 et 38 887	EN 6 ^e	1992	35	68,3 %
Ecris un nombre compris entre 73,34 et 73,81	EN 6 ^e	1989	36	95,0 %
Ecris un nombre compris entre 82,47 et 82,68	EN 6 ^e	1990	39	91,8 %
Ecris un nombre compris entre 64,2 et 64,47	EN 6 ^e	1991	43	83,7 %
Ecris un nombre compris entre 7,36 et 7,4	EN 6 ^e	1993	34	71,1 %
		1996	42	69,9 %
		2000	79	76,0 %
		2004	79	76,8 %
Ecris un nombre compris entre 82 et 83	EN 6 ^e	1992	37	74,9 %
Ecris un nombre compris entre 51 et 52	EN 6 ^e	1993	35	84,7 %
		1996	43	81,6 %
		2000	80	79,6 %
		2004	78	82,5 %
Ecris un nombre compris entre 8,27 et 8,3	EN 6 ^e	1992	36	68,6 %
Ecris un nombre compris entre 73,1 et 73,2	EN 6 ^e	1989	37	64,2 %
Ecris un nombre compris entre 82,5 et 82,6	EN 6 ^e	1990	40	64,8 %
Ecris un nombre compris entre 64,6 et 64,7	EN 6 ^e	1991	44	66,9 %
Ecris un nombre compris entre 12,5 et 12,6	EN 6 ^e	1996	44	65,3 %
		2000	81	70,8 %
		2004	80	69,6 %

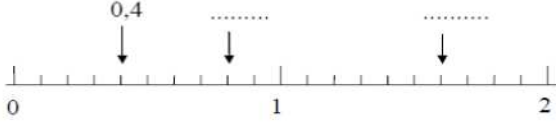

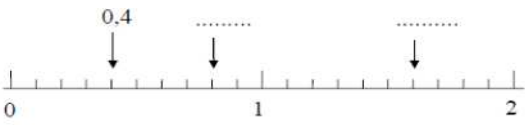
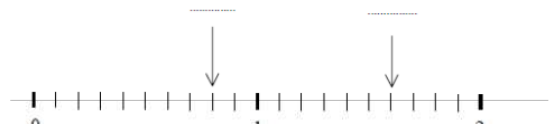
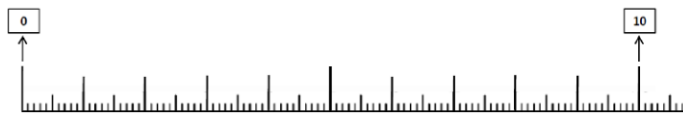
Tableau A-37 : Encadrer un nombre décimal par deux entiers consécutifs

Tâche	Evaluation	Année	Item	TR
Encadre 895,53 par deux entiers consécutifs	EN 6 ^e	2005	88	36,5 %
		2008	88	34,5 %
Encadre 385/10 par deux entiers consécutifs	EN 6 ^e	2005	89	20,2 %
		2008	89	18,3 %
Encadre $12 + 5/100$ par deux entiers consécutifs	EN 6 ^e	2005	90	23,4 %
		2008	90	22,7 %
Pour chacun des nombres décimaux, écris le nombre entier qui le précède et le nombre entier qui le suit : ... < 505,14 < ... ; ... < 60,2 < ...	EN CM2	2010	72	43,0 %

Tableau A-38 : Passer d'une écriture fractionnaire d'un nombre décimal à son écriture décimale et réciproquement

Tâche	Evaluation	Année	Item	TR
Parmi les fractions ci-dessous, entoure celle qui est égale à 180,47	EN 6 ^e	1999	44	49,8 %
		2000	48	55,1 %
Ecrire trois dixièmes sous la forme d'un nombre à virgule	EN 6 ^e	2002	16	67,6 %
		2003	17	57,5 %
Ecrire trois dixièmes sous la forme d'une fraction	EN 6 ^e	2002	17	81,8 %
		2003	18	80,2 %
Parmi les fractions ci-dessous, entoure celle qui est égale à 80,4.	EN 6 ^e	2004	43	55,6 %
Entoure la fraction égale à 80,4	EN 6 ^e	2005	39	50,9 %
		2008	39	48,9 %
Parmi les écritures ci-dessous, entoure celle qui est égale à $96 + \frac{2}{100}$	EN 6 ^e	2005	41	57,8 %
		2008	41	54,5 %
Parmi les nombres décimaux ci-dessous, entoure celui qui est égal à la fraction $\frac{720}{100}$	EN 6 ^e	1999	45	35,4 %
Parmi les nombres décimaux ci-dessous, entoure celui qui est égal à la fraction $\frac{724}{100}$	EN 6 ^e	2000	49	43,1 %
		2004	44	45,7 %
Entoure le nombre égal à la fraction $\frac{724}{100}$	EN 6 ^e	2005	80	51,5 %
		2008	80	49,8 %
Parmi ces quatre nombres, deux sont égaux. Entoure-les. (0,25 ; 0,4 ; 1,4 ; $\frac{1}{4}$)	EN 6 ^e	2005	101	25,6 %
		2008	101	26,9 %
Entoure la fraction égale à 0,38	EN CM2	2010	66	42,1 %
Entoure l'écriture décimale égale à $\frac{2}{10}$	EN CM2	2010	67	56,0 %

Tableau A-39 : Repérer, placer des nombres décimaux sur une droite graduée

Tâche	Evaluation	Année	Item	TR
<p>Sur la graduation ci-dessous à quels nombres correspondent les flèches ? Ecris tes réponses au-dessus des flèches.</p>  <p>(0,8)</p>	EN 6 ^e	1994*	29	63,9 %
	EN 6 ^e	1998	14	92,2 %
	Avant les vacances	1999	14	95,5 %
	Après les vacances	1999	14	92,0 %
	EN 6 ^e	2001	8	90,4 %
<p>Indique les nombres repérés par les flèches dans la graduation suivante :</p>  <p>(0,8)</p>	EN 6 ^e	1999	80	71,1 %
	EN 6 ^e	2000	85	70,8 %
	EN 6 ^e	2004	84	60,5 %
<p>Sur la graduation ci-dessous à quels nombres correspondent les flèches ? Ecris tes réponses au-dessus des flèches.</p>  <p>(1,6)</p>	EN 6 ^e	1994*	30	74,6 %
	EN 6 ^e	1998	15	75,7 %
	Avant les vacances	1999	15	82,2 %
	Après les vacances	1999	15	75,5 %
	EN 6 ^e	2001	9	70,7 %
<p>Indique les nombres repérés par les flèches dans la graduation suivante :</p>  <p>(1,6)</p>	EN 6 ^e	1999	81	65,7 %
	EN 6 ^e	2000	86	67,1 %
	EN 6 ^e	2004	85	54,9 %
<p></p> <p>Place sur la droite graduée ci-dessus les cinq nombres suivants et indique exactement la graduation correspondante avec une flèche : 2,6 – 1 – 6,2 – 8,9 – 0,5</p>	EN CM2	2010	73**	82,2 %

* : en 1994, la graduation était verticale.

** : au moins quatre des cinq nombres sont placés correctement.

Annexe B. Tableaux du Chapitre 4

Liste des tableaux de l'Annexe B

<i>Tableau B-1 : Tâches réussies par au moins la moitié des élèves des groupes inter-quartiles</i>	<i>513</i>
<i>Tableau B-2 : Taux de réussite par item aux tests de septembre 2010 et septembre 2011 sur l'ensemble des élèves étudiés (Source : MEN-DEPP)</i>	<i>514</i>

Tableau B-1 : Tâches réussies par au moins la moitié des élèves des groupes inter-quartiles

Groupe 1	Groupe 2	Groupe 3	Groupe 4	Hors groupe 4
$7 + 13 + 24$	$154,8 + 36,57$ (opération posée)	Problème additif sur les prix (deux étapes)	Le tiers de 60	$4,28 \times 3,5$
$11 + 18 + 9$	Programme de calcul (nombres entiers)	$138,85 - 49,2$ (opération posée)	$7,14 \times 100$	$62 \times 0,5$
$3\ 600 + 1\ 400$	Ecriture décimale de $\frac{3}{10}$	39×57 (opération posée)	27×20	Deux tiers de 12
$37 + 99$	Le tiers de 60 km	$544 : 17$ (opération posée)	$276 : 8$ (opération posée)	Problème additif (nombres entiers mais « faux précurseur »)
$65 - 30$	$24,3 \times 6$ (opération posée)	Périmètre d'un rectangle	Problème relevant de la proportionnalité	Problème multiplicatif (division euclidienne)
Problème additif (nombres entiers)		$5,2 + 13 + 2,8$	Abscisse entière d'un point	
Problème additif (calcul de durée)			$4,6 \times 3$	
			Ecriture fractionnaire de 0,38	
			$128 : 4$	
			$38 - 1,5$	
			$3,72 \times 1\ 000$	
			Ecriture décimale de $\frac{1}{4}$	
			$7,38 : 6$ (opération posée)	
			Problème multiplicatif (quotient décimal)	
			$67 : 100$	
			$16,2 : 10$	
			Deux tiers de 12 kg	
			Abscisse fractionnaire d'un point	
			Aire d'un rectangle	
			$276 : 8$	

Tableau B-2 : Taux de réussite par item aux tests de septembre 2010 et septembre 2011 sur l'ensemble des élèves étudiés

Partie 1	ITEMS	Test 1 de septembre 2010 (2 276 élèves)				Test 1 de septembre 2011 (3 060 élèves)				Eléments de référence éventuels	
		R _{bis}	Réponse correcte	Réponse incorrecte	Non réponse	R _{bis}	Réponse correcte	Réponse incorrecte	Non réponse	Niveau de scolarité	Réponse correcte
Calculs en ligne rapide	C1MCM010101	x	x	x	x	0,20	87,1	12,8	0,1	Fin de 6 ^e 2008	89,5
	C1MCM010102	x	x	x	x	0,21	83,3	15,7	1,0	Fin de 6 ^e 2008	83,3
	C1MCM010103	x	x	x	x	0,17	82,8	16,3	0,9	EN 6e 2005	63,9
	C1MCM010104	x	x	x	x	0,22	86,4	13,4	0,2	Fin de 6 ^e 2008	86,3
	C1MCM010105	x	x	x	x	0,23	87,2	12,0	0,8	En 6e 2005	57,8
	C1MCM010106	x	x	x	x	0,52	41,2	51,6	7,1	Fin de 6 ^e 2008	60,5
	C1MCM010107	x	x	x	x	0,54	29,8	58,7	11,6	Fin de 6 ^e 2008	52,0
	C1MCM010108	x	x	x	x	0,47	38,2	49,5	12,4	Fin de 6 ^e 2008	60,1
	C1MCM010109	x	x	x	x	0,49	34,6	45,7	19,7	Création	XXXX
	C1MCM010110	x	x	x	x	0,48	35,2	23,2	41,6	Fin de 6 ^e 2008	49,4
	C1MCM010111	x	x	x	x	0,40	17,5	45,0	37,5	Fin de 6 ^e 2008	28,8
Opérations posées	C1MCO010101	0,24	75,3	24,6	0,1	0,26	70,3	28,9	0,8	CM2 2010	66,9
	C1MCO020101	0,32	57,7	41,3	1,0	0,34	52,9	45,1	2,0	CM2 2010	51,6
	C1MCO030101	0,26	51,8	46,2	2,0	0,31	48,7	50,3	1,0	CM2 2010	58,3
	C1MCO040101	0,26	61,4	36,2	2,4	0,29	56,4	40,8	2,8	CM2 2010	59,3
	C1MCO050101	0,36	55,4	29,2	15,4	0,43	47,1	44,5	8,4	CM2 2010	50,4
	C1MCO060101	0,39	17,2	69,8	13,0	0,45	20,7	66,5	12,8	CM2 2010	34,1
	C1MCO070101	0,32	20,0	69,1	10,9	0,36	19,4	66,0	14,6	EN 6e 1990	53,6
	C1MCO080101	0,42	38,0	32,0	30,0	0,44	33,9	37,1	29,1	Création	XXXX
Multiplication et division par 10 ; 100 ; 1 000	C1MCO090101	0,49	37,3	53,1	9,6	0,46	37,4	56,8	5,8	Fin de CM2 2007	64,5
	C1MCO090201	0,54	29,8	58,5	11,6	0,53	29,8	62,3	7,9	EN 6e 1990	63,4
	C1MCO090301	0,45	31,8	47,2	21	0,46	28,5	55,0	16,5	EN 6e 1990	53,9
	C1MCO090401	0,46	26,8	47,3	25,9	0,50	27,8	48,4	23,8	Fin de CM2 2007	55,4
Fraction d'un nombre	C1MCO100101	0,50	36,3	41,7	22,0	0,51	38,1	46,1	15,8	Création	XXXX
	C1MCO100201	0,44	10,9	62,9	26,2	0,44	14,3	65,8	19,9	Fin de 3 ^e 2007	52,0*

Partie 2	ITEMS	Test 1 de septembre 2010 (2 276 élèves)				Test 1 de septembre 2011 (3 060 élèves)				Eléments de référence éventuels	
		R_{bis}	Réponse correcte	Réponse incorrecte	Non réponse	R_{bis}	Réponse correcte	Réponse incorrecte	Non réponse	Niveau de scolarité	Réponse correcte
Changement d'écriture d'un nombre décimal	C1MNN010101	0,38	65,4	33,9	0,7	0,36	64,0	35,4	0,6	CM2 2010	56,0
	C1MNN020101	0,4	39,4	59,9	0,7	0,40	38,7	60,6	0,7	CM2 2010	42,1
	C1MNN030101	0,52	28,7	69,3	2,0	0,54	27,3	71,0	1,7	EN 6e 2005	25,6
Placement d'un nombre sur la droite graduée	C1MNA010101	0,46	36,1	61,7	2,2	0,48	35,8	62,2	2,0	Fin de 3° 2007	70,2
	C1MNA020101	0,33	30,5	66,0	3,5	0,37	30,4	66,2	3,4	Fin de 3° 2007	73,1
Résolution de problèmes	C1MCR010101	0,07	64,8	32,3	2,9	0,12	63,1	34,1	2,8	Evaluation Créteil	
	C1MCR020101	0,22	86,0	12,8	1,2	0,24	83,7	14,8	1,5	Création	
	C1MCR030101	-0,09	23,4	70,1	6,5	-0,08	21,7	71,3	7,0	Création	
	C1MCR040101	0,27	21,4	72,1	6,5	0,26	20,5	71,3	8,2	Création	
	C1MCR050101	0,37	67,3	29,2	3,5	0,38	66,3	29,5	4,2	Fin de 3° 2007	85,9
	C1MCR060101	0,42	53,2	44,2	2,6	0,43	51,8	44,5	3,6	Création	
	C1MCR070101	0,33	40,4	49,9	2,7	0,36	41,6	47,1	11,3	Création	
	C1MCR080101	0,42	58,8	34,8	6,4	0,45	60,9	31,8	7,3	Fin de 3° 2007	86,2
	C1MCR090101	0,26	33,3	59,9	6,8	0,32	32,6	59,6	7,8	Création	
	C1MCR100101	0,25	35,3	56,6	8,1	0,33	37,1	53,6	9,4	CM2 2010	24,2
	C1MCR110101	0,33	48,9	43,4	7,7	0,35	47,8	45,1	7,1	Evaluation Créteil	
C1MCR110102	0,19	40,3	38,9	20,8	0,15	38,9	39,4	21,7	Création		

