HAL
open science

Recherches sur l'articulation des dimensions sémantique, syntaxique, sémiotique, praxéologique et épistémologique dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques. Étude de cas : algèbre du secondaire et développements limités au début de l'université

Kouki Rahim

To cite this version:

Kouki Rahim. Recherches sur l'articulation des dimensions sémantique, syntaxique, sémiotique, praxéologique et épistémologique dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques. Étude de cas : algèbre du secondaire et développements limités au début de l'université. Sciences de l'Homme et Société. Université de Tunis El Manar (Tunisie), 2017. tel-02471598

HAL Id: tel-02471598

https://shs.hal.science/tel-02471598v1

Submitted on 8 Feb 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Rapport d'activité de recherche

Université de Tunis El Manar

Habilitation Universitaire en didactique des mathématiques

Soutenue le 07 octobre 2017

Jury d'habilitation

Président : Riadh Rabbana, Professeur des Universités, Université de Carthage

Rapporteur : Michèle Artigue, Professeur des Universités Émérite, Université Paris Diderot

Rapporteur : Brigitte Grugeon, Professeur des Universités, Université Paris Est Créteil

Examinatrice : Mahel Mosbah, Professeur des Universités, Université de Tunis El Manar

Examinateur : Abdelmajid Ennacer, Maître de Conférences, Université virtuelle de Tunis

Recherches sur l'articulation des dimensions sémantique, syntaxique, sémiotique, praxéologique et épistémologique dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques.

Étude de cas : algèbre du secondaire et développements limités au début de l'université

Rahim KOUKI

Institut Préparatoire aux Études d'Ingénieurs El Manar - LAMSIN ENIT[1] -

[1] Laboratoire de Modélisation Mathématique et Numérique dans les Sciences de l'Ingénieur.

Remerciements

Je remercie Michèle Artigue, Professeur des Universités Émérite, Université Paris Diderot et Brigitte Grugeon, Professeur des Universités, Paris Est Créteil, d'avoir rapporté sur mon travail.

Je remercie Riadh Robbana, Professeur des Universités, Université de Carthage, d'avoir accepté de présider le jury de ma soutenance d'Habilitation Universitaire à l'Institut Préparatoire aux Études d'Ingénieurs El Manar de l'Université de Tunis El Manar.

Je remercie aussi Mahel Mosbah, Professeur des Universités, Université de Tunis El Manar, et Abdelmajid Ennacer, Maître de Conférences, Université Virtuelle de Tunis, d'avoir fait partie du jury de soutenance.

J'exprime ma reconnaissance à Viviane Durand-Guerrier, Professeur des Universités, Université de Montpellier, qui n'a épargnée aucun effort pour m'accompagner dans mon parcours de recherche avant et après ma thèse et avec qui j'ai collaboré dans différents projets de recherche.

Je remercie mon professeur Mahdi Abdeljaouad, Professeur des Universités retraité de l'Université de Tunis, pour les différents échanges portant sur mon travail et pour son soutien moral.

Je n'oubli surtout pas de remercier Melika Ouelbeni, Professeur des Universités, Université de Tunis, qui n'a pas cessé de m'impliquer dans le domaine de la philosophie de la logique et des mathématiques.

Enfin, tous les collègues de l'IPEI El Manar, du LAMSIN ainsi que les membres de l'équipe I2M de l'Université de Montpellier qui m'ont encouragé tout au long de l'année sabbatique 2016/2017 pendant laquelle j'ai consacré tout mon temps à la préparation de mon Habilitation Universitaire.

Mes remerciements vont aussi à ma famille et mes amis.

Table des matières

Introduction générale 1

I. L'articulation des dimensions sémantiques, syntaxiques, sémiotiques, praxéologiques et épistémologiques dans l'enseignement et l'apprentissage de l'algèbre au secondaire tunisien 3

I.1. La pertinence de la prise en compte des dimensions sémantiques et syntaxiques dans l'enseignement et l'apprentissage de l'algèbre au secondaire 9

I.1.1. Syntaxe versus sémantique 9

I.1.2.Syntaxe versus sémantique en algèbre au secondaire 12

I.2. Un croisement d'outils didactiques 13

I.2.1. Les praxéologies mathématiques 14

I.2.2. La dimension sémiotique 18

I.2.3. Modèle de grille d'analyse multidimensionnelle 19

I. 3. Investigations Macro-didactiques 22

I.3.1. L'évolution historique des praxéologies algébriques dans les différents curriculums Tunisiens de la première année de l'enseignement secondaire 22

I. 3. 2. Le primat de la syntaxe dans les programmes et les manuels tunisiens actuels 47

I.4.Investigation micro-didactique : La limite des techniques algébriques à dimension syntaxique 53

I.5. Conclusion de la partie I 56

II. L'articulation des dimensions sémantiques, syntaxiques et sémiotiques dans l'enseignement et l'apprentissage des développements limités au début de l'université 59

II. 1. Introduction 61

II.2.Genèse historique des développements limités et des approximations locales.. 63

II. 2. 1. Les techniques géométriques conduisant aux premiers termes du développement limité 63

II. 2. 2. La détermination des développements limités par la méthode des séries infinies 65

II. 2. 3. Les développements limités des fonctions quelconques 66

II. 2. 4. Récapitulatif des différentes phases de la genèse historique des développements limités 67

II.3.Analyse macro-didactique du concept développement limité 69

II.3.1. Analyse du programme de la première année de l'université section Math-Physique..... 69

II.3.2.Étude des manuels et de polycopiés de cours 70

II.4. Investigation Micro-didactique : Enquête auprès des enseignants universitaires 72

II.5. Conclusion de la partie II 72

Conclusion et perspectives scientifiques 75

Bibliographie 77

Annexes 85

Annexe 1 85

Annexe 2 87

Introduction générale

Le document que nous présentons, constitue une synthèse de nos travaux de recherches en didactique des mathématiques conduits principalement dans le domaine de l'enseignement et de l'apprentissage des équations, des inéquations et des fonctions algébriques au secondaire et des développements limités au début de l'université.

Constituant de véritables outils de résolution de problèmes dans plusieurs domaines intra et extra-mathématiques, ces objets d'enseignement présentent certaines subtilités au niveau de leurs enseignements puisqu'un travail sémantique est nécessaire pour pouvoir leur donner du sens dans différentes situations articulant différents cadres et registres.

L'originalité de notre travail de recherche est de montrer que se référer au cadre de la sémantique logique développée dans les travaux de Tarski (1972) est pertinent. Nous nous intéressons en particulier à l'articulation des dimensions sémantiques et syntaxiques pour cerner les difficultés de l'enseignement et de l'apprentissage de l'algèbre au secondaire et des développements limités au début de l'université via des analyses fines s'appuyant sur un modèle d'analyse multidimensionnelle développé dans la continuité de notre travail de thèse (Kouki, 2008).

Ces travaux de recherches ont été conduits dans deux directions complémentaires.

La première direction, développée dans la partie I, est la continuité de nos investigations didactiques de l'enseignement et de l'apprentissage de l'algèbre au secondaire tunisien dans laquelle nous montrons les potentialités offertes par la dualité sémantique / syntaxe. Ceci nous permet en particulier de dépasser la caractéristique classique des équations et des inéquations comme étant des égalités ou inégalités comportant au moins une variable et de rendre compte des difficultés pouvant être liées aux notions de variables, d'assignation de valeur à la variable dans un domaine d'interprétation, et de soulever et de traiter les questions de quantification associées.

Nous montrerons par la suite, comment le besoin du croisement de ce cadre de référence avec les dimensions sémiotiques (Duval, 1991) et praxéologiques (Chevallard, 1992), s'est naturellement imposé, ce qui nous a permis d'élaborer un modèle de grille d'analyse multidimensionnelle inspiré du modèle de Grugeon (1997), exploité aussi bien dans les analyses épistémologiques de l'évolution historique des praxéologies algébriques que dans nos investigations macro et micro-didactiques à travers les analyses des programmes et des manuels et d'un questionnaire permettant de cerner les difficultés liées à l'enseignement et à l'apprentissage des objets de l'algèbre du secondaire tunisien.

La deuxième direction, développée dans la partie II, correspond à un élargissement de nos objets d'étude à l'enseignement et à l'apprentissage du concept de développement limité à l'entrée à l'université. Bien que ce concept relève du champ de l'analyse, les techniques algébriques jouent un rôle important dans un grand nombre de tâches où il intervient et la question de l'interprétation des calculs constitue une part essentielle des activités le mobilisant. Nous avons conduit une étude épistémologique sur l'évolution historique du concept de développement limité ; une étude macro-didactique des programmes et des manuels de cours et une étude micro-didactique s'appuyant sur une enquête adressée à des enseignants universitaires.

Pour conduire ces études, nous avons réinvestis les outils méthodologiques développés dans notre travail de thèse, en particulier la grille d'analyse multidimensionnelle.

Dans cette note de synthèse, nous nous proposons de montrer, en continuité avec les travaux didactiques de Durand-Guerrier (2005a, 2005b, 2013 et 2015) que le croisement du point de vue de la sémantique logique et en particulier celui des dimensions sémantiques et syntaxiques avec les dimensions didactiques d'analyses sémiotiques et praxéologiques, permet une relecture de notre travail de thèse et ouvre un champ de développement des travaux didactiques aussi bien au niveau de l'enseignement et de l'apprentissage des mathématiques au secondaire qu'à l'université.

Nous avons adopté une présentation thématique, dans le sens où chaque partie comporte une direction de recherche relative à plusieurs de mes publications.

Dans un souci de simplification de la lecture de ce document, nous avons essayé autant que possible de décrire les résultats que nous avons obtenus sans approfondir les détails qui sont disponibles dans les articles ci-joints en annexes.

Les chapitres de ce document seront illustrés par des exemples, visant à en faciliter la lecture.

I. L'articulation des dimensions sémantiques, syntaxiques, sémiotiques, praxéologiques et épistémologiques dans l'enseignement et l'apprentissage de l'algèbre au secondaire tunisien

Documents joints à la partie I du rapport d'activité de recherche

[1] Kouki, R. (2017a). L'articulation des dimensions syntaxique et sémantique en algèbre du secondaire. *Recherche en Didactique des Mathématique*, vol. , pp, La pensée Sauvage. (à paraître)

[2] Chellougi F., Ghedamsi I., Kouki R. (2015) Entre le formalisme mathématique et ses « significations » : l'acte interprétatif, un maillon faible de la relation didactique ? In D. Butlen& al (Eds.) Rôles et places de la didactique et des didacticiens des mathématiques dans la société et dans le système éducatif (pp.465-474) (Volume 2-Cdrm). *Recherches en Didactique des Mathématiques*. Grenoble : La pensée sauvage.

ISBN 978-2-85919-305-8

[3] Kouki, R., Hassayoune, S. (2015b).Développement de la pensée algébrique dans le curriculum tunisien : Analyse épistémologique et institutionnelle. In L.Theis (Eds) *Actes du colloque Espace Mathématique Francophone 2015* (pp. 290-312).Alger :USTHB.

http://emf2015.usthb.dz/gpdf/EMF2015GT3KOUKI_HASSAYOUNE.pdf

[4] Hassayoune, S., Kouki, R. (2015).La genèse de la pensée algébrique : Ruptures et obstacles épistémologiques. In L.Theis (Ed.) *Actes du colloque Espace Mathématique Francophone 2015* (pp. 386-402).Alger : USTHB.

http://emf2015.usthb.dz/gpdf/EMF2015GT4HASSAYOUNEKOUKI.pdf

[5] Kouki, R., Chellougui, F. (2013). Limit of the syntactical methods in secondary school algebra, In B.Ubuz,C.Haser& M-A. Mariotti(Eds.)*Proceedings of Eigth Conference of European Research on Mathematics Education* (pp. 450-459).Turkey : Antalya.

ISBN 978-975-429-315-9

http://www.mathematik.unidortmund.de/~erme/doc/CERME8/CERME8_2013_Proceedings.pdf

[6]Kouki, R., Ghedamsi, I. (2012). Limite des méthodes syntaxiques en algèbre du secondaire, In J-L. Dorier, S. Coutat (Eds.) *Actes du Colloque Espace Mathématique Francophone 2012* (pp. 435-444). Genève : Université de Genève.

ISBN 978-2-8399-1115-3

http://emf.unige.ch/files/1814/5320/2248/EMF2012GT3KOUKI.pdf

[7] Kouki, R. (2010). Le raisonnement logique pour assurer un enseignement de la pensée mathématique : Le cas des équations et des fonctions algébriques. In A. Kuzniak, M. Sokhana (Eds.) Enseignement des mathématiques et développement enjeux de société et de formation. *Numéro spécial de la Revue Internationale Francophone* (pp. 1221-1235).

ISSN : 0850-4806

[8] Kouki, R. (2006).Équations et inéquations au secondaire entre syntaxe et sémantique.*Petit x*, *71*, 7-28. Grenoble :REM.

ISSN :0759-9188

http://publimath.irem.univ-mrs.fr/biblio/IGR06007.htm

Les documents ci-dessus référenciés et publiés depuis 2006, sont joints au dossier de demande d'habilitation, ils constituent l'armature de la première partie de mes travaux de recherche mettant l'accent sur la pertinence du croisement des dimensions de la logique prédicative du premier ordre et en particulier les dimensions sémantiques et syntaxiques avec les dimensions historiques et épistémologique, l'analyse sémiotique, les praxéologies algébriques dans l'enseignement et l'apprentissage de l'algèbre au secondaire.

J'ai repris, dans certains chapitres de cette première partie, des éléments issus de ces documents, en les complétant ou au contraire, en les présentant de façon simplifiée et abrégée de façon à pouvoir les insérer dans des considérations plus générales.

Toutefois, les redondances qui peuvent exister, entre les documents et le corps de notre texte, me paraissent nécessaires afin de pouvoir insérer certains éléments pour présenter ma démarche.

Les documents dont les références sont présentées ci-dessus sont classés en quatre groupes :

1. La pertinence de la prise en compte des dimensions sémantiques syntaxiques et sémiotiques dans l'enseignement et l'apprentissage de l'algèbre du collège au lycée :

Documents [7] et [8]

Ces documents sont fondamentaux puisqu'ils constituent les premiers développements de ce qu'a été notre travail de thèse dans le cadre de la sémantique logique et ses apports à la réflexion épistémologique et didactique sur l'enseignement et l'apprentissage des objets « équations », « inéquations » et « fonctions algébriques » constituant la chaîne épistémique de l'enseignement et de l'apprentissage de l'algèbre au secondaire tunisien.

Dans ces recherches, nous défendons l'hypothèse de la pertinence du point de vue de la sémantique logique au sens de Tarski (1960, 1972) comme étant un cadre d'analyse porteur pour les études didactiques dans l'enseignement secondaire tunisien. Ce cadre d'analyse logico-mathématique est très intéressant pour aborder les questions didactiques, via la notion de satisfaction d'une phrase ouverte, puisqu'il permet d'élargir d'une certaine façon la seule caractéristique « égalité ou inégalité comportant au moins une variable » ce qui permet par la suite de cerner les difficultés rencontrées par les élèves dans l'environnement équation, inéquation et fonction algébrique.

2. Croisement d'outils d'analyses didactiques :

   Les documents [5] et [6] peuvent être vus comme étant l'étape fondamentale du passage vers les investigations expérimentales et ce, par le développement d'un modèle de grille d'analyse didactique croisant l'analyse logique en termes de dimensions sémantiques et syntaxiques avec les dimensions sémiotiques au sens de Duval (1996) et praxéologiques développées par Chevallard (1992). Ce modèle a montré sa pertinence dans les analyses macro et micro-didactiques dans le champ de l'algèbre au secondaire.

3. Les investigations Macro-didactiques :

   À travers les documents [3] et [4], nous montrons la pertinence de l'exploitation du modèle d'analyse dans les investigations en termes de transposition macro-didactique des programmes et des manuels de mathématiques de la première année de l'enseignement secondaire.

   Nous avons exploité la dimension historique, pour conduire les études épistémologiques de l'évolution historique des praxéologies algébriques aussi bien au cours de la genèse de l'algèbre en tant que savoir qu'à travers les différents curriculums de l'enseignement de l'algèbre de la première année de l'enseignement secondaire depuis la première réforme (1976) jusqu'à l'actuelle (2002).

   Nous reprenons une partie du document [1] pour détailler les résultats des analyses d'une investigation macro-didactique des différents programmes et manuels de l'enseignement de l'algèbre au secondaire.

4. Investigations micro-didactiques : La limite des techniques algébriques à dimension syntaxique.

   Les documents [1] et [2] concernent l'apport du cadre de la sémantique logique à nos investigations en termes de transposition didactique interne d'un questionnaire adressé à des élèves du secondaire. Les analyses ont montré que, pour la résolution de certains problèmes algébriques peut s'avérer inopérante dans certains cas de types de tâches où les techniques mobilisables nécessitent impérativement un recours à des interprétations sémantiques dans un ou plusieurs registres sémiotiques.

Les résultats de recherche que nous présentons dans cette partie s'inscrivent dans la problématique globale de l'étude didactique de l'articulation des dimensions sémantiques et syntaxiques dans l'enseignement et l'apprentissage de l'algèbre au secondaire tunisien.

Plus précisément, nous abordons cette question d'articulation en nous centrant sur l'étude logique des objets de l'algèbre qui *a priori* pourrait être porteuse aux études didactiques.

Il nous semble que peu de chercheurs ont traité des questions liées à l'articulation sémantique / syntaxe en se référant à un point de vue logique au niveau de la transposition des objets de notre étude. Chevallard (1984, 1989) a souligné que l'incontournable dialectique dans le passage de l'arithmétique au calcul algébrique rend manifeste une dimension syntaxique à laquelle le domaine de calcul associé fournit une dimension sémantique. De son côté, Grugeon (1997) a montré que la compétence algébrique ne s'évalue que par les capacités techniques qui renvoient essentiellement à la dimension syntaxique et aux capacités interprétatives mettant en jeu l'interprétation, le sens et la dénotation faisant appel à la dimension sémantique. En s'appuyant essentiellement sur les travaux de Frege (1971), Drouhard & Panizza (2012) ont mis en évidence quelques difficultés d'ordre sémio-linguistiques reposant sur beaucoup d'implicite dans le langage mathématique au niveau de l'algèbre élémentaire.

De ce fait, il nous a paru très intéressant de montrer les potentialités que peut offrir le point de vue logique aux études didactiques selon lequel l'égalité, le statut des lettres, l'assignation de valeurs aux variables dans les expressions algébriques et la quantification pourraient rendre compte de la pertinence de la prise en compte des dimensions sémantiques et syntaxiques au sens logique des termes dans le traitement des équations, des inéquations et des fonctions algébriques au secondaire.

L'hypothèse fondamentale de ces recherches réside sur le fait que la question de l'articulation des dimensions sémantiques et syntaxiques dans les résolutions des problèmes liés à la manipulation des équations, des inéquations et des fonctions est un champ qui reste encore à explorer tout au long du processus de leur transposition didactique.

Dans une première section, nous rendons compte du travail mené dans notre thèse (Kouki, 2008) motivant le choix de l'outil logique et en particulier les dimensions sémantiques et syntaxiques adoptées tout au long de nos travaux de recherche.

Dans une deuxième section, nous décrivons une grille d'analyse multidimensionnelle, que nous avons développé, à partir de laquelle nous avons croisé les praxéologies mathématiques et en particulier le bloc [tâche, technique] ainsi que les registres de représentations sémiotiques avec les dimensions syntaxiques et sémantiques et qui constitue *a priori* un modèle prometteur pour répondre à plusieurs questionnements de nature didactique.

Dans une troisième section, nous présentons les résultats des investigations macro-didactiques s'appuyant sur un modèle d'analyse adopté dans l'étude de l'évolution historique des programmes et des manuels tunisiens de l'algèbre de la première année de l'enseignement secondaire[2] d'une part, et des programmes et des manuels actuels de l'enseignement secondaire, d'autre part.

Dans la dernière section, nous montrons, à partir d'une investigation micro-didactique, les limites des techniques à dimensions syntaxiques dans certains cas de résolutions algébriques.

[2] Tout au long des trois réformes du système éducatif de 1958, 1991 et 2002 qui ont largement influencé les contenus des programmes et des manuels scolaires.

I.1. La pertinence de la prise en compte des dimensions sémantiques et syntaxiques dans l'enseignement et l'apprentissage de l'algèbre au secondaire

L'apprentissage des techniques algébriques est un objectif fondamental de l'enseignement de l'algèbre au secondaire. Du côté des élèves, la préférence est accordée à une application automatique des techniques. Dans cette partie de notre étude, en croisant les investigations didactiques s'appuyant sur la sémantique logique avec des analyses épistémologiques, sémiotiques et praxéologiques, nous montrons qu'en l'absence de mobilisation de techniques sémantiques articulant différents modes d'interprétations inter-registre et intra-registre, les techniques syntaxiques de résolution peuvent s'avérer inopérantes et peuvent mettre les apprenants en échec. Ces investigations visent également à produire des alternatives de remédiations aux difficultés rencontrées par les élèves dans le processus enseignement / apprentissage de l'algèbre au début du secondaire.

En suivant Durand-Guerrier (2005, 2013), nous faisons l'hypothèse que le calcul des prédicats du premier ordre et en particulier la théorie des modèles de Tarski est une théorie logique de référence pertinente pour les études didactiques (Kouki, 2006). Elle permet d'élargir la seule caractéristique des objets de l'algèbre du secondaire et en particulier les équations et les inéquations comme étant des égalités et des inégalités comportant au moins une variable et rend compte des difficultés qui peuvent être liées aux notions de variables, d'assignation de valeur à la variable dans un domaine d'interprétation, et permet de soulever et de traiter les questions de quantification associées.

Dans ce qui suit, nous motivons le choix de l'outil logique et en particulier les dimensions sémantiques et syntaxiques pour l'analyse des objets de l'algèbre du secondaire.

I.1.1. Syntaxe versus sémantique

Le langage logique est défini par une syntaxe (système géré par des symboles et des règles combinées sous forme de formules) et une sémantique associée à ce langage et permettant d'attacher à ces symboles, et donc aux formules ainsi qu'à ces symboles, une interprétation.

