

Alain Laraby

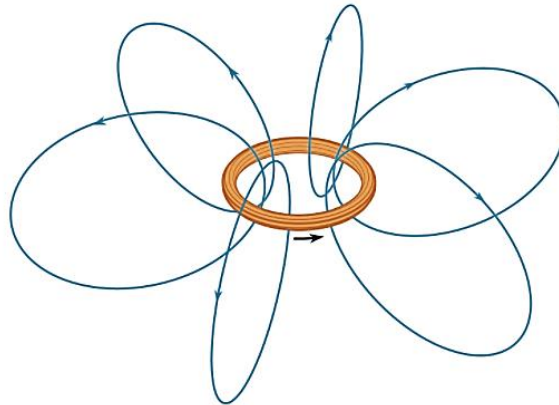
Le constitutionnalisme des Lumières

–

De l'objet des lois au sujet de droit

ou

De l'objet géométrique à la liberté politique



(Volet II)

Tout un apprentissage est nécessaire pour arriver à saisir les nuances et les extensions cachées que contient une définition, à en comprendre les significations physiques ; ou, au contraire, pour faire le tour des propriétés d'une situation concrète, en dégager les propriétés générales, répétitives, invariantes qui sont les premières susceptibles d'être associées à des définitions de nature mathématique.

Un subtil balancement doit être maintenu entre la rigueur qu'il faut respecter dans l'emploi des termes et la nécessité de laisser la porte ouverte à l'introduction de facteurs nouveaux qui mènent aux extensions des définitions, des significations, des concepts, selon une démarche graduée et maîtrisée. Il est naturel que, dans un premier temps, aisée dans son assaut par l'audace verbale et intellectuelle, l'imagination l'emporte sur le dogmatisme. Celui-ci est abattu par la bourrasque révolutionnaire de la nouveauté. Mais, tel Phénix, il renaît dans la mesure où la confusion qui accompagne la hâte rédemptrice n'apporte rien de neuf.

(Claude Bruter, *Les architectes du feu*)

*Non, sans doute, je ne meurs point, ni moi, ni quoi que ce soit.
Naître, vivre et passer, c'est changer de formes.*

(Diderot)

Le présent Volet II comprend :

- les parties techniques des volumes 1 et 2 du Volet I (3-655)
 - Un bonus : justice transitionnelle et cobordisme mathématique (656-669)
 - Une table des matières (670-672)
- Une vue d'ensemble en français et en anglais, chacune en une page, des Volets I et II (677-675)
 - Un compendium regroupant tous les résumés des § du Volet I (676-804)
 - Une bibliographie relative aux Volets I et II (805-815)
 - Un ex-libris de la pensée des Lumières, embrassant, en un rien de temps et d'espace, l'idée des 3 volumes (816)

PREMIERE PARTIE

L'ESPRIT DE LA SCIENCE DANS LE DROIT DES CONSTITUTIONS

CHAPITRE I : UN FAISCEAU D'APPROCHES ISSUES DE LA RENAISSANCE

SECTION I

L'ACCENT MIS SUR LES DIFFERENCES PLUTOT QUE SUR LA RESSEMBLANCE

A/ La différence comme distinction

- § 1.- L'attention aux faits négatifs
- § 2.- La connaissance claire et distincte
- § 3.- L'idée d'un État souverain et recomposé
- § 4.- La séparation des Eglises et de l'État
- § 5.- Une classification plus fine des constitutions

B/ La différence comme opposition

- § 6.- L'exacerbation de la différence
- § 7.- Le combat contre l'erreur
 - § 8.- *La critique du critère de la vérité*
 - § 9.- La synthèse des contraires
- § 10.- Les deux erreurs d'interprétation de Hegel et leur postérité

Première leçon des Lumières :

- § 11.- *Une physique constitutionnelle de la liberté politique et de la tolérance*

Section 1

L'ACCENT MIS SUR LES DIFFERENCES PLUTOT QUE SUR LA RESSEMBLANCE

--

SECTION 2

L'ACCENT PORTE SUR L'ORIGINE PLUTOT QUE SUR LA FINALITE

A/ L'origine d'où surgit la différence

§ 14. L'art antique de raisonner. 4. - § 15. Les prémices de la modernité, 16. - § 16. Le renouvellement de l'*analyse*, ou l'art de penser des Lumières, 16.- § 17. Son usage en philosophie naturelle et politique, 28.- § 18. Son approfondissement par le calcul différentiel, 34. - § 19. La génération de Léviathan et sa perpétuation, 48

§ 14.- L'ART ANTIQUE DE RAISONNER

1/ L'ars mathematica

i L'analyse des Anciens, 4

ii Comment mesurer une surface ? 6

iii Archimède, 9

iv Eudoxe, 11

v Diophante, 13

2/ La pensée de Platon et d'Aristote

a) Un finalisme d'un autre âge

i Une nature subjuguée

ii des Anciens pas si anciens sur certains points, et très anciens sur d'autres

b) Un fort penchant à l'utopie

○

1/ L'ars mathematica

i L'analyse des Anciens

La méthode antique de raisonner révèle une singulière unité. Elle participe d'une *épistémè* qui se caractérise comme tel moins par son contenu que par des principes de recherche communs.

La science des Anciens est encensée à la Renaissance, mais, de Bacon au XVIII^e siècle, on ne cesse de s'en détacher pour mieux progresser. Les Lumières reconnaissent l'originalité de la pensée grecque, mais rejettent l'idée que ses écrits soient sacrés. Après l'éblouissement premier, les Modernes ne la vénèrent plus sans la critiquer. L'admiration continue mais elle n'est paralysante. Aristote et son *Organon* ne sont pas seulement en cause. La mise en question de l'autorité s'étend aux mathématiques les mieux éprouvées. D'Alembert avoue son peu de satisfaction à les manier :

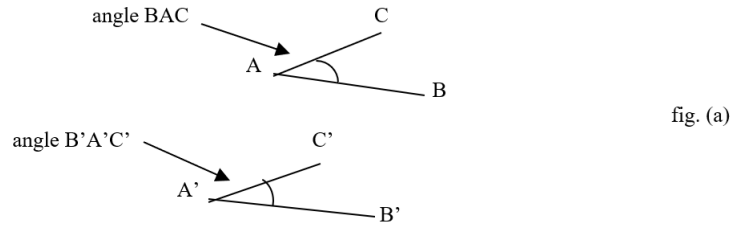
On peut regarder la méthode des Anciens comme une route tortueuse, difficile et embarrassée, dans laquelle le géomètre exerce et fatigue ses lecteurs.¹

Pour comprendre d'Alembert, revenons avec George Polya à la façon dont procédait Euclide.² Soit la Proposition 10 du Livre XI de ses *Éléments*. Rappelons l'énoncé : *deux angles, situés dans des plans différents, sont égaux si chacun des côtés de l'un est parallèle au côté correspondant de l'autre, et a la même direction*. Il s'agit d'un *problème à démontrer*. Bien que ce théorème soit préparé par les propositions du Livre XI (Prop. XI.9) et du Livre I (Prop. I.33 et I.8), tout est à créer.

Commençons par nous représenter l'hypothèse comme suit :

¹ D'Alembert, *Essai sur les élém. de philosophie, ou Sur les principes des connaissances humaines* [1759], Paris, Fayard, 1986, p.118.

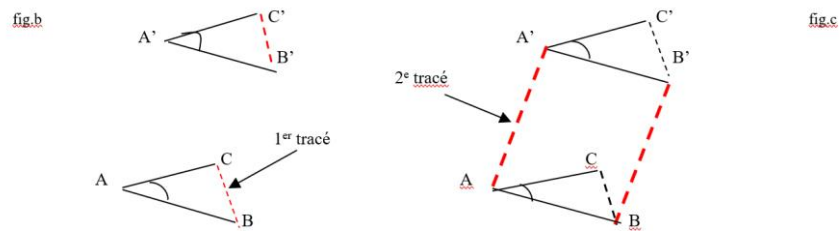
² G. Polya, *Comment poser et résoudre un problème [How to Solve It, 1945]*, Paris, édit. Jacques Gabay, 1994, pp.29-32.



La tâche est ardue, mais pour que nous n'avancions pas à l'aveugle, pensons, à chaque étape, à un théorème dont l'énoncé est similaire à ce qui est recherché.

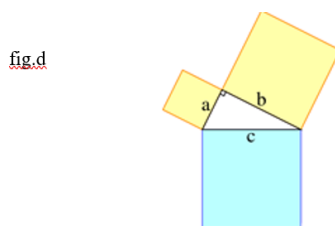
Je dois démontrer que *les angles* (BAC et B'A'C') *sont égaux*. Dans ce but, je ne me réfère pas à l'idée d'angles égaux mais à celle de triangles égaux. Je connais un théorème qui affirme : *si deux triangles sont égaux, leurs angles correspondants sont égaux*. Je trace les triangles BAC et B'A'C' en joignant en pointillé, d'une part les points B et C, et d'autre part les points B' et C'. Voir la figure (b)

Suivant le même principe, je pense au théorème selon lequel *deux triangles sont égaux si les trois côtés de l'un sont respectivement égaux aux trois de l'autre*. En m'arrêtant à l'idée de *segments égaux*, il me vient celle de faire appel à un troisième théorème qui fait état de *segments parallèles de même longueur*. A ce stade, et à l'aide de la figure (c), j'entrevois le parallélogramme ABA'B' qui me fait déboucher sur l'égalité des angles BAC et B'A'C'.



Le 3^e théorème n'exige pas que parallélogramme soit rectangle. Il peut être quelconque, mais quelle imagination doit-on déployer pour arriver au résultat ! Le cheminement ne paraît simple qu'a posteriori.

Le théorème de Pythagore est un autre exemple de problème à démontrer.¹ Si trois carrés sont construits sur les côtés d'un triangle rectangle, alors la somme des aires des deux petits carrés est égale à l'aire du troisième ($a^2 + b^2 = c^2$, les lettres a, b et c désignant les côtés des carrés). Le résultat peut être trouvé de façon inopinée, mais il convient de le démontrer quels que soient a et b.

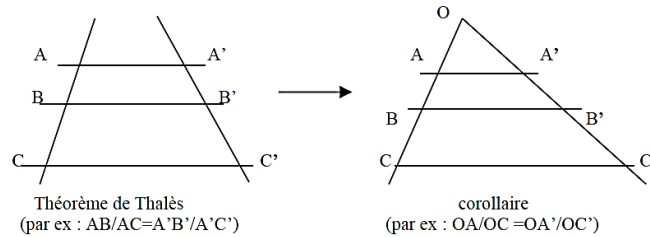


Pour les Grecs, une opération comme 3x4 se lit comme le calcul de l'aire d'un rectangle de cotés 3 et 4. L'expression 3² se dit aujourd'hui « 3 au carré » parce qu'on regardait autrefois l'opération comme géométrique. On fabrique un carré, on quarre, un segment de longueur 3, pour obtenir un carré dont l'aire est égale à 9, le « quarré » de 3.

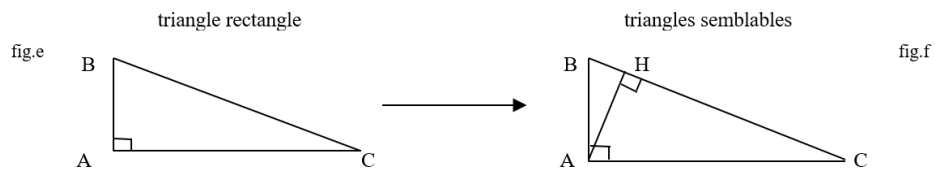
(Benoît Rittaud, *Le fabuleux destin de $\sqrt{2}$* , Paris, 2006, p.51)

Il existe de multiples manières de prouver ce théorème qui remonte au VI^e siècle avant J.-C. La preuve la plus ancienne se fonde sur le théorème de Thalès, antérieur à celui de Pythagore. Thalès démontre l'existence de rapports proportionnels lorsque deux sécantes sont coupées par des parallèles. Le théorème de Thalès emporte une conséquence importante : si deux triangles ont leurs trois angles deux à deux égaux (triangles semblables), alors leurs côtés respectifs sont proportionnels.

¹ G. Polya, *Comment poser et résoudre un problème*, p.174.



La somme recherchée ($a^2 + b^2 = c^2$) de la figure (d) fait songer au triangle rectangle ABC de la figure (e) ci-dessous. Il serait bon d'utiliser dans ce triangle le corollaire du théorème de Thalès qui met en évidence des rapports proportionnels entre les côtés de triangles semblables. Sur la figure (f), je trace du sommet A du triangle rectangle ABC la hauteur AH coupant l'hypoténuse au point H. Deux triangles semblables au triangle ABC apparaissent. Il s'agit des triangles rectangles ABH et AHC.



La démonstration que les trois triangles ABC, ABH et AHC sont semblables me permet de considérer les rapports proportionnels entre leurs côtés : $BH/AB = AB/BC$, soit $AB^2 = BC \times BH$. De la même manière, en comparant les triangles deux à deux, j'obtiens : $AC^2 = BC \times CH$. En ajoutant ces deux égalités, je parviens à établir l'égalité recherchée : $AB^2 + AC^2 = (BC \times BH) + (BC \times CH) = BC \times (BH + CH) = BC \times BC = BC^2$. Le théorème de Pythagore est démontré, quelle que soit la valeur des côtés.¹

Les théorèmes de Thalès et de Pythagore participent de la grande tradition grecque recueillie dans les *Eléments* d'Euclide. Les Grecs appliquent le raisonnement aux figures.

Les dessins ne sont plus considérés pour leur valeur esthétique ou pratique (parce qu'ils représentent le plan d'une maison), mais comme un ensemble de points dans l'espace, reliés entre eux par des lignes. Les Grecs considèrent par exemple des lignes droites qui permettent de figurer la distance entre des points et, entre ces lignes droites, ils identifient des angles. Cette étude des relations de grandeurs abstraites d'un dessin, lui-même abstrait, constitue l'apport initial de la pensée grecque dans les mathématiques.

Ces figures sont étudiées visuellement. Il y a une part d'intuition, mais, au fur et à mesure que se développe la pensée mathématique grecque, la part du raisonnement devient prépondérante. C'est nouveau. Le raisonnement est conduit en dehors de toute valeur numérique, sur des figures dont on considère au départ certaines propriétés et dont on demande d'en trouver d'autres par le seul moyen de la logique.²

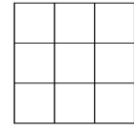
Avant les Grecs, nous trouvons des résolutions de problèmes de toutes sortes (calcul d'intérêts, partage de domaines entre héritiers, travaux d'irrigation et de fortifications, etc.), *mais nous n'avons pas de traités donnant des théorèmes. Nous n'avons que des problèmes accompagnés de la procédure à suivre pour les résoudre.* Les Grecs tracent des lignes et des cercles. Ils se servent de la règle et du compas pour résoudre des problèmes (par ex. construire un triangle équilatéral). Avec ces instruments canoniques du géomètre antique, ils ont abordé abstraitement la question de la mesure.

ii Comment mesurer une surface ?

¹ V. Benoît Rittaud, *La Géométrie classique, Objets et transformations*, Paris, Le Pommier, 2001, pp.89-90.

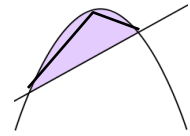
² Maurice Caveing, « Les Grecs avant Euclide », in *Le matin des mathématiciens*, Paris, Belin, 1985, p.30.

La quadriller est une idée. Il suffit de compter les petits carrés si la figure a une forme régulière. Construire un carré égal à une surface est une autre idée qui permet de se ramener à la première. Si notre géomètre entend mesurer la surface d'un parallélogramme, il s'efforce de le transformer en un rectangle de surface égale. Du rectangle au carré, la voie est toute tracée.¹



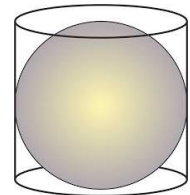
Veut-on mesurer une surface qui n'a pas une forme régulière ?

La *quadrature* d'une surface donnée devient une affaire compliquée. Il faut plus que du bon sens. Tout le monde ne trouve pas le théorème suivant lequel



les cercles sont entre eux comme les carrés de leurs diamètres
(*Eléments*, Liv. XX, Prop.12).²

Archimède, qui a lu Euclide, excella à comparer les surfaces ou les volumes. Il détermina, presque sans calcul, l'aire comprise entre une corde et une portion de parabole (l'aire de cette portion est égale à 4/3 de celle du triangle inscrit). Il montra que le volume d'une sphère est égal aux 2/3 du volume du cylindre qui le circonscrit. Archimède fut si fier de ce résultat qu'il demanda que sur sa tombe figure le dessin d'une sphère inscrite dans un cylindre.



A l'instar des *Eléments* d'Euclide, les théorèmes s'enchaînent selon un ordre logique puisque, pour démontrer certains d'entre eux, il faut être assuré de la validité des théorèmes antérieurs. Cet ordre semble aussi naturel que celui de la démonstration de chaque théorème qui commence d'ordinaire par une construction pour trouver la solution du problème (cf. le procédé de Thalès et de Pythagore).³

Tous les théorèmes s'énoncent sous une forme conditionnelle : *si ... alors*. Le *si* contient l'hypothèse, *alors* la conclusion. En fait, il s'agit plus d'une méthode d'exposition que d'invention. Devant la difficulté de la tâche, les Grecs n'hésitèrent pas à recourir à un double raisonnement par l'absurde (*méthode d'exhaustion*, qui remonterait à Eudoxe, V^e siècle avant J.-C.). Euclide utilisa cette méthode pour calculer diverses aires et volumes. On veut savoir si $A=B$. On commence par supposer $A>B$. On aboutit à une contradiction. On suppose ensuite que $A<B$. Idem. Par conséquent, A égale B .

La *méthode d'exhaustion* nécessite l'intuition du résultat. C'est une première démarche à rebours puisque le mathématicien part d'une conjecture qui ressemblerait à la solution. Il la nie (doublement) en démontrant qu'elle est incompatible avec une vérité reconnue. Echec. La conjecture est prouvée. Archimède a utilisé cette méthode pour démontrer, de façon rigoureuse, ses théorèmes. Le raisonnement par l'absurde régla de nombreux problèmes. On l'employa aussi en arithmétique pour obtenir le résultat le plus étonnant du monde grec, - le théorème de l'infinité des nombres premiers.

Ce théorème figure dans les *Eléments* (Livre IX, Prop. 20). Euclide ne parle pas à proprement parler d'*infinité*, mais de grandeurs aussi grandes qu'on voudra mais limitées. L'observation suggère qu'il y en a sans compter. Euclide supposa le contraire. Son raisonnement aboutit à une impossibilité :

Supposons l'existence d'un ultime nombre premier, P. Nous pourrions écrire la série complète des nombres premiers, 2, 3, 5, 7, 11, ..., P. [Un nombre premier est un nombre entier supérieur à 1 qui ne peut être décomposé ; il ne peut être divisé que par 1 et lui-même.] Pourquoi cette hypothèse est-elle peu vraisemblable ? Nous pouvons mettre le doigt sur l'erreur en construisant le nombre

$$Q = (2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times \dots \times P) + 1$$

Le nombre Q étant supérieur à P ne peut par hypothèse être un nombre premier. Q doit donc être divisible par un nombre premier. Or tous les nombres premiers dont nous disposons sont également, par hypothèse, les nombres 2, 3, 5, ..., P. Divisé par l'un quelconque de ces nombres, Q laisse le reste 1. Par conséquent, Q n'est divisible par aucun des nombres mentionnés qui constituent, par hypothèse, la totalité des nombres premiers. Il y a manifestement une erreur. Q doit être un nombre premier ou divisible par un nombre premier. En partant de l'hypothèse qu'il

¹ *Ibid.*, p.31.

² Euclid, *The Elements* [environ 300 avant J.-C.], New York, Dover Publications, 1956, Vol.3, p.371. *Nous ne savons pas qui était Euclide. Nous n'avons pas de renseignement sur sa vie. Certains pensent que c'est une rubrique, un nom qu'un groupe de mathématiciens aurait pris.* (M. Caveing, « Euclide », in *Le matin des mathématiciens*, p.41).

³ Une démonstration des théorèmes de Thalès et de Pythagore figure dans les *Eléments*. Respectivement au Liv. VI, Pr.2 et au Liv. I, Pr.47.

existait un dernier nombre premier, P , nous sommes tombés sur une absurdité. Il n'y a pas de tel nombre. Nous sommes conduits à admettre une infinité de nombres premiers.¹

Soit par ex. le nombre 30. Nous pouvons décomposer ce nombre en un produit de trois nombres premiers auquel on ajoute 1, soit $(2 \times 3 \times 5) + 1 = 31$. Le nouveau nombre Q est ici 31 n'est divisible ni par 2, ni par 3, ni par 5, car l'addition du 1 empêche d'avoir un multiple d'un de ces nombres (il en est de même avec 29 si on soustraie 1 à 30. Le nombre 29 n'est pas divisible par 2, par 3, par 5, par aucun de leurs multiples). Le nombre 31 est un candidat légitime pour être élu nombre premier.

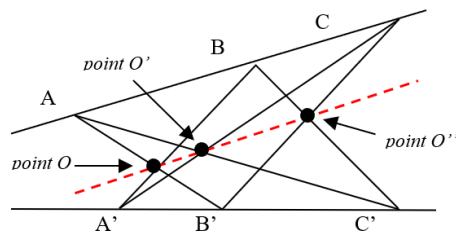
D'autres nombres plus grands que 30 de la même forme (produits successifs de nombre premiers) ont la même propriété de devenir premiers si on ajoute 1 ou retranche 1, mais cette propriété se raréfie. Cette propriété n'est vérifiée que pour les petits nombres (2×5 la même propriété que $2 \times 3 \times 5$ mais pas $2 \times 3 \times 5 \times 7$ car $(2 \times 3 \times 5 \times 7) + 1$ est un nombre premier alors que ce n'est pas le cas de $(2 \times 3 \times 5 \times 7) - 1$).

La *reductio ad absurdum* offre une preuve indirecte qui facilite la résolution des problèmes. Cet outil de recherche peut être transformé en preuve directe comme dans les problèmes à démontrer. Dans le cas des nombres premiers, le raisonnement par l'absurde nous a aidé à reformuler le problème comme suit : *Connaissant les nombres premiers 2, 3, 5, ..., P, trouver un nouveau nombre premier N différent de tous les nombres premiers donnés.* D'où cette démonstration identique à celle du début :

Le nombre $Q = (2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times \dots \times P) + 1$ est certainement divisible par un nombre premier. Prenons N n'importe quel nombre premier diviseur de Q (par ex., le plus petit). Si Q est un nombre premier, alors $N=Q$. Il est évident que Q divisé par n'importe lequel des nombres premiers 2, 3, 5, ..., P laisse le reste 1. Aucun de ces nombres ne peut être N qui est un diviseur de Q . Il apparaît que N est un nombre premier et que ce nombre est différent de tous les nombres premiers qui ont été trouvés jusqu'à présent, 2, 3, 7, 11, ..., P . [Il y a des N sans compter...]²

Si indirecte soit-il, le raisonnement par l'absurde peut ne pas suffire pour résoudre un problème. Dans la méthode traditionnelle de démontrer les problèmes, on a compris qu'il convient d'introduire un élément ou problème auxiliaire pour avancer. On a compris qu'il faut trouver une situation similaire à celle qui est recherchée. Les mathématiciens grecs ont suggéré d'aller plus loin dans cette voie lorsque le moyen pour parvenir au but patine.

La théorie des lieux géométriques de Pappus fut un domaine en géométrie où la nécessité d'une nouvelle méthode se fera sentir. Par *lieux géométriques*, il faut entendre des lignes dont tous les points possèdent la même propriété (le cercle est le lieu géométrique des points équidistants d'un point intérieur appelé centre). Pappus excella. La postérité lui doit divers théorèmes dont celui infra :



Un des théorèmes de Pappus :

les points O , O' et O'' sont alignés quels soient les points A, B, C et A', B', C'

La théorie des lieux géométriques est, dans l'antiquité, l'ancêtre de ce qui sera, aux XVII^e et XVIII^e siècles, la théorie des courbes.³

Pappus vécut au IV^e siècle ap. J.-C. Dans sa recherche des lieux géométriques, il résolut, en le généralisant, un problème qu'Euclide et Apollonius avaient résolu auparavant pour trois ou quatre droites (la solution est une conique). Le problème peut s'énoncer ainsi : Quel est le lieu géométrique des points dont les distances à six droites d'un plan sont telles que le rapport du produit des distances à trois des six droites au produit des distances aux trois autres demeure constant. Pappus généralisa le problème doublement : en considérant que les droites ne sont pas perpendiculaires entre elles, mais menées, à partir d'un point C sous des angles (ou directions) donnés ; il envisagea $2n$ droites.³

¹ G. Polya, *Comment poser et rés. un prob.*, pp.163-164. Texte allégé.

² *Ibid.*, p.167.

³ *Ibid.* V., sur internet, le site de Serge Mehl, *ChronoMath*, sur « Pappus », et celui de Patrice Debart sur « Descartes et les mathématiques ».

Dans le recueil de ses œuvres, *La Collection mathématique*, Pappus entrevoit une piste de recherche. Pour que le problème soit moins ardu, il est commode d'*admettre ce qu'on vous demande* de démontrer. Il faut considérer que *c'est déjà fait*.¹ La méthode doit être plus qu'indirecte, - inverse !

Faute d'aller dans la bonne direction, il convient d'en supposer une. On n'entrevoit plus seulement un théorème familier pouvant servir de relais. On imagine la solution même. Faute d'idée pour démontrer ou construire un résultat, on le subodore. On part du *alors* pour remonter au *si*. On va du *alors* au *si*.

Dans un problème de lieu, il suffit de tracer une figure dans laquelle la condition est satisfaite. Dans la figure supra, on peut essayer de visualiser la droite recherchée en supputant les diverses distances. Par la magie du dessin (la droite en pointillé), l'hypothèse devient conclusion. En inversant la manière de faire les mathématiques, nous retrouvons notre sens premier, davantage collé à la réalité. La façon de régler les problèmes renoue en partie avec une tradition beaucoup plus ancienne que la grecque :

*Un homme « primitif » veut traverser un ruisseau, mais il ne peut le faire en raison d'une crue survenue la nuit précédente. Franchir le ruisseau devient un problème. [...] L'homme se rappelle avoir traversé un ruisseau en marchant sur un arbre abattu. Il cherche autour de lui s'il en existe un ou s'il peut en faire tomber un à travers le ruisseau ?*²

La progression de l'homme primitif rappelle elle-même celle du singe faisant un trou en utilisant un os. Dans le sillage du raisonnement animal, l'homme est conduit à inventer le pont. A la lumière de son expérience, il conçoit un moyen (le pont) en supposant la solution satisfaite (la traversée de la rivière).

On pourrait croire que le raisonnement par l'absurde procède de même. Sa démarche ne s'effectue-t-elle pas aussi à rebours ? En affirmant l'existence d'un ultime nombre premier, le raisonnement commence par nier l'hypothèse à démontrer (l'infinité des nombres premiers). Il opère à l'envers pour déboucher sur une proposition incompatible. Ce faisant, il parvient à démontrer l'hypothèse contraire.

Avec Pappus, le détour ressort moins de la logique pure que de la pratique. Le raisonnement par l'absurde s'appuie sur *la négation d'une conjecture pour en déduire la négation d'une vérité établie*. Le raisonnement alternatif ne conduit pas à une condition impossible. L'admission d'une conjecture (le lieu supposé) ne mène pas au faux mais à une condition au moins nécessaire de la solution. Après l'avoir isolée, il faut vérifier que la condition soit nécessaire et suffisante. On détient alors la solution.³

iii Archimède

Esprit pratique, Archimède entreprit ce tri sans le théoriser. Il précéda Pappus d'un siècle. Ingénieur autant que géomètre, il n'hésita pas utiliser sa théorie du levier pour résoudre, d'une manière alternative, la quadrature de la parabole. Il fit preuve de la même ingéniosité pour répondre à la question qui taraudait le roi de Syracuse : Comment peut-on savoir si un diadème est en or pur sans le détruire ? En prenant un bain, Archimède observa que l'eau montait dans sa baignoire à mesure qu'il y entra. Il eut une illumination. - *Eurêka ! (J'ai trouvé !)* cria-t-il. Il plongea le diadème dans l'eau. Soit v_1 le volume d'eau déplacé. Il compara ce volume à celui déplacé par un diadème d'or pur (v_2). Il releva que $v_2 > v_1$. Le diadème contenait du métal autre que de l'or. Un orfèvre soupçonné fut exécuté.

La découverte inopinée d'Archimède joua le rôle de l'arbre abattu ou de l'os servant à creuser un trou. La *poussée d'Archimède* (tout corps plongé dans un liquide subit de celui-ci une poussée exercée du bas vers le haut et égale, en intensité, au poids du liquide déplacé) constitua l'expérience première à partir de laquelle Archimède put vérifier la teneur du diadème. (Une densité plus faible emporte un volume plus important pour la même masse. Veut-on comparer l'or et l'argent ? On sait que le premier est deux fois plus dense. Remplacer l'or par l'argent conduit à une certaine augmentation de volume.)

Pappus appela *analyse* la démarche générale consistant à inverser l'ordre de recherche. L'esprit part de la conclusion, inconnue, qu'il assimile à du connu, avant de valider l'hypothèse (traiter la question). Le mot *analyse* est explicite : art de remonter aux éléments. Le préfixe *ana-* indique un mouvement de bas en haut (*ἀνά*). Il s'agit moins d'un mouvement rappelant celui de la poussée d'Archimède qu'un

¹ Pappus, cité in G. Polya, *Comment poser et rés. un prob.*, p.88.

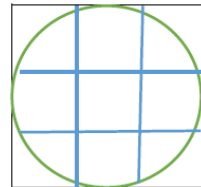
² G. Polya, p.134. Texte allégué

³ Jean-Louis Gardiès, *Qu'est-ce l'analyse ?* Paris, Vrin, 2001, pp.18-19. Le mot *synthèse* a également employé par Pappus. G. Polya, p.206.

mouvement en sens contraire, en arrière. Une sorte d'*Anabase* décrivant la retraite des mercenaires grecs dans l'empire perse (Xénophon en fut témoin).¹ Le radical *-lyse* vient de *lisis* = dissolution. L'analyse est une décomposition d'un tout en ses divers éléments (*λύω= je relâche, je romps le lien*).

L'analyse part du problème supposé résolu pour remonter aux données. Les mathématiciens grecs usent parfois de ce raisonnement, mais ils ne présentent pas leur raisonnement de cette façon. Après coup, ils préfèrent retrouver le chemin de la *synthèse* qui part du connu pour aller vers l'inconnu. Cet ordre d'exposition leur paraît plus naturel. Il exprimerait mieux leur conception du savoir mathématique procédant de déduction en déduction à partir de principes. A leurs yeux, la synthèse prime sur l'analyse, comme le confirme l'œuvre d'Euclide dans laquelle s'impose le raisonnement synthétique.²

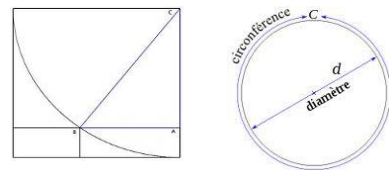
Plus que d'autres, Archimède éprouva le besoin de recourir au raisonnement analytique. Ce n'est pas un hasard s'il fut le premier à avoir donné la quadrature d'un espace curviligne en trouvant celle de la parabole. Personne, avant lui, n'avait réussi à mesurer convenablement l'aire du cercle. Comment *quarrer* une telle figure ? Comment construire un carré de même aire ? Peut-on s'en tenir à un quadrillage du cercle ?



Archimède attaqua le problème sur la base du théorème d'Euclide, rappelé supra : *les cercles sont entre eux comme les carrés de leurs diamètres*. Les surfaces des cercles ne sont pas égales aux carrés de leurs diamètres, mais sont *comme* les carrés de leurs diamètres. Euclide considère la proportion $S_1/S_2=d_1^2/d_2^2$. C'est une façon de dire que $S_1/d_1^2 = \text{constante}$. Euclide démontre ce théorème par la méthode d'exhaustion (par une double inégalité). Archimède complète le résultat en montrant que le rapport est le même que celui qui existe entre le périmètre d'un cercle et son diamètre. Si l'aire du cercle est proportionnelle au carré du diamètre, il s'ensuit que le périmètre est proportionnel au diamètre. Ce rapport, appelé aujourd'hui π , est indépendant du cercle considéré.³

Selon Euclide, il existe un rapport constant entre l'aire du cercle et l'aire du carré dont le côté est le rayon du cercle

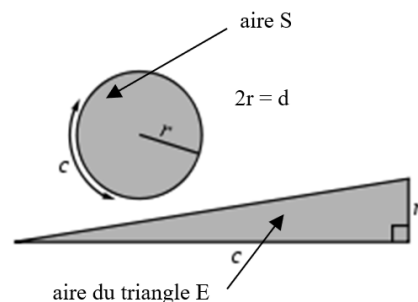
Archimède établit que ce rapport est celui qui existe entre le périmètre c d'un cercle et son diamètre d



Selon Archimède, l'aire d'un triangle rectangle est égale à celle d'un cercle si l'un des côtés de l'angle droit a pour longueur le rayon r du cercle et l'autre côté le périmètre du cercle c

L'aire du cercle, S , est-elle strictement supérieure à l'aire du triangle rectangle E ? Non, cette hypothèse aboutit à une contradiction. S est-elle strictement inférieure à E ? Non plus.

Nous aboutissons aussi à une contradiction. Par conséquent, $S=E$. Or, $S=1/2cr$ (moitié de la surface du rectangle composé de deux triangles rectangles). Nous pouvons conclure $S/r^2=c/2r=c/d$



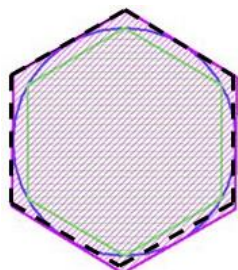
Fort de ce résultat, Archimède ne compara plus des surfaces entre elles mais des longueurs. Il traça dans l'aire à chercher un polygone régulier de 6 côtés (hexagone), de 12 côtés (dodécagone), de 24 côtés, de 48 côtés, de 96 côtés. Le rapport entre le périmètre du polygone et le diamètre du cercle tend à se rapprocher du rapport entre la circonférence du cercle et son diamètre (c/d) quand le nombre de côtés devient grand. Le procédé fournit une approximation de π qui entre dans $S = \pi r^2$.

¹ Xénophon, *L'Anabase*, Paris, édit. Mille et une nuits, 2012. La retraite des « Dix-Mille » mercenaires grecs eut lieu en 401-399 av. J.C.

² J.-L. Gardiès, *Qu'est-ce l'analyse ?* p.14.

³ J. Dhombres, « Archimède », in *Le matin des mathématiciens*, pp.60-61.

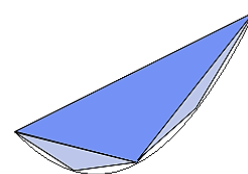
L'idée de considérer des polygones inscrits et circonscrits et d'en multiplier le nombre par dichotomie est le fruit d'un résultat théorique auquel parvint Archimède au préalable. Archimède obtint une estimation de π par excès (via les polygones circonscrits) et par défaut (via les polygones inscrits). *C'est bien le résultat théorique qui permet de comparer des longueurs pour calculer le rapport π .*¹ Sa perception géométrique antérieure l'a aidé à résoudre un problème difficile. - Un autre *Eurêka !* surgit.



Le périmètre du cercle est compris entre le périmètre de l'hexagone inscrit et celui de l'hexagone circonscrit

*Archimède se sert de l'approximation 22/7 [ou 3+1/7] dans ses calculs. En traçant et en inscrivant autour d'un cercle un polygone régulier de 96 côtés, il prouva que π est moins que 3+1/7 et plus grand que 3+10/71 [ou 223/71, en approchant le cercle par un polygone régulier inscrit comportant le même nombre de côtés].*²

Un puriste pourrait faire remarquer qu'Archimède a quitté le domaine des mathématiques rigoureuses. Où se trouve l'homme qui a su déterminer *de façon exacte* l'aire comprise entre une corde et une portion de parabole ? Archimède avait utilisé pareillement la méthode d'exhaustion. La méthode avait été exhaustive (en épuisant l'aire par une série de triangles de plus en plus petits) et précise. La mesure du cercle ne débouche, en revanche, que sur un *encadrement* : π est situé entre deux valeurs, une par excès, 3+1/7, et l'autre par défaut, 3+10/71.



N'est-il pas légitime de se plaindre ?

La *quadrature* de la parabole par la règle et le compas conduit à une solution exacte. De ce point de vue, la quadrature du cercle se révèle un échec puisque la solution est approchée, mais Archimède ne frise pas moins l'exploit en comparant un rapport de deux aires à deux nombres entiers (22/7).

*Archimède prépare le chemin d'une numérisation des grandeurs géométriques, c'est-à-dire d'une rencontre entre l'arithmétique et la géométrie, entre le monde du discontinu et celui du continu.*³

Archimède a conscience de n'avoir que des valeurs approchées de π contrairement à ses prédécesseurs qui pensaient en calculer précisément la valeur, mais il prépare, on le verra, les Lumières en développant une méthode permettant de réduire de plus en plus l'écart entre la valeur exacte et le défaut ou l'excès :

*A force de calculs, il finit par conclure que la valeur qu'il cherche est comprise entre deux nombres qui, écrits dans notre système décimal actuel, valent environ 3,1408 et 3,1428. En bref, Archimède connaît désormais le nombre π à 0,03 % près.*⁴

Archimède prépare aussi la rencontre entre la géométrie et l'algèbre. Le monde grec ignore l'algèbre moderne, mais il conçoit une algèbre des grandeurs en mettant en rapport des lignes, des aires, des solides, des durées, etc. Contemporain d'Archimède, Apollonius par exemple mit au point une *algèbre géométrique* en comparant diverses sections coniques (parabole, ellipse, hyperbole). A l'aide de lettres, il noua des opérations d'ajout et de retranchement de certaines quantités sur ces courbes.⁵

iv Eudoxe

¹ *Ibid.*, p.64.

² B. Russell, *Hist. de la philo. occid.*, Liv. I, chap. 24 : Les origines des mathématiques grecques, p.229.

³ J. Dhombres, « Archimède », op. cit., p.61.

⁴ Michaël Launay, *Le grand romain des maths. De la préhistoire à nos jours*, Flammarion, Paris, 2016, p.99.

⁵ J. Dhombres, « Apollonius », in *Le matin des mathématiciens*, op. cit., p.66 et 75.

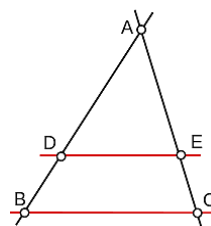
La théorie des proportions, développée dans Euclide, préfigura cette algèbre qui ne dit pas son nom. La théorie fut inventée par Eudoxe (V^e siècle avant J.C.).

Avant lui, la seule théorie arithmétique qui existât fut celle des proportions d'après laquelle le rapport de a à b est égal au rapport de c à d si a fois d est égal à b fois c [$a/b=c/d \Leftrightarrow ad=bc$]. Cette définition n'est applicable qu'aux nombres rationnels [nombres qui peuvent s'exprimer comme le quotient de deux entiers, par ex. 2/3, mais aussi, supra, 22/7...] Eudoxe en donna une nouvelle définition qui n'est pas soumise à cette restriction.¹

Avant Eudoxe, il apparaissait naturel de tirer plusieurs propriétés des proportions de la seule considération des figures semblables.

Psychologiquement, la conception de la similitude [ex : deux triangles semblables] est plus primordiale à l'homme que la notion de proportion. En considérant par exemple un triangle avec une transversale parallèle à un de ses côtés [comme dans le théorème de Thalès], on est conduit immédiatement à admettre les transformations suivantes d'une proportion [en posant $AD = a$, $AB = b$, $AE = c$, $AC = d$ sur la fig. ci-contre] :

$$\text{de } a/b = c/d \text{ en } a/c = b/d \text{ ou } (a \pm b)/b = (c \pm d)/d \text{ ou } a/b = (a \pm c)/(b \pm d)$$



H.G. Zeuthen, *Sur l'origine de l'algèbre*, Mathematisk-fysiske Meddeleser, 1919, II, 4, p.23. Euclide V, 16-19)

L'analogie, définie sous la forme $a/b = c/d$ ($= e/f$, etc.), est fondée pareillement sur une comparaison des figures semblables, mais sa portée dépasse la simple mise en rapport de nombres rationnels. Elle sera plus en lien avec la théorie d'Eudoxe qui s'appliquera indifféremment aux quantités rationnelles et irrationnelles. Les irrationnels furent découverts lors des difficultés rencontrées pour résoudre des problèmes concrets comme celui consistant à construire un cube 2 fois plus grand qu'un cube donné.

Le problème de la duplication du cube fut posé, dit-on, par les prêtres d'un temple auxquels l'oracle avait déclaré que le dieu désirait une statue deux fois plus grande que celle qu'ils avaient. Ils pensèrent qu'il suffirait de doubler toutes les dimensions de la statue mais vite comprirent que le résultat donnerait huit fois la grandeur primitive. Cette approche entraînait plus de dépenses que le dieu n'exigeait... La solution consista à déterminer la racine cubique de 2. Ce fut la première expression irrationnelle que l'on découvrit.²

La duplication du cube s'avère impossible à la règle et au compas. Rien n'y fait tant qu'on ne multiplie pas l'arête du cube par $\sqrt[3]{2}$. Un nombre irrationnel n'est pas exprimable, par définition, par une fraction, mais il peut être approché comme $\sqrt{2}$ (avant qu'Archimède n'approche π) :

Soient deux colonnes de nombres que nous appellerons les a et les b, chacune partant de 1. Le a suivant, à chaque degré, est formé en ajoutant les derniers a et b déjà obtenus. Le b suivant est formé en ajoutant deux fois le précédent a au précédent b. Les premiers six groupes obtenus sont :
(1, 1), (2, 3), (5, 7), (12, 17), (29, 41), (70, 99).

Dans chaque groupe, $2a^2 - b^2$ est 1 ou -1. Donc b/a est à peu près la racine carrée de 2 et à chaque nouvelle avancée, il s'en approche davantage. Par ex., le carré de 99/70 est à peu près égal à 2.³

Un nombre est rationnel est un nombre qui eut s'écrire sous la forme de fraction a/b , où a et b sont deux entiers relatifs (non nuls). Son développement décimal (ou dans n'importe quelle base) est périodique à partir d'un certain chiffre ($2/3 = 0,666$; $22/7 = 3,14285 14285...$). Un nombre irrationnel ne peut s'écrire sous la forme d'une telle fraction. Il a pour conséquence ou propriété que les décimales de son développement sont imprévisibles ($\sqrt{2} = 1,414213...$; $\pi = 3,141 592...$). La partie décimale 414213... ou 141 592... apparaît non périodique. Les chiffres se suivent en quantité illimitée et non répétitive. Si étranges qu'ils soient, les nombres irrationnels expriment des longueurs : $\sqrt{2}$, la longueur de la diagonale d'un carré de côté 1 ; π , le rapport de la circonférence d'un cercle par son diamètre ; le nombre d'or $\Phi = (1 + \sqrt{5})/2$, le rapport d'une des diagonales d'un pentagone régulier à un de ses côtés).

¹ B. Russell, *Hist. de la philo. occid.*, op.cit., pp.228-229). Texte allégué. Euclide rapporte la théorie d'Eudoxe dans le Livre V des *Eléments*.

² *Ibid.* On peut douter que la racine cubique de 2 fût la première expression irrationnelle découverte. Les historiens des mathématiques subodorent plutôt que le 1^{er} rapport incommensurable observé fut la diagonale du carré, soit $\sqrt{2}$ dans un carré de côté 1, voire le rapport entre le côté du pentagone ordinaire et le côté du pentagone étoilé. Cf. M. Caveing, « Les Grecs avant Euclide », op. cit., p.35.

³ *Ibid.*, pp.227-228.

Jusqu'à la découverte des irrationnels, les Grecs considèrent qu'il est toujours possible d'associer un couple de nombres entiers à un couple de longueurs (par ex. la longueur et la largeur d'un rectangle). Les longueurs sont non seulement comparables mais possèdent une mesure commune sachant qu'en soustrayant la petite longueur de la grande on obtient un reste, et en continuant le procédé, le reste disparaît. Avec les irrationnels (par ex., le rapport diagonale/côté d'un pentagone régulier), la soustraction ne s'arrête jamais. On continue l'opération indéfiniment. Il y a des rapports entre des longueurs qui n'ont pas d'expression numérique.¹ - Et que dire de notre fameuse analogie !

Placé devant l'irréductibilité du rapport entre grandeurs au rapport entre nombres, Eudoxe va construire une théorie des rapports entre grandeurs qui débordent les rapports entre les nombres. Il envisage un ensemble de grandeurs totalement ordonné par des relations d'égalité et d'inégalité,

mais cet ensemble des grandeurs, quelque ressemblance eût-il avec notre ensemble des réels, n'est pas un « corps ». Si l'addition y est toujours définie [par ex., addition de segments], la soustraction ne l'est pas, puisqu'il n'y a pas de grandeur négative (ni d'ailleurs de grandeur nulle). La multiplication (ou division) ne concerne que la multiplication (ou division) d'une grandeur par un nombre entier [par ex., le produit d'un segment par un entier est un segment].²

[Un « corps » est une structure algébrique dans laquelle sont possibles les additions, soustractions, multiplications et calculs d'inverses multiplicatifs.]

Eudoxe imagine non pas tant une algèbre des grandeurs qu'une algèbre de leurs relations. La multiplication des grandeurs, qui n'admettait d'autres multiplicateurs que les entiers, devient une multiplication des rapports (par ex. $a/b=c/d$ & $e/b=f/d \Rightarrow (a+e)/b = (c+f)/d$). Id. pour la division ($a/d=a/b \times b/c \times c/d$). Le produit d'une ligne par une autre ligne génère une surface, mais le résultat demeure hétérogène aux grandeurs multipliées (une surface n'est pas une ligne ; un carré n'est pas son côté).³

Dans l'ensemble des rapports entre grandeurs, la multiplication et la division sont en revanche internes.

*Elles fournissent des schèmes de raisonnement équivalent à une algèbre des réels positifs $\{0; 1; 2; 3; \dots\}$ sans laquelle une œuvre comme Archimède eût été impossible. La multiplication des rapports est une opération interne dans l'ensemble des rapports dont la commutativité $[a * b = b * a]$ est soulignée. Cet ensemble a toutes les propriétés d'un groupe abélien [commutatif].⁴*

v Diophante

Si novatrice que soit l'approche d'Eudoxe, ce serait une erreur de ramener trop la forme géométrique de son algèbre à l'algèbre moderne. Il faut attendre Diophante, vivant également à l'époque d'Archimède, pour que l'algèbre fasse un premier pas autonome. L'algèbre commence à devenir la science de *la chose*, de l'inconnue. Diophante la définit comme multiplicité indéterminée. *La présence de puissances de l'inconnue supérieures à trois confirme l'indépendance par rapport à des motivations purement géométriques.* Diophante utilise des abréviations, *mais ces abréviations ne sont jamais elles-mêmes l'objet de manipulations algébriques.* L'algèbre demeure syncopée (restreinte).⁵

L'algèbre demeure réduite car elle conserve trop une forme arithmétique. Bien que Diophante remplace les nombres par des lettres et résolve des équations indéterminées (admettant un grand nombre de solutions), ses *Arithmétiques* s'en tiennent aux solutions rationnelles. L'algèbre ne se détachera et de la géométrie et de l'arithmétique qu'avec la science arabe, héritière du savoir grec. La Renaissance bénéficie à son tour de l'acquis arabe.⁶ Finies les tentatives de se frotter aux problèmes en les traduisant dans les termes d'une équation. Désormais, on fait le contraire. On commence par l'équation. Le problème vient après. L'algèbre moderne confirme ce qui était implicite dans l'ancienne :

¹ M. Caveing, « Les Grecs avant Euclide », pp.35-36.

² Jean Louis Gardiès, « Eudoxe et Dedekind », in *Revue d'histoire des sciences*, 1984, t. 37, n° 2, p. 116. Texte allégé.

³ Jean Louis Gardiès, *L'héritage épistémologique d'Eudoxe de Cnide. Un essai de reconstitution*, Paris, Vrin, 1988, p.52 et 59.

⁴ J. L. Gardiès, « Eudoxe et Dedekind », p.120. Nous éclaircirons par la suite les notions de *groupe* et de *commutativité*.

⁵ A. Dahan-Dalmedico/J.Peiffer, *Une histoire des mathématiques. Routes et dédales*, Paris, Seuil, 1986, p.78.

⁶ Roshi Rashed, « La naissance de l'algèbre », in *Le matin des mathématiciens*, op. cit., p.146.

L'algèbre est une application de la méthode analytique à la résolution de problèmes numériques.

Le procédé consiste essentiellement à se représenter le nombre inconnu comme un nombre connu et à mettre le problème, considéré comme déjà résolu, sous la forme d'une équation, puis à faire subir à cette équation des transformations successives qui conduisent à une forme dernière où le nombre inconnu figure dans un membre et une quantité connue dans l'autre.

Si le problème comprend plus d'une inconnue, on le réduit à une seule inconnue, en éliminant les autres par des procédés appropriés.¹

Soit un exemple très simple. On demande de trouver deux nombres dont la somme soit 78 et le produit 1296. L'algèbre permet de formuler le problème sous la forme de symboles mis en équation :

dans les mots de tous les jours	en langage algébrique
<p>Trouver deux nombres dont la somme soit 78 et dont le produit soit 1296</p>	<p>x, y $x+y = 78$ $xy = 1296$</p>

Dans cet exemple, on fait de l'analyse en partant du résultat souhaité. L'ordre des pensées est inversé comme dans le cas de la traversée du ruisseau, mais le raisonnement régressif est ici facilité par la mise en forme algébrique de l'énoncé (dans la colonne de droite, on voit immédiatement que l'on peut reporter la valeur d'une variable en fonction de l'autre, $x = 78-y$, et reporter cette valeur dans l'une des équations, $(78-y)y = 1296$ pour déterminer y puis x).

[Au vu des données du problème, on pourrait imaginer a priori que $x=36$ et $y=36$ soient les solutions, car $1296 = xy = 36^2$, mais $x+y = 78$ et non $36 + 36 = 72$... Les variables x et y ont de fortes chances d'être des nombres irrationnels. D'où l'utilité de la méthode algébrique, faute d'une solution arithmétique].

On aurait tort de croire que l'algèbre n'a plus besoin de recourir à un problème auxiliaire comme dans les démonstrations classiques des problèmes à démontrer. Non, un tel problème est utile, mais il ne vient, lui aussi, qu'après. On demande par exemple de trouver x dans l'équation $x^4-13x^2+36=0$. En remarquant que $x^4=(x^2)^2$, nous voyons l'avantage qu'il y a à introduire $y = x^2$. Nous obtenons alors un nouveau problème. Trouver y dans l'équation $y^2-13y+36=0$. Ce nouveau problème peut servir à résoudre le problème primitif. L'inconnue de notre problème auxiliaire y s'appelle inconnue auxiliaire.²

Grâce à l'algèbre moderne, l'analyse pourra être approfondie et préparer l'après-Renaissance. – Laisseriez-vous dire que le progrès de la pensée va à l'encontre de l'ordre posé comme naturel par les Grecs ? – Oui, il n'est pas téméraire de l'admettre. La Renaissance réveille la pensée grecque mais inverse l'ordre réel bien que l'esprit a du mal à lui être infidèle :

Il y a dans la méthode analytique quelque chose d'assez profond. L'obligation de sinuer, de s'éloigner du but, en revenant en arrière, de ne pas prendre la route qui mène directement au résultat désiré entraîne certaines difficultés dans le domaine de l'esprit. Pour découvrir la succession d'opérations appropriées, notre intellect doit suivre un ordre qui est exactement à l'inverse de l'ordre réel. Il y a à l'égard de cet ordre inverse une sorte de répugnance psychologique qui empêche de comprendre la méthode analytique si celle-ci n'est pas présentée soigneusement.³

Quel paradoxe ! L'esprit répugne à mettre en œuvre un raisonnement vieux comme Mathusalem. L'homme primitif, le chimpanzé, voire d'autres animaux, ont certes l'œil centré sur le résultat avant d'avoir l'idée de faire demi-tour, mais

il serait naïf de considérer le surgissement de l'analyse comme un phénomène assez tardif dans une mathématique déjà constituée. L'analyse est plus naturelle à l'homme que la synthèse. Les théorèmes sont apparus après les problèmes et les difficultés calculatoires que l'homme devait affronter. Des mathématiques comme la babylonienne ou la chinoise offrent déjà des éléments

¹ François Thureau-Dangin, « L'origine de l'algèbre », in *Comptes-rendus des séances de l'Académie des Inscriptions et Belles-Lettres*, 84^e année, n° 4, 1940, p.293.

² G. Polya, p.123 et 168.

³ *Ibid.*, p.190. Texte allégué.

d'analyse. La solution d'un problème constitue un appel naturel à l'analyse alors qu'il n'y a pas d'invitation naturelle à la synthèse avant l'étrange projet grec de s'engager dans cette entreprise.¹

Les mathématiques offrent des situations plus complexes que celle d'abattre un arbre pour traverser une rivière en cru, mais, même dans ce domaine, l'analyse aide à sortir de la pensée trop logique et pas assez analogique. L'analyse est explicite chez Archimède. Grâce au recul qu'elle implique, elle lui a permis de trouver des solutions inédites.

La supposition du problème résolu permet d'embrasser l'ensemble de la situation et de remonter de la construction elle-même à des conditions fondamentales. Sans être éclairé par cette analyse préalable, il eût été très difficile d'ajuster, pièce par pièce, sur ces seules conditions fondamentales, tout ce que nécessite cette construction.²

L'analyse éclaire l'esprit *with the benefit of insight*. Les tâtonnements ne sont pas vains, les essais successifs sont allégés. Le service rendu est tel que les Lumières vont s'employer à la justifier mieux que ne le fit la Grèce. D'Alembert fait ressortir sa participation au progrès de celui qui la pratique :

L'analyste, placé à un point de vue plus élevé, voit sa route d'un coup d'œil. Il ne tient qu'à lui d'en parcourir tous les sentiers, d'y conduire les autres, et de les y arrêter aussi longtemps qu'il veut.³

Le coup d'œil mobilise la mémoire pour se représenter une situation d'après quelque chose de connu. On comprend que le droit ne soit pas insensible à une méthode qui s'avère utile *pour résoudre aussi bien des problèmes mathématiques que non mathématiques.*⁴

L'ars mathematica d'autrefois n'est plus, mais il a ouvert la voie à la modernité. Archimède *ne parle ni de voisinage ni de limite. Il évite soigneusement tout raisonnement qui ferait intervenir un nombre non fini d'étapes.*⁵ Il étend cependant sa façon de raisonner en termes d'encadrement lorsqu'il s'efforce de mesurer une aire rétive aux nombres rationnels. Si on ne rencontre pas chez lui de développement en série infinie, on voit comment sa technique d'approximations l'amène à esquisser une algèbre des inégalités qui déborde celle mise en œuvre par la méthode d'exhaustion produisant une valeur exacte.

La science grecque est apparue dans un climat de vigoureux débat et de discussion rationnelle. La prolifération des cités a aidé à son développement, et inversement. Il vaut de savoir si la philosophie grecque reproduit les mêmes modes de raisonnement.

2/ La pensée de Platon et d'Aristote

a) Un finalisme d'un autre âge

i Une nature subjuguée

ii des Anciens pas si anciens sur certains points, et très anciens sur d'autres

b) Un fort penchant à l'utopie

¹ J.-L. Gardiès, *Qu'est-ce l'analyse ?* p. 56. Même remarque.

² *Ibid.*, p.71.

³ D'Alembert, *Essai sur les élém. de philo.*, op. cit., p.118.

⁴ Polya, *Comment poser et rés. un prob.*, p.191.

⁵ J. Dhombres, « Archimède », op. cit., p.61.

§ 15.- LES PREMICES DE LA MODERNITE

1/ Les sophistes par-delà Socrate

- i L'inversion platonisante*
- ii Partir du cas ou de la règle*
- iii Les trouble-fêtes*

2/ Platon et Aristote quand même

- i Les nouvelles charges de Russell et de Popper*
- ii L'impossible mesure de la justice*
- ii La haine de la tyrannie*

**§ 16.- LE RENOUVELLEMENT DE L'ANALYSE
OU L'ART DE PENSER DES LUMIERES**

1/ Les conditions du renouvellement

- i L'analyse des Modernes, 17*
- ii Des juristes algébristes, 19*
- iii Prendre le problème à l'envers, 11*

2/ Pappus revisité, 20

- i Le problème de Pappus, reposé par Descartes, 20*
- ii L'angle d'attaque de Descartes, 21*
- iii L'analyse et la synthèse « nouvelle manière », 23*
- iv Une histoire aussi de logique, 25*

3/ La descartisation de Pappus en droit, 27

1/ Les conditions du renouvellement

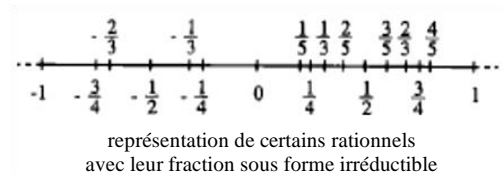
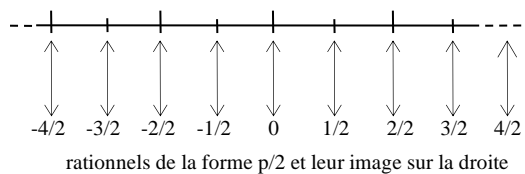
i L'analyse des Modernes

L'arithmétique et l'algèbre se transforment. Leur élan encourage l'analyse à passer au premier plan.

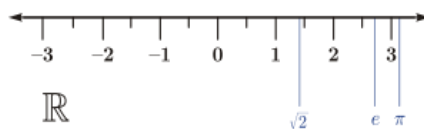
L'antiquité entrevoyait des trous dans les nombres et les lois. Jusqu'au seuil des Lumières, on imagine dans les nombres les plus infimes fentes, entre les fractions d'autres fractions, et ce sans fin, au point d'obtenir le nombre 1 par une addition infinie de fractions de fractions de fractions... ($1+1/2+1/4+1/8+1/16+1/32+1/64+1/128+1/256+1/512+1/1024+\dots$).

Un nombre rationnel met en rapport deux nombres entiers. Il est devenu clair pour les mathématiciens qu'il y a toujours un vide qu'entre deux nombres rationnels. D'autres nombres peuvent s'y immiscer.

L'image des nombres change. Leur représentation sur une droite est moins simple. *Aux nombres entiers correspondent des points successifs espacés de 1. Aux nombres rationnels de la forme $p/2$ correspondent des points successifs espacés de $1/2$. Les rationnels de la forme $p/3$ correspondent à des points distants de $1/3$, ceux de la forme $p/4$ à des points distants de $1/5$, etc.*¹



On apprend de cette façon à associer de plus en plus de points. Entre deux points successifs, la distance apparaît de plus en plus petite (les nombres de la forme $p/4$ sont plus proches que ceux de la forme $p/3$ qui sont plus proches de ceux de la forme $p/2$). On découvre à chaque endroit de la droite un nombre rationnel. On découvre qu'autour de chacun d'eux des nombres irrationnels qui apparaissent beaucoup plus nombreux. La droite représente l'ensemble de tous les nombres réels \mathbf{R} .



L'irrationalité de e sera prouvée par Euler au XVIII^e siècle. Le nombre e s'imposera comme *la perle de l'analyse*. Il permettra de mesurer l'évolution d'un système qui évolue à vitesse constante (ex. un nénuphar qui double de taille chaque jour). V. Benoît Rittaud, *Les nombres extraordinaires*, Paris, Le Pommier, 2009, p.151).

C'est sur ce fond d'une arithmétique qui ne se limite plus à l'étude des propriétés des entiers que l'analyse des Anciens va se renouveler. On ne crie plus : Dehors, les grandeurs incommensurables ! Dehors, les nombres ineffables ! L'arithmétique et la géométrie se rejoignent. *Le temps t , l'abscisse x , la vitesse v , peuvent être décrits par un même être mathématique, le nombre réel. [...] Entre deux instants a et b , on peut toujours imaginer un instant c intermédiaire.*² Idem pour l'espace et la vitesse.

Dans le monde du droit, le pouvoir et le talent peuvent également être représentés par une droite. On ne le dit pas, mais on le pense. Le pouvoir et le talent comportent des degrés. A défaut d'être proprement mesurables, ils peuvent être ordonnés. Entre deux degrés, on peut en concevoir un autre.

Mais les nombres ne foisonnent pas seulement dans *les abîmes épars* d'autres nombres. Il n'y a pas seulement *des nombres à l'intérieur d'autres nombres, et de plus en plus infimes*. Ils sont reliés entre eux. On peut par exemple les additionner : $2+2=4$, ou $4+4=8$, voire relier ces deux calculs pour voir que $2+2+4=8$.³

Les nombres sont, de plus, abstraits. Dès l'antiquité grecque, on utilise les mêmes mots pour compter des choses différentes alors qu'en Chine par ex. la numération des objets longs, minces et flexibles

¹ Bastien Fernandez, *Le monde des nombres*, Paris, Le Pommier, 2000, pp.26-27.

² R. Thom, *Les réels et le calcul différentiel*, Séminaire de philosophie et de mathématiques, ENS, 17 mars 1982 ; *Apologie du logos*, p.316.

³ D. Tammé, *L'éternité dans l'heure*, op .cit., p.28 et 43.

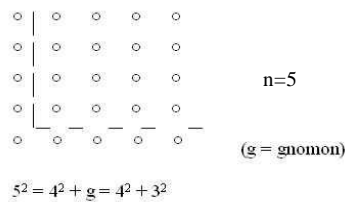
(poissons, rivières) diffère de celle des objets plats (papier, peintures, draps). La généralisation est poussée. On abandonne les subtiles distinctions attachées aux quantités. La mémoire est épargnée.

Dans sa Métaphysique, Aristote montre que, pour compter, il faut comprendre ce qu'est « un ». Pour compter cinq, dix ou vingt-trois oiseaux, nous devons d'abord identifier un oiseau, une idée de « l'oiseau » qui peut s'appliquer à toutes les espèces possibles.¹

Sous la catégorie de citoyens, toutes les espèces d'hommes sont regroupés afin que tous participent à la chose publique (on ne compte pas les esclaves, les femmes et les métèques). La liberté de parole appartient à chacun, du moins en principe, car peu de gens exerçaient un tel droit (*isêgoria*). A Athènes, la direction politique était monopolisée par un groupe relativement peu nombreux, mais qui ne s'autoreproduisait pas comme à Rome. Le désir d'égalité rabote les distinctions sociales superficielles au profit du droit universel à prendre part à la décision finale sur la base d'un vote égal et par tête.² L'égalité devant la loi (pour la produire) se retrouvera dans l'égalité en droit des Lumières.

En science autant qu'en politique (ou en politique autant qu'en science : on ne préjuge pas le lien de causalité, l'une et l'autre manifestant un même savoir général, *l'épistémè antique*), les Grecs aiment passer par l'indéterminé. Les questions concrètes sont posées comme des problèmes indéterminés.

Bien que l'approche des problèmes soit géométrique, le passage par l'abstrait demeure obligé. Résoudre l'équation du premier degré $bx=c$ revient à trouver le côté x d'un rectangle dont l'autre côté b et la surface c sont donnés. Résoudre les équations du second degré $bx \pm ax^2 = c$ revient à trouver le côté x d'un rectangle dont l'autre côté b est donné et dont la surface soit telle, que, augmentée ou diminuée de la surface d'un rectangle de côtés x et ax , elle soit égale à une surface donnée c .³ Le procédé employé consiste en la construction d'un *gnomon* :



gnomon = équerre, visible par ex. dans la somme n^2 des n premiers nombres impairs

Le gnomon est une figure qui, ajoutée à une à une autre figure, la fait croître sans en altérer la forme. (A. Dahan-Dalmedico/J. Peiffer, *Une hist. des math.*, op. cit., p.48)

Avec Diophante, l'approche des problèmes devient algébrique. On continue de plus belle à traiter de problèmes indéterminés. Par ex., trouver un triangle rectangle tel que le nombre de son aire, diminué de celui de l'une de ses perpendiculaires, forme un nombre donné. Ou bien : trouver un triangle rectangle tel que le nombre de son aire, augmenté de celui de l'hypoténuse, forme un carré, et que le nombre de son périmètre soit un cube.⁴ L'algèbre de Diophante est recueillie et continuée par Al-Khwarizmi au IX^e siècle et les algébristes italiens mais les problèmes sont encore formulés en mots.

Prenons un exemple : $x^2 + 10x = 39$. Exprimés en mots, l'équation devient : un nombre carré (1, ou 4, ou 9, etc.) plus un multiple de dix (10, 20, 30) égale trente-neuf ; $9 (3 \times 3) + 30 (3 \times 10) = 39$; trois est le facteur commun ; $x = 3$. Autre ex. : $x^2 = 2x + 15$, soit en mots : un nombre carré (1, 4, 9, etc.) égale quinze plus un multiple de deux (2, 4, 6, etc.). Autrement dit, nous cherchons un nombre carré supérieur à dix-sept (puisque il équivaut à quinze plus deux fois quelque chose). Le premier candidat est vingt-cinq (5×5) et vingt-cinq correspond bien à quinze plus dix (un multiple de deux). Donc $x = 5$.⁵

Par mots, il faut entendre chiffres. Bombelli par ex. cherche à résoudre par le calcul l'équation $2x^2 + 12x = 32$. Il emploie des méthodes alternatives en combinant le coefficient de x et la constante de l'équation $x^2 + 6x = 16$. Il donne la solution ($x=2$), mais les données (2, 12, 32) demeurent des chiffres. L'équation comporte des coefficients numériques. L'algèbre est *numéreuse*. Il n'y a que la variable x qui apparaît sous forme de lettres. Comme dans la première algèbre de Diophante, l'indéterminé n'enveloppe pas encore le donné.⁶

¹ *Ibid.*, p.35 et 39.

² Moses I. Finley, *L'invention de la politique* [Politics in the Ancient World, 1983], Paris, Flammarion, 1985, pp.198-199.

³ F. Thureau-Dangin, « L'origine de l'algèbre », op. cit., p.296.

⁴ *Ibid.*, p.302.

⁵ D. Tammet, *L'éternité dans l'heure*, pp.57-58.

⁶ Gérard Hamon, *Bombelli, L'algebra* [Bologne, 1572], Fragments, IREM de Rennes, 1986, p.33 ; Michel Serfati, « La dialectique de l'indéterminé, de Viète à Frege et Russell », in *La Recherche de la vérité*, Paris, Librairie scientifique Blanchard, 1999, p.152 et 157.

La page de l'algèbre moderne sera tournée avec Viète au XVI^e siècle. Son *ars analytica* contiendra non seulement des inconnues indéterminées (des variables x , y , z), mais aussi des données indéterminées (des quantités constantes quelconques, des *paramètres*, au lieu de simples chiffres). L'équation contient des coefficients indéterminés, à l'instar de la pratique de la géométrie depuis l'antiquité. L'algèbre devient *spécieuse*. Elle porte sur des espèces de choses et non des nombres.

Considérons le problème posé par Viète.

Étant donné la somme de deux côtés, S , et leur différence, D , trouver les côtés. La solution sera pour le plus grand des côtés : $(S+D)/2$; pour le plus petit : $(S-D)/2$. (En effet : si $S = a + b$ et $D = a - b$, alors $S + D = 2a$, et $a = (S+D)/2$; $S - D = 2b$, et $b = (S-D)/2$.) Il s'agit du *premier exemple historique d'un problème résolu dans le cadre d'une écriture symbolique purement littérale*. La solution est valable quelle que soit la valeur des données initiales S et D :

La visée initiale de Viète était claire : représenter symboliquement les données dans le calcul, aussi bien que les inconnues. Après lui, l'utilisation des lettres de l'alphabet constitua le réservoir des signes non numériques, interprétés comme inconnues ou données.

Le donné n'est plus explicite mais arbitraire. Descartes le représentera par les premières lettres de l'alphabet : a , b , c , etc., réservant à ce qui est recherché les dernières lettres : x , y , z .. Dans le sillage de Viète, Descartes *supprime toute différence de traitement entre les quantités naturellement connues comme telles, 2 ou 3, et les quantités inconnues*.¹ La seule différence est le type de lettres :

Ainsi [c'est Descartes qui parle], voulant résoudre quelque problème [géométrique], on doit le considérer [non seulement] comme déjà fait, [mais] donner des noms à toutes les lignes qui semblent nécessaires pour le construire, aussi bien à celles qui sont inconnues qu'aux autres.

Descartes donne des noms à toutes les quantités. Ce ne sont pas des noms propres, mais des signes communs. Les termes sont indéterminés. Le problème qui se pose entre eux (leur relation mutuelle) est également indéterminé et le moyen de le résoudre ne l'est pas moins : il s'agit d'une équation indéterminée, disons en x et y , qui exprime, selon Descartes,

une même quantité de deux façons, car les termes de l'une sont égaux aux termes de l'autre.²

Les conditions du renouvellement de l'analyse sont réunies : les nombres irrationnels sont devenus des nombres à part entière et l'algèbre achève de réaliser sa mue abstraite. On ne saurait trop louer le XVI^e siècle d'avoir œuvré dans ces deux directions. Simon Stevin s'élève en Flandre contre l'usage de la terminologie d'*irrationnel*, d'*inexprimable*, pour qualifier les nombres irrationnels qui ont droit de cité.