Annexe C. Tableaux et graphiques du Chapitre 6

<i>Tableau C-1 : Taux de réussite par item aux tests de mai 2011 et de mai 2012 (dans l'ordre des cahiers des élèves) Source : MEN-DEPP</i>	518
<i>Tableau C-2 : Taux de réussite par item aux tests de mai 2011 et de mai 2012 (par type de tâches)</i>	520
<i>Tableau C-3 : Taux de réussite par item aux tests de mai 2011 et de mai 2012 (par ordre décroissant)</i>	522
<i>Tableau C-4 : Taux de réussite par item aux tests de mai 2012 (Source : MEN-DEPP)</i> ..	526
<i>Tableau C-5 : Comparaison des taux de réussite par item au test de mai 2012 Elèves d'enseignants de collèges expérimentateurs / Elèves d'enseignants de collèges témoins</i>	528
<i>Tableau C-6 : Taux de réussite par item aux items communs de septembre 2011 et mai 2012 selon la catégorie es enseignants (Source : MEN-DEPP) (A : associés ; C : correspondants ; I : involontaires ; T : témoins)</i>	532
<i>Graphique 6-18 : Taux de réussite par item au test 1 de septembre 2011 (Partie 1)</i>	524
<i>Graphique 6-19 : Taux de réussite par item aux tests de mai 2011 et de mai 2012 (Partie 1)</i>	525

Tableau C-1 : Taux de réussite par item aux tests de mai 2011 et de mai 2012 (dans l'ordre des cahiers des élèves)

Partie 1	Test 2 de mai 2011 (2 276 élèves)			
	ITEMS	Rbis	Réponse correcte	Réponse incorrecte
C1MCO110101	0,40	42,9	55,5	1,6
C1MCO120101	0,35	36,4	61,2	2,4
C1MCO130101	0,40	55,0	35,7	9,3
C1MCO140101	0,46	27,2	59,5	13,5
C1MCO090501	0,45	67,8	28,8	3,4
C1MCO090801	0,47	56,2	32,2	11,6
C1MCO090601	0,51	55,5	39,4	5,1
C1MCO090701	0,44	58,9	30,0	11,1
C1MCO090901	0,36	46,0	41,4	12,6
C1MCO100101	0,53	55,8	35,9	8,3
C1MCO100301	0,51	29,1	56,2	14,7
<i>C1MCM010101</i>	<i>0,17</i>	89,8	9,6	0,6
C1MCM010102	0,25	84,7	14,1	1,2
C1MCM010103	0,20	86,6	11,8	1,6
C1MCM010104	0,20	88,6	10,5	0,9
C1MCM010105	0,21	87,6	11,1	1,3
C1MCM010106	0,49	57,1	37,1	5,8
C1MCM010107	0,56	47,1	42,9	10,0
C1MCM010108	0,47	52,9	37,2	9,9
C1MCM010109	0,46	49,0	37,6	13,4
C1MCM010110	0,45	50,1	20,7	29,2
C1MCM010111	0,44	29,1	39,3	31,6
C1MCM010112	0,33	11,0	30,0	59,0
C1MCM010113	0,45	31,2	41,8	27,0

Partie 1	Test 2 de mai 2012 (3 060 élèves)			
	ITEMS	Rbis	Réponse correcte	Réponse incorrecte
C1MCM010114	0,30	82,5	17,1	0,4
C1MCM010115	0,30	33,1	63,0	3,9
C1MCM010107	0,53	43,5	52,4	4,2
C1MCM010106	0,48	60,3	36,1	3,5
C1MCM010111	0,48	34,6	44,9	20,5
C1MCM010116	0,31	15,4	70,3	14,3
C1MCM010117	0,45	23,9	51,4	24,7
C1MCM010118	0,42	10,5	48,7	40,8
C1MCM010119	0,38	12,8	45,7	41,5
C1MCM010120	0,37	6,7	30,7	62,6
C1MCO091001	0,50	46,6	48,0	5,4
C1MCO091101	0,50	54,7	28,3	17,0
C1MCO090801	0,51	55,9	25,7	18,4
C1MCM010113	0,43	34,8	51,9	13,3
C1MCO091201	0,39	39,3	46,3	14,4
C1MCO100401	0,52	34,2	49,8	16,1
C1MCO100101	0,52	48,9	37,7	13,4
C1MCO010101	0,25	74,2	24,7	1,1
C1MCO020101	0,36	61,5	35,4	3,1
C1MCO150101	0,34	46,6	49,4	4,0
C1MCO120101	0,34	32,6	61,2	6,2

Partie 2	Test 2 de mai 2011 (2 276 élèves)			
	ITEMS	Rbis	Réponse correcte	Réponse incorrecte
C1MNN180101	0,37	37,2	61,1	1,7
C1MNN190101	0,40	56,6	42,0	1,4
C1MNN200101	0,46	55,8	42,1	2,1
C1MNN030101	0,61	48,6	49,5	1,9
C1MNA030101	0,22	36,8	61,6	1,6
C1MNA030102	0,11	58,1	39,2	2,7
C1MNN210101	0,33	75,3	23,5	1,2
C1MNN210102	0,40	69,9	29,1	1,0
C1MNN210103	0,31	34,9	64,0	1,1
C1MNN220101	0,30	21,6	77,2	1,2
C1MNN220102	0,38	50,2	47,4	2,4
C1MNN220103	0,37	30,1	67,4	2,5
C1MNN300101	0,21	31,8	66,7	1,5
C1MCM020101	0,25	59,1	39,0	1,9
C1MCR050201	0,29	66,6	31,2	2,2
C1MCR080101	0,49	70,1	29,0	0,9
C1MCR120101	0,21	26,7	70,6	2,7
C1MNM010101	0,37	61,9	36,6	1,5
C1MNM020101	0,31	56,3	40,2	3,5
C1MCR130101	0,33	23,0	73,0	4,0
C1MCR140101	0,12	82,9	16,5	0,7
C1MCM020201	0,33	56,6	38,9	4,5
C1MNM030101	0,36	65,6	32,3	2,1
C1MCR150101	0,45	39,3	58,1	2,6
C1MCR160101	0,37	43,0	54,7	2,3
C1MCP010101	0,31	79,8	16,1	4,1
C1MCP010102	0,35	48,5	46,0	5,5
C1MCP010103	0,15	58,5	35,9	5,6
C1MCP010104	0,28	58,4	34,8	6,8

Partie 2	Test 2 de mai 2012 (3 060 élèves)			
	ITEMS	Rbis	Réponse correcte	Réponse incorrecte
C1MNN030101	0,59	46,4	52,3	1,3
C1MNN220101	0,31	36,3	60,7	3,0
C1MNN230101	0,49	52,2	39,8	8,0
C1MNN240101	0,43	51,3	46,1	2,6
C1MNN250101	0,02	50,7	46,0	3,4
C1MNN260101	0,42	56,7	41,8	1,5
C1MNN270101	0,37	49,8	48,1	2,2
C1MNN280101	-0,01	23,2	70,6	6,2
C1MNN290101	0,14	77,7	18,6	3,7
C1MNM010101	0,36	66,6	32,4	1,1
C1MNM040101	0,43	47,5	46,6	6,0
C1MCR080101	0,44	64,4	33,1	2,4
C1MCR170101	0,42	62,3	33,5	4,2
C1MCR180101	0,31	66,0	31,5	2,5
C1MCR190101	0,36	46,5	49,5	4,0
C1MCR070101	0,38	49,2	43,9	6,9
C1MCR200101	0,49	43,2	46,7	10,1
C1MCR210101	0,22	10,7	81,5	7,8
C1MCR220101	0,22	13,2	75,8	11,0

Tableau C-2 : Taux de réussite par item aux tests de mai 2011 et de mai 2012 (par type de tâches)

Partie 2	ITEMS	Test 2 de mai 2011 (2 276 élèves)				Test 2 de mai 2012 (3 060 élèves)				
		Rbis	Réponse correcte	Réponse incorrecte	Non réponse	ITEMS	Rbis	Réponse correcte	Réponse incorrecte	Non réponse
Calculs en ligne rapides	C1MCM010101	0,17	89,8	9,6	0,6	C1MCM010114	0,30	82,5	17,1	0,4
	C1MCM010102	0,25	84,7	14,1	1,2	C1MCM010115	0,30	33,1	63,0	3,9
	C1MCM010103	0,20	86,6	11,8	1,6	C1MCM010107	0,53	43,5	52,4	4,2
	C1MCM010104	0,20	88,6	10,5	0,9	C1MCM010106	0,48	60,3	36,1	3,5
	C1MCM010105	0,21	87,6	11,1	1,3	C1MCM010111	0,48	34,6	44,9	20,5
	C1MCM010106	0,49	57,1	37,1	5,8	C1MCM010116	0,31	15,4	70,3	14,3
	C1MCM010107	0,56	47,1	42,9	10,0	C1MCM010117	0,45	23,9	51,4	24,7
	C1MCM010108	0,47	52,9	37,2	9,9	C1MCM010118	0,42	10,5	48,7	40,8
	C1MCM010109	0,46	49,0	37,6	13,4	C1MCM010119	0,38	12,8	45,7	41,5
	C1MCM010110	0,45	50,1	20,7	29,2	C1MCM010120	0,37	6,7	30,7	62,6
	C1MCM010111	0,44	29,1	39,3	31,6					
	C1MCM010112	0,33	11,0	30,0	59,0					
Multiplication et division par 10 ; 100 ; 1 000 (et 0,1)	C1MCO090501	0,45	67,8	28,8	3,4	C1MCO091001	0,50	46,6	48,0	5,4
	C1MCO090801	0,47	56,2	32,2	11,6	C1MCO091101	0,50	54,7	28,3	17,0
	C1MCO090601	0,51	55,5	39,4	5,1	C1MCO090801	0,51	55,9	25,7	18,4
	C1MCO090701	0,44	58,9	30,0	11,1	C1MCM010113	0,43	34,8	51,9	13,3
	C1MCM010113	0,45	31,2	41,8	27,0	C1MCO091201	0,39	39,3	46,3	14,4
	C1MCO090901	0,36	46,0	41,4	12,6					
Opérations posées	C1MCO110101	0,40	42,9	55,5	1,6	C1MCO010101	0,25	74,2	24,7	1,1
	C1MCO120101	0,35	36,4	61,2	2,4	C1MCO020101	0,36	61,5	35,4	3,1
	C1MCO130101	0,40	55,0	35,7	9,3	C1MCO150101	0,34	46,6	49,4	4,0
	C1MCO140101	0,46	27,2	59,5	13,5	C1MCO120101	0,34	32,6	61,2	6,2
Fraction d'un nombre	C1MCO100101	0,53	55,8	35,9	8,3	C1MCO100101	0,52	48,9	37,7	13,4
	C1MCO100301	0,51	29,1	56,2	14,7	C1MCO100401	0,52	34,2	49,8	16,1