Aussi simple soit-il, un discours mathématique ne peut pas en général être analysé par le calcul propositionnel, puisque l'on parle généralement *d'objets* et de *propriétés* relatives à ces objets, ainsi que des relations entre objets, et puisqu'il met en jeu des questions de quantifications nécessitant une extension du calcul des propositions réalisée dans le calcul des

prédicats (Durand-Guerrier et Arsac 2003, 2005). Ainsi, Durand-Guerrier (2005) montre clairement qu'il

« … n'est pas possible, en mathématiques, de se contenter de considérer les connecteurs logiques sous le seul point de vue propositionnel, et ceci pour plusieurs raisons. La première, et la plus évidente, est le fait que la plupart des théorèmes de mathématiques sont des énoncés conditionnels généraux, qui se modélisent par une implication universellement quantifiée. La seconde, que nous avons mis en évidence dans notre travail, est la nécessité de considérer, pour l'implication, une extension du connecteur propositionnel sous la forme d'une fonction propositionnelle, s'interprétant par une phrase ouverte, dont chacune des instances, dans un domaine d'interprétation donné, est une implication matérielle… Cette extension de l'implication joue donc un rôle central dans l'articulation entre les points de vue syntaxique et sémantique lors de la conduite et de l'analyse des raisonnements. La troisième tient au fait que la validité des raisonnements mathématiques est indissolublement liée à la validité logique des schémas implicatifs associés ; or, si certains peuvent être établis dans le seul calcul des propositions, nous verrons plus loin que pour d'autres, il est impératif de se placer dans le calcul des prédicats. » (Durand-Guerrier, 2005, p.79)

De notre côté, nous nous plaçons d'emblée dans le calcul des prédicats du premier ordre qui est nécessaire pour l'analyse des énoncés mathématiques pour lesquels le calcul propositionnel est inopérant.

Ce système de calcul comporte des symboles pour les connecteurs et les quantificateurs, des parenthèses, des lettres de variables, des lettres de constantes, des fonctions permettant de transformer ces variables en d'autres variables et des relations permettant de lier ces variables. Les formules de la logique du premier ordre sont construites en utilisant les connecteurs de la logique propositionnelle et les deux quantificateurs universels et existentiels $\forall$ et $\exists$.

Les règles de formation des formules sont les suivantes :

P_1 Un prédicat saturé par autant de termes qu'il a de place est une formule.

P_2 Si F est une formule, $\neg F$ est une formule.

P_3 Si F et G sont des formules, $F \wedge G$, $F \vee G$, $F \Rightarrow G$, $F \Leftrightarrow G$ sont des formules.

P_4 Si F est une formule et x une lettre de variable $\exists\, x\, F$ et $\forall\, x\, F$ sont des formules.

Rien d'autre n'est une formule.

Dans une formule, une lettre de variable est dite libre si elle n'est dans le champ d'aucun quantificateur et est liée sinon.

Les formules qui contiennent une variable libre sont donc des fonctions propositionnelles. Celles-ci modélisent les propriétés et les relations où elles sont satisfaites ou non par des objets auxquels elles sont susceptibles de s'appliquer. Par exemple : « x est un nombre pair » est une propriété modélisée par une fonction propositionnelle $F(x)$ où x est une variable libre et F est une lettre du prédicat « est un nombre pair »[3]. Ce type de phrase est ambigu et n'exprime pas un sens complet.

C'est sous ce point de vue que s'inscrit la perspective sémantique en logique due à Tarski (1936, 1944) qui étudie les interprétations possibles des énoncés, des symboles de variables, des constantes, des relations et des fonctions etc. Elle permet d'associer une valeur de vérité à une formule donnée dans une interprétation donnée. Tarski la définit comme étant :

« *… l'ensemble des études qui traitent des concepts, qui, en gros, expriment certaines relations entre les expressions d'un langage et les objets et états de choses auxquels ces expressions se réfèrent.* » (Tarski, 1972, p. 133)

Cette théorie sémantique de la vérité nécessite une structure interprétative : un univers du discours, des interprétations pour les lettres de prédicats, de fonctions et éventuellement de constantes et de fonctions.

L'élément minimum est le terme : une lettre de variable, une lettre de constante sont des termes ; une fonction saturée par des lettres de variables et / ou des lettres de constantes est un terme. Un terme s'interprète comme un nom d'objet.

Les quantificateurs modélisent sémantiquement les notions correspondantes dans la langue naturelle et les règles syntaxiques ne sont pas non plus indépendantes de cet objectif puisque dans une formule un quantificateur est suivi d'une variable.

En mathématiques, dans IR l'énoncé $x^2 + y^2 = 100$ est une relation non fonctionnelle, puisque à un seul et même nombre réel x peuvent correspondre deux nombres différents qui satisfassent cette relation. En effet, au nombre 6, par exemple, nous pouvons associer à la fois 8 et -8.

Dans ce cas de situations Tarski (1960) a expliqué que :

« Il semble, toutefois, inopportun, au moins au niveau élémentaire, de dénoter de telles relations comme des fonctions, car cette façon ne tend qu'à oblitérer la différence essentielle entre la notion de fonction et la notion plus générale de relation. »(Tarski, 1960, p. 89)

[3] Quine (1950) l'appelle « phrase ouverte » qui est un énoncé sans valeur de vérité.

Tarski a résolu ce problème en proposant une construction récursive de la satisfaction d'une phrase ouverte ou d'une formule complexe par un élément dans toute structure comportant un univers du discours non vide et une interprétation de toutes les lettres de prédicats.
Ceci a permis de définir la notion de modèle d'une formule d'un langage formalisé qui est une structure interprétative dans laquelle la formule est satisfaite par toute suite d'objets, ce qui permet de définir la vérité des phrases closes.

I.1.2.Syntaxe versus sémantique en algèbre au secondaire

L'égalité mathématique n'est pas établie entre deux signes ou symboles, mais entre deux significations. Affirmer que $a = b$, c'est affirmer que $a$et b signifient la même chose et que ces deux signes ont la même dénotation (ou référence), mais ils n'ont pas le même sens, sinon $a = b$ ne serait pas différent de $a = a$.
La dénotation d'une proposition a été définie par Frege comme étant sa valeur de vérité, et son sens comme étant la pensée exprimée. Par conséquent, d'un point de vue extensionnel « Berlin est la capitale de l'Allemagne » et $2 + 2 = 4$ sont équivalentes parce qu'elles ont la même valeur de vérité, bien qu'elles n'aient évidemment pas le même sens.
Tarski (1936, 1972) relit la notion de satisfaction d'une fonction propositionnelle par un élément à celle de solution d'une équation en mathématiques. Il a même expliqué qu'une terminologie spéciale est passée en mathématiques où
« *Les variables figurant dans une équation s'appellent les inconnues, et les nombres satisfaisant à l'équation, les racines de l'équation.*
Par exemple, dans l'équation : $x^2 + 6 = 5x$ *la variable « x » est l'inconnue, tandis que* 2 *et* 3 *sont les racines de l'équation* » (Tarski, 1960, p. 6)
Ce sont les apports de Tarski qui vont permettre de donner une définition non ambiguë de la notion d'égalité et d'inégalité et par conséquent des objets équation et inéquation dans le domaine des mathématiques.
Dans le langage de l'algèbre, une équation ou une inéquation est une phrase ouverte : elle comporte une ou plusieurs variables libres. Étant donné un domaine d'objets (par exemple un ensemble de nombres, mais pas seulement), un élément de ce domaine est solution de l'équation ou de l'inéquation si et seulement s'il satisfait la phrase ouverte, c'est-à-dire si et seulement si la proposition obtenue en assignant cet objet à la variable est une proposition vraie dans le domaine considéré.

Ceci généralise les notions de tautologies et des énoncés universellement valides du calcul des prédicats qui sont associés aux règles d'inférences valides qui gèrent les quantificateurs et qui sont généralement utilisées dans le raisonnement mathématique.

Sous ce point de vue, une lettre d'inconnue est un nom d'objet et on devrait plutôt parler d'équations à deux inconnues (Durand-Guerrier, 2004 b). Certaines équations sont vraies de tous les objets du domaine considéré, on a alors une identité. Ceci est toujours lié au domaine considéré.

La syntaxe fournit des règles de transformations des équations et des inéquations, justifiées généralement par la sémantique en préservant le plus souvent la satisfaction même si elles se détachent du sens des symboles. Deux équations ou inéquations sont équivalentes si et seulement si elles sont satisfaites exactement par les mêmes éléments. De telles transformations permettent de travailler essentiellement au niveau de la syntaxe. C'est à ce moment-là que la dimension sémantique et en particulier la notion de satisfaction d'une équation intervienne et dans ce cas, il faut bien revenir aux objets. En outre, certaines transformations ne préservent pas la satisfaction, ce qui nécessite un contrôle sémantique. Par exemple, l'équation $x^2 - 1 = |x + 1|$ qui a pour ensemble de solutions $\{-1,2\}$ cependant, l'application de certaines règles de transformations algébriques purement syntaxiques et s'appuyant sur des implications pourrait conduire, en l'absence de contrôle sémantique, à proposer, comme ensemble de solutions $\{-1,0,2\}$ qui contient des éléments qui ne satisfont pas tous l'équation de départ.

Nous pensons ainsi dire que le point de vue logique, développé ci-dessus, offre un cadre unificateur pour aborder les concepts d'équations, inéquations et fonctions algébriques sous les doubles aspects sémantique et syntaxique, constitutifs de ces notions et permettant de les relier entre elles.

I.2. Un croisement d'outils didactiques

Les éclairages que la sémantique logique peut apporter aux objets de l'algèbre du secondaire et en particulier les objets équations, inéquations et fonctions algébriques sont des reconstructions a posteriori qui ne suffisent évidemment pas, à elles seules, à nourrir nos investigations didactiques.

Dans ce qui suit, nous justifierons le choix des cadres et des outils didactiques adoptés pour conduire nos investigations macro-didactiques qui concernent l'organisation, relativement

globale, des programmes et des manuels de l'enseignement de l'algèbre au secondaire Tunisien.

Ce travail fait l'objet d'une publication dans la revue *Recherches en didactique des mathématiques* (Kouki, 2017a) d'une part, et d'un mémoire de Master de Hassayoune soutenu en 2015, d'autre part.

Le corpus largement pris est celui des programmes et des manuels tunisiens de mathématiques au niveau de trois premières années de l'enseignement secondaire[4]actuel et les programmes et les manuels de la première année secondaire depuis l'indépendance.

Les techniques d'analyse didactiques retenues pour conduire cette étude s'appuyaient sur :

- Un modèle croisant les dimensions historiques et praxéologiques (Kouki & Hassayoune, 2015b) et (Hassayoune & Kouki, 2015)
- Un modèle d'analyse croisant des dimensions sémantiques, syntaxiques, sémiotiques et praxéologiques (Kouki, 2017a)

Dans ce qui suit nous introduisons ce que nous avons retenu de la dimension d'analyse praxéologique et de la dimension sémiotique.

I.2.1. Les praxéologies mathématiques

En introduisant le concept de transposition didactique, Chevallard (1991) vise à relativiser l'évidence des savoirs enseignés[5] et à prendre en compte le rôle et l'impact de l'écosystème didactique lors de l'analyse des phénomènes d'enseignement / apprentissage.

La nature, l'objet, la fonction et les particularités intrinsèques à un savoir donné sont dynamiques et variables en fonction des contextes, des sociétés et des périodes dans lesquels ce savoir est mobilisé et dépendent aussi et dans une large mesure des institutions qui les hébergent. Ceci rend indispensable l'examen minutieux du rapport institutionnel à ce savoir et, plus généralement, à mener une réflexion anthropologique sur le fondement, les conditions et les contraintes pesant sur la diffusion des contenus d'enseignement dans les institutions.

La problématique écologique est au cœur de cette nouvelle orientation dans le champ de la didactique. Il est alors question au cours de notre travail de recherche, d'examiner les conditions qui favorisent ou qui ont favorisé l'existence d'un objet de savoir algébrique dans une institution d'enseignement ainsi que les contraintes qui pourraient gêner cette existence.

[4] Les niveaux de première, deuxième et troisième année de l'enseignement secondaire tunisien.

[5] Qui interroge la raison d'être et l'essence même du savoir présent dans le système didactique et nous amène à être vigilants par rapport à une éventuelle illusion de transparence de ce savoir.

Les analyses engagées porteront alors sur les mathématiques elles-mêmes (ici l'algèbre) en tant qu'objets de savoir et sur les systèmes dans lesquels elles vivent en tant qu'environnement didactique hébergeant.

Les analyses de programmes et de manuels scolaires permettent de dégager le rapport institutionnel à l'algèbre dans les classes du secondaire via le modèle des praxéologies mathématique qui est le savoir mathématique. Ces praxéologies permettent de

« *… procéder à une analyse fine de l'approche proposée actuellement par le système d'enseignement et plus particulièrement par les manuels scolaires*. » (Ferraton et Chaachoua, 2013, p. 49)

En effet, toute activité humaine consiste à accomplir une tâche t d'un certain type T au moyen d'une technique τ justifié par une technologie θ qui permet en même temps de la penser, voire de la produire, et qui a son tour est justifiable par une théorie Θ

L'activité peut s'analyser comme étant un système de savoir en fonctionnement nommé praxéologie ou organisation praxéologique, ce système est composé de deux blocs : un bloc pratico-technique appelé praxis (au sens d'action sous-tendue par une idée vers un résultat pratique) et un autre bloc technologico-théorique appelé logos (au sens de discours explicatif et rationnel).

Ces deux blocs constituant une praxéologie où le premier est appelé praxis et le second est le logos :

a) Le bloc de la praxis (pratico-technique), concerne le savoir-faire et est constitué de deux groupes d'éléments :

-Les tâches (notées t) et les types de tâches (notés T) sont des éléments solidaires et fondamentaux de toute praxéologie ; une tâche relève toujours d'un type particulier de tâches et s'exprime par un verbe d'action.

Ainsi, développer l'expression algébrique « $(2x+3)\ (x^2+3x)$ », factoriser dans Z[x] le trinôme « x^2-6x+5 », résoudre dans IR l'équation « $-3x^2+x+8=0$ » sont des tâches, vérifier que le nombre satisfait l'équation cubique, étudier l'existence d'un zéro d'une fonction via le théorème des valeurs intermédiaires sont des types de tâches.

-Les techniques (notées τ) sont les manières d'accomplir et de réaliser les tâches.

Par exemple pour accomplir le type de tâche « résoudre une équation quadratique » on peut utiliser la technique de l'algorithme de résolution avec discriminant ou procéder à une factorisation du premier membre de sa forme réduite.

Le bloc praxis ou pratico-technique se note alors [T, τ] et s'identifie à un savoir-faire.

b) Le bloc du logos (technologico-théorique) concerne le savoir et est constitué de deux composantes :

-Les technologies (notées θ) : Ce sont les discours rationnels justifiant les techniques. La teneur de rationalité peut varier selon la géographie des institutions et/ou dans une institution donnée en fonction du temps. Une technologie servant à justifier le type de tâches « développer une expression algébrique » est par exemple, la propriété de la distributivité de la multiplication sur l'addition dans le corps des nombres réels IR. Une propriété, un théorème, une assertion mathématique etc. sont des exemples de technologies.

-Les théories (notées Θ) : Sont des discours justifiant les technologies, les justifications et les explications étant alors élevées à un niveau supérieur en matière d'argumentation et de rationalité. Une théorie justifiant la technologie « propriété de la distributivité de la loi x sur la loi + dans IR » est par exemple, la théorie des structures algébriques sur le corps (IR, +, x).

Une praxéologie ponctuelle est alors un quadruplet composé d'un type de tâches T, d'une technique τ, d'une technologie θ et d'une théorie Θ et se note [T, τ, θ, Θ].

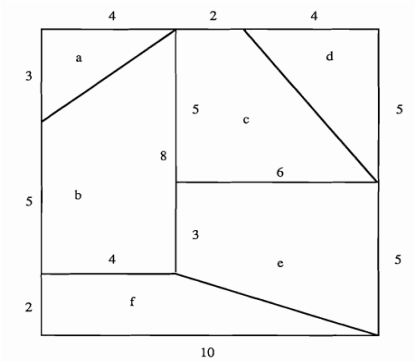
Étant donné un thème mathématique à enseigner, il est possible de caractériser les praxéologies en deux types : Les praxéologies ou organisations mathématiques qui décrivent la réalité mathématique qui se construit dans une classe et les praxéologies ou organisations didactiques qui décrivent la manière de réaliser l'étude du thème mathématique en question et la construction de la réalité mathématique sous-jacente.

Par exemple pour introduire la proportionnalité aux élèves du début du collège[6](tâche didactique), on peut utiliser par exemple la technique de l'agrandissement du puzzle, technique justifiée par le bloc technologico-théorique constitué par la technologie renvoyant aux méthodes fonctionnelles de la proportionnalité :

$$(f(kx) = kf(x); f(x+y) = f(x) + f(y)).$$

Rappelons que la situation fondamentale de l'agrandissement du puzzle s'introduit de façon à construire un puzzle semblable mais agrandi où le segment qui mesure x centimètre sur le modèle ci-dessous devra mesurer y centimètre sur la production des élèves.

[6] Élèves de la 7ème année de l'enseignement de base tunisien.



Dans le cas où la praxéologie concerne un unique type de tâche, le quadruplet [T, τ, θ, Θ] désigne alors une praxéologie ponctuelle. Mais cet atome praxéologique vit rarement isolé et s'intègre souvent dans un agrégat d'autres praxéologies pour former des organisations praxéologiques de différentes tailles.

En présence de plusieurs praxéologies ponctuelles [T_i, τ_i, θ, Θ] se groupant autour d'une même technologie θ on aura à une organisation praxéologique locale illustration courante des pratiques scolaires observées dans nos classes où l'essentiel de l'apprentissage est consacré à la maîtrise d'une technologie par le biais de techniques de réalisation d'un unique type de tâches. Il en est ainsi par exemple dans les leçons consacrées à des manipulations d'expressions algébriques ou de résolution d'équations ou de systèmes d'équations.

- Organisation praxéologique régionale : Des organisations praxéologiques locales peuvent aussi s'articuler autour d'une même théorie Θ avec d'autres organisations locales au point de générer une organisation régionale. Ce cas se présente par exemple lorsque plusieurs technologies (définitions, propositions, théorèmes, …) sont intégrées et appliquées dans un même cadre théorique (la théorie des nombres, l'algèbre des polynômes, la théorie des structures algébriques, la géométrie euclidienne, etc.).
- Organisation praxéologique globale : Des organisations régionales peuvent de la même façon se grouper au sein d'une macro-organisation praxéologique s'articulant autour de plusieurs entités théoriques, nommée organisation globale. Ce cas peut se rencontrer lorsque l'on procède à la conception et à la réalisation d'un projet multidimensionnel nécessitant le concours de plusieurs théories, voire plusieurs disciplines pour venir à bout de l'accomplissement de cette grande œuvre.

Conformément à ce modèle et en termes de praxéologies mathématiques[7], nous avons reformulé les questions suivantes : Quels types de tâches autour de l'objet de savoir

[7] Les organisations praxéologiques ainsi que les organisations praxéologiques complexes sont développées dans l'habilitation à diriger des recherches (Chaachoua, 2010).

algébrique existent dans l'institution de l'enseignement secondaire ? Quelles techniques associées à ces types de tâches sont enseignées ? Lesquelles sont privilégiées ? Quels sont les discours technologiques justifiant ces techniques ? Quels sont les éléments théoriques encadrant et étayant ces discours ?

I.2.2. La dimension sémiotique

La dimension, fait référence au système de représentations sémiotiques introduit par Duval et développée en algèbre dans plusieurs travaux de didacticiens des mathématiques. Duval explique qu'il y a des raisons très différentes montrent la pertinence de la prise en compte de la dimension sémiotique pour comprendre la complexité de l'apprentissage des mathématiques et pointe clairement sur « *l'originalité et la puissance de la pensée mathématique viennent de ce qu'elles jouent sur la variété des registres sémiotiques et sur les possibilités spécifiques de transformation qui sont propres à chaque système*. » (Duval 2006, p. 51)

Il montre clairement la pertinence de la prise en compte du rapport entre les signes et les opérations dans le cas de la représentation des nombres et / ou des grandeurs mais aussi d'une manière générale lorsqu'on étudie les différents types de représentations sémiotiques de l'objet mathématique en fonction des opérations possibles de transformations des représentations via de ce qu'il appelle principes d'organisation qui déterminent l'emploi des signes et leurs combinaisons en unités de sens.

Dans le cas des notations algébriques, Duval montre que nous articulons sémiotiquement deux types de symboles et que les opérations possibles de transformations renvoient à la substitution d'expressions symboliques fondées sur des règles syntaxiques et sur une invariance référentielle renvoyant essentiellement aux substitutions et par la suite à la dimension sémantique.

Grugeon (1997) rejoint Duval et suppose que les mathématiques sont le domaine dans lequel toutes les formes de représentations sémiotiques peuvent être exploitées par la manipulation de plusieurs systèmes de signes, plusieurs types de registres tels que les écritures algébriques, les graphiques cartésiens, les figures géométriques etc. À leur tour, Drouhard et Panizza (2012) ont identifié des difficultés cognitives liées à la non-congruence et aux omissions effectuées au cours des conversions de registres dans les domaines de l'arithmétique ou de l'algèbre élémentaire.

I.2.3. Modèle de grille d'analyse multidimensionnelle

Nous sommes partis de l'hypothèse générale de la pertinence de l'analyse logique, en termes d'articulation de deux points de vue syntaxique et sémantique dans les analyses didactiques au niveau de l'enseignement et de l'apprentissage des équations et des inéquations dans le domaine de l'algèbre au secondaire.

Les éclairages apportés par la sémantique logique à l'analyse des notions algébriques sont des reconstructions *a posteriori* et ne suffisent pas, à elles seules, à nourrir notre étude didactique.

Nous avons choisi de croiser les dimensions logiques en termes de syntaxiques et / ou sémantiques avec les dimensions d'analyses sémiotiques et praxéologiques qui *a priori* n'ont pas pris en charge explicitement cette dimension de nature logique, même si elle était évoquée par certains auteurs déjà mentionnés dans l'introduction.

Les investigations didactiques que nous décrivons tournent autour des objets de l'algèbre du secondaire comme les équations, inéquations et fonctions algébriques. Pour ces objets qui nous intéressent, les technologies sont les théorèmes qui généralisent les propriétés des opérations dans le numérique et les règles qui gèrent les transformations, les propriétés d'équivalence et d'implication ainsi que les égalités dans la structure du corps des nombres réels. Or nous nous sommes intéressés à l'articulation sémantique / syntaxique et nous avons fait l'hypothèse que le travail algébrique auprès des élèves à ces niveaux-là n'explicitent pas les technologies et les théories justifiant les différents types de techniques de résolution qui sont au cœur de cette étude[8].

Le croisement des deux dimensions sémiotique et praxéologique avec la dimension sémantique/syntaxique nous permet d'avoir le modèle de grille d'analyse présenté dans le tableau 1 dessous.

[8] En effet, le bloc (technologie, théorie) est un ensemble de résultats généraux qui justifient le contrôle sémantique des étapes intermédiaires de résolution qui peuvent dépasser les compétences de conceptualisation des élèves.