Le passage à l'indéterminé devint la règle.

La communauté des mathématiciens se mirent à l'appliquer chaque fois qu'apparaissait dans l'écriture symbolique une phrase chiffrée.³

La reconnaissance des nombres réels est l'affaire des ingénieurs (comme Stevin) qui mettent au point le développement décimal des nombres qui a l'avantage de faire disparaître la barre de fraction. Cette écriture générale permet d'écrire tous les types de nombres : les nombres décimaux qui possèdent un nombre fini de décimales non nulles comme $1/8 = 0,125$ et les non décimaux comme $1/3 = 0,133...$ ⁴ La formulation abstraite de l'algèbre est, en revanche, l'affaire des juristes. Comme dans l'antiquité, le monde du droit n'est pas étranger au développement des mathématiques qui agit en retour sur lui.

ii Des juristes algébristes

iii Prendre le problème à l'envers

1 M. Serfati, « La dialectique de l'indéterminé, p.156 ; Léon Brunschvicg, *Ecrits philosophiques*, t.1, Paris, Puf, 1951, p.24.

2 Descartes, *La Géométrie* [1637], Paris, Gabay, 1991, I, p.3.

3 A. Dahan-Dalmedico/J.Peiffer, *Une hist. des mathématiques*, p.103 ; M. Serfati, « La dialectique de l'indéterminé, p.166.

4 A. Dahan-Dalmedico/J.Peiffer, p.103 ; D. Guedj, *La gratuité ne vaut plus rien*, op. cit., pp.52-53.

2/ Pappus revisité

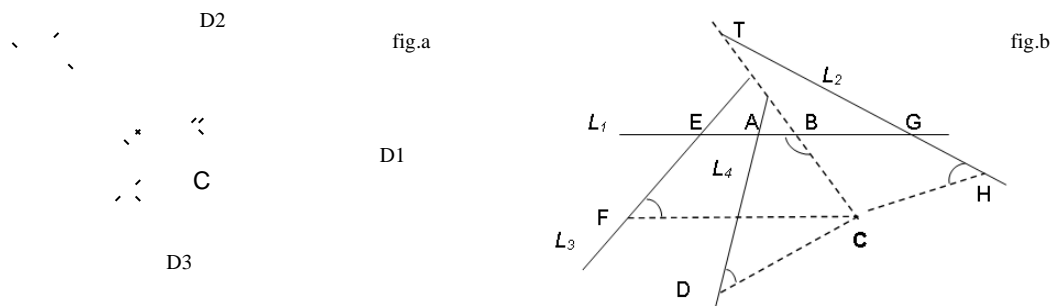
i Le problème de Pappus, reposé par Descartes

Au cœur de leur système de pensée, les Grecs se proposaient de partir d'éléments simples, supposés connus, pour découvrir ce qui ne l'était pas encore. Cette approche parcourt les *Eléments* d'Euclide. Elle s'exprime à l'indicatif : si telle chose est donnée, alors telle autre chose sera donnée. *Etant donné* a et $b \Rightarrow a/b$ est donné, ou plus encore : a/b est donné & c/b est donné $\Rightarrow (a+c)/b$ est donné, comme il est exposé dans un autre ouvrage d'Euclide, intitulé les *Données...* (a , b , et c désignent des grandeurs). Tel est le principe de la synthèse grecque, qui va du donné-donné au donné-démonstré.¹

Dans cette tradition, une méthode fait figure d'exception : l'analyse, qu'évoque Pappus. Descartes remet sur la table le problème que ce dernier a posé : *Etant donné 2n droites, trouver l'ensemble des points tel que le produit de ses distances à n de ces droites soit dans un rapport déterminé au produit de ses distances aux n autres*. Il ne considère que 4 droites en reformulant le problème à sa façon :

Soit un ensemble de quatre lignes situées dans un même plan, L_1 , L_2 , L_3 et L_4 . Trouver un point C qui doit être à une certaine distance de chacune des lignes désignées « sous un angle donné ».

Il ne s'agit pas ici de chercher simplement la droite la plus courte, c'est-à-dire la perpendiculaire. (*fig.a* infra). La notion de distance est ici plus compliquée, l'angle pouvant être aigu ou obtus. Descartes cependant ne parle pas d'angle et ne donnera pas une solution en termes d'angle avec une formule en cosinus et sinus (quand l'angle est et de 90° , on retrouve la perpendiculaire). Tout est énoncé et résolu en termes de métrique x et y . Descartes ne passe pas par cette voie car la question est plus précise. Elle porte sur des produits entre segments (qui étaient des rectangles pour les Grecs), mais, à la différence de Pappus, Descartes n'envisage pas entre eux un rapport constant mais d'égalité. A cette fin, le mathématicien-philosophe partage les segments en deux groupes, les droites CB , CD , CF et CH formant, sur la *fig. b* infra, avec les quatre droites données AB , AD , EF , GH , des angles également donnés. Le lien d'égalité est établi entre les droites en pointillé $CB \times CE = CD \times CH$.²

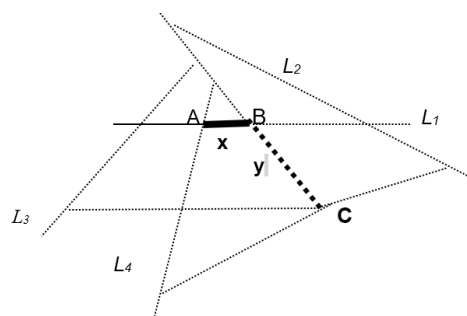


Descartes ne se laisse pas enfermer dans ce qui est purement donné. L'objet qu'il cherche ne l'est pas à proprement parler, mais il le considère comme tel. Il se le donne. Le point C est désigné *comme* étant donné, mais il n'est pas donné non plus de façon absolue, séparée. Il est reconfiguré dans un système de coordonnées pour revêtir une forme algébrisée. Les propriétés de l'objet sont rédigées sous forme d'équation. La résolution de cette équation dira si le point C a été le point dûment désigné.

La reconfiguration de l'objet dans un système de coordonnées. Descartes ne parle pas en ces termes, mais l'idée y est pour trouver le point C . Le pur donné est constitué des lignes L_1 , L_2 , L_3 et L_4 . Il choisit parmi elles, L_1 comme axe des abscisses. Sur cet axe, il jette son dévolu sur un point particulier, le point B qu'il prend pour *origine*. La ligne en pointillé passant par B et C est posée comme axe des ordonnées. Les axes de coordonnées ne sont pas nécessairement perpendiculaires. Il faut seulement que lignes données L_1 , L_2 , L_3 et L_4 coupent celles qui ont été retenues pour les situer. Au besoin, on prolonge les axes de coordonnées pour les rencontrer. Toutes les lignes sont précisément repérées.

¹ J.-L. Gardiès, *Qu'est-ce l'analyse ?* pp.98-100.

² Descartes, *La Géométrie* [1637], Paris, Gabay, 1991, I, p.11 ; V. aussi Evelyne Le Rest, « Sur *La Géométrie* de Descartes », in Groupe Inter-IREM d'épistémologie, *La rigueur et le calcul*, Paris, Cedic, 1982, pp.82-84.



x : coordonnée
sur l'axe des abscisses

y : coordonnée
sur l'axe des ordonnées

(*La Géométrie*, I, p.11)

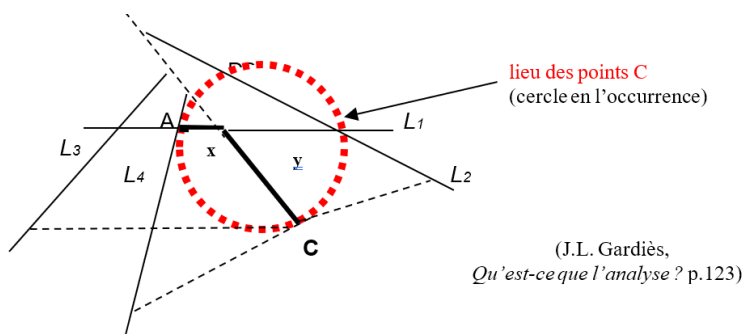
La mise en équation des propriétés. L'algèbre entre ouvertement en ligne. La solution est subodorée en C. Nous campons en ce point et signalons notre position par rapport aux segments AB et BC devenus x et y . Les conditions géométriques, requises par Pappus, sont transformées par Descartes en conditions algébriques. La reformulation des conditions prend la forme d'une équation. La longueur qui sépare le point C de chaque droite donnée sera déterminée par la résolution de cette équation.¹

ii L'angle d'attaque de Descartes

Nous ne pouvons entrer ici dans le détail de la démonstration conduisant à exprimer les quatre segments BC , CF , CD et CH en fonction de x et y pour employer le langage plus tardif de Leibniz (une *fonction* est une règle qui associe un nombre à un autre nombre, ces nombres fussent-ils génériques). Au terme d'un processus qui nécessite quelques manipulations algébriques. Descartes réussit à convertir l'égalité des produits entre segments en une équation du second degré à deux inconnues, x et y . Cette équation réunit les conditions de la solution, mais comment déterminer celle-ci s'il y a deux inconnues ? Cette difficulté peut être facilement levée. Tous les segments de la figure sont donnés. Si x (ou y) est aussi donné, l'équation du second degré ne comporte plus qu'une inconnue. Par exemple,

Prenant une quantité connue pour y , il ne restera que $x^2 = \pm ax \pm b^2$. [Mais y est susceptible de prendre une infinité de valeur ? - Oui, mais ce n'est pas rédhibitoire : si la ligne y comporte une infinité de valeurs,] on en trouvera aussi d'infinies pour la ligne x . On aura une infinité de points, tels que celui qui est marqué C, par le moyen desquels on décrira la ligne courbe demandée.²

C n'est plus seulement un point isolé. Il devient le lieu des points qui sont solutions du problème posé. Comme l'équation est du second degré, le lieu géométrique peut être le cercle, la parabole, l'hyperbole et l'ellipse.



(J.L. Gardiès,
Qu'est-ce que l'analyse ? p.123)

L'équation (cartésienne) de centre O et de rayon R (ce qui n'est pas le cas ici) est : $x^2 + y^2 = R^2$ (théorème de Pythagore) ou $x^2 + y^2 = 1$ si $R = 1$. Le recours à l'algèbre moderne n'exclut pas celui à la géométrie ancienne. Les théorèmes de Thalès et de Pythagore demeurent des outils privilégiés pour Descartes :

J'observe toujours [écrit-il à la Princesse Elisabeth], en cherchant une question de géométrie, que les lignes dont je me sers pour la trouver, soient parallèles, ou s'entrecoupent à angles droits le plus qu'il est possible. Je ne considère point d'autres théorèmes, sinon que les côtés des triangles

¹ Vincent Jullien, *Descartes. La Géométrie de 1637*, Paris, Puf, 1996, p.82; David Rapport Lachterman, *The Ethics of Geometry, A genealogy of Modernity*, New York, Routledge, 1989, 3, pp.146-148.

² Descartes, *La Géométrie*, I, p.13.

*semblables ont semblable proportion entre eux, et que, dans les triangles rectangles, le carré de la base est égal au carré des deux côtés. Je ne crains de supposer plusieurs quantités inconnues pour réduire la question à de tels termes qu'elle ne dépende que de ces deux théorèmes.*¹

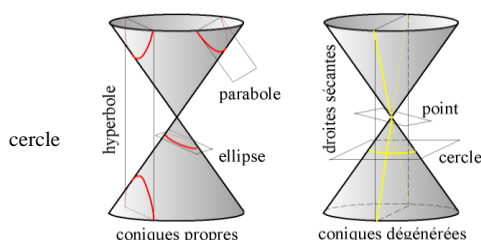
Dans sa démonstration, Descartes se contente d'utiliser le théorème de Thalès qui permet d'établir, grâce au parallélisme, des rapports de similitude. Les proportions entre les divers segments sont simplifiées en recourant à diverses lettres b, c, d, e, f, g et z auxquelles se mêlent les x et y . Comme les axes de coordonnées ne se coupent à angles droits, Descartes ne ressent pas ici le besoin de faire appel au théorème de Pythagore. Le problème de Pappus se pose en termes de distances, mais Descartes n'utilise pas les distances. La mise en équation des rapports de proportionnalité lui suffit.

Telle est la démarche analytique revisitée par Descartes. Certes, il s'inscrit dans la démarche de Pappus. Il s'exprime comme lui comme il écrit : *Voulant résoudre quelque problème, on doit d'abord le considérer comme déjà fait.*² Il suppose *la chose comme déjà faite*, mais il entend très vite se dépêtrer de *la confusion* créée par toutes les lignes données en les rapportant à certaines d'entre elles. Il formule de façon algébrique, non pas le problème posé, mais la solution qu'il imagine. Pour reprendre la distinction de Polya, Descartes s'efforce de *résoudre un problème* et non plus de *prouver un théorème*. On parle toujours de théorème, mais on ne le vit plus comme contemplation d'une réalité intellectuelle. Dès lors qu'on tient pour acquis l'objet cherché, on ne démontre plus pour révéler quelque chose de purement inconnue. On vérifie simplement si on a eu raison de la présupposer :

*Descartes' emphasis on problems, rather than theorems, is closely linked with his promotion of what he and his contemporaries called « analysis » or the « art of invention » (ars inveniendi).*³

Descartes résout le problème de Pappus au moyen de la géométrie analytique.

Au terme de son analyse du problème de Pappus à quatre lignes, il écrit une équation de la forme $y^2 = ay - bxy + cx - dx^2$. Cette équation représente une conique passant par le point C correspondant au rapport fixé entre segments joignant le point C à la droite D_i (respectivement 2, 3 et 4). C'est la forme de l'équation à deux inconnues qui définit le lieu géométrique recherché. Selon les conditions imposées aux coefficients a, b, c, d , le lieu est un cercle, une parabole, une ellipse, une hyperbole. Il peut être aussi autre chose qu'une conique : un point, voire une ou deux droites (un point dans un plan horizontal, une droite dans le plan vertical passant par le point avec un certain angle, deux droites dans un plan tangent au cône), mais Descartes ne s'étend pas sur les coniques dégénérées.⁴



Dans le cadre de son algèbre géométrique, Apollonius décrit les coniques comme des courbes résultant de la section d'un cône par un plan (cercle, ellipse, hyperbole, parabole)

Les propriétés de ces courbes permettront aux astronomes de définir les mouvements des astres et aux ingénieurs de fabriquer des objets adaptés à tous les usages (barrique, miroir concave, coque, etc.)

Le terme *conique* vient précisément de l'étude du *cône*, initié par Apollonius de Perga (260-190 av. J.-C), une des grandes figures, avec Pappus, des mathématiques hellénistiques. Tous deux vécurent à Alexandrie.

Le type de conique dépend de la position des droites données au départ. Idem des autres courbes. La courbe d'équation $y^3 - 2ay^2 - a^2y + 2a^3 = axy$ représente le lieu géométrique de quatre droites parallèles et à égale distance a , et d'une cinquième perpendiculaire aux autres. Newton nommera cette cubique parabole cartésienne et ses successeurs trident de Newton puisqu'il n'y a qu'une branche de la courbe qui ressemble à une parabole, les trois autres branches (tridents) étant infinies.

1 Descartes, *Lettre à la Princesse Elisabeth* [nov. 1643], in Descartes, *Correspondance*, Paris, Boivin et Cie, 1935, p.21.

2 Descartes, *La Géom.*, III, p.56 ; I, p.11.

3 Descartes, *La Géom.*, I, p.11; Polya, *Comment poser et rés. un prob.*, p.29 ; D. Lachterman, *The Ethics of Geometry*, op. cit., p.152.

4 Jean-Paul Collette, *Histoire des mathématiques*, Ottawa, Vuibert/ERPI, 1979, t.2, chap.1, p.10. Le point $(x=0, y=0)$ fait toujours partie du lieu géométrique, quels que soient les coefficients, mais il n'est pas tout seul. Si $a=b=c=d=0$, l'équation devient $y^2=0$ (la solution $y=0$ est une droite). Si $a=b=c=0$ et $d \neq 0$, on obtient un cercle de rayon nul d'équation $y^2+x^2=0$ (la solution est donc un point). Si $a=b=c=0$ et $d \neq 0$, l'équation devient $y^2 = x^2$, on obtient deux droites, $y = x$ et $y = -x$ (cas d'une hyperbole ramenée à ses asymptotes par passage à la limite. Les asymptotes sont perpendiculaires entre elles, comme dans le cas d'une hyperbole équilatère. Se rappeler la relation entre pression et volume).

Par delà Pappus, Descartes parvient à classer les courbes selon le degré des courbes : second degré (conique), troisième degré (cubique), quatrième (quartique), etc. Le degré des équations monte avec le nombre de lignes que comporte le problème de Pappus :

- au problème à quatre lignes au plus est associée une équation de degré 2 au plus ;
- au problème à huit lignes au plus est associée une équation de degré 4 au plus ;
- au problème à douze lignes au plus est associée une équation de degré 6 au plus.¹

Revenons à l'équation du second degré que Descartes a réussi à élaborer analytiquement. Les coefficients de l'équation ne sont pas numériques. Ce sont des paramètres a, b, c, d , que l'on est libre de modifier pour retrouver les différentes sections coniques. A ce stade, l'analyse ne s'est pas seulement départie de l'ancienne analyse. En se hissant jusqu'à l'équation, Descartes se donne la possibilité de définir chaque conique. Il ne s'agit moins de remonter vers les conditions de la solution que de redescendre

*de la propriété générale, exprimée par l'équation, vers tous ses cas envisageables. Chaque cas correspond à une situation géométrique dont il exprime la particulière propriété.*²

Selon les spécialistes, le succès de Descartes est partiel. Dans sa démarche proprement analytique, Descartes a écarté a priori les grandeurs négatives. Ce choix l'a obligé à raisonner dans un des quatre angles formés à l'intersection des deux axes de coordonnées. Au sortir de cette démarche, il n'atteint pas le niveau de généralité espérée. Il a omis notamment de considérer le cas de l'équation où la solution peut être, non pas une conique, mais un couple de coniques (*le lieu ne peut être tout ensemble au cercle et à l'hyperbole*), voire l'intersection d'une droite et d'une branche d'hyperbole.

De ce point de vue, Descartes a la main moins heureuse que Fermat, son contemporain. *Celui-ci distinguait six cas particuliers selon la valeur que pouvaient prendre les différents paramètres. Il montrait que les quatre premiers et le dernier cas caractérisaient respectivement une droite, une hyperbole, à nouveau une droite, deux possibles paraboles, enfin une ellipse, tandis que le cinquième cas débouchait lui-même sur la triple possibilité d'obtenir un cercle, une ellipse et une hyperbole.*³

Fermat n'atteint pas le degré de systématisme auquel parviendra plus tard la géométrie analytique, mais Fermat, comme Descartes, inaugure une telle géométrie. Descartes la popularise. Leur démarche finit par ne plus relever de la seule analyse mais de la *synthèse* qui était la démarche de principe en géométrie grecque. La synthèse revenait alors à construire les solutions à la règle et au compas.⁴ Dans ses *Eléments*, Euclide démontre par cette façon de faire le théorème de Pythagore (Liv. I, Prop. 47). Il prouve par elle que ce théorème découle du théorème de Thalès (Liv. VI, Prop. 31). Dans le cadre de cet ordre synthétique, les Anciens pratiquaient la démonstration par l'absurde.

iii L'analyse et la synthèse « nouvelle manière »

Les Modernes n'abandonnent ni la synthèse, ni la démonstration par l'absurde. Ils substituent à l'ancienne analyse la nouvelle qui permet d'élucider les équations. Ils substituent à l'ancienne synthèse une nouvelle qui permet de déduire des équations les courbes en question. *La Géométrie* de Descartes fournit, à ce titre, *un exemple de synthèse sans défaut* si on se limite à certaines courbes.⁵

La synthèse poursuit sa progression quand il s'agit de mener à bien les calculs que l'analyse laisse prévoir comme possibles. Voici un exemple algébrique. Il s'agit de trouver l'inconnue x dans l'équation $8(4^x + 4^{-x}) - 54(2^x + 2^{-x}) + 101 = 0$.

1 J.-P. Collette, *Hist. des mathém.*, p.10 ; V. Jullien, *Descartes. La Géométrie de 1637*, op. cit., p.96. V. le site *ChronoMath* sur « Trident ».

2 J.-L. Gardiès, *Qu'est-ce l'analyse ?* p.127.

3 *Ibid.*, pp.124-130 et 141.

4 Pappus identifie *synthèse et solution constructive*. V. G. Polya, *Comment poser et rés. un prob.*, p.132.

5 J. Vuillemin, *La philosophie de l'algèbre*, Paris, Puf, 1993, 2^e éd., pp.10-11.

phase d'analyse	phase de synthèse
Comme $4^x = (2.2)^x = 2^{2x} = (2^x)^2$ et $4^{-x} = (2^x)^{-2}$, il est avisé d'introduire une nouvelle inconnue, $y = 2^x$.	<i>L'ordre de calcul est l'inverse de l'ordre d'invention.</i>
L'équation en y devient : $8(y^2 + 1/y^2) - 54(y + 1/y) + 101 = 0$.	On trouve z d'abord ($z = 5/2, 17/4$), puis y ($y = 2, 1/2, 4, 1/4$) et finalement x , l'inconnue demandée à l'origine ($x = 1, -1, 2, -2$).
En introduisant une autre inconnue, $z = y + 1/y$, on obtient : $(y + 1/y)^2 = y^2 + 2 + 1/y^2$, d'où $8(z^2 - 2) - 54z + 101 = 0$ et $8z^2 - 54z + 85 = 0$.	<i>La synthèse reprend l'analyse pas à pas.</i>
<i>Ici s'arrête l'analyse, à condition que celui qui traite le problème sache résoudre les équations du second degré.</i>	<i>L'analyse vient en tête, la synthèse suit.¹</i>

Qui dit synthèse dit enchaînement de déductions. La présentation de l'ensemble du travail accompli sous forme de synthèse a la vertu d'une exposition logique qui peut convaincre les esprits qui ont du mal à suivre. C'est l'avis de Spinoza qui entend montrer combien l'œuvre de Descartes est articulée :

Bien qu'on trouve dans les deux méthodes de démonstration [analytique et synthétique] une certitude qui supprime tout risque de doute, elles ne sont pas également utiles à tous. La plupart des hommes ne peuvent ni les comprendre pour eux-mêmes, ni expliquer aux autres les choses démontrées apodictiquement. Beaucoup, dans un aveugle enthousiasme, ou influencés par autrui, se sont enrôlés sous la bannière de Descartes. Ils ont seulement retenu ses opinions et ses enseignements, et quand on en discute, ils ne savent que bavarder et jaser sur eux, sans rien démontrer, comme cela se faisait autrefois et encore aujourd'hui chez les [partisans d'Aristote].

Pour les aider, j'ai souvent désiré qu'un homme, habile dans l'ordre analytique et synthétique, très érudit sur les écrits cartésiens, bon connaisseur de sa philosophie, voulût bien se mettre au travail et exposer dans un ordre synthétique ce que Descartes a présenté dans l'ordre analytique. J'ai commencé moi-même à le faire en recourant à la méthode habituelle de la géométrie.²

En entrant dans la synthèse réalisée par Spinoza, le lecteur est entraîné dans une succession de définitions, d'axiomes, de propositions. Il glisse de la démonstration 1 à la démonstration 2, de la démonstration 3 à la démonstration 4, etc. La synthèse révèle la cohérence. Elle ajoute de la clarté à la distinction. Descartes en est lui-même persuadé.

La synthèse ou composition [est la méthode la plus apte] à convaincre les lecteurs opiniâtres ou peu attentifs [car] elle démontre clairement ce qui est contenu en ses conclusions.

En revanche, pour ce qui est de l'investigation, la nouvelle analyse demeure sans pareil, non seulement au regard de l'ancienne, mais aussi de la synthèse, ancienne ou nouvelle :

L'analyse ou résolution [montre] la vraie voie par laquelle une chose a été méthodiquement inventée. Elle me semble la plus vraie.³

Dans sa présentation de la philosophie de Descartes, Spinoza admet aussi que l'analyse est *la méthode qui sert à découvrir*. Grâce à l'algèbre, libérée de la géométrie, les Modernes découvrent combien la marche rétrograde du raisonnement est féconde. On remonte des conséquences au principe, Cette orientation rappelle, dans son domaine propre, la démarche de Bacon qui entendait partir, non des idées, mais des faits. Le raisonnement inverse participe du même renversement de perspective. Comme l'induction, *l'analyse est invention ; la synthèse, la conception du plan, exécution.*⁴

Pour commencer à chercher, il ne faut plus se contenter de raisonner déductivement à partir de définitions. Même le raisonnement par l'absurde ne suffit pas toujours en dernier recours. La *reductio ad absurdum* s'efforce de démontrer que *la situation est impossible*. Dans un problème à résoudre, on n'est pas dans l'esprit à penser que la situation est *fort peu vraisemblable*.⁵ Dans sa *Géométrie*, Descartes est plus optimiste. Il subodore que la solution existe alors qu'Euclide ne fait pas un tel pari.

1 G. Polya, *Comment poser et rés. un prob.*, pp.133-134.

2 Spinoza, *Les principes de la philosophie de Descartes démontrés selon la méthode géométrique* [1663], Paris, Pléiade, 1954, pp.149-150. Texte allégé.

3 Descartes, *Réponse aux secondes objections [aux Méditations]*, [1641], Paris, Pléiade, 1953, pp.387-388.

4 G. Polya, *Comment poser et rés. un prob.*, p.134.

5 M. Dauzat, *Éléments de méthodologie mathématique*, Paris, Vuibert, sans indic. de date, p.7 ; G. Polya, *Comment rés. un probl.*, p.162.

Si Descartes n'est pas le seul à entreprendre l'analyse nouvelle, il est le seul à en présenter la méthode dans toute sa pureté. Pour cette raison, il vaut d'insister sur cette partie de son œuvre pour en saisir le sens et la portée dans le cadre de l'épistémè moderne.

iv Une histoire aussi de logique

Descartes aborde le problème en faisant *comme si* le point recherché était trouvé. Comme dans l'antiquité, Descartes travaille à l'envers. Il travaille sur les conditions pour que le point C soit le point qui convient. Il élimine au fur et à mesure ce qui n'est pas possible. Son analyse est dichotomique ou, plus simplement, exclusive. Il cherche un objet parmi d'autres dans la pièce. Il écarte ceux qui ne satisfont pas toutes les conditions requises. Reste le bon, l'élu, celui qui réunit les propriétés voulues.

Pour trouver le point C,

1/ Descartes commence par considérer que tout point du plan est un candidat potentiel. Tout point du plan peut se mettre sous la forme x et y . A tout point du plan correspond un couple de nombres (x,y) . Par conséquent, tous les couples de nombres sont a priori éligibles pour être C ;

2/ Pour isoler le point C, Descartes demande aux candidats potentiels de remplir un questionnaire : ils doivent satisfaire les conditions de Pappus, à savoir les conditions que Pappus impose aux points. Descartes transforme ces conditions géométriques en conditions algébriques (en relations entre x et y) ;

3/ Pour vérifier que les points sont les heureux élus, Descartes convertit les conditions de Pappus, dûment algébrisées, en équation (en égalité). Les points en x et y qui vérifient l'équation sont ceux qui ont réussi le premier test de la sélection (les écrits à l'examen) ;

4/ L'équation établie demeure générale. Suivant la nature des coefficients (tableau de signes lors de l'oral), on obtiendra telle ou telle équation à laquelle correspondra telle ou telle courbe du plan.

Jusqu'à 3/, l'analyse revient à écrire : $P \Rightarrow Q$ (le lieu des points supposé C \Rightarrow l'équation en x et y). Q (l'équation en x et y) est la condition nécessaire pour avoir P (le lieu des points C). Il faut avoir Q pour avoir P et il suffit d'avoir P pour avoir Q, mais de quel P parle-t-on ? Supposons que le problème de Pappus soit toujours à quatre lignes. Nous pointons C. Les coordonnées x et y de ce point sont solution d'une équation algébrique du second degré. Cette équation suggère une conique, mais il y a conique et conique. S'agit-il d'un cercle ? d'une parabole ? d'une ellipse ? d'une hyperbole ? L'équation de degré 2 est une condition nécessaire, mais elle ne suffit pas pour déterminer la courbe.

Nous faisons face au problème de dissociation du *suffisant* et du *nécessaire et suffisant*. Un exemple en arithmétique éclaire cette distinction :

- Si n est un nombre entier naturel multiple de 4, alors n est pair. Formellement : $P \Rightarrow Q$;
- La réciproque de cet énoncé qui est vrai est fausse : Si n est un nombre pair, alors il est multiple de 4. Formellement : $Q \Rightarrow P$. Cette réciproque n'est pas vraie puisqu'il existe des entiers pairs qui ne sont pas des multiples de 4.
- Autrement dit, $P \Rightarrow Q$: dans cette implication, Q est une condition nécessaire, mais l'implication réciproque $Q \Rightarrow P$ n'est pas vraie. Q est une condition nécessaire mais pas suffisante.¹

Dans le problème de Pappus à quatre lignes, l'équation d'une conique représente la condition nécessaire pour que le point isolé soit effectivement le point recherché. La détermination des coefficients du polynôme de degré 2 précise l'équation, celle par exemple du cercle. Cette indication, qu'apporte le 4/ supra, permet de traduire exactement le problème posé en son équivalent algébrique et réciproquement. P (le lieu des points C) et Q (l'équation du cercle) sont, équivalents.

Formellement : $P \Leftrightarrow Q$. L'énoncé $P \Rightarrow Q$ (le lieu supposé C \Rightarrow l'équation du cercle) et sa réciproque $Q \Rightarrow P$ (l'équation du cercle \Rightarrow le point C) sont tous deux vrais. On est dans un cas d'équivalence semblable à l'exemple arithmétique : *Pour tout nombre entier n , n est pair [énoncé P] si et seulement*

¹ Oswald Ducrot, « L'expression, en français, de la condition suffisante », in Langue française, 1971, n° 12, *Linguistique et mathématique*, p. 63 ; J. Bair, G. et J.-J. Haesbroeck, *Formation mathématique par la résolution de problèmes*, Bruxelles, De Boeck, 2000, pp.70-71.

si n^2 est un multiple de 4 [énoncé Q]. $P \Rightarrow Q$ & $Q \Rightarrow P$, soit $P \Leftrightarrow Q$. P est la condition nécessaire et suffisante pour avoir Q. Pour P (le lieu des points supposé C), il faut et il suffit Q (l'équation du cercle).

En partant d'un point C qu'on ne connaissait pas ou peu, nous avons procédé par conditions nécessaires pour admettre le point C. Nous sommes partis de la supposition pour entrer dans la logique. Mais le point C représente encore un tas de solutions. La démonstration de l'implication réciproque –à nouveau la logique ! – détermine l'équation qui convient. Sa solution donne le point C.

Le retournement de l'analyse en synthèse confirme, au terme du 4/, la condition *nécessaire et suffisante*. On ne recule plus en direction d'antécédents. On dérive d'eux maintenant. On glisse des prémisses aux conséquences en passant de conditions en conditions nécessaires. La dernière se révèle nécessaire et suffisante. Formellement, le schéma est le suivant : P_1 (équation d'une conique) $\Rightarrow P_2$ (équation du cercle) $\Rightarrow Q$ (lieu des points supposés C devenus points-solutions). La synthèse est bien constituée de *longues chaînes de raisons [...]* dont les géomètres ont coutume de se servir.¹

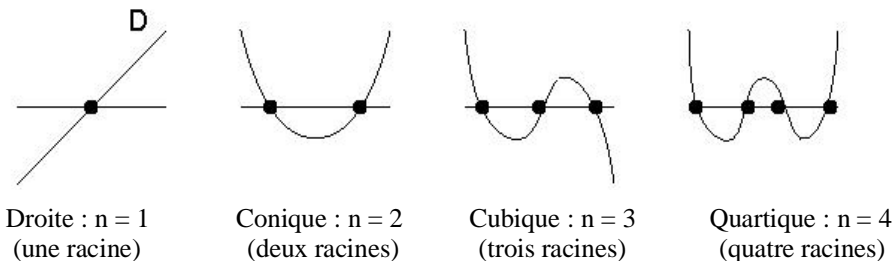
La chaîne déductive devient plus visible au stade de la synthèse, mais l'analyse n'utilise pas moins des propositions intermédiaires formant, à partir de la conclusion (notre point C supposé) un *chaînage arrière* (expression utilisée aujourd'hui en Intelligence Artificielle). Formellement : C (conclusion) $\Leftarrow P_1 \Leftarrow P_2 \Leftarrow \dots \Leftarrow P_n \Leftarrow H$ (hypothèse). L'exemple suivant est parlant :

Soient x , y et z trois nombres réels positifs. Nous voulons démontrer que $x/(1+2x) \leq y/(1+2y) + z/(1+2z)$ dès que $x \leq y+z$ (hypothèse H). Partir de l'hypothèse, $x \leq y+z$, ne donne guère de renseignement pour arriver à la conclusion souhaitée. En revanche, il est commode de partir de la thèse à démontrer : $x/(1+2x) \leq y/(1+2y) + z/(1+2z)$. Réduisons au même dénominateur cette inégalité : $x(1+2y)(1+2z) \leq y(1+2x)(1+2z) + z(1+2x)(1+2y)$. Nous passons de la conclusion C à la proposition P_1 . En développant les deux membres de P_1 et en simplifiant, nous trouvons $x \leq y+z+4yz(1+x)$, soit la proposition P_2 . Or x , y et z sont positifs. L'inégalité de P_2 est vérifiée grâce à l'hypothèse H. Nous pouvons réécrire cette chaîne d'implications dans le « bon ordre » de la synthèse : $H \Rightarrow P_2 \Rightarrow P_1 \Rightarrow C$.²

Veut-on passer à l'ultime phase de l'analyse qui consiste à résoudre algébriquement de l'équation ? Le Livre III de la *Géométrie* propose des méthodes propres à Descartes - par ex. : la factorisation qui d'abaisse le degré d'une équation : $x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 106x - 120 = 0$ en $(x+5)(x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0)$ - ou des méthodes qui ont fait leur preuve quand il y a lieu d'exprimer les *racines* de l'équation en fonction de ses coefficients. Les racines sont les valeurs de x qui font que l'équation égale 0. Descartes renvoie aux méthodes de Ferrari et de Cardan quand les relations entre les racines et les coefficients deviennent de plus en plus compliquées à mesure que le degré du polynôme augmente.

A ce niveau, commente Descartes, une équation ne se présente plus seulement comme un *moyen d'exprimer une même quantité de deux façons, les termes de l'une ou l'autre étant égaux à ceux de l'autre*. Une équation met en présence *des sommes composées de plusieurs termes en partie connus et en partie inconnus dont les uns sont égaux aux autres*, mais il est préférable de les considérer *égaux à rien*.³ Un polynôme de degré n , égal à 0, signifie que sa représentation graphique coupe l'axe des x en n points (on ne prend pas en compte ici le fait qu'elle peut ne pas le couper ; on verra plus tard les racines non réelles). Plus le degré est élevé, plus les variations sont riches (diversifiées) :

Courbes de degré n



¹ Descartes, *Discours de la méthode*, II, Pléiade, p.138. Si la suite des implications, commençant par P_1 revenait sur P_1 , soit $P_1 \square P_2 \square Q$ et $Q \square P_1$, toutes les propositions seraient équivalentes, ce qui n'est pas le cas (seuls P_2 et Q le sont).

² J. Bair, G. et J.-J. Haesbroeck, *Formation mathématique par la résolution de problèmes*, op. cit., pp.72-73.

³ Descartes, *La Géométrie*, I, p.3 ; III, p.55.

La méthode de factorisation que suggère Descartes pour résoudre algébriquement l'équation finale répond elle-même à l'exigence d'une condition nécessaire et suffisante pour être propre à cet usage. Descartes établit dans cette vue un théorème : il démontre que si $P(x)$ est un polynôme, et r une racine de ce polynôme, alors $P(x)$ peut se factoriser $P(x) = (x-r)Q(x)$ où Q est un polynôme de degré inférieur à celui de P .¹ On connaissait l'inverse : si $P(x) = (x-r)Q(x)$, alors $P(r)=0$ où r est une racine de P puisque, si on remplace x par r , on obtient 0 . Le théorème de Descartes est l'implication réciproque.

Tel est le problème de Pappus revu et corrigé par Descartes.

Pour le résoudre, Descartes le transforme en solution. La solution imaginée est artificielle, même si elle renvoie peu ou prou à une première intuition ou observation. Il en recherche les conditions d'acceptation pour n'en retenir qu'une. Cette méthode est plus à portée que la géométrie *ordinaire*.² Tout le monde peut s'y essayer, sans titre ou don particulier. *Le bon sens [entendons : le sens inverse] est la chose du monde la mieux partagée.* Le *Discours de la méthode* est celui de l'Analyse.

3/ La descartisation de Pappus en droit

¹ Ex. : Si 4 est une racine de $5x^2 - 19x - 4$, alors $5x^2 - 19x - 4 = (x-4)Q(x)$ avec $Q(x) = 5x+1$.

² Descartes, *La Géométrie*, I, p.5.

§ 17.- SON USAGE EN PHILOSOPHIE NATURELLE ET POLITIQUE

a) en philosophie naturelle

- i *La méthode analytique en optique*, 28
- ii *La méthode analytique en mécanique*, 31

b) en philosophie politique

- i *Les paramètres en jeu*
- ii *Un modèle volontairement grossier qui fait penser*
- iii *Place à la contestation*

○

a) en philosophie naturelle

i *La méthode analytique en optique*

Devant le succès de sa manière de raisonner, Descartes a rédigé son célèbre *Discours de la méthode*. Le *Discours* ne sert pas seulement d'introduction à sa *Géométrie*. Il accompagne aussi sa *Dioptrique* et à ses *Météores*. Les trois traités sont présentés comme des *Essais de [sa] méthode*.

La dioptrique étudie la réfraction de la lumière. Le mot d'origine grecque – dioptrique = voir (*ophthesai*) à travers (*dia*) – indique que la dioptrique est une partie de l'optique qui s'occupe de l'action des milieux sur la lumière qui les traverse. Les bornes de cette discipline sont plus vastes que celles de son étymologie : y entrent la réflexion de la lumière autant que sa diffraction ainsi que le système dioptrique de l'œil. La *Dioptrique* de Descartes couvre tout ce champ, à l'exception de la diffraction (dispersion de la lumière comme onde en traversant une fente étroite. Nous reviendrons sur ce point).

Les Anciens ont également laissé des traces dans ce domaine. Héron d'Alexandrie (1^{er} siècle après J.-C.) déduisit l'égalité des angles d'incidence et de réflexion en présupposant que la lumière suit le chemin le plus rapide de sa source à sa destination en se réfléchissant sur la surface d'un miroir (sa démonstration repose sur l'inégalité triangulaire $AM+MB' \geq AB'$: voir fig. a). La *Catoptrica* (théorie des miroirs) fut connue d'Archimède. Dans sa propre *Catoptrica*, il étudia la réflexion de la lumière sur un miroir de forme convexe (parabolique).¹ Descartes s'inscrit dans cette tradition en innovant là encore.

Dans sa *Catoptrica*, Héron présuppose que la lumière se propage en ligne droite. Idem pour Descartes qui compare le mouvement lumineux à celui d'une balle qui rebondit sur une surface plane (\rightarrow), ou convexe (\cap), ou concave (\cup). Conformément à sa méthode de mise en équation par coordonnées, Descartes analyse la trajectoire de la balle selon des lignes horizontales et verticales :

Il faut remarquer [sur la figure b] que la détermination à se mouvoir vers quelque côté peut, aussi bien que le mouvement et généralement que toute sorte de quantité, être divisée entre toutes les parties desquelles on peut imaginer qu'elle est composée. On peut imaginer aisément que celle de la balle qui se meut d'A vers B est composée de deux autres, dont l'une la fait descendre de la ligne AF vers la ligne CE, et l'autre en même temps la fait aller de la gauche AC vers la droite FE, en sorte que ces deux, jointes ensemble, la conduisent jusqu'à B suivant la ligne droite AB.²

Le mouvement vertical prend fin lorsque la balle rencontre la surface plane (la terre), mais le mouvement horizontal continue à la même vitesse (malgré l'impact de la balle : hypothèse du modèle). Si on trace un cercle de centre B qui passe par A, la balle, en rebondissant, doit se situer sur le cercle en un point tel que la balle aura mis autant de temps à se mouvoir de A à B, soit le point F.

¹ Th. Heath, *A History of Greek Mathematics*, op. cit., vol.2, pp.353-354.

² Descartes, *La Dioptrique* [1637], Œuvres et lettres, Paris, Gallimard, Pléiade, II, p.190. V. Thibaut Gress, « Les premiers livres de *La Dioptrique* de Descartes », Paris, édit. CERMES (Centre de ressources et d'information multimedia pour l'enseignement supérieur). La Fondation de l'Ecole polytechnique soutient ce site dans le cadre du rayonnement des institutions françaises d'enseignement supérieur.

Et ainsi, vous voyez comment se fait la réflexion, à savoir selon un angle toujours égal à celui qu'on nomme l'angle d'incidence.¹

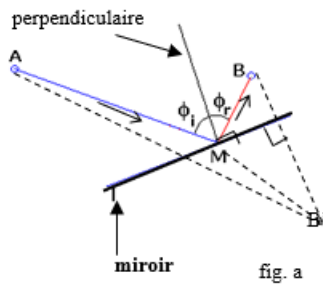


fig. a
Heron d'Alexandrie – angle d'incidence ϕ_i = angle de réflexion ϕ_r

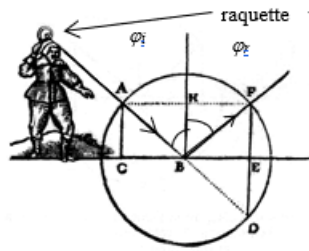


fig. b
Descartes – réflexion : rayon lumineux assimilé à une balle de jeu de paume

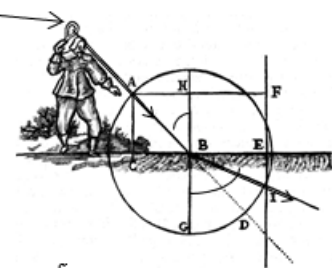
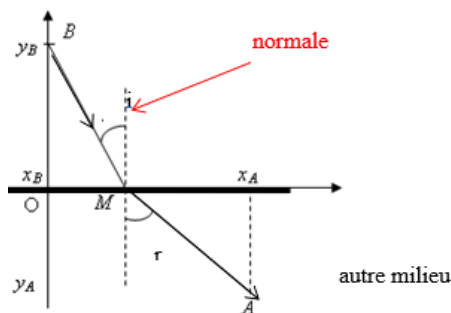


fig. c
réfraction : la balle ne heurte plus le sol mais rompt et traverse une toile

Pour percer le mystère de la réflexion, Descartes détermine de quelle manière la balle prolonge son mouvement horizontal lorsque le mouvement vertical est annulé. Pour comprendre la réfraction, Descartes raisonne à nouveau suivant les deux directions horizontale et verticale (fig. c). Au point d'impact B, Descartes considère que la vitesse de la balle diminue *par exemple* de moitié. (sic, Descartes ne prétend pas ici établir une loi physique). Pour effectuer la même distance que pour AB, il faudra deux fois plus de temps. Par conséquent, la droite EF correspond au double de la distance d'AB. Le point d'arrivée se situe où coïncident la circonférence du cercle, de centre B et de rayon AB, et la droite IF (ce que traduit mal la figure de Descartes). La réfraction se fait dans la direction BI.²



Descartes ne renvoie pas explicitement à x et y , mais l'analyse du mouvement du rayon suivant les deux axes est parfaitement claire.

En utilisant le rapport des côtés des triangles de la figure c), Descartes parvient à formuler la loi de la réfraction suivant laquelle le sinus de l'angle d'incidence est proportionnel au sinus de l'angle de réfraction ($\sin \text{angle GBI} = 2 \sin \text{angle HBA}$), étant rappelé que le sinus d'un angle α est le rapport du côté opposé à l'hypoténuse d'un triangle rectangle.⁵

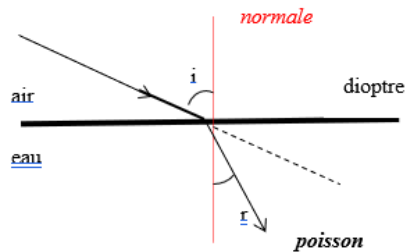
i est l'angle d'incidence formé par le rayon incident et la normale, r l'angle de réfraction formé par le rayon réfracté et la normale. Suivant Descartes, les Lumières apprendront que *la grandeur de la réfraction dépend de la densité plus ou moins grande du milieu réfringent*. (*Refringere* en latin signifie briser. Un milieu réfringent a pour propriété de changer la direction du rayon de la lumière qui passe obliquement.) *Le milieu qui aura le plus de densité occasionnera la plus grande réfraction*.³ Un tel milieu offre une plus grande résistance à la pénétration de la lumière qui voit donc sa vitesse diminuer.

Descartes croyait au contraire que la lumière va plus vite dans un milieu plus dense. Il faudra attendre le XIX^e siècle pour établir que l'eau est un milieu plus réfringent que l'air et que la lumière y circule moins vite. Dans un milieu plus réfringent, l'angle de réfraction est plus petit que l'angle d'incidence ; si $r > i$, le deuxième milieu est moins réfringent. L'eau est plus réfringente que l'air, et moins réfringente que le verre. Lorsque le rayon lumineux passe de l'air dans l'eau, il se rapproche de la normale :

¹ Descartes, *ibid.*, p.191.

² Descartes, pp.191-192. V. aussi Thibaut Gress, « Les premiers livres de *La Dioptrique* de Descartes », p.16.

³ Mathurin-Jacques Brisson, Dictionnaire raisonné de physique, Paris, 1781, t.2, p.496.



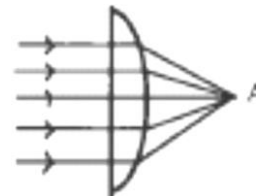
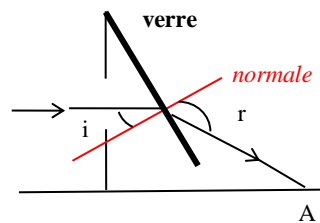
L'angle de réfraction diffère de l'angle d'incidence

Le pêcheur voit le poisson dans l'eau plus proche de la surface que de l'endroit où celui-ci nage au fond

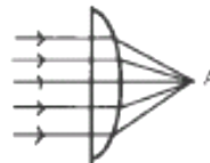
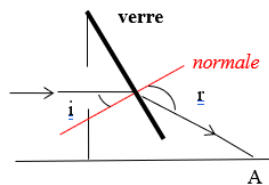
(pour la prise en compte des vitesses dans l'air et dans l'eau, il faut attendre Fermat. Voir sa propre formule infra)

Certains historiens des sciences font valoir que la loi de réfraction fut découverte avant Descartes par Snell. Peut-être. Tous deux vivaient en Hollande au début du XVII^e siècle. La démonstration cartésienne démontre en tout état de cause un résultat en le supposant connu (Descartes commente la figure b) supra en écrivant : *ainsi qu'il est aisé à vérifier par l'expérience*)¹. Elle met en place un système de lignes horizontale et verticale pour comprendre le phénomène. Descartes tire en outre de la loi des conséquences géométriques et pratiques fort utiles en optique.

Descartes démontre la forme précise que doivent avoir les lentilles pour faire converger les rayons et avoir tel ou tel effet de loupe. L'*anaclastique* est la forme que doit avoir un dioptre pour que des rayons parallèles se réfractent au même point. Sur la base de la loi de réfraction, il indique que le rapport $\sin i / \sin r$ est égal à un indice de réfraction qui ne dépend que de la nature du verre. En 1629 (soit 8 ans avant la publication de la *Dioptrique*), il envoie la solution à un lunetier de ses amis. L'*anaclastique* est une hyperbole. Le lunetier a le moyen de tailler les verres pour obtenir l'effet voulu.²



Descartes évoque l'*anaclastique* dans les *Règles pour la direction de l'esprit* pour avertir que l'étude des mathématiques doit être complétée par les leçons de l'expérience pour comprendre la nature.³



Descartes évoque l'*anaclastique* dans les *Règles pour la direction de l'esprit* pour avertir que l'étude des mathématiques doit être complétée par les leçons de l'expérience pour comprendre la nature.⁴

On retrouve les coniques à la famille de laquelle appartient l'hyperbole. Les rayons lumineux parallèles se rassemblent en un faisceau conique en A. Mais les chemins qu'empruntent la lumière à travers différents milieux n'intéressent pas que Descartes (ou Snell). Pour expliquer les lois de l'optique, Fermat reprend à son compte l'idée d'Héron d'Alexandrie que la lumière voyage dans le temps le plus bref. Cette idée reposait sur le postulat que *la nature ne fait rien en vain*. Fermat se contente de prendre en compte que la lumière n'a pas la même vitesse dans les milieux traversés. Le trajet emprunté est celui qui rend minimal le temps total parcouru :

$$\sin i/v_1 \text{ (vitesse dans l'air)} = \sin r/v_2 \text{ (vitesse dans l'eau)}^4$$

L'analyse et l'optique font aussi bon ménage que l'analyse et la géométrie. Cette association fera en un siècle de l'optique *une branche considérable de la philosophie naturelle*, écrira l'Encyclopédie,

¹ Descartes, *ibid.*, I, p.187. D'après son ami Beeckman, Descartes a trouvé la loi de réfraction en faisant des expériences. (Evelyne Barbin, « Descartes et les mathématiques », in I.R.E.M., *Les philosophes et les mathématiques*, Paris, Ellipses, 1996, p.55.

² E. Barbin, « Descartes et les mathématiques », p.55 ; Vincent Julien, *L'histoire des sciences pour les nuls*, Paris, First éditions, IV : Les débuts de la science classique, chap.18 : La physique mécaniste et les théories de la lumière, pp.224-226.

³ Descartes, *Règles pour la direction de l'esprit* [édith. posth., 1701], Paris, O.C., Gallimard, Pléiade, Règle VIII, pp.62-63.

⁴ Th. Heath, *A History of Greek Mathematics*, op. cit., vol.2, p.353; Albert Violant i Holz, *L'énigme de Fermat*, Paris, Le Monde/IHP, p.74.

*tant elle explique les lois de la nature, suivant lesquelles la vision ne se fait que parce qu'elle rend raison d'une infinité de phénomènes physiques qui seraient inexplicables sans son secours. N'est-ce pas par les principes de l'optique qu'on explique une infinité d'illusions et d'erreurs de la vue, une grande quantité de phénomènes curieux, comme l'arc-en-ciel, les périhélie, l'augmentation des objets par le microcosme et les lunettes ? Sans cette science, que pourrait-on dire de satisfaisant sur les mouvements apparents des planètes, sur les stations et rétrogradations, sur leurs éclipses, etc ? L'optique fait une partie considérable de l'astronomie et de la physique.*¹

ii La méthode analytique en mécanique

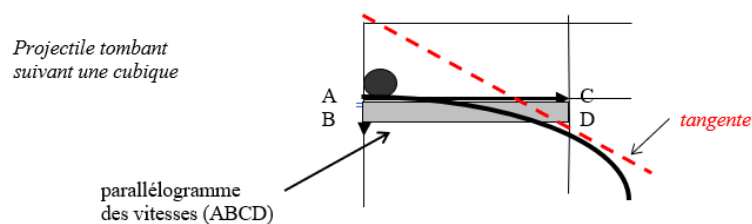
Grâce à la nouvelle analyse, les questions deviennent également moins intraitables en mécanique. Descartes entendait dégager les mathématiques de leur côté trop pratique, mais ce n'était que partie remise. C'était reculer pour mieux avancer. La mécanique profita des avancées de la *géométrie des coordonnées* [coordinate geometry] à laquelle se ramène la géométrie cartésienne :

*Rien ne nous autorise à croire que Descartes ait considéré la méthode de la mécanique comme devant être radicalement distincte de celle de la géométrie des courbes. En maints passages, il affirme au contraire l'unité de la méthode. Il pense que la méthode générale nous est révélée par l'étude des mathématiques, mais, précise-il, « ne l'ayant point assujettie à aucune matière particulière, je me permettrai de l'appliquer aussi utilement aux difficultés des autres sciences que je l'avais fait à celle de l'algèbre [Disc. de la méth., II]». Descartes ne pouvait manquer d'apercevoir les services qu'était susceptible de rendre le calcul algébrique dans l'étude de la mécanique.*²

Descartes se fait un nom en mécanique, mais il n'était pas le seul à mettre en œuvre la nouvelle méthode. Avant que celle-ci ne soit décrite, la mécanique pratiquait l'analyse en cinématique. Cette discipline de la physique étudie le mouvement d'un objet sans se préoccuper de la force qui le cause.

Par définition, la méthode analytique suppose *le problème résolu pour vérifier les conditions qui commandent cette hypothèse*.³ L'inconnu, pris comme donné, est le mouvement observé qu'on veut comprendre. Le mouvement est représenté par une courbe. Comprendre le mouvement revient à chercher comment une telle courbe peut être formée. Comment la courbe emprunte telle ou telle direction. L'étude de la direction du mouvement requiert la détermination de la *tangente* à la courbe. La tangente est la droite qui touche la courbe mais ne la coupe pas. Tout l'art du mécanicien est de ramener la connaissance de la courbe à celle de sa tangente pour en saisir la genèse et la formation.

Au début du XVII^e siècle, Torricelli et Roberval imaginèrent, indépendamment, un procédé qui analyse la courbe d'un mobile quelconque. Le mouvement est décomposé suivant le parallélogramme des vitesses, ABCD, tracé par les mouvements AB et AC. Chacun suppose que la courbe est réellement décrite par un projectile physique. C'est un moyen élégant et rapide pour déterminer les tangentes.⁴



Dans sa *Géométrie*, Descartes entrevoit de déterminer la tangente via la normale qui lui est perpendiculaire en chaque point de la courbe. Il estime par cette méthode résoudre *le problème le plus utile et le plus général, non seulement que je sache, mais même que j'aie jamais désiré de savoir en géométrie*.⁵ La méthode des normales commence aussi par supposer connu le point demandé.

Soit donc, sur la figure (a) le point M où une tangente à la courbe peut être tracée. Si ce point est le point recherché, un cercle de centre N passe en ce point. Ce cercle touche la courbe sans la couper.

¹ Encyclo., art. « Optique », t. 11, Neuchâtel, 1765, p.518.

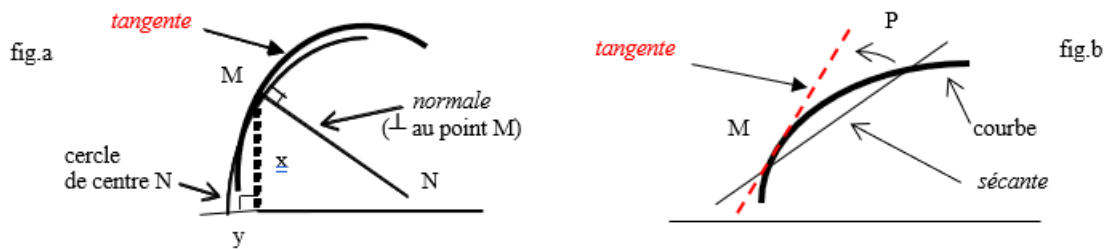
² Pierre Boutroux, *L'idéal scientifique des mathématiciens dans l'Antiquité et dans les Temps modernes* [1920], Paris, Gabay, 1992, p.103. Sur l'expression anglaise, v. Morris Kline, *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, Oxford Univ. Press, 1990, vol. 1, p.314.

³ Jules Vuillemin, *La philosophie de l'algèbre*, Puf, 2^e éd., Paris, 1993, p.7.

⁴ François de Gandt, « Mathématiques et réalité physique au XVII^e siècle », in *Penser les mathématiques*, Paris, Seuil, 1982, p.179. Roberval désignait proprement la tangente comme la touchante (« *tangere* » signifie « *toucher* » en lat.). *Ibid.*, p.179.

⁵ Descartes, *La Géom.*, op. cit., II, pp.33.

Au point supposé M, le rayon NM coupe la courbe à angle droit en raison des propriétés du cercle. On retrouve, par le biais de la normale NM, la tangente cherchée.



La démonstration consiste, ici encore, à faire jouer à l'une des droites (la normale) le rôle d'axe des x et de prendre un bout de la droite horizontale comme axe des y (le segment situé entre le pied de la normale et l'intersection de la courbe et de la droite). Grâce au théorème de Pythagore, il peut établir une équation et la combiner avec l'équation de la courbe pour déterminer les coordonnées du point M.

(Additif d'un lecteur mathématicien)

- Gaspard Monge aussi, à la fin du XVIII^e siècle, utilisera souvent la normale au lieu de la tangente.
- L'une des voies d'approche n'exclut pas l'autre. L'analyse avance sur plusieurs pieds pour progresser.

La résolution du problème de la tangente permet d'identifier un élément caractéristique des courbes. La connaissance des coordonnées d'un point quelconque d'une courbe est insuffisante pour avoir une vue complète de la courbe. Il faut y ajouter la connaissance des normales en tel ou tel point. Etant donnée l'importance du problème, une autre voie sera explorée par Descartes pour trouver la tangente. La figure (b) montre qu'il suffit de faire pivoter la sécante MP autour du point M jusqu'à ce que le point P, qui glisse sur la courbe, se confonde avec M. La tangente passe par M en pointillé...¹

En optique, en mécanique, aussi bien qu'en géométrie, l'analyse nouvelle prouve son efficacité. *Pour résoudre toutes sortes de difficultés*, Descartes entreprend de l'utiliser dans des matières où l'esprit se noie dans la confusion. Ce n'est que par la méthode analytique qu'on pourra avancer *avec plus de facilité et de certitude* dans la connaissance, à commencer par celle des principes du monde. *Touchant les questions qui appartiennent à la métaphysique, la principale difficulté est de concevoir clairement et distinctement les premières notions.*² La difficulté sera levée en changeant de méthode.

Je doute (c'est un fait, que je prends comme effet), j'en infère que j'existe (cause), comme je me suggère ma *Deuxième Méditation*. De la présence de l'idée d'infini en mon esprit (autre fait que je prends également comme conséquence), j'en infère que Dieu existe (cause ou principe), selon le fruit de ma *Troisième Méditation*. Du fait que j'ai un corps et que je sens à travers lui (autre effet ou conséquence), j'en déduis l'existence des choses matérielles (principe), selon ma *Sixième Méditation* :

*Parce que les idées que je recevais par les sens étaient beaucoup plus vives, plus expresses, et même de façon plus distincte, qu'aucune de celles que je pouvais feindre de moi-même en méditant, ou que je trouvais imprimées en ma mémoire, il semblait qu'elles ne pouvaient procéder de mon esprit. Il était nécessaire qu'elles fussent causées en moi par quelques autres choses.*³

L'argument de la *Troisième Méditation* diffère de l'argumentation théologique traditionnelle qui suit l'ordre synthétique. L'idée de Dieu est l'idée d'un être qui possède toutes les perfections (principe) ; or l'existence est une perfection, donc Dieu existe (conséquence).

Contrairement à une vue postcartésienne (Voltaire, Condillac) qui oppose Locke à Descartes, Locke continue autant Descartes qu'il le contredit. Ou plutôt il retourne la méthode de Descartes contre Descartes même. Lorsque Locke examine l'entendement, il l'examine suivant l'ordre de la méthode

¹ V. Jullien, *Descartes. La Géométrie de 1637*, op. cit., p.102 ; J.-P. Collette, *Hist. des math.*, 2, p.12.

² Descartes, *Méditations*, L. à Messrs Les Doyen et Docteurs de la Sacré Faculté de Théologie de Paris, p.258. *Réponse aux sec. objections*, p.389).

³ Descartes, *Médit*, 6, p.321. Texte allégé.

analytique. Il continue de se fonder sur ce que *l'homme aperçoit dans son âme et que son propre sentiment l'y fait découvrir*. A partir de ce sentiment (qui est vécu comme effet), Locke régresse vers *la nature et les fondements de ce qu'on nomme foi ou opinion, par où on entend cet assentiment qu'on donne à une proposition dont nous n'avons pas une véritable connaissance.*¹

b) en philosophie politique

- i Les paramètres en jeu*
- ii Un modèle volontairement grossier qui fait penser*
- iii Place à la contestation*

¹ Locke, *Essai philo. conc. l'entend. hum.*, op. cit., Avant-propos : Dessein de l'auteur dans cet ouvrage, § 3 : Méthode qu'on y observe, p.2.

§18.- L'APPROFONDISSEMENT DE L'ANALYSE PAR LE CALCUL DIFFERENTIEL**a) Une image parlante pour le lecteur :**

Frontispice du *Léviathan* de Hobbes, 35

b) par-delà l'image : les concepteurs

i Descartes et Fermat, 35

ii Galilée et ses disciples, 36

iii Newton, Leibniz sans oublier Pascal, 37

c) Le théorème fondamental de l'analyse, 38**d) de la différentielle à l'équation différentielle**, 40

i On explique davantage, 41

ii Les lois du mouvement rectiligne, 43

iii Trois dernières précisions, 44

e) une équation différentielle du rapport pouvoir/talent, 45

Annexe I, 45

o

a) Une image parlante pour le lecteur

Frontispice du *Léviathan* de Hobbes



b) par-delà l'image : les concepteurs

i Descartes et Fermat

Piqûre de rappel.

Descartes suppose une courbe. Son tracé nécessite la détermination de la tangente qui indique à chaque pas la direction qui doit être empruntée. Rapprochons infiniment deux points de la courbe que coupe une sécante. Au terme du mouvement est le point de la courbe où la tangente peut être tirée.

Fermat considère également deux points voisins sur une courbe. A partir de ces deux points, il conçoit une inégalité de rapports qui implique l'idée d'un maximum et d'un minimum. Cette méthode dite des *extremums* revient encore à joindre progressivement deux points pour déterminer la tangente.¹

Descartes et Fermat raisonnaient avec des procédés différents. En portant leur attention sur deux points séparés par une distance très petite, l'idée d'intervalle infiniment petit apparaît chez nos deux esprits, préfigurant le processus de différentiation. Un expert dira que la méthode analytique de Descartes n'est qu'algébrique ; elle n'utilise pas explicitement la notion d'infinésimal. Cet expert a raison, mais la notion existe à l'état latent dans la physique de Descartes où il envisage le mouvement et son *commencement*. Descartes pense notamment au commencement de la descente d'un corps.²

Tout était donc prêt pour que la géométrie analytique, inventée par Descartes et Fermat, puisse déboucher sur la manipulation de différences infiniment petites. Nous restons dans le cadre de la méthode qui part d'une courbe et cherche à en connaître la construction. Loin d'être abandonné, le raisonnement analytique en sort consolidé. A la marche rétrograde s'ajoute le souci de l'infinésimal.

¹ C. Boyer, *A Hist. of Math.*, 16, p.349; J.-P. Collette, *Hist. des math.*, 2, pp.16-18.

² Descartes, *L. à Constantin Huygens*, 3 oct. 1637, in R. Dugas, *Hist. de la méc.*, p.150. Le destinataire est le père de Christian Huygens.

ii Galilée et ses disciples

Dans ses *Discours concernant deux sciences nouvelles*, Galilée avait eu l'idée d'une multitude de forces très petites pour comprendre la cohésion de la matière. L'idée d'être formée d'un nombre infini d'indivisibles est reprise pour d'autres configurations.

Soient, par exemple, deux cercles concentriques et rigidement liés. Galilée démontre pourquoi la rotation du plus grand cercle entraîne celle de l'autre en raisonnant d'abord sur des polygones emboîtés. Il suffit de relier leurs sommets respectifs pour comprendre. Il suffira ensuite de multiplier à l'infini le nombre de côtés des polygones pour pouvoir raisonner sur les deux cercles plus facilement.¹

Les disciples directs de Galilée, - Cavalieri et Torricelli, - approfondiront ce principe de décomposition. Ce qui est observé peut être découpé en des petites unités par le biais de la *méthode des indivisibles*. Cavalieri, le premier, compara deux figures en divisant chacune en une infinité de lignes parallèles :



Cavalieri supputa, dans l'une et l'autre, une proportion entre l'aire et le nombre de lignes sans prétendre que les figures sont faites de lignes, ni que les volumes sont faits de surfaces, ni les lignes de points. Cavalieri a toujours soutenu avec la plus grande fermeté que les indivisibles ne "composent" pas la figure sur laquelle ils sont découpés.² Son approche est subtile, mais pleine d'ambiguïtés et de paradoxes, comme l'a souligné Torricelli. Deux figures peuvent être inégales ... et comporter chacune un nombre infini de lignes parallèles à une direction donnée. Bigre ! ça coince.

Suivons le raisonnement de Torricelli sur la figure (a). Soient deux parallélogrammes ABCD et CDEF, le premier étant droit, le second penché. Les deux parallélogrammes ont une base commune CD mais des longueurs inégales (CA et CE). On parvient à la même conclusion sur la figure (b) en considérant deux moitiés d'un même et unique parallélogramme partagé suivant la diagonale. La première moitié est subdivisée en une infinité de lignes parallèles à la largeur, l'autre selon la longueur.³

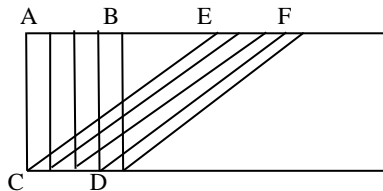


fig. (a)

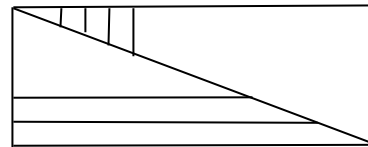


fig. (b)

Cavalieri a eu le tort de comparer des ensembles d'un nombre infini d'indivisibles [...] comme s'il s'agissait encore de grandeurs.⁴ L'épaisseur d'une ligne, qui servirait de norme, n'a pas de sens dans le domaine infinitésimal. Le premier disciple de Galilée n'a pas vu qu'en passant de la ligne à la surface, la mesure change de nature. Un [savant] jésuite, qui ne trouve pas non plus la solution, lui reproche fort justement [...] d'« induire une égalité ou une proportion du plan des lignes à celui des surfaces ». Cependant, l'erreur sur la nature de la mesure ne veut pas dire que les indivisibles ne soient pas mesurables. Galilée lui-même le croyait en les voyant comme des quantités incalculables.⁵

En Angleterre, Wallis surmonta la difficulté. Son *Arithmetica Infinitorum* n'entrevoit plus d'indivisibles qui auraient une dimension de moins que la figure (des lignes à une dimension dans une surface à

¹ Galilée, *Discours et démonstrations mathématiques concernant deux sciences nouvelles* [1638], Colin, Paris, 1970, Ire journée, pp.21-32.

² François de Gandt, « L'évolution de la théorie des indivisibles et l'apport de Torricelli », in *Geometria e Atomismo nella Scuola Galileiana*, Olschki, Firenze, 1992, p.106 ; Egidio Festa, « La notion d' "agrégat d'indivisibles" dans la constitution de la cinématique galiléenne : Cavalieri, Galilée, Torricelli », in *Revue d'histoire des sciences, Etudes sur Galilée*, XLV -2/3, Puf, Paris, avril-sept1992, p.313.

³ F. de Gandt, « L'évolution de la théorie des indivisibles ... », op. cit., p.115.

⁴ Gilles-Gaston Granger, « Philosophie et mathématique leibniziennes », in *Revue de métaphysique et de morale*, Paris, 1981, n°1, p.25.

⁵ Jacques Attali, *Pascal ou le génie français*, Paris, Fayard, 2000, p.328 ; Galilée, *Disc. et démonstr. math.* ..., op. cit., Ire journée, p.32.

deux dimensions). Les surfaces sont décomposées autrement. Ce sont *des tranches infiniment minces de même dimension que la figure* (des mini-parallélogrammes ou des mini rectangles).¹



Wallis remplace les lignes par un nombre infini de mini-surfaces reconstituant la surface du plan. La voie au calcul est ouverte.

On ne saurait sous-estimer ce passage des indivisibles *hétérogènes* (ayant des dimensions différentes) à des indivisibles *homogènes* (ayant même dimension). Les mathématiques sont désormais à même de manier des différences infiniment petites.

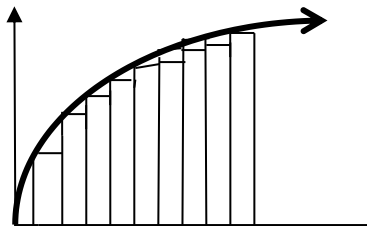
iii Newton, Leibniz sans oublier Pascal

Newton voit dans les différences infiniment petites la trace d'un mouvement imperceptible. La variation du mouvement est si ténue qu'elle est voisine de 0. Newton la représente par un petit 0 penché (\circ) :

Ce n'est pas tant une valeur que quelque chose qui est dans un processus de diminution progressive vers un rien comme la dernière goutte d'eau qui disparaît dans le trou d'un évier. Lorsque Newton contemple une courbe, il la voit comme le mouvement d'un point. Il ne soucie pas de la division par zéro, même s'il utilise les symboles mathématiques qui semblaient l'impliquer.

C'est ce processus, à peine naissant ou mourant, qui constitue l'élément de base du changement. Comme Galilée, Newton pense en physicien. Il a en tête l'idée d'une force qui est la cause du mini-changement. Ce qui importe pour lui est moins la quantité infinitésimale elle-même que le mouvement minuscule qu'elle représente, *not what is but how it moves and changes*.² Leibniz qualifie de *différentielle* la différence infiniment petite qu'il imagine indépendamment de Newton. L'expression évoque, chez l'un comme chez l'autre, l'idée d'un processus créateur au fond des choses.