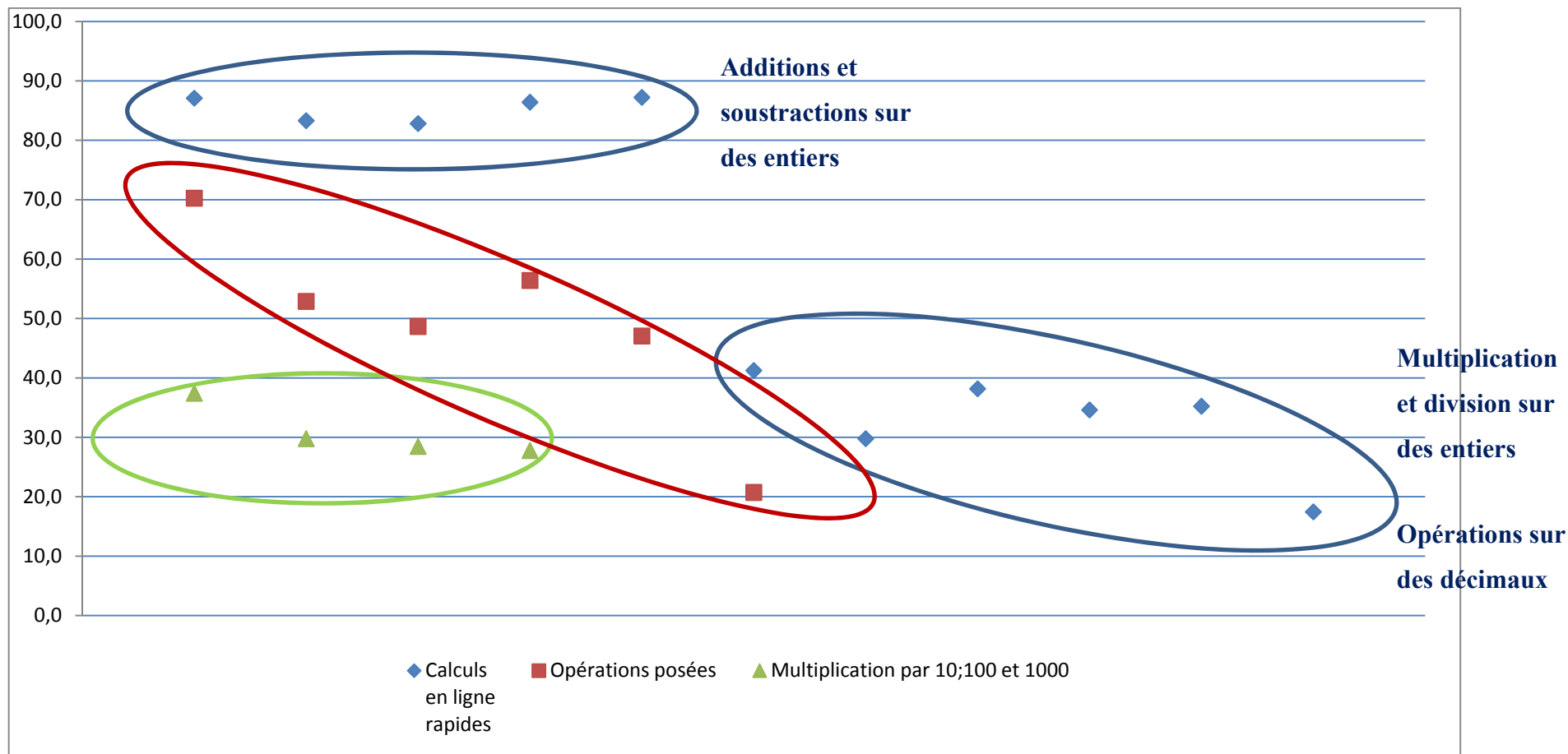
Partie 2	ITEMS	Test 2 de mai 2011 (2 276 élèves)				ITEMS	Test 2 de mai 2012 (3 060 élèves)			
		Rbis	Réponse correcte	Réponse incorrecte	Non réponse		Rbis	Réponse correcte	Réponse incorrecte	Non réponse
Ecritures et comparaison de nombres décimaux	C1MNN180101	0,37	37,2	61,1	1,7	C1MNN220101	0,31	36,3	60,7	3,0
	C1MNN190101	0,40	56,6	42,0	1,4	C1MNN230101	0,49	52,2	39,8	8,0
	C1MNN200101	0,46	55,8	42,1	2,1					
	C1MNN030101	0,61	48,6	49,5	1,9	C1MNN030101	0,59	46,4	52,3	1,3
	C1MNA030101	0,22	36,8	61,6	1,6	C1MNN240101	0,43	51,3	46,1	2,6
	C1MNA030102	0,11	58,1	39,2	2,7	C1MNN250101	0,02	50,7	46,0	3,4
	C1MNN210101	0,33	75,3	23,5	1,2	C1MNN260101	0,42	56,7	41,8	1,5
	C1MNN210102	0,40	69,9	29,1	1,0	C1MNN270101	0,37	49,8	48,1	2,2
	C1MNN210103	0,31	34,9	64,0	1,1	C1MNN280101	-0,01	23,2	70,6	6,2
	C1MNN220101	0,30	21,6	77,2	1,2	C1MNN290101	0,14	77,7	18,6	3,7
	C1MNN220102	0,38	50,2	47,4	2,4					
	C1MNN220103	0,37	30,1	67,4	2,5					
	C1MNN300101	0,21	31,8	66,7	1,5					
Ordre de grandeur d'un résultat	C1MCM020101	0,25	59,1	39,0	1,9					
	C1MCM020201	0,33	56,6	38,9	4,5					
Ecriture de la mesure d'une grandeur	C1MNM010101	0,37	61,9	36,6	1,5	C1MNM010101	0,36	66,6	32,4	1,1
	C1MNM020101	0,31	56,3	40,2	3,5	C1MNM040101	0,43	47,5	46,6	6,0
	C1MNM030101	0,36	65,6	32,3	2,1					
Résolution de problèmes	C1MCR080101	0,49	70,1	29,0	0,9	C1MCR080101	0,44	64,4	33,1	2,4
	C1MCR050201	0,29	66,6	31,2	2,2	C1MCR190101	0,36	46,5	49,5	4,0
	C1MCR130101	0,33	23,0	73,0	4,0	C1MCR210101	0,22	10,7	81,5	7,8
	C1MCR150101	0,45	39,3	58,1	2,6	C1MCR220101	0,22	13,2	75,8	11,0
	C1MCR140101	0,12	82,9	16,5	0,7	C1MCR180101	0,31	66,0	31,5	2,5
	C1MCR120101	0,21	26,7	70,6	2,7	C1MCR070101	0,38	49,2	43,9	6,9
	C1MCR160101	0,37	43,0	54,7	2,3	C1MCR170101	0,42	62,3	33,5	4,2
Application d'un pourcentage	C1MCP010101	0,31	79,8	16,1	4,1					
	C1MCP010102	0,35	48,5	46,0	5,5	C1MCR200101	0,49	43,2	46,7	10,1
	C1MCP010103	0,15	58,5	35,9	5,6					
	C1MCP010104	0,28	58,4	34,8	6,8					

**Tableau C-3 : Taux de réussite par item aux tests de mai 2011 et de mai 2012
(par ordre décroissant)**

	ITEMS	Test 2 de mai 2011 (2 276 élèves)				ITEMS	Test 2 de mai 2012 (3 060 élèves)			
		Rbis	Réponse correcte	Réponse incorrecte	Non réponse		Rbis	Réponse correcte	Réponse incorrecte	Non réponse
Taux de réussite supérieurs à 75%	C1MCM010101	0,17	89,8	9,6	0,6	C1MCM010114	0,30	82,5	17,1	0,4
	C1MCM010104	0,20	88,6	10,5	0,9	C1MNN290101	0,14	77,7	18,6	3,7
	C1MCM010105	0,21	87,6	11,1	1,3					
	C1MCM010103	0,20	86,6	11,8	1,6					
	C1MCM010102	0,25	84,7	14,1	1,2					
	C1MCR140101	0,12	82,9	16,5	0,7					
	C1MCP010101	0,31	79,8	16,1	4,1					
Taux de réussite compris entre 60% et 75 %	C1MNN210101	0,33	75,3	23,5	1,2					
	C1MCR080101	0,49	70,1	29,0	0,9	C1MCO010101	0,25	74,2	24,7	1,1
	C1MNN210102	0,40	69,9	29,1	1,0	C1MNN010101	0,36	66,6	32,4	1,1
	C1MCO090501	0,45	67,8	28,8	3,4	C1MCR180101	0,31	66,0	31,5	2,5
	C1MCR050201	0,29	66,6	31,2	2,2	C1MCR080101	0,44	64,4	33,1	2,4
	C1MNN030101	0,36	65,6	32,3	2,1	C1MCR170101	0,42	62,3	33,5	4,2
	C1MNN010101	0,37	61,9	36,6	1,5	C1MCO020101	0,36	61,5	35,4	3,1
Taux de réussite compris entre 50% et 60 %						C1MCM010106	0,48	60,3	36,1	3,5
	C1MCM020101	0,25	59,1	39,0	1,9	C1MNN260101	0,42	56,7	41,8	1,5
	C1MCO090701	0,44	58,9	30,0	11,1	C1MCO090801	0,51	55,9	25,7	18,4
	C1MCP010103	0,15	58,5	35,9	5,6	C1MCO091101	0,50	54,7	28,3	17,0
	C1MCP010104	0,28	58,4	34,8	6,8	C1MNN230101	0,49	52,2	39,8	8,0
	C1MNA030102	0,11	58,1	39,2	2,7	C1MNN240101	0,43	51,3	46,1	2,6
	C1MCM010106	0,49	57,1	37,1	5,8	C1MNN250101	0,02	50,7	46,0	3,4
	C1MNN190101	0,40	56,6	42,0	1,4					
	C1MCM020201	0,33	56,6	38,9	4,5					
	C1MNN020101	0,31	56,3	40,2	3,5					
	C1MCO090801	0,47	56,2	32,2	11,6					
	C1MCO100101	0,53	55,8	35,9	8,3					
	C1MNN200101	0,46	55,8	42,1	2,1					
	C1MCO090601	0,51	55,5	39,4	5,1					
	C1MCO130101	0,40	55,0	35,7	9,3					
C1MCM010108	0,47	52,9	37,2	9,9						
C1MNN220102	0,38	50,2	47,4	2,4						
C1MCM010110	0,45	50,1	20,7	29,2						

	ITEMS	Test 2 de mai 2011 (2 276 élèves)				ITEMS	Test 2 de mai 2012 (3 060 élèves)			
		Rbis	Réponse correcte	Réponse incorrecte	Non réponse		Rbis	Réponse correcte	Réponse incorrecte	Non réponse
Taux de réussite compris entre 40% et 50 %	C1MCM010109	0,46	49,0	37,6	13,4	C1MNN270101	0,37	49,8	48,1	2,2
	C1MNN030101	0,61	48,6	49,5	1,9	C1MCR070101	0,38	49,2	43,9	6,9
	C1MCP010102	0,35	48,5	46,0	5,5	C1MCO100101	0,52	48,9	37,7	13,4
	C1MCM010107	0,56	47,1	42,9	10,0	C1MNM040101	0,43	47,5	46,6	6,0
	C1MCO090901	0,36	46,0	41,4	12,6	C1MCO091001	0,50	46,6	48,0	5,4
	C1MCR160101	0,37	43,0	54,7	2,3	C1MCO150101	0,34	46,6	49,4	4,0
	C1MCO110101	0,40	42,9	55,5	1,6	C1MCR190101	0,36	46,5	49,5	4,0
						C1MNN030101	0,59	46,4	52,3	1,3
						C1MCM010107	0,53	43,5	52,4	4,2
					C1MCR200101	0,49	43,2	46,7	10,1	
Taux de réussite compris entre 30% et 40 %	C1MCR150101	0,45	39,3	58,1	2,6	C1MCO091201	0,39	39,3	46,3	14,4
	C1MNN180101	0,37	37,2	61,1	1,7	C1MNN220101	0,31	36,3	60,7	3,0
	C1MNA030101	0,22	36,8	61,6	1,6	C1MCM010113	0,43	34,8	51,9	13,3
	C1MCO120101	0,35	36,4	61,2	2,4	C1MCM010111	0,48	34,6	44,9	20,5
	C1MNN210103	0,31	34,9	64,0	1,1	C1MCO100401	0,52	34,2	49,8	16,1
	C1MNN300101	0,21	31,8	66,7	1,5	C1MCM010115	0,30	33,1	63,0	3,9
	C1MCM010113	0,45	31,2	41,8	27,0	C1MCO120101	0,34	32,6	61,2	6,2
	C1MNN220103	0,37	30,1	67,4	2,5					
Taux de réussite inférieurs à 30%	C1MCO100301	0,51	29,1	56,2	14,7	C1MCM010117	0,45	23,9	51,4	24,7
	C1MCM010111	0,44	29,1	39,3	31,6	C1MNN280101	-0,01	23,2	70,6	6,2
	C1MCO140101	0,46	27,2	59,5	13,5	C1MCM010116	0,31	15,4	70,3	14,3
	C1MCR120101	0,21	26,7	70,6	2,7	C1MCR220101	0,22	13,2	75,8	11,0
	C1MCR130101	0,33	23,0	73,0	4,0	C1MCM010119	0,38	12,8	45,7	41,5
	C1MNN220101	0,30	21,6	77,2	1,2	C1MCR210101	0,22	10,7	81,5	7,8
	C1MCM010112	0,33	11,0	30,0	59,0	C1MCM010118	0,42	10,5	48,7	40,8
						C1MCM010120	0,37	6,7	30,7	62,6

Graphique 6-18 : Taux de réussite par item au test 1 de septembre 2011 (Partie 1)



Graphique 6-19 : Taux de réussite par item aux tests de mai 2011 et de mai 2012 (Partie 1)