Type de tâche / *Type de technique* / **Registre**	***Technique sémantique***	***Technique syntaxique***	***Technique mixte***
Numérique	Vérifier que le nombre satisfait l'équation	Factoriser l'expression numérique	Résoudre l'équation cubique
Graphique	Placer les points	Appliquer un théorème pour représenter le graphe d'une fonction trinôme	Discuter selon les valeurs du réel
Algébrique	Interpréter graphiquement l'égalité algébrique	Montrer par récurrence arithmétique l'égalité polynomiale	Étudier et construire le graphe d'une fonction
Analyse	Existence/analytique-graphique	Calculer la limite d'une fraction polynômiale	Étudier et représenter
Numérique– Algébrique	Interpréter/graphique-algébrique	Montrer par récurrence qu'une suite	Étudier et représenter
Numérique– Graphique	Placer des points de coordonnées… dans un repère	Calculer l'image du nombre par la fonction	Déterminer les coordonnées des points d'intersection des deux graphes
Numérique - Algébrique	Déterminer l'image du nombre	Montrer par récurrence l'égalité algébrique	Conjecturer
Numérique– Analyse	Étudier l'existence d'un zéro d'une fonction via le théorème des valeurs intermédiaires	Calculer la distance d'un point d'une courbe à une droite donnée	Donner une approximation à 10^{-1} près d'un nombre réel
Numérique - Graphique - Algébrique	Interpréter graphiquement l'équation paramétrée	Déterminer les points d'intersection des courbes	Étudier et représenter la fonction trinôme
Numérique - Graphique– Analyse	Déterminer l'antécédent d'un point de la courbe	Représenter une courbe parmi une famille connue	Résoudre une inéquation produit

Tableau 1-Grille d'analyse

La lecture se fait de manière qu'à ce modèle permet d'associer à chaque un type de tâche, correspondant à un niveau d'enseignement bien déterminé, la ou les types de correspond des techniques qui peuvent être du type syntaxique, sémantique ou mixte se traitant dans un ou plusieurs registres de représentations sémiotiques.

La qualification d'une technique associée à un type de tâche par sémantique, syntaxique ou mixte relativement à un ou plusieurs registres est étroitement liée au contexte et au niveau d'enseignement dans lequel la tâche est sollicitée.

Par exemple, dans le cas de la résolution des équations du second degré de la forme :

$ax^2 + bx + c = 0$ où $a \neq 0$ et $(a, b) \in IR^2$ au niveau de la deuxième année de l'enseignement secondaire, plusieurs techniques de résolution sont disponibles.

La technique τ_1 (respectivement τ_2) qui fait appel au calcul du discriminant Δ (respectivement Δ') 9 est une technique syntaxique du registre algébrique.

La technique τ_3 qui permet de résoudre le cas particulier où 1 (respectivement -1) est une racine remarquable10 et qui par la suite permet de déterminer la deuxième racine c/a (respectivement –c/a) par des transformations algébriques, est supposée du type mixte des registres numérique et algébrique. En effet, cette technique consiste à substituer les valeurs 1 ou (-1) dans l'équation ou par la reconnaissance de l'une des formes $a + b + c = 0$ (respectivement $a - b + c = 0$) pour déduire la première racine et par la suite la deuxième racine sera déduite via des transformations algébriques.

Dans le cas particulier de la résolution de l'équation $x^2 - 2x + 1 = 0$, plusieurs types de techniques sont mobilisables où

La technique τ_1 (respectivement τ_2)[11] sera supposée purement syntaxique du registre algébrique.

La technique τ_3 sera supposée aussi mixte.

La technique τ_4 qui consiste à remarquer la forme d'un produit remarquable via la forme algébrique de l'équation sera supposée du type sémantique du registre algébrique.

Dans ce modèle de grille nous allons présenter quelques exemples afin de permettre au lecteur de comprendre ce que nous voulons dire par croisement. Il est évident que nous ne présenterons pas la totalité des cas possibles.

9 C'est le cas particulier où b est pair.

10 Généralement enseignée et connue par la formule a-b+c=0 (respectivement a-b+c=0)

11 Même si le discriminant est nul et par la suite la racine est double.

I. 3. Investigations Macro-didactiques

Dans cette section, nous présentons les résultats de deux analyses institutionnelles en termes de transposition didactique externe. Dans ces analyses nous nous appuyons sur la grille d'analyse développée ci-dessus, et qui croise les dimensions syntaxiques, sémantiques, sémiotiques et praxéologiques.

La première est l'étude de l'évolution historique des praxéologies algébriques de première année de l'enseignement secondaire. La deuxième est celle des programmes de 2008 d'algèbre de l'enseignement secondaire.

I.3.1. L'évolution historique des praxéologies algébriques dans les différents curriculums Tunisiens de la première année de l'enseignement secondaire

Dans Kouki (2008, 2010), nous avons analysé la nature des praxéologies algébriques pratiquées au collège et en première année de lycée en suivant sur deux volets : Dans le premier, nous étudions la genèse de la pensée algébrique à travers les différentes civilisations, suite à laquelle nous avons publié l'article [3]. Dans le deuxième volet, nous conduisons des analyses écologiques et praxéologiques de l'algèbre de première année de l'enseignement secondaire. Ces études, qui ont permis de saisir l'évolution du double[12] rapport institutionnel à l'algèbre en Tunisie et son impact sur les conditions et les contraintes de sa diffusion, ont fait l'objet de la publication [4].

Dans le cadre de son mémoire de Master de didactique des mathématiques, que nous avons encadré, Hassayoune (2014) a étudié les recherches antérieures portant sur l'algèbre du secondaire et a montré qu'elles convergent vers des problèmes cruciaux notamment aux niveaux :

- des compétences à développer chez les élèves,
- des choix didactiques à adopter dans les activités d'enseignement/apprentissage,
- de la complexité de son système sémiotique.

[12] Deux institutions sont ici concernées : l'institution product1rice des programmes officiels et celle du curriculum réel.

I. 3.1.1 La genèse de la pensée algébrique : Ruptures et obstacles épistémologiques

Dans l'enseignement tunisien, l'algèbre se manifeste à travers deux principaux champs praxéologiques :

- Le calcul algébrique : manipulation d'expressions numériques et littérales (développement, réduction, factorisation, etc.)
- La résolution de situations-problèmes : analyse, modélisation (mise en équation, en inéquation, en système, en fonction), résolution, contrôle des solutions.

Les analyses épistémologiques, relatives à ces praxéologies, ont été conduites via une exploration des principales phases historiques de leur émergence en tant que manifestations d'un savoir savant et de pratiques sociales de référence.

Les principaux résultats de cette étude qui portait sur l'évolution diachronique des praxéologies algébriques dans les trois champs conceptuel, syntaxique et sémiotique montrent que la construction des concepts algébriques se réalise en étroite relation avec leur fonctionnalité procédurale ainsi qu'avec la mobilisation des techniques opératoires.

Ceci nous a ouvert de nouvelles perspectives de recherche orientées vers l'approfondissement et l'exploration des faits établis et leur exploitation dans une perspective d'ingénierie didactique destinée aux enseignants (Kouki & Hassayoune, 2015b). Ces questions font l'objet de la thèse de doctorat de Slimene Hassayoune, que le professeur Faouzi Chabane et moi-même co-encadrons.

Qu'est-ce que l'algèbre ? Quelle est son origine ? Quel est son rapport avec l'arithmétique ? Quels problèmes permet-elle de résoudre ? La réponse à ces questions doit tenir compte des phénomènes accompagnant l'évolution et le développement des théories mathématiques sous-jacentes ou mises en jeu et des obstacles rencontrés et de la manière dont ils ont été franchis.

Au cours de la haute antiquité, l'algèbre paléo-babylonienne (XVIIIe av. J.C) était caractérisée par des algorithmes de calcul généralisables hors contexte métrologique et par l'apparition des premières techniques algébriques fondées sur une bonne maîtrise du sens des nombres, de leurs notations métrologique et positionnelle et de leurs usages dans la résolution des problèmes scolaires (au profit des apprentis-scribes) et de la vie courante. Ainsi, les praxéologies mobilisées au cours de cette période sont essentiellement algorithmiques sous-tendues par des types de tâches calculatoires stéréotypés appelant la mobilisation de techniques mécaniques calquées sur des exemples génériques. Tout se fait par imitation et application à la lettre des procédures arrêtées sans aucune démonstration ni justification apparentes, preuve d'une vraisemblable absence de technologie ou de théorie algébrique sous-

jacente, du moins dans ce qui nous est parvenu à travers les traces archéologiques déjà étudiées[13].

Les Grecs (IIIe Av. J.C) ont eu ensuite une influence spécifique sur le développement des premières procédures algébriques initiées par leurs ancêtres les mésopotamiens grâce à la rigueur du raisonnement qu'ils ont instaurée et par l'étayage géométrique des propriétés numériques accompagnant l'essor de la géométrie euclidienne. Ainsi, les praxéologies développées sont donc essentiellement fondées sur des types de tâches de calcul de grandeurs géométriques nécessitant la mobilisation de techniques de transformations d'aires justifiées par des blocs technologico-théoriques relatifs aux grandeurs et aux mesures. Le champ conceptuel et cognitif, déjà bien installé en géométrie grâce aux apports théoriques des *Éléments d'Euclide*, contient implicitement les concepts algébriques qui ne seront découverts que douze siècles plus tard par les mathématiciens arabes par un changement de cadre, amorcé par Al-Khwârizmî. Le champ syntaxique évolue parallèlement aux progrès réalisés dans le domaine du langage courant. Dans cette *algèbre rhétorique*, ni les opérations ni les inconnues ne sont représentées par des symboles, tout est écrit et communiqué verbalement en langue naturelle.

Plus tard, l'introduction de l'inconnue opérationnelle (*arithme*) – notée ς et signifiant la quantité indéterminée d'unités – par Diophante d'Alexandrie (IIIe), a permis d'insuffler un nouvel élan au processus de résolution des problèmes en les modélisant par des écritures symboliques. Cette façon de procéder favorise un changement conceptuel dans les activités de résolution de problèmes. Le langage construit par la symbolisation de *l'arithme* et des diverses catégories de nombres[14], conjuguée à une syntaxe convenable, a permis à Diophante de traduire les problèmes posés à l'aide d'expressions algébriques se prêtant au calcul formel sur les *espèces (monômes)* et qui aboutissent à des équations réduites donnant la valeur de l'inconnue opérationnelle et, par suite, celles des inconnues cherchées (Radford, 1991). Les praxéologies algébriques ainsi mobilisées sont articulées autour des types de tâches de résolution de problèmes nécessitant pour leur réalisation des techniques de modélisation à l'aide des inconnues opérationnelles et de manipulations d'écritures formelles sur les

13Høyrup (2002) considère qu'en fait, ces praxéologies ne sont pas de pures recettes découvertes par hasard et qu'elles sont guidées par des raisonnements géométriques, développés plus tard par les mathématiciens grecs et arabes.

14 Diophante introduit et symbolise une nouvelle catégorisation des nombres en notant : Δ^{γ} (carré), K^{γ} (cube), $\Delta^{\gamma}\Delta$ (carré-carré ou bicarré), ΔK^{γ} (carré-cube), $K^{\gamma}K$ (cubo-cube).

arithmes. Des éléments technologiques transparaissent implicitement dans la démarche pré-algébrique diophantienne mais sans aucun support théorique notable. Les deux champs syntaxique et sémiotique se trouvent donc sensiblement enrichis, permettant ainsi une évolution importante des processus algébriques déployés.

Mais en fait et de l'avis d'éminents historiens des mathématiques (Rached 1984, Djebbar 2005), le mot *algèbre* provient du terme arabe *al-jabr* qui signifie en médecine réparation ou restauration d'une fracture. Il a été utilisé, dans *Al-kitâb al-mukhtasarf'iljabrw'al-muqâbala* (Le livre abrégé sur le calcul par la restauration et la comparaison), un important ouvrage écrit au début du IXe siècle par Mûhammad Ibn MûssaAl-Khwârizmî (780-850). Dans ce traité, l'expression arabe *al-jabr* (la restauration) désigne l'opération qu'on fait subir à l'équation pour en supprimer les termes précédés d'un signe *moins*, alors qu'*al-muqâbala* signifiait la réduction de termes de même degré dans une équation. C'est à partir du IXe siècle que l'algèbre devient progressivement, l'art de réduire et de résoudre les équations, puis la science des expressions algébriques et enfin la résolution de tous types d'équations. Cette nouvelle science simplifie et unifie les techniques anciennes de résolution des problèmes posés par la vie quotidienne des gens sédentarisés et vivant en société. Il apparaît donc que les problèmes de la vie courante comme ceux d'héritage, d'arpentage, de détermination de la direction de la Qibla, de la construction en briques etc. sont les vraies origines de ces équations et des manipulations dont celles-ci sont l'objet. Étayées par les savoirs géométriques de l'époque, les procédures utilisées par Al-khwârizmî ont ainsi permis à la pensée algébrique de progresser en matière de modélisation et de manipulation de modèles.

Après avoir pris connaissance de la traduction arabe du traité d'arithmétique de Diophante, Al-Karâjî (953-1029) utilise les concepts et lexiques algébriques *shay* (chose), *mâl* (carré) et *kaab* (cube) créés par AL-Khwârizmî pour appliquer l'arithmétique aux expressions algébriques et résoudre les problèmes à l'aide de l'algèbre de Diophante. Al-Karâjî et son disciple Al-Samaw'al (1130-1175) introduisent les polynômes sous la forme de tableaux et explicitent les opérations usuelles sur ces tableaux. Plus tard, en Andalousie et au Maghreb extrême, apparait une notation et des symboles spécifiques pour l'inconnue et ses puissances et pour les opérations sur les monômes et les polynômes.

Abdeljaouad (2002) précise que :

« *La multiplication d'indices attestant la présence de symboles algébriques dans les traités maghrébins d'arithmétique indienne, nous confirme dans l'hypothèse d'une origine maghrébine des symboles algébriques, apparus comme conséquence logique de l'inclusion de l'algèbre comme chapitre complémentaire aux traités de hisâb al-ghubâr* ». (Abdeljaoued 2002, p. 22).

Ce symbolisme algébrique a permis de représenter le nombre connu *'adad*noté : عـ, l'inconnue *shay* notée : شـ, son carré *mâl* noté : مـ, son cube *kaab* noté : كـ, la quatrième puissance de l'inconnue (c'est-à-dire le carré du carré) notée : ممـ et les termes : égal *ya'dilû* noté : لـ, soustraction *illa* noté : لا comme le montrent les fac-similés suivants illustrant le lexique sémiotique utilisé par les algébristes maghrébins du XIVe :

Ce symbolisme algébrique a permis de représenter le nombre connu *'adad*noté : عـ, l'inconnue *shay* notée :شـ, son carré *mâl* noté :مـ, son cube *kaab* noté :كـ, la quatrième puissance de l'inconnue (c'est-à-dire le carré du carré) notée :ممـ et les termes : égal *ya'dilû* noté :لـ, soustraction *illa* noté :لا comme le montrent les fac-similés suivants illustrant le lexique sémiotique utilisé par les algébristes maghrébins du XIVe :

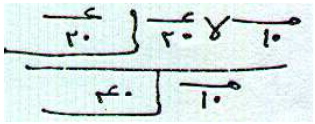
(26b)[15]		$x^4 + 4x^3 + 10x^2 + 12x + 9$
(63b)[16]		$10x^2 - 20 = 20$ $\longrightarrow 10x^2 = 40.$

Tableau 2 : Fac-similés (Abdeljaoued 2002, p.26)

Ce symbolisme se retrouve adopté par un certain nombre de mathématiciens européens, comme dans le manuscrit anonyme du XVe siècle, intitulé *Liber Restaurationis*. Son auteur consacre un paragraphe à la présentation d'un symbolisme algébrique en l'adaptant à l'écriture et à la langue latine (Moyon, 2005). Il donne un exemple où le nombre (dragme) est représenté par *d*, l'inconnu (radicis) par *r* et le carré de l'inconnu (census) par *c*.

Dans son traité *Art analytique ou Algèbre nouvelle*, François Viète (1540-1603) introduit une véritable algèbre littérale, avec ses symboles, ses procédés calculatoires, ses transformations particulières et sa pensée spécifique (Boyé 2003, Guichard 2000). Un des principaux

[15]Folio du manuscrit de Jerba (Abdeljaoued 2002, p.26)

[16] Ibid.

avantages de la méthodologie analytique de Viète est l'obtention de formules générales et applicables à plusieurs situations, caractérisées par l'usage des paramètres littéraux, ce qui permet de conserver la trace de toutes les étapes du raisonnement et de se retrouver facilement lorsque l'on procède à un changement quelconque de ces paramètres. L'activité entreprise ne se réduit donc pas à la résolution d'un problème particulier, c'est plutôt une famille entière de situations qui se trouvent résolues par ce procédé. De plus, cette avancée dans l'évolution des praxéologies algébriques est illustrée par un processus tout à fait nouveau et efficace de résolution de problèmes dans différents domaines des mathématiques (arithmétiques, géométriques, trigonométriques, fonctionnels, combinatoires etc.)

Viète a le mérite de développer l'algèbre en tant qu'outil au service de la résolution des problèmes, mais il montre par la même occasion qu'algèbre et résolution de problèmes (*analyse ou art analytique*) sont imbriquées au point de se confondre. En effet le développement de l'une favorise celui de l'autre, voire nécessite celui de l'autre, c'est la signification du titre donné à son œuvre *Introduction à l'art analytique ou algèbre nouvelle*.

Poursuivant l'élan donné par Viète, Descartes propose une méthode d'algébrisation de la géométrie, dans l'ouvrage intitulé *La Géométrie* et publié en 1637, il annonce que par sa méthode il veut résoudre généralement toutes les questions qui se présentent dans n'importe quel genre de quantité aussi bien continue que discrète.

Le véritable essor de l'algèbre n'est amorcé que lorsque la substitution des écritures formelles aux écritures verbales est devenue possible. Mais pour arriver à cette étape décisive de son évolution, l'algèbre s'est plusieurs fois métamorphosée par une lente abstraction de ses objets d'étude : mesure de grandeurs, calcul sur des nombres abstraits et finalement manipulation d'écritures formelles avec des lettres désignant d'abord des nombres et ultérieurement toutes sortes d'objets. En tant qu'outil et processus de résolution de problèmes, l'algèbre a parallèlement évolué vers une forme de pensée analytique offrant ainsi une alternative concise et efficace à la méthode synthétique de *l'arithmétique*.

Ce succinct tour d'horizon synthétisant l'analyse historique nous a permis de comprendre la difficile genèse du formalisme algébrique et de nous arrêter sur les obstacles et les ruptures épistémologiques qui l'ont caractérisé :

Le premier obstacle franchi est celui de l'écriture. Sans elle, il n'aurait pas été possible ni de communiquer ni de laisser des traces de quelques œuvres que ce soient. Ensuite l'algèbre *numéreuse* prend place et se développe rendant d'importants services aux collectivités humaines qui commencent à se sédentariser et éprouver des besoins vitaux d'organisation et

de gestion. Mais la complexité des problèmes rencontrés a fait que les exemples algorithmiques ont vite trouvé leur limite et demeurent insuffisants pour répondre aux nouvelles exigences de la vie économique et sociale. Un élan vers la généralisation et l'argumentation est alors exigé.

Avec l'avènement de *l'algèbre géométrique* des Grecs, une rupture eut lieu. Pour résoudre des problèmes de calcul de grandeurs, il n'est plus maintenant question d'appliquer des recettes toutes faites et de justification douteuse, mais il faut désormais démontrer la validité des propositions dans le cadre d'une axiomatique structurellement fondée sur des définitions et des postulats bien délimités.

Plus tard, *l'algèbre formelle* s'est construite progressivement au cours des deux millénaires qui suivent. Mais elle n'est apparue, à un aucun moment de sa genèse, artificielle ni accessoire, elle est dûment exigée par la nature même des problèmes posés (problèmes concrets ensuite équationnels et structurels) ainsi que par la recherche de meilleurs moyens permettant de les résoudre.

Après ce bref passage en revue des principales étapes historiques de la genèse de l'algèbre, nous pouvons, à présent, résumer l'évolution épistémologique de la genèse historique des praxéologies algébriques en nous arrêtant sur ses moments forts. Le tableau 3 en synthétise les principales caractéristiques :

La Mésopotamie (Période paléo babylonienne)	XXe siècle Av. J.C.	***Pré-algèbre algorithmique*** *:* *Usage des tables numériques et métrologiques, algorithmes de calcul, procédures de résolution d'équations sur des exemples génériques.*
La Grèce antique : Les Éléments d'Euclide, livre II	IIIe Av. J.C	***Pré-algèbre géométrique*** *:* *-Calcul de grandeurs géométriques (susceptible d'illustrer géométriquement des propriétés numériques et des algorithmes de résolution d'équations).* *-Rigueur dans les processus d'argumentation.*
Diophante d'Alexandrie	IIIe siècle Ap. J.C.	***Arithmétique présymbolique syncopée*** *:* *-Méthode de l'inconnue opérationnelle (l'arithme).* *-Calcul sur les espèces.*
Al-Khwârizmî	780-850	***Algèbre des équations*** *:* *-Procédés d'al-jabr et al-muqâbala.* *-Algorithmes de résolution justifiés géométriquement.*
AbùKâmil Al-Karâjî Al-Khâyyâm	850-930 953-1029 1050-1123	***Arithmétisation de l'algèbre*** *Généralisation des opérations arithmétiques aux expressions monômes et aux polynômes.*
Viète	1540-1603	***Algèbre littérale (spécieuse)*** *:* *-Calcul algébrique abstrait.* *-Résolution de problèmes via une modélisation et un langage algébrique (analyse/synthèse).*
Descartes	1596-1650	***Algébrisation de la Géométrie***

Tableau 3 : Étapes historiques de l'évolution des praxéologies algébriques

Suite à cette analyse historique, il apparait que, lors de sa genèse, l'algèbre s'est progressivement constituée, au fil du temps, comme un outil et une démarche de résolution de problèmes. De façon plus précise, en suivant le parcours de la conceptualisation, de la syntaxe et de la sémiotique algébriques, des Babyloniens à Descartes, en passant par Euclide, Diophante et Al-Khwârizmî, nous nous rendons compte que l'algèbre a lentement évolué vers une pensée spécifique et un langage formel permettant de modéliser des problèmes et de les résoudre via un calcul littéral approprié ; l'étude de ses concepts, en tant qu'objets de savoir, n'est venue que plus tard.

Tout au long de cette recherche, nous nous sommes intéressés à l'origine de l'algèbre élémentaire. Notre objectif était de questionner les fondements épistémologiques de cet objet de savoir afin de mieux connaître les sources des difficultés des élèves et d'être ainsi en mesure de proposer les solutions didactiques qui conviennent et de comprendre la difficile

genèse du formalisme algébrique et de nous arrêter sur les obstacles et les ruptures épistémologiques qui l'ont caractérisée.

I. 3.1.2 L'évolution historique des praxéologies algébriques dans les différents curriculums Tunisiens

Les analyses écologiques et praxéologiques des programmes d'algèbre de première année secondaire ont permis de saisir l'évolution du double[17] rapport institutionnel à l'algèbre en Tunisie et son impact sur les conditions et les contraintes de sa diffusion.