A l'instar de Wallis, Leibniz montre qu'une surface est découpable en un nombre infiniment grand de rectangles de largeur infime. Elle devient la résultante d'une série de tranches de hauteur variable, chacune différant de la précédente d'un écart infiniment petit. Ces écarts construisent graduellement la courbe.³



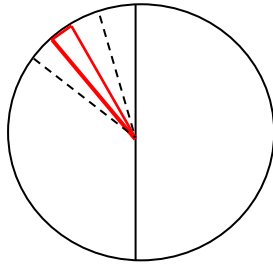
L'œuvre de Leibniz prolonge celle de Wallis, mais Leibniz reconnut que ce furent les travaux de Pascal sur le *triangle caractéristique* qui l'inspirèrent. Les différentielles, qui composent le *differential triangle* (le *triangle caractéristique*) permettent de progresser dans le calcul des surfaces. Pascal divise un quart de cercle en une infinité de mini-portions, à la manière d'Archimède qui découpa, dans l'antiquité, l'intérieur d'un cercle en petits triangles curvilignes pour voir comment étaient liées la circonférence et l'aire d'un cercle.⁴ Mais alors qu'Archimède n'a pas poussé son raisonnement jusqu'au bout en imaginant un découpage infini du cercle (les Grecs, on le sait, renâclaient devant l'infini), Pascal mesure la surface du quart de cercle en assimilant chaque mini-portion à un minuscule triangle rectangle.

¹ F. de Gandt, « L'évol. de la théorie des indiv. et ... », p.107. Pour une trad. anglaise, du livre de John Wallis, v. *The Arithmetic of Infinitesimals* [1656], New York, Springer, 2004, Prop. 13, p..21 s'agissant des figures reproduites.

² Brian Clegg, *A Brief History of Infinity, The Quest to Think the Unthinkable*, London, Robinson, 2003, p.111.

³ G.-G. Granger, « Philo. et math. leibniziennes », p.32 ; B. Clegg, *A Brief Hist. of Infinity*, p.101.

⁴ Hervé Lehning, *Toutes les mathématiques du monde*, Flammarion, Paris, 2017, pp.144-145.

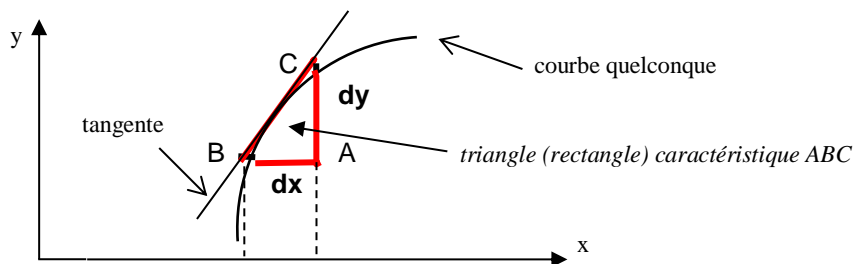


La surface du quart de cercle est égale à la somme des surfaces de minuscules triangles caractéristiques, trilignes rectangles infiniment plats compris entre deux rayons très proches de la courbe et un petit arc de cercle (ou sa tangente).

Sur la fig., le triangle rectangle a été volontairement grossi.

Pascal divise le quart d'un cercle en arcs égaux qui tendront vers zéro quand leur nombre augmentera indéfiniment.¹

Pascal étudia le triangle caractéristique par rapport au cercle. Leibniz l'envisagea pour une courbe quelconque. Le triangle caractéristique devient un triangle rectangle $[ABC]$ ayant pour hypoténuse la corde infiniment petite $[BC]$ joignant deux points très voisins sur une même courbe et dont les côtés de l'angle droit sont parallèles à deux axes de coordonnées rectangulaires, l'un horizontal, l'autre vertical² :



C'est à partir de ces grandeurs infiniment petites que le calcul des différences va prendre son essor. L'expression est de Leibniz. Les distinctions auxquelles avaient commencé à être sensibles les Lumières deviennent des différences permettant des mesures. En posant que la différence infiniment petite de x (mesurée sur l'axe des x) est dx et celle de y (mesurée sur l'axe des y) est dy , leur rapport dy/dx détermine en un point précis le profil de la courbe, c'est-à-dire sa direction :

*Pascal n'a pas vu la détermination de la tangente par la différence des ordonnées sur la différence des abscisses. Leibniz a perçu que la détermination de la tangente à une courbe dépend du rapport des différences en ordonnées et en abscisses lorsqu'elles deviennent infiniment petites.*³

Le rapport des différences des ordonnées et des abscisses, quand $dx \rightarrow 0$, est appelé *dérivée*. Les Lumières ont trouvé l'outil qui détermine la tangente recherchée.

c) Le théorème fondamental de l'analyse

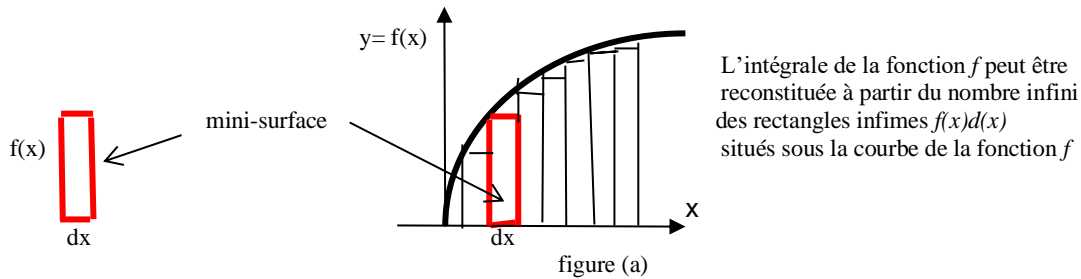
Pour une droite ou une courbe, on connaît maintenant la manière de déterminer la tangente à partir de différences infiniment petites. Le vocabulaire est en place. La méthode est appelée *différentiation*. Les différences infiniment petites dx et dy sont réduites à une simple expression : les différentielles.

Les différentielles permettent de calculer le rapport dy/dx en tout endroit de la courbe et de mesurer l'aire en dessous en *sommant* les ordonnées. Chaque ordonnée est un rectangles très émacié dont la mini-surface est égale au produit $f(x).d(x)$ (ou $f(x)d(x)$), soit l'ordonnée $f(x)$ multipliée par la portion infiniment petite dx . La mesure de l'aire revient à calculer la somme ou l'*intégrale* d'une fonction, $y = f(x)$, reliant x et y , à partir du nombre infiniment grand des rectangles infiniment petits $f(x)d(x)$. Il s'agit d'un nouveau type de *quadrature* par laquelle on parvient à évaluer l'aire totale par une quantité finie.

¹ J. Attali, *Pascal*, op. cit., p.338 ; J.-P. Collette, *Hist. des math.*, 2, p.33. V. Pascal, *Traité des sinus du quart de cercle*, O.C., Gallimard, Paris, 1954, pp.275-282. *Sinus renvoie à divisions égales sur l'arc et n'a a priori rien à voir avec le sinus-ligne trigonométrique, même si les deux notions coïncident ici par hasard.* (Claude Merker, « La pensée des ordres dans les traités sur la roulette de Pascal », in *Mathématiciens français du XVII^e siècle. Descartes, Fermat, Pascal*, Clermont-Ferrand, Centre International Blaise Pascal, 2008, p.210).

² P. Boutroux, *L'idéal scient. des math. dans l'Antiq. et dans les Temps mod.*, op. cit, p.115, n. 3, et p.92.

³ J.-P. Collette, *Hist. des math.*, t. 2, p.33 et 74-75.



Ainsi, ce sont ces différences qui sont *en état de devenir, et non dans un état fixe et statique*, qui servent de matière tant à l'opération de différentiation qu'à celle d'intégration. Selon le *théorème fondamental* du calcul infinitésimal, elles sont liées l'une à l'autre. L'époque reconnaît que le *problème des tangentes* (la différentiation) est *l'inverse du problème des quadratures* (l'intégration) et *vice-versa*.¹ Intégrer, c'est *anti-dériver*, et réciproquement, car dériver, c'est se situer en un point d'une courbe (ou à un instant d'un mouvement) alors qu'intégrer revient à saisir une globalité.²

Rien n'est plus simple que de calculer la surface d'un rectangle de la figure (b), dont on connaît la largeur a et la longueur b . La surface, ou aire du rectangle, est égale au produit a par b , soit ab .

Depuis l'Antiquité, on sait calculer sans trop de problèmes les surfaces de figures délimitées par des segments rectilignes. Le théorème de Pythagore et la géométrie d'Euclide permettent de mesurer la surface des triangles et de tous types de rectangles. Les Grecs avaient fait preuve d'habileté pour contourner les difficultés (ex : Archimède avec la quadrature de la parabole) mais ils manquaient de techniques adaptées pour s'attaquer aux cas moins usités.³

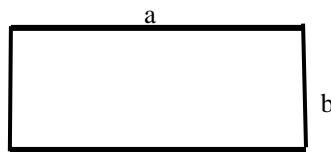


fig. (b)

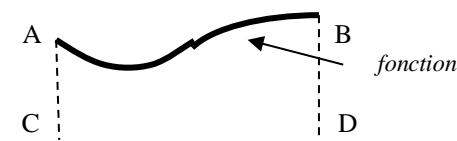
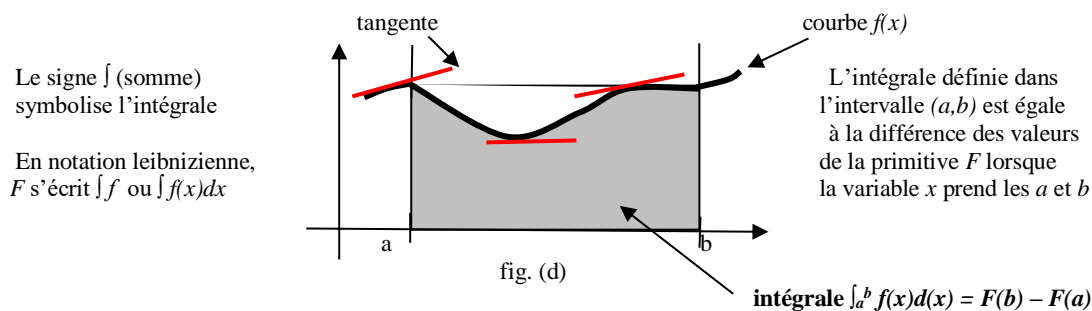


fig. (c)

Considérons la figure (c). L'aire à calculer est celle délimitée par le contour ABCD. Pour que l'*intégration* soit possible, il ne suffit pas de recoller tous les rectangles infiniment petits dont cette aire pourrait être composée. Il faut les recoller en satisfaisant les conditions du tracé de la courbe qu'impose la dérivée (le rapport dy/dx , avec $dx \rightarrow 0$ afin de tendre vers le point x , ou l'instant t si $x = t$).

La *fonction dite primitive* F de la fonction f dont on connaît la dérivée joue le rôle de l'opération qui additionne tous les rectangles infiniment petits *sous la contrainte de respecter la dérivée*. Sur la figure (d), la fonction f est représentée par la courbe $f(x)$ tandis que le résultat du calcul, effectué par la fonction primitive F , est représenté par la surface grisée. Sur la même figure, la dérivée de la fonction f peut elle-même être représentée. En tout point, un arc infiniment petit de la courbe $f(x)$ peut être assimilé au segment correspondant de la tangente. (Il n'a été tracé pour l'exemple que trois tangentes.)



¹ F. de Gandt, « From Indivisibles to Fluxions (The Nuova Geometria and Newton's Methods) », in *Science and Imagination in the XVIIIth Century English Culture*, Unicopli, sans indic. de lieu et de date, p.152; A. Dahan-Dalmedico/J.Peiffer, *Une hist. des math.*, op. cit., p.188.

² Philippe Etchecopar, Nicolas Garric et Norbert Verdier, *Calcul différentiel et intégral*, Paris, Le Pommier, 2004, p.72.

³ Enrique Gracian, *Exploration sans limite. L'infini mathématique*, Paris, Le monde est mathématique, édit. par Cédric Villani, 2013, p.60.

Par définition, une fonction, f , est une relation entre deux quantités, telle que toute variation de la première entraîne une variation correspondante de la seconde. La primitive d'une fonction f est la fonction F dont la dérivée redonne f . La primitive est l'instrument qui permet d'additionner et de regrouper en une entité (un arc de cercle comme chez Pascal).

Une fois dans les mains un tel instrument, rien ne paraît plus simple que de calculer l'aire cherchée. Or, il apparaît à l'expérience que la découverte des primitives, qui devrait faciliter l'addition, ... n'est pas chose facile. Le diable n'est pas ici dans les détails mais dans l'acte qui rassemble ! Pour Leibniz, la différentiation est une opération aisée au regard de l'intégration, difficile, voire impossible.

Jusqu'à présent, la méthode analytique supposait connu ce qui était à rechercher. Cet avantage ne profite pas toujours à l'intégration. A la différence du calcul différentiel, le *calcul intégral* revient à

*trouver une courbe qui n'est plus nécessairement la donnée d'un problème, comme c'était le cas dans la géométrie analytique antérieure au calcul infinitésimal, mais qui est elle-même inconnue.*¹

Contrairement à ce que l'on pouvait espérer, il n'existe pas de règles fixes, valables, pour tous les cas, comme celles dont on se sert pour calculer les dérivées, que ce soit la dérivée d'une somme, d'un produit, d'un quotient, etc. :

*Tout ce que les mathématiciens ont pu faire est de classer les dérivées en plusieurs catégories et d'énoncer pour chacune d'elles une règle particulière. Une des catégories les plus importantes est celle des fractions algébriques, comme $1/(x^2 + 3x - 1)$, $(2x + 3)/(7x^3 + 2x^2 - 4x + 2)$, etc. On peut toujours trouver la primitive d'une telle fraction par des méthodes relativement simples. Une autre catégorie qui a reçu une solution satisfaisante est celle des fonctions où entrent des puissances de x et la racine carrée d'un polynôme du second degré, par exemple : $[(x^2 - 1) dx / \sqrt{(x^2 - 3x + 1)}]$ ou $dx / [(x^3 \sqrt{(x^2 + 5x - 7)})]$. Mais toutes ces catégories de fonctions intégrales ne forment, réunies, qu'une petite minorité dans l'ensemble des fonctions possibles.*²

Une nouvelle astuce nécessaire. A défaut de faire comme si la solution était connue, on procède par détour. La méthode revient presque au même si on réussit. L'intégration s'avère compliquée ? Pas d'affolement. Faisons apparaître, à partir de la dérivée donnée, la dérivée d'une fonction usuelle. On part à nouveau du connu. On part de ce qu'on sait calculer.

d) de la différentielle à l'équation différentielle

La dérivée est une notion centrale dans l'analyse des Lumières en tant que *nombre dérivé* et en tant que *fonction dérivée*.

Le *nombre dérivé* s'interprète de différentes façons : géométriquement, en termes de tangente ; cinématiquement, en termes de vitesse instantanée. On parle de fonction dérivée quand on envisage la dérivabilité sur un intervalle. On passe du local au global en s'intéressant aux variations de la fonction que l'on dérive (par ex. les variations de la fonction vitesse instantanée).

La découverte du rapport inverse entre dérivation et intégration a été décisive dans l'histoire de l'analyse des Lumières. L'intégrale est définie à partir d'une primitive, c'est-à-dire en fin de compte à partir d'une équation différentielle puisqu'il s'agit d'éclaircir la relation entre x , variable, y variable, et la dérivée, y' , non moins variable.

Appelons cette relation Φ . L'existence d'un tel lien est indiquée sous la forme d'une équation, $\Phi(x, y, y') = 0$. Grâce à cette égalisation à 0, les variables x , y et y' sont reliées les unes aux autres de la même façon que x et y le sont dans une droite d'équation $y - ax - b = 0$ ou $y = ax + b$, a étant la pente de la droite. A la différence toutefois d'une équation mettant en rapport les variables x et y , l'équation $\Phi(x, y, y') = 0$ fait intervenir la (fonction) dérivée y' .

Une telle équation est qualifiée de *différentielle*, étant rappelé qu'une dérivée est le rapport entre les différentielles dy et dx , soit dy/dx avec dx tendant vers 0 (ou $dx \rightarrow 0$).

¹ V. J. Itard, « De l'algèbre symbolique au calcul infinitésimal », in R. Taton, *La science moderne de 1450 à 1800*, op. cit., p.250 ; A. Dahan-Dalmedico/J.Peiffer, *Une hist. des math.*, op. cit., p.218.)

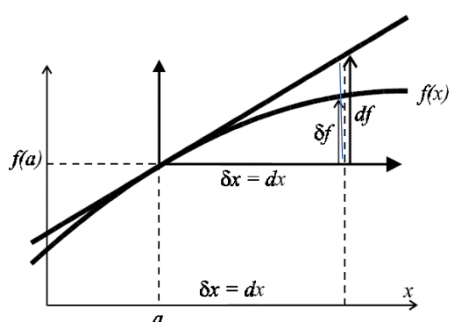
² Georges Durand, *Le calcul intégral*, Paris, Doin, 1926, pp.43-44. Par ex. pour $f(x) = \exp(-t^2)$, $f(x) = \sqrt{(x^3+1)}$ ou $f(x) = (\sin x)/x$, les primitives ne peuvent être exprimées directement. Nous reviendrons sur les fonctions *exp.* (exponentielle) et contenant des *sin* (sinus).

Résoudre une équation différentielle revient à trouver les valeurs de x , de y et de y' qui assurent que $\Phi(x, y, y') = 0$. Une telle équation est dite du 1^{er} ordre en raison de la présence de y' , qualifiée de dérivée première. La résolution d'une équation différentielle du 1^{er} ordre permet de déterminer la trajectoire d'un objet en mouvement rectiligne uniforme comme celle d'un coche tiré par des chevaux gardant la même allure. La vitesse v , c'est-à-dire la dérivée première égale à dx/dt avec $dt \rightarrow 0$, ne varie pas. La solution est la distance parcourue $x = vt$, avec t pour le temps écoulé.

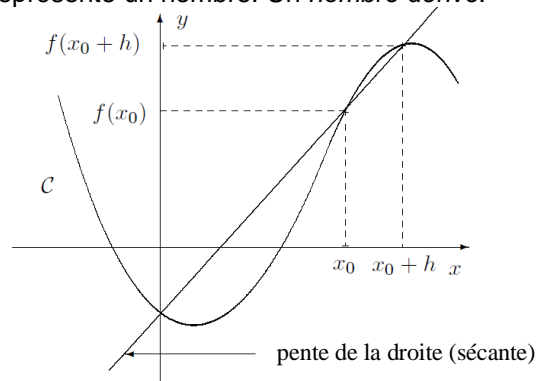
La présence d'une dérivée seconde, y'' , transforme l'équation différentielle du 1^{er} ordre en une équation différentielle du second ordre, $\Phi(x, y, y'') = 0$. La résolution de cette nouvelle équation permet de déterminer des trajectoires plus compliquées, comme celle du mouvement uniformément accéléré, Notre coche roulait à vitesse égale. Imaginons qu'une diligence le dépasse. Les chevaux qui tirent cette dernière doivent augmenter le pas. Pour ne pas trop perturber les voyageurs, le cocher de la diligence veille à changer d'allure progressivement. L'accélération a , imprimée aux chevaux, est constante. L'accélération, i.e. la dérivée de la vitesse ou la dérivée seconde. La solution est la distance parcourue $x = at^2$. Durant ce voyage accéléré, la distance n'est plus apparue proportionnelle au temps mais aux carrés des temps.

i On explique davantage

Nous avons vu la signification géométrique de la différentielle. Soit une fonction représentée par une courbe sans coupure ni coude. La différentielle dx est quasiment égale à la variation d'une fonction δx lorsque cette variation est très petite : $dx \approx \delta x$. Nous avons également visualisé la pente d'une droite. Au point x_0 , la pente a pour expression : $[f(x_0 + h) - f(x_0)] / (x - x_0)$. Lorsque $x \rightarrow x_0$, la pente est égale au rapport dy/dx . Ce rapport détermine la *dérivée*. dy/dx représente un nombre. Un *nombre dérivé*.



interprétation graphique des différentielles df , dy et dx lorsque $dx = \delta x$ est assez petit (dx et $d\delta \rightarrow 0$)



visualisation graphique du nombre dérivé : pente de la droite égale au rapport $[(f(x_0+h) - f(x_0)) / (x - x_0)]$ lorsque $(x - x_0) \rightarrow 0$

Supposons que la fonction soit continue et dérivable en tout point d'un intervalle donné. Nous n'avons plus affaire à un nombre dérivé, mais à une nouvelle fonction, *la fonction dérivée*. Nous passons d'un point de vue local sur la fonction d'origine, prenant en compte un nombre, à un point de vue global considérant l'ensemble des nombres dérivés (l'ensemble des rapports des différentielles dy/dx). Une équation différentielle est une équation reliant une fonction y et sa (fonction) dérivée, y' .

Question : vous parliez de *fonction* puis d'*équation*. Quel lien voyez-vous entre les deux notions ?

Une fonction exprime une relation entre deux quantités, mais une fonction, f , peut donner lieu à une équation, $y = f(x)$. Une équation est une relation *conditionnelle* entre deux quantités prenant la forme d'une égalité. Alors qu'une simple égalité se vérifie (par ex. : $2+2 = 4$), une équation se résout parce que l'une des quantités est inconnue (par ex. : $2+x = 4$). Une telle égalité *n'est valable que pour certaines valeurs de cette inconnue* (dans l'ex., $x = 2$).¹ De même qu'une fonction est une grandeur qui peut dépendre d'une ou de plusieurs variables, une équation peut comporter au moins une inconnue.

Par équation *différentielle*, il faut entendre une relation, non seulement entre deux variables, par exemple x et y , mais aussi entre une ou plusieurs (fonctions) dérivées formées à partir de x et de y .

¹ Denis Guedj, *La gratuité ne vaut plus rien* ..., op. cit., p.289.

Une *dérivée première*, y' , peut donner lieu elle-même, comme toute fonction, à une *dérivée*, une *dérivée seconde*, laquelle peut donner lieu à nouvelle *dérivée*, une *dérivée troisième*, etc.

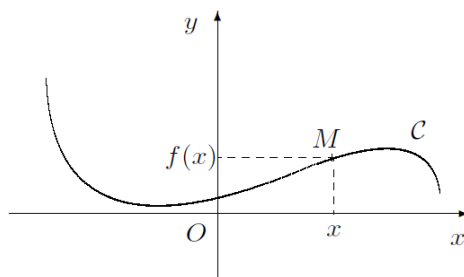
Considérons une seule fonction *dérivée*, la *dérivée première*. L'équation différentielle peut s'écrire sous la forme $\Phi(x, y, y') = 0$, y' étant la *dérivée* de la fonction $y = f(x)$. Le signe d'égalité $= 0$ signifie que les trois variables, x , y et y' sont liées entre elles, puisque le second membre, 0 , de l'équation permet à chacune de ces trois variables de s'exprimer en fonction des deux autres. L'équation Φ fait intervenir à la fois la fonction inconnue y (la courbe recherchée), la variable x (l'abscisse d'un point arbitraire de la courbe cherchée) et la *dérivée* de la fonction, y' (la pente de la tangente à la courbe).¹

Résoudre une telle équation consiste à trouver une fonction $y = f(x)$ qui la vérifie quel que soit x . Cette fonction constitue une (courbe) *intégrale* de l'équation différentielle. Cette dénomination tient au fait que l'intégrale d'une équation différentielle s'obtient le plus souvent par un calcul d'intégrales de fonction (se souvenir qu'une intégrale définie est la somme finie d'une infinité d'éléments infiniment petits).

La recherche des primitives fournit l'exemple le plus simple d'équation différentielle. Trouver les primitives de f , c'est résoudre l'équation différentielle $y' = f(x)$. Cette équation est un cas dégénéré d'équation différentielle. Comme pour les primitives, il y a pléthore d'équations que l'on ne sait pas résoudre explicitement. Il est facile de résoudre par ex. l'équation $y' - 2x = 0$ (voir note infra)², mais il est plus difficile de résoudre des équations, pourtant simples d'écriture, comme $y' = y^2 - x$, $y' = \sin(xy)$, $y' = e^{xy}$.

Une équation différentielle est une équation dont l'inconnue - la solution si elle existe - est une fonction. On ne cherche plus toutes les valeurs de l'inconnue qui satisfont l'égalité (dans l'équation par ex. $2x + 3 = 0$). L'inconnue n'est plus un nombre, mais une fonction *dérivée* qui, comme toute fonction, fait correspondre à chaque point un nombre (*dérivé*). On objectera qu'une équation ordinaire peut comporter plusieurs inconnues (par ex., si k est un réel > 0 , l'équation $x^2 = k$ admet deux solutions : $x = \pm \sqrt{k}$; ainsi $x^2 = 4 \Leftrightarrow x = +\sqrt{4} = 2$ ou $x = -\sqrt{4} = -2$), mais une pluralité de nombres ne suffit pas pour définir une fonction qui à chaque point associe un nombre : par ex., une température sur une carte météo.

Les équations différentielles apparaissent avec le développement de l'analyse qui bute sur le problème de la détermination des tangentes quand les courbes se compliquent... :



Parmi les courbes qui donnent du fil à retordre, figurent la chaînette, la tractrice et la brachistochrone (la chaînette décrit la forme prise par une corde suspendue aux deux extrémités). Les équations différentielles permettront de les retracer. Elles permettront également de comprendre le mouvement du pendule circulaire, le problème du mouvement de deux corps s'attirant mutuellement, celui du mouvement de corps élastiques (tiges, ressorts, cordes vibrantes), etc. Tous ces problèmes, que nous étudierons, suscitent une compétition entre les mathématiciens des Lumières.

Résoudre un problème pour les Bernoulli, Euler, d'Alembert, Lagrange, ... revient souvent à trouver une équation différentielle qui modélise le problème. Le mode de raisonnement qu'emporte cette approche envahit la science nouvelle et tout le savoir de l'époque. Le droit constitutionnel n'échappe pas à cette façon de raisonner comme la mécanique qui, dès le début du XVII^e siècle, n'attend pas d'écrire les équations différentielles en bonne et due forme pour penser dans les mêmes termes.

On ne trouve pas encore, de façon formelle, d'équation différentielle chez Galilée (les équations différentielles font leur apparition en même temps que les *dérivées* avec les travaux de Newton et de

¹ André Delachet, *L'analyse mathématique*, Puf, Paris, 1954, p.22.

² $y' - 2x = 0$ ou $dy/dx - 2x = 0$ ou $dy/dx = 2x$, soit $dy = 2xdx$. En intégrant l'équation, on obtient $\int dy = \int 2xdx$, d'où $y = x^2 + C$ (solution générale de l'équation $y' - 2x = 0$). C est une constante placée du côté de la variable indépendante. Nous comprendrons un peu plus loin le pourquoi de C .

Galilée). Galilée met au point des lois d'évolution (y en fonction de t ; y en fonction de x) sans considérer les forces qui sont à l'origine du mouvement. Cependant, l'étude de ces lois d'évolution montre déjà qu'est en marche également la modélisation sous forme d'équations différentielles qui jouera de plus en plus un rôle fondamental pour éclairer nombre de phénomènes physiques.

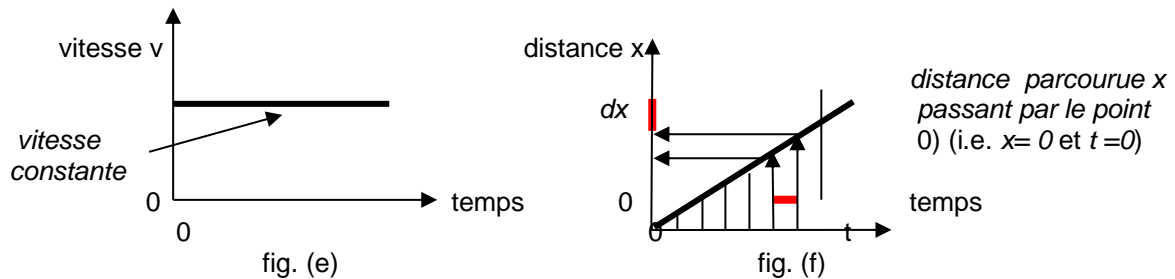
La traduction des lois du mouvement rectiligne en équations différentielles permet de comprendre concrètement ces dernières.

ii Les lois du mouvement rectiligne

Commençons par le mouvement rectiligne uniforme.

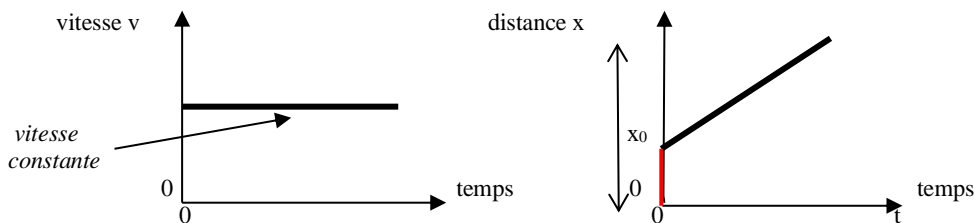
Considérons le mouvement d'un mobile. Il est facile (aujourd'hui) d'en déterminer la dérivée, sachant que la dérivée de ce mouvement est le rapport entre un accroissement (infinitement petit) d'espace parcouru dx et un accroissement (infinitement petit) du temps mis à le parcourir dt , soit le rapport dx/dt . Ce rapport exprime la vitesse v à un instant donné, c'est-à-dire la vitesse *instantanée*. La pente de la courbe représente cette vitesse. Le mouvement étant rectiligne uniforme, le mobile garde une vitesse constante (fig. e). D'où la question : quelle est la position du mobile que donne, à chaque instant t , la fonction $x(t)$? Cette question est celle de la résolution de l'équation différentielle $\Phi(t, x, v) = 0$.

Le problème consiste à déterminer à partir de cette équation la relation entre la distance x , le temps t et la vitesse v . La solution de cette équation est la distance parcourue $x = vt$ en prenant comme origine le point où se trouve le mobile au temps zéro. Cette relation peut être représentée par une droite ayant pour tangente en chaque point la vitesse v (fig. f)). Il s'agit d'une solution *intégrée* (le chemin = l'intégrale de la vitesse par rapport au temps). L'aire comprise entre les points 0 et t sous la droite est mesurée en sommant les infinites petits bouts d'espace dx parcourus au cours du temps t



Un mobile, animé d'un mouvement uniforme, parcourt des distances égales dans des temps égaux.
La distance parcourue est proportionnelle au temps mis à la parcourir (car v a une valeur constante)

L'équation du mouvement peut être obtenue par intégration de la vitesse $v(t)$ constante a pour expression : $x(t) = \int v(t) dt = v(t) \int dt = v(t-0) = vt$ entre 0 et un t donné. Si l'origine n'était le point au temps 0 mais la distance x_0 que le mobile a déjà parcourue, l'équation deviendrait : $x(t) = x_0 + vt$.¹



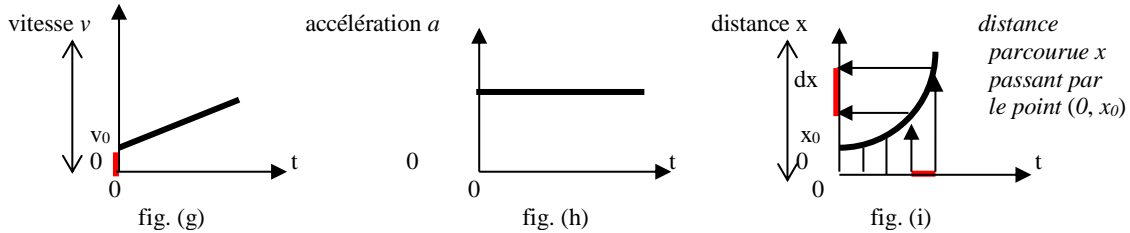
Pour compliquer un peu les choses, considérons le mouvement rectiligne uniformément accéléré.

Ce qui, ici, garde une valeur constante n'est plus la vitesse mais l'accélération, soit le taux de variation de la vitesse par rapport au temps, soit dv/dt , avec avec $dt \rightarrow 0$. Or, comme la vitesse est déjà une

¹ Soit un mobile « animé » d'un mouvement uniforme. Après 4 minutes, le mobile se trouve à 20 mètres de son point de départ. Sa vitesse est donc de $20/4 = 5$. Après un temps t , la distance parcourue x sera : $x(t) = x_0 + vt = 20 + 5t$. Si le mobile se mouvait encore pendant 12 autres minutes dans le même sens, on aurait $x = 20 + 5t = 20 + (5 \times 12) = 80$ mètres. Si le mobile se mouvait en sens contraire pendant 6 autres minutes : $x = 20 + 5t = 20 + (-5 \times 6) = -10$ mètres. V. Jean Nicolas Noël, *Notions de mécanique*, Luxembourg, 1833, p.146.

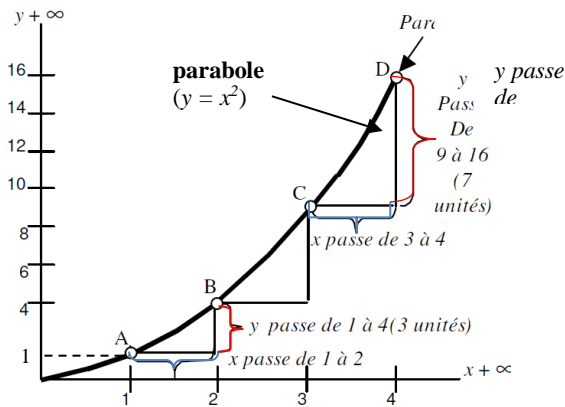
dérivée (la dérivée première, dx/dt , avec $dt \rightarrow 0$), l'accélération n'est autre que la dérivée de la dérivée (première), ou, comme on dit, la *dérivée seconde*, y'' , de la distance par rapport au temps. L'accélération instantanée restant la même, quelle est la trajectoire effectuée ?

L'équation différentielle du mouvement n'est plus du 1^{er} ordre, mais du 2^e ordre en raison de la présence la dérivée seconde. Sa forme est la suivante : $\Phi(t, x, a) = 0$, a étant l'accélération. Le problème inverse consiste à déterminer à partir de cette équation la relation entre la distance x , le temps t et l'accélération a , sachant que a est constant. La solution de cette équation est la distance parcourue $x = a t^2/2 + v_0 t$ en prenant comme origine le point où se trouve le mobile au temps zéro (v_0 est la vitesse initiale, c'est-à-dire la vitesse déjà acquise au temps zéro) (fig. g). Il s'agit d'une solution qui tire parti du calcul intégral en additionnant les minuscules distances dx sur t (fig. i).



L'équation décrivant la droite, tracée en gras rouge et noir sur la fig. (g), est $v = v_0 + at$. Celle décrivant la courbe de la figure (i), s'obtient par intégration : $x(t) = x_0 + \int v dt$ (l'intégrale est égale à l'aire sous la courbe représentative entre les points O et t de l'axe des temps), soit $x(t) = a/2 t^2 + v_0 t + x_0$. Cette équation est la solution de l'équation différentielle précédente qui régit le mouvement ($v = v_0 + at$).¹

L'équation d'un mouvement rectiligne uniforme $x(t) = x_0 + vt$, ou uniformément accéléré $x(t) = a/2 t^2 + v_0 t + x_0$ permet de trouver la position d'un objet en mouvement à tout instant. L'équation est dite *horaire*. La représentation graphique de l'abscisse x en fonction du temps est une parabole :



La parabole est une fonction non « linéaire » (\neq une droite)

La pente, définie comme le rapport entre l'accroissement de y consécutif à un accroissement de x en chaque point, varie à chaque instant en passant d'une valeur de x à la suivante.

Les hypoténuses des divers triangles ajoutés à la figure donnent une idée assez précise de la forme de la parabole. Il n'est pas besoin de faire augmenter x d'une unité entière pour constater les augmentations de la pente (par ex., entre $x=4$ et $x=4,1$, $y (= x^2$ en l'espèce) augmente de 16 à 16,81, soit 0,81.

Si x mesure le temps et y la distance parcourue, on observe que la distance est proportionnelle au carré du temps : une distance 1 d'après une seconde, 4d après 2s, 9d après 3s, etc.

iii Trois dernières précisions

Pour le lecteur qui a besoin plus de détails sur la notion d'équation différentielle, nous lui conseillons de se reporter à l'Annexe I à la fin du présent §18. Cette annexe lui sera utile pour la suite s'il ne maîtrise pas suffisamment le sujet, mais il pourra toujours y revenir. Dans l'immédiat, qu'il poursuive le propos.

¹ Une voiture roule avec une vitesse initiale de 10 m/s sur une route rectiligne. Son accélération est constante (0,8 m/s²). Calculer sa vitesse au bout de 10 secondes. Solution : $v_x = a_x t + v_{0x} = (0,8 \cdot 10 + 10) \text{ m/s} = 18 \text{ m/s}$. Calculer la distance parcourue entre $t_1 = 2$ et $t_2 = 5$ secondes. Soit $x_0 = 0$. Abscisse à $t_1 = 2 \text{ s}$, d'où $x_1 = \frac{1}{2} a_x t_1^2 + v_{0x} t_1 = \frac{1}{2} (0,8 \cdot 2^2) + 10 \cdot 2 = (0,4 + 10,2) \text{ m} = 21,6 \text{ m}$. Abscisse à $t_2 = 5 \text{ s}$, d'où $x_2 = \frac{1}{2} a_x t_2^2 + v_{0x} t_2 = (0,4 \cdot 25 + 10 \cdot 5) \text{ m} = 60,0 \text{ m}$. Distance cherchée : $\Delta x = x_2 - x_1 = 38,4 \text{ m}$. Au moyen de l'équation du mouvement $x(t) = a/2 t^2 + v_0 t + x_0$, le mouvement du véhicule est déterminé dès que l'on connaît l'accélération, la vitesse et les abscisses en t_1 et t_2 .

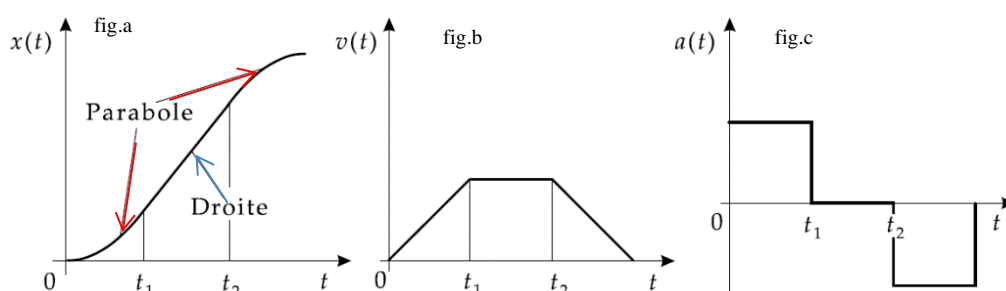
e) une équation différentielle du rapport pouvoir/talent

Annexe I

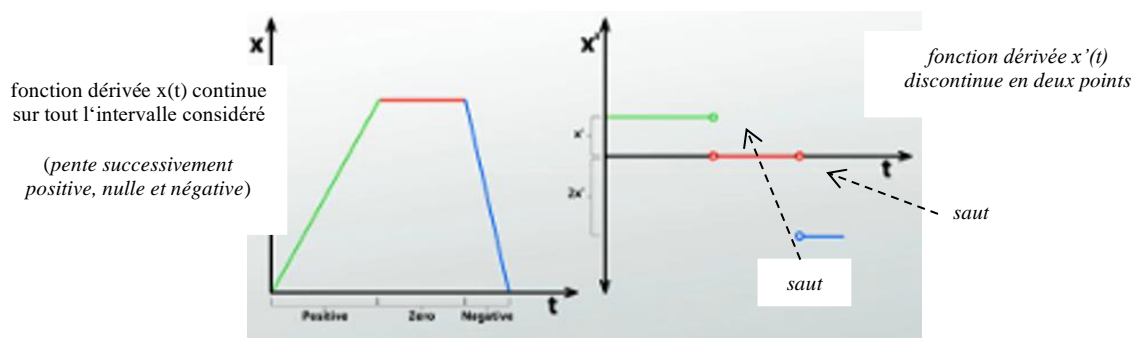
Une idée plus imagée de la notion d'équation différentielle

1/ Il ne faut pas oublier que la résolution d'une équation différentielle requiert la détermination non seulement d'une fonction f mais aussi d'un intervalle tel que f vérifie l'équation sur cet intervalle. Si aucune précision n'est donnée sur l'intervalle I , on entend qu'il s'agit de $I = \mathbb{R}$ (ensemble des réels).

Retrouvons notre mobile. Suivant l'intervalle considéré, le mouvement (et donc l'équation différentielle qui le gouverne) peut varier. Soient les courbes (intégrales) représentatives des solutions des différentes équations différentielles décrivant le parcours $x(t)$, la vitesse $v(t)$ et l'accélération $a(t)$ en fonction du temps. Le mouvement est d'abord uniformément accéléré, puis uniforme, enfin uniformément décéléré (la décélération est une diminution de vitesse résultant d'un freinage) :



2/ La fonction f est donc une fonction d'une équation différentielle sur un intervalle, mais Il faut savoir aussi que résoudre une telle équation revient à en trouver toutes les solutions sur ce même intervalle (ou des morceaux d'intervalle où la fonction est dérivable, ce qui n'est pas le cas pour les fig. b et c aux instants t_1 et t_2 où les fonctions $v(t)$ et $a(t)$ sont continues sans que leurs fonctions dérivées respectives le soient en ces points) Voir par ex. la fonction $x(t)$ infra :



La fonction $x(t)$ n'est pas dérivable sur tout l'intervalle (la fonction $x'(t)$ est discontinue)

Revenons à l'équation différentielle $y'-2x=0$. En procédant à son intégration, on trouve : $y = x^2 + C$ (voir note précédente). Il s'agit d'une solution *générale* puisque l'équation $y = x^2 + C$ représente un ensemble de solutions de l'équation différentielle $y'-2x=0$. Nous sommes en présence, non d'une seule courbe intégrale (ou *chronique*) mais d'une famille de courbes solutions de cette équation.

La résolution d'une équation différentielle sur un intervalle consiste à pouvoir dessiner toutes les fonctions solutions de cette équation, représentées par ces courbes, sur cet intervalle. Suivant la valeur de la constante C , la solution peut être $y = x^2 + 4$, $y = x^2 + 2$, $y = x^2$, $y = x^2 - 2$, etc. (voir fig. a) :

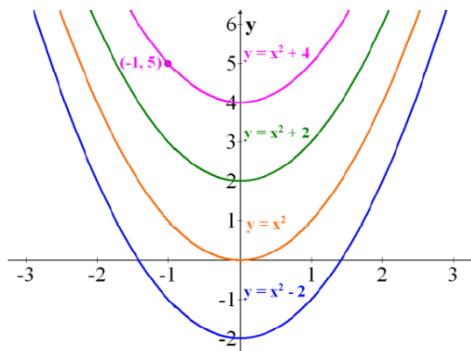


fig. a

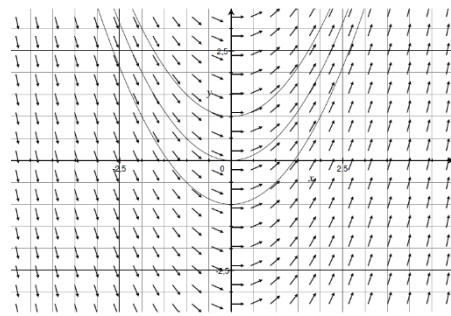


fig. b

champ de de tangentes (ou champ de directions, associé à une équation: chaque tangente indique elle-même une direction)

Que le lecteur ne croie pas que nous nous égarons dans le dédale des mathématiques qui semble sans rapport avec notre sujet. Il aura la surprise de retrouver la fig.b dans la partie de notre travail consacrée à l'interprétation constitutionnelle (§45) ainsi que lors de l'étude de la notion de *potentiel* en physique et en mathématiques et de ses relations en droit. (§54)

Chaque courbe solution est une solution *particulière* de l'équation différentielle $y' - 2x = 0$. Par exemple, la courbe passant par le point $(-1,5)$ est la courbe représentative de la solution particulière $y = x^2 + 4$. En effet : $5 = (-1)^2 + C$ ou $5 = 1 + C$, d'où $C=4$. Le point $(-1,5)$ est appelé *la condition initiale*. Le point $(-2,2)$ peut être considéré comme une autre condition initiale qui permet de trouver la valeur de C et donc de déterminer la solution particulière $y = x^2 + 2$.

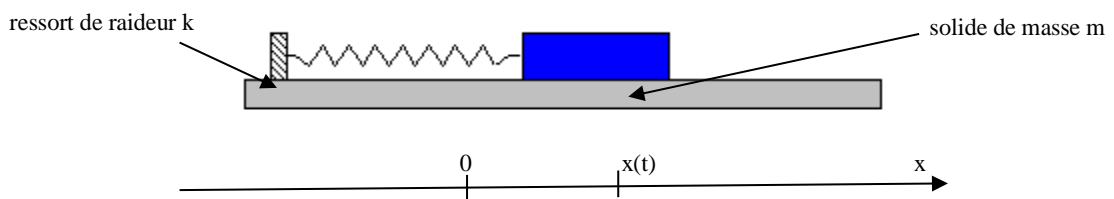
Il y a autant de solutions particulières que de conditions initiales différentes. Les courbes des fonctions qui sont solutions de la même équation différentielle (ici, $y' - 2x = 0$) ne se rencontrent jamais, sauf s'ils confondus. Le début du XIX^e siècle garantira ce résultat en démontrant que pour toute condition initiale $y(x_0)$, il existe une unique solution de l'équation différentielle vérifiant cette condition initiale.

Pour deviner l'allure des solutions sans les calculer, on peut esquisser l'équation différentielle $y' = f(x,y)$ en associant à chaque point (x,y) du plan un petit segment de pente $p = f(x,y)$. Si $y' = 2x$, la pente sera $2x$. De cette façon, on définit *un champ de tangentes* associé à cette équation. Toute solution de l'équation est alors tangente en chacun de ses points au segment correspondant (un petit vecteur tangent à la courbe de y). Au point $x=1$, la pente du segment sera 2 ; au point $x=2$, elle sera de 4 ; etc. (voir fig. b). Nous avons une idée des directions sans avoir une expression explicite des solutions.

3/ On appelle *ordre* d'une équation différentielle l'ordre de la dérivée la plus élevée figurant dans l'équation. Si la dérivée est y' , l'équation différentielle est dite *du premier ordre*; si la dérivée est y'' , l'équation différentielle est *du second ordre*, et ainsi de suite.

Le principe fondamental de la dynamique, entrevu par Galilée, dit que tout point matériel de masse m auquel on applique une force constante de grandeur F se meut d'un mouvement uniformément accéléré d'accélération a . Si $x(t)$ est la fonction donnant la position du mobile en fonction du temps t sur une droite, l'accélération a est la dérivée seconde de cette fonction, soit $a = x''(t)$. Explicitée par Newton, l'intuition galiléenne de la dynamique s'écrit $F = ma$, soit $F = mx''(t)$. Il s'agit d'une équation différentielle du 2^e ordre dont la solution est la fonction $x(t)$ décrivant le mouvement de la particule.

Imaginons un mouvement d'un mobile attaché à l'extrémité d'un ressort se déplaçant sur un axe horizontal. Soit $x(t)$ la position du mobile à l'instant t . On sait que l'accélération est la dérivée seconde $x''(t)$ de x par rapport au temps. Par ailleurs, la force exercée par le ressort est proportionnelle à son allongement et dirigée vers la position d'équilibre. Si cette dernière se trouve en $x=0$, la force s'écrit $F = -kx(t)$, où k est une constante qui mesure la raideur du ressort. La loi de Newton (la 2^e loi du mouvement de ses *Principia*) se traduit en $-kx = mx''(t)$, soit $x'' + k/mx = 0$, où m est la masse du mobile.



Pour trouver la fonction qui vérifie l'équation différentielle du second ordre $-kx = mx''(t)$, il faut trouver la fonction $x(t)$ qui

représente le mouvement du mobile attaché au ressort. Veut-on obtenir une solution unique à une telle équation différentielle d'ordre 2, l'équation elle-même ne suffit pas.

Il faut préciser non seulement dans quel domaine on cherche la solution (ici, l'intervalle de l'axe des réels), mais aussi la valeur de la fonction ou de ses dérivées en un ou plusieurs points. A défaut de déterminer ces conditions (en l'espèce, deux conditions initiales : la position x_0 et la vitesse v_0 du mobile), plusieurs solutions demeurent possibles.

Reprenons l'exemple du mouvement rectiligne uniformément accéléré. $x(t) = a/2 t^2 + v_0 t + x_0$. Si $x_0 = x(0) = 0$, et si $v_0 = v(0) = 0$, la solution de l'équation différentielle $x'' = d^2x/dt^2 = a$ est la fonction $x(t) = 1/2 at^2$.

L'équation $x'' + x = 0$ (le cas de notre ressort) a une infinité de solutions, toutes de la forme $x(t) = A \cos t + T$ où A et T sont des constantes (la fonction cosinus décrit le mouvement oscillant du ressort de période 2π , c'est à dire que pour tout réel x , on a $\cos(x + 2\pi) = \cos x$). Pour déterminer A et T , il faut, aussi connaître la position et la vitesse initiales en spécifiant la valeur de x et de x' à un instant $t=0$.¹

Les conditions imposées au temps $t=0$ sont proprement des *conditions initiales*, mais on connaît parfois la valeur de x à deux instants différents t_1 et t_2 . On parle dans ce cas de *conditions aux limites*. Ces conditions peuvent ne pas avoir trait au temps. Dans l'étude d'une corde vibrante attachée aux extrémités, le déplacement aux points extrêmes est nul quel que soit le temps t . La condition initiale s'accompagne d'une condition aux limites (la stabilité de la corde aux extrémités). Idem dans l'étude de la diffusion de la chaleur d'une barre (les extrémités sont maintenues à température constante).

Toutes ces notions d'équation différentielle, de conditions initiales et de conditions aux limites prennent naissance et se développent à l'époque des Lumières (les années 1450 et 1830 sont les conditions aux limites de l'épistémè considérée). Ces notions emportent des modes de raisonnement spécifiques. Comme les autres notions d'analyse, ce sont des raisonnements similaires qui permettent de comprendre le droit constitutionnel et son évolution.

(question au vol)

- Comment pouvez-vous imaginer des équations différentielles en droit alors que vous êtes en peine d'imaginer une dérivée première, et encore plus seconde ! A aucun moment, une équation différentielle ne peut servir dans un domaine paradoxalement aussi indomesticable et de paramètres multiples dont le nombre lui-même ne cesse de changer. Comment prétendez-vous maîtriser la politique !

- Je le répète. L'objectif n'est pas de « calculer » un nombre dérivé, une tangente en un point. Nous nous contentons de parler de dérivée première, de tangente ou d'orientation sans plus de précision. Nous en retiendrons pareillement de la dérivée 2nde l'idée, **la production, d'un effet d'accélération**, sans ignorer qu'un tel phénomène peut varier, non seulement en droit constitutionnel mais en droit pénal (par ex. une procédure d'accusation peut s'accélérer ou ralentir dans le cadre d'un dossier).

¹ Maurice Mashaal, *Les équations différentielles*, in La Recherche, Paris, 1996, n°284, p.110.

§ 19.- LA GENERATION DE LEVIATHAN ET SA PERPETUATION

a) Le raisonnement différentiel

b) Le raisonnement intégral

- i Une chose qui fait sens*
- ii Un résultat qui a sa cohérence*
- iii Objection réitérée du spécialiste*

c) La recherche de l'Etat idoine

- i Quel régime politique adopter pour Léviathan ?*
- ii Repérer la « primitive-Etat » existante*
- iii Varier les bornes de « l'intégration » spatiale*
- iv Varier les limites temporelles de l'exécutif*
- v Remarque sur le bonheur qui soulève l'objection*

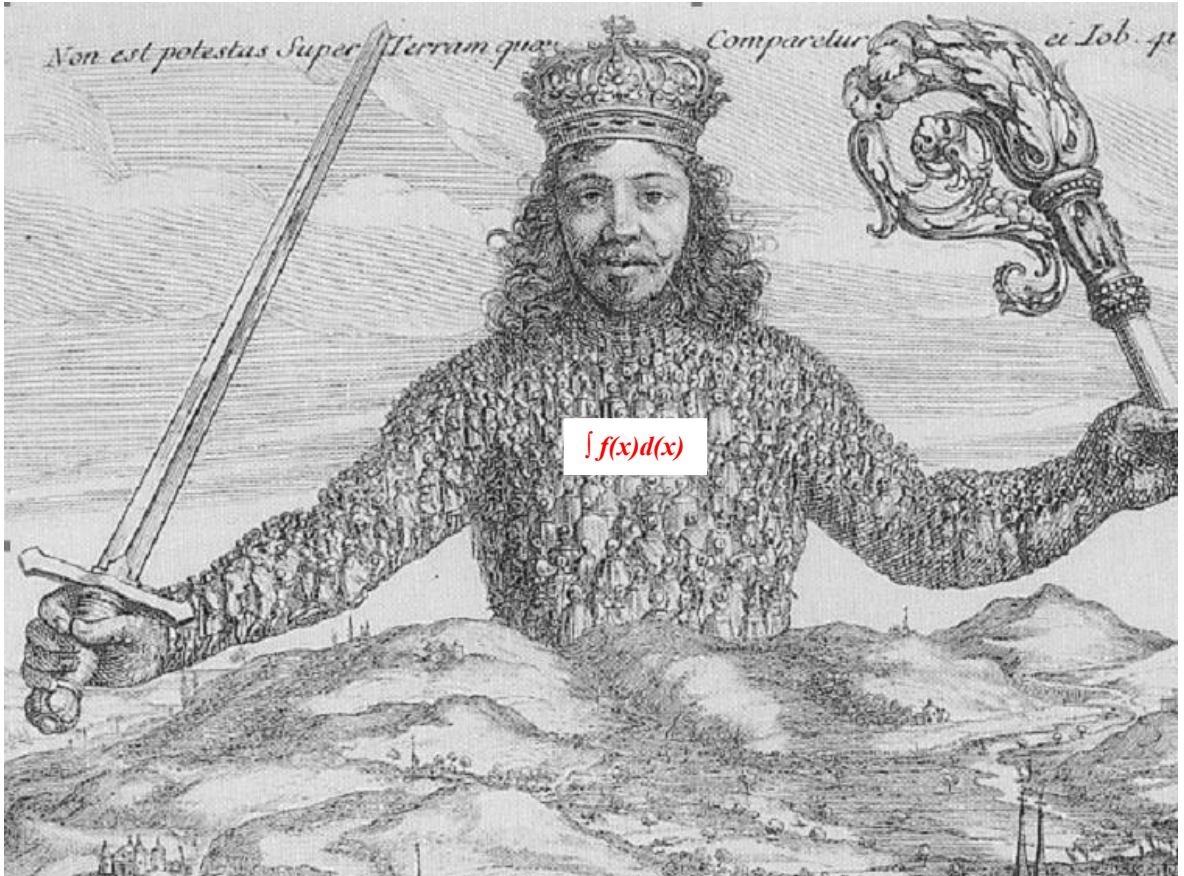
Frontispice de Léviathan avec le signe intégral, 49

Annexe, 50

◦

Frontispice du *Léviathan* de Hobbes

(en gros plan ; le signe de l'intégrale est apposé par nous)



« *Non est potestas super terram qua comparetur* » (in Job, 41)

(Il n'y a pas de puissance sur terre qui soit comparable)

Annexe

La construction des logarithmes par comparaison de mouvements différents à l'âge des Lumières

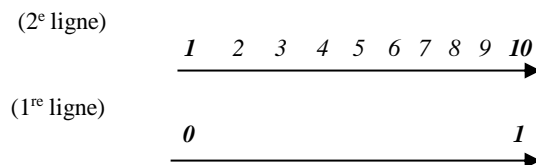
La création des logarithmes revient à Néper au début du XVII^e siècle :

Le problème à résoudre est le suivant : on veut faire correspondre une progression géométrique (par exemple de base 10, ce qui n'est pas le cas chez Néper) et une progression arithmétique :

$$\begin{array}{cccccc} 1/100 & 1/10 & 1 & 10 & 100 & 1000 & [2^{\text{de}} \text{ ligne}] \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & [1^{\text{re}} \text{ ligne}] \end{array}$$

L'intérêt pratique vient de ce que la progression du haut se fait par multiplication, celle du bas par addition. Mais le but ne sera atteint que si l'on peut considérer les deux progressions comme des réalités continues, qui gardent un sens pour les valeurs situées entre les nombres que l'on a écrits. Il faut prouver par interpolation quelle valeur de la suite arithmétique correspond à une valeur quelconque dans l'autre suite (que 3 soit le logarithme de 1000 n'est pas très intéressant ; par contre, on aimerait savoir à quel nombre en bas correspond 687 en haut).¹

Néper fait correspondre deux graduations, chacune ayant une échelle différente. Il imagine des déplacements continus sur deux droites parallèles, selon un mouvement uniforme sur la première ligne (par exemple, entre 0 et 1) et avec une vitesse décroissante sur la seconde ligne (par exemple, entre 1 et 10). Un des mouvements doit être décéléré afin de maintenir la correspondance, non seulement entre les points de départ (0 et 1) mais aussi entre les points d'arrivée (10 et 1) :



L'espace parcouru sur la 1^{re} ligne (de 0 à 1) est le logarithme de celui parcouru sur la 2^{de} (de 1 à 10).

Bien qu'il ne les mette pas en contact, Néper combine deux mouvements à vitesses différentes à la manière de Galilée reconstituant le mouvement uniformément accéléré à partir de la suite naturelle des nombres et d'une autre série (la suite des carrés). (attendre notre §24)

La coïncidence des mouvements permet de calculer le rapport des déplacements à un instant donné. Ce nouveau type de relation fonde le logarithme.

Alors que, dans le mouvement uniformément accéléré, le nombre suit la succession des carrés en répondant au nombre qui suit une progression arithmétique, le logarithme s'impose comme le nombre y qui suit une progression arithmétique en répondant au nombre, x, qui suit une progression géométrique. En passant par le logarithme, on simplifie les calculs en évitant les nombres élevés !

La référence au temps (et à la vitesse) disparaît dans la notion de logarithme telle que l'appréhende l'Encyclopédie, mais d'Alembert rappelle que cette notion est toujours au croisement de « deux espèces de progression qui [lui] ont donné naissance ». Il donne lui-même l'exemple très simple :

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 4 & 8 & 16 & 32 & 64 & 128 \dots (\text{progression géométrique de raison } \times 2) \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \dots (\text{progression arithmétique de raison } +1) \end{array}$$

Les termes de la progression inférieure sont les logarithmes des termes de la progression supérieure. 0 est le logarithme de 1, 1 le logarithme de 2, 2 le logarithme de 4, et ainsi de suite.² L'époque en est venue à l'idée que le logarithme est une fonction définie et continue pour les valeurs positives de la variable x. De façon technique, on parlera de fonction logarithmique y, telle que $y = \text{logarithme de } x$.

L'intérêt pratique de comparer le mouvement de multiplication et le mouvement d'addition n'est atteint que

si l'on peut considérer les deux progressions comme des réalités continues., qui gardent un sens pour les valeurs situées entre les nombres que l'on a écrits. Il faut pouvoir trouver par interpolation quelle valeur de la suite arithmétique correspond à une valeur quelconque dans l'autre suite (que 3 soit le logarithme de 1000 n'est pas très intéressant ; par contre, on aimerait savoir à quel nombre en bas correspond 687 en haut).³

On comprend que, **dans un système de coordonnées, une échelle log-log par ex., permet de comprimer leur étendue.**

¹ François de Gandt, « Mathématiques et réalité physique au XVII^e siècle », in *Penser les mathématiques*, Seuil, Paris, 1982, pp.183-184.,

² *Encyclopédie*, art. « Logarithme », t. 9, Neuchâtel, 1765, p.630.

³ F. de Gandt, « Mathématiques et réalité physique au XVII^e siècle », p.184.

Deuxième leçon :

§ 20. La naissance du droit constitutionnel (du contrat social à la séparation des pouvoirs), 51.- § 21. Première réponse à des objections, 52 - § 22. *Annexe* : Portrait de John Locke

§ 20.- LA NAISSANCE DU DROIT CONSTITUTIONNEL (du contrat social à la séparation des pouvoirs)

a) Un contrat au soutien d'autres contrats

- i Le Slade's case*
- ii Le rapport 1/∞*

b) La loi de Locke

- i Retour sur Hobbes*
- ii Locke et le confort*
- iii Le rapport à Galilée*

c) La limite de rupture

- i De mal en pis*
- ii Le rapport à Newton*

d) La constitutionnalisation du pouvoir

- i La mise en orbite du boulet de canon*
- ii La régulation du pouvoir ex-orbitant*

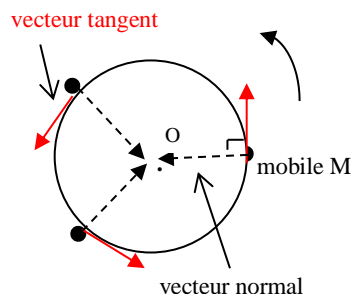
Annexe II, 51

○

Annexe II

Le mouvement circulaire uniforme

Soit \mathbf{v} un vecteur (écrit en gras) et $||\mathbf{v}||$ sa norme (sa longueur). Il est équivalent d'écrire : $||\mathbf{v}|| = \sqrt{(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})}$. Si $||\mathbf{v}||$ est constant, alors $\sqrt{(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})}$ est constant, i.e. $||\mathbf{v}||$ constant $\Leftrightarrow (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})$. Dérivons le produit $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})$, soit $d(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})/dt = d\mathbf{v}/dt \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot d\mathbf{v}/dt = 2 \mathbf{a} \cdot \mathbf{v}$, sachant que \mathbf{a} est le vecteur accélération. Si \mathbf{v} est constant, \mathbf{a} est nul. Autrement dit, $||\mathbf{v}||$ constant $\Leftrightarrow \mathbf{a} \cdot \mathbf{v} = 0$. Le vecteur accélération \mathbf{a} est perpendiculaire au vecteur vitesse \mathbf{v} , c'est-à-dire au vecteur tangent qui n'est autre que la dérivée du vecteur accélération. Dans le cas du cercle de centre O et de rayon \mathbf{OM} , on a en tout point : $\mathbf{v} \perp \mathbf{OM}$. Douterait-on que les rayons sont égaux, on sait que le rayon de courbure $r = ||\mathbf{v}|| / ||\mathbf{a}||$. Or $||\mathbf{v}||$ et $||\mathbf{a}||$ sont constants. Donc $r = r$.



En chaque point du cercle de centre O, on peut tracer un **vecteur tangent** au cercle. Tous les vecteurs tangents sont de même grandeur, mais au même point, il existe une accélération constante portée par le vecteur normal **OM**.

Dans le mouvement circulaire uniforme, la norme du vecteur vitesse reste la même, mais sa direction varie au cours du temps.

Dans le mouvement rectiligne uniforme, longueur - et direction - ne changent pas.

§ 21.- REPONSES A DES OBJECTIONS EVENTUELLES

- i Première objection*
- ii Deuxième objection*
- iii Troisième objection*

Annexe I, 52

○

Annexe I

Petits calculs à propos du lancer d'un corps

Soient y_0 (hauteur initiale) = 15 m, v_0 (vitesse initiale) = 10 s, et $a = -g = -9.8 \text{ m/s}^2$ (g est l'accélération occasionnée par la gravitation terrestre : en 1 s, la vitesse atteint 9,8 m ; en 2 s, 2 fois plus, en 3 s, 3 fois plus, etc ; $g \approx 10 \text{ m/s}^2$ pour simplifier).

- **calcul de la hauteur maximale** : j'insère dans l'équation (1) les données, soit $y(t) = 15 + 10t - 5t^2$ avec $v(t) = dy/dt = 10 - 10t$. A cette hauteur, $v = 0$, d'où $0 = 10 - 10t$, soit $t = 1s$. L'objet atteint cette hauteur en 1 seconde. D'où $y(1) = 15 + 10 \cdot 5 = 20 \text{ m}$

- **calcul du point de chute lorsque l'objet frappe le sol** : dans ce cas, $y_0 = 0$ si je considère ce niveau comme l'origine, soit $0 = 15 + 10t - 5t^2$, d'où $t^2 - 2t - 3 = 0$ et $t = (2 \pm \sqrt{4 + 12})/2 = (2 \pm 4)/2 = -1$ ou 3. Deux réponses sont proposées : -1 s ou 3 s. Je choisis 3 s. Le point de chute est fixé sur l'axe $x(t)$ à 3 s du point d'origine x_0 .

A défaut de connaître t , je peux recourir à l'équation (2), soit: $v^2 = v_0^2 + 2a(y - y_0)$. En insérant les données disponibles, on a : $0^2 = v_0^2 + (-2g)(y - y_0)$, d'où $y - y_0 = v_0^2/2g = 10^2/20 = 5 \text{ m}$. La hauteur maximale $y = y_0 + 5 = 15 + 5 = 20 \text{ m}$. Avec la même équation (2), je peux également connaître **la vitesse finale au point de chute** en résolvant $v^2 = v_0^2 + (-2g)(0 - 15)$.¹

§ 22.- PORTRAIT DE JOHN LOCKE

B/ L'origine d'où sourd la puissance

§ 23.- Une fascination nouvelle, 52. § 24.- La puissance du nombre, 53. § 25 - La série de puissances, 71. § 26.- L'idée d'auto-engendrement, 86. § 27.- De la puissance individuelle au corps social, 87.

§ 23.- UNE FASCINATION NOUVELLE

- i La Providence hors course*
- ii Eluder la violence en opposant la puissance à la puissance*

¹ oyc.yale.edu/physics.

§ 24.- LA PUISSANCE DU NOMBRE

1/ Le concept de générateur

- i Le nombre entre en scène*
- ii Le triangle arithmétique, 54*
- iii Nombre et opération,*

2/ Le pavage et le pliage de l'espace, 56

- i Le pavage de l'espace, 56*
- ii le pavage de l'Etat*
- iii Le pliage de l'espace et des documents*

Annexe I, 57

3/ La pluralité des dimensions

a) La pensée bidimensionnelle

b) La Géométrie de Descartes, 58

c) Les dimensions pouvoir et talent,

- i Dans un plan*
- ii Dans un espace à n-dimensions*
- i ii Nature, principe et objet chez Montesquieu*
- iv Une « variété » mathématique dans l'Esprit des lois*
- v La cohérence anglaise*
- vi Une combinaison de mouvements différents*

Annexes II, II, III, IV et V, 60

4/ Une conception moderne du mixte

a) Le mixte en Grèce

- i La métaphore du tissage chez Platon*
- ii L'idée de croisement chez Aristote*

b) Le mixte chez les Modernes

- i Un tableau à double entrée où l'ordre des termes importe*
- ii Mouvement uniforme & mouvement uniformément accéléré, 64*

c) Le mélange des genres, 65

- i Le croisement des « genres » différents, 65*
- ii L'unité de composition, ou de nature, de la pensée et de la matière*

Addendum :

α) L'esprit des lois des formes de gouvernement et les lois des gaz parfaits des Lumières

Addendum (suite)

β) La portée de l'analogie

entre les trois formes du gouvernement de Montesquieu et la loi des gaz parfaits

Annexe VI, VII, 69

1/ Le concept de générateur

i Le nombre entre en scène

ii Le triangle arithmétique

La possibilité de sortir du système décimal ouvrit la voie à la numération binaire qu'inventera Leibniz. Dans la science des Lumières, Pascal demeure une source d'inspiration sans pareil pour donner une idée de *génération des nombres* à partir d'autres nombres. On trouve cette expression dans sa présentation du triangle arithmétique dont la construction débute ainsi :

1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	
1	3	6	10		
1	4	10			
1	5				
1					

Etc. La méthode est simple et itérative : tout nombre, inscrit dans une *cellule*, est la somme des deux cellules qui la précède horizontalement et verticalement. (ex : $2 = 1 + 1$; $3 = 1 + 2$; ... $15 = 5 + 10$ ou $10 + 5$; ...). Chaque cellule est au croisement d'une *rangée* et d'une colonne (*rang perpendiculaire*). La ligne oblique qui rejoint le début d'une rangée et le début d'une colonne de même rang appartient à la base du triangle formé, par exemple, des nombres 1, 3, 3, 1. La ligne oblique suivante constitue la base du triangle, 1, 4, 6, 4, 1. Il y a autant de triangles que de bases.

Le *triangle arithmétique* était connu en Chine ancienne au XI^e siècle, dans le monde arabe au XII^e, et en Occident au XVI^e.¹ L'approche de Pascal est plus systématique. Elle met davantage en lumière les propriétés d'un tel triangle. Pascal en tire 19 *conséquences* dont la 5^e:

*En tout triangle arithmétique, la somme des cellules de chaque base est double de la base précédente.*²

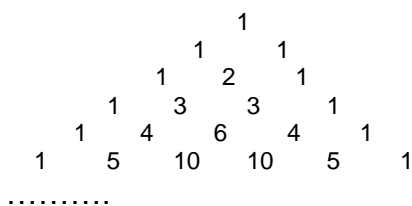
Pour s'assurer du bien-fondé d'une formulation aussi générale, Pascal se propose de calculer la somme des entiers de la $n^{\text{ième}}$ base. Au vu du triangle arithmétique, il apparaît que la somme de la base 1 est 2 ($=1+1$), soit 2^1 , que celle de la base 2 est 4 ($=1+2+1$), soit 2^2 , que celle de la base 3 est 8 ($=1+3+3+1$), soit 2^3 , que celle de la base 4 est 16 ($=1+4+6+4+1$), soit 2^4 . A partir de cette première évidence, on doit conclure que la somme de la base n est 2^n et celle de la base $n+1$ est $2^{n+1} = 2^n \times 2$.