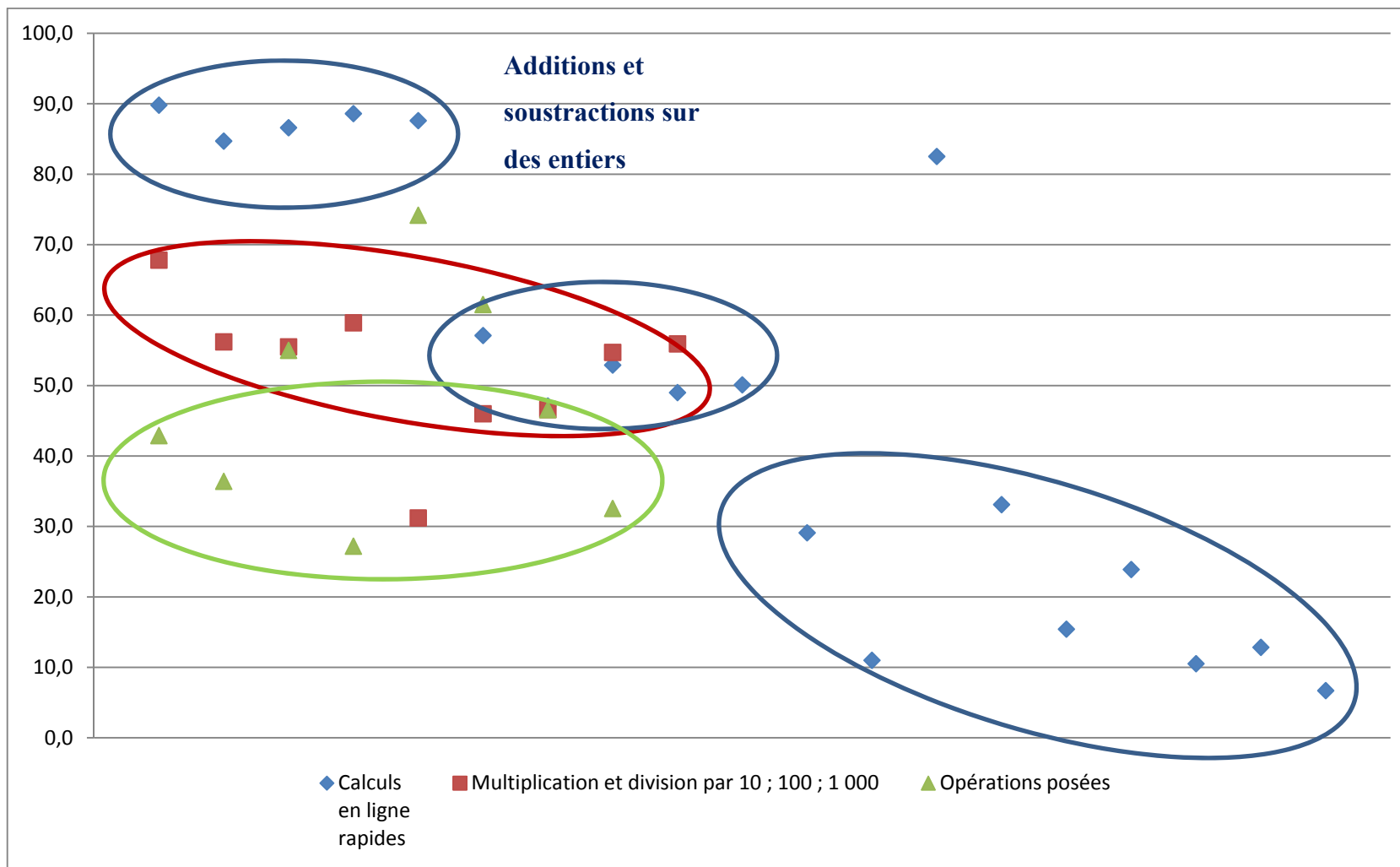


Tableau C-4 : Taux de réussite par item aux tests de mai 2012

Partie 1	Test 1 de mai 2012 (3 060 élèves)					Correspondants			Associés			Témoins			Involontaires		
	ITEMS	R _{bis}	Réponse correcte	Réponse incorrecte	Non réponse	RC	RI	NR	RC	RI	NR	RC	RI	NR	RC	RI	NR
Calculs en ligne rapide	C1MCM010114	0,30	82,5	17,1	0,4	82,9	16,8	0,3	81,7	17,9	0,5	84,5	15,1	0,4	82,2	16,8	0,3
	C1MCM010115	0,30	33,1	63,0	3,9	33,5	61,8	4,7	35,6	61,1	3,3	30,3	65,3	4,4	30,5	65,6	3,9
	C1MCM010107	0,53	43,5	52,4	4,2	46,5	48,9	4,6	43,2	53,2	3,7	44,5	51,0	4,6	40,8	55,0	4,3
	C1MCM010106	0,48	60,3	36,1	3,5	63,5	32,8	3,7	58,9	37,6	3,5	62,4	34,9	2,7	58,7	37,3	4,0
	C1MCM010111	0,48	34,6	44,9	20,5	36,0	43,5	20,5	37,8	43,8	18,4	33,6	48,5	17,9	28,9	45,4	25,7
	C1MCM010116	0,31	15,4	70,3	14,3	17,9	68,5	13,5	15,6	71,4	12,9	17,9	66,8	15,3	11,2	72,5	16,3
	C1MCM010117	0,45	23,9	51,4	24,7	25,4	51,8	22,8	25,1	51,8	23,1	26,3	49,6	24,1	18,8	51,7	29,6
	C1MCM010118	0,42	10,5	48,7	40,8	11,5	53,1	35,4	12,7	48,5	38,8	9,4	45,4	45,2	6,9	47,8	45,3
	C1MCM010119	0,38	12,8	45,7	41,5	14,6	48,9	36,6	13,6	46,8	39,6	17,4	41,4	41,2	6,9	44,3	48,8
	C1MCM010120	0,38	6,7	30,7	62,6	9,3	33,5	57,2	8,6	30,9	60,5	5,0	31,3	63,7	2,6	27,8	69,6
Multiplication et division par 10 ; 100 ; 1 000	C1MCO091001	0,50	46,6	48,0	5,4	45,5	48,6	5,9	48,7	47,0	4,3	49,8	45,2	5,0	41,7	51,4	6,9
	C1MCO091101	0,50	54,7	28,3	17,0	56,9	28,3	14,9	55,7	29,2	15,1	57,1	27,7	15,3	49,6	27,4	23,1
	C1MCO090801	0,51	55,9	25,7	18,4	59,6	24,7	15,7	55,1	26,8	18,1	60,7	23,5	15,8	50,8	26,1	23,1
	C1MCM010113	0,43	34,8	51,9	13,3	31,0	56,4	12,7	37,4	51,1	11,5	35,9	51,7	12,4	32,6	49,9	17,5
	C1MCO091201	0,39	39,3	46,3	14,4	37,4	49,2	13,4	42,8	44,6	12,6	39,7	47,7	12,6	34,5	46,0	19,5
Fraction d'un nombre	C1MCO100401	0,52	34,2	49,8	16,1	37,9	46,0	16,1	36,8	47,8	15,4	36,5	48,3	15,3	25,1	57,2	17,7
	C1MCO100101	0,52	48,9	37,7	13,4	53,3	33,3	13,4	49,1	38,8	12,0	46,4	40,7	13,0	46,8	37,3	15,9
Opérations posées	C1MCO010101	0,25	74,2	24,7	1,1	71,2	27,4	1,4	74,0	24,9	1,1	78,4	20,2	1,3	73,8	25,4	0,8
	C1MCO020101	0,36	61,5	35,4	3,1	60,1	36,6	3,4	62,2	35,2	2,6	61,8	34,2	4,0	61,3	35,6	3,0
	C1MCO150101	0,34	46,6	49,4	4,0	46,7	48,6	4,7	46,9	48,5	4,6	45,8	51,5	2,7	46,4	50,3	3,3
	C1MCO120101	0,34	32,6	61,2	6,2	32,7	60,6	6,8	33,2	60,0	6,8	34,4	60,3	5,3	30,1	64,4	5,5

Partie 2	Test 1 de mai 2012 (3 060 élèves)					Correspondants			Associés			Témoins			Involontaires		
	QCM	ITEMS	R _{bis}	Réponse correcte	Réponse incorrecte	Non réponse	RC	RI	NR	RC	RI	NR	RC	RI	NR	RC	RI
Changement d'écriture d'un nombre décimal	C1MNN030101	0,59	46,4	52,3	1,3	54,2	45,2	0,7	46,4	52,3	1,4	47,1	51,9	1,0	39,5	58,6	1,9
	C1MNN220101	0,31	36,3	60,7	3,0	38,6	59,9	1,5	39,2	57,4	3,4	34,7	62,6	2,7	30,8	65,5	3,7
	C1MNN230101	0,49	52,2	39,8	8,0	60,6	34,7	4,7	52,6	39,2	8,2	48,7	44,7	6,7	47,1	41,4	11,5
Encadrement	C1MNN240101	0,43	51,3	46,1	2,6	50,3	47,0	2,7	52,3	45,0	2,7	53,1	44,5	2,5	53,1	44,5	2,5
Ecriture d'un quotient	<i>C1MNN250101</i>	<i>0,02</i>	50,7	46,0	3,4	51,3	47,0	1,7	51,6	44,6	3,8	50,2	46,8	3,1	49,0	46,7	4,3
	C1MNN260101	0,42	56,7	41,8	1,5	56,7	41,8	1,5	56,9	41,7	1,4	57,8	41,0	1,2	55,7	42,4	1,9
	C1MNN270101	0,37	49,8	48,1	2,2	54,2	44,7	1,2	50,0	47,4	2,5	47,0	51,2	1,9	47,8	49,7	2,5
	<i>C1MNN280101</i>	<i>-0,01</i>	23,2	70,6	6,2	22,7	72,4	4,9	25,9	68,6	5,6	22,5	69,9	7,6	19,6	73,2	7,2
	C1MNN290101	0,14	77,7	18,6	3,7	78,9	18,6	2,5	77,1	19,1	3,9	75,4	20,0	4,6	79,6	16,6	3,9
Ecriture de la mesure d'une	C1MNM010101	0,36	66,6	32,4	1,1	68,4	31,0	0,7	65,2	33,3	1,5	68,7	30,0	1,3	65,9	33,7	0,4
	C1MNM040101	0,43	47,5	46,6	6,0	51,6	44,0	4,4	47,7	46,4	5,9	46,6	47,1	6,3	44,3	48,6	7,0
Résolution de problèmes	C1MCR080101	0,44	64,4	33,1	2,4	64,1	34,5	1,4	64,1	33,3	2,7	67,6	29,4	3,1	63,1	34,5	2,4
	C1MCR170101	0,42	62,3	33,5	4,2	63,1	34,0	2,9	62,0	32,7	5,3	64,1	31,9	4,0	60,8	35,8	3,5
	C1MCR180101	0,31	66,0	31,5	2,5	67,7	30,0	2,4	66,1	31,5	2,5	65,8	30,7	3,4	64,6	33,6	1,8
	C1MCR190101	0,36	46,5	49,5	4,0	50,3	46,5	3,2	47,1	48,6	4,3	47,0	48,9	4,2	42,1	53,9	4,0
	C1MCR070101	0,38	49,2	43,9	6,9	51,6	42,3	6,1	48,7	43,9	7,5	49,4	44,1	6,5	47,8	45,2	7,0
	C1MCR200101	0,49	43,2	46,7	10,1	43,3	48,6	8,1	43,9	46,6	9,5	44,9	42,9	12,2	40,6	48,6	11,3
	C1MCR210101	0,22	10,7	81,5	7,8	8,6	86,5	4,9	12,0	79,2	8,8	12,0	80,2	7,8	9,1	82,2	8,7
	C1MCR220101	0,22	13,2	75,8	11,0	14,2	76,3	9,5	11,8	76,7	11,6	14,5	75,8	9,7	14,0	74,0	12,0
	Alpha	0,885															

Tableau C-5 : Comparaison des taux de réussite par item au test de mai 2012
Elèves d'enseignants de collèges expérimentateurs / Elèves d'enseignants de collèges témoins

Partie 1

C1MCM010114	Expérimentateur		Témoin		Total
	N	%	N	%	
0	8	0,4	4	0,3	12
1	1487	82,1	103	83,2	2525
9	317	17,5	206	16,5	523
Total	1812	100,0	124	100,	3060

*p-value=0,6676***Partie 2**

C1MNN030101r_p 4	Expérimentateur		Témoin		Total
	N	%	N	%	
0	21	1,2	19	1,5	40
1	886	48,9	533	42,7	1419
9	905	49,9	696	55,8	1601
Total	1812	100,0	124	100,	3060

p-value=0,0030

C1MCM010115	Expérimentateur		Témoin		Total
	N	%	N	%	
0	68	3,8	51	4,1	119
1	633	34,9	380	30,5	1013
9	1111	61,3	817	65,5	1928
Total	1812	100,0	124	100,	3060

p-value=0,0347

C1MNN220101r	Expérimentateur		Témoin		Total
	N	%	N	%	
0	51	2,8	41	3,3	92
1	706	39,0	405	32,5	1111
9	1055	58,2	802	64,3	1857
Total	1812	100,0	124	100,	3060

p-value=0,0011

C1MCM010107_p 4	Expérimentateur		Témoin		Total
	N	%	N	%	
0	72	4,0	55	4,4	127
1	802	44,3	528	42,3	1330
9	938	51,8	665	53,3	1603
Total	1812	100,0	124	100,	3060

p-value=0,5198

C1MNN230101r	Expérimentateur		Témoin		Total
	N	%	N	%	
0	128	7,1	118	9,5	246
1	1000	55,2	596	47,8	1596
9	684	37,8	534	42,8	1218
Total	1812	100,0	124	100,	3060

p-value=0,0001

C1MCM010106_p 4	Expérimentateur		Témoin		Total
	N	%	N	%	
0	65	3,6	43	3,5	108
1	1094	60,4	752	60,3	1846
9	653	36,0	453	36,3	1106
Total	1812	100,0	124	100,	3060

p-value=0,9716

C1MNN240101r	Expérimentateur		Témoin		Total
	N	%	N	%	
0	49	2,7	29	2,3	78
1	936	51,7	634	50,8	1570
9	827	45,6	585	46,9	1412
Total	1812	100,0	124	100,	3060

p-value=0,6808

C1MCM010111_p 4	Expérimentateur		Témoin		Total
	N	%	N	%	
0	346	19,1	280	22,4	626
1	674	37,2	385	30,9	1059
9	792	43,7	583	46,7	1375
Total	1812	100,0	124	100,	3060

p-value=0,0009

C1MNN250101r	Expérimentateur		Témoin		Total
	N	%	N	%	
0	56	3,1	47	3,8	103
1	933	51,5	618	49,5	1551
9	823	45,4	583	46,7	1406
Total	1812	100,0	124	100,	3060

p-value=0,3989

C1MCM010116	Expérimentateur		Témoin		Total
	N	%	N	%	
0	238	13,1	198	15,9	436
1	297	16,4	175	14,0	472
9	1277	70,5	875	70,1	2152
Total	1812	100,0	124	100,	3060

p-value=0,0375

C1MNN260101r	Expérimentateur		Témoin		Total
	N	%	N	%	
0	26	1,4	20	1,6	46
1	1030	56,8	706	56,6	1736
9	756	41,7	522	41,8	1278
Total	1812	100,0	124	100,	3060

p-value=0,9278

C1MCM010117	Expérimentateu		Témoïn		Total
	N	%	N	%	
0	417	23,0	340	27,2	757
1	457	25,2	274	22,0	731
9	938	51,8	634	50,8	1572
Total	1812	100,0	124	100,	3060

p-value=0,0124

C1MNN270101r	Expérimentateu		Témoïn		Total
	N	%	N	%	
0	38	2,1	28	2,2	66
1	931	51,4	592	47,4	1523
9	843	46,5	628	50,3	1471
Total	1812	100,0	124	100,	3060

p-value=0,1003

C1MCM010118	Expérimentateu		Témoïn		Total
	N	%	N	%	
0	683	37,7	565	45,3	1248
1	223	12,3	99	7,9	322
9	906	50,0	584	46,8	1490
Total	1812	100,0	124	100,	3060

p-value=<,0001

C1MNN280101r	Expérimentateu		Témoïn		Total
	N	%	N	%	
0	97	5,4	92	7,4	189
1	450	24,8	260	20,8	710
9	1265	69,8	896	71,8	2161
Total	1812	100,0	124	100,	3060

p-value=0,0056

C1MCM010119	Expérimentateu		Témoïn		Total
	N	%	N	%	
0	700	38,6	569	45,6	1269
1	252	13,9	141	11,3	393
9	860	47,5	538	43,1	1398
Total	1812	100,0	124	100,	3060

p-value=0,0004

C1MNN290101r	Expérimentateu		Témoïn		Total
	N	%	N	%	
0	62	3,4	52	4,2	114
1	1407	77,7	971	77,8	2378
9	343	18,9	225	18,0	568
Total	1812	100,0	124	100,	3060

p-value=0,4901

C1MCM010120	Expérimentateu		Témoïn		Total
	N	%	N	%	
0	1077	59,4	838	67,2	1915
1	160	8,8	45	3,6	205
9	575	31,7	365	29,3	940
Total	1812	100,0	124	100,	3060

p-value=<,0001

C1MNM010101r	Expérimentateu		Témoïn		Total
	N	%	N	%	
0	22	1,2	10	0,8	32
1	1200	66,2	837	67,1	2037
9	590	32,6	401	32,1	991
Total	1812	100,0	124	100,	3060

p-value=0,5155

C1MCO091001	Expérimentateu		Témoïn		Total
	N	%	N	%	
0	88	4,9	76	6,1	164
1	863	47,6	563	45,1	1426
9	861	47,5	609	48,8	1470
Total	1812	100,0	124	100,	3060

p-value=0,1871

C1MNM040101r	Expérimentateu		Témoïn		Total
	N	%	N	%	
0	98	5,4	84	6,7	182
1	887	49,0	565	45,3	1452
9	827	45,6	599	48,0	1426
Total	1812	100,0	124	100,	3060

p-value=0,0757

C1MCO091101	Expérimentateu		Témoïn		Total
	N	%	N	%	
0	272	15,0	247	19,8	519
1	1016	56,1	658	52,7	1674
9	524	28,9	343	27,5	867
Total	1812	100,0	124	100,	3060

p-value=0,0025

C1MCR080101r_p 4	Expérimentateu		Témoïn		Total
	N	%	N	%	
0	41	2,3	33	2,6	74
1	1161	64,1	811	65,0	1972
9	610	33,7	404	32,4	1014
Total	1812	100,0	124	100,	3060

p-value=0,6336

C1MCO090801	Expérimentateu		Témoïn		Total
	N	%	N	%	
0	314	17,3	250	20,0	564
1	1025	56,6	686	55,0	1711
9	473	26,1	312	25,0	785
Total	1812	100,0	124	100,	3060

p-value=0,1638

C1MCR170101r	Expérimentateu		Témoïn		Total
	N	%	N	%	
0	82	4,5	46	3,7	128
1	1130	62,4	776	62,2	1906
9	600	33,1	426	34,1	1026
Total	1812	100,0	124	100,	3060