Ces investigations croisaient la dimension historique et épistémologique qui portait sur l'évolution diachronique des praxéologies algébriques dans les trois champs conceptuel, sémantique, syntaxique et sémiotique ; avec la dimension institutionnelle, consacrée à l'exploration des programmes et des manuels scolaires pour en décrypter les visées et les caractéristiques didactiques.

Cette étude qui s'est inscrite dans la lignée de nos recherches didactiques, déjà conduites dans (2008, 2015a) et Kouki & Hassayoune (2015b)[18]au niveau de l'algèbre, a fourni d'autres éclairages sur la nature des praxéologies algébriques visées par les programmes de la première année secondaire en Tunisie (15-16 ans).

Nous présentons, ci-dessous, les principaux résultats d'une investigation institutionnelle sur l'étude de l'algèbre enseignée en Tunisie depuis l976 jusqu'à nos jours. Rappelons que l'algèbre, telle qu'il est enseigné au collège (13-15 ans) et au début du lycée (15-16 ans), présente deux champs praxéologiques principaux :

Le calcul algébrique : développement, réduction, factorisation d'expressions numériques et littérales.

La résolution de problèmes : analyse, modélisation (mise en équation, en inéquation, en système, en fonction), résolution, validation des solutions.

Nous avons exploré les pratiques antérieures et actuelles de son enseignement, en vue de déterminer les compétences attendues des différents projets didactiques et les éventuelles difficultés rencontrées au cours des apprentissages.

---

[17] Deux institutions sont ici concernées : l'institution productrice des programmes officiels et celle du curriculum réel.

[18] Les différents programmes sont joints aux annexes liées à l'article (Kouki & Hassayoune, 2015b) publié dans les actes du colloque EMF 2015.

Le cadre théorique dans lequel nous nous plaçons est celui de *la théorie anthropologique du didactique* initiée par Chevallard (1992). Ce cadre, assez général et opérationnel, nous a semblé convenir parfaitement à ce que nous comptons entreprendre et, *a priori*, s'adapte bien à nos outils et méthodes d'investigation. Ceci nous a aidé dans notre entreprise diagnostique et a favorisé la production d'alternatives de remédiation aux difficultés rencontrées par les élèves dans le processus enseignement / apprentissage de l'algèbre du début du secondaire.

Nous nous sommes intéressés aux rapports institutionnels à l'algèbre en termes de transpositions didactiques, à travers l'analyse des programmes d'étude, de leurs interprétations officielles et des manuels scolaires.

L'analyse des différentes organisations mathématiques et didactiques de l'algèbre a permis de préciser ses principales fonctions dans l'enseignement des mathématiques et d'apprécier sa place réelle dans la formation scientifique et citoyenne des élèves, de saisir les évolutions de l'enseignement, les causes des changements éventuels opérés, ainsi que les rapports personnels et institutionnels à cet objet de savoir.

Examinant ainsi les niches et les habitats potentiels des praxéologies algébriques, nous avons exploré les conditions écologiques viables et nous avons proposé d'autres entités praxéologiques alternatives susceptibles d'optimiser les choix didactiques en matière d'enseignement de l'algèbre. Nous nous sommes intéressés aussi aux écarts possibles entre les contenus des manuels scolaires et les libellés des programmes et aux fonctions assignées à l'équipement praxéologique des instances apprenantes visé par ces deux documents officiels.

En Tunisie, au cours du demi-siècle précédent, trois réformes du système éducatif se sont succédées respectivement en 1958, 1991 et 2002 et ont largement influencé les contenus des programmes et des manuels scolaires.

Nous avons procédé à une analyse des programmes d'algèbre et de leur mise en œuvre appliquée depuis 1976 dans le cycle secondaire tunisien, afin de saisir les évolutions de l'enseignement, les causes des changements éventuels opérés, ainsi que les rapports personnels et institutionnels à cet objet de savoir.

En Tunisie, au cours du demi-siècle précédent, trois réformes du système éducatif se sont succédées respectivement en 1958, 1991 et 2002 et ont largement influencé les contenus des programmes et des manuels scolaires.

Le programme d'algèbre et le manuel scolaire de 1976

Ce programme est une copie conforme du programme français de la classe de troisième applicable à la rentrée scolaire de 1972[19].

La partie de ce programme consacrée au domaine algébrique est intitulée *Nombres réels, calculs algébriques, fonctions numériques*.

Le programme de mathématiques de la classe de quatrième année secondaire sections : math-sciences, math-techniques et lettres (actuelle première année de l'enseignement secondaire) est composé de trois grandes parties articulées entre elles via une méthode analytique à support algébrique et basée sur des activités dans un repère orthonormé du plan :

- Nombres réels, calculs algébriques, fonctions numériques.
- Plan euclidien (orthogonalité, distance, repère orthonormé)
- Géométrie plane euclidienne (médiatrice d'un segment, distance d'un point à une droite, cercle, isométries planes, trigonométrie)

Ainsi le calcul algébrique annoncé dans le libellé de ce programme est mis en œuvre essentiellement lors des calculs sur les fonctions polynômes et les fonctions rationnelles et au cours d'éventuelles réductions des équations et inéquations modélisant des problèmes du premier degré.

Le bloc technologico-théorique justifiant les différentes techniques du calcul algébrique est globalement constitué des définitions, propriétés et théorèmes découlant de la structure de corps totalement ordonné dont est muni l'ensemble IR des nombres réels.

Les organisations mathématiques préconisées sont caractérisées par les types de tâches, les techniques, les technologies et les théories les justifiant. Elles sont précisées dans le tableau 4 ci-dessous :

[19](Arrêté du 22/7/1971 B.O.E.N français du 29/7/1971)

Contenus	Types de tâches	Techniques	Technologies	Théories
Propriétés de l'addition, de la multiplication et de l'ordre dans IR	**T** : Calculs dans IR	**τ** : Somme, produit, quotient de nombres réels exprimés sous la forme $\frac{b}{a}$ où a et b sont des nombres réels avec a non nul ou sous les formes : $\sqrt{a}$ ou $a^{\frac{1}{2}}$	**θ** : Définitions et propriétés des opérations sur les nombres.	**Θ** : Structures algébriques : (IR, +, x, ≤) est un corps totalement ordonné
Fonctions polynômes-Fonctions rationnelles	$\mathbf{T_1}$: Calculs sur les fonctions polynômes et les fonctions rationnelles $\mathbf{T_2}$: Représentation graphique des fonctions affines et des fonctions affines par intervalles	$\boldsymbol{\tau_1}$: Somme, produit, quotient de fonctions polynômes et rationnelles. $\boldsymbol{\tau_2}$: Construction à l'aide de points dont les couples de coordonnées appartiennent aux graphes de ces fonctions	$\boldsymbol{\theta_1}$: Définitions et propriétés des opérations sur les fonctions polynômes et rationnelles $\boldsymbol{\theta_2}$: Théorèmes sur la représentation graphique des fonctions affines	$\boldsymbol{\Theta_1}$: Structures algébriques de IR[x] et IR(x) $\boldsymbol{\Theta_2}$: Géométrie analytique
Problèmes du premier degré	**T** : Résolution de problèmes du premier degré	$\boldsymbol{\tau_1}$: Modélisation de situations à l'aide d'équations, inéquations ou systèmes linéaires du premier degré à une ou deux inconnues $\boldsymbol{\tau_2}$: Résolution d'équations, d'inéquations ou de systèmes	$\boldsymbol{\theta_1}$: Non définie par les programmes en vigueur $\boldsymbol{\theta_2}$: Théorèmes justifiant les techniques de résolution	$\boldsymbol{\Theta_1}$: Non définie $\boldsymbol{\Theta_2}$: (IR, +, x, ≤) est un corps totalement ordonné.

Tableau 4 : Les organisations mathématiques visées par le programme de 1976.

Selon cette visée, l'enseignement de l'algèbre est articulé au premier abord, sur l'étude des modèles des structures algébriques, ensuite sur l'acquisition d'outils permettant de manipuler des expressions polynômiales et rationnelles et, partant, à résoudre des problèmes se ramenant à des équations et inéquations du premier degré à une ou deux inconnues.

Malgré l'apparence d'une certaine logique dans la conception du programme, des anomalies didactiques ont éclaté au grand jour au fur et à mesure de son application sur le terrain. En effet :

Le caractère abstrait des concepts relatifs aux structures algébriques préalablement abordés n'a pas manqué d'entrainer le rejet des élèves et de leur ôter toute motivation.

Les praxéologies algébriques, qui doivent être développées, dépassent le cadre de leurs applications et ne sont pas ajustées à leurs fins (par exemple, les compétences exigées dans les manipulations des fonctions polynômes et rationnelles, parfois entachées de grande virtuosité, ne sont que rarement sollicitées et exploitées au cours de l'application du curriculum).

Le problème de l'apprentissage de la modélisation des situations reste entier et aucun éclairage à son sujet n'est abordé.

Dans le manuel couramment utilisé à cette époque (Monge & al, 1976), le contenu disciplinaire est présenté conformément aux principes de l'enseignement traditionnel, c'est-à-dire sous forme de cours magistraux. Ceci a eu pour effet que lors des pratiques enseignantes le *topos* du professeur y apparait extrêmement large ; celui-ci se charge de la quasi-totalité des responsabilités dévolues à la classe, ce qui lui permet de piloter l'apprentissage, en exerçant le plein contrôle sur les connaissances à faire acquérir aux élèves, usant ainsi de son statut d'unique détenteur des savoirs dans l'institution-classe. Le contrat didactique d'ostension est activé sous ses deux formes assumée et déguisée, jouant le rôle du facilitateur et légitimant les interventions forcées de l'instance enseignante.

Afin de décrire l'approche didactique adoptée par les auteurs du manuel, nous présentons, dans le tableau 5, l'organisation mathématique relative au thème *équations à une inconnue* proposée en guise d'analyse *a priori* des praxéologies mathématiques et didactiques à développer :

Types de tâches T	Techniques τ	Technologies θ	Théories Θ
Résoudre une équation du premier degré à une inconnue réelle donnée sous forme réduite.	Application de l'algorithme de résolution.	Définitions, propriétés et théorèmes sous-tendant les algorithmes de résolution.	Structures algébriques : (IR,+, x) est un corps commutatif.
Résoudre une équation du premier degré à une inconnue réelle donnée sous la forme *f(x)=g(x)* où *f* et *g* sont deux fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à 1.	-Transformer l'équation en la mettant sous la forme réduite -Appliquer l'algorithme de résolution	-Équations équivalentes -Tout réel non nul admet un inverse.	
Résoudre une équation se ramenant à des équations du premier degré.	-Transformer l'équation en la mettant sous la forme *h(x)=0* -Factoriser *h(x)* en produit de facteurs de premier degré -Appliquer l'intégrité de (IR, +, x) -Résoudre chaque équation obtenue. -Donner l'ensemble des solutions.	-Équations équivalentes -Distributivité de x sur + -Tout réel non nul admet un inverse -Un produit de réels est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul.	

Tableau 5 : Organisation mathématique du thème *équations à une inconnue* telle que proposée par le manuel de 1976

Les documents officiels (programmes et manuels), censés présenter et prescrire[20] le texte du savoir et la méthodologie de sa mise en œuvre, passent sous silence les éléments technologiques et théoriques sous-tendant le raisonnement mathématique mis en jeu et n'apportent aucune réponse à des questions cruciales telles que : pourquoi aborde-t-on l'étude des équations ? À quelles questions ces équations permettent-elles de répondre ?

Ceci n'aurait pu être accompli qu'au prix d'efforts consentis par les enseignants pour concevoir des situations didactiques significatives et des activités motivantes susceptibles de faire interagir les élèves avec le savoir visé, faute de quoi, seul un habitus de réflexes et de pratiques d'algorithmes dépourvus de sens se construit au sein de l'institution scolaire.

[20] En Tunisie, les programmes scolaires sont officiellement prescrits et les manuels scolaires sont uniques pour chacun des niveaux d'enseignement.

Le programme d'algèbre et le manuel scolaire de 1986

Pendant cette période de la contre-réforme, des ajustements ont été nécessaires pour corriger les effets pervers de la réforme précédente.

Conformément à cette nouvelle orientation, le programme d'algèbre a été épuré de toutes structures algébriques, seules quelques notions sur les applications subsistent encore et le ton a été donné pour rendre les mathématiques plus vivantes, plus attrayantes et proches de la vie quotidienne des élèves. La partie *algèbre* est constituée de six rubriques, parfois brièvement commentées :

1. Application, image d'une partie d'un ensemble, restriction d'une application.
2. Composition de deux bijections, bijection réciproque d'une bijection.
3. Racine carrée d'un réel positif ; racine carrée d'un produit, d'un quotient de réels. Calculs approchés de racines carrées par encadrement.

On admettra que, étant un réel positif, il existe au moins un réel positif x dont le carré est égal à a.

Applications linéaires et applications affines de IR dans IR ; applications affines par intervalles. Représentations graphiques.

On étudiera des restrictions de telles relations à des sous-ensembles quelconques de IR en se limitant à quelques exemples puisés particulièrement dans la vie courante.

4. Équations et inéquations du premier degré à une inconnue. Équations et inéquations du premier degré à deux inconnues à coefficients numériques.
5. Système de deux équations du premier degré à deux inconnues.

Résolution graphique d'un système d'inéquations du premier degré à deux inconnues.

6. Exemples variés de problèmes du premier degré.

On étudiera des problèmes formulés dans un langage courant et liés aux préoccupations quotidiennes des élèves.

On montrera par ailleurs sur quelques exemples comment utiliser l'algèbre pour résoudre des problèmes de géométrie.

Les notions de structure de groupe, de structure de corps, de fonction, de surjection, de fonction polynôme, de fonction rationnelle disparaissent. Les concepts d'application et de bijection sont encore retenus, en raison de leur utilité en géométrie lors de l'étude des

translations et des symétries et, en plus, de leur rôle fondateur pour le concept d'application affine, encore une fois, retenu pour aborder les thèmes d'équation et d'inéquation du premier degré. En conséquence, le programme s'articule autour de la résolution de problèmes du premier degré en intégrant dans un tout structuré les applications affines, les équations et les systèmes du premier degré.

Le manuel scolaire (Kachoukh & al, 1986) permettant la mise en œuvre de ce programme répond à un triple objectif : atténuer les effets pervers des mathématiques modernes, réconcilier l'enseignement des mathématiques avec son environnement et accroître *le topos* des élèves en leur permettant de participer d'une manière active et efficace à l'élaboration des leçons.

Conformément aux directives officielles, l'exclusivité est donnée au premier degré ; on ne parle plus de fonctions polynômes ou de fonctions rationnelles. Suite à la mise en place des préalables numériques, les auteurs abordent directement l'étude des applications affines. Suivant cette orientation, le domaine algébrique comporte plusieurs habitats imbriqués entre eux (applications linéaires, applications affines, équations et inéquations du premier degré, systèmes d'équations ou d'inéquations du premier degré). Ainsi, les praxéologies algébriques à développer sont maintenant ajustées à leur fin -la résolution des problèmes du premier degré- et il n'est plus question de faire du calcul algébrique pour lui-même, sauf pour ce qui est proposé en guise de rappels au chapitre introductif du manuel.

La structure du chapitre 4, portant sur les équations et inéquations du premier degré à une inconnue, reflète une organisation didactique privilégiant particulièrement deux moments de l'étude : le moment de la première rencontre avec les types de tâches constituant l'organisation mathématique (à travers l'étude d'un exemple préliminaire) et celui du travail et de la mise à l'épreuve de la technique correspondante (par le biais d'exorcisations a posteriori).

Les analyses écologiques et praxéologiques, ci-dessus réalisées, montrent une attitude réaliste et modérée de la noosphère à la sortie de la crise des mathématiques modernes. Les praxéologies à développer dans l'enseignement/apprentissage de l'algèbre en première année secondaire sont maintenant réduites à l'essentiel, mieux articulées entre elles et visent la résolution des problèmes du premier degré. Toutefois, ce dernier objectif a été relégué par les auteurs du manuel et du coup par les enseignants, en fin d'apprentissage (sûrement dans l'intention de mieux outiller les élèves de techniques algébriques suffisantes). Le problème du

sens des activités mathématiques reste entier, tant qu'on n'ose pas évoquer à temps les questions auxquelles l'algèbre peut répondre ainsi que leur raison d'être.

Le programme d'algèbre et le manuel scolaire de 1991

La deuxième réforme du système éducatif tunisien est consacrée par la nouvelle loi d'orientation de l'éducation (Loi du 19 juillet 1991). Elle est conçue pour adapter l'école aux changements culturels et économiques qui ont affecté la société tunisienne après plus de trois décennies d'indépendance. Suite à l'application du principe de *l'éducation pour tous* porté par la réforme de 1958, cette nouvelle réforme a redéfini les finalités et la mission de l'éducation en misant sur la qualification des jeunes pour les préparer à s'intégrer dans une vie citoyenne accomplie.

Sur le plan pédagogique, les années quatre-vingt-dix sont essentiellement caractérisées par le paradigme de la pédagogie par objectifs (*PPO*). Tout a été alors mis en œuvre pour rationaliser les activités d'enseignement/apprentissage. Des finalités, des objectifs généraux, des objectifs spécifiques, des objectifs opérationnels, des critères d'évaluation et des indicateurs de réussite sont ainsi précisés et parfaitement délimités pour guider la conception, le développement et l'évaluation des apprentissages. Cela n'a pas manqué d'influencer la transposition didactique et l'ingénierie des outils didactiques dans un environnement éducatif fortement positiviste, pragmatique et behavioriste.

Le programme de 1991 est conçu pour répondre aux exigences de la deuxième réforme du système éducatif tunisien, survenue en juillet 1991, qui vise essentiellement : l'utilisation des nombres réels, un apprentissage de base concernant les fonctions numériques à variable réelle, le développement de l'aptitude à représenter graphiquement des fonctions et à exploiter les représentations graphiques et la pratique d'une démarche scientifique.

La noosphère constate que les difficultés des élèves en algèbre élémentaire sont dues essentiellement :

- sur le plan sémiotique et syntaxique, à l'incompréhension de la signification des lettres et de leurs assemblages dans les expressions littérales.
- sur le plan conceptuel et sémantique, à l'influence de la pensée arithmétique acquise aux deux cycles de l'enseignement de base.

Pour lever ces obstacles, sont réintroduits des apprentissages des manipulations d'expressions algébriques, en particulier les règles de calcul dans IR (utilisation des parenthèses et priorité des opérations, puissances entières, racines carrées de réels positifs, identités remarquables, factorisation, développement, réduction d'expressions numériques ou littérales, etc.). En même temps, des calculs numériques en situation sont ajoutés au calcul formel, à l'occasion des tâches de détermination des valeurs des expressions dépendant d'une ou de plusieurs variables lorsque celles-ci sont données.

> Mettre en œuvre les règles opératoires dans IR et les règles sur les puissances pour :
>
> Calculer la valeur d'une expression numérique ou une expression littérale pour des valeurs données des variables. (Premier objectif spécifique)

Inversement, des calculs numériques proposés en activités préliminaires débouchent, via le procédé d'induction et de généralisation, sur des expressions littérales. Ainsi des connexions sont établies entre calcul algébrique et calcul numérique dans une optique assimilant en quelque sorte l'algèbre à une arithmétique généralisée (Gascon, 1993).

> -Le calcul numérique et le calcul littéral seront menés de pair. (Recommandations)

Quatre aspects caractérisent le programme de 1991 :

Comme dans les programmes précédents, l'apprentissage de l'algèbre, initié par le programme de 1991, est motivé par le développement de la compétence de résolution des problèmes du premier degré.

La modélisation des situations est mise en avant dans les rubriques des objectifs.

> Mettre en équation ou en inéquation un problème donné. (Objectifs spécifiques, p. 9)
>
> Exemples d'étude de problèmes conduisant à […] (Contenus, p. 9)

Les problèmes seront puisés dans le domaine mathématique ou des domaines des autres disciplines scolaires ou de l'environnement socioculturel.

> Les problèmes seront puisés dans le domaine mathématique ou dans le domaine des autres disciplines (Physique par exemple) ou encore dans l'environnement social et économique de l'élève. (Recommandations, p. 9)

Les recommandations officielles prêtent cette fois-ci une attention particulière au processus de résolution des problèmes en indiquant explicitement les différentes phases.

> […] on dégagera nettement les différentes phases : Choix de l'inconnue ou des inconnues ; mise en équation ; résolution de l'équation ou de l'inéquation ou du système obtenus ; vérification et interprétation des résultats. (Recommandations, pp. 9-10)

Quatre articles, sur six, concernent ainsi l'installation des pré-requis algébriques nécessaires à l'étude des deux thèmes-clés du programme à savoir les applications affines et les problèmes du premier degré.

Le manuel scolaire de la première année secondaire (Tarifa & al, 1991), apparu suite à la réforme de 1991, est intitulé *Mathématiques, 1ère année secondaire*. L'intention des auteurs, précisée dans la préface, est de proposer *un manuel essentiellement conçu pour une formation de base adressée à des élèves, de profils divers, d'une première année secondaire désormais non spécialisée du tronc commun*. L'activité et l'engagement des élèves y sont fortement encouragés en vue de leur faire acquérir *des méthodes de travail et des capacités à résoudre des problèmes*.

Une organisation commune et uniforme des chapitres est adoptée. Des activités, des exercices d'application, des exercices à caractère intégratif et des exercices résolus sont proposés et constituent les principaux supports des apprentissages projetés. Les auteurs proposent des activités à réaliser sur le manuel, comme compléter des tableaux, des phrases, ou des expressions numériques ou algébriques et des ébauches de démonstrations. Les rappels et les résultats les plus importants du cours sont présentés sous des intitulés *définitions, théorèmes, propriétés, retenons* pour mettre en évidence les contenus à mémoriser.

Nous présentons dans l'annexe 3, en guise d'illustration de ce qui précède, un corpus des types de tâches algébriques préconisés ainsi que les techniques susceptibles de les réaliser et les blocs technologico-théoriques servant à les justifier.
Le manuel de 1991 apparaît donc comme un outil didactique innovant en introduisant

- des activités de nature mathématique, ludique ou récréative.
- des informations culturelles et historiques.

Toutefois l'imprécision concernant le statut des contenus mathématiques (définition, propriété, théorème, démonstration, exemple d'application) présentés a engendré plusieurs difficultés lors de son utilisation par les enseignants qui ont demandé, en vain, une formation de proximité à l'utilisation du manuel et un accompagnement didactique sur le terrain. De plus, ce qui a été annoncé en matière de capacité de résolution des problèmes n'a pas été traduit dans les faits. L'absence de technique suffisamment claire et intelligible de modélisation des situations (mise en équation, en inéquation ou en système), qui ne s'acquiert pas naturellement, nécessite un apprentissage spécifique et parfaitement ajusté à ce type de tâches comme l'indiquent clairement Duval (1996).