Pascal découvre un processus de fabrication des nombres par eux-mêmes. Comment pourrait-on croire que ce processus soit un caprice du Ciel ? L'homme intervient en mettant au point une nouvelle forme de raisonnement, *le raisonnement par récurrence*, approprié aux entiers naturels. Ce raisonnement consiste à passer du cas n (c'est-à-dire la base n) au cas $n+1$.

Le raisonnement par récurrence permet de tester la validité d'autres sommes : celle des n premiers entiers naturels ou celle des n premiers impairs, etc. La présentation du triangle arithmétique sous la forme d'un triangle isocèle permet de visualiser ce développement :

¹ « Pascal et les nombres », in Pour la science, numéro spécial consacré à l'œuvre de Pascal, Paris, nov.2003, p.25.

² Pascal, *Traité du triangle arithmétique* [1665, publié à titre posthume], in O.C., op. cit., p.99.



Le processus est déclenché à partir de ce que Pascal appelle *le générateur du triangle* (en l'espèce, l'unité, 1, ou plutôt l'ensemble des 1 ; si on remplace 1 par un autre nombre, par ex. un nombre premier, on obtiendra un autre triangle avec d'autres propriétés ; il y a des variantes). Tous les autres nombres sont *forcés*. Comme on l'écrit aujourd'hui, le mathématicien *combine plusieurs nombres pour en engendrer un nouveau, inventant ainsi la formule, cette véritable petite machine – générateur – à produire des nombres en séries* : par ex., $y = x^2$ produit des carrés.¹

Le concept de générateur, pressenti dans l'antiquité, arrive à maturité. Il n'est pas seulement une machine à produire des carrés, comme s'en étonnaient l'antiquité et Hegel dans la modernité. La machine produit des nombres, des figures, des trajectoires en montrant comment ils sont engendrés. Par **générateur**, il faut entendre, de façon générale, une opération entre le générateur et lui-même ou entre le générateur et les générés, l'opération étant répétée sur un ensemble infini ou très nombreux.

Grâce à son triangle arithmétique, Pascal parvient à déterminer le développement en puissances de tout binôme de la forme $a + b$, les deux lettres étant des nombres quelconques.² Le calcul des nombres obéit au même principe d'addition. Les nombres de la base du triangle arithmétique sont les coefficients des premières puissances de $(a + b)$ en développant $(a+b)^n$. Ainsi, les nombres 1, 4, 6, 4, 1 sont les coefficients des termes du développement pour $(a+b)^4$:

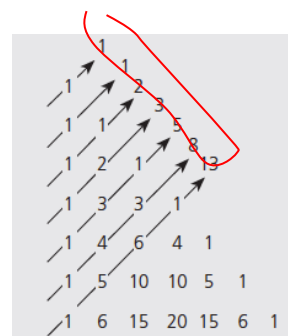
$$\begin{array}{l}
 (a + b)^2 = \quad \quad \quad a^2 + 2ab + b^2 \\
 (a+b)^3 = \quad \quad \quad a^3 + 3 a^2b + 3 ab^2 + b^3 \\
 (a+b)^4 = \quad \quad \quad a^4 + 4 a^3b + 6 a^2b^2 + 4 ab^3 + b^4 \\
 \dots
 \end{array}$$

Par ce processus qui ne semble pas s'arrêter, les nombres naissent les uns après les autres. On est loin en apparence des formes idéalement proportionnées, comme le concevait Léonard de Vinci en inscrivant le corps humain dans le cercle et le carré (cf. *L'homme de Vitruve*, reproduit dans notre Introd. générale). Sous la pression des nombres, les proportions parfaites, telles que le concevaient Pythagore, Vitruve et la Renaissance artistique, finissent par exploser. Leurs débris mystiques laissent place à d'autres arrangements comme précisément le triangle arithmétique de Pascal qui *permet de « penser » la quantité en termes de calculs*.

En fait, dans le triangle de Pascal, on retrouve la suite de Fibonacci dont chaque terme est la somme des précédents ($0+1 = 1$, $1+1 = 2$, $1+2 = 3$, $2+3 = 5$, $3+5 = 8$, etc.).

Le rapport entre deux nombres successifs est *le nombre d'or* (= 1,618...).

Ce nombre gouverne le corps humain parfaitement proportionné de *L'homme de Vitruve* dont l'étendue des bras est égale à la taille.³



Les nombres de Fibonacci sont un bel exemple de processus d'auto-génération des nombres datant du XII^e siècle, puisque $F(n) = F(n-1) + F(n-2)$ avec $F(0) = 1$, $F(1) = 1$, $F(2) = 2$, etc. Il s'agit d'une

¹ *Ibid.*, p.98; A.-A. Upinsky, *Clefs pour les mathématiques.*, Seghers, Paris, 1988, p.241.

² Pascal, *Usage du triangle arithmétique pour trouver les puissances des binômes et des apotomes* [1665], in O.C., *op. cit.*, pp.127-129. Dans le texte, il s'agit du binôme $A + I$, mais Pascal finit par indiquer que la règle serait valide pour tout binôme. Les apotomes sont les expressions de la forme $(a-b)$ dont Pascal entend également développer les puissances. Il s'agit de $(A-I)$.

³ <http://images.math.cnrs.fr/Nombres-remarquables.html> ; <http://villemain.gerard.free.fr/Wwwgvmm/Iteration/TrgPasc3.htm>

formule additive. Il en est de même de la formule multiplicative consistant à prendre la factorielle d'un nombre n telle que $n! = (n-1)! \cdot n$ avec $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n$ comme par ex. $5! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$.

Les calculs permettent non seulement la génération des nombres mais leur simplification. Sans elle il apparaîtrait difficile d'en maîtriser la production. Le concept de générateur emporte d'autres formes de régulation :

L'homme se rend toujours maître de la quantité en l'alignant, en l'encerclant, en la « mettant en boîtes (cubes de sucre ou cylindres des boîtes de conserve), en la mesurant, en la quadrillant ; bref, en plaquant sur elle une figure géométrique élémentaire qui la rend intelligible à l'esprit. Par la figure, la multitude de points devient « une » droite, « 3 » points sont « 1 » triangle, 12 œufs une douzaine, 1000 grammes un seul kilo, toutes les additions $a + b = c$. Je ne veux voir qu'une seule tête, dit l'adjutant. La méthode s'impose au moral comme au physique.¹

Le quadrillage de la société a commencé avec Hobbes qui a enveloppé la quantité humaine dans un moule donné. Le calcul intégral a répondu à ce désir d'enfermer le nombre dans des limites, quand bien même en varierait-on les bornes !

iii Nombre et opération

2/ Le pavage et le pliage de l'espace

i Le pavage de l'espace

Le triangle de Pascal n'a pas seulement une utilité en algèbre pour calculer par ex. les développements de $(1+x) = 1+x$, de $(1+x)^2 = 1 + 2x + x^2$, de $(1+x)^3 = 1 + 3x + 3x^2 + x^3$ et de $(1+x)^4 = 1 + 4x + 6x^2 + 4x^3 + x^4$. Sa construction permet d'occuper ligne après ligne l'espace, une partie de l'espace. Grâce à ce remplissage, il n'est plus nécessaire de se livrer à un travail algébrique difficile pour calculer $(1+x)^5 = 1 + 5x + 10x^2 + 10x^3 + 5x^4 + x^5$. Il suffit de se servir de la ligne suivante du triangle...²

La maîtrise de l'espace entraîne celle de la quantité. La délimitation du territoire de chasse, la nécessité de mesurer l'espace pour construire l'habitat et répartir les champs, se sont imposées au cours des siècles. Plus une collectivité s'accroît, plus le besoin se fait sentir d'en contrôler le nombre, car *l'intelligence humaine fonctionne à base d'images, et non à base de chiffres comme l'ordinateur.*

Ce n'est point par hasard que les mathématiciens furent appelés, jusqu'à l'âge des Lumières, géomètres. La maîtrise du temps imposa elle-même la spatialisation (cf. les horloges, les montres) :

C'est par l'usage des figures que l'homme fait sortir la quantité de son « insignifiance », parvient à vaincre sa propre infirmité devant le nombre, et donne un sens aux quantités en les enfermant dans des figures géométriques qui permettent au cerveau de les voir et de les penser. Une fois rangées en figures géométriques normalisées et en unités de mesure (à l'image des pièces de « meccano » et de « lego »), ces figures peuvent être combinées à l'infini par des opérations simples : l'addition, la soustraction, la multiplication, la division, la translation et la rotation rendent la quantité calculable.³

Ici encore, la nature montre l'exemple.

La matière se prête à merveille au rangement géométrique. Les abeilles ne disposent-elles pas leur miel dans des alvéoles hexagonales ? Imaginez un instant des alvéoles en forme de « & » ? Que de place perdue et que de problèmes insolubles ! De même, les cristaux ne se forment-ils pas selon des figures géométriques qui leur assurent une régularité maximum ? Regardez une maison, un dallage, des entrelacs : chaque fois, vous serez frappé par le fait que tout problème de rangement débouche inexorablement sur une solution à base de figures géométriques : carrés, cubes, cercles, sphères, lignes, triangles, polygones, etc.⁴

¹ A.-A. Upinsky, *Les mathém.*, p.57.

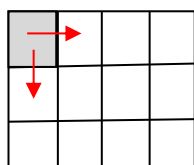
² Robert Solomon, *Le Petit livre des grandes idées mathématiques*, Paris, Dunod, 2009, pp.79-80.

³ A.-A. Upinsky, *Les mathém.*, p.29 et 58.

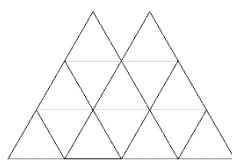
⁴ *Ibid.*, p.58. En 3D, l'hexagone ne semble pas le pavage optimal. Au XVII^e siècle, Kepler avait déjà remarqué que le fond des alvéoles des abeilles résultait de l'assemblage de trois losanges identiques. V. Jean-Jacques Dupas, « Les abeilles géomètres », in *Mathématiques et biologie. L'organisation du vivant*, Tangente, HS n°42, édit. Pole, 2011, pp.10-13.

Filles des sciences nouvelles, les Lumières excellent dans le rangement, particulièrement dans la division d'un ensemble en parties dont l'union reforme cet ensemble. Une telle partition est visible en Europe avec l'établissement des frontières des nouveaux Etats-nations au sortir du moyen âge. La force a souvent tenu le crayon sur les cartes au point même de dépecer certains Etats (la Pologne à la fin du XVIII^e siècle) au profit de ses voisins (Russie, Prusse, Autriche). Les Lumières firent mieux, ou du moins le crurent-elles : des Etats comme la France découpèrent leur propre espace politique en unités régulières. Cette opération fut similaire à celle du pavage d'un plan.

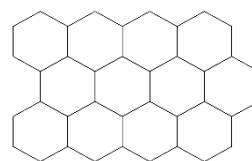
Un pavage n'est pas qu'un découpage. Il est une façon de recouvrir entièrement un plan par des formes géométriques qui se répètent sans laisser d'espace entre elles (par ex., des carrés, des triangles équilatéraux et des hexagones). Kepler a montré que ce sont les seuls polygones possibles.¹ Voici des échantillons (des parties du décor), sachant que le pavage du plan (ou de la sphère) peut s'étendre à l'infini dans plusieurs directions par translation (\rightarrow , \downarrow), rotation ou symétrie :



Pavage régulier avec des carrés



Pavage régulier avec des triangles



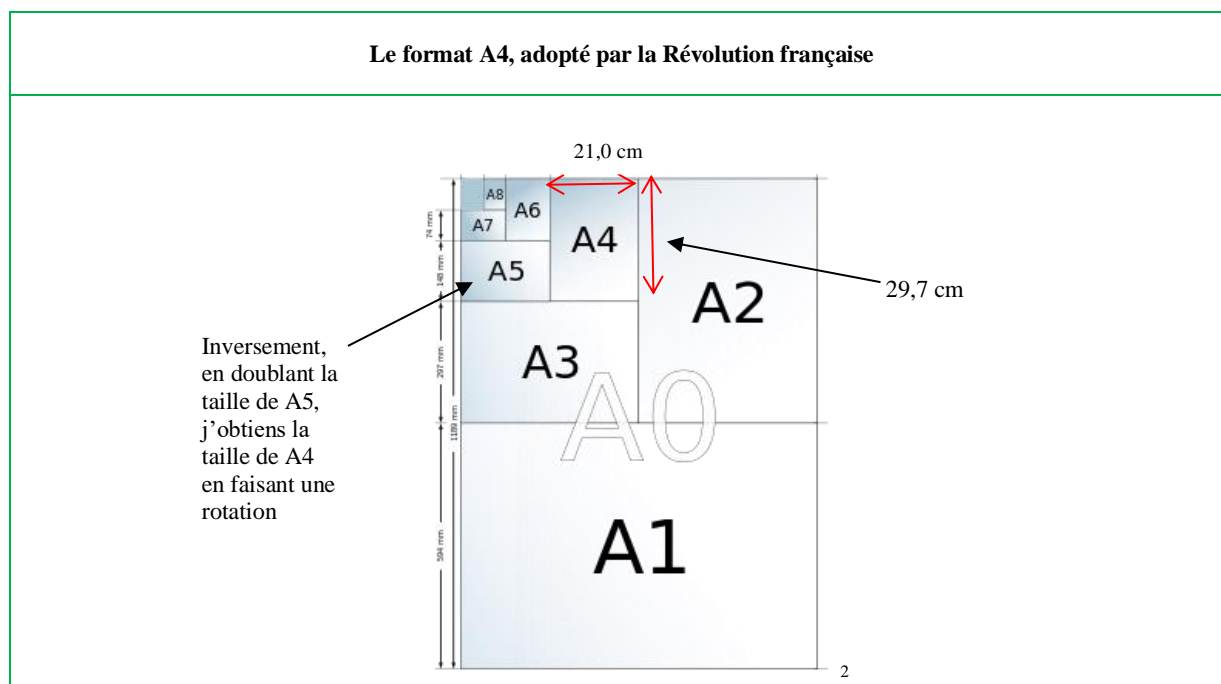
Pavage régulier avec des hexagones

Le procédé n'est pas nouveau. Dès l'antiquité, on construit des pavages périodiques utilisant un type de polygones réguliers (un carré) ou plusieurs (un carré et un rectangle). De tels pavages servent de motifs décoratifs en architecture. Au moyen âge, les musulmans portent au comble du raffinement cette technique artistique (cf. l'Alhambra dans le sud de l'Espagne).

ii Le pavage de l'Etat.

iii Le pliage de l'espace et des documents

Annexe I



¹ R. Solomon, *Le Petit livre des grandes idées mathématiques*, op. cit., pp.68-69.

² Source : http://fr.wikipedia.org/wiki/Format_de_papier; <http://www.calculateur.com/format-papier-A0-A1-A2-A3-A4-A5.html>.

La série B est calculée de telle sorte que chaque dimension d'une feuille B(n+1) soit la moyenne géométrique des dimensions des feuilles A(n) et A(n+1). On commence avec une feuille B0 de largeur 1 mètre. Ce format permet d'élargir les marges afin qu'elle contienne une feuille de la série A de même numéro.

Il existe également une série C, calculée comme la moyenne géométrique des feuilles des séries A et B de même numéro. Plus économique que la série B avec des marges réduites, ce format permet de contenir les feuilles de la série A de même numéro, d'où son utilisation pour le format des enveloppes. Par ex., un dossier au format A4 non plié tient dans une enveloppe C4, des feuillets A4, pliés en deux (au format A5) tiennent dans une enveloppe C5, et une feuille A4 pliée en 4 (au format A6) tient dans une enveloppe C6.

3/ La pluralité des dimensions

a) La pensée bidimensionnelle

b) La Géométrie de Descartes

Descartes ne fait pas qu'identifier point et nombre. Dans le cadre de son système de coordonnées, il généralise le nombre de *dimensions* de l'inconnue, c'est-à-dire la puissance à laquelle l'inconnue s'élève dans une équation.

L'équation du 1^{er} degré présente une inconnue x qui n'est pas élevée à une puissance supérieure à 1, soit $x^1 = x$. Dans l'équation du 2^e degré, l'inconnue x est élevée à la puissance 2, soit x^2 . L'équation de 3^e degré est celle où la plus haute puissance de l'inconnue est de trois dimensions. Pour Descartes, *la ligne inconnue* (la racine) peut être *d'un degré plus compliqué que les précédentes*. Elle peut avoir une dimension 2 quand elle est *produite par une multiplication de deux lignes*, d'une dimension supérieure à quand les lignes seront de *plus en plus composées par degrés* (3^e, 4^e, 5^e, 6^e, ..., *dimension*).¹

Descartes généralise ainsi la notion de dimension de l'inconnue dans une équation. En élevant l'inconnue à une puissance, elle-même inconnue jusqu'alors (bien au-delà du second degré), Le mathématicien a su *s'affranchir du réalisme intuitif des Anciens et étendre la notion de courbe algébrique à autant de degrés qu'on veut*.² L'idée de génération perdure sous celle des courbes algébriques définies par les degrés des équations.

A la fin du XVIII^e siècle, on ne parlera plus en ces termes ; un savant comme Laplace se contentera de dire plus clairement que *dans les équations du 3^e degré et des degrés supérieurs où l'inconnue est élevée à la 3^e puissance et à des puissances plus élevées, l'inconnue a autant de valeurs qu'il y a d'unités dans l'exposant de sa plus haute puissance*.³

(Observation d'un mathématicien, plus au fait de l'histoire de sa discipline)

- Viète, au XVI^e siècle, avait déjà conjecturé que toute équation polynomiale de degré n a n racines.

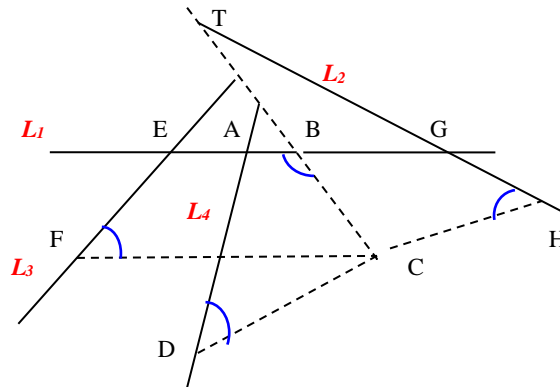
(Je reprends)

(§16-2) Pour être mieux compris, revenons sur la reprise par Descartes du problème de Pappus. Sa méthode analytique consiste à *se donner un nombre de lignes quelconques de lignes droites dont la position est déterminée, mais non la longueur, AB, AD, EF, GH, ... et de les utiliser par conséquent comme lignes de référence ou axes de*

¹ Descartes, *La Géométrie*, op. cit., Liv.1, p.10 et 13 ; Liv.2, pp.17-18.

² J. Vuillemin, *Mathématiques et métaphysique chez Descartes*, op. cit., p.92.

³ Laplace, *Quatrième leçon*, 19 février 1795, in L'École normale de l'an III, vol.1, Leçons de mathématiques, Paris, édit. Rue d'Ulm, sous la dir. de Jean Dhombres, 1992, pp.67-72. On trouve encore l'expression *dimensions* de l'inconnue dans *Le grand vocabulaire français*, vol.9, édité à Paris en 1769 par des gens de lettres ainsi que l'ouvrage d'Etienne Claude Marivetz et Louis-Jacques Goussier, *Physique du monde*, vol.2, édité à Paris en 1781. Les deux ouvrages sont accessibles sur internet via Google books.



coordonnées alors que les Anciens ne les regardaient que comme les éléments d'une figure. Cette différence commande le choix des procédés. Les Anciens cherchaient à exprimer le plus simplement possible les équations entre les aires cherchées et les aires données ; Descartes tend à réduire au nombre le plus petit possible les lignes fixes de cette construction. Dans la géométrie synthétique des Anciens, toutes les lignes se trouvent conçues de cette façon, et l'idée d'une solution simple ne peut naître que de l'aperception heureuse d'une relation particulière entre les aires et les volumes.¹

On saisit le paradoxe : **en réduisant le nombre de lignes à considérer, Descartes se donne les moyens d'appréhender les degrés de l'inconnue à l'infini (sic)**. Les lignes qu'il cherche représentent les variables dépendantes (et les constantes) ; les lignes qu'il sélectionne, les variables indépendantes (les coordonnées en lesquelles Descartes a transformé certaines données). Jusqu'à 5 lignes, l'équation en x ne monte pas au-delà du 2^e degré. A ce niveau, les solutions possibles sont les lignes courbes du cercle, de la parabole, de l'hyperbole et de l'ellipse, à savoir les coniques.

Lorsqu'il y a 6, 7, 8 ou 9 lignes, on a des équations où figurent au premier membre des termes ne dépassant pas le 2^e degré en x pour 6 lignes, le 3^e degré pour 7 ou 8 lignes, le 4^e pour 9 lignes, et où figurent au second membre des termes ne dépassant pas le 3^e degré pour 6 et 7 lignes et le 4^e pour 8 et 9 lignes. [...] Lorsqu'il y a 10, 11, 12 ou 13 lignes, on a des équations où figurent [...].²

Etc.

Selon Descartes, toute équation algébrique peut se mettre sous la forme $F(x) = 0$. En la résolvant, toutes sortes de courbes apparaissent, inimaginables pour les Anciens dont la créativité s'attachait à celles qui sont constructibles par la règle et le compas (la règle, pour tracer des droites, des segments et des angles droits ; le compas, pour tracer des cercles, des arcs de cercle, ou reporter des longueurs).

La géométrie des Anciens ne permettait de résoudre que le cas où le problème de Pappus comporte 3 ou 4 lignes données, les points recherchés se trouvant alors sur l'une des sections coniques (lieux solides) ou, dans les cas dégénérés, sur les lieux plans (cercle et ligne droite).³

Les équations du 2^e degré sont constructibles à la règle et au compas ; celles déjà du 3^e ne le sont plus !

c) Les dimensions pouvoir et talent

i Dans un plan

ii Dans un espace à n -dimensions

iii Nature, principe et objet chez Montesquieu

iv Une « variété » mathématique dans l'Esprit des lois

v La cohérence anglaise

vi Une combinaison de mouvements différents

¹ Jules Vuillemin, *Mathématiques et métaphysique chez Descartes*, Paris, Puf, 1960, pp.100-101.

² *Ibid.*, pp.104-108.

³ *Ibid.*, p.100.

Annexe II

Ce qu'est une « variété » et ce qu'elle n'est pas dans le langage scientifique actuel

Ce qu'est une variété :

Une variété est un objet sur lequel on souhaite pouvoir faire les mêmes calculs différentiels que sur \mathbb{R}^n [par ex, l'étude des variations du pouvoir en fonction des variations du talent dans \mathbb{R}^2]. Pour calculer une dérivée, il suffit de connaître la fonction dans un voisinage du point considéré. On va donc munir une variété d'une structure locale héritée de celle de \mathbb{R}^n .

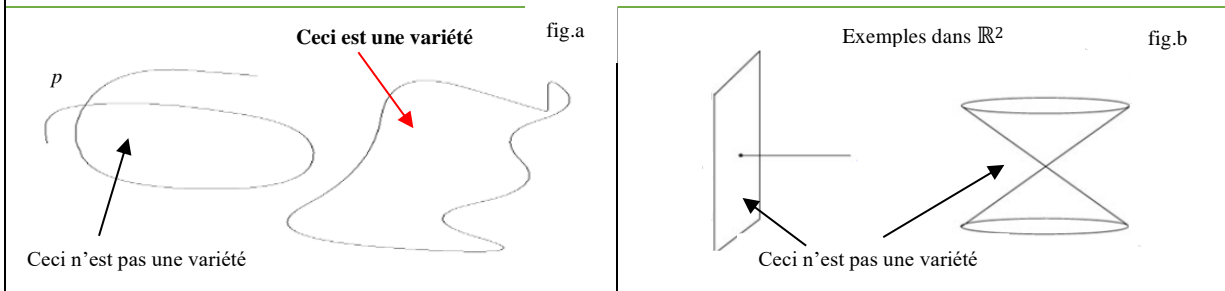
Par ex., sur la fig.a, on observe que la courbe de gauche se recoupe en p , donc cette courbe n'est pas une variété. [On ne peut pas effectuer sur elle un calcul de dérivée.] En effet, un voisinage, même petit, du point double p n'a pas la topologie d'un intervalle de \mathbb{R} . Par contre, la courbe de droite est une variété : tout point admet un petit voisinage qu'on peut identifier avec un petit intervalle de \mathbb{R} .¹

Autrement dit,

Tout ce qui ne ressemble pas localement à \mathbb{R}^n n'est pas une variété.

Par exemple, [dans \mathbb{R}^2], la ligne unidimensionnelle coupant un plan et deux cônes réunis par leur sommet (mais un seul cône est une variété si on exclut le sommet). (fig.b)

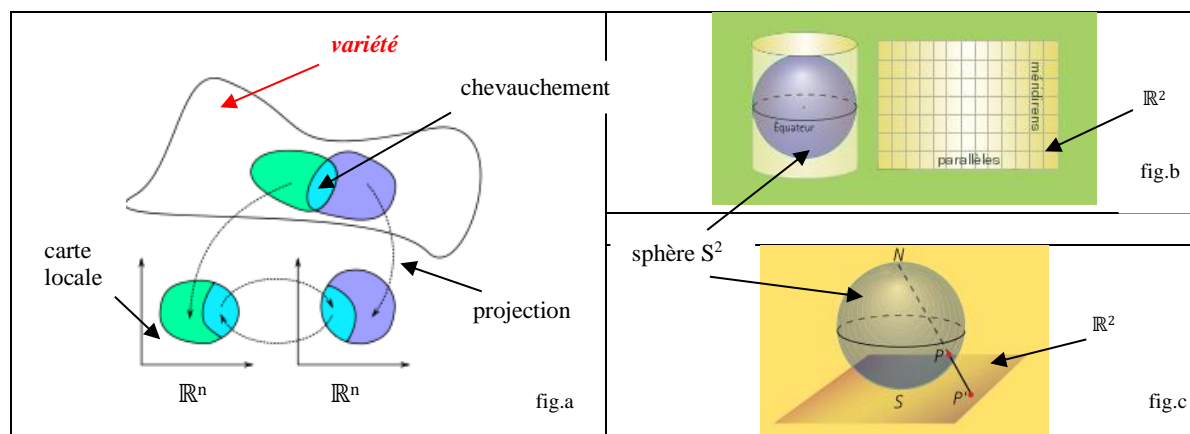
Dans tous ces cas, il y a un point qui ne ressemble pas localement à un espace euclidien de dimension donnée.²



¹ <https://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~bouche/pdfTeX/geodif.pdf>.

² Jacques Fric, *Cours de cosmologie : Espace temps et géométrie. Variétés, Tenseurs*, SAF, avril 2010, 2^e année, p.8.

La projection d'une « variété » sur un plan



Toute variété topologique est un « espace » qui ressemble localement, mais localement seulement, à l'espace à n dimensions \mathbb{R}^n , c'est-à-dire au produit cartésien $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$, l'ensemble \mathbb{R} étant multiplié n fois avec lui-même.

La projection d'une « variété » à deux dimensions comme la sphère sur un plan via un cylindre avait déjà été effectuée par Mercator au XVI^e siècle. (fig. b) Le globe terrestre est enveloppé d'un cylindre vertical dont les côtés touchent l'équateur. On projette horizontalement chaque point de la sphère sur le cylindre, puis on le déroule. Les méridiens apparaissent parallèles et équidistants. **La projection est dite cylindrique conforme**, car elle respecte les angles : si deux courbes se coupent sur la sphère avec un angle α , alors leurs représentations sur la carte se coupent aussi suivant un angle α .¹

La projection de Mercator présente l'inconvénient d'étirer les distances entre les parallèles qui augmentent avec la latitude (les parallèles sont les cercles de la sphère parallèles au plan de l'équateur ; la latitude a la valeur 0 au niveau de ce plan ; le parallèle 0 est à l'équateur). Au niveau de latitude 75° nord ou sud, les surfaces se trouvent exagérées de seize fois par rapport à celles situées à l'équateur.² Cet inconvénient explique qu'une telle projection soit surtout utilisée pour les régions intertropicales où la déformation paraît minimale.

Pour la cartographie près des pôles, on utilise **la projection stéréographique** entrevue dès l'antiquité. On projette sur le plan tangent à la sphère au pôle Sud à partir du pôle Nord. L'image d'un point P de la sphère est l'intersection P' de la droite NP avec le plan tangent à la sphère au pôle Sud. (fig. b) **L'Encyclopédie de Diderot et de d'Alembert décrit clairement au XVIII^e siècle cette projection.**³

La projection stéréographique précédente ignore le pôle nord. Ce point de la sphère terrestre n'a pas d'équivalent sur le plan (sa projection part horizontalement à l'infini au lieu de rencontrer le plan). La projection stéréographique ignore également le pôle sud lorsque le point de perspective n'est plus situé au pôle sud opposé mais au pôle nord. De manière générale, aucune carte « plate » ne peut décrire convenablement la Terre entière.

On se déplace sur la sphère terrestre en utilisant des cartes géographiques planes, rassemblées en un atlas. Au bord d'une carte figure l'information nécessaire pour y « recoller mentalement » la carte suivante. Pour opérer ce recollement, une certaine redondance dans l'information est nécessaire : ainsi la carte de l'Europe et celle de l'Asie peuvent toutes deux contenir Moscou.

*De manière similaire, il est possible de **décrire une variété en utilisant une collection de « cartes », réunies en un « atlas » mathématique**, indiquant comment passer d'une carte à l'autre. Le globe terrestre fournit un exemple typique de variété, puisqu'il peut être représenté par une collection de cartes géographiques.*⁴

¹ https://en.wikipedia.org/wiki/Differentiable_manifold ; Christiane Rousseau, *La cartographie*, Accromath, vol. 3.1, printemps 2008. <http://accromath.uqam.ca/2008/02/la-cartographie/>. Voir aussi <http://serge.mehl.free.fr/chrono/Mercator.html>.

² <http://www.larousse.fr/dictionnaires/francais/latitude/>. Latitude : Angle formé, en un point donné de la surface terrestre, par la verticale du lieu avec le plan de l'équateur, et compté de 0 à $\pm 90^\circ$ à partir de l'équateur, positivement vers le nord, négativement vers le sud. (Ibid.)

³ Voir les articles « Projection » et « Stéréographique ».

⁴ [https://fr.wikipedia.org/wiki/Variété_\(géométrie\)](https://fr.wikipedia.org/wiki/Variété_(géométrie)).

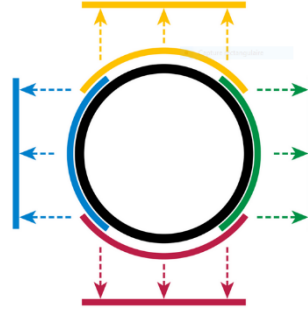
Annexe IV

exemple d'un « atlas » mathématique, et non plus seulement cartographique

Localement, le cercle ressemble à une ligne, qui est à une dimension. En d'autres termes, une seule coordonnée suffit pour décrire un petit arc de cercle. Considérons par exemple la partie supérieure du cercle, pour laquelle la coordonnée y est positive (partie **jaune** sur la figure). N'importe quel point de cette partie peut être décrit par la coordonnée x .

[...]

De manière similaire, il existe des cartes pour les parties inférieures (**rouge**), gauche (**bleue**) et droite (**verte**) du cercle. Ensemble, elles recouvrent la totalité du cercle et on dit que les quatre cartes forment un *atlas* de ce cercle.¹



Pour la sphère S^2 (globe terrestre par ex.), un système de coordonnées unique ne peut couvrir la variété entière. En revanche, il est possible de construire un système de coordonnées cartésiennes depuis le pôle nord et un autre depuis le pôle sud.

L'introduction des systèmes de coordonnées ouvre la voie à l'analyse sur la variété. Des opérations de différentiation et d'intégration sont envisageables quand on a affaire à une variété de dimension quelconque.

¹ *Ibid.*

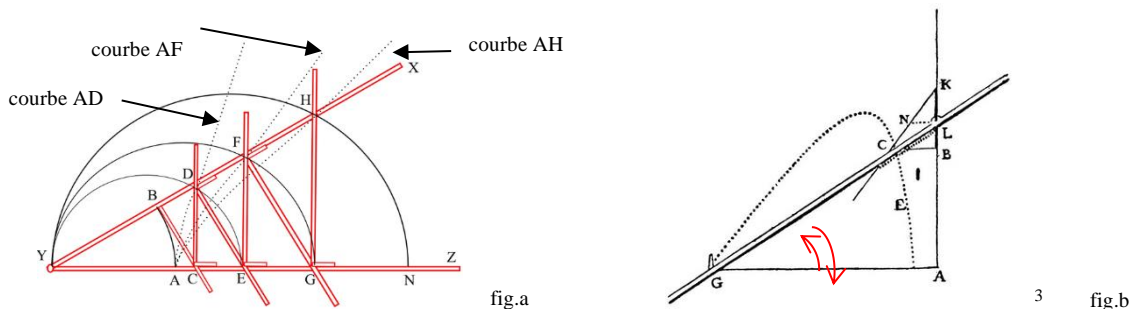
Annexe V

Combinaison de deux mouvements continus différents chez Descartes

Cette figure de pensée se retrouve dans ses « réflexions » sur la géométrie. Descartes entend utiliser des instruments autres que la règle et le compas des Grecs qui assurent, en vertu de leurs axiomes, qu'il est toujours possible de tracer une droite passant par deux points et de tracer un cercle de centre donné et passant par un point donné.¹

Il imagine un *mesolabium* (fig. a), constitué de deux équerres glissantes qui se poussent tour à tour : l'équerre BC, dont les pieds sont sur la ligne YX pousse l'équerre CD, dont les pieds sont sur la ligne YZ, laquelle pousse l'équerre DE, dont les pieds sont sur la ligne YX, laquelle pousse l'équerre EF, dont les pieds sont sur la ligne YZ, et on peut en concevoir une infinité d'autres qui se poussent consécutivement de la même façon.

Du point B, Descartes décrit un cercle qui décrit la ligne AB, et les autres points D, F, H, où se font les intersections des autres règles [équerres], décrivent d'autres lignes courbes AD, AF, AH, dont les dernières sont d'un ordre plus composées que la première, et celle-ci [AD] plus que le cercle.²



Grâce à son *mesolabium* (ou *mésolabe*), qui agence une suite de mouvements, Descartes parvient à construire des courbes dont les équations correspondantes dépassent le second degré. L'instrument avait déjà été conçu dans l'antiquité (notamment par Pappus), mais Descartes en généralise l'emploi en allant bien au-delà de simples coniques.⁴

Les courbes issues du *mesolabe* lui permettent de commencer d'illustrer les courbes de degré plus élevé lors de la résolution du problème de Pappus.

Descartes ne s'en tient pas à cet instrument. Il imagine une combinaison de mouvements continus (fig. b) dont l'articulation est la suivante : une ligne de départ (GL) pivote librement autour du point G. Ce faisant, la ligne KL glisse le long de AK et la droite KN rencontre GL en un point variable C. L'ensemble des points décrit la courbe finale.

Cette courbe est plus composée que la ligne de départ comme sa mise en équation permet de s'en assurer. Une telle algébrisation requiert, on le sait, le choix d'une ligne comme l'axe des abscisses (en l'espèce AK) et le choix d'une autre comme l'axe des coordonnées (AG). En posant $BA = x$ et $CB = y$ (voir la fig. c, qui est une simple rotation de la fig. b), Descartes obtient, en utilisant des rapports de proportionnalité, l'équation d'une hyperbole.⁵

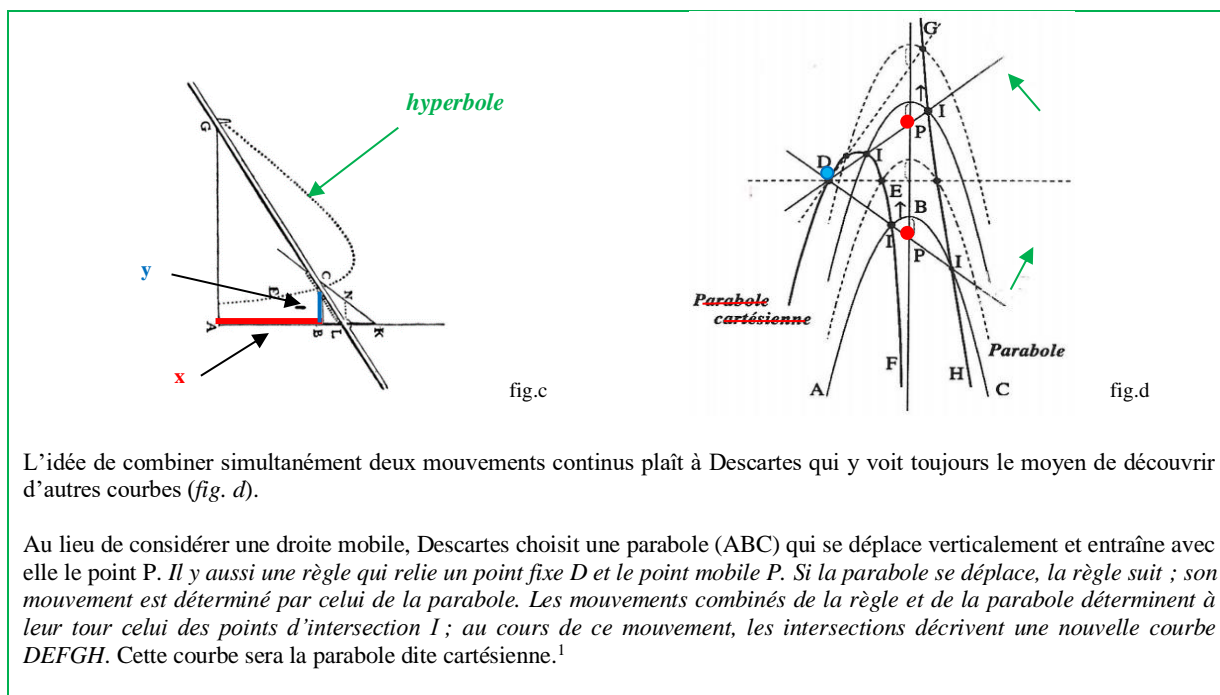
¹ Postulate 1 des *Eléments* d'Euclide : *To draw a straight line from any point to any point* (il existe toujours une droite passant par deux points donnés). Postulate 3 : *To describe a circle with any centre and distance*. *The Thirteen Books of The Elements*, op. cit., Vol.1, p.154.

² Descartes, *La Géométrie*, Liv. II, p.17. S'agissant de l'usage des équerres, on relèvera l'affirmation implicite du postulat 4 d'Euclide : *That all right angles are equal to one another*. En termes d'aujourd'hui : *tous les angles droits sont congruents*.

³ Descartes, *La Géométrie*, op. cit., Liv. II, pp.17-18 ; <http://plato.stanford.edu/entries/descartes-mathematics>.

⁴ J.-L. Gardiès, *Qu'est-ce que l'analyse ?* op. cit., pp.149-150.

⁵ V. Julien, *Descartes. La Géométrie de 1637*, op. cit., p.94. L'équation a pour expression : $y^2 = cy - c/b xy + ay - ac$.



4/ Une conception moderne du mixte

a) Le mixte en Grèce

i La métaphore du tissage chez Platon

ii L'idée de croisement chez Aristote

b) Le mixte chez les Modernes

i Un tableau à double entrée où l'ordre des termes importe

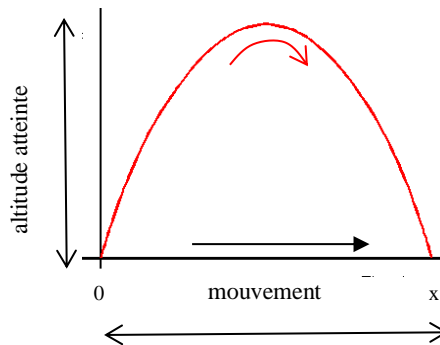
ii Mouvement uniforme & mouvement uniformément accéléré

La philosophie moderne souscrirait volontiers aux thèses d'Aristote sur l'identité (*modulo* la couleur) entre l'homme blanc et l'homme noir autant qu'à celle (*modulo* le sexe) entre l'homme et la femme. (Nous employons ce terme de *modulo* afin que le lecteur commence à se familiariser avec cette notion que le mathématicien Gauss développera à la fin du XVIII^e siècle.) Mais, d'ores et déjà, il apparaît que chaque type de contraire demeure dans sa case, non transformable en un autre selon une intensité continue. La différence non spécifique ne se métamorphose pas en différence spécifique et celle-ci en différence substantielle comme on le voit chez Hegel dont la logique envisage le passage de la distinction à l'opposition et de l'opposition à la contradiction la plus incandescente.

On peut ne pas souscrire aux thèses de Hegel qui finissent, paradoxalement, par trop fondre les contrastes dans un rougeolement général. En revanche, on ne peut faire fi des leçons de la science nouvelle qui est au cœur de l'*épistémè* des Lumières. L'impossibilité de conjoindre le corruptible et l'incorruptible n'est pas recevable dans la physique moderne qui bouscule la physique ancienne (voilà la contradiction à l'œuvre !). Le mouvement uniforme, de par sa nature constante, paraît incorruptible,

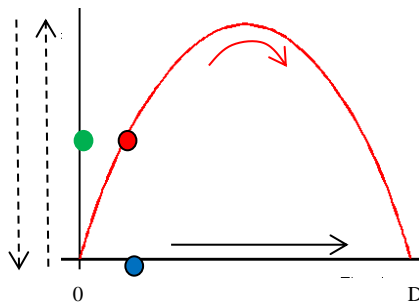
¹ Henk J. M. Bos, « La structure de la Géométrie de Descartes », in *Revue d'histoire des sciences*, 1998, t.51, n°2-3, pp.308-309. La parabole cartésienne a pour équation : $axy = y^3 - 2ay^2 - a^2y + 2a^3$ [= $(y+a)(y-a)(y-a)$]. Cette courbe appartiendra à la famille des cubiques qui sera étudiée par Newton (la 76^e dans sa classification). (Michel Serfati, « Constructivismes et obscurités dans la Géométrie de Descartes », op. cit., p.26.

et le mouvement accéléré, ou décéléré, de par sa difformité, corruptible. Et pourtant, ainsi que Galilée l'a démontré, ils sont l'un et l'autre associés dans la trajectoire d'un boulet de canon en particulier :



La trajectoire a la forme d'une parabole et est symétrique (si la résistance de l'air est négligeable). Cette trajectoire résulte de la combinaison d'une trajectoire fictive horizontale uniforme et d'une trajectoire fictive verticale uniformément varié. La durée de la montée (mouvement uniformément retardé) est égale à celle de la descente (mouvement uniformément accéléré). Entre les points 0 et x, la distance parcourue sur la parabole est plus longue que celle sur l'axe des abscisses, mais le mouvement sur la parabole et celui sur la droite des x aboutissent en même temps au même endroit !

Pour celui qui ne croirait que ses yeux, il y a lieu de considérer le mouvement de trois balles : une balle n°1 sur l'axe des abscisses, une balle n°2 sur la parabole, et une balle n°3 sur l'axe verticale. Toutes partent du même point 0. La balle n°1 () suit un mouvement rectiligne uniforme ; la balle n°2 () parcourt une parabole ; la balle n°3 () monte verticalement jusqu'à une certaine hauteur avant de redescendre non moins verticalement. Lorsque la balle n°3 retombe sur le sol en 0, la balle n°1 et la balle n°2 se retrouvent au même point final, D. ¹



Le mouvement réel est celui de la parabole. En théorie, les trois balles ne sont pas séparées. Les deux autres mouvements sont des projections du mouvement réel sur les axes x et y. Cependant, expérimentalement, on peut prendre trois balles différentes pour mieux faire comprendre la composition du mouvement résultant.

c) Le mélange des genres

i Le croisement des « genres » différents

La métaphysique ancienne n'accepte guère que des attributs différents cohabitent dans le même genre. N'y a-t-il pas, selon Aristote, incommunicabilité des genres ? N'est-elle pas sans rappeler celle entre le côté du carré et sa diagonale ? Cette question dans la question est posée justement par le traducteur français de la *Métaphysique* d'Aristote, qui écrit dans une note qu'on ne saurait négliger :

La séparation radicale des grandeurs continues et des nombres, qui a entraîné celle de la géométrie et de l'arithmétique, a peut-être pour origine les difficultés soulevées par la découverte de l'irrationalité $\sqrt{2}$, qui, n'étant ni paire, ni impaire, ne saurait être un nombre.²

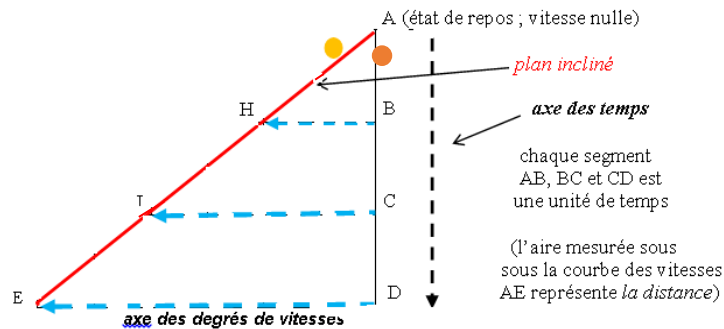
La physique ancienne ne concèdera pas davantage. *Il est absurde qu'un même sujet soit mêlé selon deux mouvements, car où trouver deux altérations d'un seul sujet vers une seule forme ? C'est bien*

¹ Walter Lewin, *MIT lectures on classical mechanics*, n°4. L'expérience ne met en jeu que les balles 1 et 2, mais elle est déjà parlante.

² J. Tricot, in Aristote, *La métaphysique*, op. cit., t.1, pp.94-95, note 3.

impossible !¹ Manifestement, le retour au texte même d'Aristote ne donne pas raison à l'idée que l'on se fait a priori de la rationalité grecque.

En revanche, il est intéressant de voir avec Galilée qu'un même mouvement (uniformément accéléré), sans être même être décomposé, peut être aussi approché spatialement par deux points de vue différents. Lorsque Galilée étudie le mouvement d'une boule qui descend sur un plan incliné, il imagine sur le papier deux mouvements uniformément accélérés, le mouvement de chute d'une boule verticalement et celui d'une boule roulant sur un plan incliné. Les deux boules n'arrivent pas en même temps au sol (celle qui tombe verticalement tombe avant celle qui « tombe » obliquement), mais en utilisant le théorème de Thalès Galilée vérifie la loi du mouvement uniformément accéléré.



Dans sa démonstration (ou plutôt vérification, car nous sommes en physique et non en mathématiques), Galilée voit dans les deux droites deux axes, un axe vertical représentant l'écoulement du temps, un axe horizontal, l'accroissement de la vitesse (aujourd'hui, on pivoterait le système d'axes de 90 degrés en mettant le temps en abscisse et la vitesse en ordonnée en fonction du temps (ce qu'il appelle *degré de vitesse* sont en fait des variations instantanées, des dérivées).

Au terme de son raisonnement, Galilée observe que *les temps auront entre eux le même rapport que les espaces eux-mêmes*, écrit Galilée.² De façon plus précise, il conclut :

*Si un mobile, partant du repos, tombe avec un mouvement uniformément accéléré, les espaces parcourus en des temps quelconques par ce même mobile sont entre eux en raison double des temps, c'est-à-dire comme les carrés de ces temps.*³

A chaque fois, Galilée utilise donc des figures combinant des coordonnées de nature différente pour démontrer le mouvement uniformément accéléré des corps tombant (dans le vide ou sans frottement). Il croise deux suites de nombres : la suite des unités de temps (1, 2, 3, 4, ..., n...), et la suite des degrés de vitesse (1, 4, 9, 16, 25, ..., n², ...). Chaque membre de la suite des vitesses augmente à chaque unité de temps. On se trouve en présence d'une suite de carrés, 1², 2², 3², 4², ..., n², ... (Attention de ne pas confondre le mouvement physique d'une boule sur un plan incliné et l'équation du mouvement de la bille dont l'équation est, non pas une droite, mais une parabole bien en x².)

Dès le début du XVII^e siècle, l'idée d'un croisement de « genres » différents s'étend dans toute la science. Pour déterminer la tangente, Torricelli montrait que la trajectoire d'un objet est issue d'un double mouvement, horizontal et vertical. Le mouvement résultant suivait une cubique.⁴ Descartes conçoit le mouvement de la fronde comme un compromis entre le mouvement inertiel de la pierre et une force qui tire vers le centre cette dernière. Newton généralise cette idée en imaginant le mouvement des planètes (Terre), tirillées entre leur mouvement tangentiel et leur chute sur le Soleil.

(§17
a)-ii)

(§19
b)

¹ Aristote, *Physique*, 202 a, Paris, Belles Lettres, 1983, t.1, p.94. *So there will be one being-at-work. It is unreasonable that there be one and the same being-at-work of two things different in kind.* (Joe Sachs, *Aristotle's physics. A guided Study*, Rutgers Univ. Press, 1995, p.77).

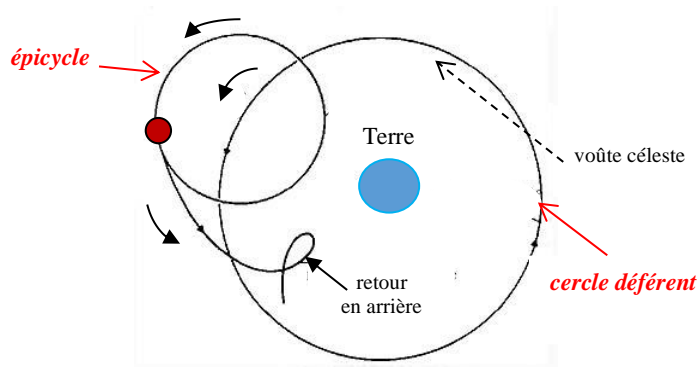
² Galilée, *Discours et démonstrations mathématiques concernant deux sciences nouvelles* [1638], Armand Colin, 1970, 3^e journée, Théor. III, p.150. V. aussi Maurice Clavelin, *La philosophie naturelle de Galilée*, Albin Michel, Paris, 1996, pp.311-313.

³ Galilée, *Dialogue sur les deux grands systèmes du monde* [1632], 2^e journée, Seuil, Paris, 1992, pp.369-371; *Discours et démonstrations mathématiques concernant deux sciences nouvelles*, op. cit., 3^e Journée, Théor. II, p.142.

⁴ *La parabole est le lieu des points (x,y) qui satisfont deux équations à la fois : x = k.t et y = K.t² ; elle est définie en fonction du temps pris comme paramètre commun (ce jargon et ces équations sont bien sûr absents du texte de Galilée)*. (F. de Gandt, « mathématiques et réalité physique au XVII^e siècle, op. cit., p.176). Pour rester dans le jargon, la parabole est une courbe d'équation du second degré: $y = ax^2 + bx + c$. Une cubique (ou « parabole cubique ») est une courbe algébrique de degré 3 d'équation cartésienne est : $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

La construction des logarithmes, en combinant des vitesses ou progressions différentes, participe du même raisonnement. Ce rapprochement instaure **une bijection entre l'addition et la multiplication**.

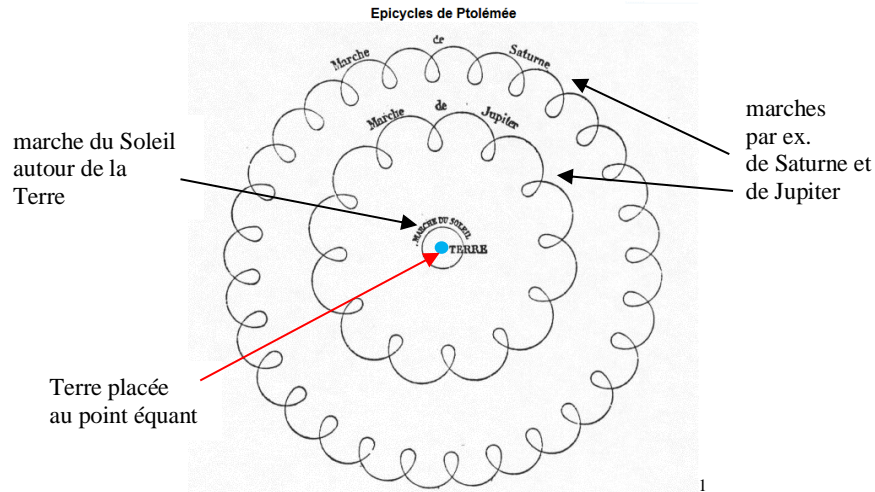
- Mais, interrompra notre amoureux des Grecs, ne voit-on pas une telle composition dans le système astronomique de Ptolémée qui vivait à Alexandrie un siècle et demi après Jésus-Christ ? Le savant combine des mouvements circulaires différents afin d'expliquer que certains astres rebrousse chemin en paraissant revenir en arrière avant de reprendre leur course sur leur orbite habituelle. Ptolémée a la prescience de composer un mouvement d'ensemble résultant d'un mouvement sur un petit cercle (*l'épicycle*) et d'un mouvement sur un grand cercle (*le cercle déférent*). Le mouvement rapide de l'astre sur le petit cercle, associé à celui de l'orbite principale, permet de comprendre l'accélération de l'astre dans le sens du mouvement général et son ralentissement lorsque l'astre fait un tour sur l'épicycle :



Et notre contradicteur imaginaire d'ajouter : - Ptolémée est un savant moderne avant la lettre. Il ne se contente pas de poser le problème de façon littéraire. Son approche du ciel est précise et quantifiée.

Admirez si vous ne l'avez déjà fait ! Le double mouvement des planètes autour de la Terre fait l'objet d'une représentation qui donne lieu à des prévisions de bonne qualité, notamment des éclipses de lune et de soleil. Le « modèle » de Ptolémée explique le mouvement des planètes qui semble, du point de vue de la Terre, divaguer alors qu'il obéit à une loi cachée. Il y a une marche régulière des planètes d'autant que Ptolémée fait une entorse au principe géocentrique d'Aristote. Il ne place pas exactement la Terre au centre de l'orbite, mais en un proche appelé « équateur » (fig. infra).

- J'admire comme vous Ptolémée qui a su introduire le point équateur afin de rendre mieux compte des vitesses apparentes des planètes qui paraissent, vues d'ici, rétrograder dans le ciel. Ptolémée avait finement observé que la vitesse d'une planète n'est pas uniforme sur son orbite. En se plaçant au point équateur, le mouvement de la planète devient uniforme. Ptolémée combine deux effets pour expliquer ce mouvement, mais chaque effet relève du même « genre » : la vitesse sur le petit cercle est aussi uniforme que celle sur le grand cercle. Les deux effets s'ajoutent subtilement, mais il demeure bel et bien que l'idée que le système repose sur une combinaison de deux mouvements circulaires, la vitesse sur le petit cercle allant seulement plus vite que celle sur le grand cercle...



Chaque grand cercle, sur le périmètre desquels chaque planète semble retourner régulièrement en arrière, doit être vu comme la projection sur un plan d'un grand cercle « entortillé » dans l'espace.

La pensée bidimensionnelle chez Ptolémée ne participe pas encore de l'épistémè moderne. Elle la prépare sans doute, mais elle reste en deçà. Les procédés de raisonnement diffèrent d'une épistémè à l'autre, à l'instar de celui qui est à la base de la spirale d'Archimède et de celui qui est à la base de la spirale logarithmique. La première est la résultante de deux mouvements simultanés, le déplacement d'un point sur une droite et celui d'un point sur un cercle, mais ces deux mouvements sont l'un et l'autre uniformes. La spirale logarithmique, étudiée par Descartes, Torricelli et Jacques Bernoulli, combine une rotation uniforme (une vitesse constante comme une progression arithmétique, par ex. 1, 3, 5, 7, ... avec + 2 chaque fois) et un mouvement rectiligne qui croît de façon géométrique (la vitesse augmente par ex comme 1, 3, 9, 27, ... en multipliant par 3 le nombre d'avant).



Sur la fig. de gauche : le point qui se déplace sur une droite du centre vers l'extérieur se déplace à vitesse constante. On obtient une spirale (archimédienne) dont les spires successives sont également espacées.

Sur la fig. de droite : la vitesse du point augmente géométriquement (autrement dit, exponentiellement). Chaque spire de la spirale appelée logarithmique apparaît q fois plus éloignée que la précédente (2 fois si par ex. la série géométrique progresse en ligne droite comme suit : 1, 2, 4, 8, 16, ... avec la raison $q=2$).²

La cohabitation dans un même phénomène de deux mouvements de nature différente va à l'encontre de la pensée ancienne qui combine des mouvements de vitesses différentes mais chacune constante. La différence devient trop grande pour que les contraires coexistent dans un même sujet ! Il faut donc dire adieu à l'astronomie circulaire, si belle soit-elle. Les astres, il est vrai, n'apparaissent plus aussi errants qu'auparavant, mais par réaction ils sillonnaient trop bien le ciel.

Le mouvement circulaire uniforme, c'est-à-dire la régularité parfaite, éternelle et géométrique des astres en leur orbite ne sont plus de ce monde. C'est pourquoi le mouvement circulaire a pu être considéré justement comme le mouvement nécessaire des planètes et de tous les astres jusqu'à Galilée inclusivement, enfin comme le mouvement irréalisable dans le monde sublunaire. C'est pourquoi Kepler est si contrarié, et même incrédule, lorsqu'il découvre les trajectoires elliptiques.

On imagine la dépression de ce savant des temps modernes. L'ellipse képlérienne semble une roue cabossée. Elle incarne, sinon l'enfer, du moins la discontinuité ou l'événement, au sens où une ellipse

¹ http://media4.obspm.fr/public/FSU/pages_lois-newton/avant-copernic_impression.html

² Ian Stewart, *Les mathématiques du vivant*, Paris, Flammarion, 2013, p 242.

*est un mouvement excentrique, qui n'est ni régulier ni homogène. L'ellipse est en soi pleine d'événements, les solstices et les équinoxes par exemple.*¹ L'âge de Lumières continuera d'être étonné quand d'autres esprits découvriront que les ellipses, aussi, sont sujettes à être perturbées.

Galilée concevait un mouvement mixte sur terre, mais il ne l'admettait pas encore dans le ciel. Kepler étend la vue de Galilée en subodorant, par-delà la lunette de ce dernier, du mixte dans le mouvement des planètes. La science, progressivement, se convertit à la nouvelle pensée bidimensionnelle qui non seulement croise des mouvements continus mais des mouvements de nature différente. La philosophie et le droit public des Lumières adoptent des raisonnements singulièrement analogues.

ii L'unité de composition, ou de nature, de la pensée et de la matière

Addendum :

**α) L'esprit des lois des formes de gouvernement
et les lois des gaz parfaits des Lumières**

**β) La portée de l'analogie
entre les trois formes du gouvernement de Montesquieu et la loi des gaz parfaits**

¹ Michèle Porte, *Mémoire de la science*, Parsi, ENS de Fontenay, vol.1, Séminaire 1985-1986, juin 1987, pp.172-173.

Annexe VI

L'analyse dimensionnelle

La dimension d'une grandeur est, pour simplifier, sa nature physique. Une grandeur peut avoir la dimension d'une longueur, d'une énergie, d'une masse ... La notion de dimension est très générale et ne suppose aucun choix particulier de systèmes d'unités: une grandeur ayant la dimension d'une longueur peut s'exprimer en mètres, en centimètres, en pouces, en inches ou en miles !

[...]

Tester l'homogénéité d'une expression est un critère permettant d'éliminer des résultats donc on sait qu'ils sont nécessairement faux. Une équation est homogène lorsque ses deux membres ont la même dimension. Une expression non homogène est nécessairement fautive !¹

Annexe VII

Première différence sémantique entre variable et paramètre

Dans l'étude des gaz parfaits, le volume, la température et la pression sont des **variables d'état** qui caractérisent l'état du gaz. Dans l'étude des régimes politiques chez Montesquieu, *la nature, l'objet* et *le principe* sont des « variables d'Etat » si l'on peut dire en jouant sur les mots. Elles caractérisent l'état du système politique considéré. Dans les deux cas, une **variable d'état** caractérise un état, non une évolution entre deux états.

- toute grandeur assimilable à une vitesse (une dérivée par rapport au temps) n'est pas une variable d'état : en fait elle décrit non pas un état, mais le passage d'un état à un autre (transformation) ;

- les variables d'état caractérisent le système lui-même : les mesures des interactions d'un système avec l'extérieur ne sont pas des variables d'état ;

- une variable d'état peut être locale (définie en chaque point du système) ou globale (définie pour l'ensemble du système).

En physique et en droit également, **les variables d'état doivent être indépendantes et choisies**. Si par exemple on s'intéresse aux transformations d'un système fermé déformable, la masse de ce système n'a pas besoin d'être prise en compte dans les variables d'état (puisque elle est constante), alors que son volume devra figurer parmi les variables d'état.²

Nous avons employé indifféremment jusqu'ici les termes de « variables » et de « paramètres ». A vrai dire, il convient de les distinguer pour mieux saisir la différence entre physique et droit. *Le paramètre, au sens large, définit un élément d'information à prendre en compte pour prendre une décision ou pour effectuer un calcul. On parle aussi d'argument. Le paramètre est susceptible de faire l'objet d'un contrôle.* Le paramètre est une variable de contrôle comme peuvent l'être, par exemple, celles d'un cours d'eau : le débit, la géométrie de la vallée (pente en particulier), la nature du boisement et de la couverture végétale riveraine, les caractéristiques granulométriques des matériaux du lit et des berges, etc.³

En mathématiques, la notion de paramètres revêt encore un sens plus précis. Nous y reviendrons au moment opportun.

En politique, que le droit s'efforce d'encadrer, la gence au pouvoir ne maîtrise pas autant qu'elle le voudrait les paramètres au sens large qu'elle croit discerner. Les paramètres apparaissent davantage comme des variables d'état que les décideurs ne peuvent qu'observer ou subir. **Les valeurs des variables demeurent souvent inconnues ou peu précises, mais il arrive que l'on parvienne à en régler certaines comme on règle ou presse un bouton. L'entreprise de Montesquieu s'inscrit modestement dans cette perspective des Lumières. Ce n'est pas rien mais ce n'est pas tout non plus.**

La distinction des trois variables *nature, principe* et *objet*, a déjà permis de voir plus clairement comment fonctionnent des régimes politiques simples comme la monarchie, l'aristocratie et la démocratie directe. C'est une 1^{re} étape pour comprendre l'histoire politique et institutionnelle de l'antiquité jusqu'aux Lumières.

Avec une « équation » telle que $PN = k'O$, avec *P* le principe, la liberté du commerce), *N* la nature, une monarchie à l'anglaise), *O* l'objet, la liberté politique, Montesquieu est même devenu capable de prédire plus ou moins l'évolution d'un régime politique mixte comme le régime anglais du XVIII^e siècle. Il y a des résultats. On peut utiliser sa « formule », même s'il faut tenir compte de la présence d'autres variables comme celle du caractère plus ou moins centralisé de l'administration de l'Etat. Il est peu probable que l'on soit toujours en présence d'une loi à trois variables en droit, mais c'est un modèle qui a aidé Montesquieu à appréhender son époque et un peu, pour les aspects qui perdurent, au-delà :

On ne fait pas un système après avoir lu l'histoire, mais on commence par le système et on cherche ensuite des preuves. Il y a tant de faits dans une longue histoire, on a pensé si différemment, les commencements en sont ordinairement si obscurs qu'on trouve toujours assez de quoi faire valoir toutes sortes de sentiment.⁴

¹ https://lpo-dembeni.ac-mayotte.fr/IMG/pdf/ap4._analyse_dimensionnelle.pdf.

² *Thermodynamique, variables d'état*, http://nte.mines-albi.fr/Thermo/co/uc_VariablesEtat.html

³ <https://fr.wikipedia.org/wiki/Paramètre> ; <http://www.economie.eaufrance.fr/content/variable-de-contrôle>.

⁴ Montesquieu, *Mes Pensées*, n° 1582, Pléiade, pp.1382-1383. La citation *mon âme se prend à tout* est tirée d'une lettre de Montesquieu à Maupertuis le 25 nov. 1746, in Jacques Battin, « Montesquieu, les sciences et la médecine en Europe », *Histoire des sciences médicales*, 2007, t.41, n°3.

§ 25.- LA SERIE DE PUISSANCES

1/ Un mode de raisonnement prégnant

- i Montesquieu et Rousseau dans le même bain causal*
- ii Le progrès comme « suite infaillible » selon Condorcet*

2/ Wallis, Newton et Taylor, parmi d'autres

- i Wallis, ou l'arithmétique appliquée à l'infini*
- ii Newton, ou l'algèbre appliquée à l'infini, 73*
- iii La série de Taylor, 74*

3/ Euler, 75

- i Le calcul des courbes via des sommes infinies, 75***
- ii Les propriétés de la courbe exponentielle, 76*
- iii Le calcul des intérêts, 78***
- iv La formule $e^{\pi} + 1 = 0$, 80*

4/ Lagrange, 82

- i La série Taylor-Lagrange, 82*
- ii Une amélioration de l'approximation des fonctions, 83*

5/ L'ère de la série

- i L'idée de série chez Hobbes, Locke et Hume*
- ii L'idée de série chez Diderot et à nouveau chez Montesquieu*
- iii L'existence d'un calcul financier chez Rousseau*

Annexes I et II, 85

○

1/ Un mode de raisonnement prégnant

- i Montesquieu et Rousseau dans le même bain causal*
- ii Le progrès comme « suite infaillible » selon Condorcet*

2/ Wallis, Newton et Taylor, parmi d'autres

- i Wallis, ou l'arithmétique appliquée à l'infini*

L'approche par la notion de série demeure a priori la même que celle qui permet d'évaluer une intégrale. La série est une progression de termes dont on cherche à calculer *la somme*. L'intégrale est aussi une somme, composée de termes tendant chacun vers zéro sans être égal à zéro, sinon l'intégrale consisterait à n'additionner que des zéros pour devenir elle-même égale à zéro. A la différence toutefois des termes d'une intégrale, chaque terme d'une série conserve une valeur déterminée, sous la forme d'un nombre ou d'une valeur non précisée.

J'ai observé [écrit Leibniz le 12 juillet 1702] qu'il y a deux manières de venir aux sommes des aires ou aux rectifications des courbes par l'infini :

- l'une par les infiniment petits, ou quantités élémentaires, dont on cherche la somme ;*
- l'autre par une progression des termes ordinaires dont on cherche ou la somme ou la terminaison lorsqu'elle se termine enfin dans ce qui enveloppe l'infini..., et cette méthode diffère toto genere de notre calcul des différences, des sommes.¹*

La série contient des termes discrets dont chacun représente un petit bloc fini. Le passage du discontinu au continu facilite la résolution des équations différentielles qui établissent une relation entre des variables différentes parmi lesquelles figure une dérivée (on pensera, en guise de rappel, à

¹ in A. Delachet, *L'analyse math.*, op. cit., p.27.

l'équation fondamentale, $F = m\gamma$, avec la force F qui engendre l'accélération γ , et m la masse. Cette équation peut s'écrire: $F' = m(dv/dt) = m(d^2x/dt^2)$ où v représente la vitesse, x la distance parcourue, dv/dt la *dérivée première*, d^2x/dt^2 la *dérivée seconde*).

Cette résolution demeure délicate en l'absence d'intégrales usuelles qui permettent de trouver les fonctions primitives capables d'intégrer les éléments infiment petits, les dx , dy , dv , etc. **Faute de pouvoir réussir, on abandonne cette voie indirecte en considérant de simples progressions de nombres qui se suivent d'après une loi déterminée (par ex., une progression arithmétique ou géométrique).**

De telles progressions (ou séries), notées $\sum a_n$ (ou S_n), sont composées de n termes qui sont en nombre fini ou infini, les termes $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ n'étant pas nécessairement des nombres entiers consécutifs. On voit par exemple comment les inverses des nombres entiers consécutifs ou leurs carrés, une fois additionnés jusqu'à l'infini, ouvrent la voie au calcul d'autres nombres comme 1 ou 2.

Ainsi $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}$, etc. forment une suite [lorsqu'on les additionne] qui s'approche toujours de la quantité 1, et qui lui devient enfin égale, quand cette suite est continuée à l'infini, observe l'*Encyclopédie* dans son article déjà cité sur la série. De même, la série : $1 + 1/2 + 1/2^2 + 1/2^3 + 1/2^4 + \dots$ est égale, au-delà des pointillés, au nombre 2.

Grâce aux séries, toutes sortes de nombres commencent à être appréhendés comme des sommes d'un nombre illimité de termes.

Le mathématicien Wallis joua, à nouveau, un rôle déterminant.

Dans son *Arithmetica Infinitorum* publié en 1655, il appliqua le premier l'arithmétique aux idées de l'infini. C'est lui qui établit, par exemple, la formule : $\sqrt{\pi/2} = [2.4.6.8\dots(2n)\dots] / [1.3.5.7\dots(2n-1)\dots]$.¹

Par cette formule, π peut être approché sous forme d'une fraction continue, étant rappelé que π , qui est la première lettre des mots grecs *περιφέρεια* (périphérie) et *περίμετρος* (périmètre), mesure la circonférence d'un cercle de diamètre 1 (π est égal à trois fois ce diamètre unité + un petit quelque chose qui est en pointillé, soit $\pi = 3,14\dots$). De façon générale, le nombre π est le rapport *constant* entre la circonférence d'un cercle et son diamètre, $\pi = C/D$.