p-value=0,4773

C1MCM010113	Expérimentateu		Témoïn		Total
	N	%	N	%	
0	215	11,9	192	15,4	407
1	640	35,3	424	34,0	1064
9	957	52,8	632	50,6	1589
Total	1812	100,0	124	100,	3060

p-value=0,0189

C1MCR180101r	Expérimentateu		Témoïn		Total
	N	%	N	%	
0	44	2,4	31	2,5	75
1	1207	66,6	813	65,1	2020
9	561	31,0	404	32,4	965
Total	1812	100,0	124	100,	3060

p-value=0,6986

C1MCO091201	Expérimentateu		Témoïn		Total
	N	%	N	%	
0	233	12,9	207	16,6	440
1	744	41,1	458	36,7	1202
9	835	46,1	583	46,7	1418
Total	1812	100,0	124	100,	3060

p-value=0,0046

C1MCR190101r	Expérimentateu		Témoïn		Total
	N	%	N	%	
0	72	4,0	51	4,1	123
1	872	48,1	551	44,2	1423
9	868	47,9	646	51,8	1514
Total	1812	100,0	124	100,	3060

p-value=0,0927

C1MCO100401	Expérimentateu		Témoïn		Total
	N	%	N	%	
0	283	15,6	208	16,7	491
1	673	37,1	373	29,9	1046
9	856	47,2	667	53,5	1523
Total	1812	100,0	124	100,	3060

p-value=0,0002

C1MCR070101r_p 4	Expérimentateu		Témoïn		Total
	N	%	N	%	
0	127	7,0	85	6,8	212
1	899	49,6	605	48,5	1504
9	786	43,4	558	44,7	1344
Total	1812	100,0	124	100,	3060

p-value=0,7652

C1MCO100101_p 4	Expérimentateu		Témoïn		Total
	N	%	N	%	
0	226	12,5	183	14,7	409
1	915	50,5	582	46,6	1497
9	671	37,0	483	38,7	1154
Total	1812	100,0	124	100,	3060

p-value=0,0654

C1MCR200101r	Expérimentateu		Témoïn		Total
	N	%	N	%	
0	164	9,1	146	11,7	310
1	792	43,7	529	42,4	1321
9	856	47,2	573	45,9	1429
Total	1812	100,0	124	100,	3060

p-value=0,0581

C1MCO010101_p 4	Expérimentateu		Témoïn		Total
	N	%	N	%	
0	21	1,2	13	1,0	34
1	1325	73,1	945	75,7	2270
9	466	25,7	290	23,2	756
Total	1812	100,0	124	100,	3060

p-value=0,2720

C1MCR210101r	Expérimentateu		Témoïn		Total
	N	%	N	%	
0	136	7,5	104	8,3	240
1	198	10,9	129	10,3	327
9	1478	81,6	101	81,3	2493
Total	1812	100,0	124	100,	3060

p-value=0,6402

C1MCO020101_p 4	Expérimentateu		Témoïn		Total
	N	%	N	%	
0	52	2,9	43	3,5	95
1	1114	61,5	768	61,5	1882
9	646	35,7	437	35,0	1083
Total	1812	100,0	124	100,	3060

p-value=0,6460

C1MCR220101r	Expérimentateu		Témoïn		Total
	N	%	N	%	
0	197	10,9	138	11,1	335
1	228	12,6	177	14,2	405
9	1387	76,6	933	74,8	2320
Total	1812	100,0	124	100,	3060

p-value=0,4141

C1MCO150101	Expérimentateu		Témoin		Total
	N	%	N	%	
0	84	4,6	38	3,0	122
1	849	46,9	576	46,2	1425
9	879	48,5	634	50,8	1513
Total	1812	100,0	124	100,	3060

p-value=0,0622

C1MCO120101	Expérimentateu		Témoin		Total
	N	%	N	%	
0	123	6,8	68	5,5	191
1	598	33,0	398	31,9	996
9	1091	60,2	782	62,7	1873
Total	1812	100,0	124	100,	3060

p-value=0,2092

Tableau C-6 : Taux de réussite par item aux items communs de septembre 2011 et mai 2012 selon la catégorie des enseignants
(A : associés ; C : correspondants ; I : involontaires ; T : témoins)

Septembre 2011

C1MCM010107	A		C		I		T		Total
	N	%	N	%	N	%	N	%	
0	147	12,0	71	12,0	76	10,5	60	11,5	354
1	355	29,1	178	30,1	213	29,4	165	31,5	911
9	719	58,9	342	57,9	435	60,1	299	57,1	1795
Total	1221	100,0	591	100,0	724	100,0	524	100,0	3060

p-value=0,8812

C1MCM010106	A		C		I		T		Total
	N	%	N	%	N	%	N	%	
0	86	7,0	56	9,5	46	6,4	30	5,7	218
1	490	40,1	238	40,3	290	40,1	244	46,6	1262
9	645	52,8	297	50,3	388	53,6	250	47,7	1580
Total	1221	100,0	591	100,0	724	100,0	524	100,0	3060

p-value=0,0339

C1MCM010111	A		C		I		T		Total
	N	%	N	%	N	%	N	%	
0	462	37,8	226	38,2	270	37,3	190	36,3	1148
1	207	17,0	112	19,0	125	17,3	90	17,2	534
9	552	45,2	253	42,8	329	45,4	244	46,6	1378
Total	1221	100,0	591	100,0	724	100,0	524	100,0	3060

p-value=0,8926

C1MCO100101	A		C		I		T		Total
	N	%	N	%	N	%	N	%	
0	205	16,8	71	12,0	115	15,9	92	17,6	483
1	452	37,0	244	41,3	273	37,7	197	37,6	1166
9	564	46,2	276	46,7	336	46,4	235	44,9	1411
Total	1221	100,0	591	100,0	724	100,0	524	100,0	3060

Mai 2012

C1MCM010107	A		C		I		T		Total
	N	%	N	%	N	%	N	%	
0	45	3,7	27	4,6	31	4,3	24	4,6	127
1	527	43,2	275	46,5	295	40,8	233	44,5	1330
9	649	53,2	289	48,9	398	55,0	267	51,0	1603
Total	1221	100,0	591	100,0	724	100,0	524	100,0	3060

p-value=0,3755

C1MCM010106	A		C		I		T		Total
	N	%	N	%	N	%	N	%	
0	43	3,5	22	3,7	29	4,0	14	2,7	108
1	719	58,9	375	63,5	425	58,7	327	62,4	1846
9	459	37,6	194	32,8	270	37,3	183	34,9	1106
Total	1221	100,0	591	100,0	724	100,0	524	100,0	3060

p-value=0,3517

C1MCM010111	A		C		I		T		Total
	N	%	N	%	N	%	N	%	
0	225	18,4	121	20,5	186	25,7	94	17,9	626
1	461	37,8	213	36,0	209	28,9	176	33,6	1059
9	535	43,8	257	43,5	329	45,4	254	48,5	1375
Total	1221	100,0	591	100,0	724	100,0	524	100,0	3060

p-value=0,0002

C1MCO100101	A		C		I		T		Total
	N	%	N	%	N	%	N	%	
0	147	12,0	79	13,4	115	15,9	68	13,0	409
1	600	49,1	315	53,3	339	46,8	243	46,4	1497
9	474	38,8	197	33,3	270	37,3	213	40,7	1154
Total	1221	100,0	591	100,0	724	100,0	524	100,0	3060

p-value=0,1519

C1MCO010101	A		C		I		T		Total
	N	%	N	%	N	%	N	%	
0	9	0,7	5	0,9	6	0,8	5	1,0	25
1	839	68,7	406	68,7	518	71,6	387	73,9	2150
9	373	30,6	180	30,5	200	27,6	132	25,2	885
Total	1221	100,0	591	100,0	724	100,0	524	100,0	3060

p-value=0,3674

C1MCO020101	A		C		I		T		Total
	N	%	N	%	N	%	N	%	
0	24	2,0	12	2,0	10	1,4	15	2,9	61
1	646	52,9	296	50,1	387	53,5	289	55,2	1618
9	551	45,1	283	47,9	327	45,2	220	42,0	1381
Total	1221	100,0	591	100,0	724	100,0	524	100,0	3060

p-value=0,3275

C1MNN030101r	A		C		I		T		Total
	N	%	N	%	N	%	N	%	
0	21	1,7	9	1,5	15	2,1	6	1,2	51
1	342	28,0	156	26,4	172	23,8	166	31,7	836
9	858	70,3	426	72,1	537	74,2	352	67,2	2173
Total	1221	100,0	591	100,0	724	100,0	524	100,0	3060

p-value=0,0778

C1MCR080101r	A		C		I		T		Total
	N	%	N	%	N	%	N	%	
0	100	8,2	40	6,8	52	7,2	31	5,9	223
1	744	60,9	356	60,2	438	60,5	325	62,0	1863
9	377	30,9	195	33,0	234	32,3	168	32,1	974
Total	1221	100,0	591	100,0	724	100,0	524	100,0	3060

p-value=0,7062

p-value=0,0370

C1MCO010101	A		C		I		T		Total
	N	%	N	%	N	%	N	%	
0	13	1,1	8	1,4	6	0,8	7	1,3	34
1	904	74,0	421	71,2	534	73,8	411	78,4	2270
9	304	24,9	162	27,4	184	25,4	106	20,2	756
Total	1221	100,0	591	100,0	724	100,0	524	100,0	3060

p-value=0,1599

C1MCO020101	A		C		I		T		Total
	N	%	N	%	N	%	N	%	
0	32	2,6	20	3,4	22	3,0	21	4,0	95
1	759	62,2	355	60,1	444	61,3	324	61,8	1882
9	430	35,2	216	36,6	258	35,6	179	34,2	1083
Total	1221	100,0	591	100,0	724	100,0	524	100,0	3060

p-value=0,7803

C1MNN030101r	A		C		I		T		Total
	N	%	N	%	N	%	N	%	
0	17	1,4	4	0,7	14	1,9	5	1,0	40
1	566	46,4	320	54,2	286	39,5	247	47,1	1419
9	638	52,3	267	45,2	424	58,6	272	51,9	1601
Total	1221	100,0	591	100,0	724	100,0	524	100,0	3060

p-value=<,0001

C1MCR080101r	A		C		I		T		Total
	N	%	N	%	N	%	N	%	
0	33	2,7	8	1,4	17	2,4	16	3,1	74
1	782	64,1	379	64,1	457	63,1	354	67,6	1972
9	406	33,3	204	34,5	250	34,5	154	29,4	1014
Total	1221	100,0	591	100,0	724	100,0	524	100,0	3060

p-value=0,2322

C1MCR070101r	A		C		I		T		Total
	N	%	N	%	N	%	N	%	
0	165	13,5	57	9,6	66	9,1	58	11,1	346
1	484	39,6	247	41,8	314	43,4	229	43,7	1274
9	572	46,9	287	48,6	344	47,5	237	45,2	1440
Total	1221	100,0	591	100,0	724	100,0	524	100,0	3060

p-value=0,0475

C1MCR070101r	A		C		I		T		Total
	N	%	N	%	N	%	N	%	
0	91	7,5	36	6,1	51	7,0	34	6,5	212
1	594	48,7	305	51,6	346	47,8	259	49,4	1504
9	536	43,9	250	42,3	327	45,2	231	44,1	1344
Total	1221	100,0	591	100,0	724	100,0	524	100,0	3060

p-value=0,8183

Annexe D. Test 1 PACEM 6^e (Septembre 2010)

INFORMATIONS À LIRE ATTENTIVEMENT

Ce test n'est pas noté et ne comptera donc pas dans votre moyenne. Il est fait pour permettre à votre professeur de repérer ce que vous savez bien faire et ce que vous savez moins bien faire afin de vous aider à réussir.

Vous n'avez pas le droit d'utiliser une calculatrice.

Vous devrez effectuer les exercices dans l'ordre, à votre rythme, mais vous ne pourrez pas revenir en arrière.

Quand vous aurez fini, vous lèverez la main pour rendre votre travail à votre professeur.

Ce CAHIER est constitué de deux parties.

Dans la première partie, vous aurez des calculs à effectuer. Posez les opérations bien proprement quand cela est demandé, et écrivez les résultats bien lisiblement.

Dans la deuxième partie du test, vous n'aurez pas à rédiger votre réponse, mais à **choisir une réponse** parmi les quatre qui vous sont proposées. Cela ne veut pas dire qu'il faut répondre vite. Les réponses demandent de la réflexion. **Vous ne devez pas répondre au hasard.**

Parmi ces réponses, **UNE SEULE EST EXACTE** : vous devez donc cocher une seule case, celle qui correspond à votre choix, en faisant une croix dedans, comme sur l'exemple suivant :

Exercice12

Quel est le résultat de $(7 \times 3) + 2$?

1 21

2 22

3 23

4 24

Si vous n'êtes pas sûr(e) de la réponse à une question, **cochez** la réponse que vous jugez la meilleure et passez à la question suivante.

Un cadre vous est fourni dans certains exercices pour faire vos recherches. Vous pouvez l'utiliser si vous le souhaitez.

Si vous décidez de **modifier votre réponse** à une question, **effacez** soigneusement votre réponse **OU noircissez** la case de votre premier choix et cochez ensuite une nouvelle réponse, comme sur l'exemple suivant:

Exercice 14

Parmi les éléments suivants, lequel est un solide?

- 1 le triangle
- 2 le rectangle
- 3 le losange
- 4 le cube

Appliquez-vous bien, et bon courage !

Partie 1

Exercice 1

Poser et effectuer les opérations suivantes :

$154,8 + 36,57$	$138,85 - 49,2$
C1MCO010101	C1MCO020101
39×57	$24,3 \times 6$
C1MCO030101	C1MCO040101

544 : 17	276 : 8
C1MCO050101	C1MCO060101
4,28 x 3,5	7,38 : 6
C1MCO070101	C1MCO080101

Exercice 2

Donner les résultats des opérations suivantes :

$$7,14 \times 100 =$$

C1MCO090101

$$3,72 \times 1\,000 =$$

C1MCO090201

$$16,2 : 10 =$$

C1MCO090301

$$67 : 100 =$$

C1MCO090401

Exercice 3

Le nombre égal au tiers de 60 est :

C1MCO100101

Le nombre égal aux deux tiers de 12 est :

C1MCO100201

Partie 2

Exercice 4

$\frac{3}{10}$ peut aussi s'écrire :

1 0,03

2 0,3

3 3,0

4 3,10

C1MNN010101

Exercice 5

0,38 peut aussi s'écrire :

1 $\frac{38}{10}$

2 $\frac{0,38}{100}$

3 $\frac{38}{100}$

4 $\frac{0}{38}$

C1MNN020101

Exercice 6

$\frac{1}{4}$ peut aussi s'écrire :

1 0,25

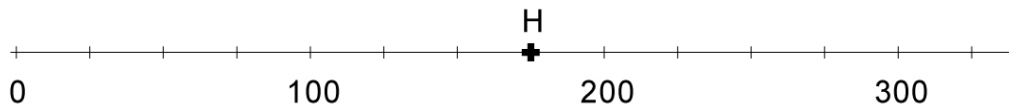
2 0,4

3 1,25

4 1,4

C1MNN030101

Exercice 7



La graduation qui correspond au point H est :

1 190

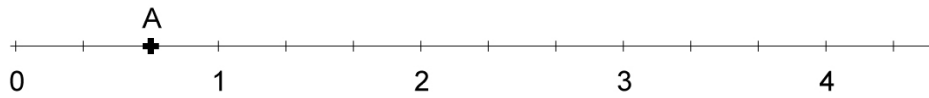
2 130

3 180

4 175

C1MNA010101

Exercice 8



La graduation qui correspond au point A est égale à :

1 0,2

2 $\frac{2}{3}$

3 $\frac{3}{2}$

4 2

C1MNA020101

Exercice 9

Pierre s'est couché à 22 h15 et s'est levé à 6 h 45.