Le programme d'algèbre et le manuel scolaire de 2003

La loi d'orientation de l'éducation et de l'enseignement scolaire de juillet 2002 trace les principaux objectifs visés :

À côté de ses missions d'éducation et d'instruction, l'école est aussi appelée à qualifier les jeunes en les dotant de compétences susceptibles de favoriser leur insertion économique et sociale. Ainsi, il serait urgent de développer, dès le cycle primaire, conjointement quatre types d'habiletés :

- Des savoir-faire pratiques qui s'acquièrent par l'initiation à la résolution de problèmes.
- Des savoir-faire méthodologiques de traitement de l'information et de son exploitation dans la recherche des solutions alternatives et innovantes.
- Des compétences entrepreneuriales à travers la conception, le développement et l'évaluation de projets collectifs et interdisciplinaires.
- Des compétences comportementales mobilisables par des savoir-être comme l'autonomie, la coopération, le vivre-ensemble et la critique constructive. (Loi d'orientation n° 2002-80 du 23 juillet 2002)

Deux nouvelles orientations pédagogiques sont annoncées :

Mettre en œuvre des démarches d'apprentissage différenciées prenant en compte la diversité des profils et des rythmes des élèves et leur permettre d'avoir des chances égales de réussite.

Privilégier les dispositifs didactiques et pédagogiques favorisant le développement des compétences de résolution de problèmes et de réalisation de projets.

Le programme de mathématiques de 2003, issu de cette réforme s'inscrit dans l'optique éducative illustrée par l'article 10 de la nouvelle loi d'orientation de l'éducation et de l'enseignement scolaire qui stipule que :

> L'école veille dans le cadre de sa fonction de qualification à développer des compétences et des savoir-faire chez les élèves. … À cette fin l'école est appelée à faire acquérir aux apprenants l'aptitude à :
>
> Utiliser les savoirs et les savoir-faire acquis pour la recherche des solutions alternatives dans la résolution des problèmes auxquels ils peuvent être confrontés ;
>
> S'adapter aux changements ;
>
> Prendre des initiatives et innover ;
>
> Travailler en groupe ;

Apprendre tout au long de la vie. (Loi d'orientation de l'éducation, article 10)

La nouvelle orientation pédagogique institutionnalisée est celle de « l'approche par les compétences ». Fondée sur le paradigme socioconstructiviste de l'apprentissage, cette approche a fortement influencé les programmes scolaires et les outils didactiques qui restent en usage jusqu'à nos jours.

Le savoir algébrique à enseigner dans le programme officiel en vigueur a pour habitat institutionnel une rubrique intitulée *Activités algébriques*. Cette rubrique spécifie les contenus disciplinaires suivants :

- Identités remarquables.
- Fonctions linéaires – Fonctions affines.
- Équations et inéquations linéaires du premier degré à une inconnue réelle.
- Systèmes linéaires de deux équations à deux inconnues réelles.

Les aptitudes à développer sont ensuite précisées de façon exhaustive, en guise de *niches fonctionnelles* de ces objets de savoir :

1. Les élèves mobilisent les règles et les techniques de calcul algébrique pour :

- additionner, soustraire et multiplier des expressions algébriques ;
- calculer la valeur numérique d'une expression littérale ;
- développer, factoriser et simplifier des expressions algébriques en utilisant les produits remarquables ;
- résoudre des équations et des inéquations linéaires du premier degré à une inconnue ;
- résoudre des systèmes linéaires de deux équations du premier degré à deux inconnues.

2. Les élèves mobilisent un algorithme ou une procédure de calcul algébrique pour :

- déterminer le signe d'un binôme du premier degré ;
- résoudre des équations et des inéquations se ramenant à des équations et des inéquations du premier degré à une inconnue ;
- déterminer l'expression d'une fonction linéaire connaissant l'image d'un réel ;
- déterminer l'expression d'une fonction affine connaissant les images de deux réels distincts.

3. Les élèves résolvent des problèmes algébriques dans des situations mathématiques ou en rapport avec leur environnement dans des contextes familiers ou non familiers.

En particulier,

- les élèves modélisent des situations réelles menant à des équations, des inéquations ou des fonctions linéaires ou affines ;
- les élèves résolvent des problèmes d'optimisation ou de point de rencontre de deux mobiles.

Ainsi les objets d'enseignement de l'algèbre et leur contexte de fonctionnement marquent une réelle continuité avec les anciens programmes. En effet, l'enseignement de l'algèbre a toujours pour objet l'étude des équations, inéquations et applications affines ; toutefois, on dénote une avancée importante sur le plan méthodologique. Les pratiques algébriques ne sont plus considérées comme un objectif intermédiaire d'apprentissage, mais comme une compétence à part entière à développer.

Se voulant conforme aux nouveaux programmes, le manuel scolaire (Mcharek & al, 2003) vise le développement des sept compétences disciplinaires qui y sont prescrites. Dans sa préface, les auteurs rappellent le rôle des mathématiques dans la formation de l'esprit critique et de l'imagination créatrice et leur place de choix dans l'éducation citoyenne de chacun. Pour eux, le manuel doit être un outil de promotion scientifique, intellectuelle, culturelle et sociale s'adressant à tous les élèves dans leur diversité et quelle que soit leur vocation et indépendamment de leur niveau de maîtrise des savoirs acquis au terme de l'enseignement de base.

Le manuel se compose de seize chapitres, huit en *Travaux géométriques* et huit en *Travaux numériques*. Parmi ces derniers, le chapitre 11 traite des *Activités algébriques*. L'annexe 1 présente les compétences visées dans la partie *Activités algébriques* et le dispositif permettant leur développement chez les apprenants.

Dans sa majeure partie, le manuel est constitué exclusivement d'activités. Aucune organisation didactique ou mathématique n'est proposée. Seules des situations d'apprentissage et d'évaluation, accompagnées parfois d'indications et de rappels sont fournies en guise de supports de cours. La conception du cours, étant entièrement laissée à la charge des enseignants, ceux-ci se sentent la plupart du temps démunis et reprennent leurs anciens cours qu'ils enrichissent par des activités puisées dans le nouveau manuel.

Paradoxalement, les élèves, quant à eux, ne peuvent utiliser ce manuel qui leur est en principe adressé sans l'aide de l'enseignant, en l'absence d'un cours clairement conçu et suffisamment adapté à leur profil cognitif.

À la fin de la première année d'utilisation de ce manuel, l'Inspection générale rapporte :

> […] ce manuel propose un ensemble de ressources, certes précieuses mais non structurées, pour la conception et l'élaboration des situations d'apprentissage. De ce fait, il constitue beaucoup plus un document d'accompagnement du programme qu'un manuel scolaire susceptible d'être exploité par des élèves de différents niveaux et confrontés à des difficultés linguistiques, cognitives et méthodologiques… Les enseignants et les élèves trouvent des difficultés à l'utiliser (choix et gestion des activités proposées). (Rapport de Synthèse de l'Inspection Générale de l'Éducation relatif aux visites d'inspection pédagogique, Ministère de l'Éducation, TUNISIE, 2003-2004, pp. 6-7)

L'analyse historique des différents programmes d'algèbre et des contenus des manuels scolaires de la première année secondaire en Tunisie, depuis les années soixante-dix jusqu'à nos jours, nous a permis d'apprécier l'évolution du rapport institutionnel à l'algèbre dans le système éducatif tunisien. Nous avons vu comment ce rapport a sensiblement évolué d'une relation institution-objet de savoir à l'époque des mathématiques modernes vers une relation plus pragmatique et utilitaire considérant l'algèbre comme un outil et un langage formel au service de la résolution des problèmes, en passant par des étapes intermédiaires (1986-1991) où l'algèbre a joué le rôle d'outil-objet, appris pour lui-même en tant que savoir mathématique exigible par l'institution en premier lieu, et utilisé plus tard dans des contextes d'application et de transfert.

L'analyse épistémologique appuyée par l'étude de l'évolution des praxéologies algébriques a montré qu'au cours des quatre précédents millénaires, trois champs épistémologiques s'y sont progressivement développés : le champ conceptuel, le champ syntaxique et le champ sémiotique.

Elle a mis en évidence la difficile genèse du formalisme algébrique en tant qu'outil de la pensée algébrique et a permis d'explorer les obstacles et les ruptures qui l'ont caractérisée.

Les principales caractéristiques épistémologiques, mises en lumière, montrent que :

1. L'algèbre est structurellement et fonctionnellement attachée aux activités de résolution de problèmes mathématiques et extra-mathématiques qui constituent sa véritable raison d'être et son ultime champ d'application.

2. Le développement des compétences algébriques nécessite la levée de l'obstacle du raisonnement numérique en assumant une rupture épistémologique arithmétique-algébrique. Les activités de résolution des problèmes déconnectés[21] peuvent y contribuer efficacement.

Sur le plan syntaxique, prenant naissance dans le champ numérique, l'algèbre n'a pu s'en détacher qu'au prix d'une double transition : procédural-structural (Kieran et Herscovics, 1980) et calcul numérique-manipulation littérale.

Sur le plan conceptuel, une avancée importante a été réalisée avec le recours à la dialectique analyse-synthèse qui a eu l'avantage de favoriser une pensée algébrique efficace dans la résolution des problèmes.

L'analyse institutionnelle a mis en exergue la particularité évolutive du rapport institutionnel à l'algèbre dans le système éducatif tunisien. Ainsi, d'un rapport à un objet de savoir conceptuel (à l'époque des mathématiques modernes) on est passé à un rapport à un objet-outil (objet d'étude ensuite outil méthodologique) pour aboutir désormais à un rapport à un outil au service de la résolution des problèmes.

Cette analyse débouche sur les conclusions suivantes :

Les praxéologies algébriques visées par l'institution scolaire sont, la plupart du temps, artificielles et dépassent le cadre de leurs applications. Ceci est notamment illustré par une virtuosité et des automatismes excessifs constatés lors des apprentissages du calcul algébrique.

Le problème de l'apprentissage de la modélisation des situations reste entier et aucun éclairage institutionnel à son sujet n'est abordé. L'absence de technique suffisamment claire et intelligible de modélisation (mise en équation, en inéquation ou en système, usage de fonctions linéaires ou affines) est manifeste.

Les manuels scolaires passent sous silence les éléments technologiques et théoriques sous-tendant les démarches et les raisonnements mathématiques mis en jeu dans les activités algébriques et n'apportent aucune réponse à des questions cruciales telles que : Pourquoi aborde-t-on l'étude des concepts étudiés ? À quelles questions ces concepts permettent-ils de répondre ?

Toutefois, les praxéologies à développer dans l'enseignement/apprentissage de l'algèbre se sont réduites, au fil des années, à l'essentiel et deviennent progressivement mieux articulées

[21] Un problème est dit déconnecté si aucun pont ne peut être établi *a priori* directement entre ses données.

entre elles. Elles visent désormais la résolution des problèmes du premier degré à ce niveau scolaire. Mais ce dernier objectif est souvent occulté et n'a pas été atteint faute d'interaction continue avec les problèmes dans l'avancée du cursus.

Les nouveaux matériels didactiques proposent des activités diverses qui contribuent à illustrer les techniques algébriques mobilisées dans la réalisation des différentes tâches et à faciliter leur appropriation par les élèves. Toutefois, ces activités se ramènent, la plupart du temps, à des problèmes faiblement déconnectés encourageant souvent l'adoption d'une démarche arithmétique aux dépens des processus algébriques de résolution.

Eu égard à toutes ces considérations et ces faits historiques, il est légitime de se demander si l'institution prend effectivement en compte les obstacles épistémologiques ainsi dévoilés dans les processus de la transposition didactique. Plus précisément, nous nous demandons s'il est possible d'envisager une autre alternative didactique permettant de conjuguer les deux aspects conceptuel et opérationnel de l'algèbre dans une même et seule dynamique. Pouvons-nous faire en sorte que l'apprentissage de l'algèbre soit une réponse pertinente à un besoin éprouvé par les apprenants lorsqu'ils sont confrontés à un problème ? Et quel est alors le degré d'efficacité et de pertinence d'un tel modèle ? Les réponses à ces questions font l'objet d'un evoie que nous souhaitons l'explorer dans le travail de thèse, que nous co-encadrons, de Hassayoune (thèse en cours).

I. 3. 2. Le primat de la syntaxe dans les programmes et les manuels tunisiens actuels

Les contenus analysés, sont ceux qui sont en étroite liaison avec l'enseignement et l'apprentissage actuel des équations, inéquations et fonctions algébriques au secondaire.

I. 3. 2. 1 Dans les programmes officiels de l'enseignement secondaire tunisien

Les textes officiels des programmes de mathématiques analysés sont ceux des niveaux de première année, deuxième année (section sciences et technologie de l'informatique) et de la troisième année (section mathématiques).

Les objectifs généraux des trois programmes visent à ce que les élèves utilisent, appliquent et apprécient des mathématiques dans des situations familières ou non familières, dans des contextes mathématiques ou en rapport avec l'environnement et qu'ils soient capables de :

1. Pratiquer une démarche mathématique.
2. Communiquer dans un langage mathématique.
3. Mobiliser des algorithmes et des procédures.
4. Résoudre des problèmes.
5. Organiser et analyser l'information.
6. Utiliser les technologies de l'information et de la communication.

Afin de pouvoir analyser les différentes recommandations des programmes, qui requièrent l'aptitude des élèves à traiter des problèmes numériques, algébriques et graphiques, nous avons reproduit dans des tableaux les différents types de tâches techniques recommandées pour les trois niveaux dans les parties consacrées aux activités numériques, algébriques, graphiques et sur les fonctions (Kouki, 2017a), et nous avons choisi de présenter, séparément, les résultats de l'analyse des programmes de chaque niveau.

Les types de tâches recommandées en première année appellent à mobiliser des règles du calcul algébrique (développement, factorisation, simplification des expressions, mobilisation des algorithmes pour se ramener à des formes bien déterminées d'équations ou d'inéquations, déterminer l'expression d'une fonction linéaire connaissant l'image d'un réel, et déterminer l'expression d'une fonction affine connaissant l'image de deux nombres réels distincts, etc.).

Quant aux techniques à dimension sémantique, elles sont majoritairement recommandées au niveau des activités graphiques dans un repère où les tâches préalables incitent à ce que les élèves soient capables de mobiliser des types de techniques comme la lecture graphique,

représentation graphique d'une fonction linéaire ou affine, résolution graphique d'une inéquation, recherche de coordonnées des points d'intersection éventuels de droites, etc. Seules les techniques à dimension sémantique, qui consistent à déterminer l'expression d'une fonction linéaire connaissant l'image d'un nombre réel et celle d'une fonction affine connaissant l'image de deux nombres réels distincts, sont recommandées dans les activités du registre algébrique.

Par ailleurs, les recommandations générales préconisent que l'élève soit capable de valider la solution d'un problème en procédant à des vérifications, ne sont pas reprises d'une façon explicite, mais elles sont présentes implicitement dans des tâches de résolution susceptibles de mobiliser tant des techniques de transformations à dimension syntaxique que des techniques à dimension sémantique comme l'interprétation, le contrôle ou la vérification, lesquelles peuvent être effectuées dans les registres numériques, graphiques et algébriques.

Le traitement des problèmes relevant de la modélisation ouvre la possibilité de mobiliser des techniques à dimension sémantique, syntaxique ou mixte puisque les types de tâches recommandées incitent l'élève à apprendre à modéliser des situations réelles intra ou extra-mathématiques sous la forme d'équation, d'inéquation, de fonction linéaire ou affine et d'analyser et d'interpréter des représentations graphiques.

Le travail sur les différentes formes algébriques des équations et des inéquations du premier degré à deux inconnues réelles données par les relations $ax+by+c=0$ et $ax+by+c<0$ et la représentation graphique de leurs ensembles de solutions comme étant des courbes ou des régions du plan situées en dessous ou au-dessus d'une courbe associée à l'une des écritures fonctionnelles $y=f(x)$ ou $y<f(x)$ favorise l'articulation des dimension sémantique, syntaxique et mixte dans les différents registres algébrique, graphique, numérique et fonctionnel (ce qui correspond à l'articulation : équation / courbe / fonction) et par suite à l'articulation des dimensions sémantiques et syntaxiques.

Dans le programme de la deuxième année (section sciences et technologies de l'informatique), on définit les contenus à enseigner et les différents types de tâches afin d'institutionnaliser les techniques adéquates pour résoudre des exercices et des situations-problèmes en rapport avec les mathématiques. Les techniques recommandées dans ce programme incitent à ce que les élèves acquièrent l'aptitude à traiter des problèmes faisant intervenir des activités numériques et algébriques et des fonctions.

Tout au long de ces recommandations, les deux dimensions, sémantique et syntaxique, s'articulent. Ainsi, d'un côté, le point de vue syntaxique est clairement explicité dans les sections consacrées aux activités numériques et aux activités sur les fonctions.

- Dans les activités numériques, les tâches recommandées appellent à mobiliser des règles de transformation opératoires sur les nombres réels pour calculer et / ou simplifier une expression numérique et des techniques s'appuyant sur un algorithme ou une procédure de calcul faisant appel aux différentes propriétés et opérations du corps des nombres réels.
- Dans les activités sur les fonctions, les tâches recommandées appellent les élèves à mobiliser des techniques qui s'appuient sur une reconnaissance des formes réduites particulières d'expressions algébriques de fonctions du programme leur permettant de déterminer le sommet et l'axe de symétrie d'une parabole, ainsi que les asymptotes et le centre de symétrie d'une hyperbole.

D'un autre côté, la plupart des types de tâches recommandées au niveau des activités algébriques sur les fonctions et dans un repère laissent ouverte la possibilité de mobiliser des techniques favorisant l'articulation des points de vue sémantique, syntaxique et mixte.

- Dans la section consacrée aux activités algébriques, les différents types de tâches demandées appellent à mobiliser des techniques, des algorithmes ou des procédures relevant des règles de calcul algébriques appuyées par des opérations de développement et factorisation pour pouvoir manipuler des expressions algébriques. Parmi ces techniques nous pouvons citer celles qui consistent à reconnaître un zéro d'un trinôme, factoriser un trinôme, déterminer le signe d'un trinôme de second degré, déterminer le signe d'une expression algébrique. Ces techniques appellent les élèves à articuler les dimensions syntaxique et sémantique puisque les types de tâches recommandées exigent la mobilisation des techniques de substitution et de vérification qui relèvent du point de vue sémantique et des techniques s'appuyant sur des règles de transformation purement algébriques qui relèvent du point de vue syntaxique. Nous classons les types de techniques consistant à répondre à la tâche de résolution des équations et des inéquations du premier et du second degré à une inconnue réelle comme étant ouvertes c'est-à-dire appelant à la mobilisation des techniques pouvant s'appuyer sur l'un ou sur les deux points de vue sémantique et syntaxique.
- Dans la section consacrée aux activités sur les fonctions algébriques les différents types de tâches appellent à mobiliser des techniques consistant à déterminer

l'ensemble de définition des fonctions du programme, déterminer le sens de variation des fonctions du programme et traiter des problèmes d'optimisation. Cela revient à mobiliser à la fois les deux points de vue sémantique et syntaxique par le biais des interprétations et des opérations de transformations algébriques. D'autre part, les techniques mobilisant des procédures pour résoudre des problèmes dans des situations en rapport avec l'environnement font appel parfois au point de vue sémantique et parfois au point de vue mixte.

- Dans la section consacrée aux activités dans un repère, les différents types de tâches invitent les élèves à résoudre des problèmes dans un contexte graphique ou géométrique en faisant appel à l'outil analytique ou à modéliser des situations réelles en produisant des représentations graphiques.

Enfin, les tâches qui invitent à mobiliser des techniques de type sémantique apparaissent clairement dans les deux sections relatives aux activités sur les fonctions et aux activités dans un repère.

- Dans la section réservée aux activités sur les fonctions, les types de tâches nécessitent des techniques permettant de déterminer l'image d'un réel par l'une des fonctions du programme, de représenter graphiquement une fonction, de déterminer graphiquement l'ensemble de définition, la parité, le sens de variation d'une fonction, de déterminer graphiquement les coordonnées d'un point d'une courbe et d'étudier graphiquement la position relative de deux courbes. Ces techniques mobilisables au sens de Robert (1998) , qui consistent à effectuer des opérations de substitution dans une expression algébrique, des assignations de valeurs aux variables dans les expressions des fonctions pour pouvoir déterminer les coordonnées des points appartenant à la représentation graphique de la fonction et lire graphiquement pour déterminer les coordonnées d'un point de la courbe ou d'une intersection de deux courbes, sont de type sémantique.
- Dans la section réservée aux activités dans un repère, les élèves sont invités à mobiliser des techniques pour déterminer l'équation d'une droite ou celle d'un cercle par différentes méthodes, déterminer l'ensemble des points vérifiant le cas particulier où a, b et c sont des réels donnés, résoudre des problèmes dans un contexte graphique en faisant appel à l'outil analytique.

En ce qui concerne le programme de la troisième année secondaire (section mathématiques), les objets « équations » et « inéquations » figurent dans la partie de l'analyse réelle et sont

incorporés dans le contenu disciplinaire consacrée à l'étude des fonctions algébriques d'une part, ainsi que dans la partie de la géométrie consacrée à l'enseignement des équations de droite, du plan et de la sphère, d'autre part.

Le programme de la troisième année secondaire (section mathématiques) recommande l'articulation des deux dimensions syntaxique et sémantique dans les résolutions des problèmes liés aux objets 'équation', 'inéquation' et 'fonction' dans les registres algébrique, graphique et de l'analyse.

Nous pouvons ainsi dire qu'il ressort de l'analyse de ce programme que :

- L'articulation des deux dimensions sémantique et syntaxique est clairement recommandée au niveau de l'exploitation des problèmes de modélisation et plus précisément ceux incitant à exploiter des situations de la vie courante, c'est-à-dire externes aux mathématiques.
- Le point de vue sémantique est omniprésent dans les cas d'exploitations du registre graphique aussi bien dans la rubrique consacrée à l'analyse qu'à celle qui est consacrée à la géométrie dans laquelle les équations des plans et des sphères font leurs premières apparitions.
- Les différents types de tâches recommandées dans les traitements algébriques restent ouverts et ne permettent pas de dire clairement la pertinence de la mobilisation du point de vue sémantique dans certains cas de situations algébriques.
- Le point de vue syntaxique est très présent lorsqu'on recommande la mobilisation des algorithmes de calcul algébrique ainsi que les règles opératoires de développement des expressions algébriques ou de leurs factorisations.

I. 3. 2. 2. Analyse des manuels de l'enseignement secondaire tunisien

L'analyse des chapitres des manuels scolaires des différents niveaux d'enseignement est centrée sur les chapitres manipulant explicitement les équations, les inéquations et les fonctions.