Avec les suites numériques dont tous les termes, ajoutés à l'infini, peuvent être égaux à une grandeur finie, un accès est ouvert au calcul de quantités plus compliquées. **Les Lumières elles-mêmes progressent, au moins en mathématiques.**

Des séries infinies *non numériques* permettent de traiter, avec le même bonheur, des combinaisons *algébriques* comme certaines intégrales ou dérivées. Le mathématicien des Lumières est même en droit de se réjouir davantage, car il trouve presque toujours, grâce à l'algèbre, une fonction qui peut se développer en *série entière*.

Une série entière est une série de terme général : $u_n(x) = a_n x^n$ où n , entier, varie de 0 à $+\infty$, la variable x appartenant à l'ensemble des nombres dits *réels*. (La possibilité pour une variable d'une série entière d'être *complexe* ne sera envisagée qu'au début du XIX^e siècle.)

Une série de terme général : $u_n(x) = a_n x^n$ signifie que la série est de la forme : $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots$. Dans cette série, apparaissent les puissances successives de x , soit $x, x^2, x^3, \dots, x^n, \dots$

En raison de la présence de ces puissances successives, les séries entières sont dénommées *séries de puissances* ou *séries de puissances entières* (l'exposant n , dans la puissance x^n , désigne un entier, pair ou impair). Ces séries sont des séries de puissances croissantes, et non pas de simples polynômes, composés de termes séparés par des + ou des -. **L'étude des fonctions en séries de puissances est un trait majeur des mathématiques des Lumières.**

¹ A. Delachet, p.28. Wallis fut le meilleur mathématicien anglais avant Newton. Il apporta ses plus remarquables contributions au domaine de l'analyse infinitésimale. (J.-P. Collette, *Hist. des math.*, 2, op. cit., p.51.)

ii Newton, ou l'algèbre appliquée à l'infini

Tout commença avec Nicolas Mercator qui publia la *Logarithmo-technia* en 1668. Il envisagea les logarithmes comme des nombres mesurant l'aire comprise entre une hyperbole équilatère et ses asymptotes. *C'est la recherche de cette quadrature appliquée à l'hyperbole équilatère qu'il représente par l'équation $y = 1/(1+x)$ qui devait le conduire à utiliser l'algèbre dans les problèmes d'analyse infinitésimale.* Il obtint, par division algébrique (division entre deux expressions algébriques), la série géométrique alternée : $1/(1+x) = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots$ (pour $x < 1$, sinon la série part à l'infini).

Avec cette formule, on passe en quelque sorte de l'arithmétique de l'infini à l'algèbre de l'infini.¹

Dans son ouvrage la *Méthode des fluxions*, Newton qualifie de *sublime méthode* le recours à de telles suites. *Le calcul de l'infini* est né

A cette occasion, Newton rappelle que *la plupart des géométries modernes ont négligé la synthèse des anciens et se sont appliqués principalement à l'analyse.* Est-ce une critique ? Non, tout le contraire, bien que Newton semble employer la géométrie des Anciens dans les *Principia*. *L'analyse les a mis en état de surmonter tant d'obstacles qu'ils ont épuisé toutes les spéculations de la géométrie, à l'exception de la quadrature des courbes et de quelques autres matières semblables.*

Par la méthode des séries, Newton se propose de *reculer encore les limites de l'analyse et de perfectionner la science des lignes courbes.* A l'exception de Mercator, déclare-t-il, personne n'a songé à *appliquer à l'algèbre la doctrine des fractions décimales [soit $1/10^e$, $1/100^e$, $1/1000^e$, ..., etc.]* alors que *cette application ouvre la route à des découvertes plus importantes et plus difficiles.²*

De telles séries apparaissent quand même dans les *Principia*, qui seront publiées plus tard, mais elles n'y figurent qu'au compte-goutte, par exemple dans la scolie attachée à la Proposition XCIII - Théorème XLVII du Livre I où Newton emploie la série du binôme qui porte aujourd'hui son nom.³ La méthode des fluxions, qui fait appel, comme chez Leibniz, à la notion de dérivée, paraît aussi incidemment. Qu'on ne s'y trompe pas : ce n'est là qu'affaire de présentation et non de raisonnement.

D'aucuns signaleront que Newton n'a pas connu la notion de fonction, car l'axe des abscisses qu'il considère est le temps t et non le paramètre x comme chez Leibniz. Il est vrai qu'à partir de Leibniz x est devenu véritablement un paramètre, représentant une dimension quelconque, dont l'espace. Mais c'est trop ici chicaner. Les notions de fonction et de dérivée murissaient déjà dès l'apparition de la science moderne. Il en est pour preuve la loi de la chute des corps qui en était une belle illustration.

Dans la série du binôme, l'exposant du binôme peut être entier, mais aussi rationnel et même réel.

S'il est entier, *le théorème du binôme* permet de retrouver les binômes que développait Pascal : $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, etc.

S'il est rationnel, c'est-à-dire s'il est un rapport entre deux entiers, le résultat sera par exemple : $(1-x^2)^{1/2} = 1 - 1/2 x^2 - 1/8 x^4 - 1/16 x^6 - \dots$ (La justification de ce calcul apparaîtra plus loin.)

Du triangle arithmétique, peuvent se déduire les coefficients du développement en puissances successives de $(a+b)^n$. En passant de Pascal à Newton, la formule devient plus générale en considérant des exposants entiers rationnels (entiers et fractionnaires).⁴

Un nouveau visage de l'analyse résulte de ces découvertes du XVII^e siècle. L'analyse n'est plus cantonnée au calcul différentiel et intégral. Les séries lui donneront de s'épanouir au XVIII^e siècle.

¹ A. Delachet, *L'analyse math.*, op. cit, p.30.

² Newton, *La méthode des fluxions et des suites infinies* [1664-1671], trad. par Buffon, Paris, 1740, pp.1-2. « [L]es suites infinies ont l'avantage de réduire à la classe des quantités simples toutes les espèces de termes compliqués [...] ce qui aplanit les difficultés qui, sous la forme ordinaire, auraient pu être insurmontables. » (Ibid.).

³ Newton's *Mathematical principles of Natural Philosophy and his system of the world* [Philosophiae Naturalis Principia Mathematica, 1687], Motte's transl. [1729] rev. by F. Cajori, Univ. of California Press, 1962, vol. 1, p.225.

⁴ A. Delachet., p.30; D.J. Struick, *A Source Book in Mathematics 1200-1800*, Princeton, Univ. Press, 1990, p.286 ; M . Kline, *Math. Thought from Anc. to Mod. Times*, 1, p.273.

iii La série de Taylor

Citons la plus connue, *la série de Taylor*. Grâce à une telle série, moyennant certaines conditions, une fonction d'une variable x , soit $f(x)$, peut être développée suivant les puissances de cette variable.

Cette série est algébrique. Dans cette série est introduite la notion de fonction dont nous parlions, définie précisément par Leibniz comme une loi de *variation simultanée* entre une quantité indépendante, x , (par ex. la température) et une variable dépendante y (par ex., la longueur d'une barre de métal).¹ Une variation de x , soit dx , entraîne une variation de y , soit dy . La fonction a pour *dérivée* le rapport dy/dx quand dx tend vers 0.

L'intérêt de la série de Taylor est de calculer une fonction par ses dérivées. Il s'agit d'une série entière $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots$, dont les différents coefficients $a_0, a_1, a_2, \dots + a_n, \dots$, sont les dérivées successives de la fonction donnée, $f(x)$. L'exposant de la puissance x^n est toujours un nombre entier. La formule de Taylor s'écrit au voisinage du point x , i.e. au point $x+h$ (avec h petit) :

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + (h^2/2!) f''(x) + h^3/3! f'''(x) + \dots,$$

(En explicitant l'écriture factorielle en $n!$, la formule s'éclaircit : $f(x+h) = f(x) + hf'(x) + h^2/1.2 f''(x) + h^3/1.2.3 f'''(x) + \dots + h^n/n! f^{(n)}(x)$, sachant que $n! = 1.2.3 \dots n$. Par exemple : $4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$.)

Le second membre de l'équation définit le développement de la fonction au point $x+h$. Dans ce développement, $f'(x)$ est la dérivée première de $f(x)$ (par ex. la vitesse, dans le cas du mouvement d'un corps), $f''(x)$, est la dérivée seconde (l'accélération de ce mouvement), f''' (la variation de l'accélération), etc.² Dans cette série, pour des valeurs très petites de h , on constate que les termes décroissent rapidement à mesure que les exposants de h vont sans cesse croissant (de $n = 0$ à $l'∞$).

Ainsi, pour que le développement de la fonction $f(x)$ soit possible, il faut que h représente un accroissement très petit (voisin de 0) de la variable x . Comme h représente un tel accroissement, soit une différence entre deux valeurs de x , la formule de Taylor peut s'écrire :

$$f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \dots + a_n(x-x_0)^n + \dots$$

où x_0 est une valeur fixe prise par la variable x . La convergence n'est possible que dans un intervalle de x . Les puissances ne naissent pas d'une génération spontanée. Elles apparaissent à cause du calcul des dérivées dans un petit intervalle ($x-x_0$). Elles permettent d'approcher localement la courbe.

La formule de Maclaurin est un cas particulier de la formule de Taylor au voisinage de x_0 en considérant $x_0=0$. Nous sommes autour de 0, et non plus autour d'un point x quelconque. Le développement prend une tournure plus facile :

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)/2! x^2 + f'''(0)/3! x^3 + \dots,$$

Dans cette formule, apparaissent les dérivées première, seconde, ... $n^{\text{ème}}$ de la fonction f à l'origine. Pour en avoir une idée moins abstraite, nous supposons à nouveau que f soit la fonction générale du mouvement d'un mobile, écrite sous la forme : $x = f(t)$, x étant la distance et t le temps mis à la parcourir :

- Si la *vitesse* v du mobile ne varie pas, la dérivée première dx/dt , avec $dx \rightarrow 0$, est constante. Dans ce cas, toutes les dérivées supérieures à la dérivée première (par ex : la dérivée seconde, f'' ou d^2x/dt^2 , i.e. l'accélération) sont nulles. La formule de Maclaurin devient :

$x = 0 + tf'(0)$, soit $x = vt$, puisque $f'(0) = v$. (On retrouve l'équation du mouvement uniforme.)

- Si l'*accélération* g est à son tour constante, toutes les dérivées supérieures à la dérivée seconde (l'accélération) sont nulles (il n'y a pas d'accélération de l'accélération). En pareille situation, la formule s'allonge :

¹ V. A. Dahan-Dalmenico/J.Peiffer, *Une hist. des math.*, op. cit., pp.218-219.

² René Taton, « Essor de l'analyse et renouveau de la géométrie », in *La sc. mod. de 1450 à 1800*, op. cit., p.453.

$x = 0 + tf'(0) + t^2/2! f''(0)$, soit $x = vt + 1/2gt^2$. (On retrouve l'équation du mouvement uniformément accéléré, engendré par deux séries : 1/ la série 1, 2, 3, 4, 5, ..., décrivant par une progression arithmétique le mouvement animé par une vitesse uniforme ; 2/ la série 1, 4, 9, 16, 25, ..., décrivant, par une succession des carrés, le mouvement à accélération croissante. Cette seconde série, observée en chute libre, est la traduction pour Galilée du constat que les espaces, parcourus par un corps en des temps égaux, sont entre eux comme les nombres impairs 1, 3, 5, ... (un nombre impair est la différence entre deux carrés successifs : $3 = 2^2 - 1^2$, $5 = 3^2 - 2^2$, etc.). La vitesse du corps croît proportionnellement au temps.¹

3/ Euler

i Le calcul des courbes via des sommes infinies

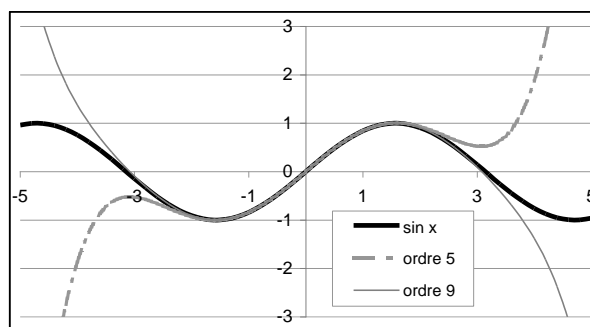
L'intérêt pour les séries de puissances ne cessa de grandir au XVIII^e siècle. Plus que jamais, la notion d'*analyse* s'étendit aux séries. L'analyse ne se contente pas d'étudier les courbes géométriques par une équation reliant les accroissements infiniment petits de certaines variables. Elle entend calculer les courbes par une somme infinie de termes finis. Cette approche fut au cœur des travaux des Bernoulli et surtout d'Euler, reconnu comme *le plus prolifique mathématicien* du siècle qui rassemble les Lumières.²

En trigonométrie, les *fonctions sinus et cosinus* deviennent les *séries du sinus et du cosinus*. Le sinus et le cosinus d'un angle n'apparaissent plus comme les rapports de deux côtés d'un triangle rectangle, mais comme des sommes infinies :

$$\sin x = x/1! - x^3/3! + x^5/5! - x^7/7! + \dots + [(-1)^p (x^{2p+1})] / (2p+1)! + \dots$$

$$\cos x = 1 - x^2/2! + x^4/4! - x^6/6! + \dots + [(-1)^p x^{2p}] / (2p)! + \dots$$

ou, plus simplement : $\sin x = x - x^3/3! + x^5/5! - \dots$, et $\cos x = 1 - x^2/2! + x^4/4! - x^6/6! + \dots$ sans oublier les pointillés qui signifient l'infini.³ Pour des raisons pratiques, on représentera un développement limité de la série. Par ex., on calculera la fonction $\sin x$ par une série d'ordre 9 (i.e jusqu'à la puissance x^9 de la série). Plus on ajoute de termes à la série, plus on voit que sa précision augmente:



approximation de la fonction sinus

Pour obtenir une valeur bien approchée d'une fonction, il suffit de considérer un plus grand nombre de termes de la série qui prétend la développer. Dans notre exemple, on aurait pu ne pas s'arrêter à la puissance x^9 . Si on avait continué le calcul jusqu'à une plus grande puissance impaire de x , soit x^{2p+1} , l'ordinateur d'aujourd'hui nous aurait montré que la courbe résultante colle davantage à la fonction $\sin x$. En suivant cette nouvelle approche analytique, les mathématiciens des Lumières acquièrent la conviction que toutes les fonctions paraissent décomposables en séries.

¹ A. Upinsky, *Les math...*, pp.158-159. V directement, Galilée, *Discours concernant deux sciences nouvelles*, op. cit., 3^e journée, corollaire I, p.142. En notation moderne, le mouvement horizontal a toujours pour équation : $x = x(t) = kt$, et le mouvement vertical : $y = y(t) = mt^2$.

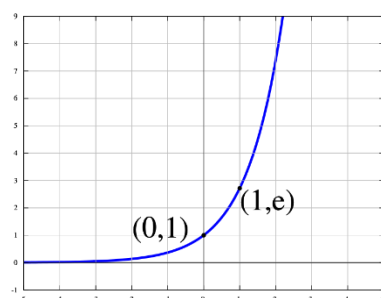
² J.-P. Collette, *Hist. des math.*, t. 2, p.113

³ V. A. Upinsky, *Les math.*, p.160.

Prenons un autre exemple : la fonction exponentielle, e^x , l'unique fonction f définie et dérivable sur l'ensemble des réels, telle que $f' = f$. La dérivée est égale à la fonction. En clair, si on considère que x est le temps t , la variation d'une grandeur qui évolue en t est proportionnelle à la valeur de cette grandeur à un instant donné et à la variation de temps pendant laquelle on l'observe (évolution de la population du globe si le phénomène est croissant dans le temps, comme on l'affirmait au XVIII^e siècle ; désintégration radioactive, si le phénomène est décroissant comme on l'observera au XX^e).

Mathématiquement, la situation peut être formalisée comme suit.

Soit $y(x)$ la grandeur qui dépend de la variable x et Δy sa variation qui correspond à une évolution Δx de la variable. L'hypothèse de proportionnalité entre Δy d'une part et $y(x)$ et Δx d'autre part se traduit par la relation $\Delta y = C.y.\Delta x$, la lettre C représentant la constante de proportionnalité. Après passage à la limite, on obtient l'équation différentielle de premier ordre à coefficient constant : $dy/dx = C.y$. La croissance de y par rapport à x , soit dy/dx , est proportionnelle à la mesure de cette grandeur. La solution d'une telle équation est $y = A e^{Cx}$, l'expression e^{Cx} signifiant exponentielle de Cx ou $\exp(Cx)$.



A chaque valeur de x correspond une valeur $y = e^x$.

L'ensemble des points (x,y) forme la courbe en bleu.

La fonction prend la valeur 1 en 0. On note e la valeur de cette fonction en 1.

Graph de la fonction exponentielle¹

Conformément à la méthode des séries, Euler définit la fonction e^x par l'identité :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^4}{2.3.4} + \frac{x^5}{2.3.4.5} + \dots$$

L'exponentielle est un autre exemple de *série entière*, i.e. de séries $\sum a_n x^n$ sous la forme $\sum \frac{x^n}{n!}$, avec n allant de 0 à $+\infty$. On retrouve à la fin de la série les points de suspension qui suffisent, à l'époque, à exprimer la convergence de la série.

Cette autre formule d'Euler permet de calculer au plus près toute valeur de e^x . Les sommes partielles $1+x$; $1+x+\frac{x^2}{2}$; ... donnent une approximation de plus en plus précise de e^x , en particulier pour x assez petit. Géométriquement, e^x est d'abord approchée par une droite ($1+x$ représentant une droite d'ordonnée 1 en $x=0$, soit une droite horizontale $y=1$, parallèle à l'axe des x) ; ensuite, par une parabole (avec $1 + x + \frac{x^2}{2}$, qui épouse mieux la courbe ; ensuite, par une cubique (avec $1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2.3}$) qui l'épouse encore mieux, etc., en approximant e^x autour de 0 par ses premiers termes.

De façon générale, la fonction exponentielle s'écrit $y = a^x$, où a est une constante positive. La fonction exponentielle $y = e^x$ est la fonction exponentielle pour laquelle a est égale à la constante mathématique e . C'est elle qui est communément utilisée.

Un exemple ?

ii Les propriétés de la courbe exponentielle

Reportez-vous au XVII^e siècle et imaginez, à la façon de William Petty en Angleterre, une population augmentant de 30% tous les dix ans. Soit A la population en 1600, elle passera en 1610 à $A \times 1,3$, puis en 1620 à $A \times (1,3)^2$, ... pour aboutir, après n décennies, à $A \times (1,3)^n$ (si le taux de croissance n'a pas changé). On peut même calculer ce que devait être la population dans les décennies précédentes (1590, 1580, ...) avec $A \times (1,3)^{-1}$, $A \times (1,3)^{-2}$... La croissance exponentielle est une série géométrique (de raison 1,3). La variation de la quantité est proportionnelle à la quantité A de départ.²

¹ https://fr.wikipedia.org/wiki/Fonction_exponentielle.

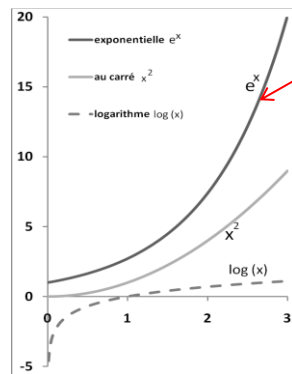
² Les premiers démographes [comme William Petty] ne disposaient pas de la fonction exponentielle, celle-ci n'ayant été définie que par Euler. A sa place, ils utilisaient la notion de « temps de redoublement », qui est le temps nécessaire à ce que la population double.

Mathématiquement, cette propriété tient précisément au fait que la dérivée de la fonction exponentielle à base e est égale à elle-même : $(e^x)' = e^x$. L'exposant x , qui exprime la puissance à laquelle est élevé le nombre e , n'a pas bougé. Si donc on considère l'exponentielle $y = e^{ax}$, sa dérivée est égale à $y' = e^{ax} \cdot a = ay$, soit $y' = ay$, ce qui implique que la dérivée de y est proportionnelle à y .

La dérivée est le taux d'accroissement instantané. La croissance exponentielle à un instant donné t s'exprime par l'équation différentielle : $dx(t)/dt = a x(t)$, la constante a étant égale à 30% dans l'exemple précédent. Dans cette équation, la dérivée $dx(t)/dt$ (le taux de croissance) est bien proportionnelle à la quantité x (l'effectif de la population). La lettre a est le facteur de proportionnalité. L'équation est différentielle, car elle contient à la fois une fonction inconnue $x(t)$ et sa dérivée $dx(t)/dt$.

En intégrant cette équation par rapport au temps, on obtient la solution $x(t) = x(0)e^{at}$ où $x(0)$ correspond au A ci-dessus, la population initiale. En cas de décroissance exponentielle, marquée par un taux de décroissement négatif, soit $-a$, l'équation différentielle devient $dx(t) = -a x(t)$, et la solution (la décroissance finale) est : $x(t) = x(0) e^{-at}$.

Comme l'atteste le graphe de la fonction exponentielle $y = e^x$, sa croissance est d'abord lente, puis extrêmement rapide. Pour en avoir une idée, on peut comparer sa croissance à taux constant, appliquée à une quantité qui ne cesse d'augmenter, à la fonction puissance en x^2 . On peut également comparer cette croissance avec celle de sa réciproque, à savoir la fonction logarithmique.



taux de croissance
relatif constant

$$e^0 = 1 \text{ quand } x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \text{ quand } x \rightarrow -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \text{ quand } x \rightarrow +\infty$$

la fonction logarithmique est la fonction réciproque de la fonction exponentielle.¹ Les fonctions devraient symétriques par rapport à la droite $y = x$, mais les échelles du présent graphique empêchent de le constater clairement.

La croissance de l'exponentielle est plus forte que celle de n'importe quelle puissance en x . La fonction exponentielle finit par la dépasser, même pour des puissances élevées. Le lecteur peut s'en convaincre en faisant e^x/x^n et en développant e^x en ne conservant que les termes en x^{n+1} . Pour tout entier n et $x > 0$, on observe $e^x/x^n > x^{n+1}/x^n (n+1)! = x/x(n+1)$. Ainsi e^x/x^n tend vers l'infini avec x .²

La fonction exponentielle atteint des sommets qui frappent l'imagination. Sa mise sous forme de série retrace une telle ascension et explique son développement par la somme infinie de ses puissances successives. Cette prolifération évoque l'idée de *puissance*, d'une puissance qui s'engendre elle-même, d'étape en étape au point de la qualifier de *courbe des catastrophes* si rien ne vient l'arrêter !

Nous reviendrons sur le sujet de l'explosion démographique quand nous évoquerons Malthus qui joua les Cassandra à la fin du XVIII^e siècle. L'âge des Lumières était déjà en fait préoccupé en matière financière par l'*anatocisme*, c'est-à-dire par la pratique d'ajouter les intérêts échus à la dette. Les intérêts échus des capitaux sont capitalisables. Ils sont eux-mêmes soumis à la dette. Ces *intérêts composés* conduisant inmanquablement à un empilement ou « pyramide » financière.

Lorsqu'une population est décrite par une fonction exponentielle, alors ce temps de redoublement est toujours le même, indépendamment du moment où l'on regarde la population. (Benoît Rittaud, « Les modèles démographiques exponentiels », in Tangente, n°166, 2015, p.35).

¹ La forme exponentielle $x = C^y$, la lettre x désignant étant la puissance, C la base et y l'exposant, devient sous la forme logarithmique $y = \log_C x$, et réciproquement. Supposons $f(x) = \log_7 x$ (logarithme de x en base 7), soit $y = \log_7 x$. On intervertit les variables, d'où $x = \log_7 y$ et $7^x = y$ sous la forme exponentielle. Alors $f(x) = 7^x$.

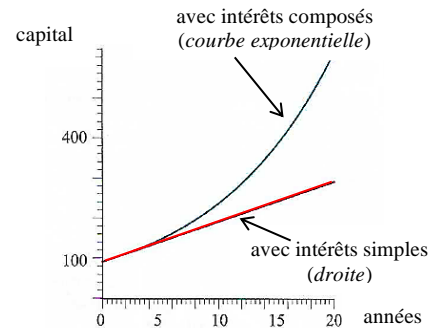
² Bertrand Hauchecorne, « Une série étonnante : l'exponentielle », in *Suites & séries*, Paris, édit. Pole, Paris, 2011, p.108.

iii Le calcul des intérêts

Voici, en termes d'aujourd'hui, l'évolution d'un capital de 100 € placé à 10 % selon que les intérêts se composent ou non (les chiffres ont été choisis pour la simplicité des calculs et l'évidence des résultats).¹

Intérêt simple			
Année	Solde initial	Intérêt	Solde final
1	100	10	110
2	110	10	120
3	120	10	130
4	130	10	140
10	190	10	200
20	290	10	300

Intérêt composé			
Année	Solde initial	Intérêt	Solde final
1	100	10	110
2	110	11	121
3	121	12,1	133,1
4	133,1	13,31	146,41
10	255,80	25,58	259,38
20	611,59	61,16	672,75



Après vingt ans, les intérêts composés procurent un capital supérieur qui est le double de celui obtenu avec des intérêts simples.

Ce genre de calcul n'était pas inconnu dans l'antiquité, ni au moyen âge, notamment en Italie, malgré l'interdit de l'Eglise sur l'usure, mais il semble qu'il a fallu le XVI^e siècle pour que des tables d'intérêt simples et composés sortent de la confidentialité. Sur le continent, Simon Stevin, parmi d'autres, en publie à Anvers en 1582. En Angleterre, Richard Witt présente en 1613, dans son livre *Aritmetical Questions*, la manière de calculer un capital grossi d'un intérêt sur intérêt, précisément de 10 %, le taux maximal admis pour des prêts à l'époque. Une compréhension des intérêts composés est considérée comme une des conditions du développement de l'assurance vie scientifique en Europe.²

C'était en raison d'un accroissement trop rapide des intérêts que la pratique avait été sévèrement condamnée en droit romain, en droit continental et en *common law*. Les intérêts composés étaient regardés comme la pire forme d'usure. Bien que *le taux d'intérêt cache souvent une dévaluation de la valeur de l'argent, qui a toujours une composante temporelle*,³ les taux servis sont loin d'être illusoire. La progression des taux est, de plus, insoupçonnée chez la plupart des contractants. Le droit des Lumières, plus accommodant, resta sur ses gardes. La loi anglaise, *common law & acts*, plus en avance, n'admet cependant la capitalisation des intérêts que dans certains cas. *Compound interest, notamment, is never allowed on the sum in the original obligation or agreement, but it is common, by posterior contracts, to accumulate interest and make it a principal bearing interest*.⁴

Dans son édition princeps, le Code civil de 1804 lèvera, avec la même réticence, l'ancienne prohibition de l'anatocisme. Selon l'article 1154,

Les intérêts échus des capitaux peuvent produire des intérêts, ou par une demande judiciaire, ou par une convention spéciale, pourvu que, soit dans la demande, soit dans la convention, il s'agisse d'intérêts dus au moins pour une année entière.

La capitalisation des intérêts n'intervient donc jamais automatiquement. Il faut en outre qu'il s'agisse d'intérêts dus au moins pour une année entière (si les intérêts sont dus mensuellement, ils ne pourront être intégrés au capital qu'à la fin de l'année).

Quelle est donc la clé de la capitalisation des intérêts qui fait tant craindre son potentiel ravageur ? C'est, résume-t-on aujourd'hui en américain, *a mere self-increasing number, subject to the growth formula : Surplus = Capital (1+interest rate)^t*. Supposons, pour comprendre cette formule, que nous déposions C euros sur un compte d'épargne rémunéré à un taux annuel simple r . En n'effectuant ni

¹ Hervé Lehning, « L'exponentielle, la courbe des catastrophes », in *Tangente*, n°166, 2015, pp.42-43.

² R.H. Parker, « Discounted Flow in Historical perspective », *Journal of Accounting Research*, vol.6, n°1, 1968, Printed in USA ; John Pollock, *The Next Egg Book*, 2010, google books, p.157.

³ H. Lehning, « L'exponentielle, la courbe des catastrophes », p.43.

⁴ William Bell, *A Dictionary of the Law of Scotland, with short explanations of the ordinary English law terms*, Edinburg, 1838, p.200.

dépôts ni retraits, au bout d'un an, le montant du compte aura augmenté de $C + rC = C(1+r)$; au bout de deux ans : $C(1+r)(1+r) = C(1+r)^2$; au bout de t années, il y aura $C(1+r)^t$ euros sur le compte.

Si la banque verse un intérêt à la fin de chaque trimestre, au bout d'un trimestre, le compte sera crédité de $C+r/4C$ euros ; au bout d'un an, de $C(1+r/4)^4$; au bout de t années, de $(C+r/4)^{4t}$. Plus généralement, si l'intérêt est composé n fois par an, il y aura $C(1+r/n)^{nt}$ au bout de t années.

Quelle est la limite de $(1+r/n)^n$ quand n tend vers l'infini ? Considérons, pour simplifier, un placement d'une année et $r=1$ (\Leftrightarrow taux d'intérêt annuel de 100 % \Leftrightarrow notre compte d'épargne rémunéré double en une année). En calculant $(1+1/n)^n$ pour diverses valeurs de n , par ex. 10.000, la valeur de $(1+1/n)^n \approx 2,718281693$. La suite $(1+1/n)^n$ est une suite croissante qui converge le nombre irrationnel e , soit $e = \lim (1+1/n)^n$ avec $n \rightarrow \infty$ (il faut imaginer que la banque compose l'intérêt en continu). Si on prend en compte le capital initial C , les C euros deviendront eC euros, sachant que $e > 2,7$. Le montant du compte triple presque en une année.¹

Si vous bénéficiez d'un contrat s'assurance vie ou d'un plan d'épargne populaire comme aujourd'hui, la capitalisation des intérêts n'est pas, de votre point de vue, catastrophique puisque vos revenus annuels sont transformés en capital supplémentaire, sujet lui-même à intérêt. Cette façon de faire fructifier votre argent et de devenir riche permet de comprendre pourquoi le droit des lumières est devenu, malgré tout, plus libéral que le droit ancestral. L'effet boule de neige des intérêts composés peut être bénéfique à l'économie moderne. Investir un capital de base et le laisser travailler sans toucher aux intérêts perçus inaugure une stratégie de placement qui s'inscrit dans le long terme. Cette incitation à épargner a contribué à répondre aux besoins de financement de la révolution industrielle. Il y a un bon côté de la médaille que les mathématiques de l'époque révèlent également.

La fonction exponentielle croît plus vite que la fonction puissance, mais sa réciproque, la fonction logarithmique est une fonction à croissance lente (elle croît moins vite que la fonction puissance).

Nous reviendrons sur la notion de logarithme, conçue par John Napier au début du XVII^e siècle. D'ores et déjà, il vaut de remarquer deux choses :

1/ le logarithme permet de comprimer les échelles. La transformation de la fonction exponentielle en fonction logarithmique facilite la représentation des données si l'intervalle entre elles est trop grand. Les graduations sont resserrées ; (fig.a)

2/ au cours du même siècle, Christian Huygens fit le lien entre le logarithme et la quadrature de l'hyperbole d'équation $xy = 1$. Ce faisant, il mit en évidence *le logarithme qualifié de naturel* (d'où la notation \ln), mais sa base (le futur e) n'était pas encore totalement identifiée.² (fig.b)

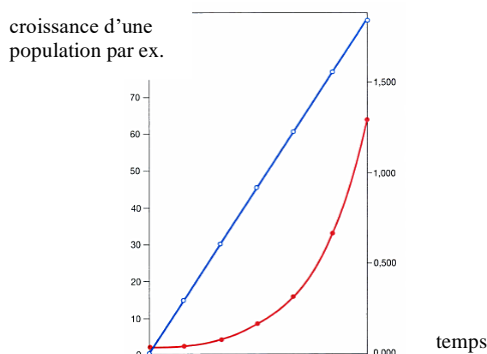
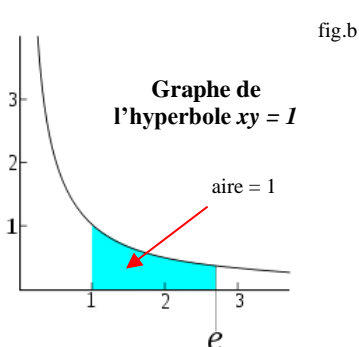


fig.a



La courbe de croissance exponentielle (en rouge) peut être visualisée par un graphe semi-logarithmique (droite en bleu)

L'aire comprise entre les abscisses 1 et e vaut 1. Si on déplace les bornes, l'aire est différente de 1

¹ Michael Hudson, *The Mathematical Economics of Compound Interest*, <http://michael-hudson.com/the-mathematical-economics>, 2004/01; Carl P. Simon & Lawrence Blume, *Mathématiques pour économistes*, Bruxelles, De Boeck, 1998, pp.92-93. La démonstration de la convergence de $(1+1/n)^n$ vers e quand n tend vers l'infini figure aux pages 94-95.

² Jacques Bair, Valérie Henry, Daniel Justens, « Pourquoi travailler systématiquement avec des exponentielles de base e ? », in *Tangente*, n°166, 2015, p.38 ; https://fr.wikipedia.org/wiki/Logarithme_naturel ; J.J. Bonnet, *Utilisation du logarithme et de l'exponentielle*, Conservatoire des arts et métiers, 21 sept. 2006, annexe 1, p.11, <http://ww2.cnam.fr/physique/chap2lgarithme.pdf>.

La fonction logarithmique ne facilite pas seulement la représentation de la fonction exponentielle. La transformation de l'une en l'autre facilite également la résolution de l'équation différentielle du premier ordre que nous avons trop vite indiquée : $dy/dx = Cy$ ou $y'-cy = 0$ pour la résoudre. En écrivant cette équation sous la forme : $dy/y = C dx$, on intègre les deux membres de cette égalité : $\int dy/y = \int C dx$, ce qui donne : $\ln y = Cx + \text{constante}$. Or, comme la fonction inverse du logarithme népérien est la fonction exponentielle, on a finalement : $y = [\exp(\text{constante})] [\exp Cx] = A \exp Cx$.

Le recours aux logarithmes permet de donner une expression de e^x autre que la série $e^x = \sum x^n/n!$.

En effet, d'après le théorème du binôme, avec un exposant rationnel r : $(1+x)^r = 1 + rx + r(r-1)/2 x^2 + r(r-1)(r-2)/3! x^3 + \dots$. En remplaçant x par x/n et r par n , le développement devient : $(1+x/n)^n = 1 + n/n x + n(n-1)/2n^2 x^2 + n(n-1)(n-2)/3!n^3 x^3 + \dots$. C'est cette formule qui permet de retrouver celle du binôme, $(a+b)^{1/2}$, qui se transforme en factoriels, formule que l'on retrouve également par celle de Taylor.¹

Voilà pour Newton. Euler affirme alors que si n est un nombre « plus grand qu'aucune quantité assignable », la fonction $(n-1)/n$ égale l'unité. Il obtient ainsi que la limite, quand n tend vers l'infini, de $(1+x/n)^n$ est $1 + x + x^2/2 + x^3/6$. Cela n'est pas très rigoureux, mais nous sommes encore au XVIII^e siècle. En passant par les logarithmes, on voit que $\ln((1+x/n)^n) = n \ln(1+x/n)$ tend vers x quand n tend l'infini, donc, en revenant à l'exponentielle : $(1+(x/n))^n$ tend e^x . On retrouve la convergence vers e .

Ce résultat, démontré en 1731 par Euler, est intéressant en pratique. Ainsi, si l'inflation se poursuit au rythme de 2 % l'an pendant cinquante ans, on peut approximer l'inflation sur cette période en remplaçant $(1+1/50)^{50}$ par $e = 2,718\dots$ On obtient une augmentation des prix de 171,8 %. [Avec un taux constant, les prix ont été multipliés par 2,718, voilà l'idée. Pour le bricolage technique, voir en note. S'il s'agissait d'un taux d'intérêt sur le capital, le capital d'origine serait multiplié par e aussi.]²

On voit à nouveau que le nombre e joue un rôle central en économie. Ce rôle apparaît aussi fondamental que le nombre π en géométrie. Une telle considération des frontières entre disciplines laisse toutefois de marbre le procédé des séries. La valeur de π pourra être elle-même être approchée par la somme des inverses des carrés des nombres entiers $(1 + 1/2^2 + 1/3^2 + 1/4^2 + \dots = \pi^2/6)$.³ La fonction exponentielle e^x sera en mathématiques développer en série de x sans qu'il ne soit plus nécessaire que la variable x soit un nombre entier. La lettre x pourra être un nombre rationnel, réel, voire un nombre complexe de la forme $a + ib$, dont a est la partie réelle et ib la partie imaginaire.⁴

iv La formule $e^{i\pi} + 1 = 0$

Les nombres complexes sont apparus dans le paysage conceptuel dès le milieu du XVI^e siècle. C'est Euler, le législateur de l'analyse, qui entrevoit le lien entre l'exponentielle et de pareils nombres en utilisant les propriétés si commodes de l'exponentielle : $e^{a+b} = e^a e^b$ et $(e^a)^k = e^{ak}$. En 1740, il introduit les identités qui portent son nom : $e^{ix} = \cos x + i \sin x$, d'où : $\cos x = (e^{ix} + e^{-ix})/2$ et $\sin x = (e^{ix} - e^{-ix})/2$. Comme $\cos \pi = -1$, $\sin \pi = 0$, il obtient tout naturellement $e^{i\pi} + 1 = 0$. C'est la fameuse identité d'Euler qui réunit en une même formule les cinq nombres fondamentaux de l'analyse, e , i , π , 1 et 0 .

Soit $e(x) = 1 + x/1! + x^2/2! + x^3/3! + \dots$. En remplaçant le nombre réel x par le nombre complexe $z = a + ib$, on obtient : $e^z = 1 + z/1! + z^2/2! + z^3/3! + \dots$. Comme $e^z = e^{x+iy} = (e^x)(e^{iy})$, $e^z = e^x e^{iy} = e^x [1 + iy + (iy)^2/2! + (iy)^3/3! + (iy)^4/4! + \dots]$, et $e^{iy} = 1 + iy - y^2/2! - iy^3/3! + y^4/4! + \dots = [1 - y^2/2! + y^4/4! - y^6/6! + \dots] + i[y - y^3/3! + y^5/5! - \dots]$, il s'ensuit : $e^{iy} = \cos y + i \sin y$, d'où $e^z = e^x (\cos y + i \sin y)$. Cette formule réunit déjà la fonction exponentielle et les fonctions trigonométriques. En posant $x=0$ et $y=\pi$, elle devient : $e^{i\pi} + 1 = 0$.

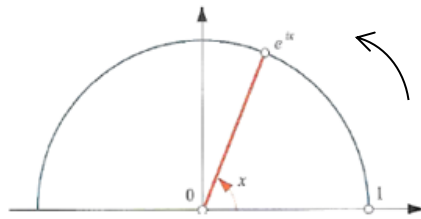
Avec Euler, l'exponentielle ne cesse de réserver des surprises. Elle ne symbolise pas que la courbe dont la croissance paraît incontrôlable, en bien comme en mal. Sa généralisation continue d'ouvrir des portes dans toutes les mathématiques. En concevant l'exponentielle complexe, Euler retrouve la géométrie du cercle (la figure se profilait déjà dans la formule $e^{i\pi} + 1 = 0$ sous la présence de π) :

¹ <https://www.wolframalpha.com>. Par changement de variables $x=-x^2$ et $r = 1/2$, on retombe sur $(1 - x^2)^{1/2}$.

² B. Hauchecorne, « Une série étonnante : l'exponentielle », in *Suites & séries*, p.137. L'auteur rappelle que, pour le calcul de $(1 + 2\%)^{50} = (1+1/50)^{50}$, il faut penser enlever 1. Soit, en effet, 1 ou 100% le chiffre de base qui subit l'inflation. En passant de 100% à 271,8 %, on observe une augmentation relative de $271,8\% - 100\% = 171,8\%$.

³ Alexandre Moati, « Probabilité arithmétique et $\zeta(2)$ », in *Leonhard Euler. Un génie des Lumières*, Paris, édit. Pole, 2007, pp.102-103. La somme des inverses des carrés est appelée rétrospectivement $\zeta(2)$ par référence à la fonction ζ qu'étudiera Riemann au XIX^e siècle.

⁴ Hervé Lenning, « L'extension de l'exponentielle », in *L. Euler. Un génie des ...*, pp.104-108 ; Elisabeth Busser, « e comme exponentielle », in *Tangente, ibid.*, p.29 ; Léonard Euler, *Introduction à l'analyse infinitésimale* [1758], t.1, Préf., Paris, ACL, 1987, p.vij.

Signification géométrique de e^{ix}

Le point e^{ix} décrit le cercle trigonométrique (de centre 0 et de rayon 1) quand le nombre réel x varie de 0 à π (si le rayon de cercle est 1, sa 1/2 circonférence est π).

Euler obtient la fameuse relation $e^{iy} = \cos y + i \sin y$, qui relie les nombres complexes au réel en ce sens précis que l'angle de la géométrie, ici x , est désormais représenté par une formule purement analytique, et où ce qui est noté i est présenté par Euler comme une expression dont le carré vaut -1 .¹

Dans la formule d'Euler $e^{i\pi} + 1 = 0$,

- la grandeur i suggère une rotation d'un quart de tour. La rotation d'un demi-tour consiste à ajouter un quart de tour à un quart de tour. Elle revient à passer, sur l'axe de x , de la longueur $+1$ à la longueur à -1 , ou à multiplier i par i sachant que, par définition, $i^2 = -1$. Le nombre complexe i indique une rotation d'un quart de tour quand il multiplie un autre nombre complexe ;

(§11-i)

- la grandeur π renvoie à l'idée de cercle puisque π rapporte la circonférence d'un cercle à son diamètre (le symbole désigne l'initiale minuscule grecque du mot périmètre). Ce nombre ne dépend pas de la taille du cercle. La première méthode du calcul de π remonte à l'antiquité. Archimède approcha la longueur du cercle par celle d'un polygone régulier dont il augmenta de plus en plus le nombre de côtés. En continuant indéfiniment, le polygone épouse la forme du cercle (fig. a infra);

- la grandeur $e^{i\pi} = -1$ combine les nombres π , i et e . Le nombre π joue le rôle d'un angle (à tel angle correspond tel arc de cercle). Une rotation d'un quart de tour, autour de l'origine du cercle unité, vaut $\pi/2$ radians (ou 90° , sachant que l'on aurait pu écrire $e^{i180^\circ} = -1$, ou 100 grades sachant que $e^{i200\text{grad}} = -1$; c'est une simple question d'échelle). La rotation d'un quart de tour transforme la longueur $+1$ en i . Une rotation d'un demi-tour vaut π radians ; cette rotation revient à multiplier i par i , soit $i \times i = i^2 = -1$. Une rotation de deux demi-tours vaut 2π radians ; la valeur de la distance redevient positive et égale à nouveau $+1$. Etc. Chaque point du cercle peut être exprimé en sinus et en cosinus. Nous retrouvons, par le biais de la trigonométrie, le nombre e . Comme Abraham de Moivre et Leonhard Euler l'ont montré au XVIII^e siècle, la périodicité surgit de l'accouplement des deux symboles e et i .²

(Annexe I)

A travers Euler, les notions mathématiques s'appellent les unes les autres bien qu'elles ne semblent pas entretenir de lien à première vue. Sans idée préconçue, Euler jette des ponts à tâtons entre l'algèbre, la trigonométrie et la géométrie de la même façon que Newton « relie » la force (le vecteur \mathbf{F}), la masse (le scalaire m) et l'accélération (le vecteur \mathbf{a}) via l'équation $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ (si m ou $\mathbf{a} = 0$, la force \mathbf{F} est nulle, d'où la considération du produit $m\mathbf{a}$ et non de la somme $m+\mathbf{a}$).

Newton « relie » mathématiquement en pensant que c'est vrai dans la nature, mais la physique ne démontre pas que la nature fonctionne comme $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$. L'équation d'Einstein en relativité confirme au XX^e siècle que la formule newtonienne n'est pas toujours bonne mais, en créant des concepts, les mathématiciens créent des outils et l'appropriation de ces outils par la société fait partie du progrès des mathématiques.³ Bien que les mathématiciens étudient leurs objets en eux-mêmes, ces objets deviennent des outils de pensée qu'on retrouve dans de nombreux domaines du savoir et de l'action.

Est-ce à dire que cette idée d'appropriation doit être comprise comme une simple diffusion ? Nous ne le pensons pas. Jusqu'ici nous avons vu que **les concepts mathématiques révèlent des raisonnements de même nature qui se construisent plus ou moins parallèlement dans d'autres domaines du savoir, voire au cœur de l'action. Les raisonnements des mathématiciens répondent à l'âge des Lumières aux raisonnements des physiciens, des économistes et des**

¹ Jean Dhombres, in Pierre Cartier, Jean Dhombres, Gerhard Heinzmann, Cédric Villani, *Mathématiques en liberté*, Paris, édit. La ville brûle, 2012, p.53.

² Marcel Boll, *Histoire des mathématiques*, Puf, Paris, 1963, p.104.

³ Pierre Cartier, in Pierre Cartier, Jean Dhombres, Gerhard Heinzmann, Cédric Villani, *Mathématiques en liberté*, p.51.

juristes. Le lecteur qui demeure sceptique devra patienter avant de découvrir notamment le jeu social et institutionnel de la *loi normale* dans la définition de laquelle figurent les nombres e et π .

L'*épistémè* n'est pas un socle préexistant de toute éternité. Elle est une construction collective et individuelle d'une époque donnée qui opère çà et là dans tous les cerveaux négociant avec la réalité.

4/ Lagrange

i La série Taylor-Lagrange

Jusqu'ici, les Lumières se sont efforcées de calculer la somme S d'une série entière, soit $S = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots$. Une fonction f peut être décomposée de cette manière, mais est-il possible de développer une fonction à partir d'elle-même ?

Résumons l'apport d'Euler pour mieux comprendre le problème.

Selon Euler, toute fonction est développable en séries de puissances. Même les nombres transcendants e et π , qui ne peuvent s'écrire, comme les nombres algébriques, sous la forme d'un polynôme, le sont. La fonction f d'une variable x s'écrit sous la forme d'une addition pondérée des puissances de la variable x . Cette addition pondérée, qui est par définition une combinaison linéaire, est identifiable à un polynôme en x développable suivant les puissances de x , soit $1, x, x^2, x^3, x^4, \dots$

Mais comment calculer les facteurs a_n qui flanquent ces puissances ? Tel est le hic que Lagrange se propose de résoudre. Au lieu de s'attaquer à la somme des puissances de la variable x^n , Lagrange s'intéresse à celle de ses dérivées nx^{n-1} . En supposant que la fonction f soit infiniment dérivable, la détermination des coefficients du polynôme $f(x)$ devient plus facile autour d'un point donné, 0 par ex.

Posons $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots$. En remplaçant x par 0 , nous obtenons le premier coefficient: $f(0) = a_0$. Pour calculer a_1 , nous dérivons les deux parties de l'équation $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots$ par rapport à x , soit $f'(x) = a_1 + 2a_2x + \dots + 3a_3x^2 + \dots + na_nx^{n-1} + \dots$. En remplaçant x par 0 , nous obtenons le second coefficient : $f'(0) = a_1$. Pour calculer a_2 , nous continuons de dériver par rapport à x , soit : $f''(x) = 2a_2 + \dots + 2.3 a_3x + \dots + (n-1)a_nx^{n-2} + \dots$. En remplaçant x par 0 , nous obtenons le troisième coefficient : $f''(0) = 2a_2$, ou $a_2 = f''(0)/2$. Pour calculer a_3 , nous continuons de dériver par rapport à x , soit : $f^{(3)}(x) = 2.3 a_3 + 2.3.4.a_4x + \dots + (n-2)(n-1)na_nx^{n-3} + \dots$. En remplaçant x par 0 , nous obtenons le troisième coefficient : $f^{(3)}(0) = 2.3a_3$, ou $a_3 = f^{(3)}(0)/2.3 = f^{(3)}(0)/3!$

Etc. D'où la formule de Maclaurin : $f(x) = f(0) + x/1! f'(0) + x^2/2! f''(0) + x^3/3! f^{(3)}(0) + \dots + x^n/n! f^{(n)}(0)$. En dehors du point $x=0$, on reconnaîtra le développement d'une fonction f en série de Taylor autour d'un point $x+h$, avec h très petit: $f(x+h) = f(x) + hf'(x) + (h^2/2!) f''(x) + \dots$ (si $h = 0$, on retrouve la formule précédente).¹

La série de Taylor présente l'avantage de calculer la fonction f par un polynôme en h (l'écart par rapport au point x). Lagrange prolonge cet avantage en exploitant les propriétés de dérivation de f .

Le point x peut être quelconque (on peut le choisir), mais on ne peut se contenter de préciser la valeur de f au point x . On doit connaître les n premières dérivées de la fonction f . Le polynôme est formé de monômes en h^n dont le coefficient est la dérivée $n^{\text{ième}}$ en x divisée par la factorielle $n!$. On calcule la dérivée $n^{\text{ième}}$ de la fonction en se basant sur la dérivée $(n-1)^{\text{ième}}$. Je prends le commencement (dérivée 1^{re}), puis le commencement du commencement (dérivée seconde), puis le commencement du commencement du commencement (dérivée troisième), etc. je m'approche de plus en plus des valeurs de la fonction autour de x . Au départ, l'écart h était très petit. A la dérivée $n^{\text{ième}}$, il est devenu l'écart h^n . L'écart par rapport à x est de plus en plus petit avec n de plus en plus grand.

Le calcul de la fonction f , via une série de Taylor, repose sur un processus récursif qui permet d'estimer toutes les dérivées de la fonction en x . On voit s'esquisser le mécanisme d'*auto-engendrement* cher à Lagrange. Mais entendons bien : **ce n'est pas la fonction qui engendre la**

¹ Ph. Etchecopar, N. Garric et N. Verdier, *Calcul différentiel et intégral*, pp.45-47.

dérivée, mais c'est parce qu'il existe une série qu'il est possible de parler d'engendrement. C'est la série des dérivées qui engendrent la fonction de même que dans une série ce sont les termes qui s'additionnent qui engendrent la limite. C'est la suite des dérivées qui importe.

- Cette partie devient un peu trop technique pour les juristes, mais j'imagine que c'est ce mode de raisonnement qui peut intéresser les juristes derrière ce vocabulaire algébrique. C'est trop beau, à vrai dire, pour être vrai. Le droit n'est pas aussi logique que la mathématique. Ce n'est que du bric-à-brac ajouté en fonction des problèmes. Le droit institutionnel des Lumières n'a d'éclat que superficiel !

- Vous êtes trop dur. Le constitutionnalisme des Lumières a rompu avec la loi arbitraire. Vous ne pouvez ignorer l'aspect rationnel du droit, même si la logique, par certains côtés, il y a du chaotique.

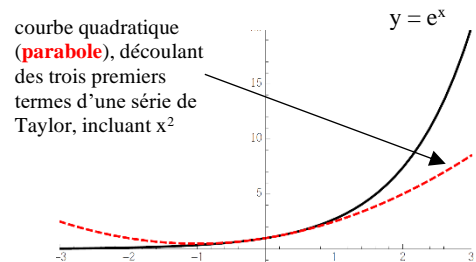
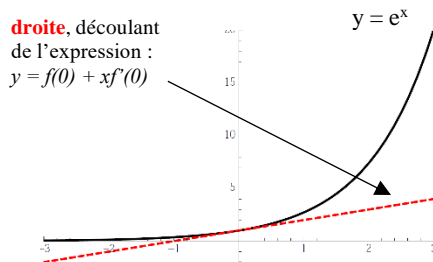
Dans la série des dérivées, il y a là une forme mathématique de pensée fondamentale que l'on retrouve en droit constitutionnel, en philosophie politique autant qu'en philosophie naturelle. Sans doute, faut-il éviter d'être victime d'« algèbre mentale »¹, ou de tomber dans la rigueur excessive, mais le mode de pensée mathématique, parce qu'il est, dans une certaine mesure trop simpliste pour le droit, aide à situer avec précision leur points communs et leurs différences. Il me semble que l'idée d'auto-engendrement est une des idées centrales des Lumières. Un philosophe comme Hegel l'a bien deviné, non sans erreur, comme on le verra. Un exemple en droit viendra en fortifier l'intuition.

En attendant, le lecteur fatigué peut passer. Pour celui qui veut comprendre la démarche intellectuelle qui est derrière, reprenons le processus et son *modus operandi* qui semble imparable. En dérivant par rapport à h l'expression précédente : $f(x+h) = f(x) + ph + qh^2 + rh^3 + \dots$, on obtient par auto-engendrement les coefficients p, q, r, \dots . On itère alors le processus en négligeant, à chaque fois, tous les termes du développement à partir du troisième.

(Annexe II)

ii Une amélioration de l'approximation des fonctions

La détermination des dérivées entraîne celle des coefficients correspondants dans le polynôme en x qui approxime la fonction. Par cette méthode, on développe, par exemple, la fonction exponentielle $y(x) = e^x$ autour de 0, soit $e^x = 1 + x + x^2/2! + \dots + x^n/n! + \dots$. Plus la série comporte de termes, plus l'approximation est précise. Nous l'avions déjà indiqué, mais il vaut mieux le voir pour s'en émouvoir :



approximation de $y=e^x$ jusqu'au 1^{er} ordre d'une série de Taylor au point 0, soit $y = e^0 + e'(x_0)x/1! = e^0 + e^0x$ (sachant que e^x est sa propre dérivée) $= 1+x$ (équation d'une droite qui approche $y=e^x$)

approximation de $y = e^x$ jusqu'au 2^e ordre d'une série de Taylor au point 0, soit $y = 1+x + e''(x_0)/2! = 1+x + x^2/2$ (équation d'une parabole qui approche mieux $y=e^x$)

Les deux figures montrent comment le procédé de Lagrange améliore la qualité de l'approximation d'une fonction. Du point de vue géométrique, le graphe de la figure de gauche est approché par la tangente de la fonction au point 0 ; du point de vue analytique, la fonction est approximée par un polynôme de degré un (une droite). La figure de droite représente une meilleure approximation de la même fonction, mais attention une amélioration de la précision peut également advenir autrement.

Considérons l'expression tronquée $f(x+h) \approx f(x) + hf'(x)$. Non seulement l'approximation s'améliore lorsque h diminue, mais elle s'améliore selon un ordre de grandeur plus petit que h . Par exemple, si h est égal à 0,01, les deux membres de cette expression sont égaux à une différence près de 0,001. [à

¹ Claude P Bruter, *Les architectes du feu. Considérations sur les modèles*, Flammarion, Paris, 1982, p.67..

l'ordre suivant de h , soit $1/2f''(a)h^2$. Si $h = 0,001$, $h^2 = 0,001$, en supposant que h varie de 10 en 10]¹. C'est dire si une fonction, dérivable un nombre infini de fois, peut être approximée le mieux qui soit !

Fort de son succès, Lagrange étend la portée de son formalisme. Il pose que toute fonction $f(x)$ est développable en série de Taylor: $f(x+i) = f(x) + pi + qi^2 + ri^3 + \dots$, le point $(x+i)$ étant le point voisin de x . Dans sa *Théorie des fonctions analytiques* publiée en 1797, Lagrange postule ainsi l'universalité de son procédé :

Le calcul différentiel, considéré dans toute sa généralité, consiste à trouver directement, et par des procédés simples et faciles, les fonctions p, q, r, \dots dérivées de la fonction f ; et le calcul intégral consiste à retrouver la fonction f par le moyen de ces dernières fonctions.²

A première vue, ces lignes donnent l'impression que Lagrange revient au simple calcul différentiel pour trouver les dérivées d'une fonction donnée et au simple calcul intégral pour retrouver la fonction à partir de ses dérivées. Cependant, grâce à son usage de la dérivée *développable en série*, Lagrange introduit une nouveauté. Il recourt à une technique ingénieuse de fabrication des dérivées qui figuraient dans la série de Taylor mais qui n'étaient pas toujours aisées à calculer. Dans sa volonté de généraliser son procédé, une seule condition perdure : il faut que dans le développement $f(x+i) = f(x) + pi + qi^2 + ri^3 + \dots$, la quantité i soit assez petite afin que chaque terme de la série i soit plus grand que la somme des termes qui le suivent. Il serait vain autrement d'espérer approcher la fonction avec une série de puissances de plus en plus grandes ! (On le comprend facilement en considérant la série numérique $1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + \dots$. Chaque terme est au moins égal à la somme de ceux qui suivent, par ex. $1 \geq 1/2 + 1/4$, sinon la série en son entier ne pourra pas tendre vers 1.)

Lagrange croit comme Taylor que la convergence de la série est toujours possible. Son mérite est d'avoir mis à jour la *loi de formation*³ de la série de Taylor via un mécanisme d'engendrement des dérivées. Cette loi de formation rappelle la génération des nombres dans le triangle arithmétique. Dans la série de Taylor-Lagrange, l'opération de dérivation fait l'objet d'un traitement plus formel que le maniement des séries non numériques par Euler. Cette approche finit par dominer le XVIII^e siècle.⁴

5/ L'ère de la série

- i L'idée de série chez Hobbes, Locke et Hume*
- ii L'idée de série chez Diderot et à nouveau chez Montesquieu*
- iii L'existence d'un calcul financier chez Rousseau*

¹ C. P. Simon & L. Blume, *Mathématiques pour économistes*, op. cit., p.857.

² cité in A. Dahan-Dalmenico/J.Peiffer, *Une hist. des math.s.*, p.201.

³ A. D-Dalmenico/J.Peiffer., p.201.

⁴ J.-P. Collette, *Hist. des math.*, t. 2, chap. 5 : L'époque d'Euler, p.117.

Annexe I

Les transformations des longueurs autour du cercle

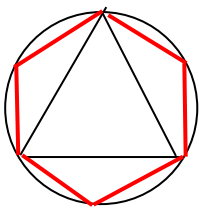
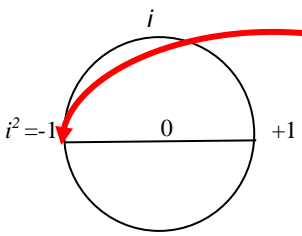
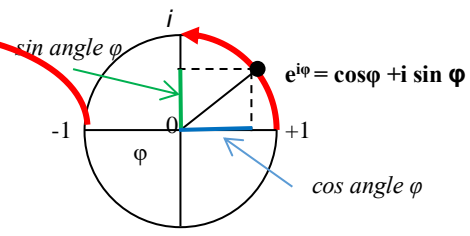


fig.(a)



rotation d'un demi-tour (-1 en +1)

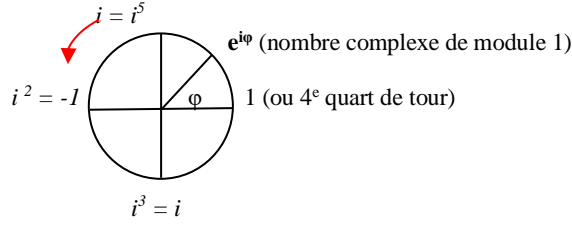


rotation d'un quart de tour (+1 en i)

Le nombre e n'opère pas en tant que chiffre mais opérateur exponentiel. Sachant que l'opérateur exponentiel peut s'écrire sans le symbole e (par ex. : $e^{b \text{Log } a} = a^b$), le symbole e n'est pas a priori nécessaire pour créer de la périodicité. Celle-ci dépend de i , puisque, par ex., en écrivant $i^5 = i$, on retrouve i sur le cercle unité ($i^5 = i$).

On tourne autour du cercle en prenant des multiples de i , par ex. $i \pi$ (un demi-tour), $2 i \pi$ (un tour), etc. La période de la fonction exponentielle est de $2\pi i$. Le nombre e intervient dans la périodicité si on entend tourner sur un cercle de rayon 1 , car le nombre e , élevé à une puissance imaginaire pure (nombre complexe à partie réelle nulle) est un nombre complexe de module 1 .

Soit $e^{i\pi}$ un tel nombre. En le multipliant k fois par lui-même, on obtient le nombre $e^{ki\pi}$. On tourne sur le cercle mais on ne retrouve le même point que si le facteur k de $i \pi$ est rationnel dans l'exposant. Si le facteur est irrationnel, la périodicité est perdue. On retombe sur un autre point. De façon ramassée, $e^{ki\pi} = e^{i\varphi}$ avec $\varphi = k\pi$ désignant un angle quelconque.



$i^5 = i$
 $i^2 = -1$
 $i^3 = i$
 $e^{i\varphi}$ (nombre complexe de module 1)
 1 (ou 4^e quart de tour)

Annexe II

Auto-engendrement des coefficients dans une série de Taylor-Lagrange

$$f(x+h) = f(x) + ph + qh^2 + ph^3 + \dots$$

$$f(x+h) - f(x) = ph \text{ (en négligeant } qh^2 + ph^3 + \dots \text{),}$$

d'où :

$$[f(x+h) - f(x)]/h = f'(x) = p \text{ (en dérivant par rapport à } h, \text{ c'est-à-dire en faisant tendre } h \text{ vers } 0 \text{)}$$

$$f'(x+h) = f'(x) + p + 2qh + 3rh^2 + \dots$$

$$f'(x+h) - f'(x) = p + 2qh \text{ (en négligeant le développement à partir de } 3rh^2 \text{),}$$

d'où :

$$[f'(x+h) - f'(x)]/h = f''(x) = 2q \text{ (avec } h \rightarrow 0 \text{), d'où } q = f''(x)/2 = f''(x)/2!$$

$$f''(x+h) = f''(x) + 2q + 6rh + \dots$$

$$f''(x+h) - f''(x) = 2q + 6rh + \dots$$

$$[f''(x+h) - f''(x)]/h = 6r \text{ (avec } h \rightarrow 0 \text{), d'où : } r = f^{(3)}(x)/6 = f^{(3)}(x)/3!$$

....

Les dérivées dérivent les unes des autres. Il s'ensuit :

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + f''(x)h^2/2! + \dots \text{ (formule de Taylor)}$$

§ 26.- L'IDEE D'AUTO-ENGENDREMENT

a) Ce que retient Hegel de Lagrange

- i La partie recomposerait le tout
- ii Hegel fait l'impasse sur Pascal et le rectangle diagonal
- iii Une troisième erreur d'interprétation de Hegel : la génération des dérivées sans l'appui d'une série
- iv Une quatrième erreur d'interprétation de Hegel : l'indifférence à l'idée de majoration du reste d'une série

b) La mise au ban de la Providence

- i La Providence selon Bossuet et Leibniz
- ii Le désastre de la Providence à Lisbonne
- iv La volonté générale de la nature
- v La prétendue Raison dans l'histoire

Annexe I, 86

○

Annexe I

visualisation du développement des premières puissances du binôme de Newton

développement en série de Maclaurin de $(1+x)^n$

Soit à nouveau $f(x) = (1+x)^n$ avec $f(0) = 1$; $f'(x) = n(1+x)^{n-1}$; $f''(x) = n(n-1)(1+x)^{n-2}$; $f'''(x) = n(n-1)(n-2)(1+x)^{n-3}$, etc.

Au point 0, $f(x) = (1+0)^n + x/1! [(n(1+0)^{n-1})] + x^2/2! [(n(n-1)(1+0)^{n-2})] + x^3/3! [(n(n-1)(n-2)(1+0)^{n-3})] + \dots$

$$= 1n + nx + n(n-1)/2! x^2 + n(n-1)(n-2)/x^3! x^3 + \dots$$

$$= C_n^0 x^0 + C_n^1 x^1 + C_n^2 x^2 + \dots + C_n^p x^p + \dots + C_n^n x^n.$$

D'où $(1+x)^n = \sum C_p^n = n! / (p!(n-p)! x^n$, n allant de 0 à l' ∞

C_n^p (combinaison de p éléments parmi n)
s'écrit en notation moderne : $\binom{n}{p}$

développement de $(a+b)^n$ jusqu'à la 4^e puissance ¹

$$\begin{aligned} (a+b)^1 &= a + b \\ (a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\ (a+b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\ (a+b)^4 &= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 \end{aligned}$$

¹ https://en.wikipedia.org/wiki/Binomial_theorem; Binomial theorem – The General term formula, <http://www.numberskill.com/>

§27.- DE LA PUISSANCE INDIVIDUELLE AU CORPS SOCIAL

1/ La notion de racine en mathématiques

a) La racine d'une équation, 88

Annexe I, 91

b) Le théorème fondamental de l'algèbre, 91

2/ La notion de racine en droit, 93

a) Racine et division, 93

b) La question du « reste », 95

3/ La « descente infinie » chez Hobbes

i La méthode de Fermat

ii La méthode de Hobbes

iii Comparaison des deux méthodes

Annexe II^{bis} et II^{ter}, 96

4/ La « racine » de l'Etat

a) L'individu

b) L'individu protestant et commerçant,

i De nouvelles « racines » sociales

ii Des individus doublement libres

c) Le plan complexe, 98

i Les nombres imaginaires purs, 98

ii Quelques propriétés de base, 99

d) Un chemin par-dessus la barrière

i La « barrière de verre »

ii Des chemins alternatifs

5/ On cherche à comprendre

i Questions d'ordre technique et philosophiques

ii Questions d'ordre historique

iii La compatibilité avec d'autres propriétés du plan complexe

iv La Bible et le livre de comptes

v Aporie ou cul-de-sac final ?

6/ Une vision enrichie de l'individu

a) Du « je » à Robinson

i Un sujet devenu actif

ii Robinson Crusoe, héros d'un nouveau genre

b) Le « générateur » Robinson

i Le nouvel Adam

ii Et Vendredi ?

c) L'arithmétique modulaire

i Penser en modulo, 100

ii Exemples, 101

Annexe VI, 103

d) Un droit « modulaire »

i Raisonner en équivalence

ii Mandat représentatif, mandat impératif

iii Modulo et cycle

Annexe VII, 104

7/ Lève-toi et marche !

a) L'autoconservation comme cycle ouvert

b) La série plutôt que l'intégrale

c) Les époques du progrès selon Condorcet

d) Le couronnement de « l'humaine condition » (et non de l'Etat)

1/ La notion de racine en mathématiques

a) La racine d'une équation

Nous avons cessé de nous mouvoir dans l'Absolu, mais avons gardé l'idée d'auto-engendrement dans la nature et l'histoire des hommes. A l'âge des Lumières, cette idée se substitue à celle de Providence, soit pour la remplacer totalement (option dominante), soit pour la refonder partiellement. L'idée d'auto-engendrement est soutenue par celle de série qui dénote un processus dynamique à l'image des séries infinies convergentes comme la série $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$. Dans cette série,

la différence $1 - (\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots)$ est plus petite que toute quantité donnée sans être nulle. Elle n'empêchera pas de poser $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$ à la condition seulement de substituer à l'égalité statique des Cartésiens l'égalité dynamique, celle que Fermat avait envisagée sous le nom d'« adégalité » [Comme l'écrit Leibniz], « l'égalité peut être considérée comme une inégalité infiniment petite, et on peut faire approcher l'inégalité de l'égalité autant qu'on veut. »¹

Cette différence ne résulte pas d'une soustraction au sens arithmétique du terme. Elle est saisie par le mouvement de l'intelligence, capable, comme la nature, d'une extension illimitée. Nous ne restons pas que dans l'esprit de l'homme, et encore moins dans l'Esprit, mais il faut reconnaître *une expansion spontanée [de la pensée] dont l'analyse infinitésimale est la manifestation.*² Cette spontanéité n'exclut point la distinction entre la pensée et l'étendue, chère à Descartes, sensible déjà à un tel développement dans le fait que les nombres 3, 6, 12, 24, 48, etc. sont dans une proportion continue (3 est à 6 comme 6 est à 12, comme 12 est à 24, comme 24 est à 48, etc.) :

Descartes calcule, à l'aide de la raison [multiplicative 2], les produits successifs 6, 12, 24, 48. Le nombre originaire 3 étant reconnu pour cause, les effets successifs sont donc les éléments de la chaîne intermédiaire, tous définis et solidaires (par le biais de la raison) jusqu'à un effet complexe terminal (48). [...] L'effet découle, à la fois, des causes et de la chaîne des inférences. L'objet terminal est le produit d'un ordre contraignant.

Nous trouvons chez Descartes comme chez Pascal la combinaison d'un élément générateur (*le nombre originaire*) et d'un opérateur (*la chaîne des inférences*), mais pour Descartes, l'effet résultant rappelle *le registre progradient de la synthèse*. Or nous savons qu'à ses yeux,

(§16-2/
iii)

*les véritables progrès sont ceux qui se posent en sens inverse. La situation commune est celle-ci : on ne connaît que l'effet (48, nature composée) et la cause (3, nature simple). Comment remonter à la cause à partir de l'effet ? Comment, par le mouvement de l'analyse, retrouver ce qui a été construit et caché, c'est-à-dire résoudre une difficulté en ses éléments simples. Un moyen naturel pour le faire est de tâcher d'insérer un médium, un moyen terme, un pont, entre 3 et 48, nombre intermédiaire qui les relie et les solidarise [...] puis d'itérer l'opération.*³

Le pont en question et l'insertion de moyennes proportionnelles successives, par ex. la moyenne proportionnelle 6 entre 3 et 12. (Pour en trouver une, x , entre deux nombres a et b , il suffit de poser : $a/x = x/b$, soit $x^2 = ab$, et $x = \sqrt{ab}$.) L'analyse ramène *graduellement les propositions compliquées et obscures aux plus simples*, conformément à la Règle V des *Règles pour la direction de l'esprit*.⁴ En partant de l'inconnue (ou de la conclusion) et en revenant vers les données (et à la condition qui les lie à l'inconnue), on détermine l'inconnue x qui était supposée au départ connue (la condition dans l'ex. est le rapport $3/x = x/12$, a et b étant les données).