Combien de temps a-t-il passé au lit ?

- 1 7 h 30 min
- 2 8 h 30 min
- 3 15 h 30 min
- 4 16 h 30 min

C1MCR010101

Exercice 10

Il reste 18 litres d'essence dans le réservoir de la voiture de Monsieur Dupuis.

Monsieur Dupuis s'arrête à une station service pour mettre 33 litres dans le réservoir de sa voiture. Le réservoir peut contenir 60 litres.

Combien y a-t-il de litres d'essence dans le réservoir de la voiture de Monsieur Dupuis quand il repart de la station service ?

- 1 15
- 2 27
- 3 42
- 4 51

C1MCR020101

Exercice 11

On veut transporter 300 voitures par le train.

On charge 24 voitures par wagon.

Combien faut-il de wagons pour transporter toutes ces voitures ?

1 12

2 12,41

3 12,5

4 13

C1MCR030101

Exercice 12

Un musée a accueilli 524 visiteurs le dimanche.

Il en a accueilli 159 de plus que le vendredi, et 278 de moins que le samedi.

Combien le musée a-t-il accueilli de visiteurs le samedi ?

1 246

2 437

3 643

4 802

C1MCR040101

Exercice 13

Aurélie pense à un nombre, elle le multiplie par 2, puis lui ajoute 6.

Elle trouve 50.

Quel est le nombre auquel Aurélie a pensé ?

1 22

2 28

3 44

4 56

C1MCR050101

Exercice 14

Dans une boulangerie une baguette coûte 0,85 € et un pain coûte 1,45 €.

Lucie achète un pain. Elle donne un billet de 5 euros à la boulangère.

Combien la boulangère va-t-elle rendre à Lucie ?

1 2,70 €

2 3,45 €

3 3,55 €

4 4,15 €

C1MCR060101

Exercice 15

Le prix de 4 kg de pommes est 6,20 €.

Calculer le prix de 7 kg de pommes.

- 1 9,10 €
- 2 10,15 €
- 3 10,85 €
- 4 25,40 €

C1MCR070101

Exercice 16

Une randonnée en vélo est organisée sur un parcours de 60 km.

Un arrêt est prévu au tiers de ce parcours.

Quelle est la distance parcourue avant cet arrêt ?

- 1 20 km
- 2 32 km
- 3 33 km
- 4 40 km

C1MCR080101

Exercice 18

Deux tiers de 12 kg font :

- 1 4 kg
- 2 8 kg
- 3 24 kg
- 4 72 kg

C1MCR090101

Exercice 17

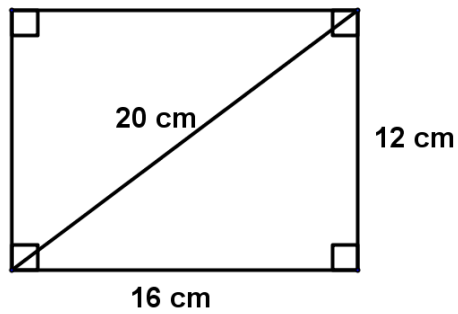
Une enseignante décide d'acheter des calculatrices pour ses 24 élèves de CM2. Le prix total est 300 €. Quel est le prix d'une calculatrice ?

- 1 12 €
- 2 12,41 €
- 3 12,50 €
- 4 13 €

C1MCR100101

Exercice 19

Le rectangle ci-dessous n'est pas représenté en vraie grandeur.



Quel est son périmètre ?

- 1 48 cm
- 2 56 cm
- 3 96 cm
- 4 192 cm

C1MCR110101

Quelle est son aire ?

- 1 192 cm²
- 2 240 cm²
- 3 320 cm²
- 4 384 cm²

C1MCR110102

Annexe E. Test 2 PACEM 6^e (Mai 2011)

INFORMATIONS À LIRE ATTENTIVEMENT

Ce test n'est pas noté et ne comptera donc pas dans votre moyenne. Il est fait pour permettre à votre professeur de repérer ce que vous avez appris au cours de l'année scolaire.

Vous n'avez pas le droit d'utiliser une calculatrice.

Vous devez effectuer les exercices dans l'ordre, et vous ne pourrez pas revenir en arrière.

Quand vous aurez fini, vous lèverez la main pour rendre votre travail à votre professeur.

Ce CAHIER est constitué de deux parties.

Dans la première partie, vous aurez des calculs à effectuer. Ecrivez les résultats bien lisiblement dans les cadres prévus pour cela. Posez les opérations bien proprement quand cela est demandé.

Dans la deuxième partie du test, vous n'aurez pas à rédiger votre réponse, mais à **choisir une réponse** parmi celles qui vous sont proposées. Cela ne veut pas dire qu'il faut répondre vite. Les réponses demandent de la réflexion. **Vous ne devez pas répondre au hasard.**

Parmi ces réponses, **UNE SEULE EST EXACTE** : vous devez donc cocher une seule case, celle qui correspond à votre choix, en faisant une croix dedans, comme sur l'exemple suivant :

Exercice12

Quel est le résultat de $(7 \times 3) + 2$?

1 21

2 22

3 23

4 24

Si vous n'êtes pas sûr(e) de la réponse à une question, **cochez** la réponse que vous jugez la meilleure et passez à la question suivante.

Un cadre vous est fourni dans certains exercices pour faire vos recherches. Vous pouvez l'utiliser si vous le souhaitez.

Vous aurez aussi à répondre à des questions "Vrai" ou "Faux" : vous devez cocher soit "VRAI" soit "FAUX" à **chaque ligne**, comme sur l'exemple suivant :

Exercice 13		
a) 10 est le double de 5.	1 <input checked="" type="checkbox"/> Vrai	2 <input type="checkbox"/> Faux
b) 2 est le triple de 6.	1 <input type="checkbox"/> Vrai	2 <input checked="" type="checkbox"/> Faux
c) 3 est le quart de 12.	1 <input checked="" type="checkbox"/> Vrai	2 <input type="checkbox"/> Faux

Si vous décidez de **modifier votre réponse** à une question, **effacez** soigneusement votre réponse **OU noircissez** la case de votre premier choix et cochez ensuite une nouvelle réponse, comme sur l'exemple suivant:

Exercice 14
Parmi les éléments suivants, lequel est un solide?
1 <input type="checkbox"/> le triangle
2 <input type="checkbox"/> le rectangle
3 <input checked="" type="checkbox"/> le losange
4 <input checked="" type="checkbox"/> le cube

Dans tous les cas, lisez bien les consignes.

Important ! Vous pouvez utiliser les zones libres sur les pages du cahier pour poser des opérations ou faire vos recherches si vous le souhaitez.

Appliquez-vous bien, et bon courage !

Partie 1

Exercice 1

Poser et effectuer les opérations suivantes :

$16,25 \times 2,03$	$9,74 \times 3,5$
C1MCO110101	C1MCO120101
$3\,978 : 13$	$178,8 : 8$
C1MCO130101	C1MCO140101

Exercice 2

Donner les résultats des opérations suivantes sans les poser :

$3,72 \times 100 =$

C1MCO090501

$59 : 100 =$

C1MCO090801

$7,14 \times 1000 =$

C1MCO090601

$14,8 : 10 =$

C1MCO090701

$70 \times 0,1 =$

C1MCO090901

Exercice 3

Le nombre égal au tiers de 60 est :

C1MCO100101

Le nombre égal aux deux tiers de 15 est :

C1MCO100301

Partie 2

Exercice 5

$96 + \frac{2}{100}$ peut aussi s'écrire :

1 96,200

2 98,100

3 96,002

4 96,02

C1MNN180101

Exercice 6

$\frac{724}{100}$ peut aussi s'écrire :

1 0,724

2 7,24

3 72,4

4 724,100

C1MNN190101

Exercice 7

0,65 peut aussi s'écrire :

1 $\frac{0,65}{100}$

2 $\frac{65 \overline{0,38}}{10 \ 100}$

3 $\frac{0 \ \overline{38}}{65 \ 100}$

$$4 \square \frac{65}{100}$$

C1MNN200101

Exercice 8

$\frac{1}{4}$ peut aussi s'écrire :

$$1 \square 0,25$$

$$2 \square 0,4$$

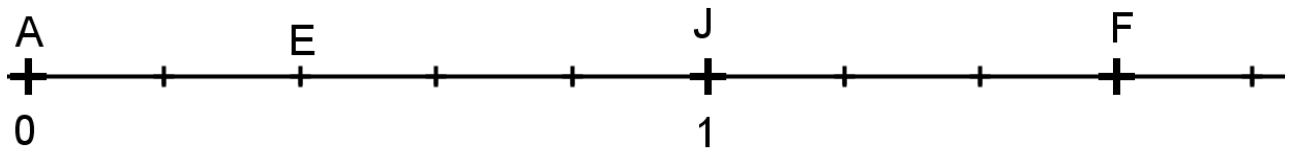
$$3 \square 1,4$$

$$4 \square 1,75$$

C1MNN030101

Exercice 9

Voici une demi-droite graduée. Sur cette droite, le point J a pour abscisse 1.



Cocher soit "VRAI" soit "FAUX" pour chacune des phrases suivantes.

L'abscisse du point E est 0,4	$1 \square$ VRAI $2 \square$ FAUX	C1MNA030101
L'abscisse du point F est $\frac{8}{5}$	$1 \square$ VRAI $2 \square$ FAUX	C1MNN030102

Exercice 10

Cocher soit "VRAI" soit "FAUX" pour les encadrements suivants.

$2,19 < 2,187 < 2,213$	$1 \square \text{ VRAI } 2 \square \text{ FAUX}$	C1MNN210101
$0,89 < 0,9 < 1$	$1 \square \text{ VRAI } 2 \square \text{ FAUX}$	C1MNN210101
$3,8 < 3,9 < 3,10$	$1 \square \text{ VRAI } 2 \square \text{ FAUX}$	C1MNN210101

Exercice 11

Cocher soit "VRAI" soit "FAUX" pour chacune des égalités suivantes.

$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{8}$	$1 \square \text{ VRAI } 2 \square \text{ FAUX}$	C1MNN220101
$\frac{3}{2} + \frac{5}{2} = 8,4$	$1 \square \text{ VRAI } 2 \square \text{ FAUX}$	C1MNN220101
$\frac{3}{7} + \frac{4}{7} = 1$	$1 \square \text{ VRAI } 2 \square \text{ FAUX}$	C1MNN220101

Exercice 12

0,3 x 0,2 est égal à :

$1 \square 0,5$

$2 \square 0,6$

$3 \square 0,05$

$4 \square 0,06$

C1MNN230101

Exercice 13

Donner le nombre le plus proche de $15,2 \times 21$ sans poser l'opération :

- 1 30
- 2 300
- 3 3 000
- 4 30 000

C1MCM020101

Exercice 14

Aurélie pense à un nombre, elle le multiplie par 2, puis soustrait 6.
Elle trouve 50.

Quel est le nombre auquel Aurélie a pensé ?

- 1 22
- 2 28
- 3 44
- 4 56

C1MCR050201

Exercice 15

Une randonnée en vélo est organisée sur un parcours de 60 km.

Un arrêt est prévu au tiers de ce parcours.

Quelle est la distance parcourue avant cet arrêt ?

- 1 20 km
- 2 30 km
- 3 32 km
- 4 33 km

C1MCR080101

Exercice 16

Un cycliste a mis 3 h pour parcourir 36 km.

Si sa vitesse reste la même, pour parcourir 48 km, il lui faudra :

- 1 3 h 12 min
- 2 3 h 15 min
- 3 3 h 45 min
- 4 4 h

C1MCR120101

Exercice 17

5 kg =

- 1 50 g
- 2 500 g
- 3 5 000 g
- 4 50 000 g

C1MNM010101

Exercice 18

Avec 1 L de jus de fruits, on peut remplir :

- 1 20 verres de 20 cL
- 2 8 verres de 20 cL
- 3 5 verres de 20 cL
- 4 10 verres de 20 cL

C1MNM020101

Exercice 19

Un escargot a avancé de 5,8 m le mercredi.

Il a avancé de 2,4 m de moins que le lundi, mais de 3,2 m de plus que le mardi.

Le lundi, l'escargot a avancé de :

1 3,4 m

2 3,6 m

3 6,6 m

4 8,2 m

C1MCR130101

Exercice 20

Une enseignante achète 10 crayons identiques. Le prix total est 5 €.

Le prix d'un crayon est :

1 0,50 €

2 1 €

3 1,50 €

4 2 €

C1MCR140101

Exercice 21

Sans poser d'opération,

donner un ordre de grandeur du prix de 23 cahiers à 4,22 € l'un.

1 50 €

2 100 €

3 200 €

4 1 000 €

C1MCM020201

Exercice 22

1,25 km =

- 1 1 250 m
- 2 125 m
- 3 12,5 m
- 4 1,25000 m

C1MNM030101

Exercice 23

Deux tiers de 15 kg font :

- 1 5 kg
- 2 10 kg
- 3 20 kg
- 4 30 kg

C1MCR150101

Exercice 24

Le prix de 5 pamplemousses est 3,50 €.

Le prix de 7 pamplemousses est :

- 1 2,50 €
- 2 4,90 €
- 3 5,50 €
- 4 24,50 €

C1MCR160101

Exercice 25

Cocher soit "VRAI" soit "FAUX" pour chacune des égalités suivantes.