Ces chapitres sont subdivisés en rubriques facilement repérables. Celles visant la consolidation des acquis des élèves et celles introduisant des notions constitutives de nouveaux savoirs et savoirs faires.

En s'appuyant sur un repérage des types de tâches demandées, l'analyse montre que la prise en compte de l'articulation des dimensions sémantique et/ou syntaxique dans le traitement des

activités, exercices et problèmes liés aux objets équations, inéquations et fonctions dépend de la question proposée.

Généralement, dans le cas des activités d'approche, les techniques sollicitées sont aussi bien à dimension sémantique que syntaxique. En revanche, dans le cas des exercices d'application et des exercices de synthèse, les techniques mobilisables recommandées sont le plus souvent à dimension syntaxique alors que les techniques sémantiques et mixtes sont de moins en moins recommandées.

On peut noter, en outre, que les techniques sémantiques sont particulièrement recommandées dans les deux chapitres se rapportant à l'enseignement des fonctions linéaires, affines et trinômes et sont clairement repérables dans les tâches de calcul d'images et d'antécédents ainsi que les tâches de lectures graphiques et de calculs numériques. Ceci est conforme aux résultats de Chevallard (1992) montrant que lors de l'étude des fonctions il est nécessaire de pouvoir mobiliser un point de vue sémantique. Par contre, les techniques syntaxiques sont dominantes dans les rubriques « Développement des compétences » des différents chapitres.

D'un autre côté, dans le manuel scolaire de la deuxième année, l'organisation des chapitres montre clairement que l'articulation entre les équations de courbes, leurs représentations graphiques et leurs rapports au concept de fonction n'est pas clairement explicitée, dans la mesure où les courbes interviennent essentiellement comme représentations graphiques des fonctions. Cette absence d'introduction des courbes comme objet autonome conduit les auteurs des manuels à dénommer ces courbes uniquement par l'expression "la courbe représentative de telle fonction " ce qui pourrait créer un terrain favorable à des conceptions erronées sur l'articulation des objets courbes / équations de courbes et fonctions.

On pourra penser à l'exemple d'associations des paraboles aux fonctions trinômes qui exprime en gros une absence d'interprétation sémantique de certaines relations entre les expressions mathématiques et les objets auxquels ils se réfèrent.

I.4.Investigation micro-didactique : La limite des techniques algébriques à dimension syntaxique

L'outil d'analyse multidimensionnelle, développé dans la section I. 2. 3, utilisé dans les analyses macro-didactiques, a permis de montrer que les techniques les plus sollicitées aussi bien dans les programmes que dans les manuels, en relation avec l'enseignement de l'algèbre, sont le plus souvent syntaxiques dans les différents registres sémiotiques.

Ce modèle a été utilisé pour analyser nos investigations micro-didactiques effectuées sur le terrain auprès des élèves du secondaire afin de mieux comprendre leur rapport à l'articulation sémantique / syntaxe et à dégager dans quelle mesure les deux aspects syntaxique et sémantique sont mobilisables du côté des élèves lorsqu'ils sont en situation de résolution de problème.

À partir des analyses précédentes des programmes scolaires, nous retenons l'absence remarquable de l'articulation courbe/équation lors de l'introduction des fonctions algébriques, ce qui par la suite pourra faire obstacle à la coordination de registres au sens de Duval (1998). À partir de ce constat, nous avons élaboré une investigation expérimentale pour mesurer le degré de mobilisation des deux aspects syntaxique et sémantique, par les élèves placés en situation de résolution de problèmes.

L'investigation s'appuie sur un questionnaire composé de types de tâches croisant des écritures fonctionnelles et équationnelles et faisant appel à des techniques de résolution mettant en jeu la dimension sémantique. Dans le traitement des tâches proposées, l'analyse mathématique et didactique, *a priori* et *a posteriori*, des différentes stratégies de résolution s'est appuyée sur la grille d'analyse multidimensionnelle développée ci-dessus.

Nous présentons les résultats d'un exercice adressé à deux groupes d'élèves du secondaire analysé selon le modèle décrit ci-dessus. (Kouki 2008, pp 137-266). L'exercice vise à déterminer l'ensemble des solutions de l'inéquation produit : $(y-x)(y-x^2+3x)>0$ et a été proposé comme suit :

Soient f et g les fonctions définies sur IR par :$f(x) = x$ et $(x) = x^2 - 3x$.
Soient $\Gamma_f$et Γ_g les courbes représentatives de f et g dans un repère orthonormé direct $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
1) Représenter $\Gamma_f$et Γ_g dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
2) Déterminer le signe de $h(x, y) = (y - x)(y - x^2 + 3x)$ dans chacun des cas suivants :
$(x, y) = (2,1)$; $(x, y) = (1,3)$; $(x, y) = (5,4)$; $(x, y) = (-2, -1)$;
$(x, y) = (-1, -2)$et$(x, y) = (6,7)$.
3) Placer, dans $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, les points $A, B, C, D\ et\ F$de coordonnées respectives :$(2,1)$, $(1,3)$, $(5,4)$, $(-2, -1)$, $(-1, -2)$ et $(6,7)$.
4) Déterminer, par le calcul ou graphiquement, l'ensemble des solutions de l'inéquation : $(y - x)(y - x^2 + 3x) > 0$.

Les questions 2 et 3 visent à enrichir le milieu des élèves par des indicateurs pouvant les conduire à faire des changements de registres de l'algébrique au graphique et permettant de visualiser les différentes régions du plan déterminées par les deux représentations graphiques Γ_f et Γ_g et de relier la position des points $A, B, C, D\ et\ F$ dans chaque région du plan considéré aux valeurs de l'image de chacun de ces points par la fonction.

Analyse a priori

L'analyse *a priori* des trois premières questions montre que les élèves devraient mobiliser différents types de techniques articulant les registres algébriques, numériques, graphiques et de l'analyse pour répondre aux tâches intermédiaires.

Concernant, la réponse à la quatrième question, la résolution de l'inéquation $(y - x)(y - x^2 + 3x) > 0$ne peut se faire qu'en associant les équations de la droite $y - x = 0$ et de la parabole $y - x^2 + 3x = 0$ aux deux graphes Γ_f et Γ_g (ces graphes se coupant à l'origine du repère orthonormée $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ et au point de coordonnées $(4,4)$.

La droite d'équation $y - x = 0$ partage le plan en deux demi-plans dont le demi-plan ouvert supérieur est celui des points $M(x, y)$ tels que : $y - x > 0$ et l'intérieur de la parabole est l'ensemble des points $M(x, y)$ tel que $y - x^2 + 3x > 0$.

Le signe de la relation $(y - x)(y - x^2 + 3x)$ est déterminé dans la figure ci-dessous :

Régions	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
$y-x$	-	-	+	+	+
$y-x^2+3x$	-	+	+	-	-
$(y-x)(y-x^2+3x)$	+	-	+	-	-

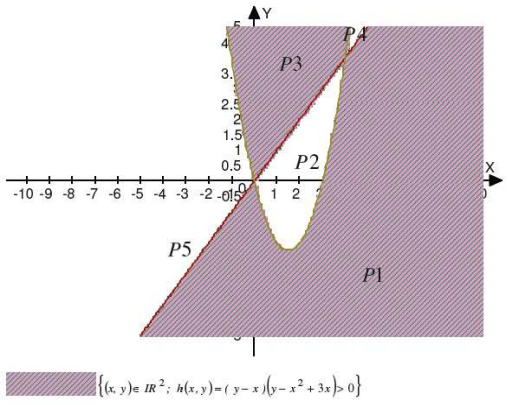


Figure 1-Ensemble des solutions de l'inéquation

En conclusion, l'ensemble des solutions de l'inéquation est la région $P_1 \cup P_3$ (Figure 1).

L'analyse *a priori* de la quatrième question montre que les élèves disposent de trois types de techniques :

1. La première technique τ_1 du type mixte du registre algébrico-graphique permet d'interpréter graphiquement le signe des deux expressions algébriques $y-x$ et $y-x^2+3x$ et à conclure que le produit est strictement positif dans la région $P_1 \cup P_3$.

2. La deuxième technique τ_2 du type sémantique articulant les registres graphique et algébrique consiste à affecter le signe de $h(x,y)$ à chaque point placé dans le repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ et de déduire par la suite ceux de la région $P_1 \cup P_3$.

3. La troisième technique τ_3 est une technique purement syntaxique du registre algébrique se résumant à des développements de l'inéquation $(y-x)(y-x^2+3x)>0$ qui sont inopérants.

Analyse a posteriori

L'analyse du corpus formé de 111 copies d'élèves montre que pour les trois premières questions, les élèves ont eu recours à différents types de techniques sémantiques, syntaxiques et mixtes dans les registres algébrique, graphique et numérique. Ceci montre qu'une bonne partie des élèves articulent ensemble les objets 'fonction linéaire', 'fonction trinôme' et 'courbe' d'une part, et confirme les résultats de l'analyse des programmes et des manuels scolaires de la première année de l'enseignement secondaire dans lesquels nous avons remarquablement repéré des recommandations incitant à un travail sur des types de tâches en vue de mobiliser des types de techniques articulant les dimensions sémantique, syntaxique et mixtes dans différents registres sémiotiques.

Concernant la réponse à la dernière question, les résultats du dépouillement montrent que 56 copies, soit environ 50% de la population, n'ont donné aucune réponse. Dans les réponses enregistrées, 14 élèves ont mobilisé prioritairement des techniques purement syntaxiques du type τ_3 sans aucune réponse exacte.

Les techniques sémantiques de type τ_2 articulant les registres graphique et algébrique ont été mobilisées par 12 élèves et contenaient 2 bonnes réponses[22].

Enfin, la seule technique mixte mobilisée du type τ_1 et qui était correcte a été enregistrée dans une copie d'un élève d'une classe de deuxième année secondaire.

Ceci met en question l'opérationnalité des techniques purement syntaxiques et montre la pertinence de la prise en compte de la dimension sémantique pour répondre à certains types de tâches de raisonnement dans la résolution de problèmes algébriques nécessitant une articulation des différents statuts que peut avoir des objets mathématiques.

Enfin les réponses qui n'ont aucun lien avec l'exercice ont été classées dans une rubrique « autres types de réponses » et étaient au nombre de 29.

I.5. Conclusion de la partie I

L'analyse des productions des élèves du secondaire tunisien, a permis de confirmer ce qui a été prévu dans l'analyse *a priori* en termes de mobilisations des différents types de techniques (sémantique, syntaxique et mixtes) dans différents registres sémiotiques même en absence de type de tâches explicitant un recours aux techniques sémantiques. Ceci rejoint le point de vue de Robert qui explique clairement que le cas de résolution de questions ouvertes est rarement associé à une application directe de connaissances, ce qui peut être expliqué par le doute initial sur ce qui est à montrer exactement.

Par ailleurs, nous retenons de l'analyse des productions des élèves le constat important que les techniques purement syntaxiques peuvent s'avérer inopérantes dans certains cas de résolutions algébriques.

Les investigations didactiques conduites ont permis de mettre en évidence la pertinence du croisement de la catégorisation sémantique / syntaxe pour enrichir les analyses en termes de fonctionnement cognitif de la pensée qui faisant appel aux différents registres de

22 Une bonne réponse dans chaque groupe d'élèves.

représentations sémiotiques. En effet, la dialectique sémantique / syntaxe est inter-registres mais aussi intra-registres. Ce point de vue rejoint celui de Durand-Guerrier (2005, 2013) qui soutient la thèse de la pertinence de la prise en compte de la dimension sémantique pour faire émerger des interprétations sous l'angle *pragmatique* en se référant au contexte, à la situation et aux connaissances du sujet.

II. L'articulation des dimensions sémantiques, syntaxiques et sémiotiques dans l'enseignement et l'apprentissage des développements limités au début de l'université

Documents joints à la partie II du rapport d'activité de recherche

[1] Kouki, R., Hachaïchi, Y. (2017b).Epistemological and institutional study of the Taylor serie. In T. Dooley, V. Durand-Guerrier & G. Gueudet (Eds.) Pre *Proceeding of 10th Conference of the European Research of Mathematics Education* (pp.). Dublin : Institute of Education. (À paraître)

[2] Kouki,R., Hachaïchi, Y. (2016b). Apport d'une étude historique et institutionnelle des développements limités au début de l'université : vers une alternative d'une meilleure conceptualisation. In A. Adihou (Eds.)*Actes du Premier Colloque des Didacticiens de Mathématiques Africains* (pp. 316-325). Yaoundé : ENS

[3] Kouki, R., Bel Haj Amor, F. &Hachaïchi, Y. (2016a).Comparaison entre l'évolution historique ayant mené aux développements limités et leur pratique d'enseignement au début de l'université : Entre syntaxe et sémantique.In E. Nardi, C. Winslow&T. Hausberger (Eds.) *Proceeding of International Network Didactics Research in University Mathematics 2016* (pp. 123-132). Montpellier : INDRUM.

ISSN 2496-1027

http://indrum2016.sciencesconf.org/conference/indrum2016/pages/indrum2016proceedings.pdf

II. 1. Introduction

En conclusion de notre travail de thèse, nous avions insisté sur la pertinence de : « *…l'investigation des mêmes notions d'équation, inéquation et fonctions dans des domaines autres que le domaine numérique, qui apparaissent dans l'avancée du cursus. On peut en effet faire l'hypothèse que les difficultés s'amplifient au niveau de l'université où les notions se complexifient, que l'on pense à l'algèbre des matrices, au travail algébrique sur les fonctions, aux développements limités, aux fonctions à plusieurs variables, aux équations différentielles, ou aux équations aux dérivées partielles. À ce niveau d'enseignement, la pensée sémantique et la rationalité mathématique occupent une place importante pour réussir le traitement des objets mathématiques*. » (Kouki, 2008 p.347)

Parmi ces pistes, nous avons retenu celle de l'étude des développements limités en utilisant les outils d'analyse didactique développés dans nos recherches sur l'algèbre du secondaire. Nous présentons les premiers résultats des recherches faisant l'objet des articles référenciés ci-dessus.

Donc conduire un travail d'investigation didactique sur l'apprentissage au début de l'université des développements limités et des approximations locales constitue la continuation naturelle de nos recherches d'autant plus que ces notions mathématiques font à la fois des objets mathématiques de l'algèbre et de l'analyse. En effet, les équivalences, les développements limités et les petits o, qui sont des objets très fins et des éléments constitutifs de l'analyse réelle, présentent certaines subtilités au niveau de leurs enseignements puisqu'un travail du type sémantique est nécessaire pour pouvoir donner du sens aux différentes interprétations possibles dans différents registres sémiotiques.

La plupart des recherches didactiques conduites au niveau de la transition lycée / université ont rarement traité d'une façon explicite, les problèmes liés à l'enseignement et l'apprentissage de ces objets très puissants intervenant dans le calcul de limite, l'étude locale d'une fonction, le travail numérique sur les séries et dans des domaines intra-mathématiques comme ceux de la modélisation mathématique, l'étude de phénomènes physiques, etc.

Notre recherche s'inscrit naturellement dans le champ des recherches didactiques en analyse réelle généralement centrées sur les difficultés du passage de l'analyse reposant sur des méthodes algébriques à l'analyse formelle (Artigue 1998, Bloch & Gibel 2011 et Ghedamsi 2008).

Dans cette investigation, nous nous sommes appuyés sur la grille d'analyse multi-dimensionnelle (développée dans la partie I.2.3).

De plus, nous avons choisi de faire appel au jeu de cadres et en particulier à la dialectique outil / objet développée par Douady (1984, 1986), puisque nous faisons l'hypothèse que la dimension objet du développement limité mérite d'être mieux explicitée au niveau du processus de sa transposition didactique.

Dans une première étape, nous délimitons le contour de l'objet ''développement limité'' à travers sa genèse historique.

Dans un deuxième temps, nous présentons les principaux résultats des investigations macro-didactiques concernant l'organisation de l'enseignement des développements limités en première année du supérieur.

Dans une troisième partie, nous exposons les résultats d'une investigation micro-didactique conduite auprès d'enseignants universitaires.

II.2.Genèse historique des développements limités et des approximations locales

D'après Dorier (2008), il est important et pertinent d'étudier la dimension historique et épistémologique d'un concept mathématique, puisque :

« *…une part importante de l'analyse didactique consiste à prendre en compte l'évolution et la constitution historique du savoir mathématique dans la sphère savante et ses rapports avec la constitution du texte du savoir enseigné. En outre, le processus de transposition didactique est complexe, il ne commence pas au moment où l'enseignant prépare son cours, il est au contraire à ce moment-là dans sa phase finale, l'enseignant n'ayant plus que le contrôle de variables locales dans la présentation du texte du savoir. Le chercheur en didactique est donc tenu de remonter aux sources de ce processus, jusqu'à la production du savoir savant, pour "se déprendre de la familiarité de son objet d'étude, et exercer sa vigilance épistémologique".* » (Dorier, 2008, p. 9)

L'étude épistémologique et historique de l'objet développement limité concerne essentiellement la période allant du début de XVIIe siècle jusqu'à la fin de XIXe siècle, pendant laquelle ont pris place les avancées les plus remarquables dans le domaine des mathématiques et de la physique.

Pour interpréter les différentes méthodes élaborées et développées par les mathématiciens, nous utilisons l'outil d'analyse croisant les dimensions sémantique, syntaxique, sémiotique et qui sera commentée en référence à la dimension outil/objet (Douady, 1986)

II. 2. 1. Les techniques géométriques conduisant aux premiers termes du développement limité

Au XVIIe siècle, les vitesses, les quadratures, les tangentes, les maxima et minima sont les aspects des problèmes de différentiations dont l'approche dominante chez les mathématiciens et les physiciens est l'approche géométrique.

Fermat, Descartes, Wallis, Newton et Leibniz se sont appuyés essentiellement sur l'approximation, au cours de leurs études du « problème des tangentes », certains d'entre eux ont élaboré les deux premiers termes du développement limité et se sont intéressés aussi à la méthode cinématique connue par la méthode des fluxions développée par Newton. Très influencé par son travail de physicien, Newton suppose que les quantités mathématiques sont

engendrées par une augmentation continuelle et l'associe à l'espace des corps en mouvement. De plus, il introduit le temps comme variable universelle.

Taton (2004) explique cette méthode qui est « …*équivalente à notre méthode élémentaire de détermination de la tangente à une courbe définie paramétriquement*. »

Dahan et Peiffer (1986) détaillent l'historique du « problème des tangentes » et indiquent que Barrow

« *…est le premier à reconnaître clairement que le problème des tangentes est l'inverse du problème des quadratures, et vice versa. Aucun de ces auteurs n'a reconnu la généralité et l'importance du lien qui fait aujourd'hui l'objet du théorème fondamental du calcul différentiel et intégral.* » (Dahan et Peiffer, 1986, p.188)

Le statut de l'objet mathématique « tangente » prend son étendue la première fois dans les travaux de Torricelli et Roberval où

« *… les problèmes de quadrature ont une origine très ancienne, les tangentes ne seront étudiées qu'au milieu du XVIIe siècle (…) La méthode élaborée par Archimède pour construire la tangente à la spirale se nourrit de considérations cinématiques. Elle a été étendue, au XVIIe siècle, dans les travaux de Torricelli et dans ceux de Roberval sur le mouvement des trajectoires.*» (Ibid., p.185)

De plus, Torricelli et Roberval

« *… considèrent les courbes engendrées par la composition de deux mouvements, dont on connaît les vitesses. La vitesse résultante sera la diagonale du parallélogramme des vitesses des deux mouvements qui engendrent la courbe. La droite ayant la direction de la diagonale sera la tangente à la courbe au point P. Cette méthode dynamique permet de déterminer les tangentes à beaucoup de courbes, mais la définition de la tangente qui y opère repose sur des concepts physiques et n'est pas applicable à toutes les courbes.* » (Taton, 2004, p.185-186)

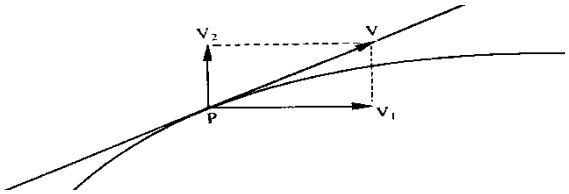


Figure 2

La résolution du « problème des tangentes » au début du XVIIe siècle, ramène à la genèse du statut objet de «la tangente» par la détermination de son équation par une méthode dynamique développée par Torricelli et Roberval à partir du concept de vitesse et des mouvements d'une

part, et d'une méthode géométrique (ou la détermination des premiers termes de développement limité) par Fermat, Descartes et Barrow, d'autre part.
Ceci nous permet de dire que la démarche développée dans la recherche de l'équation algébrique d'une tangente fait appel à une technique du type sémantique du registre graphique permettant d'obtenir d'une façon syntaxique l'équation des tangentes dans le cadre algébrique.

II. 2. 2. La détermination des développements limités par la méthode des séries infinies

Le deuxième temps de la genèse du concept de développement limité apparaît avec la détermination de développements en séries infinies (des cas particuliers de sinus, cosinus, tangente et ln (1+x) par des techniques géométriques développées par Mercator et Leibniz, en articulant les dimensions sémantique et syntaxique du cadre algébrique mobilisant le registre graphique.
« *Nicolas Marcator, dans sa Logarithmotechnia, publié à Londres en 1668, il trouve l'aire de l'hyperbole en réduisant d'abord en série géométrique, puis en intégrant terme à terme suivant la méthode de Wallis. Ce dernier trouvait d'ailleurs la même année des résultats analogues qu'il publiait en 1670. La méthode a un succès foudroyant et, en quelques années, James Gregory, Newton, Leibniz s'y distingue.* » (Taton, 1961, p.239)
On obtient ainsi à la formule connue par le nom de *logarithme naturel* qui est actuellement :

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots = \ln(1+x).$$

De son côté, Newton a trouvé les mêmes développements en séries infinies, indépendamment de Leibniz, à partir de l'utilisation de sa méthode cinématique, c'est-à-dire les vitesses des mouvements, où la représentation graphique prend une place importante dans le calcul des développements en séries infinies, appelées aujourd'hui « série entières ».