La méthode analytique, de nature régressive, a réussi à Descartes. Certes, Descartes a négligé d'explorer plus avant le raisonnement progressif en œuvre dans les suites numériques (comme 3, 6, 12, 24, 48, voire $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$). Il a encore moins travaillé sur des suites définies par une fonction (ex : $u_n = (3u_{n-1} + 1)/(n+1)$), en supposant que les nombres en cause ne soient pas des entiers (au risque sinon que rien ne marche). Il n'a pas non plus songé à la démonstration par récurrence avec $u_n = f(u_{n-1})$ ou $u_{n+1} = fu_n$ avec changement de variable (la suite ayant par ex. comme 1^{er} terme $u_0=1$ et la relation $u_{n+1}=2u_n/2+3u_n$). Cependant, en approfondissant sa méthode, il n'en a pas moins réfléchi sur **l'idée d'un engendrement interne qui permet de connaître une équation**

¹ L. Brunschvigg, *Les étapes de la philosophie mathématique*, op. cit., p.208.

² *Ibid.*, p.209.

³ Michel Serfati, "Les compass cartésiens", *Archives de philosophie*, 56, 1993, in V. Julien, *Descartes. La Géométrie de 1637*, p.23.

⁴ Descartes, *Règles pour la direction de l'esprit*, op. cit, Pléiade, p.52.

algébrique, et donc de représenter une courbe décrivant un polynôme, $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$. La résolution de l'équation en détermine le tracé entier.

Les racines d'une équation forment son soubassement. La racine d'une équation est la valeur de l'inconnue x qui annule le polynôme. Soit, par ex., $2x - 5 = 0$. La racine $5/2$ est la solution possible de cette équation, ce que confirme la réciproque puisque $2(5/2) - 5 = 0$. Autre ex. : soit l'équation $x^2 + x - 1 = 0$. Sachant que $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, nous pouvons réorganiser l'équation en $x^2 + x = 1$ en remarquant que le membre de gauche est le début d'un carré : $(x+1/2)^2 = x^2 + x + 1/4$. Nous ajoutons donc $1/4$ à chaque membre, ce qui donne : $x^2 + x + 1/4 = 1 + 1/4 = 5/4$ et $(x+1/2)^2 = 5/4$. Le nombre $5/4$ a deux racines carrées : $\pm\sqrt{5}/2$, soit $x+1/2 = \pm\sqrt{5}/2$, d'où les deux solutions : $x = -1 \pm \sqrt{5}/2$ comme on peut le vérifier à nouveau en remplaçant la valeur de x dans l'équation.¹

La racine n'est pas nécessairement unique. Tout dépend du nombre recherché. L'équation $x^2 = 1$ a une solution, et une seule ($x=1$) ; elle en admet deux (-1 et $+1$) si on cherche un nombre relatif. Cependant, même si on n'envisage que des nombres entiers, il est possible d'obtenir plusieurs solutions (soit $x^2 + y^2 = z^2$ avec $x, y, z \geq 1$; selon un théorème établi, il existe une infinité de nombres entiers x, y, z tels que $x^2 + y^2 = z^2$).

(réaction d'un homme de sciences qui baille en lisant ces propos qui le ramènent à la classe maternelle)

- Toute cette partie a été apprise à l'école élémentaire et secondaire. Pourquoi s'évertuer à la rappeler dans une thèse d'une toute autre ampleur ?

- Parce qu'il est bon de remettre en place les choses qui ont été apprises, que beaucoup de personnes, même cultivées, ont depuis oubliées. Le simple n'est jamais aussi simple qu'il n'y paraît. Et pour saisir le rapprochement avec les modes de penser du droit, il vaut mieux rappeler les fondamentaux, aussi ridicule, et inutile que soit pour certains, ce memento.

Je continue donc, en présentant mes excuses à ceux ou celles dont la pensée est plus haute...

Une inconnue peut être connue sous la forme d'une ou plusieurs solutions, mais quid d'une équation comportant plusieurs inconnues ? Combien de racines peut-on s'attendre à trouver en sous-sol ?

Soit un exercice fort simple : *Dans trois ans, un père aura trois fois l'âge de son fils. Quel est son âge et celui de son fils ?* Désignons par x l'âge du père et par y celui de son fils. L'information fournie peut se traduire par la relation : $x+3 = 3(y+3)$, ou, de façon simplifiée : $x-3y = 6$. En l'état, de nombreuses solutions sont candidates. Par ex. : $x=18$ et $y=4$; $x=21$ et $y=5$; $x=30$ et $y=8$; etc. Heureusement, une seconde information est donnée pour resserrer le nombre de solutions : *Il y a trois ans, le père avait cinq fois l'âge du fils.* Cette donnée se traduit par la relation : $x-3=5(y-3)$. D'où un système de deux équations à deux inconnues : $x+3 = 3(y+3)$ et $x-3=5(y-3)$.

La condition d'ensemble, qui comprend deux parties, peut s'exprimer ainsi par autant d'équations que d'inconnues. Elle est en général suffisante pour déterminer les inconnues, mais dans certains cas, elle peut se révéler encore insuffisante ou contradictoire. *Si nous ne gardons qu'une partie de la condition et négligeons l'autre, l'inconnue n'est pas complètement déterminée.*² L'âge des lumières a mis au point deux méthodes pour résoudre un système de deux équations à deux inconnues : la méthode de substitution et celle de combinaisons.

La méthode de substitution. Reprenons notre exemple. On tire x de la 1^{re} équation : $x = 3(y+3)-3$, soit $x = 3y+6$, et on reporte dans la 2^{de} équation qui devient : $(3y+6)-3=5(y-3)$, soit $y = 9$. L'expression de x à l'aide de y permet de trouver l'autre inconnue, x , soit $x = 3y+6=27+6=33$. Le père a 33 ans et le fils 9.

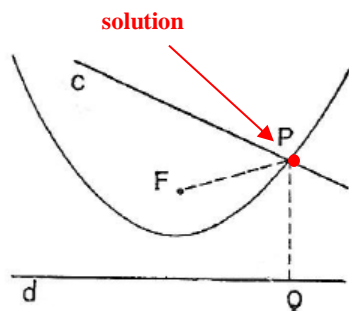
La méthode de combinaisons. Gardons le même exemple : $x+3 = 3(y+3)$ et $x-3 = 5(y-3)$. On multiplie les deux membres de la 2^{de} équation par -1 avant d'additionner. On obtient $6=3y+9-5y+15$, réduit en $2y = 18$, d'où $y = 9$. *On aurait pu aussi choisir de multiplier les deux membres de la 1^{re} équation par 5,*

¹ Hervé Lehning, « Les manipulations algébriques », in *Les équations algébriques. Aborder les inconnues*, Tangente, HS n°22, édit. Paris, POLE, 2005, pp.18-19.

² G. Polya, *Comment poser et résoudre un problème*, op. cit., p.63.

ceux de la seconde par -3 , avant d'additionner membre à membre, soit $5x-3y+15+9= 15y+45-15y+45$ et $x=33$. Les manipulations algébriques règlent, dans les deux méthodes, le problème.¹

La méthode cartésienne de construire les racines par l'intersection de deux droites, d'une ligne droite et d'un cercle, de deux cercles ou de deux coniques (cercle et parabole par ex.) répond à la nécessité de relier les deux parties de la condition pour trouver une ou plusieurs solutions. Veut-on par ex. construire le point d'intersection d'une droite et d'une parabole dont le foyer et la directrice sont données, on doit répondre aux questions :



Quelle est l'inconnue ? Le point P.

Quelles sont les données ? Les droites c et de la parabole dont la directrice est d et le foyer F. Par définition, la parabole est le lieu des points équidistants du foyer et de la directrice.

Quelle est la condition ? P est un point de la droite c tel que $PF=PQ$ sachant que P est la perpendiculaire de P à d.

La *solution* revient à tracer d'abord une figure faisant apparaître les segments PF et PQ en faisant partir de P la perpendiculaire à d, puis de repérer un point P sur la droite c à une distance égale du point donné F et de la droite donnée d.²

Les racines d'une équation polynomiale caractérisent complètement cette équation, et une telle équation spécifie complètement la courbe qu'elle décrit (le lecteur sait que l'équation par ex. de la parabole *spécifie complètement la trajectoire du boulet de canon dans l'espace*).³ C'est dire, dans ce contexte, l'importance de la notion de racine qui retentit dans toute la trajectoire !

Par équation polynomiale, il faut entendre une équation de la forme $P=Q$ où P et Q sont des polynômes (des expressions uniquement formées de produits et de sommes de constantes et de variables ou d'*indéterminées* dans le langage du XVII^e siècle).⁴ L'équation $x^2 + x - 1 = 0$ que nous avons évoquée est un exemple d'une équation polynomiale à une inconnue. La forme générale d'une telle équation est : $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$. *Tout polynôme est une certaine somme de série entière, et toute série entière une certaine « fonction »*.⁵ Les racines x_1, x_2, \dots , permettent à cette équation polynomiale d'égaliser 0. Toutes sont situées au croisement de la courbe, qui représente l'équation, et l'axe des x. *The roots are the x-intercepts* !⁶

Les racines d'une équation polynomiale, représentative d'une courbe, sont plus fondamentales que d'autres éléments de cette courbe comme les maxima, les minima, les points d'inflexion, les asymptotes, etc. Des équations différentes peuvent avoir ces éléments en commun.

¹ Jean-Louis Boursin, *Les maths pour les nuls*, Paris, First éditions, 2005, pp.218-221.

² *Ibid.*, pp.66-67.

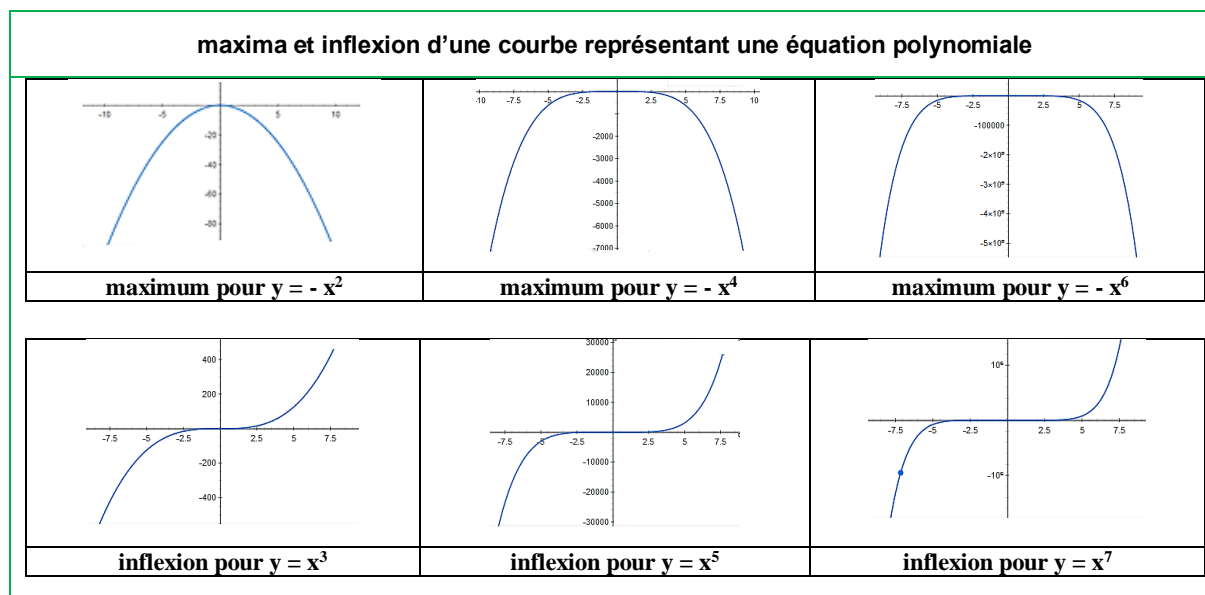
³ David Berlinski, *Une brève histoire des mathématiques*, Paris, édit. Tallandier, 2012, p.46.

⁴ *Ibid.*, p.42.

⁵ Michel Serfati, *La révolution symbolique: La constitution de l'écriture symbolique mathématique*, Paris, édit. Petra, 2005, p.344

⁶ *The roots, or zeros, of a polynomial*, <http://www.themathpage.com/aprecalc/roots-zeros-polynomial.htm>.

Annexe I



b) Le théorème fondamental de l'algèbre

(\$18-c)

Quand on connaît les racines d'une équation, on connaît cette équation. C'est le **théorème fondamental de l'algèbre** au résultat duquel ont contribué d'Alembert, Euler, Lagrange et Gauss. Selon ce théorème, tous les polynômes de degré n , qui commencent par un terme comme x^n , se décomposent en n termes distincts. Ce théorème n'est pas à confondre avec *le théorème fondamental de l'analyse* qui stipule que la dérivation et l'intégration sont des processus inverses. (Pour calculer $\int_a^b f(x) dx$, le théorème fondamental de l'analyse établit qu'il suffit de calculer une fonction primitive F telle que $F'(x)=f(x)$ pour chaque nombre x compris entre a et b . Dans ce cas, $\int_a^b f(x) dx = F(b)-F(a)$.)

Ces deux théorèmes des Lumières sont appelés fondamentaux, mais ils n'ont rien à voir l'un avec l'autre.

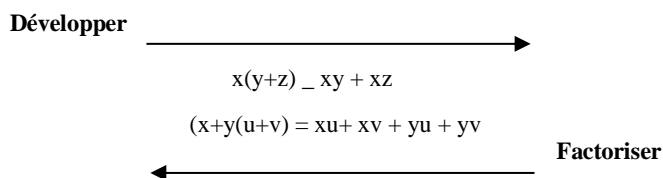
D'après le théorème fondamental de l'algèbre, **tout polynôme de degré n , à une seule variable, aura toujours n solutions, distinctes ou confondues, réelles ou imaginaires.** Autrement dit, un polynôme de degré n a n solutions ou *racines*, même si certaines peuvent être répétées ou ne pas être des nombres réels. Une racine répétée est une racine qui apparaît plus d'une fois (par ex., $(x-a)^2=0$ a une solution a répétée deux fois. Un nombre qui n'est pas réel est un nombre complexe z qui permet de prendre la racine carrée d'un nombre négatif, i.e. \sqrt{z} avec $z \leq 0$).

Ce théorème autorise la réécriture du polynôme $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ sous la forme d'un produit de n termes : $a_n (x-x_1)\dots (x-x_n)$, ou de façon plus générale, $a_n (x-z_1)\dots (x-z_n)$ où z_1, \dots, z_n sont des nombres complexes de la forme, en coordonnées cartésiennes, $a + ib$, dans la somme de laquelle a et b sont des nombres réels quelconques et i (*l'unité imaginaire*) un nombre particulier tel que $i^2 = -1$. Comme *la partie imaginaire* (ib) peut être nulle, certaines des racines z sont des réels x .

(\$25
ann.1)

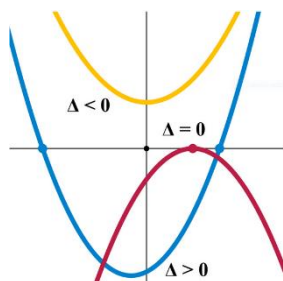
Pareil réarrangement est qualifié de factorisation du polynôme, puisque les parenthèses successives sont qualifiées de facteurs. Nous parlons, à propos du théorème fondamental de l'analyse, de processus inverses. C'est à nouveau le cas ici, car, bien que le polynôme soit une certaine somme de série entière, la factorisation se présente comme le mouvement inverse du développement. Nous sommes en présence d'une opération réversible. La factorisation transforme une somme en produit.

Ce produit redonne le polynôme s'il n'existe pas des facteurs irréductibles que l'on ne peut pas diviser.



x, y, z, u et v étant des variables quelconques (z ici n'est pas nécessairement complexe)

Voyons par ex., $f(x) = 8x^3 - 4x^2 + 8x - 12$. La forme factorisée de ce polynôme du 3^e degré est $f(x) = 4(x-1)(2x^2 + x - 3)$. Elle se compose du réel 4, du polynôme du 1^{er} degré $(x-1)$ et du polynôme du second degré $(2x^2 + x - 3)$. Ce dernier apparaît irréductible car son discriminant $\Delta = -23$ est négatif.¹



Pour résoudre une équation du second degré $ax^2 + bx + c$, on calcule le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$.

L'idée de relier racines et coefficients d'une équation remonte à **Viète, juriste et mathématicien du XVI^e siècle**.

Le signe de Δ détermine si l'équation a des solutions. S'il est positif, il y a deux solutions ; s'il est nul, une solution ; s'il est négatif, il n'y a pas de solution dans l'ensemble des nombres réels.)

Incidence du signe du discriminant sur les racines de l'équation du second degré à coefficients réels²

En revanche, le polynôme de même degré $g(x) = 3x^3 - 9x^2 - 18x + 24$ apparaît facilement factorisable en $g(x) = 3(x+2)(x-1)(x-4)$. Sa forme ultime est composée du réel 3 et de trois polynômes du 1^{er} degré : $(x+2)$, $(x-1)$ et $(x-4)$. Le polynôme $g(x)$ a trois racines ($x = -2$, $x = 1$ et $x = 4$). De même, $h(x) = x^3 - x^2 - 8x + 12$ peut être scindé en trois polynômes du 1^{er} degré sous la forme $h(x) = (x+3)(x-2)(x-2) = (x+3)(x-2)^2$. Le polynôme $h(x)$ a une racine simple (-3) et une racine double (-2) . La complète factorisation de $g(x)$ et de $h(x)$ reconstitue ces deux polynômes.

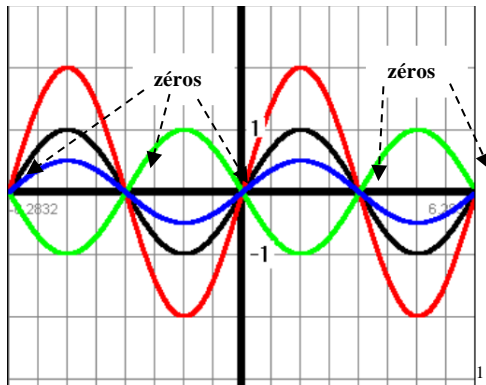
La factorisation d'un polynôme conduit à la réécriture d'un polynôme initial en un produit de polynômes dont le degré est inférieur au degré du polynôme initial. L'introduction des nombres complexes permet la factorisation de sous-polynômes irréductibles. Soit le polynôme $x^4 - 1$. L'identité remarquable $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ donne : $x^4 - 1 = (x^2 + 1)(x^2 - 1) = (x^2 + 1)(x - 1)(x + 1)$. Il subsiste un facteur irréductible $(x^2 + 1)$ si on ne considère que les nombres réels, \mathbb{R} . Avec les nombres complexes (\mathbb{C}) , le polynôme est redéfini totalement : $x^4 - 1 = (x+i)(x-i)(x-1)(x+1)$. Quatre racines (deux dans \mathbb{R} , deux dans \mathbb{C}) redonnent $x^4 - 1$. (Le recours aux nombres complexes permet de résoudre une équation du second degré comme par ex. $2z^2 + 6z + c = 0$ même si le discriminant Δ se révèle < 0 .)

La factorisation devient ainsi possible grâce au théorème fondamental de l'algèbre qui porte sur les polynômes à coefficients complexes. Dans ce cadre, elle peut utiliser sans difficulté diverses méthodes consistant à repérer des identités remarquables ou des facteurs communs (ex. : x^2y dans $2x^3$ et $5x^2y^2$). Mais attention : malgré l'élargissement de la compréhension des polynômes au-delà des nombres réels, nous restons dans le domaine des équations polynomiales, car des équations non polynomiales peuvent avoir les mêmes zéros sans être identiques. Dans ce cas, nous ne pouvons plus parler de racines ou zéros, mais de simples zéros.

¹ J.-P. Collette, *Hist. des math.*, I, p.187 ; Bastien Fernandez, *Le monde des nombres*, Le Pommier, Paris, 2000, p.87.

² <https://fr.wikipedia.org/wiki/Discriminant>.

Rappelons en effet qu'un polynôme est une somme de monômes. Chaque monôme (par ex : $3x^2$) renferme une inconnue (x), élevée à une certaine puissance (ici, 2) et multipliée par un certain coefficient (3). Une expression comme : $3x^5 + 4x^4 + x^3 + x + 1$ est un polynôme, car chaque terme est une puissance de x . En revanche, la somme $\log(\sin x) + \cos(x^2)$ n'en est pas, car on n'a plus affaire à des puissances. Les fonctions sinus et cosinus sont équivalentes. Elles sont simplement décalées d'un quart de période, i.e. d'un angle de $\pi/2 = 90^\circ$, mais on ne peut pas générer des courbes à partir de leurs zéros, même s'il existe des formules de factorisation les concernant.



Soient différentes fonctions sinus :

$$y = \sin x ; y = 0,5 \sin x ; y = 2 \sin x ; y = -\sin x$$

Pour chacune, on retrouve à l'infini les mêmes valeurs à cause de leurs périodicités, $0, 2\pi, 4\pi, \dots$, sachant que $\sin(x+2\pi) = \sin x$. Les zéros de la fonction sinus sont les nombres qui s'écrivent $k\pi$ avec k un entier relatif.

Toutefois, il convient d'observer que les fonctions représentées ont les mêmes zéros et la même période mais des amplitudes différentes ...

Ainsi, en dehors de cette exception, la mise en facteurs d'une équation polynomiale revient bien à *ramener graduellement les propositions compliquées et obscures aux plus simples*, conformément à la Règle V des *Règles pour la direction de l'esprit*, formulées par Descartes. Une telle factorisation aboutit à dénicher les racines, responsables du comportement des polynômes (ou fonctions polynomiales). Gauss ne s'exprimera pas autrement en résumant ce processus :

Le but de nos recherches, qu'il est inutile d'annoncer ici en peu de mots, est de décomposer [un polynôme] graduellement en un nombre de facteurs de plus en plus grand, et cela de manière à ce que les coefficients de ces facteurs puissent être déterminés par des équations du degré le plus bas possible, jusqu'à ce que, de cette manière, on parvienne à des facteurs simples ou aux racines.²

Le degré d'un polynôme est égal à celui du monôme dont la puissance est la plus élevée (ex : 5 dans $3x^5$). Le degré le plus bas est celui du monôme dont la puissance est la plus basse. Cette recherche des fondements en mathématiques n'est pas sans rappeler celle en philosophie politique. Reste qu'un tel rapprochement a de quoi surprendre, tant il paraît saugrenu d'établir une correspondance entre des disciplines, proches en esprit, mais si éloignées en pratique !

Il paraîtra arbitraire d'éclairer l'une par l'autre, indépendamment de toute liaison historique, la méthode d'un algébriste [comme Gauss] et celle d'un philosophe [de la même époque], mais il apparaît sinon des rapports exacts de structures, du moins des analogies dans les problèmes qu'elles posent.³

2/ La notion de racine en droit

a) Racine et division

La notion de *racine* évoque en droit comme en mathématiques la notion de *division*. Division de la société en une myriade d'individus en droit moderne. Division des pouvoirs également, même si une telle division n'est pas un simple découpage des fonctions exécutive, législative et judiciaire (on a vu combien le cahier des charges de chaque pouvoir n'est pas une simple juxtaposition des tâches !). *Division euclidienne* en mathématiques derrière en fait la factorisation des polynômes.

Justifions davantage cette implication pour mieux éclaircir le lien avec le droit constitutionnel.

¹ http://recit.csdps.qc.ca/usagers/vallieresm/math536/image_pdf/ftc_sinus_cond.pdf.

² C.F. Gauss, in J. Vuillemin, *La philosophie de l'algèbre*, op. cit., p.140.

³ J. Vuillemin, *La philo. de l'algèbre*, p.102.

L'opération de *division* ne date pas d'hier. On la voit apparaître notamment en Egypte et en Chine anciennes, et chez les Babyloniens.¹ La division par 2 apparaît la forme la plus élémentaire de partage.

Pour s'en tenir aux Grecs, on sait qu'ils s'efforçaient, comme Euclide, de trouver une commune mesure à deux longueurs. En partant de deux segments donnés, l'algorithme d'Euclide permettait de trouver un segment qui puisse s'inscrire dans chacun d'eux un nombre exact de fois. La longueur du segment qui a une commune mesure avec les deux segments donnés est le plus grand commun diviseur (*pgcd*) si les longueurs initiales sont entières. Les Grecs ont découvert qu'il n'existe pas de commune mesure entre la diagonale d'un carré et la longueur du côté. Les longueurs sont « incommensurables » l'une à l'autre, mais un algorithme peut donner une valeur approchée de leur rapport (par ex. celle de $\sqrt{2}$ dans l'exemple d'un carré de côté 1).

(§ 15-2/a)-i)

Comment opère de façon précise cet algorithme ? La *division euclidienne* d'un nombre entier a , appelé *dividende*, par un nombre entier $b (\neq 0)$, appelé *diviseur*, revient à trouver deux autres nombres entiers q et r , appelés *quotient* et *reste*, vérifiant l'égalité : $a = b \times q + r$ (avec $r < b$) :

a	b	dividende	diviseur	(Le reste doit être	28	3
r	q	reste	quotient	inférieur au diviseur)	1	9

Un nombre a est un multiple d'un nombre b ($b \neq 0$) lorsque le reste r de la division euclidienne de a par b est égal à zéro :

a	b	8	4	217	7
0	q	0	2	07	31
				0	

Dans l'exemple de reste égal à 0 où 4 est diviseur de 8, on dit que 8 est *divisible* par 4, ou est *multiple* de 4. L'extraction d'une racine carrée obéit au même principe. On extrait la racine comme le dividende d'une division. Si la division ne tombe pas juste, il y a un reste. Reprenons le nombre 28. Sa racine carrée est 5 et son reste 3 :

nombre	racine	Selon Descartes, l' extraction des racines peut être prise pour une espèce de division (<i>La Géométrie</i> , op. cit., Liv.1, p.1)
28	5	
- 25		
3		

Cette extraction de racine est faite par tâtonnement.

Pour extraire plus facilement les racines, l'époque moderne va pousser plus loin l'investigation en recourant aux logarithmes. Leur invention permet en principe de transformer des produits en sommes : $\log(10) = 1$; $\log(100) = \log(10 \times 10) = \log(10) + \log(10)$; $\log(1000) = 3$; plus généralement : $\log(10^n) = n$. La transformation consiste à convertir une progression géométrique en une progression arithmétique (par ex : la suite de raison 10 et de premier terme 1, soit : 1, 10, 10², 10³, 10⁴, 10⁵, ... en la suite de raison 1 et de premier terme 0, soit 0, 1, 2, 3, 5, ... La dernière suite est composée des seuls exposants de la première.²

Le passage au logarithme décimal permet aussi d'extraire la racine d'un nombre. Soit x la racine carrée d'un nombre positif a . On peut écrire l'équation : $x^2 = a$. En prenant le logarithme de x^2 et de a , on a : $\log x^2 = \log a$. Or, d'après les règles applicables, $\log x^2 = 2 \log x$. D'où : $2 \log x = \log a$, soit : $\log x = (\log a)/2$. Ainsi, le logarithme de la racine carrée d'un nombre a dont la racine est x est égal à la moitié du logarithme de ce nombre ($\log x = (\log a)/2$). Soit par ex., $a = 100$. Calculons $(\log a)/2$. Sachant que $\log 100 = 2$, on a $(\log 100)/2 = 2/2 = 1$. Comme $\log x = (\log a)/2$, on a $\log x = 1$ et $x = 10$.

Le calcul de la racine carrée se ramène bien à la division par 2. Idem pour la recherche de la racine cubique d'un nombre qui se ramène à la division par 3 du logarithme de ce nombre, celle de la racine quatrième à une division par 4, etc.

¹ Jeanne Guiet, « Une petite histoire de la division, in « Grand N », IREM de Grenoble, 1995-1996, n°57 et 58, pp.33-54.

² Norbert Verdier, *Le discret et le continu*, Le Pommier, Paris, 2002, p.67.

Le calcul vaut pour les logarithmes des puissances de 10 qui sont des nombres entiers. Elle vaut aussi pour les logarithmes des autres nombres (ex. : $\log(0,1) = \log(1/10) = -\log(10) = -1$; $\log(0,01) = -2$; $\log(0,001) = -3$). En général, on a la relation : $\log(x^r) = r \log x$ pour n'importe quelle puissance rationnelle r . Le résultat x est donné en pratique dans des tables dont le principe de constitution repose sur la mise en rapport des deux progressions géométrique et arithmétique et l'approximation du logarithme d'un nombre (terme de la progression arithmétique) par la technique de l'interpolation. ¹

Comme l'extraction de racine, la factorisation d'un polynôme est une division. Soit le polynôme f , défini pour tout réel, par $5x^3 + 7x^2 - 2x + 8$. Une racine de ce polynôme est $x = -2$. Il existe, autrement dit, un polynôme q tel que, pour tout réel x , $f(x) = (x+2).q(x)$. Ce polynôme q est le quotient de la division du polynôme f par le polynôme g avec $g(x) = x + 2$:

polynôme dividende f	polynôme diviseur g	ex : $f(x) =$ $5x^3 + 7x^2 - 2x + 8$	$x + 2$
polynôme reste r	polynôme quotient q		$q(x)$

Dans l'exemple, $f(x) = g(x).q(x)$. Il n'y a pas de reste : ($r(x) = 0$), car $5x^3 + 7x^2 - 2x + 8 = (x+2)(5x^2 - 3x + 4)$. Comme pour les entiers, le polynôme f est divisible par le polynôme diviseur g . Dans le cas général, $f(x) = g(x).q(x) + r(x)$ avec $r(x) < g(x)$. Dans la division d'un polynôme par un binôme de forme $(x + a)$, le reste ne contient pas de x , mais est constitué par un nombre. Par ex., $x^3 + x + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 2) - 1$, comme le montre la division du polynôme :

x^3	$+ x$	$+ 1$	$x + 1$	x^3 divisé par x donne x^2 , le 1 ^{er} monôme du quotient ;
$x^3 + x^2$			$x^2 - x + 2$	
$- x^2$	$+ x$	$+ 1$		on multiplie x^2 par le diviseur $x + 1$; on reporte le résultat sous le dividende avant de le retrancher à celui-ci, etc. ²
$- x^2$	$- x$			
	$2x$	$+ 1$		
	$2x$	$+ 2$		
	(reste)	$- 1$		

Dans la plupart des divisions, il y a un reste. La forme obtenue n'est pas forcément factorisée, mais, en l'espèce, je peux continuer de faire tourner le moteur de la factorisation sur la partie $x^2 - x + 2 = (x-1)(x-2) = 0$. Avec une équation du second degré dont le discriminant Δ serait négatif, par ex. : $x^2 + x + 1 = 0$, $\Delta = -3$, l'équation n'aurait pas de solution dans \mathbb{R} , mais en travaillant dans \mathbb{C} , la décomposition pourrait aussi reprendre. La mise en facteurs résulte donc d'une division euclidienne du polynôme. Une telle division permet d'atteindre les racines, réelles et complexes, d'un polynôme.

On retrouve le théorème fondamental de l'algèbre selon lequel tout polynôme finit par se décomposer en un produit de polynômes du 1^{er} degré si les coefficients sont réels ou complexes. Ce théorème signifie a contrario qu'il est possible de générer un polynôme à partir de ses racines.

b) La question du « reste »

3/ La « descente infinie » chez Hobbes

i La méthode de Fermat

ii La méthode de Hobbes

iii Comparaison des deux méthodes

Annexes II^{bis} et II^{ter}

¹ Ibid., p.69. Soit à extraire la racine cubique du nombre décimal 1,324. Posons $x = \sqrt[3]{1,324}$. On a $\log x = 1/3 (\log 1,324)$. Or, d'après les tables : $\log 1,324 = 0,12189$, d'où $\log x = 1/3(\log 1,324) = 0,04062$, ce qui donne $x = 1,0981$.

² Hervé Lehning, « Les polynômes », in La recherche, *Les mathématiques en 14 mots-clés*, Dunod, Paris, 2008, p.27-28.

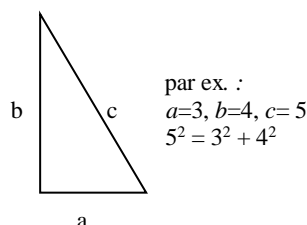
Autre façon visuelle d'appréhender la descente infinie de Fermat

Fermat suppose une solution ($z^4 = x^4 + y^4$) et démontre qu'elle est absurde (il n'y a pas de solution). Hobbes envisage un accord de paix. Il démontre que cet accord est irréalisable en dehors du contrat social (il n'y a pas d'autre solution). Le raisonnement de Fermat paraît sophistiqué, celui de Hobbes plus simple, mais le mode d'enchaînement basique est le même. On raisonne pour conclure, au terme d'un nombre fini d'étapes, en sens contraire.

La démarche de Fermat est algébrique. Pour mieux la suivre, le lecteur aura avantage à visualiser, à chaque étape, le triangle rectangle qui est en cause.

Soit le triangle rectangle de côtés a , b , c , c étant l'hypoténuse, vérifiant les conditions suivantes :

a , b et c sont des nombres entiers et premiers entre eux deux à deux (il suffit que deux d'entre eux le soit)
 $c^2 = a^2 + b^2$ (théorème de Pythagore)



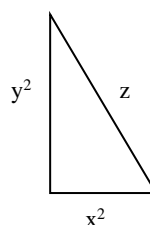
a , b et c forme un triplet pythagoricien irréductible. Il en résulte qu'ils sont de parité différente (a , b et c ne sont ni tous pairs ni tous impairs). Si b est pair, on peut les écrire sous la forme : $a = p^2 - q^2$, $b = 2pq$, et $c = p^2 + q^2$,

Nous supposons au départ que $x^4 + y^4 = (x^2)^2 + (y^2)^2 = z^2$

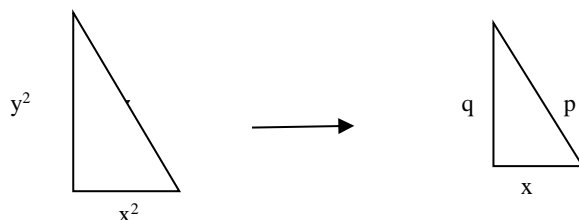
La 1^{re} étape du raisonnement de Fermat consiste à considérer le triangle initial et à remplacer a par x^2 , b par y^2 et c par z . Les deux conditions précédentes sur le triangle deviennent :

$$x^2 = p^2 - q^2 \text{ (1^{re} condition)}$$

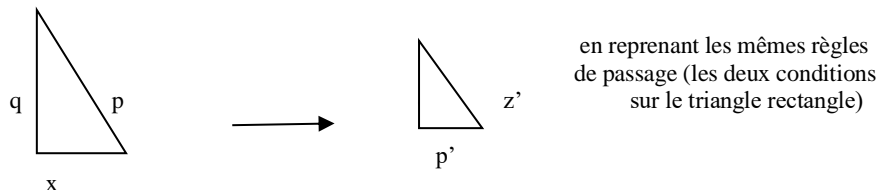
$$z = p^2 + q^2 \text{ (2^e condition)}$$



La 2^e étape du raisonnement consiste à passer du triangle rectangle de côtés a , b , c (rebaptisés x^2 , y^2 , et z) à un plus petit triangle rectangle de côtés x , q et p en respectant les mêmes règles de passage :



La 3^e étape du raisonnement consiste à passer du triangle rectangle de côtés x , q et p à un plus petit triangle rectangle de côtés p' , q' et z'



On pourrait continuer indéfiniment s'il existait une suite d'entiers strictement décroissante. Or tout ensemble non vide d'entiers possède un plus petit élément. Le problème n'a pas de solution en nombres entiers.

(Dans \mathbb{R} , il y aurait une infinité de solutions ; $\forall x$ ou y , on a une solution en z en considérant l'équation $z^n = x^n + y^n$.)

En raisonnant par l'absurde, la méthode de descente infinie aboutit à un résultat négatif :

- Un triangle rectangle dont les côtés sont entiers ne peut avoir une aire mesurée par un carré.
- Hors Léviathan, qui regroupe la plupart des hommes dans un accord commun, point de salut.

**La méthode de descente infinie de Fermat : éclaircissement additionnel
sur la construction des triangles rectangles à côté rationnels et d'aire entière**

Un petit calcul montre, si n est une telle aire, il existe trois carrés de nombres rationnels en progression arithmétique de raison $4n$: par exemple, le triangle de côtés (3,4,5) et d'aire 6, et les carrés 1, 25, 49 sont en progression arithmétique de raison 24. C'est pourquoi l'on appelle « nombre congruent » tout nombre entier qui est l'aire d'un triangle rectangle à côtés rationnels.

Le calcul montre que D est un nombre congruent si et seulement si la courbe elliptique $y^2 = x^3 - D^2x$ contient des points à coordonnées rationnelles non nulles, chaque point fournissant au moyen d'une formule simple un triangle rectangle à côtés rationnels d'aire D . [Une courbe elliptique n'est pas une ellipse, mais une courbe algébrique d'équation : $y^2 = x^3 + px + q$, où p et q sont des nombres réels et où le discriminant $\Delta = 4p^3 + 27q^2$ du polynôme du 3^e degré est non nul.]

Dans le cas de $D = 6$, Fermat part du point P de coordonnées (12,36) qui correspond au triangle primitif de côtés (3,4,5), puis calcule $P+P$ et obtient le triangle (7/10, 120/7, 1201/70), et enfin $P+P+P$ lui fournit le triangle de côtés (2896804/1319901, 7216803/1319901, 776485/1319901). Bien conscient de la généralité de sa méthode, il précise d'ailleurs qu'étant donné un triangle de départ il peut en construire une infinité de même aire. Il traite ainsi le cas $D=5$.

Il montre d'autre part un résultat déjà énoncé par Fibonacci : le nombre 1 n'est pas congruent. Pour cela, Fermat établit que, si c'était le cas, il existerait des entiers (x,y,z) non nuls tels que $x^4 - y^4 = z^2$, puis il utilise sa méthode de descente infinie pour montrer que c'est impossible. Cette méthode consiste à déduire de toute solution une solution strictement plus petite, ce qui prouve par l'absurde l'absence de solutions : c'est déjà ainsi qu'Aristote montre l'irrationalité de $\sqrt{2}$.

Il semble qu'après la démonstration de ce beau résultat Fermat se soit laissé emporter par son élan jusqu'à griffonner dans la marge de son Diophante un énoncé bien plus général. C'est un peu rapide bien sûr, mais remercions-le : il a donné du travail aux chercheurs pendant plus de trois siècles, jusqu'à ce que la conjecture de Fermat devienne le théorème de Wiles.¹

Rappel l'irrationalité de $\sqrt{2}$ dont ce thème de la descente infinie évoque effectivement déjà l'idée qu'un processus continue indéfiniment si son arrêt ne provoque pas quelque chose d'inacceptable. Si le processus continue son petit bonhomme de chemin, ce « quelque chose » ne devrait arriver jamais. Ainsi,

C'est à Aristote que nous devons des allusions claires à la plus ancienne démonstration d'irrationalité qui nous soit parvenue : s'il existe un rapport d'entiers p/q dont le carré est 2, on aura $p^2 = 2q^2$. Cette équation montre que p^2 est pair, donc que p est pair. Mais alors p^2 est divisible par 4 et l'équation montre que q^2 est pair. Donc q l'est également. Mais si p et q sont pairs, on peut les diviser tous les deux par 2 et obtenir un nouveau couple d'entiers solution de l'équation. Mais rien n'empêcherait d'appliquer que le raisonnement à ce nouveau couple, et vic notre contradiction !

La dichotomie, ou division en deux, peut se poursuivre indéfiniment pour les segments, comme Zénon d'Elée en a convaincu l'Agora, mais certainement pas pour les entiers. Par conséquent, la procédure ne peut pas commencer, et l'équation n'a pas de solution. Aristote fait de ce beau raisonnement le paradigme de la démonstration par l'absurde, qui reste jusqu'à nos jours une quasi-exclusivité des mathématiques.²

Non, la philosophie politique use aussi d'un tel argument, comme celle en particulier de Hobbes au XVII^e siècle, à l'époque de Fermat. **L'expérience de pensée est parente.** La voici à nouveau :

En politique comme en arithmétique, la régression récurrente est impossible. On tombe inévitablement sur l'élément premier, l'insécable, l'indivisible, l'individu. C'est cet individu qui contribue à l'insécurité, mais c'est lui qui peut y mettre fin en passant avec d'autres un accord capable d'être respecté par tous. **Cet accord garantit la liberté dans la sécurité.**

4/ La « racine » de l'Etat

a) L'individu

b) L'individu protestant et commerçant

i De nouvelles « racines » sociales

ii Des individus doublement libres

¹ Gilles Godefroy, *Les mathématiques, mode d'emploi*, Odile Jacob, Paris, 2011, pp.152-153. Nous soulignons.

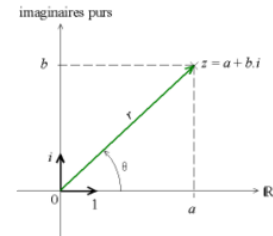
² *Ibid.*, pp.33-34.

c) Le plan complexe

i Les nombres imaginaires purs

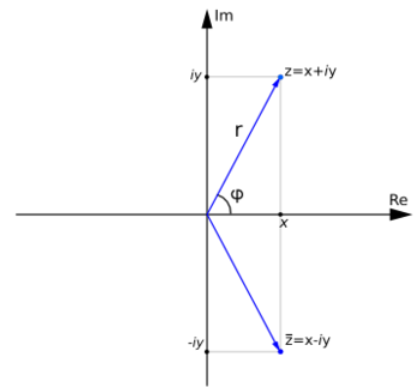
Continuons l'histoire des nombres imaginaires pour voir si elle débouche sur un modèle éventuel pour penser le droit. Notre comparaison apparaît elle-même impossible. Toutefois, ce nouveau détour par les mathématiques devrait permettre de comprendre pourquoi le mode de pensée des nombres complexes, et du plan complexe, peut éclairer le développement du droit constitutionnel.

Les nombres imaginaires ont fini par sortir de l'ombre en géométrie à la fin du XVIII^e et début XIX^e siècle. De manière similaire et indépendante, plusieurs mathématiciens (Wessel, Argand, Gauss) parvinrent à une représentation des imaginaires en faisant correspondre à chaque nombre complexe $z = a+ib$ un point du plan muni de deux axes perpendiculaires. Le point z (par ex. $z = 4 + 5i$) est repéré par son abscisse a et son ordonnée b . Les nombres réels (ici 4) sont situés sur l'axe des abscisses et les nombres imaginaires purs (lorsqu'ils sont seuls, soit ici $5i$) sur l'axe des ordonnées.¹

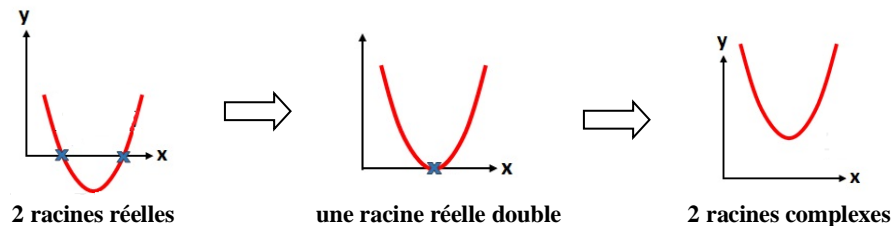


En particulier, i a pour coordonnées 0 et 1. L'axe des y représente tous les multiples réels de i , soit ..., $-i$, 0, i , $2i$, $3i$, ...

L'intérêt de ce plan est de représenter aussi le *conjugué* du nombre complexe $z = a+ib$, défini par $\bar{z} = a-ib$. On y observe que z et \bar{z} ont la même partie réelle et des parties imaginaires opposées. Géométriquement, les points images d'un nombre complexe et de son opposé sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.



Des indices annonçaient la venue au monde des nombres complexes. Ces nombres, qui existaient déjà sans paraître, sont devenus sensibles aux yeux lorsque l'on a commencé à comprendre qu'une certaine racine réelle d'une équation polynomiale du second degré $ax^2 + bx + c = 0$ pouvait receler la présence d'un nombre complexe. Par un mouvement inverse de l'esprit, les racines réelles paraissent émerger des racines imaginaires quand les réelles deviennent doubles (lorsque le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ est nul, la solution $x = -b/2a$ de l'équation en x est répétée deux fois : $x_1 = x_2 = -b/2a$). Dans l'équation $az^2 + bz + c = 0$ où z est un nombre complexe et a, b et c des nombres réels, avec $\Delta = 0$, on a $z_1 = z_2 = -b/2a$. Les nombres réels sont devenus un sous-ensemble des nombres complexes. Ces derniers apparaissent bien plus nombreux que les premiers qui finissent par être des cas d'école !



Soit $az^2 + bz + c = 0$ et $\Delta = b^2 - 4ac$. Si $\Delta > 0$, Δ est le carré d'un nombre réel : $\Delta = r^2$. Les solutions sont : $z_1 = (-b-r)/2a$ et $z_2 = (-b+r)/2a$. Ce sont deux solutions réelles. Si $\Delta = 0$, l'équation $az^2 + bz + c = 0$ a une solution réelle double : $z_1 = z_2 = -b/2a$. Si $\Delta < 0$, $|\Delta|$, positif, est le carré d'un nombre réel r , ainsi $\Delta = (ir)^2$. Les solutions sont : $z_1 = (-b-ir)/2a$ et $z_2 = (-b+ir)/2a$. Ce sont deux solutions complexes et conjuguées.²

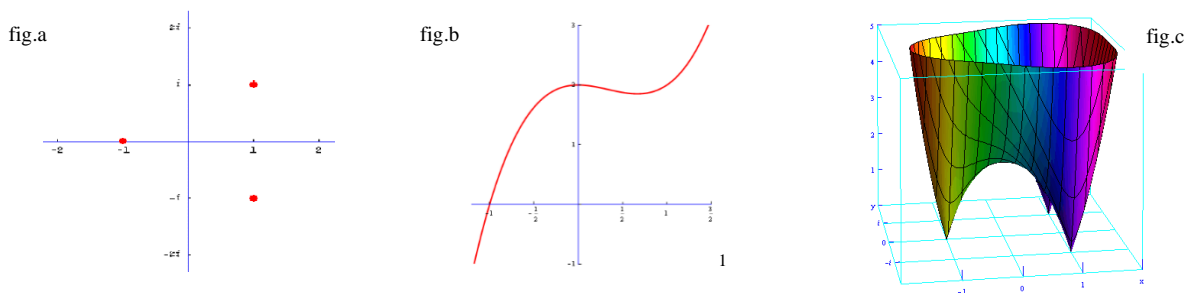
ex. : l'équation $z^2 + z + 1 = 0$. Son discriminant $\Delta = -3 = 3i^2$, soit le carré de $i\sqrt{3}$. L'équation $z^2 + z + 1 =$

¹ A. Dahan-Dalmedico & J. Peiffer, *Routes et dédales*, op. cit., chap.7, p.238.s
² http://www.mathematiquesfaciles.com/solutions-complexes-d-une-equation-de-degre-2_2_45257.htm. La formule pour trouver les racines d'une équation quadratique $ax^2 + bx + c = 0$ est $x = [-b \pm \sqrt{(b^2 - 4ac)}]/2a$ [ou $x = (-b \pm \sqrt{\Delta})/2a$]. Le signe + donne une racine, le signe - donne l'autre. Cette formule est connue depuis des siècles. (C. Seife, *Zéro. La biographie d'une idée dangereuse*, op. cit, p.166).

0admet donc deux solutions complexes et conjuguées : $z_1 = (-1 - i\sqrt{3})/2$ et $z_2 = (-1 + i\sqrt{3})/2$

ii Quelques propriétés de base

Passons à l'exercice pratique auquel s'était accoutumée l'époque. Résoudre l'équation cubique $z^3 - z^2 + 2 = 0$. Une solution réelle peut être trouvée en faisant de la partie gauche de l'équation un produit de deux termes, soit $(z + 1)(z^2 - 2z + 2) = 0$, d'où $z_1 = -1$, et z_2 et z_3 comme racines de $z^2 - 2z + 2$, soit $z_2 = 1 + i$ et $z_3 = 1 - i$. Ces solutions sont imaginaires. Les trois racines peuvent être représentées dans le plan complexe (fig. a) ainsi que la courbe résultante qui présente un point d'inflexion en raison du caractère impair du plus haut degré de l'équation (fig.b). Avec l'ordinateur, nous pouvons aujourd'hui représenter la courbe en hauteur en prenant la norme du polynôme en z , soit $|P(x+iy)|$ sur la fig.c :



Le graphe du module du polynôme $P(x+iy)$ pour $P(i,x,y)$ confirme s'il est besoin que ce polynôme admet ici trois racines

Le fait que les racines imaginaires soient regroupées par paires découle du théorème fondamental de l'algèbre. Soit un polynôme du 7^e degré. Nous savons, d'après ce théorème, qu'il y a 7 racines, soit : 7 racines réelles et 0 imaginaires, ou 5 réelles et 2 imaginaires, ou 3 réelles et 4 imaginaires, ou 1 réelle et 6 imaginaires. Comme les racines imaginaires sont couplées, nous ne pouvons avoir : 6 réelles et 1 imaginaire, 4 réelles et 3 imaginaires, 2 réelles et 5 imaginaires, 0 réelle et 7 imaginaires.

D'autres contraintes doivent également être respectées. On ne peut pas prendre la racine carrée d'un nombre négatif dans l'ensemble des nombres réels, mais on peut la prendre dans celui des nombres complexes. L'irruption de i dans l'univers mathématique n'introduit aucune contradiction dans ce dernier ensemble où les nouveaux êtres imaginés peuvent coexister à côté des réels. Le monde nouveau englobe l'ancien qui garde sa légitimité et sa vérité.

A la lumière de ces premières propriétés, voyons ce qu'offre déjà le droit des Lumières.

d) Un chemin par-dessus la barrière

i La « barrière de verre ». ii Des chemins alternatifs

5/ On cherche à comprendre

i Questions d'ordre technique et philosophiques. ii Questions d'ordre historique
iii La compatibilité avec d'autres propriétés du plan complexe
iv La Bible et le livre de comptes. v Aporie ou cul-de-sac final ?

6/ Une vision enrichie de l'individu

a) Du « je » à Robinson

i Un sujet devenu actif. ii Robinson Crusoé, héros d'un nouveau genre

¹ <http://mathfaculty.fullerton.edu/mathews/cubics/A50/ComplexNumberOrigin.html> ; voir aussi www.wolframalpha.com/input.

b) Le « générateur » Robinson

i Le nouvel Adam . ii Et Vendredi ?

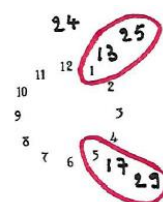
c) L'arithmétique modulaire

i Penser en modulo

Revenons au cercle, mais en considérant cette fois le cadran d'une horloge. Douze nombres sont répartis sur le périmètre. Après le nombre 12, nous revenons à 1 au lieu de continuer vers 13 comme le synthétise le tableau suivant en n'en remplissant que les deux premières lignes:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
...

« 17heures » correspond à « 5 heures de l'après-midi ». Autrement dit, le nombre 17 appartient à la même classe que 5. Etant donné le caractère périodique d'un tel tableau, la même idée peut être représentée sous forme à nouveau d'un cercle qu'enveloppent d'autres cercles... (nous en avons donné ci-contre un aperçu).



Sur la base de cette idée, Gauss construit différentes horloges comme ce cadran :

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
...

Dans ce nouveau tableau, le nombre 17 n'appartient plus à la « classe » de 5 mais de 2. De même, 18 appartient à la classe de 3. Dit encore autrement, diviser 18 par 5 garde le reste de la division 3. Cette façon de parler décrit une opération très pratique lorsqu'il s'agit de grands nombres. Soit le nombre 40 248. En le divisant par 5, nous obtenons un quotient de 8 049 et un reste de 3, ce qui montre que ce nombre appartient aussi à la classe de 5. Comme les multiples de 5 donnent tous un reste de 0, l'usage est d'appeler 0 la classe de 5. Le tableau est réarrangé en mettant sous 0 la colonne du 5 :

0	1	2	3	4
10	6	7	8	9
15	11	12	13	14
20	16	17	18	19
...

Dans ce tableau, 17 est toujours dans la classe de 2. On dit que 17 est *équivalent* à 2, ce qui s'écrit $17 \equiv 2 \pmod{5}$. Explicitement : 17 et 2 sont équivalents modulo 5. En arithmétique *modulaire* (de *modulus*, petit *modus* = petite mesure), on parle plutôt de *congruence* pour exprimer la même chose : « 17 est congru à 2 modulo 5 ». Pour savoir si deux nombres quelconques sont congrus modulo 5, il suffit de faire la différence et de vérifier que le résultat est un multiple de 5. Dans notre ex., $17-2=15$, qui est un multiple de 5. Ainsi : $82 \equiv 58 \pmod{4}$ parce que $82-58 = 24 = 6 \times 4$. En mod 4, $\Leftrightarrow 4$ est diviseur.¹

Plus abstraitement (ou algébriquement) : $(a-b)$ multiple de $m \Leftrightarrow m$ divise $(a-b)$. Les deux nombres a et b sont reliés entre eux à travers les multiples de m . *La classe de a modulo m* est l'ensemble des b tels

¹ Enrique Gracian, *Les nombres premiers*, Paris, Le Monde est mathématique, op. it., chap.5 : L'horloge de Gauss pp.84-88.

que $a - b$ est un multiple de m . Le *reste* d'une classe de congruence est le plus petit représentant positif. Dans la classe de 7 modulo 17, c'est le reste 7. **Une classe de congruence est une classe d'équivalence.**

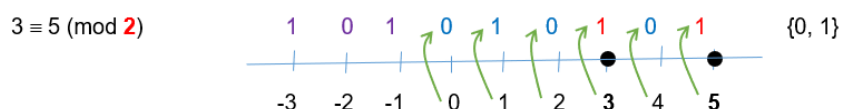
Dans l'ensemble Z des *entiers relatifs* comprenant les entiers positifs, les entiers négatifs et le zéro, les restes des entiers relatifs Z forment le nouvel ensemble, Z/pZ^* , des entiers relatifs *modulo* m (le Z étoilé, Z^* , désigne les éléments non nuls de Z). **Modulo m signifie que m est le diviseur qui sert de module.**¹

Par ex., en mod 3, qui a pour diviseur 3, nous avons trois restes possibles : $\{0, 1, 2\}$ comme le montrent $6/3$, donnant un reste égal à 0 ; $7/3$ donnant un reste égal à 1 ; $8/3$ donnant un reste de 2. N'importe quel nombre divisé par 3 donne un des trois restes comme $100/3$ qui a pour reste de la division, 1).

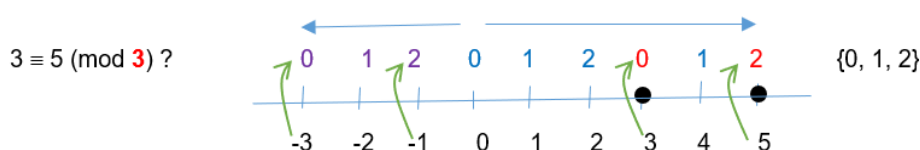
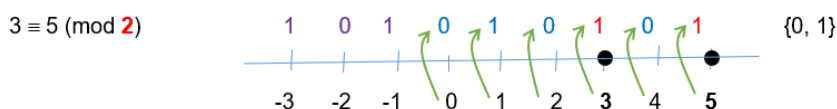
Deux nombres de signes opposés peuvent-ils être congrus modulo un autre nombre (*pris absolument, c'est-à-dire sans aucun signe*) ? Oui, répond Gauss. Ainsi -9 et +16 sont congrus par rapport au module 5 : leur différence est 25, divisible par 5 (25 est un multiple de 5), soit $-9 \equiv +16 \pmod{5}$. De même, -7 est un reste de +15 par rapport à 11, car leur différence ($15+7=22$) est divisible par 11, soit $-7 \equiv +15 \pmod{11}$; -par contre, -7 n'est pas un reste de 15 par rapport à 3, parce que 3 ne divise pas 22.²

ii Exemples

Donnons deux exemples simples $3 \equiv 5 \pmod{2}$ et $3 \equiv 5 \pmod{3}$ en traçant deux lignes. En mod. **2**, nous avons **deux** valeurs : $\{0, 1\}$ et en mod **3**, **trois** valeurs comme tout à l'heure : $\{0, 1, 2\}$:



Dans le monde de mod 2 (ou modulo 2), les nombres 3 et 5 (**points noirs**) sont équivalents. 3 et 5 ont pour la valeur 1 en mod 2. Pour les nombres négatifs, la règle demeure : le nombre -1 a pour valeur 1 (**en violet**) en mod 2, le nombre -2 la valeur 0 (**en violet**) en mod 2, le nombre -3 la valeur 1 en mod.2. Par conséquent, -3 et +3 sont congrus et -3 et +5 sont congrus parce que -3, +3 et +5 correspondent à 1 en mod 2.



Dans le monde de mod 3 (ou modulo 3), les nombres 3 et 5 (**points noirs**) ne sont plus équivalents. 3 a pour valeur 0 en mod 3 et 5 la valeur 2 en mod 3. Par conséquent, 3 et 5 ne sont pas congrus en mod 3, c'est-à-dire **on ne peut pas écrire : $3 \equiv 5 \pmod{3}$** . En revanche, -3 est congru à 0 et +3 à 0 également, soit $3 \equiv 0 \pmod{3}$. De même $5 \equiv 2 \pmod{3}$.

Résumons ce qui vient d'être dit en reprenant le dernier exemple. Nous avons quatre classes de nombres et nous pouvons nous référer à l'un de leurs représentants 0, 1, 2 et 3 au lieu de contempler tous les nombres.

0	1	2	3
---	---	---	---

¹ Pierre Damphousse, *L'arithmétique ou l'art de compter*, Paris, Le Pommier, 2002, pp.137-138.

² Carl Friedrich Gauss, *Recherches arithmétiques* [1801], Sect. 1^{re}, in Jean-Claude Boudenot, Jean-Jacques Samuelli, *Trente livres mathématiques qui ont changé le monde*, Paris, Ellipses, 2014, pp.328-333.. Gauss utilise le mot *résidu* pour dire *reste*.

10	6	7	8
15	11	12	13
20	16	17	18
...

L'âge des Lumières inaugure une pensée qui pense *en modulo*. Les tables d'addition et de multiplication d'autrefois deviennent plus variées.

(Annexe VI)

Dans cette annexe, intitulée « penser en modulo », il est fait état du « petit théorème de Fermat », reformulé par Gauss : *Si p est un nombre premier, pour tout nombre entier naturel a, on aura : $a^p \equiv a \pmod{p}$.* Ou bien : $a^p - a = p$. En s'y reportant, le lecteur pourra saisir plus concrètement ce théorème. Supposons que cette démarche soit inutile ou qu'elle ait été faite. (*On laisse du temps au lecteur. Pause*). - Ça y est ? C'est bon ? Eh bien, considérez $2^n \pmod{p}$ avec p nombre premier. Dans ce cas, on peut dire que 2 est racine primitive de p. Si p=3, alors $2^1 \pmod{3} = 2$ et $2^2 \pmod{3} = 1$ (car $2^2 - 3 = 1$). En l'espèce, 2 est la racine primitive de 3. Il y a une racine primitive modulo p pour chaque nombre premier p.

(§ 24
1/-ii)

La reformation par Gauss de l'idée de Fermat vaut d'être relevée : elle montre que le raisonnement *modulo* était déjà en œuvre dans l'esprit dès le XVII^e siècle. Dès cette époque, on pensait également en termes de *générateur* comme l'atteste le triangle arithmétique de Pascal.

La racine primitive est à la fois une base et un générateur, même si les racines primitives ne sont pas uniques. Par exemple, avec p = 17, la racine primitive 5 redonne, comme la racine primitive 3 tous les nombres compris entre 1 et 16. Il n'y a que l'ordre de succession qui diffère, mais l'essentiel, pour notre propos, n'est pas là. **Ce qui importe est de constater qu'une racine primitive résume à elle seule une classe de nombres. Elle les représente tous et les engendre tous via ses puissances successives.**

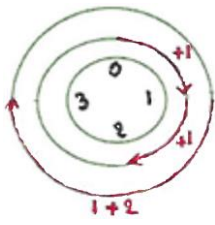
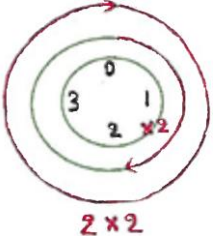
Nous retrouvons l'idée de la racine n-ième de l'unité. **La racine n-ième de l'unité et la racine primitive modulo n ne sont pas identiques mais leurs comportements se ressemblent.**

Dans chaque cas, une rotation opère par le fait de la multiplication. Avec la racine primitive modulo n, toutes les multiplications se convertissent en additions de puissances. Par ex., dans Z_{17} , 14 est congru à 3^9 (voir notre tableau), d'où $14 \cdot 14 \equiv 3^9 \cdot 3^9 = 3^{9+9} = 3^{18}$ qui est congru ou équivalent à $3^2 \equiv 9$ (on le voit si on prolonge les cases du tableau au-delà de 17). Idem sur le cercle unité où la multiplication des racines revient à additionner des angles. De ce point de vue, la règle rappelle celle des logarithmes dans le domaine desquels la multiplication de deux nombres ne revient qu'à additionner leurs logarithmes.

Par-delà le fait d'être un nombre qui indique le reste de la division par ce nombre, le *modulo* est une opération qui permet de représenter un ensemble, voire d'engendrer ses éléments. Le sens de *modulo* est ici élargi comme s'il s'agissait d'un cas dégénéré, d'un cas particulier d'une notion plus générale, ne satisfaisant pas toutes ses propriétés. **Le modulo est la partie commune, le reste est le spécifique, ce qui sépare.**

Le *modulo* devient ici une approximation, grossière sans doute pour un spécialiste des nombres, mais les habitués des sciences n'hésitent pas toutefois à l'employer de cette manière pour suggérer une équivalence. Le *modulo* est comme un patron de couture sur le modèle duquel serait taillée une série de vêtements de même forme nonobstant les nuances de couleur ou de matière.

Annexe VI

Penser en modulo																		
<p>Table d'addition modulo 4</p> <p>(4 \leftrightarrow rotation complète)</p>	<table border="1" style="border-collapse: collapse; margin: auto;"> <tr><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr> <tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>0</td></tr> <tr><td>2</td><td>3</td><td>0</td><td>1</td></tr> <tr><td>3</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td></tr> </table>	0	1	2	3	1	2	3	0	2	3	0	1	3	0	1	2	
0	1	2	3															
1	2	3	0															
2	3	0	1															
3	0	1	2															
<p>Table de multiplication modulo 4</p> <p>(la longueur du cycle est toujours égale au module)</p>	<table border="1" style="border-collapse: collapse; margin: auto;"> <tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr> <tr><td>2</td><td>0</td><td>2</td></tr> <tr><td>3</td><td>2</td><td>1</td></tr> </table>	1	2	3	2	0	2	3	2	1								
1	2	3																
2	0	2																
3	2	1																

Dans le même esprit, Gauss explore les restes des puissances. Entrons par ex. dans le monde modulo 17 et considérons toutes les puissances de 2 :

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7	2^8	2^9	2^{10}	2^{11}	2^{12}	2^{13}	2^{14}	2^{15}	2^{16}
2	4	8	16	15	13	9	1	2	4	8	16	15	13	9	1

Le calcul des restes des puissances est simple : 2, 4, 8, 16, 15 (reste de $2^5/17=32/17$), 13 et 9,

Nous observons que les restes des puissances de 2 (en rouge) obéissent à un cycle qui se répète p fois, p se révélant un nombre premier. Fort de ce constat, Gauss reformula le « petit théorème de Fermat » de la façon suivante : *Si p est un nombre premier, pour tout nombre entier naturel a , on aura : $a^p \equiv a \pmod{p}$.* Ou bien : $a^p - a = p$. En l'espèce, $p = 2$ (nombre premier, étant divisible par deux entiers distincts, 1 et lui-même). $2^2 - 2 = 2$. Nous aurions pu faire la même observation avec les restes des puissances de 3 par ex., mis la place manque ici pour suivre ce qui advient un nouveau module de 17 (à partir de 17, nous aurions vu à nouveau dans la case des puissances de 3 les nombres 3, 9, 10, etc.).

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
3^1	3^2	3^3	3^4	3^5	3^6	3^7	3^8	3^9	3^{10}	3^{11}	3^{12}	3^{13}	3^{14}	3^{15}	3^{16}
3	9	10	13	5	15	11	16	14	8	7	4	12	2	6	1

Dans le système du modulo 17, les restes des puissances sont toujours divisés par **un nombre premier**.¹ Cette propriété, généralisable à d'autres systèmes de modulo, aide un mathématicien comme Gauss à cerner si nous sommes en présence d'un tel nombre *lorsque nous construisons une horloge avec un cadran de p heures et que nous élevons certains de ces nombres à la puissance p . Si les aiguilles marquent à nouveau les mêmes nombres, nous savons qu'il ne s'agit pas d'un nombre premier*.²

Dans le système du modulo 17, on remarque également que les restes des puissances de 3 se répètent avant la 16^e puissance, contrairement par ex. aux restes des puissances de 2 qui se répètent avant. Gauss distingue la 1^{re} catégorie en appelant la première puissance *racine primitive*. Ainsi, dans le système du modulo 17, la première puissance, 3, est une *racine primitive* de $Z/17Z^*$. Par définition, une racine primitive modulo un nombre premier p est un entier dans Z_p tel que chaque élément, $\neq 0$, est une puissance de r . Les puissances de 3, soient $3^2, 3^3, 3^4, 3^5, \dots$ vont engendrer les nombres 1, 2, ..., 16.

¹ Gauss distingue deux classes de nombres premiers : ceux de la forme $4n+1$ (ex : $17 = 4 \cdot 4 + 1$), comme 5, 13, 17, ..., et $4n+3$ (ex. $19 = 4 \cdot 4 + 3$), comme 3, 7, 11, ... Peter Martison, *Modulus*, <http://science.larouchepac.com/gauss/ceres/InterimII/Arithmetic/Modulus/Modulus.html>.

² E. Gracian, *Les nombres premiers*, op. cit., p.87.

En effet : $3^1 = 3 = 3^0 \times 3 \equiv 1 \times 3 = 3 \equiv 3 \pmod{17}$
 $3^2 = 9 = 3^1 \times 3 \equiv 3 \times 3 = 9 \equiv 9 \pmod{17}$
 $3^3 = 27 = 3^2 \times 3 \equiv 9 \times 3 = 27 \equiv 10 \pmod{17}$
 $3^4 = 81 = 3^3 \times 3 \equiv 10 \times 3 = 30 \equiv 13 \pmod{17}$
 $3^5 = 243 = 3^4 \times 3 \equiv 13 \times 3 = 39 \equiv 5 \pmod{17}$

 $3^{16} = \dots$

En revanche, les puissances successives de 2 ne parcourent pas $\mathbb{Z}/17\mathbb{Z}^*$. Il n'y a, par exemple, aucune puissance de 2 qui donne 6 dans $\mathbb{Z}/17\mathbb{Z}^*$:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
2	4	8	16	15	13	9	1	2	4	8	16	15	13	9	1

Passons dans un autre monde pour observer la même chose. Dans \mathbb{Z}_{11} (le système du modulo 11, 11 étant un nombre premier),

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7	2^8	2^9	2^{10}	2^{11}
2	4	8	5	10	9	11	3	6	1	2

chaque élément de \mathbb{Z}_{11} est une puissance de 2. Autrement dit, 2 est une racine primitive de 11, mais la première puissance 3 n'en est pas une (tous les éléments de \mathbb{Z}_{11} ne sont pas des puissances de 2).

d) Un droit « modulaire »

i Raisonner en équivalence

ii Mandat représentatif, mandat impératif

iii Modulo et cycle

Annexe VII

Annexe VII

Les racines n-ièmes de l'unité

Soit le nombre complexe $z^n = 1$, avec n un entier non nul.

Il existe, à ce sujet, une formule de Moivre, qui fut, rappelons-le dans une étude sportant ur le droit des Lumières, un mathématicien français réfugié en Angleterre à la suite des persécutions religieuses consécutives à la Révocation de l'Edit de Nantes par Louis XIV). D'après cette formule :

$z^n = 1 = e^{i 2\pi k}$ avec k entier également, sachant qu'un angle par ex. θ demeure le même angle avec $\theta+2\pi$ ou $\theta+4\pi$ ou $\theta+2k\pi$.

$$z^n = 1 = e^{i 2\pi k} = [\cos(2\pi k) + i(\sin(2\pi k))]$$

$$z^{1/n} = 1^{1/n} = [\cos(2\pi k) + i(\sin(2\pi k))]^{1/n}$$

$z = [\cos(2\pi k/n) + i(\sin(2\pi k/n))] = 1[\cos(2\pi k/n) + i(\sin(2\pi k/n))]$, sachant qu'un nombre complexe peut s'écrire plus généralement sous la forme $r(\cos(\theta) + i \sin(\theta))$ en prenant en compte son module r (sa longueur). Ici, $r=1$, ce qui signifie que tous les nombres complexes sont sur le cercle unité de rayon 1.