50 % de 80 € font 40 €	1 <input type="checkbox"/> VRAI 2 <input type="checkbox"/> FAUX	C1MCP010101
25 % de 32 kg font 8 kg	1 <input type="checkbox"/> VRAI 2 <input type="checkbox"/> FAUX	C1MCP010102
10 % de 3 € font 3 centimes	1 <input type="checkbox"/> VRAI 2 <input type="checkbox"/> FAUX	C1MCP010103
75 % de 200 km font 75 km	1 <input type="checkbox"/> VRAI 2 <input type="checkbox"/> FAUX	C1MCP010104

A propos du calcul mental

1. Cette année, en mathématiques, tu as fait du calcul mental:

à chaque séance ou presque	deux fois par semaine	une fois par semaine	de temps en temps
<input type="checkbox"/> ₁	<input type="checkbox"/> ₂	<input type="checkbox"/> ₃	<input type="checkbox"/> ₄

2. Tu dirais que faire du calcul mental te plaît :

beaucoup	assez	ça dépend des fois	pas du tout
<input type="checkbox"/> ₁	<input type="checkbox"/> ₂	<input type="checkbox"/> ₃	<input type="checkbox"/> ₄

3. Tu trouves que faire du calcul mental, c'est :

très facile	plutôt facile	plutôt difficile	très difficile
<input type="checkbox"/> ₁	<input type="checkbox"/> ₂	<input type="checkbox"/> ₃	<input type="checkbox"/> ₄

4. Selon toi, faire du calcul mental t'a aidé(e) à progresser :

	Beaucoup	Assez	Un peu	Pas du tout
Sur les tables d'addition	<input type="checkbox"/> ₁	<input type="checkbox"/> ₂	<input type="checkbox"/> ₃	<input type="checkbox"/> ₄
Sur les tables de multiplication	<input type="checkbox"/> ₁	<input type="checkbox"/> ₂	<input type="checkbox"/> ₃	<input type="checkbox"/> ₄
Sur les opérations posées	<input type="checkbox"/> ₁	<input type="checkbox"/> ₂	<input type="checkbox"/> ₃	<input type="checkbox"/> ₄
Sur les multiplications et les divisions par 10, 100, 1000	<input type="checkbox"/> ₁	<input type="checkbox"/> ₂	<input type="checkbox"/> ₃	<input type="checkbox"/> ₄
Sur la façon d'écrire les nombres	<input type="checkbox"/> ₁	<input type="checkbox"/> ₂	<input type="checkbox"/> ₃	<input type="checkbox"/> ₄
Sur les ordres de grandeur	<input type="checkbox"/> ₁	<input type="checkbox"/> ₂	<input type="checkbox"/> ₃	<input type="checkbox"/> ₄
Sur les changements d'unités (conversions)	<input type="checkbox"/> ₁	<input type="checkbox"/> ₂	<input type="checkbox"/> ₃	<input type="checkbox"/> ₄
Sur la résolution de problèmes	<input type="checkbox"/> ₁	<input type="checkbox"/> ₂	<input type="checkbox"/> ₃	<input type="checkbox"/> ₄

Quel effort as-tu fourni pour répondre à ce test ?

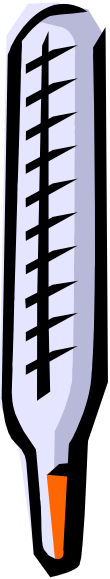
Dans une situation (au collège par exemple) pour laquelle tu as envie de donner le meilleur de toi-même, tu vas fournir un maximum d'efforts pour bien réussir.

Le « thermomètre de l'effort » ci-dessous permet d'indiquer la valeur de l'effort que l'on fournit.

Dans le cas présent, un élève a coché la valeur la plus élevée (case 10) pour montrer qu'il a fourni un effort très important.

A ton tour, indique à quel niveau tu situes l'effort que tu as fourni en répondant à ce test.

Et maintenant, si la note obtenue lors de ce test **comptait pour ton bulletin scolaire**, indique le niveau d'effort que tu aurais fourni.

	<input checked="" type="checkbox"/> 10	<input type="checkbox"/> 10	<input type="checkbox"/> 10
	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9
	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8
	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7
	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6
	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5
	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4
	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3
	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2
	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1
EXEMPLE	THERMO 1	THERMO 2	

Merci beaucoup !

Annexe F. Test 1 PACEM 6^e (Septembre 2011)

INFORMATIONS À LIRE ATTENTIVEMENT

Ce test est fait pour permettre à votre professeur de repérer ce que vous savez bien faire et ce que vous savez moins bien faire afin de vous aider à réussir. Il n'est pas noté.

Vous utiliserez un stylo **noir** ou **bleu** pour écrire vos réponses.

Vous n'avez pas le droit d'utiliser une calculatrice.

Ce CAHIER est constitué de deux parties.

Dans la première partie, vous allez avoir des calculs à effectuer.

Les exercices sont à faire dans l'ordre, au rythme qui vous sera donné par votre professeur.

Posez les opérations bien proprement quand cela vous est demandé, et écrivez les résultats bien lisiblement.

Appliquez-vous bien, et bon courage !

Partie 1

Exercice 1

Effectuer les opérations ci-dessous, sans les poser et en allant le plus vite possible.

Exemple :

$$8 + 4 = 12$$

$7 + 13 + 24 =$

C1MCM010101

$65 - 30 =$

C1MCM010102

$37 + 99 =$

C1MCM010103

$11 + 18 + 9 =$

C1MCM010104

$3\,600 + 1\,400 =$

C1MCM010105

$5,2 + 13 + 2,8 =$

C1MCM010106

$38 - 1,5 =$

C1MCM010107

$27 \times 20 =$

C1MCM010108

$4,6 \times 3 =$

C1MCM010109

$128 : 4 =$

C1MCM010110

$62 \times 0,5 =$

C1MCM010111

Exercice 2

Poser et effectuer les opérations suivantes :

$154,8 + 36,57$	$138,85 - 49,2$
C1MCO010101	C1MCO020101
39×57	$24,3 \times 6$
C1MCO030101	C1MCO040101

$544 : 17$	$276 : 8$
C1MCO050101	C1MCO060101
$4,28 \times 3,5$	$7,38 : 6$
C1MCO070101	C1MCO080101

Exercice 3

Donner les résultats des opérations suivantes :

$7,14 \times 100 =$

C1MCO090101

$3,72 \times 1\,000 =$

C1MCO090201

$16,2 : 10 =$

C1MCO090301

$67 : 100 =$

C1MCO090401

Exercice 4

Le nombre égal au tiers de 60 est

C1MCO100101

Le nombre égal aux deux tiers de 12 est

C1MCO100201

Fin de la partie 1

Partie 2

Dans cette deuxième partie, vous n'aurez pas à rédiger votre réponse, mais à **choisir une réponse** parmi les quatre qui vous sont proposées. Cela ne veut pas dire qu'il faut répondre vite. Les réponses demandent de la réflexion. **Vous ne devez pas répondre au hasard.**

Parmi ces réponses, **UNE SEULE EST EXACTE** : vous devez donc cocher une seule case, celle qui correspond à votre choix, en faisant une croix dedans, comme sur l'exemple suivant :

Exercice 12

Quel est le résultat de $(7 \times 3) + 2$?

1 21

2 22

3 23

4 24

Si vous n'êtes pas sûr(e) de la réponse à une question, **cochez** la réponse que vous jugez la meilleure et passez à la question suivante.

Si vous décidez de **modifier votre réponse** à une question, **effacez** soigneusement votre réponse OU **noircissez** la case de votre premier choix et cochez ensuite une nouvelle réponse, comme sur l'exemple suivant:

Exercice 14

Parmi les éléments suivants, lequel est un solide?

1 le triangle

2 le rectangle

3 le losange

4 le cube

Un cadre vous est fourni dans certains exercices pour faire vos recherches. Vous pouvez l'utiliser si vous le souhaitez. Les exercices sont à faire dans l'ordre, à votre rythme, sans revenir en arrière.

Exercice 5

$\frac{3}{10}$ peut aussi s'écrire :

1 0,03

2 0,3

3 3,0

4 3,10

C1MNN010101

Exercice 6

0,38 peut aussi s'écrire :

1 $\frac{38}{10}$

2 $\frac{0,38}{100}$

3 $\frac{38}{100}$

4 $\frac{0}{38}$

C1MNN020101

Exercice 7

$\frac{1}{4}$ peut aussi s'écrire :

1 0,25

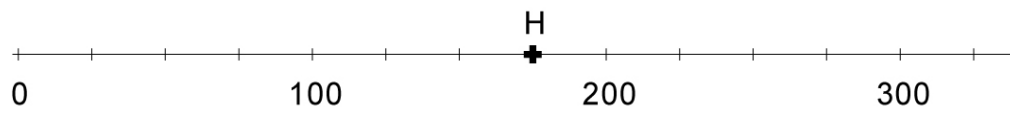
2 0,4

3 1,25

4 1,4

C1MNN030101

Exercice 8



La graduation qui correspond au point H est :

1 190

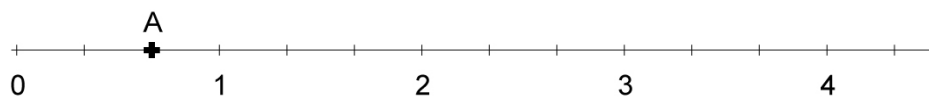
2 130

3 180

4 175

C1MNA010101

Exercice 9



La graduation qui correspond au point A est égale à :

1 0,2

2 $\frac{2}{3}$

3 $\frac{3}{2}$

4 2

C1MNA020101

Exercice 10

Pierre s'est couché à 22 h15 et s'est levé à 6 h 45.

Combien de temps a-t-il passé au lit ?

1 7 h 30 min

2 8 h 30 min

3 15 h 30 min

4 16 h 30 min

C1MCR010101

Exercice 11

Il reste 18 litres d'essence dans le réservoir de la voiture de Monsieur Dupuis.

Monsieur Dupuis s'arrête à une station service pour mettre 33 litres dans le réservoir de sa voiture. Le réservoir peut contenir 60 litres.

Combien y a-t-il de litres d'essence dans le réservoir de la voiture de Monsieur Dupuis quand il repart de la station service ?

1 15

2 27

3 42

4 51

C1MCR020101

Exercice 12

On veut transporter 300 voitures par le train.

On charge 24 voitures par wagon.

Combien faut-il de wagons pour transporter toutes ces voitures ?

1 12

2 12,41

3 12,5

4 13

C1MCR030101

Exercice 13

Un musée a accueilli 524 visiteurs le dimanche.

Il en a accueilli 159 de plus que le vendredi, et 278 de moins que le samedi.

Combien le musée a-t-il accueilli de visiteurs le samedi ?

1 246

2 437

3 643

4 802

C1MCR040101

Exercice 14

Aurélie pense à un nombre, elle le multiplie par 2, puis lui ajoute 6.
Elle trouve 50.

Quel est le nombre auquel Aurélie a pensé ?

1 22

2 28

3 44

4 56

C1MCR050101

Exercice 15

Dans une boulangerie une baguette coûte 0,85 € et un pain coûte 1,45 €.
Lucie achète un pain. Elle donne un billet de 5 euros à la boulangère.
Combien la boulangère va-t-elle rendre à Lucie ?

1 2,70 €

2 3,45 €

3 3,55 €

4 4,15 €

C1MCR060101

Exercice 16

Le prix de 4 kg de pommes est 6,20 €.

Calculer le prix de 7 kg de pommes.

- 1 9,10 €
- 2 10,15 €
- 3 10,85 €
- 4 25,40 €

C1MCR070101

Exercice 17

Une randonnée en vélo est organisée sur un parcours de 60 km.

Un arrêt est prévu au tiers de ce parcours.

Quelle est la distance parcourue avant cet arrêt ?

- 1 20 km
- 2 32 km
- 3 33 km
- 4 40 km

C1MCR080101

Exercice 18

Deux tiers de 12 kg font :

1 4 kg

2 8 kg

3 24 kg

4 72 kg

C1MCR090101

Exercice 19

Une enseignante décide d'acheter des calculatrices pour ses 24 élèves de CM2. Le prix total est 300 €. Quel est le prix d'une calculatrice ?

1 12 €

2 12,41 €

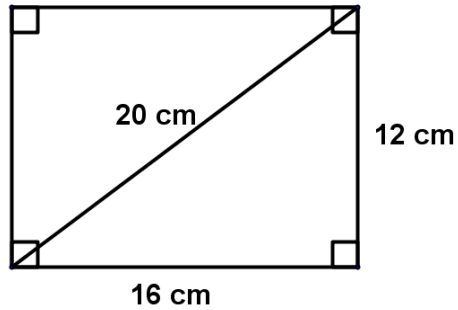
3 12,50 €

4 13 €

C1MCR100101

Exercice 20

Le rectangle ci-dessous n'est pas représenté en vraie grandeur.



Quel est son périmètre ?

- 1 48 cm
- 2 56 cm
- 3 96 cm
- 4 192 cm

C1MCR110101

Quelle est son aire ?

- 1 192 cm²
- 2 240 cm²
- 3 320 cm²
- 4 384 cm²

C1MCR110102

Fin de la partie 2

A propos du calcul mental

1. L'année dernière, en mathématiques, tu as fait du calcul mental :

Tous les jours à l'école ou presque	deux fois par semaine	une fois par semaine	de temps en temps
<input type="checkbox"/> ₁	<input type="checkbox"/> ₂	<input type="checkbox"/> ₃	<input type="checkbox"/> ₄

C1MRC010101

2. Tu dirais que faire du calcul mental te plaît :

beaucoup	assez	ça dépend des fois	pas du tout
<input type="checkbox"/> ₁	<input type="checkbox"/> ₂	<input type="checkbox"/> ₃	<input type="checkbox"/> ₄

C1MRC020101

3. Tu trouves que faire du calcul mental, c'est :

très facile	plutôt facile	plutôt difficile	très difficile
<input type="checkbox"/> ₁	<input type="checkbox"/> ₂	<input type="checkbox"/> ₃	<input type="checkbox"/> ₄

C1MRC030101

4. Selon toi, faire des calculs avec des nombres qui s'écrivent avec une virgule, c'est :

très facile	plutôt facile	plutôt difficile	très difficile
<input type="checkbox"/> ₁	<input type="checkbox"/> ₂	<input type="checkbox"/> ₃	<input type="checkbox"/> ₄

C1MRC050101

5. Selon toi,

	Très bien	Assez bien	Un peu	Pas du tout	
tu connais les tables d'addition	<input type="checkbox"/> ₁	<input type="checkbox"/> ₂	<input type="checkbox"/> ₃	<input type="checkbox"/> ₄	C1MRC040201
tu connais les tables de multiplication	<input type="checkbox"/> ₁	<input type="checkbox"/> ₂	<input type="checkbox"/> ₃	<input type="checkbox"/> ₄	C1MRC040202
tu sais faire des additions posées	<input type="checkbox"/> ₁	<input type="checkbox"/> ₂	<input type="checkbox"/> ₃	<input type="checkbox"/> ₄	C1MRC040203
tu sais faire des soustractions posées	<input type="checkbox"/> ₁	<input type="checkbox"/> ₂	<input type="checkbox"/> ₃	<input type="checkbox"/> ₄	C1MRC040303
tu sais faire des multiplications posées	<input type="checkbox"/> ₁	<input type="checkbox"/> ₂	<input type="checkbox"/> ₃	<input type="checkbox"/> ₄	C1MRC040403
tu sais faire des divisions posées	<input type="checkbox"/> ₁	<input type="checkbox"/> ₂	<input type="checkbox"/> ₃	<input type="checkbox"/> ₄	C1MRC040503
tu sais faire des multiplications et des divisions par 10, 100, 1000	<input type="checkbox"/> ₁	<input type="checkbox"/> ₂	<input type="checkbox"/> ₃	<input type="checkbox"/> ₄	C1MRC040204
En général, tu sais résoudre des problèmes de mathématiques	<input type="checkbox"/> ₁	<input type="checkbox"/> ₂	<input type="checkbox"/> ₃	<input type="checkbox"/> ₄	C1MRC040208

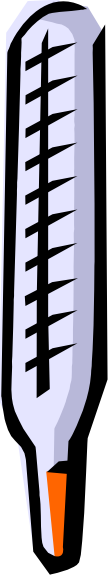
Quel effort as-tu fourni pour répondre à ce test ?