Newton s'est appuyé sur la méthode de Wallis, du calcul de la racine n^{ème} de x^m qui est $x^{\frac{m}{n}}$ et $x^{-\frac{m}{n}}$ où m et n entiers, pour déterminer le développement de la formule connue de nos jours, par la formule du binôme.
Il a suivi un cheminement assez long pour obtenir la formule :

$$(P+PQ)^{\frac{m}{n}} = P^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n}AQ + \frac{m-n}{2n}BQ + \frac{m-2n}{3n}CQ + \ldots, \quad A = P^{\frac{m}{n}}, \quad B = \frac{m}{n}AQ, \ldots.$$

Newton n'a jamais publié cette formule et c'est Wallis qui l'a officialisé en 1685 en attribuant la découverte à Newton. Cette formule est connue dans nos jours par celle du binôme de Newton sous la forme :

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-k+1)}{k!}x^k + \ldots$$

Newton a utilisé son développement comme une technique de calcul de certains cas particuliers des développements en séries en posant

$$P = c^2 \text{ et } Q = \frac{x^2}{c^2} \text{ où } \mathrm{m} = 1 \text{ et } \mathrm{n} = 2$$

$$(c^2 + x^2)^{\frac{1}{2}} = c + \frac{1}{2}c.\frac{x^2}{c^2} + \frac{1.(-1)}{2.4}c(\frac{x^2}{c^2})^2 + \frac{1.(-1).(-3)}{2.4.6}c(\frac{x^2}{c^2})^3 + \ldots = c + \frac{x^2}{2c} - \frac{x^4}{8c^3} + \frac{x^6}{10c^5} - \ldots$$

puis il obtient pour $c = 1$:

$$\sqrt{1+x^2} = 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + \frac{x^6}{16} - \frac{x^8}{128} + \ldots$$

II. 2. 3. Les développements limités des fonctions quelconques

Le troisième moment se réalise lors de la détermination de développements en séries d'une fonction quelconque. La formule de Taylor fait appel à la méthode d'intégration par parties de John Bernoulli et à la méthode « des différences finies »mobilisant l'analyse. Dès cette époque, elle devient un outil puissant de résolution de certains problèmes physico-mathématiques et surtout les approximations. Lagrange élargit son domaine d'utilisation pour déterminer l'approximation numérique d'un nombre transcendant.

Dans le cadre de l'analyse mathématique, l'exigence de rigueur s'organise autour du concept « limite » : Cauchy refait les démonstrations des différentes écritures de la formule de Taylor par une étude de sa convergence, Abel expose rigoureusement la formule du binôme de Newton et Weierstrass élabore la formule du point fixe. Pour terminer, le développement limité d'une fonction au voisinage d'un réel devient à partir de la formule de Taylor un cas particulier du développement asymptotique développé par Poincaré en 1886.

Ces développements montrent la pertinence de l'articulation des différents registres, numérique graphique et algébrique dans le cadre de l'analyse et confirme la nécessité de la prise en compte des dimensions sémantique et syntaxique dans le traitement des objets mathématiques.

II. 2. 4. Récapitulatif des différentes phases de la genèse historique des développements limités

Ce bref survol des principales phases historiques nous permet de présenter, dans le tableau 6 ci-dessous, en associant à chaque méthode ses types de technique, leurs registres et leurs dimensions.

Méthode	Période	Type de technique / Registre	Dimension
Détermination de la tangente et les deux premiers éléments du calcul différentiel	Début du XVIIe	La technique dynamique de Torricelli et Roberval / Graphique.	Sémantique
		La technique dynamique des sous tangentes de Fermat / Graphique.	Sémantique
		La technique des extrema de Fermat des 2 premiers termes du développement de Taylor / Graphique.	Mixte
		La technique d'approximation géométrique applicable aux courbes algébriques Descartes / Algébrico-graphique.	Mixte
		La technique d'Isaac Barrow / Géométrico-algébrique.	Mixte
Les cas particuliers de développements en séries infinies	À partir de 1668	La technique géométrique de Mercator / Graphique	Sémantique
		Les techniques de Newton/Graphique et formel	Mixte
		Les techniques algébriques de Leibniz / Graphique	Mixte
Le développement en série d'une fonction quelconque et la formule de Taylor	XVIIIe	La technique algébrique de Newton et Wallis / Formel	Syntaxique
		Les techniques analytiques de détermination du développement de Taylor / Formel	Mixte
L'étude rigoureuse de la formule de Taylor et la formule de Binôme de Newton	À partir de 1821	Les techniques de Cauchy pour les différentes écritures de la formule de Taylor / Formel	Mixte
		La technique algébrique et analytique d'Abel / Formel	Syntaxique
Développement asymptotique de Poincaré (1886)	1886	Les techniques analytiques des développements limités et asymptotiques / Formel	Syntaxique

Tableau 6 : Les principales phases de la genèse des développements limités

Au cours de la formulation du concept de développement limité d'une fonction à une variable réelle, les mathématiciens ont exploité différentes techniques dans les cadres de l'algèbre, l'analyse et de la géométrie, articulant des registres sémiotiques comme les figures géométriques statiques et dynamiques afin d'aboutir à des écritures algébriques ou à des représentations cartésiennes formulées. Ce qui confirme que ces méthodes articulaient les dimensions sémantiques et syntaxiques joignant les courbes aux tangentes aux équations en passant du numérique au graphique à l'algébrique et à l'analytique etc.

L'approche géométrique a pris une place importante dans l'étude des premiers termes de la formule de Taylor et dans la détermination des développements en séries infinies (développements limités usuels). Nous pouvons ainsi dire que, durant cette période, les mathématiciens associaient la dimension sémantique dans l'interprétation graphique et la dimension syntaxique dans la manipulation des différentes techniques (équations, expressions analytiques) du calcul.

Enfin, remarquons qu'on ne peut pas parler du concept de développement limité sans évoquer la notion d'équivalence et d'approximation. Bourbaki confirme la genèse de ce concept est due à

« *… P. du Bois-Reymond [94 a et b] qui, le premier, aborda systématiquement les problèmes de comparaison des fonctions au voisinage d'un point, et, dans des travaux très originaux, reconnut le caractère (« non archimédien » des échelles de comparaison, en même temps qu'il étudiait de façon générale l'intégration et la dérivation des relations de comparaison, et en tirait une foule de conséquences intéressantes [94 b]. Ses démonstrations manquent toutefois de clarté et de rigueur, et c'est à G. H. Hardy [147] que revient la présentation correcte des résultats de du Bois-Reymond : sa contribution principale a consisté à reconnaître et démontrer l'existence d'un ensemble de « fonctions élémentaires », les fonctions (H), où les opérations usuelles de l'Analyse (notamment la dérivation) sont applicables aux relations de comparaison. »* (Bourbaki, 1960, p.254)

II.3.Analyse macro-didactique du concept développement limité

L'étude historique permet de remonter aux sources du savoir savant et de comprendre les différentes formulations et reformulations subies par l'objet développement limité où la cinématique a joué un rôle fondamental dans le passage du géométrique à l'algébrique et de l'algébrique à l'analytique.

L'analyse macro-didactique du concept de développement limité s'est imposée. Pour cela, nous avons choisi d'analyser les programmes, les manuels scolaires et quelques polycopiés de cours recueillis dans des sections mathématiques de classes préparatoires aux écoles d'ingénieurs. Le choix de ces classes s'est aussi imposé à nous, car l'enseignement des mathématiques donne une place importante aux développements limités qui servent dans les nombreuses modélisations utilisées par les ingénieurs.

II.3.1. Analyse du programme de la première année de l'université section Math-Physique

Nous avons choisi d'étudier la transposition des développements limités dans les programmes et les manuels de la première année de l'enseignement universitaire

Notons d'abord que les recommandations générales du programme d'enseignement de l'analyse réelle montre qu'elles insistent sur la nécessité d'articuler les dimensions sémantique et syntaxique dans les différents registres analytique, algébrique, graphique, géométrique et numérique. Dans le tableau 7 ci-dessous, nous présentons les recommandations relatives aux développements limités et celles relatives aux fonctions convexes :

c) Développements limités

Développement limité à l'ordre n d'une fonction f au voisinage d'un point. Opérations algébriques sur les développements limités : Somme, produit ; développement limité de $u \to \frac{1}{1-u}$, application au quotient. Existence d'un développement limité à l'ordre k pour une application de classe C^k : formule de Taylor-Young.	Les étudiants doivent savoir déterminer sur des exemples simples le développement limité d'une fonction composée. Aucun résultat général sur ce point n'est pas exigible des étudiants. Les développements asymptotiques sont à étudier sur quelques exemples simples. Toute étude systématique est exclue ; en particulier la notion générale d'échelle de comparaison est hors programme. Il convient de donner un exemple où f admet un développement limité à l'ordre 2 en un point sans être deux fois dérivable en ce pont.

d) Fonctions convexes

Dans ce paragraphe les fonctions considérées sont à valeurs réelles.

Définition, interprétation graphique (tout sous-arc est sous sa corde). Caractérisation des fonctions convexes par la convexité de la partie du plan située au-dessus de la courbe, par la croissance des pentes des sécantes dont on fixe une extrémité. Si f est de classe C^1, f est convexe si et seulement si f' est croissante. La courbe est alors située au dessus de chacune de ses tangentes.	Inégalité de convexité : si $\lambda_j \geq 0$ et $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1$ alors $f\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j a_j\right) \leq \sum_{j=1}^{n} \lambda_j f(a_j)$. L'étude de la continuité et de la dérivabilité des fonctions convexes est hors programme.

Table 7 : Enseignement des développements limités et des fonctions convexes

Nous constatons qu'en ce qui concerne l'introduction des développements limités, la dimension sémantique est absente nettement puisqu'il n'y figure aucune référence au graphique, ni au numérique, ni à l'aspect dynamique. Par contre, l'introduction des fonctions convexes met en évidence leur caractère graphique, algébrique et fonctionnel.

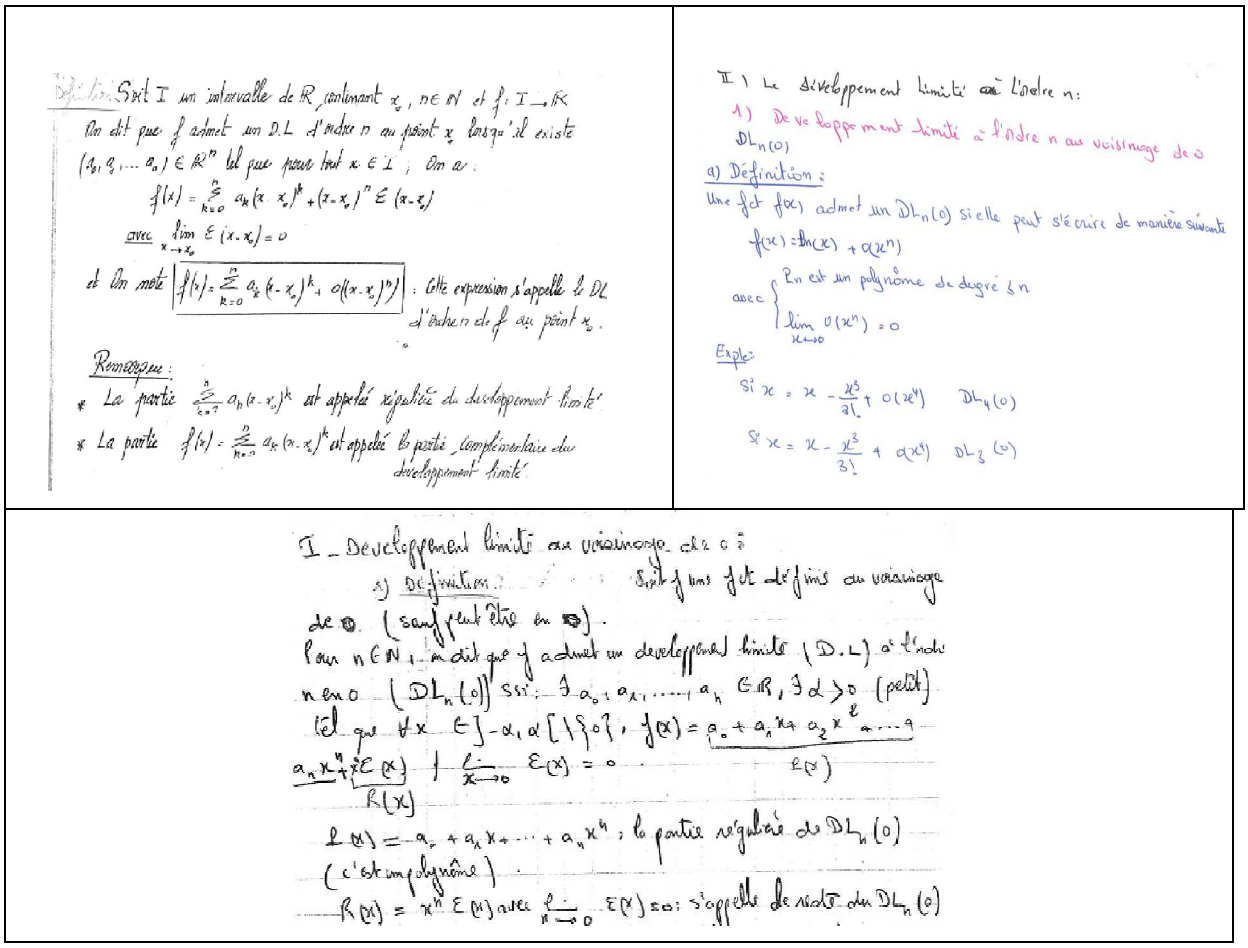
Les apprentissages purement syntaxiques sont recommandés dans les registres en algèbre et en analyse, alors que pour les fonctions convexes, on recommande d'articuler les différents cadres et registres.

II.3.2.Étude des manuels et de polycopiés de cours

Quatre manuels et trois polycopiés de cours ont été analysés ; pour l'enseignement des développements limités, ils suivent une même stratégie «de type magistral », commençant par une présentation théorique de cet «objet» purement syntaxique à partir de définitions, propriétés et théorèmes dans un registre analytique.

Dans les polycopiés, l'introduction des développements convergent vers l'utilisation de la définition comme si l'existence du développement limité était connue sans pour autant montrer qu'il est utile à l'approximation.

Dans le tableau 8, nous présentons des extraits des différentes définitions introductives de l'objet développement limité retrouvées dans les trois polycopiés de cours étudiés.



Définition Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant x_0, $n \in \mathbb{N}$ et $f : I \to \mathbb{R}$
On dit que f admet un D.L d'ordre n au point x_0 lorsqu'il existe $(a_0, a_1, \dots a_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que pour tout $x \in I$; On a :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x - x_0)^k + (x - x_0)^n \varepsilon(x - x_0)$$

avec $\lim_{x \to x_0} \varepsilon(x - x_0) = 0$

et On note $\boxed{f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x - x_0)^k + o((x - x_0)^n)}$: Cette expression s'appelle le DL d'ordre n de f au point x_0.

Remarque :
* La partie $\sum_{k=0}^{n} a_k (x - x_0)^k$ est appelée régulière du développement limité
* La partie $f(x) = \sum_{k=n}^{n} a_k (x - x_0)^k$ est appelée la partie complémentaire du développement limité.

II) Le développement limité à l'ordre n :
1) Développement limité à l'ordre n au voisinage de 0
$DL_n(0)$
a) Définition :
Une fct $f(x)$ admet un $DL_n(0)$ si elle peut s'écrire de manière suivante
$f(x) = P_n(x) + o(x^n)$
avec $\begin{cases} P_n \text{ est un polynôme de degré } \leq n \\ \lim_{x \to 0} o(x^n) = 0 \end{cases}$
Exple :
Si $x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4)$ $DL_4(0)$
Si $x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$ $DL_3(0)$

I – Developpement limité au voisinage de 0 :
1) Définition : Soit f une fct définie au voisinage de 0 (sauf peut être en 0).
Pour $n \in \mathbb{N}$, on dit que f admet un developpement limité (D.L) à l'ordre n en 0 ($DL_n(0)$) ssi : $\exists a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, $\exists \alpha > 0$ (petit) tel que $\forall x \in]-\alpha, \alpha[\setminus \{0\}$, $f(x) = \underbrace{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots}_{\ell(x)} \underbrace{a_n x^n + x^n \varepsilon(x)}_{R(x)}$ | $\lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$
$\ell(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$; la partie régulière de $DL_n(0)$ (c'est un polynôme).
$R(x) = x^n \varepsilon(x)$ avec $\lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$: s'appelle le reste du $DL_n(0)$

Tableau 8 : Extraits des définitions introductives de l'objet développement limité

À partir de ces extraits l'introduction de l'objet développement limité s'effectue directement comme s'il était connu sans pour autant montrer son utilité dans le domaine des approximations.

Nous pensons que, la place de la figure géométrique justifiant son intérêt dans le cas des approximations locales via des techniques graphiques et numériques, mérite d'être mieux explicitée surtout qu'elles sont totalement absentes dans les différents polycopiés analysés.

Ces résultats d'analyse mettent en question la divergence entre l'évolution historique et celle des techniques recommandées et enseignées actuellement.

En effet, les statuts «outil» et «objet» du développement limité s'articulaient tout au long de sa genèse dans différents registres. En revanche, l'analyse du processus de transposition de ce savoir montre l'absence d'un travail au niveau des registres graphique et numérique.

II.4. Investigation Micro-didactique : Enquête auprès des enseignants universitaires

L'étude de l'évolution historique et l'analyse des programmes et des polycopiés de cours ont montré l'absence d'un travail sur les registres graphique, dynamique et numérique concernant le concept « développement limité »aussi bien en tant qu'objet et outil. L'enquête auprès des enseignants universitaires (cf. Annexe 2) visait le recueil de plus d'éléments relatifs aux dimensions sémantiques, syntaxiques et sémiotiques dans l'apprentissage des développements limités. Elle a permis d'évaluer l'importance accordée par les professeurs aux développements limités et de préciser leur manière de les introduire, la place qu'ils accordent à la figure géométrique comme outil d'approximations d'une fonction et l'articulation des types d'approximations enseignés(équivalence, calcul de limite et développement limité) et les types de techniques mobilisés dans la résolution des problèmes nécessitant l'usage des développements limités.

L'analyse des réponses aux questions de l'enquête montre que le statut objet du concept « développement limité » est généralement mis à l'écart parce que le programme officiel ne l'explicite pas. Par contre, le statut outil est très sollicité dans la résolution de problèmes mobilisant des techniques algébriques, numériques et graphiques, relevant généralement des approximations numériques et appartenant à des domaines divers (mécanique, physique ou mathématiques).

Pour le traitement des problèmes d'approximations locales, l'articulation des registres est généralement absente. On voit, par exemple, que la figure et le graphique sont peu sollicités lors de l'étude des nombres transcendants.

II.5. Conclusion de la partie II

Les analyses didactiques, développées dans cet axe de recherche, montrent clairement que la genèse historique des développements limités est étroitement liée aux différents cadres et registres sémiotiques. D'un autre côté, il y avait une dialectique dynamique entre les statuts outil et objet de cet objet d'étude et des différents concepts qui sont en étroite liaison avec ce concept mathématique. Ceci a permis aux différents mathématiciens d'avancer sur leur recherche et leur mise en fonctionnement d'un nouvel objet qui par la suite est devenu un outil puissant dans le calcul d'approximation locale aussi bien en mathématiques que dans les domaines de la physique, de la mécanique etc.

En revanche, du côté institutionnel, l'articulation des dimensions sémantiques, syntaxiques et sémiotiques représente le maillon faible de la transposition didactique des développements limités aussi bien dans les programmes, les manuels et les polycopiés de cours que dans les processus de son enseignement qui a été confirmé via notre enquête conduite auprès des enseignants universitaires experts dans l'enseignement au niveau du premier cycle universitaire.

Nous pouvons ainsi dire que la difficulté d'enseigner l'objet développement limité est due au fait qu'il a été conçu comme outil avant d'être étudié comme objet. L'approche utilisée dans le cursus universitaire ne suit pas cette évolution historique et l'aspect formel a tendance à l'emporter devant l'aspect intuitif.

Un travail articulant le numérique et graphique mérite d'être mieux explicité par toute la noosphère impliquée dans le processus de transposition de cet objet de savoir très puissant dans les domaines intra et extra-mathématiques qui jouera un rôle très important dans la formation des futurs ingénieurs.

Conclusion et perspectives scientifiques

À travers cette note de synthèse, nous pensons avoir montré que la référence à la sémantique logique offre un cadre épistémologique pertinent et consistant pour analyser, dans une perspective didactique, la question difficile de l'articulation des dimensions sémantiques et syntaxiques dans le processus de l'enseignement et de l'apprentissage de l'algèbre au secondaire et des développements limités au début de l'université.

Ce cadre de référence, qui représente la référence à la sémantique logique offre un cadre épistémologique pertinent et consistant pour analyser, dans une perspective didactique, la question difficile de l'articulation des dimensions sémantiques et syntaxiques dans le processus de l'enseignement et de l'apprentissage de l'algèbre au secondaire et des développements limités au début de l'université.

La mise au point de la grille d'analyse multidimensionnelle est importante car elle a permis de prendre en compte les différentes dimensions sémantiques, syntaxiques, sémiotiques, épistémologiques et praxéologiques dans les analyses didactiques de l'enseignement de l'algèbre, des développements limités et des approximations locales, que ce soit au secondaire ou au début de l'enseignement supérieur. Elle permet également de montrer la limite des techniques syntaxiques de résolution algébrique.

Comme prévu, cette grille fournit un cadre théorique suffisant pour analyser le processus de transposition didactique des savoirs mathématiques, contrôler les raisonnements et les valider. Adoptée tout au long de nos recherches, cette grille d'analyse intègre partiellement les aspects pragmatiques et didactiques aussi bien en algèbre qu'en analyse et doit pouvoir être utilisée dans d'autres études didactiques théoriques et pratiques.

Les analyses des polycopiés et des réponses des enseignants à l'enquête montrent que la logique est quasiment absente du discours du professeur. Celle-ci est remplacée le plus souvent par des règles de raisonnement relevant d'un savoir-faire qui n'est pas constitué en savoir théorique.

Les différentes contributions réalisées aussi bien au niveau de l'algèbre du secondaire que de celui des développements limités à l'université, ouvrent des perspectives de recherches dans le futur suivant plusieurs axes :

- Étendre les études épistémologiques aux praxéologies algébriques tout au long du secondaire tunisien, depuis l'indépendance jusqu'à nos jours.

- Explorer les conceptions des enseignants et de leur rapport personnel à l'algèbre et en particulier à l'articulation des dimensions sémantiques, syntaxiques et sémiotiques dans leurs pratiques d'enseignements.
- Approfondir les investigations didactiques sur le concept de développement limité, dont les difficultés d'appropriation sont bien connues des enseignants, en explorant les pratiques enseignantes. Il s'en suivra l'élaboration d'une ingénierie didactique à travers laquelle nous évaluerons l'impact d'un enseignement non ordinaire s'appuyant sur l'analyse non standard pour introduire les développements limités et les approximations.
- Exploiter le modèle de la grille d'analyse à l'étude de l'enseignement des mathématiques du primaire au collège. Nous faisons l'hypothèse que, dès l'école élémentaire et le collège, les élèves sont amenés à mettre en œuvre des raisonnements qui, bien que portés par la langue naturelle font appel à la sémantique logique.

Ces travaux de recherche constituent un premier pas vers nos explorations didactiques à venir dans le champ de l'enseignement et de l'apprentissage des mathématiques.

Bibliographie

Abdeljaouad, M. (2002). Le manuscrit mathématique de Jerba : Une pratique des symboles algébriques maghrébins en pleine maturité, In. L. Ezzaim (Ed.) *Actes du 7e Colloque maghrébin sur l'histoire des mathématiques arabes* (V2, pp. 9-98). Maroc : Marrakech.