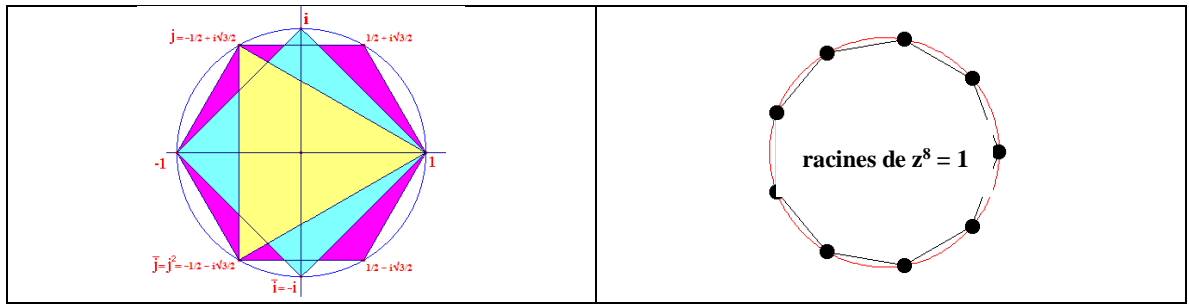
Tous les points sont à égale distance sur le cercle unité. Ils sont séparés d'un angle de $2\pi/n$.

Si $n=1$, alors $z^1 = 1$ (**un point noir** sur la fig.a de la page précédente) ; si $n=2$, alors $z^2 = 1$ et $z = 1^{1/2}$, soit $\cos(2\pi k/2) + i(\sin(2\pi k/2))$, d'où $z = 1$ et -1 (**deux points noirs** sur le cercle de la fig.b) ; si $n=3$, alors $z = 1^{1/3}$ soit $\cos(2\pi k/3) + i(\sin(2\pi k/3))$, d'où **trois points verts** sur le cercle de la fig.c : 1 , $(1+i\sqrt{3})/2$, $(-1-i\sqrt{3})/2$; si $n=4$, alors $z = 1^{1/4}$ soit $\cos(2\pi k/4) + i(\sin(2\pi k/4))$, d'où **quatre points violets** sur le cercle de la fig. d (tous les points sont séparés d'un angle $\pi/2$) ; si $n=5$, alors $z = 1^{1/5}$ soit $\cos(2\pi k/5) + i(\sin(2\pi k/5))$, d'où **cinq points rouges** sur a fig.e ; etc.

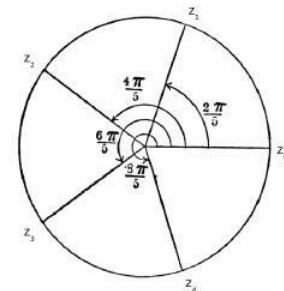
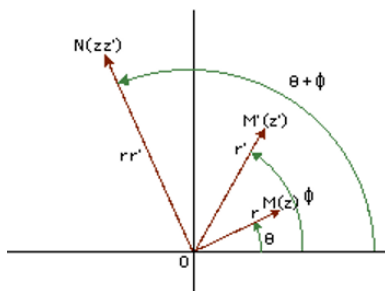
Les nombres réels 1 et -1 sont les racines de l'équation $x^2 - 1 = 0$; les nombres complexes i et $-i$ sont les racines de

l'équation

$x^2+1=0$; les nombres $1, (1+i\sqrt{3})/2, (-1-i\sqrt{3})/2$ sont les racines de l'équation $x^2+x+1=0$; etc.¹ Voir infra :



Multiplier 2 nombres complexes z et z' , soit $zz' = (a+ib)(a'+ib')$ = $aa'-bb' + i(ab'+b'a)$, revient à additionner leurs angles θ et ϕ respectifs. Idem sur le cercle unité :



7/ Lève-toi et marche !

- L'autoconservation comme cycle ouvert
- La série plutôt que l'intégrale
- Les époques du progrès selon Condorcet
- Le couronnement de « l'humaine condition » (et non de l'Etat)

¹ <https://www.youtube.com/watch?v=-F-FHNTz4qk>; <http://villemin.gerard.free.fr/Wwwgvm/Type/ImagCycl.htm>

Troisième leçon :

§ 28.- Le renforcement du droit constitutionnel (de la science de la résistance au droit de résistance), 106. - § 29.- Récapitulation et deuxième réponse à des objections, 115. § 30 – *Annexe* : Planches de l'*Encyclopédie* de Diderot et d'Alembert, 115

§ 28.- LE RENFORCEMENT DU DROIT CONSTITUTIONNEL
(de la Science de la puissance au Droit de résistance)

1/ D'une monade à l'autre

- i La puissance comme effet sur*
- ii Des relations sans se connaître*

2/ Masse, poids, frottement, 106

- i Quid de la masse ? 108*
- ii Quid de la distinction entre masse et poids ? 110*
- iii Quid du frottement ? 112*
- iv Quid de la relation entre la masse, le poids, et le frottement ? 113*
- v Par-delà ces distinctions, que retenir pour l'essentiel ? 114*

3/ Le droit naturel de propriété

- i Un moyen de défense inaltérable*
- ii Une propriété immuable comme la masse*
- iii Le droit naturel et la liberté religieuse*
- iv La critique excessive de Bentham*

4/ Le droit civil de propriété

- a) Nous sommes tous propriétaires**
- b) Don't trespass on my property !**
- c) Plus je possède, plus je pèse**

d) L'intrusion de l'histoire, 114

- i La proportion entre le droit naturel de propriété et sa version civile, 114*
- ii La proportion entre la liberté politique et la civile, 114*
- iii La proportion entre la justice naturelle et sa traduction civile, 114*

5/ La politique du frottement et ses insuffisances

- i La place centrale des frottements dans la spécialisation des organes*
- ii Les divers organes de l'horloge constitutionnelle*
- iii Les problèmes mécaniques institutionnels irrésolus*

o

1/ D'une monade à l'autre

- i La puissance comme effet sur*
- ii Des relations sans se connaître*

2/ Masse, poids, frottement

La science des Lumières a su distinguer trois grandeurs fondamentales : la masse, le poids et la force de frottement.

En voici un tableau synoptique dont nous commenterons les panneaux un à un sous forme de *quid* ?

La masse	Le poids	Le frottement
<p>La masse est la quantité de matière d'un corps résistant à la modification de son mouvement :</p> <ul style="list-style-type: none"> - de sa vitesse - et/ou de sa direction <p>Plus un objet aura une masse importante, plus il sera difficile de le faire accélérer, ralentir ou changer de direction</p>	<p>Le poids d'un corps est une force</p> <p>Il dépend de la masse du corps qui l'attire</p> <p>Par exemple, le poids d'un corps sur la Lune est plus faible que sur la Terre</p> <p>La Lune a une masse plus petite que celle de la Terre (un objet de 90 kg sur Terre n'en pèse que 15 sur la Lune). La force d'attraction de la Lune est plus faible que celle de la Terre</p>	<p>Seule la résistance de l'air explique la différence entre la chute d'une plume et celle d'une boule de plomb</p> <p>Lorsqu'on lâche deux objets différents et de même forme, il est établi</p> <ul style="list-style-type: none"> - que la vitesse n'est pas proportionnelle au poids ; - que le freinage est dû à une force de frottement
<p>Elle est une propriété immuable d'un corps, la même dans tout l'univers</p> <p>Par exemple, la masse d'un objet sur la Lune est la même que sur la Terre</p>	<p>Il dépend de la distance entre les corps</p> <p>Le poids change suivant les situations géographiques</p> <p>Le même objet est un peu moins lourd à l'équateur qu'aux pôles, au sommet d'une montagne qu'au bord de la mer</p>	<p>L'air est une force de frottement fluide.</p> <p>Ce frottement appartient, plus généralement, aux frottements visqueux qui sont le résultat d'un contact entre une surface solide et un fluide (liquide ou gazeux). Par exemple, un ballon lâché dans l'air</p>
<p>Comme quantité de matière, la masse attire une autre masse de matière</p> <p>Deux corps s'attirent selon leur masse</p> <p>Ils s'attirent de moins en moins s'ils s'éloignent l'un de l'autre (décroissance suivant le carré de la distance)</p>	<p>Le rapport Poids/Masse, P/m, est l'intensité de la pesanteur. Il est noté g (<i>la constante de gravitation</i>). On a : $P/m = g$. La masse et le poids sont donc liés par la relation : $P = mg$ (le poids, P, est proportionnel à la masse, m)</p> <p>Le poids s'exprime en kilogrammes-force, ou mieux en newton (N). Le poids est un vecteur.</p> <p>Sur Terre, $g \approx 9,8 N/kg$ (ou $10 N/kg$ pour simplifier). Sur la Lune, $g \approx 1,6 N/kg$</p> <p>Un objet, d'une masse de 90 kg, pèse sur Terre : $P = 90 \times 10 = 900 N$. Sur la Lune, il pèse : $P = 90 \times 1,6 = 144 N$. La masse est un scalaire.</p>	<p>Dans le cas simple des fluides dits newtoniens (fluides à viscosité constante comme l'eau et l'air), la force de frottement exercée sur un objet est proportionnelle à la surface de cet objet et à sa vitesse</p>
<p>La masse s'exprime en kilogrammes (kg)</p>	<p>Le poids de l'objet est 6 fois plus grand sur la Terre que sur la Lune. Sur la Lune, il pèse 16/100^e de son poids sur la Terre</p> <p>Comme g sur la Terre est environ 6 fois plus grand que sur la Lune, la Terre attire les objets vers elle 6 fois plus que la Lune</p>	<p>Les frottements secs naissent au contact entre deux surfaces solides (ex : une chaussure et le sol)</p> <p>Ils n'apparaissent que lors de la mise en mouvement d'un objet en s'y opposant.</p> <p>Plus un objet a un poids important, plus il y a de frottement (loi pondérée par un coefficient de frottement dépendant des matériaux donnés. Par ex : coefficient faible sur glace)</p>
<p>La masse résiste à une force d'accélération imposée de l'extérieur</p> <p>g représente une accélération (celle de pesanteur) causée par la force d'attraction qu'exerce un astre sur un objet. Le poids mesure cette force</p>		<p>La force de frottement entraîne une décélération</p>

i Quid de la masse ?

Selon le principe d'inertie, tout corps, dans le vide, est en mouvement (en ligne droite à vitesse constante). Galilée est le premier à observer qu'une force agissant sur un objet en détermine l'accélération (ou la décélération).¹ Cette relation sera reformulée par Newton sous la forme de l'équation : $F = m\gamma$, dans laquelle la force F est égale au produit de masse, m , par l'accélération, γ .

La masse m figure donc dans l'équation fondamentale de la dynamique. Elle représente un coefficient d'inertie. Elle mesure la résistance à l'accélération. La masse *inerte* représente « la quantité de matière » qui s'oppose au changement de vitesse. C'est Newton qui ira jusqu'à appeler cette résistance « *vis inertiae* » ou « *vis resistentiae* », tant son effet rappelle celui d'une force (*vis*) :

The vis insita, or innate force of matter, is a power of resisting. (Principia, I, Définition III).²

L'inertie est une force interne à l'objet. Par elle, l'objet s'oppose à la force externe qui perturbe son état de mouvement ou de repos. En l'absence d'une pareille force, l'objet conserve son mouvement (sa vitesse et/ou sa trajectoire, sachant que toute modification d'orientation équivaut à un changement de vitesse).

Dans sa correspondance avec une Princesse d'Allemagne, Euler résume l'idée de l'inertie, propriété de la matière :

L'inertie par laquelle le corps tend à se conserver dans le même état [en mouvement ou en repos], existe dans le corps même. [...]

Lorsqu'une force externe change l'état de quelque corps, l'inertie, qui voudrait le maintenir dans le même état, s'oppose à l'action de la force. [...]

L'inertie d'un corps peut être plus grande ou plus petite que celle d'un autre corps. Or les corps sont doués d'inertie en tant qu'ils renferment de la matière. C'est même de l'inertie, ou de la résistance qu'ils opposent à tout changement d'état que nous jugeons de la quantité de matière d'un corps. [...]

L'inertie d'un corps est d'autant plus grande qu'il contient plus de matière. Aussi savons-nous qu'il faut plus de force pour changer l'état d'un grand corps que d'un petit. C'est de là que nous jugeons que le grand corps contient plus de matière que le petit.

L'inertie est une qualité, mais cette qualité est susceptible de mesure. La masse d'un corps est précisément la mesure de son inertie :

*L'inertie est une quantité. C'est la même que la quantité de matière qu'un corps contient. Puisqu'on nomme aussi la quantité de matière d'un corps sa masse, la mesure de l'inertie est la même que la mesure de la masse.*³

Si on se demande pourquoi un objet continue à se mouvoir en l'absence de force, la réponse pré-galiléenne était d'imaginer un « *impetus* », une sorte d'élan qui entraînerait l'objet lors de sa mise en mouvement. Il n'y a rien de tel :

Dès qu'un corps a reçu un mouvement, il se conserve par sa propre nature, ou, par son inertie, dans le même état dans lequel il doit demeurer inaltérablement, tant qu'il n'est point troublé par quelque cause étrangère, ou par une force.

Le corps demeure dans le même état en marchant « *uniformément selon une ligne droite* », c'est-à-dire en conservant « *la même direction et la même vitesse* ».⁴

¹ R. Penrose, *L'esprit, ... les lois de la physique*, op. cit., p.173.

² Newton, *Mathematical principles of Natural Philosophy*, vol. 1, op. cit., p.2.

³ Leonhard Euler, *Lettres à une Princesse d'Allemagne sur divers sujets de physique et de philosophie* [1760-1762], Presses polytechniques et universitaires, Lausanne, 2003, Lettre LXXIV, p.138.

⁴ *Ibid.*, Lettre LXXV, pp.138-139.

Faute de voir dans la masse un moteur qui entraîne les objets, certains, même après Galilée, voyaient dans l'inertie une sorte de paresse naturelle. Euler s'empresse aussi de les détromper :

Ce terme d'inertie a d'abord été introduit dans la Philosophie par ceux qui soutenaient que tout corps avait un penchant pour le repos. Ils envisageaient les corps comme des hommes paresseux, qui préfèrent le repos au travail, et attribuaient aux corps une horreur pour le mouvement, semblable à celle que les hommes paresseux ont pour le travail : le terme d'inertie signifiant à peu près la même chose que celui de paresse. Mais quoiqu'on ait depuis reconnu la fausseté de ce sentiment, et que les corps se soutiennent également dans leur état de mouvement comme dans celui de repos, on a retenu le même mot d'inertie, pour marquer en général la propriété de tous les corps de se conserver dans le même état, soit de repos, soit de mouvement.¹

La masse, par son inertie, fait preuve non de paresse mais de résistance, mais cette résistance ne se manifeste-t-elle que sur un plan horizontal ? Galilée en était persuadé. Si un mobile suit un mouvement uniforme, « *c'est moins en raison de son inertie qu'en raison de la présence du plan horizontal qui le supporte et l'empêche de tomber. Que ce plan vienne à se dérober, et l'on verra le mobile prendre un mouvement accéléré vers le bas* ». ² Un boulet de canon tiré du haut d'une tour parallèlement au sol tombe en suivant une parabole.

Galilée avait du mal à imaginer un corps dénué de gravité. Reprenons l'exemple d'un tir de canon, dirigé cette fois vers le haut. Dans le mouvement du boulet, la gravité annule progressivement la vitesse du mobile et provoque son retour vers le bas selon la loi de la chute des corps :



Galilée avait pensé correctement que le mouvement du boulet emprunte une trajectoire parabolique (et non une ligne droite oblique, suivie d'un arc de cercle, puis d'une descente verticale, selon une théorie antérieure). Il demeurait cependant convaincu que tout corps est un corps *grave*, sa gravité lui étant inhérente. Il avait tort. Pour Newton, la pesanteur qui fait tomber un corps vers le centre de la Terre est la conséquence de la *gravité*, l'attraction exercée sur lui. Newton imagine un corps céleste errant dans l'espace, poursuivant un mouvement rectiligne uniforme dégagé de toute pesanteur. Avec lui, le principe d'inertie devient valable dans toutes les directions.

(§ 20
c)-i)

Pensons à nouveau au mouvement de la fronde dont Newton applique le principe de décomposition au mouvement de la Lune soumise à l'attraction terrestre. La trajectoire de la Lune est l'effet d'un double mouvements . L'un prolonge le mouvement de la Lune, à vitesse constante et en ligne droite ; l'autre *fait tomber le corps* sur la Terre, conformément à la loi de Galilée. Le mouvement réel en est la résultante



Dans cet exemple, la masse de la lune apparaît à la fois *inerte* et *grave*, mais les deux qualités sont distinctes. Inerte, elle résiste. Grave, elle est attirée en étant aussi attirante :

¹ Lettre LXXIV, p.136.

² Robert Signore, *L'histoire de la chute des corps*, Vuibert, Paris, 2008, p. 57.

Dans la théorie newtonienne, une « même quantité de matière » possède cette faculté surprenante de pouvoir donner lieu aussi bien à des effets gravitationnels qu'à des effets inertiels. [...] Lors de la chute d'un corps, les deux effets sont concomitants. Le corps est soumis à une force attractive proportionnelle à sa masse grave (loi d'attraction réciproque entre les deux corps), et l'accélération qu'il prend est proportionnelle à cette masse et inversement proportionnelle à sa masse inerte [$\gamma = F/m$]. Cette accélération est donc, finalement, proportionnelle au rapport de la masse grave à la masse inerte du corps.¹

Or, comme l'affirmait Galilée, tous les corps tombent à la même vitesse dans le vide. Que ce soient des plumes ou des pierres, ils chutent de la même manière. On est fondé à penser que, pour un même corps, le rapport entre la masse grave et la masse inerte, soit m_g/m_i , est le même pour tous les corps. Newton postule que ce rapport est indépendant de la substance du corps. Cette hypothèse n'est pas arbitraire. Newton construisit deux pendules de longueur identique. Au bout de chacun était fixée une boîte contenant une substance différente (or, argent, plomb, etc.). Les boîtes étaient identiques. Les pendules étaient donc soumis à la même résistance de l'air. L'absence de différence dans leur période d'oscillation prouvait en conséquence l'absence de toute variation du rapport des masses m_g , et m_i .²

Avec le bénéfice du recul, on peut dire que cette expérience conforte l'intuition *prophétique* de Galilée malgré l'insuffisance de son principe d'inertie. La masse, sujette à la force d'attraction, est identique à la masse, inversement proportionnelle à l'accélération.³ Il faudra attendre Einstein pour que leur équivalence soit démontrée.

En étant inversement proportionnelle à l'accélération, la masse fait acte de résistance. Dans le Livre III des *Principia*, consacré principalement aux forces gravitationnelles, l'idée de résistance interne au changement de mouvement n'en reste pas moins fondamentale pour Newton.⁴ Dans *Le Système du monde* (titre du Livre III), l'inertie (ou la masse inertielle), c'est la résistance même à l'accélération.

ii Quid de la distinction entre masse et poids ?

Galilée ne parle pas de masse inerte, différente du poids de l'objet. Il subodore néanmoins que tout corps qui tombe dans le vide acquiert la même accélération. Sa vitesse ne dépend pas de son poids.

La distinction entre masse et poids deviendra plus explicite chez ses successeurs. Elle apparaît fugitive chez Huygens, mais avec Newton, un pas conceptuel est à nouveau franchi.

La masse est un pouvoir de résister au changement d'état ou de repos. Elle n'est pas une vraie force. En revanche, le poids l'est. Euler explique la différence à la Princesse d'Allemagne :

D'abord je remarque que lorsqu'on soutient un corps pour empêcher qu'il ne tombe actuellement, comme si l'on pose le corps sur une table, cette table éprouve la même force avec laquelle le corps voudrait tomber, et quand on attache le corps à un fil qu'on tient suspendu, le fil est tendu par la force qui pousse le corps en bas, c'est-à-dire par sa pesanteur, de sorte que si le fil n'était pas assez fort, il se déchirerait. De là nous voyons que tous les corps exercent une certaine force sur les obstacles qui les soutiennent et les empêchent de tomber, et que cette force est précisément la même que celle qui ferait tomber le corps s'il était libre.

Quand on pose une pierre sur la table, cette table en est pressée. On n'a qu'à mettre la main entre la pierre et la table, et on sentira bien cette force qui même est telle qu'elle pourrait bien devenir assez grande pour écraser la main. Cette force est nommée le poids du corps, et il est clair que le poids ou la pesanteur de chaque corps signifient la même chose, l'un et l'autre marquant la force dont le corps est poussé en bas, soit que cette force existe dans le corps même, ou hors de lui.⁵

¹ *Ibid.*, p.84.

² V. I. B. Cohen, *Les origines de la physique moderne*, Seuil, Paris, 1993, pp.255-256.

³ Roger Penrose, *L'esprit, ...et les lois de la physique*, op. cit., p. 177 et 219.

⁴ I. B. Cohen, *The Newtonian Revolution*, Cambridge Univ. Press, 1980, p.357, n.1. « Au fait particulièrement remarquable que le poids et l'inertie d'un corps restent déterminés par même grandeur (la masse), Newton n'offre en sa théorie aucune explication, mais la singularité du fait ne lui échappe pas ». (Einstein, *Comment je vois le monde*, [1934-1952], Paris, Flammarion, p.217).

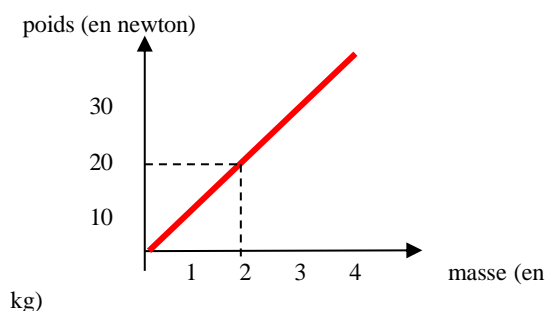
⁵ L. Euler, *Lettres à une Princesse d'Allemagne* Euler, Lettre XLVI, p.87.

Par corps, il faut entendre les corps solides et les fluides. Euler poursuit. *L'air est pesant, et c'est par sa pesanteur qu'il soutient le mercure dans le baromètre. C'est parce que la gravité ou la pesanteur nous paraît si essentielle à la nature des corps qu'il nous est presque impossible de concevoir l'idée d'un corps qui ne serait pas pesant.* L'erreur de Galilée est compréhensible, mais, par expérience :

nous savons qu'il faut plus de force pour changer l'état d'un grand corps que d'un petit, et c'est de là que nous jugeons que le grand corps contient plus de matière que le petit. On peut même dire que cette seule circonstance, c'est-à-dire l'inertie, nous rend sensible la matière.¹

Sans poids, la masse reste. Pour Newton, la masse est immuable alors que le poids varie.² Les astronautes le constatent dans l'espace aujourd'hui. En état d'apesanteur, je suis non pas en *zero gravity* mais en *zero weight*. Je suis *weightless* comme je le suis sur terre quand je saute. En chute libre, les objets sont également *weightless*. *Free fall* $\Leftrightarrow g = 0$. La masse, elle, est invariable. Elle est une valeur scalaire (force non orientée) dont la valeur est absolue quel que soit le référentiel. La masse varie toutefois à très très grande vitesse comme l'a démontré la théorie de la relativité d'Einstein.³

Le poids d'un corps dépend de sa masse. Par ses expériences sur les pendules, Newton établit la proportionnalité du poids, p , et de la masse, m , à une hauteur donnée : pour deux corps M et M' , $p/m = p'/m'$, $p = mg$. Dans cette formule, g est l'accélération due à la gravité. En vertu de la loi de la chute des corps, l'accélération g ne dépend ni de la forme, ni de la nature ni du poids du corps.⁴



Proportionnalité du poids et de la masse

L'unité de la masse est le kg, celle du poids est le newton (N).

$$P = mg, \text{ avec } g \approx 10 \text{ N/kg}$$

Les *Principia* nous apprennent également que la pesanteur diffère d'une planète à l'autre, ou d'une planète à son satellite.⁵ (Celui qui ferait des voyages interplanétaires noterait que son poids varie.)

Enfin, à la suite de Newton, les Lumières découvrent que la *pesanteur* d'un corps dépend de la longitude, de l'altitude et de la latitude. Une mission géodésique apporta la preuve qu'en des lieux différents (en l'occurrence, Paris et la Guyane), le poids des corps est différent. En Guyane, près de l'équateur, un même pendule ne possède pas la même période d'oscillation. Aux effets précédents s'ajoute celui qui provient de la force centrifuge due à la rotation de la terre autour de l'axe des pôles. C'est cet effet qui modifie surtout l'intensité de la pesanteur.

Au vu de tous ces faits, on a compris que la masse, seule, est une propriété intrinsèque des corps. Même *les points mathématiques* dont parle Newton ne sont pas de purs points. Ce sont des points corps dotés d'une masse, mais leur masse est rassemblée en leur centre.

Aujourd'hui, la physique relativiste a établi que la masse d'un corps n'est plus une constante indépendante. La matière, assimilable à la masse, ne se conserve pas. Seule l'énergie est invariante. Ici encore, le XX^e siècle affine la perception, mais dans les situations ordinaires où la vitesse des corps est insignifiante par rapport à celle de la lumière, la différence entre masse relativiste et masse non relativiste reste négligeable.

Sans doute, à l'âge des Lumières on ne pouvait comprendre l'origine d'une telle immutabilité alors que de nos jours on suppose que l'inertie d'un objet résulterait de l'ensemble des autres masses

¹ *Ibid.*, Lettre LXXIV, p.138.

² Newton, *Mathematical principles of Natural Philosophy*, vol. 2, op. cit, Bk III, Rules of reasoning in philosophy, R. III, vol. II, p.400.

³ Walter Lewin, *Physics I : Classical mechanics, Lecture 7 : Weight, Perceived gravity and weightless*, MIT, Fall 1999, on YouTube.

⁴ Michel Paty, « Masse », in *Dictionnaire d'histoire et philosophie de sciences*, sous la direct. de D. Lecourt, Puf, Paris, 2006, p.716.

⁵ Newton, *Principia* [1787], Bk III, Proposition 8, Cor.1, Univer. of California Press, 1962, vol. II, p.416.

présentes dans l'univers. Tout mouvement d'un corps n'aurait de sens que par référence à d'autres corps.¹

On croirait relire Leibniz pressentant une unité globale du tout. Dans sa *Monadologie*, chaque monade, refermée sur elle-même, finit par accorder ses violons avec les autres, mais Leibniz était loin d'imaginer les contraintes de l'espace-temps, créant un dialogue entre la matière et la géométrie.² Le concept de *champ*, produit de ce dialogue, s'oppose à l'idée newtonienne d'une action instantanée à distance. La métaphysique de Leibniz rejetait cette idée qui impliquerait une absence d'interaction entre les monades, à supposer que celles-ci existent. Leibniz partageait en outre le préjugé cartésien d'une contiguïté spatiale qui expliquerait l'action d'un corps sur un autre.³

Une telle limitation dans les conceptions de l'époque ne change pas l'idée de base qu'elle a fait sienne que masse et poids sont deux grandeurs bel et bien différentes. La masse, au contraire du poids, ne varie pas. Elle demeure, que l'on soit sur la Terre ou la Lune.

iii Quid du frottement ?

La physique des Lumières néglige à dessein les forces de frottement et la résistance de l'air. Sans leur mise entre parenthèses, la loi de la chute des corps n'aurait pu être conçue ni formulée.

En faisant rouler des billes sur des plans différents, Galilée a observé l'effet du frottement. Si le plan est très rugueux, la bille s'arrête rapidement. S'il est très lisse, en étant recouvert d'huile par exemple, la bille parcourt une distance plus grande. Le frottement est une force. Dans l'atmosphère, il produit le même effet que sur un plan incliné. Les plumes tombent moins vite que les pierres. Leur vitesse de chute ne dépend pas de leur poids, mais du frottement de l'air qui est plus important sur la plume que sur la pierre. On pensait à tort avant Galilée qu'elles tombaient inégalement sous l'effet de la gravité.⁴

Dans la vie de tous les jours, les forces de frottement sont présentes partout. Chacun peut s'en rendre compte soi-même, signale Euler. Par exemple,

Sur le billard, c'est premièrement le frottement qui diminue le mouvement de la bille, qui ne saurait s'avancer sans se frotter sur le drap. Ensuite l'air lui-même étant une matière, cause aussi quelque résistance capable de diminuer le mouvement des corps : pour s'en convaincre, on n'a qu'à passer fort vite la main par l'air pour sentir cette résistance. De là, il est clair que sur le billard, c'est le frottement et la résistance de l'air qui s'opposent au mouvement de la bille, et qui la réduisent bientôt au repos.⁵

Les forces de frottement finissent par arrêter le mouvement des corps. Euler parle de *résistance*. Or, l'inertie, propre à la masse, a déjà été présentée comme résistance au mouvement. On ne saurait pourtant confondre. Le frottement est une force *externe*. Il n'a rien d'intrinsèque. Sans un pareil obstacle, le mouvement de la bille sur un plan horizontal devrait perdurer. Dans les machines, il est aussi un hôte étranger. Selon Euler, *le frottement qui agit sur les diverses parties est si considérable qu'il est visiblement une cause [extérieure] très suffisante pour réduire bientôt la machine au repos.*

Pour éviter que sa carriole ne s'embourbe, le cocher doit huer ses chevaux pour faire davantage avancer la carriole. Il profère des jurons en voyant le chemin trop cabossé !

Il serait faux de penser que la force de frottement soit la seule résistance au mouvement. Du XVIII^e siècle à nos jours, beaucoup demeurent dans cette opinion. Or, en se déplaçant, la carriole rencontre deux formes de résistance : 1/ les frottements de l'appareillage des roues et du contact du sol ; 2/ l'inertie propre à la carriole lorsque le cocher change de vitesse, de direction ou fait repartir les chevaux. Les frottements mécaniques exercent un effet, mais l'inertie, attachée à toute masse, aussi.

Il existe des situations où les deux effets sont séparés. Regardez une scène de patinage peinte par Bruegel le Jeune au début du XVII^e siècle. Le patineur a dû s'élaner pour vaincre son inertie initiale.

¹ Maurice-Edouard Berthon, *Les grands concepts scientifiques et leur évolution*, Publication unive., Paris, 2000, art. « masse », p.268 et 271.

² « *Space-time grips mass, telling it how to move ; mass grips space-time, telling it how to curve.* » K. Dobson, *Physics...*, op. cit., p.572.

³ Bertrand Russell, *La philosophie de Leibniz* [1900], Eac, Paris, 2000), p.104.

⁴ Maurice Clavelin, *La philosophie naturelle de Galilée*, Albin Michel, Paris, 1996, pp.379-380

⁵ L. Euler, *Lettres à une Princesse d'Allemagne* Euler, Lettre LXXIII, p.135.

Glisser sur la glace réduit presque à rien les frottements. Il faut espérer toutefois qu'ils en subsistent un peu, sinon le patineur sortirait du tableau comme dans un trompe-l'œil de l'époque baroque...

Toutes les situations ne sont pas aussi épurées. Ce n'est pas une raison pour ne rien distinguer. La masse inertielle et la masse gravitationnelle peuvent coexister, comme peuvent l'être la masse et le poids, mais leurs effets doivent être dissociés. En apesanteur, la masse est sans poids. L'inertie et les frottements peuvent aussi coexister. Il n'empêche que ce sont deux causes différentes qui expliquent la résistance au changement.

Gommer les forces de frottements simplifie l'étude des problèmes, mais la vie pratique requiert leur réintégration. L'art militaire en sait quelque chose.

Dans le cas d'un tir de canon dans le vide, la détermination de la trajectoire du boulet fut historiquement difficile. Il fallut Galilée pour dépasser le savoir empirique et apprendre, démonstration à l'appui : 1/ que la trajectoire du boulet est tout entière dans le plan vertical contenant la direction de la vitesse initiale: 2/ que son allure est parabolique, et la portée du tir maximale si l'angle de tir au départ est égal à 45°. La solution du problème fut facilitée par l'hypothèse du vide dans lequel le boulet n'est soumis qu'à une force, - l'attraction terrestre, - constante en grandeur, en sens et en direction.¹

Un bon artilleur ne peut se contenter d'une balistique aussi théorique. Sur le champ de bataille, il doit tenir compte :

- de la résistance de l'air : la trajectoire de la parabole ne sera plus symétrique par rapport au sommet, le point de chute sera plus proche ;
- des vents et de leur orientation : des vents latéraux qui font sortir le boulet du plan vertical, du vent contraire qui le font tomber plus proche encore, du vent arrière qui lui font dépasser l'objectif... ;

Ce sont autant de frottements qui s'ajoutent à ceux qui se produisent déjà dans l'âme du canon...

À la fin du XVII^e siècle, les frottements feront l'objet d'études précises. Amontons énonça la loi selon laquelle les frottements varient en proportion de la pression mutuelle des corps en contact. En étudiant le mouvement des fluides, Newton fonde l'hydrodynamique : il met en lumière les frottements internes (par exemple, un objet qui tombe dans un fluide en repos) et ceux créés sur les parois d'un récipient. Ces facteurs expliquent la résistance de l'eau et de l'air.²

Du XVII^e au XVIII^e siècle, les horlogers s'intéresseront aux frottements, surtout lorsque apparaissent les montres. À la fin du siècle, Coulomb formula d'autres lois quantitatives les concernant.³ Les frottements sont partout.

iv Quid de la relation entre la masse, le poids, et le frottement ?

Avant les Lumières, il était difficile de saisir la relation entre ces trois notions. Depuis les Lumières, on comprend, par exemple, qu'une boule mille fois plus lourde qu'une autre signifie :

- que la force de gravité qui s'exerce sur elle est mille fois plus importante,
- que sa masse inerte résiste mille fois plus au mouvement (à la modification de son repos ou de son mouvement),
- que la chute de la première sera plus rapide que celle de la seconde en raison du frottement dû à la présence de l'air (le frottement freine davantage la légère).

Ces distinctions ne concernent que les fluides, s'inquiètera-t-on. Non, pas seulement. Un fluide est un corps non solide qui se déforme sous l'action de forces qui peuvent être très faibles, mais un fluide oppose aussi une résistance à sa façon.

Comme tout solide, un fluide possède une masse volumique qui caractérise sa masse par unité de volume. Les liquides sont incompressibles et peu dilatables (masse volumique constante dans

¹ Galilée, *Discours concernant deux sciences nouvelles*, op. cit., 4^e Journée. Des tables d'artillerie sont établies suivant l'angle de tir.

² Newton, *Principia*, Bk II, sect. VII. V. George E. Smith, « Newton's study of fluid mechanics », in *International Journal of Engineering Science*, 36 (1998), pp.1377-1390.

³ R. Dugas et P. Costabel, « Organisation de la mécanique classique », in R. Taton, *La science moderne de 1450 à 1800*, op. cit., p.489.

l'espace et le temps). Il en est de même des gaz en écoulement, pour des vitesses faibles et pour des températures constantes. Les fluides n'échappent pas non plus à l'action de la pesanteur : ils ont un poids, et ils subissent également des frottements. La viscosité d'un fluide s'interprète comme une propriété de résistance qui se produit dans la masse du fluide lorsque les frottements s'opposent au glissement des couches fluides les unes sur les autres.¹

Les Lumières n'a nullement négligé l'étude des fluides. On citera par exemple le théorème de (Daniel) Bernoulli pour un fluide incompressible, irrotationnel (non tourbillonnaire) et parfait (on néglige les forces de frottement, ou on postule que la viscosité est négligeable). Ce théorème, établi en 1738, formule mathématiquement le principe qu'une accélération dans le flux d'un fluide s'accompagne simultanément d'une diminution de sa pression. Cet effet se traduit dans l'équation par l'égalité du 1^{er} membre à une constante ($v^2/2 + g.z + p/\rho = cste$, avec, en un point, v la vitesse du fluide, p sa pression, ρ sa masse volumique, g l'accélération de la pesanteur et z l'altitude ; lorsque v augmente, p diminue, et inversement). Le lecteur se rappellera la loi de Boyle-Mariotte, ($p.v = cste$) qui fonctionne de la même façon en reliant la pression et le volume à température constante. Le théorème de Bernoulli pose les bases de la dynamique des fluides, et d'une façon plus générale, de la mécanique des fluides.²

v Par-delà ces distinctions, que retenir pour l'essentiel ?

Dans la science nouvelle qui s'éveille, la masse révèle l'existence même de l'objet. Elle affirme l'être. Comme l'écrit René Thom au XX^e siècle : *Quand on marche sur une pierre, on en conclut à l'existence même de cette pierre*. En butant sur elle, on rencontre sa résistance. On la découvre et on y prête attention. Qui s'y frotte, s'y pique, s'il est question d'un être vivant. A la fin du XVIII^e siècle, Hegel exprimait philosophiquement ce sentiment en considérant que l'opposition détermine l'indéterminé.

Il serait toutefois irraisonnable de réduire la masse à une impression. *L'être révélé comme obstacle n'est défini que pour le sujet qui l'éprouve, mais, pour en affirmer l'objectivité, il faut s'assurer que cette existence peut être également perçue par un autre observateur, et qu'il s'agit bien là du même être. D'où la nécessité d'une communication intersubjective décrivant et comparant les phénomènes observés.*³

Dans cette intersubjectivité comparant les phénomènes, la masse n'apparaît pas comme une notion isolée. Elle s'inscrit dans un système de relations. Elle est définie par rapport à la force et l'accélération qu'elle provoque, et se différencie du poids. La résistance de la masse évoque celle des frottements sans s'y confondre.

Cette relation entre masse, poids et frottement se retrouve dans le constitutionnalisme des Lumières. Il ne faut pas s'attendre à une correspondance exacte, mais à une façon équivalente d'aborder les problèmes. À la *Science de la résistance* dans les solides et les fluides correspond un *Droit de la résistance*. Imprégnés de l'épistémè de l'époque, les constitutionnalistes transposent les idées d'inertie et de frottement dans le monde politique. Ils donnent à l'individu le moyen de résister au pouvoir. Ils exploitent l'inertie et les frottements pour consolider la séparation des pouvoirs. Aucun savant n'œuvre en droit, aucun publiciste ne travaille en science, mais leurs idées font preuve d'une troublante parenté.

3/ Le droit naturel de propriété

i Un moyen de défense inaltérable

ii Une propriété immuable comme la masse

iii Le droit naturel de propriété et la liberté religieuse

iv La critique excessive de Bentham

¹ Jacques Carbonnet, Michel Roques, *Mécanique des fluides*, <http://www4.ac-nancy-metz.fr/physique/PHYS/Term/Mecaflu/Poly-mecaflu.htm> ; *Mots clés de la physique : Viscosité*, <http://www.futura-sciences.com/magazines/matiere/infos/dico/d/physique-viscosite-2018/>

² https://fr.wikipedia.org/wiki/Théorème_de_Bernoulli.

³ René Thom, Préface, in Laplace, *Essai philosophique sur les probabilités* [1814], Paris, Christian Bourgois, pp.5-27.

4/ Le droit civil de propriété

- a) **Nous sommes tous propriétaires**
- b) ***Don't trespass on my property!***
- c) **Plus je possède, plus je pèse**

d) L'intrusion de l'histoire

- i *La proportion entre le droit naturel de propriété et sa version civile*
- ii *La proportion entre la liberté politique et la civile*
- iii *La proportion entre la justice naturelle et la civile*

5/ La politique du frottement et ses insuffisances

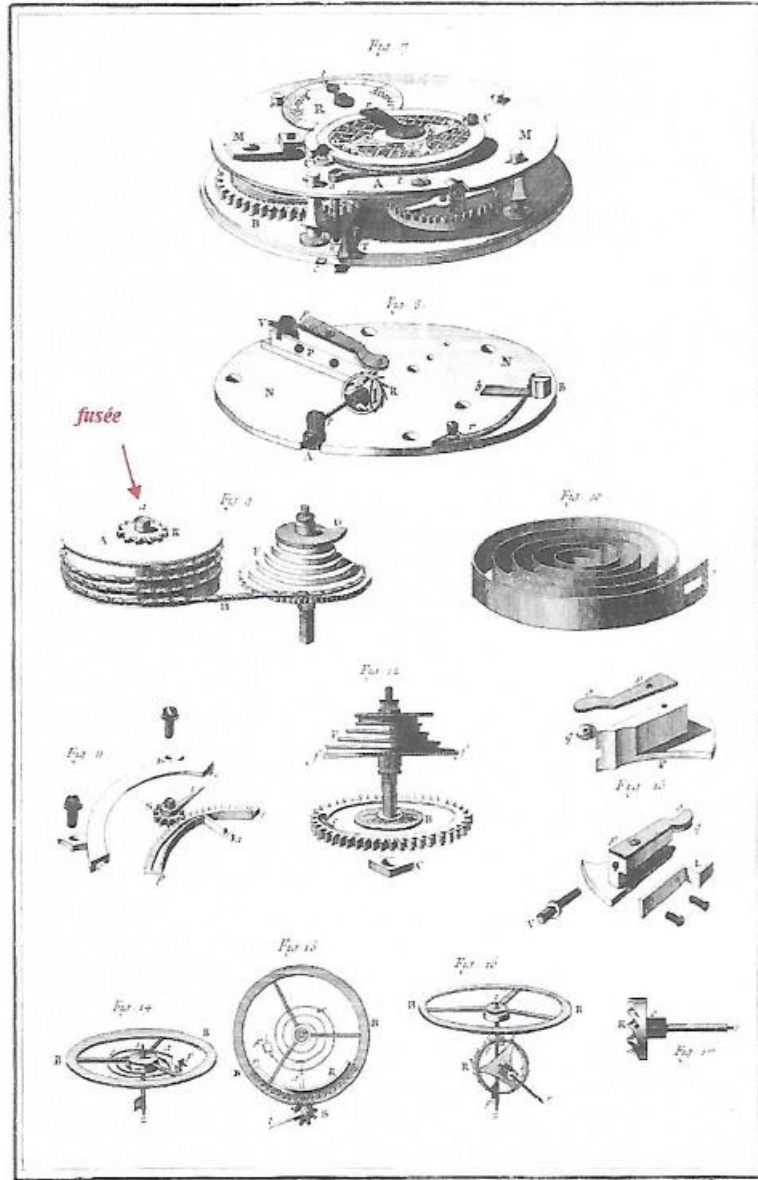
- i *La place centrale des frottements dans la spécialisation des organes*
- ii *Les divers organes de l'horloge constitutionnelle*
- iii *Les problèmes mécaniques institutionnels irrésolus*

§ 29.- RECAPITULATION ET REPONSE A DE NOUVELLES OBJECTIONS

- a) *Récapitulation*
- b) *Réponse à de nouvelles objections*

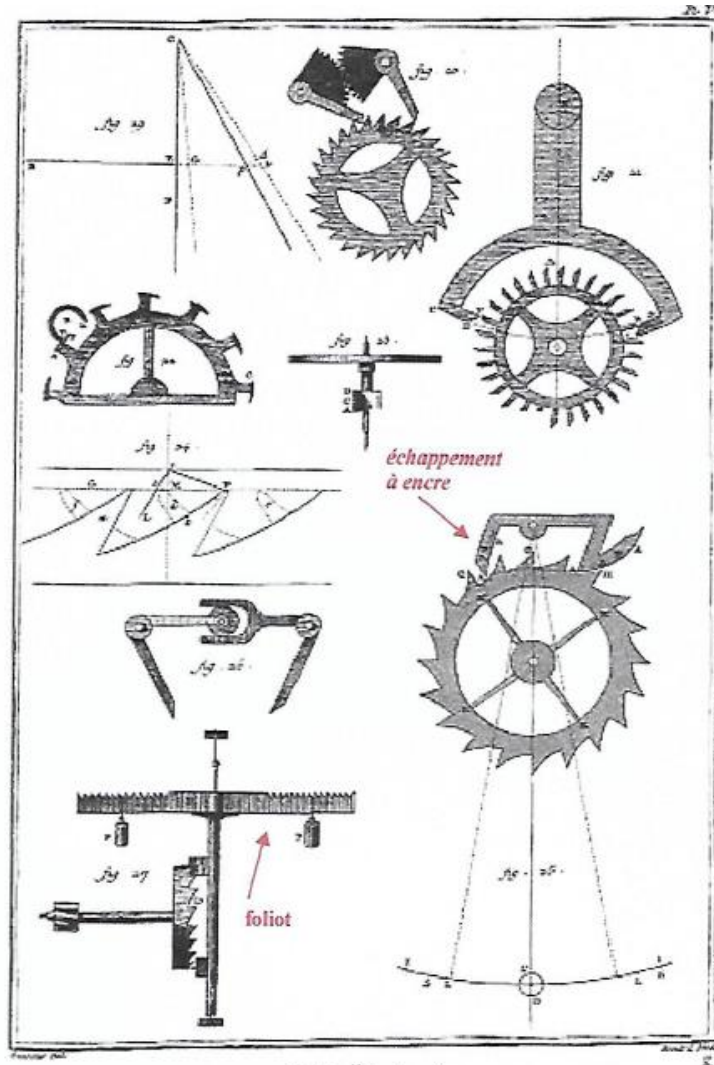
o

§30.- Planches de l'Encyclopédie de Diderot et de d'Alembert, 116 et 117



Horlogerie

CC.



Horlogerie

SECTION 3 LA CONSIDERATION DU PARTICULIER DANS LE GENERAL

A/ Le fait particulier n'est pas isolé

§ 31.- La loi de nature ou l'unicité d'un processus, 118 - § 32.- La loi positive ou le lien institutionnel, 131. § 33.- La volonté générale comme objet-limite (plutôt que comme limite mathématique), 134. - § 34.- Les aventures de la convergence, 138. - § 35. Encadrement strict et encadrement probable, 151. - § 36. La porte étroite du droit, 168. - § 37. L'encadrement des comportements en moyenne, 168

§ 31.- LA LOI DE NATURE OU L'UNICITE D'UN PROCESSUS

- i Le mouvement d'un projectile, 115*
- ii Le mouvement du pendule, 122*
- iii Le moment d'une force, 125*

○

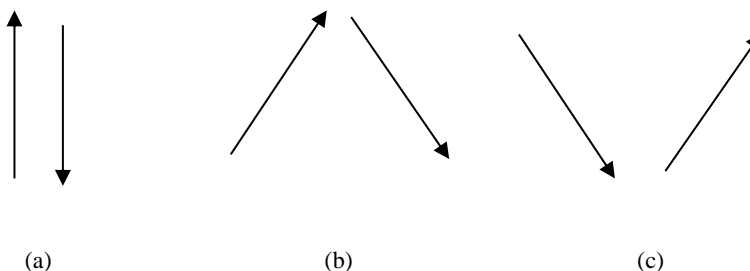
i Le mouvement d'un projectile

Depuis Bacon, l'étude des différences infimes est le souci premier de la science. Leur mise en relation n'est pas perdue de vue. L'établissement de lois générales demeure l'objectif ultime.¹ Les lois générales restituent l'unicité d'un processus sous l'apparence d'une forme (droite, courbe, surface).

La perception de cette unicité est nouvelle. Aristote distinguait les mouvements *naturels* et les mouvements *violents*. La tendance de la nature serait le repos. Suivant cette opinion, il existerait des mouvements *naturels* vers le haut pour les corps légers, vers le bas pour les lourds. En dehors de ces mouvements, les mouvements nécessiteraient une force. Etant contraires à la nature, ils sont *violents*.

La preuve ? Un voilier n'avance que grâce au vent qui gonfle les voiles, mais quid de la résistance de l'eau ? Cette résistance vaut frottement. En son absence, le voilier devrait continuer son mouvement... Ne le constate-t-on pas soi-même ? Quand on exerce une force sur un corps, celui-ci se met en mouvement. La force s'arrête, le corps s'arrête. N'est-ce pas si simple que cela ? Malheureusement, Aristote et ses successeurs confondent vitesse et accélération. Seule l'accélération du mouvement requiert un *moteur* extérieur. En vitesse de croisière, un voilier n'en a nul besoin.

Considérons le lancer d'une pierre, ou d'une flèche, vers le haut. Est-on sûr qu'il se décompose en un mouvement violent (vers le haut) et en mouvement naturel (vers le bas) ? Les figures (a) et (b) sont-elles correctes ? Le mouvement de rebond d'une balle : est-il bien représenté par la figure (c) ?

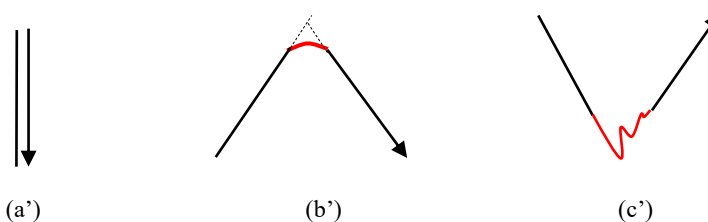


¹ Bacon, *Novum organum*, Liv. I, § 105.

Galilée ne croit pas à la juxtaposition de tels mouvements. Son esprit critique prend le contre-pied du passé : il montre que le mouvement vers le haut est suivi de sa retombée ; il montre que le mouvement vers le bas est suivi de sa remontée. Dans chaque cas de figure, les deux mouvements ne sont en fait qu'un seul mouvement. Selon Koyré commentant cette révolution dans la pensée,

les mouvements dits naturels [ceux qui descendent] et violents [ceux qui montent] se transforment l'un dans l'autre : la balle jetée en l'air redescend, et celle qui descend une pente remonte le versant opposé.¹

Qu'une pierre soit lancée en l'air à la verticale ou obliquement, rien ne change. Le mouvement *violent* qui la fait monter se prolonge dans le mouvement *naturel* qui la fait descendre (*fig. a' et b'*). Inverser l'ordre des mouvements n'altère pas leur unicité : une boule dévalant une pente la remonte *naturellement* grâce à l'énergie acquise dans la descente (*fig. c'*).



La *fig.a* présente une vraie discontinuité alors que la *fig.b* révèle en fait une parabole qui relie continûment la flèche du haut et la flèche du bas. La *fig.c* est plus complexe en physique, car il se produit un petit rebond dont la forme et la hauteur dépendent du matériau qui est frappé.

La pointe de la *fig. b* est arrondie. Autour d'elle, les petites variations, que les mathématiciens nomment la dérivée à droite et la dérivée à gauche, sont égales. Dans la physique ancienne, résume René Thom, *il s'agit de deux mouvements continus consécutifs, mais distincts ; le mouvement forcé vers le haut suivi du mouvement naturel vers le bas ; il y a discontinuité au point le plus haut, où le mouvement change de direction*. Le mouvement forcé est le mouvement *violent* qui s'oppose au mouvement naturel. Dans la physique moderne, il n'y a plus de coupure entre les mouvements :

A la suite de Galilée, il s'agit d'un mouvement unique décrit par une loi parabolique unique de la forme $z = z_0 - \frac{1}{2}gt^2$ [où z est la hauteur, t le temps et $z_0 = z(0) = z(t_0)$]. Il y a « prolongement analytique » du mouvement montant dans le mouvement descendant.²

Le *prolongement analytique* conforte l'idée d'un développement des fonctions en séries de Taylor-Lagrange de la forme $\sum a_n x^n$ avec $n \rightarrow \infty$. Thom met cependant cette expression entre guillemets, car son emploi est plutôt métaphorique. Nous la réexaminerons, mais, pour ne pas laisser le lecteur dans le trouble, disons quelques mots sur ce prolongement qui développe une fonction en séries entières.

Une fonction définie par une telle série est dite *analytique*. Le développement en séries entières (cf. notre §25) retrace en partie la courbe qui représente par exemple le mouvement d'un objet (mouvement uniforme, uniformément accéléré, etc.). Dans le domaine des nombres réels, certaines fonctions, telle l'exponentielle e^x , se prolongent automatiquement sans rencontrer de problème alors que d'autres fonctions, définies également par une série, buttent sur une singularité. Par ex., la série $1+x+x^2+x^3+x^4+\dots$ qui définit la fonction $1/(1-x)$ ne dépasse pas 1. La formule ne marche plus en ce point.

¹Alexandre Koyré, *Etudes galiléennes*, Hermann, Paris, 1966, pp.239-240.

²René Thom, *Esquisse d'une sémiophysique, Physique aristotélicienne et Théorie des catastrophes*, InterEditions, Paris, 1991, p.219.

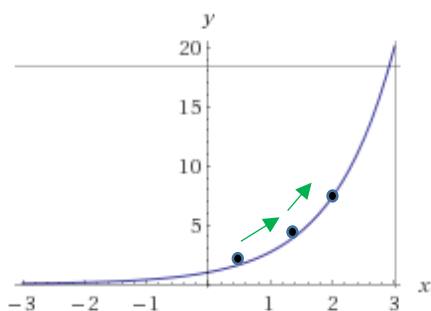


fig.a

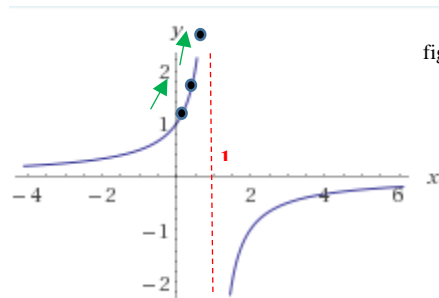


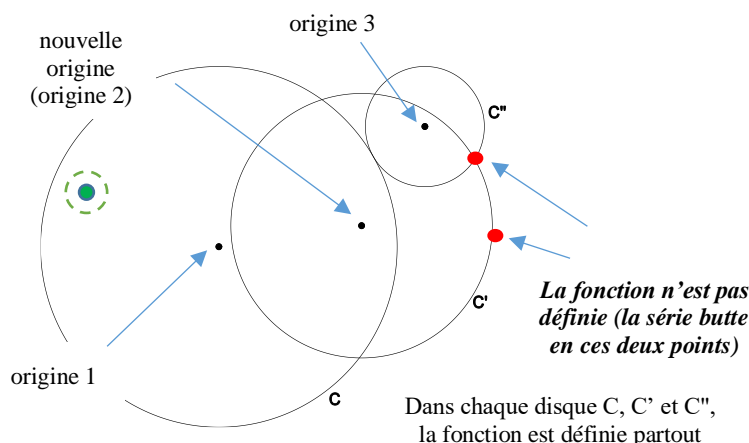
fig.b

La fonction exponentielle e^x ,
définie en $x = 0$ par la série $1 + x + x^2/2 + x^3/6 + x^4/24 + \dots$

La fonction $1/(1-x)$,
définie en $x = 0$ par la série $1 + x + x^2 + x^4 + \dots$

(§ 27
1/a)

Un tel prolongement analytique peut paraître évident, mais il l'est beaucoup moins quand il s'agit de passer des nombres entiers aux nombres réels ou complexes. Dans l'exemple de la fig.b, la discontinuité n'est pas supprimée. Le prolongement analytique a été précisément inventé pour étendre la reconstitution de la courbe dans le plan complexe formé d'un axe réel et d'un axe imaginaire. La notion sera forgée au sortir des Lumières. Elle fait coïncider deux séries entières (convergeant l'une dans le cercle C, l'autre dans le cercle C'') grâce à une autre série qui jette un pont entre elles (cette série converge dans le cercle C' qui chevauche les cercles C et C''). On ne considère plus une fonction dans \mathbb{R} , mais dans \mathbb{C} comme $f(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots$, et on procède chaque fois à un changement d'origine pour inaugurer une autre série qui définit la même fonction.



Dans un prolongement analytique, on opère de proche en proche, au moyen d'une chaîne de disques, indéfiniment s'il y a lieu (A. Dahan-Dalmedico/J.Peiffer, Une histoire des math., op. cit., p.236)

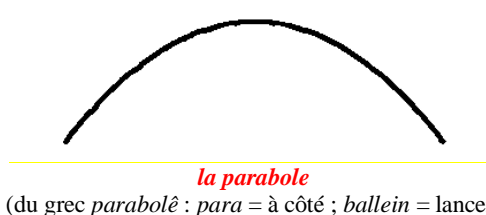
Le prolongement analytique opère dans une région « ouverte » (ex. : un disque sans frontière) dans laquelle n'importe quel point peut être entouré par un cercle beaucoup plus petit (voir un point vert sur la fig. supra).

Au XX^e siècle, Penrose chantera *la magie des nombres complexes* en raison notamment du fait que toute fonction complexe lisse (dérivable) est nécessairement analytique, i.e., à nouveau, développable en séries entières, comme le croyait abusivement Lagrange pour les fonctions réelles. La « lissitude » complexe à l'intérieur d'une région donnée équivaut à l'existence d'un développement en série autour de n'importe quel point de ladite région.¹

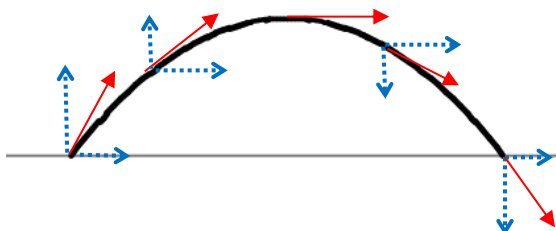
(§25
2/-ii)

Pareille extension algébrique était déjà en œuvre en mathématiques avec le prolongement du binôme $(a+b)^n$ de Pascal en celui de Newton puisqu'il s'agissait de passer des puissances n entières aux puissances n réelles. Nous découvrirons également, au moment venu, l'usage du dernier schéma géométrique dans le droit des Lumières. Retenons en attendant l'idée de base de l'époque que certaines coupures ne sont qu'apparentes. En raccordant des morceaux isolés, l'analyse rend au mouvement une individualité à l'image du trajet parabolique d'un boulet de canon lancé dans le vide :

¹ R. Penrose, *A la découverte des lois de l'univers*, op. cit, chap. 7 : L'analyse complexe, p.115 et 122.



Attardons-nous sur ce mouvement dont la forme a été restituée par Galilée. Cette forme se maintient si le mouvement du boulet s'effectue dans le vide (sans la présence de l'air qui pourrait opposer une certaine résistance). Le sommet de la courbe peut être plus ou moins haut suivant l'angle de lancement. Le mouvement d'ensemble naît de la combinaison d'un mouvement vertical (ascendant puis descendant) et d'un mouvement horizontal (à vitesse uniforme) indépendant du premier (mouvement d'inertie). Les deux mouvements se combinent à *chaque instant*, et non successivement.



L'équation de la forme $z = z_0 - \frac{1}{2}gt^2$ (où z est la hauteur et t le temps) rappelle celle du mouvement uniformément accéléré $x = vt + \frac{1}{2}gt^2$, obtenue en intégrant l'équation différentielle du *second* ordre (équation où figure une dérivée seconde : l'accélération, due à la gravité). La pesanteur constitue un mouvement à accélération constante.¹ Sur un champ de bataille, la résistance de l'air modifie le trajet d'un boulet de canon. Cette force de frottement ajoute son effet à celui de la gravité. La forme de l'équation finale engendre une trajectoire un peu différente. Si l'artilleur n'en tient pas compte, il manquera sa cible ! Idem pour le vent qui peut dévier plus ou moins le trajet du boulet de canon.

L'esprit moderne ne considère pas seulement les éléments petits ou infiniment petits. Il cherche surtout ce qui les relie. Chaque élément se calcule à partir des précédents au moyen d'opérations différentes.

(§21
1/-i)

Le procédé n'était pas nouveau. Au XIII^e siècle déjà, Fibonacci avait conçu la suite qui porte son nom : une suite d'entiers dont chaque terme est la somme des deux termes qui le précèdent (par ex. : 1, 1, 2, 3, 5, 8, etc.). Nous en avons déjà parlé via le triangle arithmétique de Pascal. Une telle suite décrit la croissance d'une population de lapins.

L'idée fut féconde : on la retrouve dans la suite des factorielles $u_n = n!$ (1, (1x2), (1x2x3), etc.). La suite d'entiers utilise l'addition, celle de Fibonacci la multiplication. Les deux suites n'utilisent pas la même opération pour définir la succession à partir de ce qui est avant mais l'idée de suite leur est commune. Au XVIII^e siècle, Moivre définit la *série récurrente* comme une somme de termes successifs

*dont le terme général est défini par une relation qui le lie à un ou plusieurs termes précédents et en permet le calcul de proche en proche.*²

(§25
4/-i)

Chaque ligne du triangle arithmétique de Pascal est une série récurrente. La série de Taylor-Lagrange reconstitue le mouvement parabolique en accomplissant chaque pas en avant à partir des précédents. Dans cette série reliant une fonction et ses dérivées (ses variations infinitésimales), chaque coefficient des puissances successives (i.e. chaque dérivée) est calculé à partir des coefficients définis auparavant (dans le développement $f(x+i) = f(x) + pi + qi^2 + ri^3 + \dots$, le coefficient de

¹ Si la résistance de l'air est négligeable, le mouvement d'un projectile est uniquement déterminé par l'accélération gravitationnelle. Si la position et la vitesse initiales sont des données du problème, on trouve la position et la vitesse à tout instant à partir des équations du mouvement uniformément accéléré. (Kane/Sternheim, *Physique*, op. cit., p.56). Pour décrire le mouvement du projectile dans un plan, il faut combiner deux mouvements uniformément accélérés : l'un suivant l'axe des x et l'autre suivant l'axe des y , puisque dans un mouvement à deux dimensions, l'accélération a également deux dimensions.

² A. Delachet, *L'analyse math.*, op. cit. p.34.

la 1^{re} puissance i est la dérivée 1^{re} $f'(x)$, calculée à partir de $f(x)$; le coefficient de la 2^{de} puissance i^2 est la dérivée 2^{de}, calculée à partir de la dérivée première $f'(x)$, etc.). On passe sans fin d'un mini-pas à l'autre.

(Dans l'expression $f(x+i)$, le i n'est nullement l'imaginaire pur $i^2 = -1$. Lagrange utilisa cette écriture à l'origine. L'étudiant actuel est plus familier avec $f(x+a) = f(a) + f'(a)x + \frac{f''(a)}{2!}x^2 + \frac{f'''(a)}{3!}x^3 + \dots$)

L'unicité du processus tient à l'existence d'une suite qui s'auto-engendre sous l'influence d'une ou de plusieurs forces extérieures. Le préfixe *auto-* rappelle combien le mouvement d'un objet ressemble à un collier de perles qui assure le passage de perle à perle sans qu'aucune ne manque à l'appel.

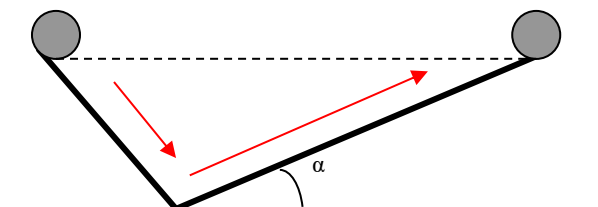
ii Le mouvement du pendule

On connaît depuis Galilée la loi de la chute des corps dans le vide, mais comment une telle loi d'accélération a-t-elle pu être trouvée ? Comment a-t-on pu mesurer leur changement de vitesse ?

Pour mesurer le temps, Galilée utilisa un filet d'eau qui coulait doucement (une sorte de clepsydre). Comme la durée de la chute était trop courte – même la Tour de Pise n'est pas assez haute ! – il eut l'idée de remplacer le mouvement vertical par un mouvement sur un plan incliné. Il fit rouler une boule de bronze dans une rainure (le musée des sciences de Florence exhibe l'appareillage mis en place).

La descente du corps était ralentie, le temps de chute devenait mesurable, mais le recours à une clepsydre ne se prêtait pas à une graduation très précise. La clepsydre fut remplacée par le pendule.

Galilée imagina un plan incliné descendant, prolongé par un plan incliné ascendant. Il constata qu'une bille abandonnée à elle-même sur le premier plan continue son mouvement sur le second. Si la bille ne remonte pas à la même hauteur, c'est à cause des frottements. Cette expérience se vérifie quel que soit le degré d'inclinaison des plans. Pour un angle nul ($\alpha = 0$), et en l'absence de frottement, Galilée supposa que la bille ne s'arrêterait jamais. Ce fut la première formulation du principe d'inertie. Descartes et Huygens préciseront que la bille roule en ligne droite à vitesse uniforme (constante).



L'expérience du double plan incliné de Galilée

Supposons maintenant que la bille descende le long d'un plan dont l'inclinaison est identique à celle de l'arc que suit la boule de plomb suspendue au fil d'un pendule.

La figure infra met en parallèle les deux montages.



Galilée effectua la comparaison dans son étude du mouvement uniformément accéléré.¹ Le pendule a l'avantage de découper le temps en tranches rigoureusement égales. Il est isochrone :

Le pendule isochrone de Galilée a une importance considérable dans l'histoire de la science. Il fait du temps une grandeur homogène que l'on peut, comme une longueur, débiter en tranches égales, et donc mesurer. Il y aura dorénavant une mathématique du temps, comme il y avait une mathématique de l'espace.²

Galilée créa un nouvel instrument de mesure du temps, mais il crut que l'isochronie découlait de l'inclinaison en arc de cercle. En 1659, Huygens démontra que la courbe idoïne est la *cycloïde* (ou *roulette*). La mathématique du temps acquit son étalon de mesure comme la mathématique de l'espace avait acquis le sien grâce au théorème de Thalès qui permet de construire une règle graduée.

Le théorème de Thalès traite des droites parallèles (celui de Pythagore traitera des angles droits). Une droite tracée parallèlement à un des côtés d'un triangle détermine un autre triangle semblable au premier. La mise en rapport des longueurs des côtés des triangles semblables donne lieu à une égalité de proportions à partir de laquelle on peut trouver une longueur manquante. C'est par ce calcul de 4^e proportionnelle (ou règle de 3) que Thalès détermina la hauteur de la pyramide de Kheops.

La graduation d'une longueur donnée permet de la diviser en autant de parties égales que l'on veut. La graduation du temps par le pendule permet de diviser la durée en dix, cent, mille parties égales. Le pendule sert d'étalon du temps parce que

la période d'un pendule est proportionnelle à la racine carrée de sa longueur. Un pendule cent fois plus court battra dix fois plus vite. [...] Nous sommes habitués à trois divisions, l'heure, la minute et la seconde ; elles correspondent à trois pendules synchronisés, dont chacun bat soixante fois plus vite que l'autre, et est donc $[60^2 = 3600 \text{ fois}]$ plus court. L'idée ne peut guère être exploitée telle quelle : le pendule d'un mètre bat à peu près la seconde, et il est difficile d'utiliser des pendules beaucoup plus petits ou plus grands, mais la voie de l'inventivité est désormais tracée.³

Le lecteur peut s'assurer par soi-même du lien entre la longueur d'un pendule et la durée de ses oscillations. Qu'il lui suffise de considérer non plus une tige rigide mais une ficelle attachée à une potence au bout de laquelle est suspendu un poids. En divisant par 4 la longueur du pendule (on plie deux fois la ficelle), il constatera que la période - la durée t d'aller-retour d'un battement du pendule - est réduite de moitié ($2 = \sqrt{4}$). En divisant la longueur par 9, la période est réduite au tiers ($3 = \sqrt{9}$), etc. La période du pendule (2, 3, ...) est bien proportionnelle à la racine carrée de sa longueur ($\sqrt{4}$, $\sqrt{9}$, ...).

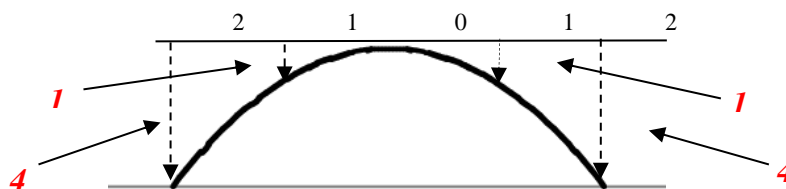
Cette propriété revient à dire que *les carrés des périodes du balancement croissent proportionnellement à la longueur du pendule.*

La suite des carrés est familière à la pensée de Galilée. Selon la loi de la chute des corps, les espaces parcourus par ces corps pendant les intervalles pesanteur de temps $t = 1, 2, 3, 4 \dots$, sont proportionnels aux carrés de ces nombres (1, 4, 9, 16, ...). La pesanteur g figure dans l'équation de la période d'un pendule simple de longueur auquel est suspendue une masse ponctuelle, mais comme la pesanteur est pratiquement constante sur la surface terrestre, la période ne dépend que de la longueur du fil de suspension. En chute libre, g est constant ; la masse des corps ne joue aucun rôle.

¹ Galilée, *Discours concernant deux sciences nouvelles*, op. cit., 3^e Journée, p.139

² Ivar Ekeland, *Le meilleur des mondes possibles. Mathématiques et destinée*, Seuil, Paris, 2000, p.34.

³ *Ibid.*, p.22. On a : $T = \sqrt{L/g}$, avec T la période, L la longueur et g la pesanteur. Selon la formule, T est proportionnelle à la racine carrée de la longueur du pendule, L . Or, $f = 1/T$ (une fréquence représente l'inverse d'une durée), d'où $f = 1/\sqrt{L/g} = \sqrt{g/L} \approx 1/\sqrt{L}$ sachant g constant. La vitesse varie en changeant la fréquence, et réciproquement. Si on multiplie la vitesse (60 fois plus vite), on multiplie la fréquence (par 60). Si la fréquence f est 60 fois plus élevée, la longueur du pendule L est 3600 fois plus courte. En effet : $f \approx 1/\sqrt{L}$ ou $f^2 \approx 1/L$, soit $L \approx 1/f^2 \approx 1/3600$.