Dans une situation (au collège par exemple) pour laquelle tu as envie de donner le meilleur de toi-même, tu vas fournir un maximum d'efforts pour bien réussir.

Le « thermomètre de l'effort » ci-dessous permet d'indiquer la valeur de l'effort que l'on fournit.

Dans le cas présent, un élève a coché la valeur la plus élevée (case 10) pour montrer qu'il a fourni un effort très important.

A ton tour, indique à quel niveau tu situes l'effort que tu as fourni en répondant à ce test.

	<input checked="" type="checkbox"/> 10	<input type="checkbox"/> 10
	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9
	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8
	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7
	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6
	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5
	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4
	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3
	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2
	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1

EXEMPLE **TON EFFORT**

Merci beaucoup !

Annexe G. Test 2 PACEM 6^e (Mai 2012)

INFORMATIONS À LIRE ATTENTIVEMENT

Ce test est fait pour permettre à votre professeur de repérer ce que vous avez appris au cours de l'année scolaire.

Il n'est pas noté, mais il est important que vous vous appliquiez bien pour faire les exercices.

Vous utiliserez un stylo **noir** ou **bleu** pour écrire vos réponses.

Vous n'avez pas le droit d'utiliser une calculatrice.

Le cahier est constitué de deux parties.

Partie 1

Dans cette première partie, vous allez avoir des calculs à effectuer.

Les exercices sont à faire dans l'ordre, au rythme qui vous sera donné par votre professeur.

Posez les opérations bien proprement quand cela vous est demandé, et écrivez les résultats bien lisiblement.

Appliquez-vous bien, et bon courage !

Exercice 1

Effectuer les opérations ci-dessous, sans les poser et en allant le plus vite possible.

Donner tous les résultats en écriture décimale (pas en écriture fractionnaire).

Exemple :

$$8 + 4 = 12$$

$$1,8 + 3,2 = \boxed{}$$

C1MCM010114

$$47,85 - 3,2 = \boxed{}$$

C1MCM010115

$$38 - 1,5 = \boxed{}$$

C1MCM010107

$$5,2 + 13 + 2,8 = \boxed{}$$

C1MCM010106

$$62 \times 0,5 = \boxed{}$$

C1MCM010111

$$0,3 \times 0,2 = \boxed{}$$

C1MCM010116

$$\frac{5}{2} \times 2 = \boxed{}$$

C1MCM010117

$$20 \times \frac{5}{4} = \boxed{}$$

C1MCM010118

$$\frac{7}{3} \times 3 = \boxed{}$$

C1MCM010119

$$24 \times \frac{7}{6} = \boxed{}$$

C1MCM010120

Exercice 2

Donner les résultats des opérations suivantes sans les poser :

$35,2 \times 100 =$

C1MCO091001

$9\,367 : 100 =$

C1MCO091101

$59 : 100 =$

C1MCO090801

$4,2 \times 0,1 =$

C1MCM010113

$700 \times 0,1 =$

C1MCO091201

Exercice 3

Le nombre égal aux trois quarts de 20 est :

C1MCO100401

Le nombre égal au tiers de 60 est :

C1MCO100101

Exercice 4

Poser et effectuer les opérations suivantes :

$154,8 + 36,57$	$138,85 - 49,2$
C1MCO010101	C1MCO020101
$27,5 \times 23$	$9,74 \times 3,5$
C1MCO150101	C1MCO120101

Fin de la partie 1

Partie 2

Dans cette deuxième partie, vous n'aurez pas à rédiger votre réponse, mais à **choisir une réponse** parmi les quatre qui vous sont proposées. Cela ne veut pas dire qu'il faut répondre vite. Les réponses demandent de la réflexion. **Vous ne devez pas répondre au hasard.**

Parmi ces réponses, **UNE SEULE EST EXACTE** : vous devez donc cocher une seule case, celle qui correspond à votre choix, en faisant une croix dedans, comme sur l'exemple suivant :

Exercice 12

Quel est le résultat de $(7 \times 3) + 2$?

1 21

2 22

3 23

4 24

Si vous n'êtes pas sûr(e) de la réponse à une question, **cochez** la réponse que vous jugez la meilleure et passez à la question suivante.

Si vous décidez de **modifier votre réponse** à une question, **noircissez** la case de votre premier choix et cochez ensuite une nouvelle réponse, comme sur l'exemple suivant :

Exercice 14

Parmi les éléments suivants, lequel est un solide ?

1 le triangle

2 le rectangle

3 le losange

4 le cube

Un cadre vous est fourni dans certains exercices pour faire vos recherches. Vous pouvez l'utiliser si vous le souhaitez.

Les exercices sont à faire dans l'ordre, à votre rythme, sans revenir en arrière.

Exercice 5

$\frac{11}{44}$ peut aussi s'écrire :

1 0,25

2 0,4

3 1,4

4 1,75

C1MNN030101

Exercice 6

50 % peut aussi s'écrire :

1 50

2 50,100

3 5 000

4 0,5

C1MNN220101

Exercice 7

$\frac{3}{4}$ peut aussi s'écrire :

1 $\frac{25}{100}$

2 $\frac{50}{100}$ $\frac{0,38}{100}$

3 $\frac{75}{100}$ $\frac{38}{100}$

4 $\frac{90}{100}$

C1MNN230101

Exercice 8

Parmi les encadrements suivants, cocher celui qui est correct :

$4,3 < 4,12 < 4,1$

$4,1 < 4,3 < 4,12$

$4,12 < 4,3 < 4,1$

$4,1 < 4,12 < 4,3$

C1MNN240101

Exercice 9

$2 : 3 =$

$\frac{2}{3}$

$\frac{3}{2}$

$0,6$

$1,5$

C1MNN250101

Exercice 10

Aurélié pense à un nombre, elle le multiplie par 4, elle trouve 5.

A quel nombre Aurélié a-t-elle pensé ?

$0,8$

1

$1,25$

Le nombre n'existe pas, Aurélié s'est trompée dans son calcul.

C1MNN260101

Exercice 11

Dinah pense à un nombre, elle le multiplie par 5, elle trouve 3.

A quel nombre Dinah a-t-elle pensé ?

₁ 0,6

₂ 1,33

₃ 2

₄ Le nombre n'existe pas, Dinah s'est trompée dans son calcul.

C1MNN270101

Exercice 12

Abdul pense à un nombre, il le multiplie par 3, il trouve 7.

A quel nombre Abdul a-t-il pensé ?

₁ 2,333

₂ $\frac{7}{3}$

₃ $\frac{3}{7}$

₄ Le nombre n'existe pas, Abdul s'est trompé dans son calcul

C1MNN280101

Exercice 13

« 4 fois un tiers » peut aussi s'écrire :

₁ 4,3

₂ 5,2

₃ $\frac{13}{3}$

₄ $\frac{4}{3}$

C1MNN290101

Exercice 14

5 kg =

- 1 50 g
- 2 500 g
- 3 5 000 g
- 4 50 000 g

C1MNM010101

Exercice 15

Rémy habite à $\frac{3}{4}$ km du collège.

Rémy habite à :

- 1 moins de 500 m du collège
- 2 500 m du collège
- 3 750 m du collège
- 4 plus d'1 km du collège

C1MNM040101

Exercice 16

Une randonnée en vélo est organisée sur un parcours de 60 km.

Un arrêt est prévu au tiers de ce parcours.

Quelle est la distance parcourue avant cet arrêt ?

1 20 km

2 30 km

3 32 km

4 33 km

C1MCR080101

Exercice 17

6 chaises identiques coûtent 150 €.

9 chaises comme celles-ci coûtent :

1 175 €

2 200 €

3 225 €

4 250 €

C1MCR170101

Exercice 18

Elisa achète 5 crayons identiques. Le prix total est 2 €.

Le prix d'un crayon est :

0,25 €

0,40 €

2,50 €

3 €

C1MCR180101

Exercice 19

Trois quarts de 20 kg font :

5 kg

15 kg

30 kg

60 kg

C1MCR190101

Exercice 20

Le prix de 4 kg de pommes est 6,20 €.

Le prix de 7 kg de pommes est :

- 1 9,10 €
- 2 10,15 €
- 3 10,85 €
- 4 25,40 €

C1MCR070101

Exercice 21

25 % de 32 €, cela fait :

- 1 8 €
- 2 12 €
- 3 16 €
- 4 25 €

C1MCR200101

Exercice 22

Dans une classe, il y a trois cinquièmes de filles et 12 garçons.

Le nombre d'élèves de la classe est :

18

24

28

30

C1MCR210101

Exercice 23

Un triangle équilatéral a le même périmètre qu'un carré de côté 5 cm.

Le côté du triangle est :

1,6 cm

6,6 cm

$\frac{5}{3}$ cm

$\frac{20}{3}$ cm

C1MCR220101

A propos du calcul mental

5. Cette année, en mathématiques, tu as fait du calcul mental :

à chaque séance ou presque	deux fois par semaine	une fois par semaine	de temps en temps
1 <input type="checkbox"/>	2 <input type="checkbox"/>	3 <input type="checkbox"/>	4 <input type="checkbox"/>

C1MRC010101

6. Tu dirais que faire du calcul mental te plaît :

beaucoup	assez	ça dépend des fois	pas du tout
1 <input type="checkbox"/>	2 <input type="checkbox"/>	3 <input type="checkbox"/>	4 <input type="checkbox"/>

C1MRC020101

7. Tu trouves que faire du calcul mental, c'est :

très facile	plutôt facile	plutôt difficile	très difficile
1 <input type="checkbox"/>	2 <input type="checkbox"/>	3 <input type="checkbox"/>	4 <input type="checkbox"/>

C1MRC030101

8. Selon toi, faire des calculs avec des nombres qui s'écrivent avec une virgule, c'est :

très facile	plutôt facile	plutôt difficile	très difficile
1 <input type="checkbox"/>	2 <input type="checkbox"/>	3 <input type="checkbox"/>	4 <input type="checkbox"/>

C1MRC050101

9. Selon toi, faire du calcul mental t'a aidé(e) à progresser :

	Beaucoup	Assez	Un peu	Pas du tout	
Sur les tables d'addition	1 <input type="checkbox"/>	2 <input type="checkbox"/>	3 <input type="checkbox"/>	4 <input type="checkbox"/>	C1MRC040101
Sur les tables de multiplication	1 <input type="checkbox"/>	2 <input type="checkbox"/>	3 <input type="checkbox"/>	4 <input type="checkbox"/>	C1MRC040102
Sur les opérations posées	1 <input type="checkbox"/>	2 <input type="checkbox"/>	3 <input type="checkbox"/>	4 <input type="checkbox"/>	C1MRC040103
Sur les multiplications et les divisions par 10, 100, 1000	1 <input type="checkbox"/>	2 <input type="checkbox"/>	3 <input type="checkbox"/>	4 <input type="checkbox"/>	C1MRC040104
Sur la façon d'écrire les nombres	1 <input type="checkbox"/>	2 <input type="checkbox"/>	3 <input type="checkbox"/>	4 <input type="checkbox"/>	C1MRC040105
Sur les ordres de grandeur	1 <input type="checkbox"/>	2 <input type="checkbox"/>	3 <input type="checkbox"/>	4 <input type="checkbox"/>	C1MRC040106
Sur les changements d'unités (conversions)	1 <input type="checkbox"/>	2 <input type="checkbox"/>	3 <input type="checkbox"/>	4 <input type="checkbox"/>	C1MRC040107
Sur la résolution de problèmes	1 <input type="checkbox"/>	2 <input type="checkbox"/>	3 <input type="checkbox"/>	4 <input type="checkbox"/>	C1MRC040108

Quel effort as-tu fourni pour répondre à ce test ?

Exemple : un élève a coché la valeur la plus élevée (case 10) pour montrer qu'il a fourni un effort très important.

A ton tour, indique à quel niveau tu situes l'effort que tu as fourni en répondant à **ce test**.

<input checked="" type="checkbox"/>	10	<input type="checkbox"/>	10
<input type="checkbox"/>	9	<input type="checkbox"/>	9
<input type="checkbox"/>	8	<input type="checkbox"/>	8
<input type="checkbox"/>	7	<input type="checkbox"/>	7
<input type="checkbox"/>	6	<input type="checkbox"/>	6
<input type="checkbox"/>	5	<input type="checkbox"/>	5
<input type="checkbox"/>	4	<input type="checkbox"/>	4
<input type="checkbox"/>	3	<input type="checkbox"/>	3
<input type="checkbox"/>	2	<input type="checkbox"/>	2
<input type="checkbox"/>	1	<input type="checkbox"/>	1

EFFORT

Le test est terminé. Merci beaucoup !

Annexe H. Test 3 PACEM 5^e (Mai 2012)

Exercice 4

Une randonnée en vélo est organisée sur un parcours de 60 km.

Un arrêt est prévu au tiers de ce parcours.

Quelle est la distance parcourue avant cet arrêt ?

1 20 km

2 30 km

3 32 km

4 33 km

C1MCR080101

Exercice 5

Le prix de 5 pamplemousses est 3,50 €.

Le prix de 7 pamplemousses est :

1 2,50 €

2 4,90 €

3 5,50 €

4 24,50 €

C1MCR160101

Exercice 6

Cocher soit « VRAI » soit « FAUX » pour chacune des égalités suivantes.

50 % de 80 € font 40 €	<input type="checkbox"/> 1 VRAI	<input type="checkbox"/> 2 FAUX	C1MCP010101
25 % de 32 kg font 8 kg	<input type="checkbox"/> 1 VRAI	<input type="checkbox"/> 2 FAUX	C1MCP010102
10 % de 3 € font 3 centimes	<input type="checkbox"/> 1 VRAI	<input type="checkbox"/> 2 FAUX	C1MCP010103
75 % de 200 km font 75 km	<input type="checkbox"/> 1 VRAI	<input type="checkbox"/> 2 FAUX	C1MCP010104