Artigue, M. (1998). L'évolution des problématiques en didactique de l'Analyse. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *18*(2), 231-262.

Bloch, I. & Gibel, P. (2011). Un modèle d'analyse des raisonnements dans les situations didactiques. Étude des niveaux de preuves dans une situation d'enseignement de la notion de limite. *Recherches en Didactique des Mathématiques*,*31* (2), 191-228.

Bloch, I. (2012). Rôle et statut des savoirs dans la pratique mathématique : l'exemple d'un basculement épistémologique dans l'enseignement de l'analyse. In J-L. Dorier, S. Coutat (Eds.) *Actes du Colloque Espace Mathématique Francophone* (pp. 392-403) Genève : Université de Genève.

Bourbaki, N. (1960). *Éléments d'histoires des mathématiques*. Hermann : Paris.

Chaachoua, H. (2010). *La praxéologie comme modèle didactique pour la problématique EIAH. Étude de cas : La modélisation des connaissances des élèves*. (Note de synthèse pour l'habilitation à Diriger des Recherches). Université de Grenoble.

Chellougui, F. (2009). L'utilisation des quantificateurs universel et existentiel en première année d'université entre l'explicite et l'implicite. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *29* (2), 123-154.

Chellougi, F., Ghedamsi, I., Kouki, R. (2015).Entre le formalisme mathématique et ses « significations » : l'acte interprétatif, un maillon faible de la relation didactique ? In D. Butlen & al (Eds.) Rôles et places de la didactique et des didacticiens des mathématiques dans la société et dans le système éducatif (pp.465-474) (Volume 2-Cdrm). *Recherches en Didactique des Mathématiques*. Grenoble : La pensée sauvage.

ISBN 978-2-85919-305-8

Chevallard, Y. (1984). Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège - première partie : l'évolution de la transposition didactique. *Petit x*, *5*, 51-94.

Chevallard, Y. (1989). Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège – deuxième partie : perspectives curriculaires : La notion de modélisation. *Petit x*, *19*, 43-72.

Chevallard, Y. & Joshua, M-A. (1991). *La transposition didactique, du savoir savant au savoir enseigné suivi d'un exemple de la transposition didactique*. Grenoble : La pensée sauvage.

Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique : Perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *12* (1), 73-112.

Dahan-Dahmedico, A. & Peiffer, J. (1986). *Une histoire des mathématiques : Routes et dédales*. Paris : Seuil.

Djebbar, A. (2005). *L'algèbre arabe : genèse d'un art*. Paris : Vuibert-Adapt.

Dorier, J-L. (2008). *Recherches en histoire et en didactique des mathématiques sur l'algèbre linéaire : Perspectives historiques sur leurs interactions*. Note de synthèse pour l'habilitation à Diriger des Recherches). Université Joseph-Fourier.

Douady, R. (1984). *Jeux de cadres et Dialectique outil-objet*. Thèse d'état : Université Paris 7.

Douady, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *7* (2), 5-31.

Douady, R. (1992). Des apports de la didactique des mathématiques à l'enseignement, *Repères*, *6*, 133-134.

Drouhard, J-P. & Panizza, M. (2012). Hansel et Gretel et l'implication semio-linguistique en Algèbre élémentaire. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *Vol. Spécial RDM*, 209-235.

Durand-Guerrier, V. & Arsac, G. (2003). Méthodes de raisonnement et leurs modélisations logiques. Spécificité de l'analyse. Quelles implications didactiques ?*Recherches en didactique des mathématiques,23*(3), 295-342.

Durand-Guerrier, V. & Arsac, G. (2005a). An epistemological and didactic study of a specific calculus reasoning rule. *EducationalStudies in Mathematics*, *60* (2), 149-172.

Durand-Guerrier, V. (2005b). *Recherches sur l'articulation entre la logique et le raisonnement mathématique dans une perspective didactique. Un cas exemplaire de l'interaction entre analyses épistémologique et didactique. Apports de la théorie élémentaire des modèles pour une analyse didactique du raisonnement mathématique*. (Note de synthèse pour l'habilitation à Diriger des Recherches). Université Lyon 1.

Durand-Guerrier, V. (2008). Truth versus validity in mathematical proof, ZDM *The International Journal on Mathematics Education*, *40* (3), 373-384.

Durand-Guerrier, V., Barrier, T., Chellougui, F.& Kouki, R. (2013a). Reasoning, Proof and Proving in Mthematics Education. In Springer (Eds). *Proceedings of 12thInternational Conference of Mathematics Education*. (pp. 453-457).

Durand-Guerrier, V. (2013b). Quelques apports de l'analyse logique du langage pour les recherches en didactique des mathématiques, In A. Bronner, & al (Eds.) *Questions vives en didactique des mathématiques : problèmes de la profession d'enseignant, rôle du langage*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Duval, R. (1991). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de didactique et de sciences cognitives,5*, 37-65.

Duval, R. (1996). Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *16*/3, 349-382.

Duval, R. (1998). Écarts sémantiques et cohérence mathématique. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 1*, 7-25.

Duval, R. (2006). Quelle sémiotique pour l'analyse de l'activité et des productions mathématiques. *Revista Latino americana de Investigacion en Mathematica Educativa*, (nùmero especial), 45-81. México : Universidad Autóma del Estado de México.

Frege, G. (1971). *Écrits de logique et philosophiques*. Paris : Seuil.

Gascon, J. (1993). Un nouveau modèle de l'Algèbre élémentaire comme alternative à l'arithmétique généralisée. *Petit x*, *37*, 43-63.

Ghedamsi, I. (2008). *Enseignement du début de l'analyse réelle à l'entrée à l'université : Articuler contrôles pragmatique et formel dans des situations à dimension a-didactique*. (Thèse de doctorat). Université Bordeaux 2, France.

Grugeon, B. (1997). Conception et exploitation d'une structure d'analyse multidimensionnelle en algèbre élémentaire. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *17* (2), 167-210.

Haddad, S. (2012). *L'enseignement de l'intégrale en classe de terminale l'enseignement tunisien* (Thèse de doctorat). Université Paris 7, France.

Hassayoune, S., Kouki, R. (2015). La genèse de la pensée algébrique : Ruptures et obstacles épistémologiques. In L. Theis, R. Bebbouchi (Eds.) *Actes du colloque Espace Mathématique Francophone* (pp. 386-402). Alger : FSTHB.

Høyrup, J. (2002). *Lengths, widths, surfaces : A portrait of old Babylonian algebra and its kin, studies and sources* in the history of mathematics and physical sciences. Berlin et Londres : Spinger.

Kieran C., Herscovics N. (1980) Donner de la signification au concept d'équation, l'initiation à l'algèbre. *Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques*, *3*, 46-58.

Kouki, R. (2006). Équations et inéquations au secondaire entre syntaxe et sémantique. *Petit x*, *71*, 7-28.

Kouki, R. (2008). *Enseignement et apprentissage des équations, inéquations et fonctions au secondaire : entre syntaxe et sémantique* (Thèse de doctorat). Université Lyon 1, France.

Kouki, R. (2010). Le raisonnement logique pour assurer un enseignement de la pensée mathématique : Le cas des équations et des fonctions algébriques. In A. Kuzniak, M. Sokhana (Eds.) Enseignement des mathématiques et développement enjeux de société et de formation. *Numéro spécial de la Revue Internationale Francophone* (pp. 1221-1235).

ISSN : 0850-4806

Kouki, R., Ghedamsi, I. (2012a). Limite des méthodes syntaxiques en algèbre du secondaire. In J-L. Dorier, S. Coutat (Eds.) *Actes du Colloque Espace Mathématique Francophone 2012* (pp. 435-444). Genève : Université de Genève.

ISBN 978-2-8399-1115-3

http://emf.unige.ch/files/1814/5320/2248/EMF2012GT3KOUKI.pdf

Kouki, R., Chellougui, F. (2013). Limit of the syntactical methods in secondary school algebra. In B. Ubuz, C. Haser & M-A. Mariotti (Eds.) *Proceedings of the Eigth Conference of European Research on Mathematics Education* (pp. 450-459). Turkey : Antalya.

ISBN 978-975-429-315-9

http://www.mathematik.unidortmund.de/~erme/doc/CERME8/CERME8_2013_Proceedings.pdf

Kouki, R., Jeannotte, D. & Vlassis, J. (2015a). Les différentes pensées mathématiques et leur développement dans le curriculum. In L. Theis (Eds.) *Actes du colloque Espace Mathématique Francophone 2015* (pp. 199-205). Alger : USTHB.

http://emf2015.usthb.dz/actes/EMF2015GT3COMPLET.pdf

Kouki, R., Hassayoune, S. (2015b).Développement de la pensée algébrique dans le curriculum tunisien : Analyse épistémologique et institutionnelle. In L. Theis, R. Bebbouchi (Eds.) *Actes du colloque Espace Mathématique Francophone*(pp. 290-312). Alger : FSTHB.

Kouki, R., Belhaj Amor, F, & Hachaïchi, Y. (2016a). Comparaison entre l'évolution historique ayant mené aux développements limités et leur pratique d'enseignement au début de l'université : Entre syntaxe et sémantique. In E. Nardi, C. Winslow & T. Hausberger (Eds.) *Proceedings of the 1st Conference of the International Network for Didactic Research in University Mathematics* (pp. 123–132). Montpellier : INDRUM.

Kouki, R., Hachaïchi, Y. (2016b). Apport d'une étude historique et institutionnelle des développements limités au début de l'université : Vers une alternative d'une meilleure conceptualisation. In A. Adihou, M-S. Sangaré, A. Mopondi Bendeko Mbumbu & J. Njomgang Ngansop (Eds.) *Actes du Premier Colloque des Didacticiens de Mathématiques Africains* (pp. 314-323). Yaoundé : ENS.

Kouki, R. (2017a). L'articulation des dimensions syntaxique et sémantique en algèbre du secondaire. *Recherches en Didactique des Mathématique*, vol. , pp, La pensée Sauvage. (À paraître).

Kouki, R., Hachaïchi, Y. (2017b). Epistemological and institutional study of the Taylor serie. In T. Dooley, V. Durand-Guerrier & G. Gueudet (Eds.) Pre *Proceeding of 10th Conference of the European Research of Mathematics Education* (pp.). Dublin : Institute of Education.

Quine, W. V. O. (1950). *Methods of logic*. New York:Harvard University Press.

Radford, L. (1991). Diophante et l'Algèbre présymbolique. *Bulletin AMQ*, Décembre 1991-

Mars 1992.

Robert, A. (1998). Outil d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université. *Recherches en didactique des mathématiques*, *21* (1), 57-80.

Tarski, A. (1936a). Le concept de vérité dans les langages formalisés. In *Logique, sémantique et métamathématique*, *1*, 157-269. Armand Colin.

Tarski, A. (1936b). Sur le concept de conséquence. In *Logique, sémantique et métamathématique*,*1*, 141-152. Armand Colin.

Tarski, A. (1960). *Introduction à la logique*. Paris : Gauthier-Villars.

Tarski, A. (1972). *Logique, sémantique, mathématique* : 1923-1944 (vol. 1 et 2). Paris : Armand Colin

Taton, R. (1961). Histoire générale des sciences. *Revue d'histoire des sciences et de leurs applications*, *18* (4), 397-406.

Taton, R. (2004). Calcul infinitésimal. *Encyclopædia Universalis*, *10.*

Programmes et manuels scolaires tunisiens utilisés

Ministère de l'éducation, Direction des programmes, *Programmes officiels de l'enseignement secondaire*, Annexes XI, Mathématiques, Tunis : Centre National Pédagogique, 1998.

Ministère de l'éducation et de la formation, Direction générale des programmes et de la formation continue, *Programmes de mathématiques 1ère & 2ème année secondaire*. Disponible sur :
<http://www.edunet.tn/ressources/reforme/nouv_prog/programmes/sciences/mathematique/math_1_2anne.pdf > (le 25 juillet 2006)

Manuels scolaires :

Monge M., Guinchan M., J-P. J.-P., 1976. *Mathématiques Classe de troisième*. Belin : Paris.

Kachoukh B., Hachfi A., Bel Haj Salem M., Tangour M., 1986. Mathématiques 4è Math-Sciences et Math-Technique. Tunis : CNP.

Tarifa S., Smida H., Klila S., Mhamdi N., 1991. *Mathématiques 4è année secondaire*. Tunis : CNP.

Mcharek R., Mhamdi N., Klila S., Ben Youssef L., 2003. *Mathématiques 1è année secondaire*. Tunis : CNP.

Rahmouni A, et al., 2005. *Mathématiques pour la deuxième année de l'enseignement secondaire : Section sciences et technologie de l'informatique*. Tunis : CNP.

Annexes

Annexe 1 : Les compétences algébriques visées par le manuel de 2003 et leurs composantes

Chapitres	Compétences mathématiques Exigibles :	Composantes de la compétence			Contextes de réalisation
		Capacités	Habiletés	Contenus mobilisés	
Activités algébriques	**1-Pratiquer une démarche mathématique.** **2-Communiquer dans un langage mathématique.** **3-Mobiliser des algorithmes et des procédures.** **4-Résoudre des problèmes.** **5-Organiser et analyser l'information.** **6-Utiliser les technologies de l'information et de la communication.** **7-Apprécier la contribution des mathématiques au développement de l'individu et de la société.**	Mobiliser des règles, des algorithmes, des procédures et des techniques algébriques en contexte de résolution de problèmes.	-Concevoir une expression littérale modélisant une situation. -Interpréter une expression littérale. -Trouver une valeur numérique d'une expression littérale pour des valeurs données des variables. -Factoriser une expression à l'aide des identités remarquables. -Transformer l'égalité de deux expressions en une égalité équivalente.	-Propriétés de + et x dans IR. -Identités remarquables.	-Situations familières ou non familières en contextes intra- ou extra-mathématiques. -Situations faisant intervenir : L'égalité de deux expressions, la mesure de grandeurs et/ou une lecture graphique.
Fonctions linéaires		Mobiliser le concept de fonction linéaire pour analyser, modéliser et résoudre une situation-problème.	-Reconnaître une situation de linéarité. -Déterminer une fonction linéaire connaissant l'image d'un réel. -Représenter graphiquement une fonction linéaire. -Lire et interpréter le graphique d'une fonction linéaire.	-Fonction linéaire. -Représentation graphique d'une fonction linéaire.	-Détermination graphique du coefficient d'une fonction linéaire. -Problèmes de pourcentage. -Construction de segments de longueur *a.b* ou *1/b* où *a* et *b* sont deux nombres non nuls donnés.
Équations et inéquations du premier degré à une inconnue		Résoudre des problèmes du premier degré.	-Résoudre des équations et des inéquations du premier degré à une inconnue.	-Équation et inéquations du 1er degré à une inconnue. -Équation $x^2=a$.	-Mise en équation d'un problème. -Mobilisation du signe d'un binôme pour résoudre un

			-Résoudre des équations et des inéquations se ramenant à des équations et des inéquations du premier degré à une inconnue.	-Signe d'un binôme du premier degré.	problème d'optimisation de coût. -Recherche d'une quatrième proportionnelle.
Fonctions affines		Mobiliser le concept de fonction affine pour analyser, modéliser et résoudre une situation-problème.	-Déterminer une fonction affine connaissant les images de deux nombres. -Reconnaître une situation modélisable par une fonction affine. -Représenter graphiquement une fonction affine. -Lire et Interpréter le graphique d'une fonction affine.	-Fonction affine. -Représentation graphique d'une fonction affine.	-Détermination de taux d'accroissement. -Conversion des températures (degré Celsius/degré Fahrenheit) -Vitesse du son. -Résolution graphique d'une équation ou d'une inéquation.
Systèmes de deux équations à deux inconnues		Résoudre des problèmes modélisables par des systèmes de deux équations du premier degré à deux inconnues.	-Résoudre graphiquement une équation du premier degré à deux inconnues. -Résoudre un système de deux équations du 1er degré à deux inconnues. -Résoudre graphiquement un système de deux équations du 1er degré à deux inconnues.	-Équation du premier degré à deux inconnues. -Systèmes de deux équations du 1er degré à deux inconnues. -Résolution par substitution ou par élimination -Résolution graphique.	-Modélisation d'un problème par une équation du premier degré à deux inconnues. -Modélisation d'un problème par un système de deux équations du 1er degré à deux inconnues. -Résolution de problèmes d'optimisation.

Annexe 2 :

Enquête

Nos motivations

Nous nous intéressons à la manière dont les enseignants du supérieur considèrent la place des développements limités dans leurs enseignements.

Cette enquête est conduite dans plusieurs établissements en Tunisie ; les résultats seront présentés dans le cadre d'un travail de recherche en didactique des mathématiques.

Nous vous sollicitons pour répondre aux questions ci-dessous. Au paravent, nous vous demandons de donner quelques éléments de votre profil.

D'avance merci pour le temps que vous consacrerez à répondre à cette enquête.

Kouki Rahim (IPEI El Manar-Université de Tunis El Manar)-Belhaj Amor Fatma (ISEFC-Université de Tunis)

Votre profil :

*Merci de barrer les réponses inutiles.

Votre fonction*	Enseignant		Enseignant-chercheur			Chercheur	
Vos étudiants*	Licence	Prépas	BTS	AGREG	Master	Doctorants	Autres
Votre domaine de recherche							
Votre institution							

Question 1

Ci-dessous une liste des notions à enseigner dans le programme de première année du cycle préparatoire aux écoles d'ingénieurs.

1. Ordonnez, selon votre avis, l'enseignement des notions suivantes :

☐ Limite.	☐ Continuité.
☐ Dérivabilité.	☐ Comparaison de fonction.
☐ Convexité.	☐ Fonctions usuelles.
☐ Accroissements finis.	☐ Développements limités.
☐ Equation différentielle.	☐ Calcul différentiel.
☐ Calcul intégral.	☐ Formule de Taylor.

2. Pour quelles raisons avez-vous ordonné ces notions ?

☐ Des raisons institutionnelles.

☐ Une organisation personnelle.

☐ Une proposition du groupe d'enseignants avec lesquels vous enseignez.

☐ Autres raisons :……

Question 2

D'après vous, quel est la place de l'enseignement des développements limités au début de l'université ?

…….....

…….....

…….....

…….....

…….....

…….....

Pour quelles raisons?

…….....

…….....

…….....

Question 3

Quel type d'approche proposez-vous, à vos étudiants, si vous introduisez le concept de développement limité ? (vous pouvez cocher une ou plusieurs réponses)

☐ Approche numérique ☐ Approche graphique

☐ Approche algébrique ☐ Approche analytique

Pour quelles raisons ?

…….....

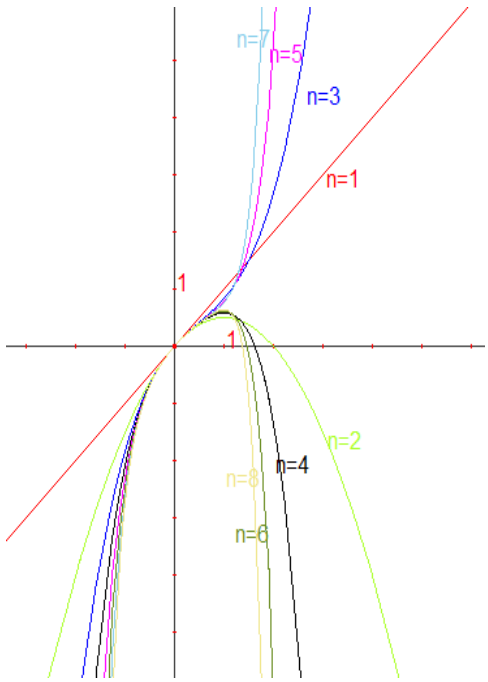
…….....

…….....

…….....

Question 4

On considère les deux activités suivantes :

Activité 1	Activité 2
On a : Au voisinage de zéro $\frac{1}{1+x}=\frac{1}{1-(-x)}$ $=1+(-x)+(-x)^2+(-x)^3+\ldots+(-x)^n+\frac{(-x)^{n+1}}{1-(-x)}$ $=1-x+x^2-\frac{x^3}{3}+\ldots+(-1)^n x^n+x^n\frac{(-1)^{n+1}x}{1+x}$ Comme $\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^{n+1}}{x^n}}{1+x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{1+x}=0$ alors $x^n\frac{(-1)^{n+1}x}{1+x}=o(x^n)$. D'où $\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-\frac{x^3}{3}+\ldots+(-1)^n x^n+o(x^n)$ $\int_0^x\frac{dt}{1+t}=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+o(x^{n+1})$. D'où $Ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+o(x^n)$.	La représentation graphique de l'approximation de la fonction $x\mapsto Ln(1+x)$ pour certains ordres n de son développement limité au voisinage de zéro. 

Si vous proposerez ce type d'activités à vos étudiants. Que choisissez-vous ?

☐ La première activité ☐ La deuxième activité ☐ Les deux activités ☐ Aucune

Dans quel contexte la ou les proposez-vous?

☐ Activité introductive ☐ Application ☐ Synthèse …….. ☐ Autre

Pour quelles raisons

…….....

…….....

…….....

…….....

…….....

…….....

…….....

…….....

Question 5

Conjecture :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1+x}=1 \text{ alors } DL_1(0) \text{ de } \cos x \text{ est } 1+x+o(x).$$

Preuve : On a $\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1+x}=1$ équivalent à $\cos x \underset{0}{\sim} 1+x$ équivalent à $\cos x = 1+x+o(x)$

Alors $1+x+o(x)$ est le $DL_1(0)$ de la fonction $\cos$ *inus* au voisinage de zéro.

Pensez vous que c'est une

Preuve	Acceptable	Incomplète	Erronée
OUI / NON			

Justifiez votre choix et commentez cette conjecture.

…….....

…….....

…….....

…….....

Question 6

Activité :

Le but de cette activité consiste à approximer le nombre transcendant **e** en effectuant des calculs à la main ou à l'aide de la calculatrice afin de montrer aux étudiants qu'ils peuvent, à partir d'un certain rang n, trouver une valeur approchée de **e** plus précise qu'une calculatrice donnée.

En effet, $e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$. Donc pour $x = 1$; $e = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + ... + \frac{1}{n!} + o(x^n)$,

les valeurs approchées à un ordre bien déterminé de **e** sont :

Pour n=0, $e^1 \approx 1$

n=1, $e^1 \approx 1 + 1$

n=2, $e^1 \approx 1 + 1 + \frac{1}{2}$

n=3, $e^1 \approx 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6}$

n=4, $e^1 \approx 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24}$

n=5, $e^1 \approx 1 + +1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120}$ etc.

Pensez-vous que ce type d'activité est :

☐ Très importante ☐ Assez importante ☐ Peu importante ☐ Sans intérêt.

pour illustrer l'apport du développement limité dans le cas de la fonction $x \mapsto e^x$.