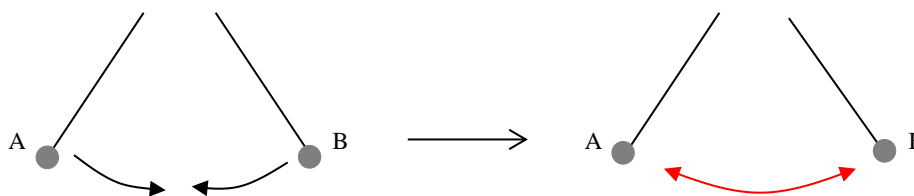


les propriétés du pendule font écho à celles de la parabole $y = x^2$ (cf. suite des carrés 1, 4, 9, 16...)

Le pendule de Galilée ouvre l'ère de la précision en donnant l'heure exacte, mais le recours au pendule ne vaut pas seulement le détour parce qu'il qu'assure une vérification expérimentale de la chute libre. L'étude de son mouvement achève de détruire l'ancienne conception du mouvement :

Le pendule de Galilée ne va pas du repos pour aboutir au repos : il oscille en permanence. Le mouvement n'est pas un changement d'état : le mouvement est un état qui perdure, sans autre cause que lui-même, tout comme le repos. Il perdure dans l'identité, puisque la fréquence des oscillations ne change pas, pas plus que leur amplitude.¹

De même que le trajet d'un projectile est un seul et même mouvement, le mouvement périodique du pendule se révèle être un processus continu fondant en lui deux mouvements différents :



Le poids du pendule ne s'arrête pas au point le plus bas de sa course, mais remonte pour redescendre encore, et s'il y avait un trou à travers toute la terre, une pierre que l'on y jeterait ne s'arrêterait pas à son centre mais monterait à la surface opposée.

(Alexandre Koyré, *Etudes galiléennes*, Hermann, Paris, 1966, pp.239-240)

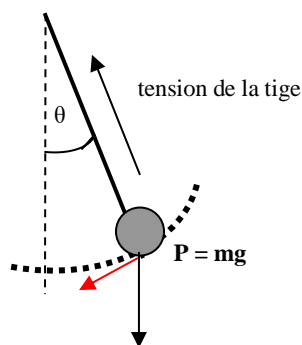
Le trajet d'un projectile décrit un processus physique dont l'existence est confirmée par un processus de résolution mathématique. Le calcul avance à pas comptés. Chaque pas conduit au suivant. A tout mouvement correspond une solution de l'équation correspondante : la position (ou la vitesse) de l'objet considéré au bout d'un certain temps. La géométrie analytique de Descartes se profile à l'horizon : la connaissance de l'équation précise la forme de la courbe représentant le mouvement.

Identifié lui-même comme un seul et même processus, le mouvement périodique du pendule donne lieu à un processus de calcul semblable. L'équation du pendule sert à mesurer un trajet à vitesse variable comme celui d'une chute libre (à accélération constante dans le vide).

En l'absence de frottement (résistance de l'air, de l'eau, etc.), le mouvement du pendule obéit à une équation différentielle du second ordre : si θ représente la position angulaire du pendule (l'angle avec la verticale), la solution consiste à chercher une fonction du temps $\theta(t)$ qui est dérivée deux fois (la dérivée seconde – l'accélération, due à l'action du pesanteur g – intervient dans l'équation en raison du principe fondamental de la dynamique, $F = m a$). La connaissance de la fonction $\theta(t)$ permet de prédire facilement où sera le pendule à tout instant si la valeur de θ reflète de petites oscillations.²

¹ *Ibid.*, p.20.

² K. Dobson, D. Grace, D. Lovett, *Physics*, op. cit., p.119. L'équation du mouvement du pendule simple a pour expression : $d^2\theta/dt^2 + \omega_0^2 \theta = 0$, avec $\omega_0 = \sqrt{g/l}$.



Le pendule oscille sous l'action de son poids. $F = ma$ se convertit en $P = mg$

Comme la tension de la tige est égale et opposée à la force gravitationnelle (la tension joue le rôle d'une force centripète), l'équation différentielle qui gouverne les oscillations du pendule simple ne prend en compte que la force tangentielle qui donne une accélération dans le sens d'une diminution de l'angle θ

Le pendule est un corps pesant, suspendu de manière à pouvoir faire des vibrations, en allant et venant autour d'un point fixe par la force de la pesanteur. (Encycl., art. Pendule)

Dans sa jeunesse, Galilée contemplait les balancements du lustre suspendu au plafond de la cathédrale de Pise. Il évaluait la fréquence des mouvements allers retours en s'aidant de son pouls et de la musique. Il y a un retour du balancier : c'est maintenant le pendule isochrone qui mesure les autres mouvements ! Même s'il ne suit pas sans fin une ligne droite à vitesse constante, son mouvement oscille en permanence : c'est un processus et non un état, mais comme état il reste toujours égal à lui-même malgré son évolution temporelle. Le calcul différentiel révèle son identité.

iii Le moment d'une force

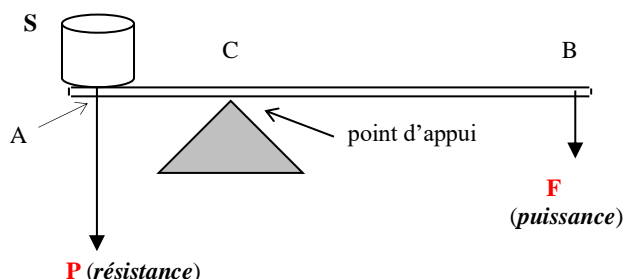
L'étude du mouvement d'un projectile, celle du mouvement du pendule, ont mis en lumière l'unicité d'un processus. La perspicacité de Galilée ne s'arrête pas là. D'autres phénomènes présentent une individualité. Comme en matière de résistance des matériaux (d'une poutre par exemple encastree dans le mur), il observe la position d'un corps situé sur le bras d'un levier ou d'une balance. Son changement de position dépend et de son poids et de son éloignement du centre de la balance.

Dans ses *Mécaniques* (1634), Galilée appelle *momento* [moment] cette combinaison. Le *moment* d'une force par rapport à un point est le produit d'une force par une distance :

C'est grâce au momento qu'on verra souvent un corps moins pesant en équilibrer un autre très pesant, comme on voit dans la balance romaine un petit contrepoids soulever un corps très lourd, non par l'excès de sa gravité, mais en raison de sa distance vis-à-vis du point de suspension de la balance. Cette distance, combinée avec la gravité du plus petit poids, accroît son momento et sa tendance vers le bas, lui permettant ainsi de dépasser le momento d'un autre corps plus pesant.¹

Le concept de *moment* remonte aux Grecs. Galilée s'est pénétré d'Archimède et de sa conception du levier. La pratique de manier des objets lourds au moyen d'un levier était connue dans l'antiquité, mais il revint à Archimède d'en exposer le principe.

Le levier est une barre métallique rigide qui repose en l'un de ses points sur une arête solide comme point d'appui. Sur la figure infra, le point d'appui est C. La flèche F représente la force qui agit au point B ; c'est la *puissance*. La flèche P représente le poids du corps solide S qu'il s'agit de soulever ; c'est la *résistance*. Selon Archimède, *des grandeurs sont en équilibre à des distances inversement proportionnelles à leurs poids.*² A l'équilibre, on a : $F \times CB = P \times CA$.



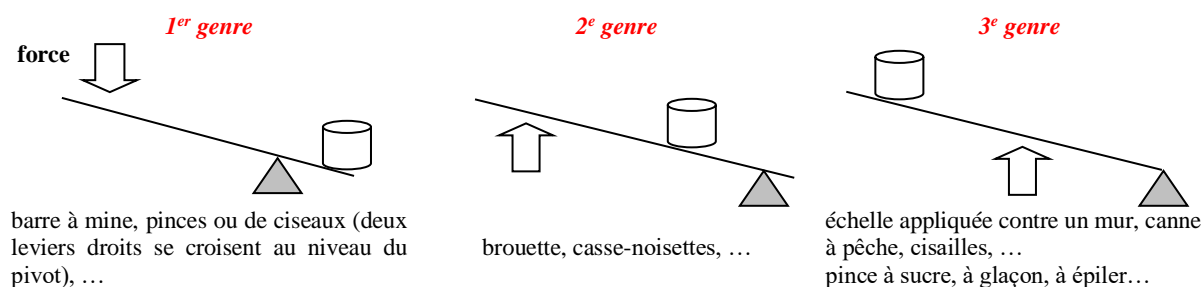
¹ M. Clavelin, *La philosophie naturelle de Galilée*, op. cit., p.160.

² Archimède, *Sur l'équilibre des figures planes*, in M. Clavelin, *La philo. naturelle de Galilée*, p.151.

On néglige le poids du levier, supposé petit au regard de la puissance et de la résistance. Si la force F dépasse la valeur donnée par l'équation, l'extrémité B du levier s'abaissera sous l'action de cette force et le corps solide S sera soulevé.¹ La loi d'Archimède peut faire l'objet d'une autre représentation en considérant deux poids au lieu d'un. Rien ne change. Des poids inégaux situés à des distances inégales peuvent être en équilibre. La balance ne penche pas toujours du côté du poids le plus lourd. Avec des poids égaux, elle penche du côté du poids le plus éloigné par rapport au point d'appui :

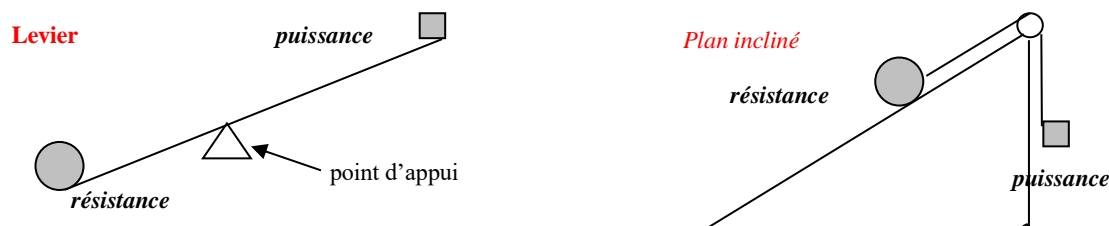


Archimède assimila le levier à une droite et les poids à des figures planes. Il étudia et classa toutes sortes de levier droit :



Galilée généralisa le raisonnement d'Archimède : quel que soit le dispositif en cause (levier droit, levier coudé, plan incliné), deux poids sont en équilibre si leurs moments respectifs sont égaux. A l'équilibre, le *moment de la puissance* est constamment égal au *moment de la résistance*.²

Grâce au levier, une puissance est capable de balancer une résistance, et réciproquement. Il existe une rigoureuse compensation de la force (puissance ou résistance) par la distance parcourue. Idem pour le plan incliné sur lequel une résistance peut être équilibrée par une puissance plus petite. L'angle que fait le plan par rapport à l'horizontale réduit l'intensité nécessaire au déplacement vertical d'un objet. La force pour déplacer l'objet est plus faible que le poids de cet objet, mais la distance à parcourir est plus grande. Les Egyptiens utilisaient ce biais pour monter des blocs sur les pyramides.³



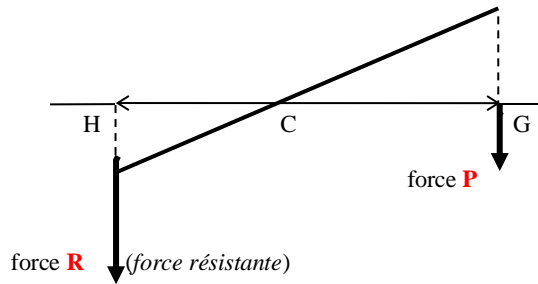
Si l'on abaisse du point d'appui C des perpendiculaires CG et CH sur les directions des forces P et R , on aura à l'équilibre : $P : Q :: CH : CG$ (P est à Q ce que CH est à CG). Réciproquement, l'équilibre existera quand cette proportion aura lieu. Par conséquent, en appelant p et r les perpendiculaires CG et CH , l'équation sera : $Pp = Rr$. Même si le levier n'est plus en position horizontale, on retrouve l'équation d'équilibre. Il y a autant d'équilibres que d'occasions de compensation entre forces en jeu.⁴

¹ Emile Borel, *L'évolution de la mécanique*, Flammarion, Paris, 1943, pp.17-18.

² M. Clavelin, *La philosophie naturelle de Galilée*, p.163.

³ *Les mouvements respectifs de la puissance et de la résistance ne doivent pas s'évaluer seulement d'après les distances que franchissent l'une et l'autre, mais d'après la projection de ces distances sur un axe vertical.* (Ibid., p.168).

⁴ Siméon-Denis Poisson, *Traité de mécanique*, Bruxelles, 1838, 3^e éd. revue par et J.G. Garnier, p.24.

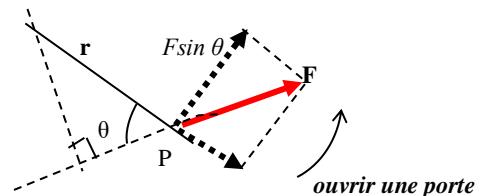
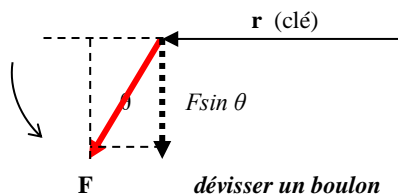


Le moment de la force P ou R , par rapport au point d'appui C , est le produit de cette force par la perpendiculaire abaissée de ce point sur sa direction. Les perpendiculaires CG et CH s'appellent les *bras de levier* de la puissance et de la résistance. D'où l'équation: *Moment = Force \times Bras de levier*. Le bras de levier est la distance *minimale* entre le point d'appui et la droite d'action de la force P ou R .

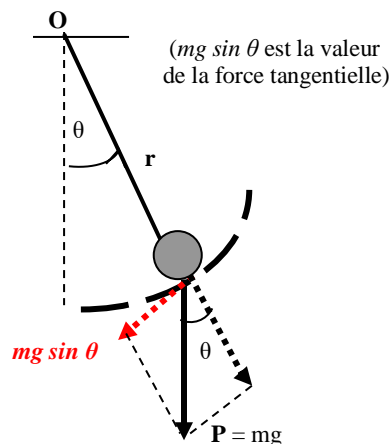
Le moment d'une force est sa capacité de produire une rotation. Si on veut desserrer un boulon rouillé à l'aide d'une clé (les mots *boulon* et *clé* existent au XVII^e siècle), il ne faut pas exercer la force sur la tête de la clé, côté boulon. Rien ne tourne. Il faut l'exercer sur son bout, mais attention : pas dans son prolongement. On ne peut faire tourner le boulon qu'en exerçant une force qui forme un angle avec le bras de levier. Le moment sera *maximal* si la force et le bras de levier sont perpendiculaires.

Le moment d'une force sur un objet rigide comme un boulon, par rapport au point d'appui P , vaut $r F \sin \theta$ (avec P au centre du boulon, r la distance entre le point d'application de la force et l'axe de rotation, θ l'angle entre la direction de la force et celle de l'axe de rotation). Lorsque $\theta = 0$ ou 180° , $\sin \theta = 0$: le moment est nul. Il est maximum quand $\theta = 90^\circ$, car $\sin \theta = 1$ (dans ce cas, la distance r est perpendiculaire à la ligne d'action de la force. Cette distance perpendiculaire est *le bras de levier*).¹

S'agit-il d'ouvrir une porte ? Il faut exercer un moment pour tourner la porte autour de son axe. On constate également que le moment est maximum lorsque la force est appliquée aussi loin que possible de la charnière et à angle droit par rapport à la porte de largeur r . Voir ci-dessous, sur la figure de droite, le schéma d'une porte vue du dessus articulée autour de son gond P .



La rotation de la porte autour de son axe rappelle l'oscillation du pendule. Au lieu d'ouvrir la porte, refermons-la. Nous retrouvons un moment semblable à celui d'un pendule de masse m , soumis à l'action de la pesanteur g . Le moment exercé par le poids du pendule P au point d'attache du fil au support O a pour grandeur une expression comparable mais inversée : $-mg r \sin \theta$.



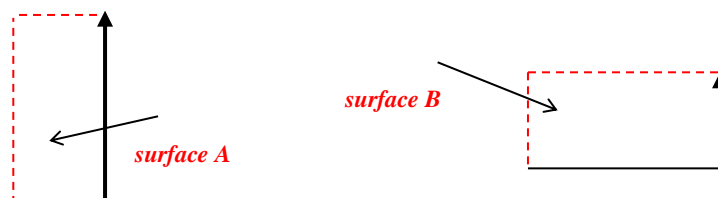
¹ Kane/Sternheim, *Physique*, op. cit., pp.69-72.

Tous ces mouvements de rotation, - celui d'un boulon, d'une porte, d'un pendule, - sont l'effet d'une multiplication entre une force et un bras de levier. Le couple (force, bras de levier) constitue le moment qui fait tourner la clé, la porte, le pendule. Dans le cas de la clé, on parle de couple de serrage. La force, seule, ne suffit pas. Il faut que la force s'exerce sur un bras de levier.

Le levier joue un rôle médiateur qui permet de lier deux grandeurs différentes : une distance et une force. Elles se compensent, via leur produit. Doubler l'un équivaut à diviser l'autre. Le 1^{er} couple (force A , distance A) équivaut au 2^e couple (force B , distance B) :



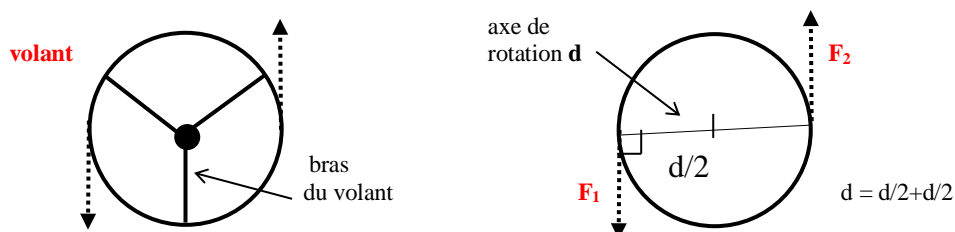
Chaque couple engendre une surface. *La surface A égale la surface B.* Chacune des surfaces associe une grandeur réelle (la distance) et une grandeur virtuelle (la force représentée par un vecteur). Ces grandeurs agissent par la surface qu'elles déterminent.



Bien qu'il confonde poids et masse, Hegel a compris qu'avec un levier *la masse [le poids] peut être mise à la place de la distance, et inversement.*¹ Quel que soit le couple (force, distance), le moment constitue une seule et même entité. Le levier représente un bel exemple de dépassement et de conservation des contraires dans une unité, la distance étant unie à son contraire (la force), et réciproquement. Pour Hegel, précise-t-on, *le levier a été le modèle canonique de la sursomption dialectique [Aufhebung] du mouvement dans l'unité de ses moments [moments dialectiques].*² Le moment mécanique relie (homogénéise) des éléments antithétiques par le biais de leur produit.

(Le *moment* chez Hegel est à prendre au sens de *temps* : celui de la thèse ou de la position, celui de l'antithèse ou de l'opposition, celui enfin de la synthèse ou de la composition ou ... décomposition.)³

La capacité d'obtenir une rotation - le moment - peut nécessiter une ou plusieurs forces. Par exemple, la rotation d'un volant est facilitée par l'emploi de deux forces parallèles d'égale intensité et de sens opposé. L'une et l'autre de ces forces suivent des lignes d'action particulières (elles ne sont pas colinéaires). Soit $d/2$ la distance du centre du volant jusqu'à la droite d'action de la force F_1 ou F_2 . La distance $d/2$, perpendiculaire à une telle droite, joue le rôle d'un bras de levier. Chacune de ces deux forces exerce un moment : la force F_1 le moment $F_1 \cdot d/2$, la force F_2 le moment $F_2 \cdot d/2$. Comme $F_1 = F_2 = F$, le moment est égal à la somme des moments de chacune des forces, soit : $F_1 \cdot d/2 + F_2 \cdot d/2 = F \cdot d$.



L'intensité du moment du couple de forces (F_1, F_2) est égale au produit $F \cdot d$ de l'intensité F , commune aux deux forces, par la distance d perpendiculaire à leur ligne d'action

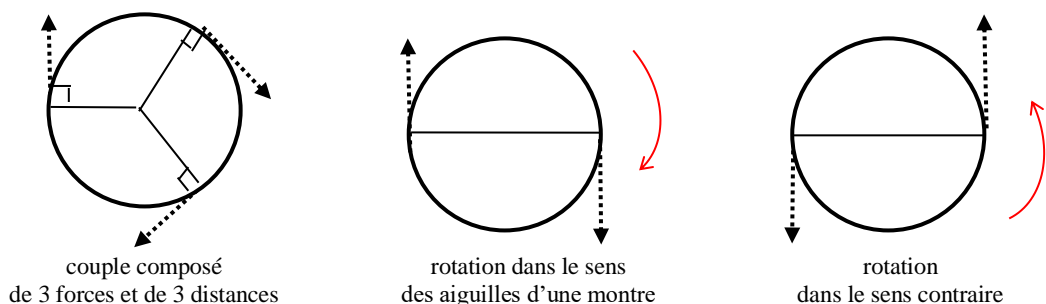
¹ Hegel, *Précis de l'Encycl. des sc. philo.*, § 205 Rem. (v. trad. B. Bourgeois, Paris, Vrin, 2004, p.122).

² Yvon Gauthier, « Moment cinétique et syllogistique dynamique chez Hegel », *Philosophiques*, vol.32, n°2, 2005, p.359.

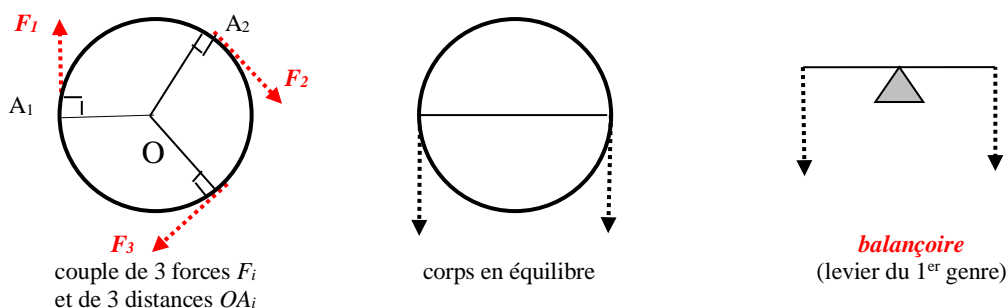
³ <https://fr.wikipedia.org/wiki/Dialectique>. Chez Hegel, le « *moment dialectique* » est la force qui nous renvoie de l'idée à son contraire, et par suite seulement, l'étape du progrès qu'elle entraîne, tant dans la pensée que dans la réalité. (André Lalande, *Vocabulaire technique et critique de la philosophie*, Puf, Paris, 1976, p.645).

L'intérêt du couple de forces est manifeste dans l'exemple du desserrage d'une roue de voiture qui peut être comparée à un gros boulon. Au lieu d'utiliser une manivelle (cas d'une force unique et d'un moment de force par rapport à l'axe de la vis), on a recours à une croix (couple de forces) qui assure une plus grande intensité de desserrage. Autre avantage : la manivelle ripe facilement alors que la croix est plus stable sans que le mouvement d'ensemble n'en soit contrarié.

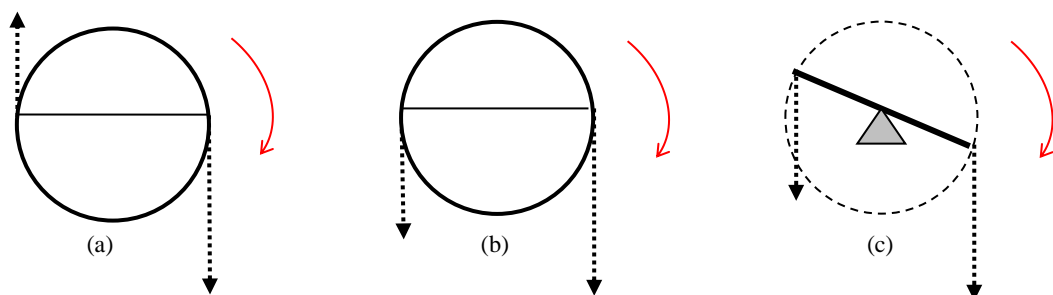
La notion de couple ne doit pas faire illusion. Un couple peut être formé de trois forces ou plus. Quand on tourne le volant ou on dévisse une roue, l'emploi de deux ou trois forces conduit au même résultat. On est présence d'un couple ... composé de trois forces et de trois distances. La notion de couple de forces n'est pas fondamentale. Le couple véritable demeure le couple (distance, force). C'est lui qui donne au mouvement son homogénéité et en assure, par ce biais, l'unicité. En fonction de la direction des forces, le corps est en rotation dans le sens des aiguilles d'une montre ou dans le sens contraire :



Le corps est en rotation *constante* lorsque la somme algébrique des moments est nulle : $\sum OA_i \cdot F_i = 0$ (le produit des forces F_i par leurs distances respectives à l'axe de rotation OA_i est égal à zéro). Si les forces d'intensité égale sont orientées dans le même sens, le corps est en équilibre. Cette situation est équivalente à celle d'une balançoire à bascule dont le levier est en position horizontale (cas du levier du 1^{er} genre) :



Si l'une des forces prévaut, le corps tourne dans le sens de la force la plus grande. Le corps tourne de plus en plus vite. La rotation s'accélère (Figure a). On retrouve ce schéma lorsque les forces sont orientées dans le même sens (Figure b). Le mouvement est similaire au mouvement de rotation d'une balançoire à bascule (Figure c)



Si la somme des moments n'est pas nulle ($\sum OA_i \cdot F_i \neq 0$), le mouvement de rotation n'est pas uniforme. Ainsi, pour résumer (et en simplifiant l'écriture $\sum OA_i \cdot F_i$ en $\sum M$), on peut écrire : $\sum M = 0 \Leftrightarrow$ vitesse

constante ; $\sum M \neq 0 \Leftrightarrow$ vitesse variable. Dans les deux cas, le corps tourne autour d'un axe de rotation fixe : aucun mouvement de translation ne s'ajoute au mouvement de rotation. La résultante du couple de forces F_i est nulle : $\sum F_i = 0$. (Dans cette équation, le 0 représente un scalaire, i.e. un nombre, alors que dans l'équation : $\sum OA_i \cdot F_i = 0$, les lettres sont des grandeurs vectorielles surmontées d'une flèche.)

Si le solide est entièrement mobile, la somme des forces n'est pas nulle : $\sum_i F_i \neq 0$. Le couple de forces n'est plus un *couple pur*. On est en présence d'une rotation avec translation à vitesse constante ou variable (accélération ou décélération). De nombreuses situations mettent un jeu ce double mouvement (par ex, une roue de bicyclette se portant en avant avec divers changements de vitesse).¹

A l'époque des Lumières, on n'observe guère un objet roulant de ce type, combinant moment de rotation et mouvement de translation. Hier comme aujourd'hui, la roue d'une brouette ne roule que si on la pousse. Il y a mouvement de rotation sans moment de force. La poussée humaine s'exerce sur l'essieu de la roue. La distance à l'axe de rotation est nulle. *Force x distance nulle = moment nul*. Même constat pour la roue d'un chariot, la poussée n'étant que remplacée par la traction (humaine ou animale). En revanche, un moulin à eau ou à vent tire parti de l'existence d'un moment (la force s'exerce perpendiculairement au rayon). Malheureusement, il n'existe pas de moulins qui se déplacent, sauf dans l'imagination de don Quichotte qui croyait combattre des moulins à vent ...).

Il faut attendre la maturité des Lumières pour voir les premières machines à vapeur. De Denis Papin à Nicolas-Joseph Cugnot, on ne cesse de les mettre au point et d'inventer des moyens de locomotion basés sur leur principe. Huguenot, Papin part s'installer en Angleterre, devançant la Révocation de l'Edit de Nantes. Avec Cugnot, le chariot à vapeur laisse passer de légères volutes. Les pistons bougent, la roue n'est plus passive mais motrice. Le moment bat son plein et la machine avance enfin.

Les Lumières ont appris à tirer de plus en plus avantage du moment d'une force unifiant distance et force. Grâce au *moment*, on peut décupler une force en la faisant pivoter autour d'un axe. Une force qui agit au bout d'un bras de levier en fournit un exemple. Son avantage mécanique peut être mesuré par le nombre de fois que l'effort initial est multiplié. Les leviers du 1^{er} genre (pied-de-biche, rame, ...) et du 2^e genre (brouette, ouvre-bouteille, ...) sont des multiplicateurs de force tandis que les leviers du 3^e genre (étau, balai, ...) sont des multiplicateurs de vitesse (l'objet acquiert plus de vitesse. On pensera aussi à la catapulte ou à nouveau au vélo qui fait gagner en distance ce qu'on perd en force).

¹ L'ancêtre de la bicyclette est le vélocipède, appelé *draisienne* du nom de son inventeur, Karl Drais. L'engin fut breveté en 1817 et présenté à Paris au jardin du Luxembourg. La draisienne connut un succès éphémère, car elle restait trop difficile à manœuvrer. Ce moyen de locomotion était en bois, comportait deux roues, une selle et un guidon, mais n'avait pas de pédale. Pour avancer, il fallait marcher...

§ 32.- LA LOI POSITIVE OU LE LIEN INSTITUTIONNEL

1/ La volonté de regroupement

- i La volonté générale comme liaison
- ii Une 1^{re} approche de la volonté générale chez Rousseau
- iii La volonté générale comme « rectification »
- iv Calcul de série tombant sur l'os des brigues

2/ Le balancement législatif

- a) Le balancement entre la source et l'objet des lois
- b) La « compossibilité » d'un régime politique
- c) Le balancement parlementaire anglais

3/ La liaison par compensation

- a) Le « moment de forces » constitutionnel
 - i L'autorité et le pouvoir réel
 - ii L'échange entre la puissance et la durée
 - iii La pesée du veto, 115

b) La portée des textes et la puissance de mobilisation

- c) Le moment de forces et le « travail » législatif
 - i La notion de travail en physique, 131
 - ii La notion de « travail » en droit
 - iii Moment d'inertie et théorie du levier

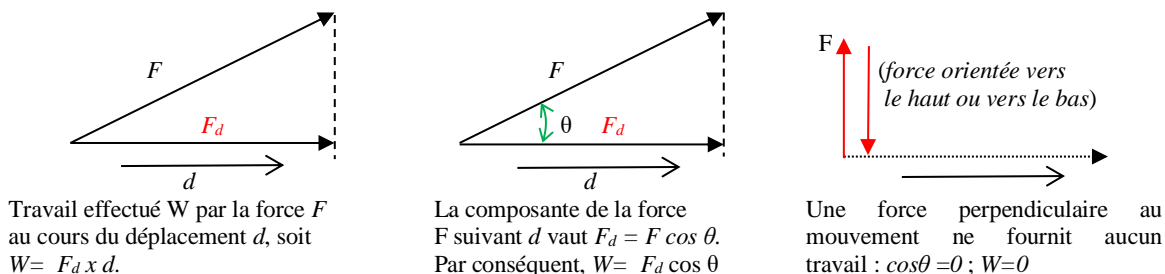
o

c) Le moment de forces et le « travail » législatif

i La notion de travail en physique

Votre question me donne l'opportunité d'articuler le moment de force et la notion de travail en droit, car *œuvrer* ne signifie pas autre chose que travailler. Chaque pouvoir fournit un *travail*. Le mot est défini par la science de l'époque comme la combinaison d'une force avec un déplacement. Si une force F agit sur un objet, le travail effectué par cette force, W (W comme *Work*), est égal au produit de la composante de cette force dans la direction du mouvement F_d par le déplacement d , soit $W = F_d \times d$.

Alors que le moment de force est maximum quand l'angle entre la direction de la force et celle de l'axe de rotation est de 90° , une force appliquée perpendiculairement au mouvement (donc, avec un angle $\theta = 90^\circ$) ne produit aucun travail. Quand le travail effectué est exactement dans la direction du déplacement (les vecteurs F et F_d infra sont colinéaires), le travail atteint, lui, sa pleine efficacité :

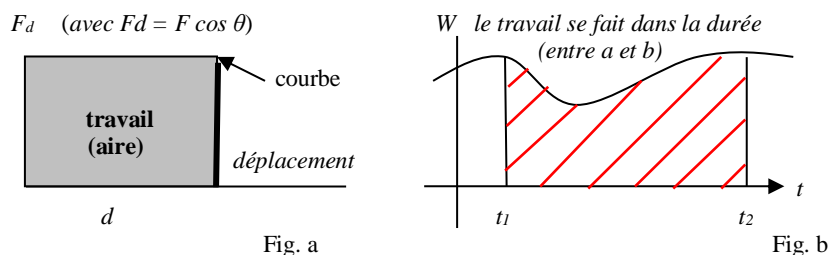


Que signifie l'angle θ en physique ? Il suggère une résistance, un frottement plus ou moins important. Il suggère, en droit, un autre type de frottement qui freine ou retarde le travail envisagé par un pouvoir.

Sans doute, l'indication d'un cosinus n'est guère utile en droit, tant que l'on demeure incapable d'introduire des mesures précises, mais la notion d'angle conserve une pertinence pour un juriste.

Dans l'équation qui définit le travail, $W = F_d \times d$, la composante F_d n'est pas toujours constante. La force peut varier en grandeur ou en direction par rapport au déplacement. L'analyse moderne est devenue experte en variation du mouvement. Ici encore, on considère les travaux effectués au cours d'une série de petits déplacements élémentaires. Pour chacun d'eux, on calcule le travail élémentaire ΔW . La somme de tous les ΔW restitue le travail global.¹ Comme le moment d'une force, le travail d'une force est susceptible d'un calcul intégral. Il peut être représenté par une surface.

Dans un graphique représentant la composante F_d en fonction du déplacement d , l'aire située sous la courbe correspond au travail effectué. Mais ne nous trompons pas : alors que le moment d'une force est calculable au moyen d'une intégrale opérant dans l'espace (fig. a), le travail d'une force déplaçant un objet l'est par une intégrale dont la sommation opère au cours du temps (fig. b).

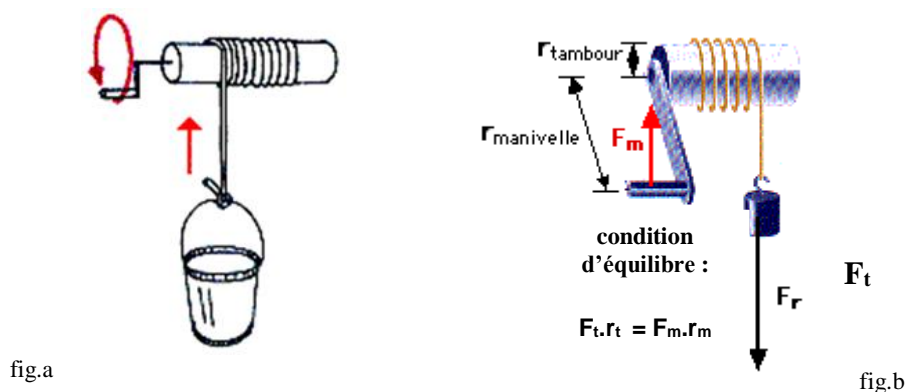


La surface représentant le travail est un nombre (le produit scalaire de la projection de la force sur le déplacement) alors que la surface représentant le moment d'une force est une surface orientée, un vecteur normal à la surface étant pointé vers le haut ou le bas (quand on ouvre une bouteille avec un tire-bouchon, on exerce un moment de force sur le bouchon.² Il en résulte une rotation qui permet de tirer le bouchon). Avec le moment d'une force, on quitte la mathématique héritée des Grecs dans laquelle le produit (entre deux longueurs) était assimilable à une simple aire (un carré, un rectangle).

Le moment d'une force et le travail d'une force diffèrent quand on les représente sur le papier, mais ces deux notions se rejoignent à l'analyse. Dans le travail d'une force, on retrouve une égalité entre produits. Une petite force appliquée sur un grand déplacement fournit un travail égal à celui d'une grande force sur un petit déplacement. Le produit de la force et du déplacement est homogène au produit procédant d'une combinaison différente de la force et du déplacement.

La mise en rapport de deux produits joue un rôle fondamental dans de nombreux problèmes en mécanique. Grâce au levier, on peut jouer sur la distance pour compenser une force de moindre intensité. Grâce au travail, on peut jouer sur le déplacement pour éviter de s'épuiser à la tâche. Le travail est mieux réparti dans la durée.

Soit un treuil. Il s'agit d'une machine qui repose sur un équilibre semblable à celui du levier dont il est dérivé. Le fonctionnement de la machine est simple : pour tirer un fardeau, - le seau de la figure (a), - on fait tourner un cylindre (tambour) sur lequel s'enroule une corde.



¹ Kane/Sternheim, *Physique*, op. cit., pp.129-131.

² Christophe Palermo, *Précis d'électrotechnique*, Paris, Dunod, 2015, chap.1, p.2 ; Salah Belazreg, Rémy Peerdristo, *Biophysique*, EditSciences, 3^e édit., 2014, p.395.

Supposons que le poids du seau soit de 10 kg et le rayon du tambour de 1 m . Nous peinons à remonter le seau de 10 kg en une fois. Il serait tellement plus facile de remonter un seau de 1 kg en dix fois ! Il suffit de tirer le seau à l'aide d'une corde de 10 m qui s'enroulera autour du tambour. Le treuil remonte le seau de 10 kg comme s'il ne pesait qu' 1 kg ... (On néglige le poids de la corde et de la manivelle et les frottements.)

La figure (b) rappelle la condition d'équilibre qui préside à la conception de la machine: l'égalité des moments, celui de la puissance et celui de la résistance, soit le poids du seau F_t x le rayon du tambour r_t = la force appliquée à la manivelle F_m x le rayon de cette dernière r_m , soit : $F_t \times r_t = F_m \times r_m$. Le rapport des forces F_m / F_t est l'inverse de celui des rayons r_t / r_m . Dans notre exemple, nous avons l'égalité : $10\text{ kg} \times 1\text{ m} = 1\text{ kg} \times 10\text{ m}$. Le rapport des rayons est de 1 à 10 . Ce rapport donne une idée de l'efficacité de la machine. En l'espèce, l'avantage mécanique est d'avoir pu diviser la force par 10 pour remonter le seau. Nous avons allégé le fardeau, mais nous avons multiplié notre temps par 10 .

ii La notion de « travail » en droit

iii Moment d'inertie et théorie du levier

§ 33.- La volonté générale comme objet-limite

1/ La notion de limite en science, ¹³⁴

2/ La limite en philosophie, ¹³⁷

3/ Le bon infini en droit

i Le passage à la limite vers un événement inouï

ii L'opposition frontale d'un lecteur

iii Un amendement de notre aperçu sur la volonté générale chez Rousseau

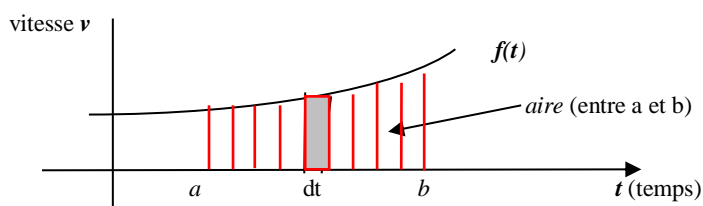
iv Rousseau et Condorcet : même combat asymptotique

○

1/ La notion de limite en science

Pour apprécier la notion de limite et ses différents types en science, revenons aux notions de base d'intégrale et de dérivée avant même que celles-ci soient éclaircies. Galilée n'emploie les mots du langage infinitésimal mais il en a saisi en profondeur le contenu à travers l'étude du mouvement.

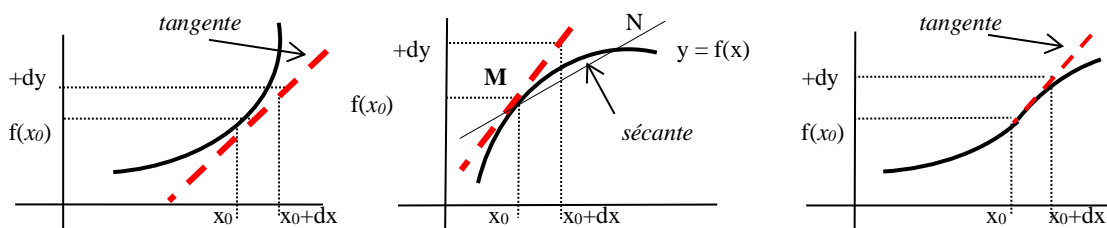
Soit la vitesse du mobile dont l'évolution peut être retracée par la courbe $f(t)$. L'aire sous la courbe, entre les instants a et b , représente la distance que parcourt l'objet en mouvement. Ce mouvement peut être uniforme, uniformément accéléré ou variable. L'aire est le produit de la vitesse et du temps.¹



L'aire sous la courbe change à chaque instant. Entre les points a et b , sa mesure peut faire l'objet d'un calcul d'intégration : $\int_a^b f(t)dt$ (ou $\int_a^b f(x)dx$) en remplaçant t par x comme le formulera Leibniz). L'aire est l'intégrale, la vitesse la dérivée. La vitesse, à son tour, peut faire l'objet d'une intégration : $\int dv/dt \cdot dt$. La vitesse v joue à son tour le rôle d'intégrale, l'accélération $\gamma = dv/dt$ celui de dérivée.

L'intégrale entre a et b apparaît comme *la limite de la somme* d'un grand nombre de quantités infinitésimales dt (ou dv , ou de façon générale dx). La dérivée n'est pas moins regardée comme limite.

Représentative d'un accroissement instantané, elle est en un point donné, *la limite du rapport* entre l'accroissement de la fonction f (résultant de l'accroissement de la variable x) et l'accroissement de la variable x lorsque ce dernier tend vers zéro. La dérivée de la fonction f au point x_0 a pour expression $f'(x_0) = \lim dy/dx$, avec $dx \rightarrow 0$. La limite est représentée par la tangente à la courbe (en pointillé) en x_0 .



La tangente en M est la position limite de la sécante lorsque N tend vers M. Elle est la limite des sécantes.

¹ David Berlinski, *Infinite ascent*, Weidenfeld & Nicolson, London, 2006, p.55 ; M. Clavelin, *La phil. naturelle de Galilée*, op. cit., p.304.

L'usage du mot *limite* n'est pas réservé qu'aux fonctions. La somme des termes d'une suite de quantités de plus en plus petites peut tendre vers une limite. Pareille somme – ou *série* – permet de représenter toutes sortes de nombres sous la forme par exemple de fractions, simples ou continues :

nombre rationnel	nombre irrationnel	nombre transcendant
$7/5 = 1,5$ $7/5 = 1+1(5/2)$ $7/5 = 1+1/(2+1/2)$ $\frac{7}{5} = 1 + \frac{1}{2+\frac{1}{2}}$	$\sqrt{2} = 1,41\dots$ $\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\dots}}}}$ $\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2+} \frac{1}{2+} \frac{1}{2+} \dots$	<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: fit-content; margin: 0 auto;"> $\pi = 3,14\dots = 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15}}$ </div> ou $\pi = 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15 + \frac{1}{1+\frac{1}{292\dots}}}}$

Une fraction continue restitue le développement d'un nombre par une série de rapports en étage qui n'en finissent pas. La somme de n premiers termes s'approche d'une limite lorsque n devient très grand. La *limite* est située à l'infini. Le nombre $\sqrt{2}$ ou π peut être défini de cette façon. La base du logarithme népérien (*naturel*), e , aussi :

$$e - 1 = 1 + \frac{1}{1+} \frac{1}{2+} \frac{1}{1+} \frac{1}{1+} \frac{1}{4+} \frac{1}{1+} \frac{1}{1+} \frac{1}{6+} \dots$$

Le développement de e en fraction continue a été effectué par Euler. L'approche n'est pas exclusive. Euler a montré que e est la somme de la série : $1 + 1/1 + 1/1.2 + 1/1.2.3 + \dots + 1/1.2.3\dots n$, soit $e = 1/1 + 1/1 + 1/2 + 1/6 + 1/24 + 1/120 + \dots$. Le nombre e est la somme infinie des inverses des factorielles, c'est-à-dire des nombres de la forme $1/n!$ où $n!$ est le produit de tous les entiers de 1 à n , avec la convention $0! = 1$.¹

Le passage de l'arithmétique de l'infini à l'algèbre de l'infini étend ces modes d'approche des nombres aux variables. Le raisonnement est similaire. Veut-on, par exemple, connaître e à la puissance x , soit e^x ? Les puissances de e seront définies comme suit : $e^x = 1 + x/1 + x^2/1.2 + x^3/1.2.3 + x^4/1.2.3.4 + \dots$

(§25-
3/iv)

Dans le développement en série de l'exponentielle, e^x , la variable x peut être réelle ou complexe. Le nombre (complexe) e^i est obtenu en prenant i pour x . Ce nombre entre dans la formule : $e^{i\pi} + 1 = 0$. Le tableau infra regroupe les calculs du nombre π suivant le nombre de côtés d'un polygone. En établissant à chaque fois la moyenne arithmétique entre le périmètre des polygones inscrits et celui des polygones circonscrits, les résultats se rapprochent indéfiniment les uns des autres :

cercle d'un mètre de diamètre (<i>approximations successives</i>)			
Nombre de côtés	Périmètre des polygones inscrits	Périmètre des polygones circonscrits	Moyenne arithmétique
3	2,5980762	5,1961524	3,8971143
6	3,0000000	3,4641016	3,2320508
12	3,1058265	3,2151900	3,1606082
...
1536	3,1415918	3,1415946	3,1415932
...

A la fin du XVI^e siècle, Viète prolongea le tableau jusqu'à la dix-huitième ligne. Au XVIII^e siècle, on se sert de calculs moins pénibles fondés sur la totalisation de séries. Grâce à la série (somme d'une suite de termes), on peut calculer, non seulement diverses fonctions ($\cos x$, $\log x$, etc.), mais aussi des intégrales dont on ne connaît pas les primitives.

L'infini (∞) impose sa présence constante dans l'analyse mathématique, mais au cours des Lumières, la notion de *limite* accapare de plus en plus l'attention au point d'éclipser la quantité infinitésimale.

¹ M. Kline, *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, op. cit., vol.1, chap.13, 2, p.255 ; vol.2, chap.20, 6, p.459; A. Delachet, *L'analyse math.*, op. cit., p.38 ; Benoît Rittaud, *Les mystères du nombre e*, La Recherche, 2007, n°414, p.26.

La quantité dx (ou dy) apparaît obscure, voire contradictoire pour l'évêque philosophe Berkeley. Dans une équation comme $y = x^2 + x + 1$, comment comprendre qu'une quantité infinitésimale élevée au carré puisse disparaître quand on remplace dans l'équation x^2 par $(x+dx)^2$ et qu'il subsiste, après décomposition, une quantité telle que $(dx)^2$? Les infinitésimaux sont des *fantômes*.¹ Rien de plus.

If I cannot perceive innumerable parts in any finite extension that I consider, it is certain they are not contained in it. [What about] infinitesimals of infinitesimals, without ever coming to an end, an infinity of an infinity, ad infinitum of parts [?]

Newton, Leibniz et ceux qui les suivent ne s'embarrassent guère de ce genre de critique. Le calcul fait merveille. Il leur suffit de considérer les quantités infinitésimales dans *le monde virtuel de l'infini potentiel*.² Ce point de vue est formulé par d'Alembert :

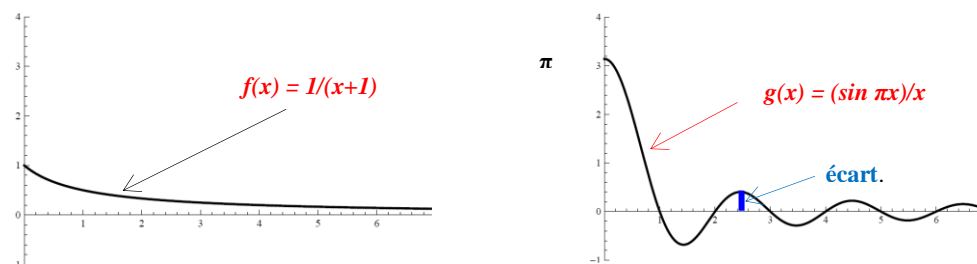
La géométrie, sans nier l'existence de l'infini actuel, ne suppose point, au moins nécessairement, l'infini comme réellement existant. Cette considération suffit pour résoudre un grand nombre d'objections qui ont été proposées sur l'infini mathématique.

On demande, par exemple, s'il n'y a pas des infinis plus grands les uns que les autres, si le carré d'un nombre infini n'est pas infiniment plus grand que ce nombre? La réponse est facile au géomètre: l'idée de nombre infini n'est pour lui qu'une idée abstraite, qui exprime seulement une limite intellectuelle, à laquelle tout nombre n'atteint jamais.

Une quantité est la limite d'une autre lorsque la seconde pourra approcher la première le plus près possible. A la limite, la différence entre les deux quantités est *inassignable* (sic). *La limite ne coïncide jamais ou ne devient jamais égale à la quantité dont elle est la limite, mais celle-ci s'en approche toujours de plus en plus et peut en différer aussi peu qu'on voudra.* Et d'Alembert de rappeler que le cercle est la limite des polygones inscrits et circonscrits, *car il ne se confond jamais rigoureusement avec eux quoique ceux-ci puissent s'en approcher à l'infini*.³

La définition de la limite par d'Alembert laisse à désirer car la limite n'a rien d'un seuil à ne pas franchir. La fonction $f(x) = 1/(x+1)$ n'atteint jamais 0 quand $x \rightarrow +\infty$. La fonction $g(x) = (\sin \pi x)/x$ tend aussi vers 0 quand $x \rightarrow +\infty$, mais elle franchit la valeur 0 chaque fois que x passe par une valeur entière (1, 2, 3, 4, etc.); elle oscille autour de 0 en s'en écartant de moins en moins lorsque x grandit.

Le maximum des écarts entre la valeur de la fonction $g(x) = (\sin \pi x)/x$ et sa limite est majoré par $1/x$ car $\sin x < 1 \forall x \neq 0$. Lorsque x tend vers $+\infty$, l'écart $(\sin \pi x)/x - 1/x$ converge vers le majorant lui-même. Lorsque $x \rightarrow 0$, le majorant est π - *un petit quelque chose de positif qui tend vers 0*, sachant que le développement limité en 0 de $\sin x$ est : $x - x^3/3! + \dots$ et $\sin \pi x = \pi - \pi^3/3! + \dots$.



La fonction $g(x) = (\sin \pi x)/x$ comporte deux limites : π (en ordonnée) quand $x \rightarrow 0$, et 0 (en ordonnée) quand $x \rightarrow +\infty$, mais il n'est point nécessaire qu'une fonction oscille pour tendre vers une limite. La fonction $h(x) = 0$ est nulle quel que soit x . Le graphe de cette fonction est confondu avec l'axe des abscisses. La fonction est stabilisée en 0. Sa limite est 0. (Didier Nordon, *Deux et deux font-ils quatre? Sur la fragilité des mathématiques*, Pour la science, Paris, 1999, pp.93-94).

Les expressions *tendre vers 0* et *avoir 0 pour limite* sont synonymes. Semblable réécriture autorisée d'Alembert à déclarer que *la théorie des limites est la base de la vraie métaphysique du calcul*

¹ George Berkeley, *The Principles of knowledge* [1710], in *Philosophical Writings*, Collier, London, 1974, §124, pp.114-115; *The Analyst: A Discourse addressed to an Infidel Mathematical* [1734] Nelson, London, 1949, §35. Le mathématicien incroyant était probablement Edmund Halley, un partisan convaincu de Newton. (Charles Seife, *Zéro. La biographie d'une idée dangereuse*, JC Lattès, Paris, 2002, p.155).

² Brian Clegg, *Infinity. The Quest to Think the Unthinkable*, Robinson, London, 2003, p.124.

³ D'Alembert, *Eléments de philosophie* [1759], Eclaircissements, §XIV, Fayard, Paris, 1986, p.341; Encycl., art. « Limite », t.9, p.542.

différentiel.¹ Or, vient-il d'être suggéré, cette théorie ne convient que pour les courbes monotones (croissantes ou décroissantes). Elle ne convient pas pour une courbe qui fluctue autour d'une limite.

Au début du XIX^e siècle, Cauchy reprendra l'idée de d'Alembert, mais rompra avec la conception géométrique qui en réduit la portée. La limite devient un concept arithmétique. Sa définition ne renvoie plus qu'à une suite de nombres et de différences : *Lorsque les valeurs, successivement attribuées à une variable, s'approchent indéfiniment d'une valeur fixe, de manière à en différer aussi peu que l'on voudra, cette dernière est appelée la limite de toutes les autres.*²

La limite est une valeur fixe, une quantité finie, alors que la notion d'infiniment petit est une quantité variable dont la limite est 0. Grâce à cet éclaircissement, les ordres successifs d'infinitésimaux (dx , dx^2 , dx^3 , ..., dx^n) apparaissent moins contestables.

2/ La limite en philosophie

3/ Le bon infini en droit

- i Le passage à la limite vers un événement inouï.*
- ii L'opposition frontale d'un lecteur*
- iii Un amendement de notre aperçu sur la volonté générale chez Rousseau*
- iv Rousseau et Condorcet : même combat asymptotique*

¹ Encycl., art. « Limite », t.9, p.542.

² A.-L. Cauchy, in A. Dahan-Dalmedico/J. Peiffer, *Une hist. des math.*, op. cit., p.202 ; J.-P. Collette, *Hist. des math.*, op. cit., t.2, p.186.

§ 34.- LES AVENTURES DE LA CONVERGENCE

1/ Majoration et inégalités en sciences, 138

- i La réciproque est-elle vraie ? 138
- ii La convergence en droit, 141
- iii L'idée d'un développement limité, 142
- iv Des critères de convergence, 144

2/ En philosophie, 147

- i La bonne approximation, 147
- ii Des mains de travailleur, 147
- iii Une philosophie qui n'est plus dans la lune, 151

3/ En droit, 151

- i L'infini majoré, 151
- ii Le contrat social comme issue d'un jeu, 151
- iii La conversion du contrat social en institution de trust, 151
- iv Les critères d'encadrement, 151
- v Conclusion, 151

o

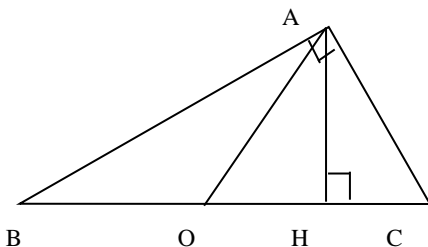
1/ Majoration et inégalités en sciences

i La réciproque est-elle vraie ?

Descartes suppose que la solution existe. L'inconnue reçoit pour nom x , mais ce nom ne recouvre peut-être rien. Il n'est pas exclu que x demeure inconnu ou qu'il n'égalise telle valeur que dans un cas particulier. La rigueur oblige à examiner la réciproque pour que l'hypothèse soit fondée. **Le passage par la réciproque** permet de prouver que la solution existe ou de débusquer d'autres cas particuliers.

Ex. : le plus grand nombre entier, X . Examinons cette supposition. Le nombre 1 est un entier, donc X vérifie : $X \geq 1$. Le carré de X est également un nombre entier, $X^2 \leq X$, ce qui équivaut à $X(X-1) \leq 0$. Comme à $X(X-1) \geq 0$ (puisque $X \geq 1$), on en déduit que $X(X-1) = 0$, soit $X=1$. Par conséquent, le plus grand nombre entier est 1. Ce résultat est faux. Où est l'erreur ? Pas dans le raisonnement ! Elle se situe dans l'hypothèse d'existence d'un plus grand nombre entier. La conclusion correcte est : il n'existe pas de plus grand nombre entier.¹

Ex. de cas particuliers insoupçonnés. Soit le triangle ABC rectangle en A. L'ensemble des points A appartient au cercle de diamètre BC. Démonstration. Notons O le milieu de BC et R la moitié de la longueur BC. L'idée est de considérer d'autres triangles rectangles au sein du triangle rectangle ABC pour pouvoir utiliser le théorème de Pythagore. Traçons la hauteur menée de A sur BC. Nous sommes en présence de quatre triangles rectangles ABH, ACH, ABC, et AOH.



En appliquant **le théorème de Pythagore**, on obtient :

$$AB^2 = AH^2 + (R+OH)^2 \text{ puisque } BH = R+OH$$

$$AC^2 = AH^2 + (R-OH)^2 \text{ puisque } CH = R-OH$$

d'où, en additionnant :

$$AH^2 + (R+OH)^2 + AH^2 + (R-OH)^2 = 4R^2 \text{ puisque } BC = 2R, \\ \text{soit } AO^2 = R^2 \text{ ou } AO = R.$$

A appartient au cercle de centre O et de rayon R

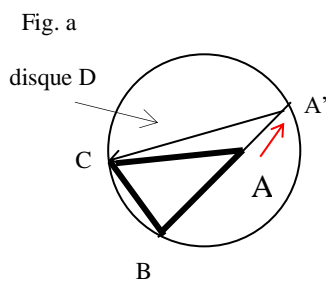
L'inverse est-il toujours possible ? Si B et C sont deux points fixes et A un point du cercle de diamètre BC, peut-on affirmer que le triangle ABC est rectangle ? La réciproque met à jour une condition pour que l'affirmation demeure vraie : il faut exclure les points B et C du cercle. Vérifions. Soit le triangle ABC. On ne suppose pas qu'il soit rectangle en A. En revanche, on suppose que $OA =$

¹ Hervé Lehning, *A la recherche de la preuve en mathématiques*, Belin, Paris, 2009, p.27.

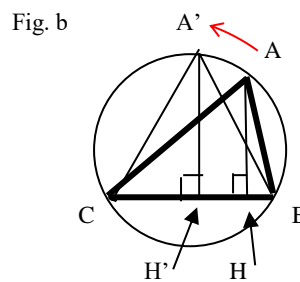
R. A partir des trois triangles rectangles ABH, ACH, et AOH, on obtient les relations suivantes : $AB^2 = AH^2 + (R+OH)^2$; $AC^2 = AH^2 + (R-OH)^2$ et $AH^2 + OH^2 = R^2$. En faisant la somme des deux premières égalités, et en tenant compte de la troisième, une nouvelle relation émerge : $AB^2 + AC^2 = 4R^2$, soit $AB^2 + AC^2 = BC^2$. La réciproque du théorème de Pythagore implique que le triangle ABC est rectangle en A. L'ensemble des points A est le cercle de diamètre BC, privé des points B et C.¹

Autre exemple, faisant intervenir des suites (de déformations, chacune étant la modification de la précédente). Résoudre le problème suivant: *Déterminer les triangles d'aires maximales inclus dans un disque.*² Supposons que la solution existe. Considérons un triangle ABC d'aire maximale inclus dans un disque D (fig. a). Les trois sommets du triangle ABC sont sur le cercle. Si A n'appartenait pas au cercle, on pourrait agrandir ABC en remplaçant A par A' à l'intersection de AB et de la circonférence.

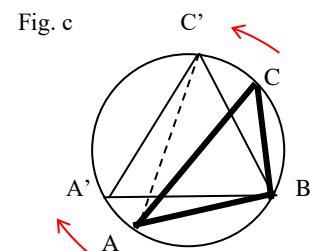
Les trois sommets ABC sont donc sur le cercle.



agrandissement de ABC en A'BC



agrandissement si $AB < AC$



A'BC' : triangle d'aire supérieure

Supposons que les côtés du triangle ABC ne sont pas égaux. Par ex. $AB < AC$. Par définition, aire ABC = $\frac{1}{2}$ base BC x hauteur AH. Nous pouvons agrandir le triangle en augmentant la hauteur en remplaçant A par A' à l'intersection de la médiatrice de BC et du cercle. (fig. b) Or, cette agrandissement est contraire à l'hypothèse $AB < AC$. Donc, $AB = AC$. Les côtés du triangle d'aire maximale sont tous égaux. D'où *le théorème* : le triangle cherché est équilatéral. On observera que tous les triangles équilatéraux se déduisent les uns des autres par rotation. Tous ont la même aire.

Que dit la réciproque ? Est-il vrai que tout triangle inscrit dans un cercle est d'aire inférieure à celle d'un triangle équilatéral inscrit dans le même cercle ? Partons d'un triangle quelconque et construisons une suite de triangles d'aires croissantes aboutissant au triangle équilatéral A'BC'. (fig. c) Il faut opérer en deux fois : 1/ en déplaçant C en C' en laissant A et B fixes. 2/ en déplaçant A en A' en maintenant B fixe. La preuve apportée par le théorème apparaît ainsi suffisante bien que la preuve de l'existence d'un triangle d'aire maximale soit encore plus rigoureuse en l'absence de toute figure.³

La suite des triangles converge vers le triangle équilatéral d'aire maximale. Elle tend vers une limite grâce à quelque chose qui varie (en l'espèce, l'aire des triangles). Nous sommes en présence d'une suite finie qui converge. On l'a subodoré (les figures nous ont aidé à orienter la preuve, et on l'a vérifié par le passage par la réciproque, mais est-ce toujours le cas avec des suites de nombres par ex. ?

Considérons certaines suites infinies, comme la suite infinie des inverses carrés, la série, $\sum 1/n^2$. Tous les termes de cette série sont positifs. Chaque total partiel comprend le terme auquel on s'arrête et tous les précédents. Le tableau suivant précise les valeurs des cinq premiers termes, jusqu'aux douze premières décimales ... :

La série des inverses carrés, $\sum 1/n^2$	
Les cinq premiers termes de la série	Totaux
$1/(1 \times 1) = 1$	1
$1/(2 \times 2) = 0,25$	1,25
$1/(3 \times 3) = 0,1111111111$	1,361111111111...

¹ Ibid., pp.39-40.

² Un disque est une figure géométrique dans un plan (ou plutôt une surface plane) formée des points situés à une distance inférieure à une valeur donnée R d'un point O nommé centre. R est le rayon du disque. La frontière du disque est un cercle de centre O et de rayon R. [https://fr.wikipedia.org/wiki/Disque_\(géométrie\)](https://fr.wikipedia.org/wiki/Disque_(géométrie))

³ Ibid., pp.117-118. L'auteur fait remarquer que la réciproque aurait pu être démontrée par un théorème postérieur aux mathématiques des Lumières : toute fonction continue sur un fermé borné admet un maximum. La fonction continue est celle qui associe à un triangle son aire. Le fermé borné est l'ensemble des triangles inclus dans le disque. Le maximum est le triangle équilatéral A'BC' d'aire supérieure.

$1/(4 \times 4) = 0,0625$	1,423611111111...
$1/(5 \times 5) = 0,04$	1,463611111111...
...	...
$1/(n \times n) =$	1, 644934066848...

(§25
3/-i)
(§27-2/)

En continuant indéfiniment, une convergence semble se profiler. En est-on sûr ? Oui, répondra Euler qui en donnera la démonstration. La limite de la série implique le nombre π . La série $\sum 1/n^2$ converge vers $\pi^2/6$. Le calcul de π par le biais de $\pi/4$ avait déjà été traité par Gregory puis Leibniz sous la forme de la série : $\pi/4 = 1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + \dots$ ¹ La convergence de la série, $\sum 1/n^2$, est donc assurée, mais la preuve a-t-elle aussi convaincante pour la série des simples inverses, $\sum 1/n$ que nous avons déjà rencontrée ? Voyons également ses cinq premiers termes :

La série des inverses, $\sum 1/n$ (série harmonique)	
Les cinq premiers termes de la série	Totaux
$1/1 = 1$	1
$1/2 = 0,5$	1,5
$1/3 = 0,333333333333$	1,333333333333...
$1/4 = 0,25$	2,083333333333...
$1/5 = 0,2$	2,283333333333...
...	...
$1/n =$	∞

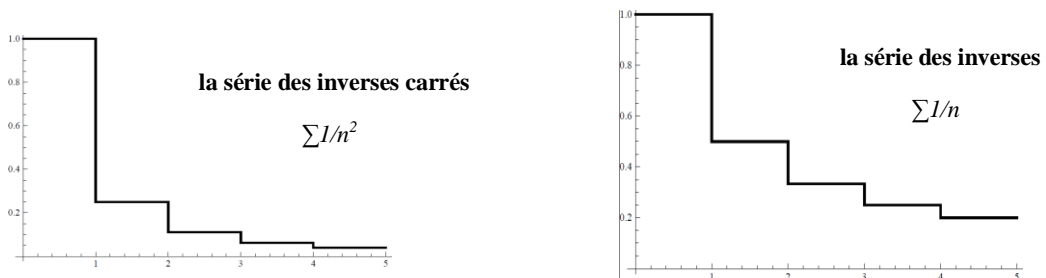
Après un milliard de termes, la somme est égale à 21,300481501848... En continuant indéfiniment, aucune limite n'apparaît à l'horizon... La suite des inverses des entiers semble dépasser toute valeur finie. La divergence de cette série était connue à l'époque des Lumières. La preuve est-elle admissible ? Au XIV^e siècle, Nicolas Oresme eut, dans cette voie, l'idée ingénieuse de regrouper les termes par blocs, chacun ayant une somme supérieure à 1/2 :

$$1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + 1/6 + 1/7 + 1/8 + \dots = 1 + (1/2) + (1/3 + 1/4) + (1/5 + 1/6 + 1/7 + 1/8) + \dots$$

$$> 1 + (1/2) + (1/4 + 1/4) + (1/8 + 1/8 + 1/8 + 1/8) \dots = 1 + (1/2) + (1/2) + (1/2) + \dots$$

(la somme infinie comporte des termes dont chacun est égal à 1/2. La série ne peut atteindre une valeur finie. Elle diverge. La série harmonique est infinie.)²

La différence de comportement entre $\sum 1/n^2$ et $\sum 1/n$ saute aux yeux via leur représentation graphique :



Les deux séries tendent vers l'horizontale, mais l'une, la $\sum 1/n^2$, va plus vite que l'autre, la $\sum 1/n$. Cependant, pour utile qu'elle soit, cette observation ne constitue un critère. On ne démontre pas ici par exemple que la série $\sum 1/n^2$ converge.

La série des inverses carrés tend vers une limite finie. Le dernier gradin finit par épouser l'horizontale. On peut mesurer l'aire sous les gradins. La série des inverses n'en finit pas, bien que les gradins descendent un à un. La surface de l'aire sous les gradins est infinie. On le vérifie arithmétiquement en prenant d'abord deux termes : $1/3 + 1/4$, puis quatre termes : $1/5 + 1/6 + 1/7 + 1/8$, puis huit termes, et ainsi de suite. Chacun de ces totaux partiels est plus grand que 1/2. La valeur d'ensemble est infinie.³

Les suites de termes (que les séries comme les deux précédentes additionnent un à un) sont l'outil de prédilection pour modéliser des phénomènes discrets. Le discret sépare, distingue, dénombre des

(§31-i)

¹ M. Boll, *Histoire des math.*, op. cit., p.54 ; Jean-Jacques Dupas, « Les suites, les séries et π », in *Suites & séries. Les nombres, avec ou sans limite*, Editions Pole, Paris, 2011, Tangente, HS n° 41, pp.86-87.
² M. Boll, *Histoire des math.*, op. cit., p.55 ; Philippe Boulanger, « La surprenante divergence lente de la série harmonique », in *Suites & séries. Les nombres, avec ou sans limite*, op. cit., p.92.
³ M. Boll, *Histoire des math.*, op. cit., p.57. La démonstration est de Jacques Bernoulli (1689). Elle rappelle celle de Nicolas Oresme supra.

objets (avec une liste de nombres indexée par les entiers naturels). Les Lumières connaissent, il a été rappelé, la suite de Fibonacci qui énumère au XIII^e siècle comment un couple de lapins engendre de nouveaux couples (chaque terme de la suite est la somme des deux termes précédents : 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, ...). Elles connaissent aussi, en économie, la suite qui décrit comment une épargne, assortie d'un taux d'intérêt donné, peut fructifier avec le temps (on reviendra sur ce point).¹

Ces suites sont infinies. Ce sont ce type de suite qui ont posé le problème d'une limite éventuelle. Leurs termes successifs (ou leur somme, les *séries*) peuvent s'éloigner à l'infini (dans la suite de Fibonacci, on suppose que les lapins ne meurent jamais) autant que se rapprocher d'un nombre fixe (la limite de la suite). Ces suites mesurent le discret mais elles ne préviennent pas si elles divergent !

L'*analyse*, qui table sur le continu, n'échappe pas au problème. Les fonctions mesurent le continu. La question de leur convergence se pose car beaucoup d'entre elles sont définies par des séries infinies.

ii La convergence en droit

- Cette question se pose-t-elle aussi en droit ?

- Oui, c'est une préoccupation qui gouverne un mode de raisonnement implicite qui structure tout un pan de la pensée de la science comme du droit.

Un objet ne devient tel que s'il existe un processus qui tend vers lui sans s'égarer dans les sables. **L'objet des lois des Lumières - liberté politique – n'est ni immédiatement donné ni totalement hors de portée.** Lorsque le législateur moderne établit une Constitution, est-il assuré que celle-ci produise un résultat conforme à son intention ? Ce questionnement n'est pas fondamentalement différent de celui qui porte sur l'objet des sciences, comme celui de la théorie des nombres et des fonctions. Où-va-t-on ? Aboutit-on à quelque chose de défini et non qui parte toujours vers l'infini ? Ce questionnement traverse les mathématiques, la philosophie et le droit qui accèdent aux Lumières.

- Ne peut-on pas se dispenser des mathématiques qui annoncent encore un gros paquet à lire ?

- Si vous voulez, mais pour apprécier plus en profondeur l'instrument intellectuel qui est caché sous tous ces enjeux, il est bon de s'y « coltiner ». Vous pouvez vous en dispenser, aux risques et périls d'en perdre l'image globale et la correspondance précise au droit. Si vous y répugnerez ou vous restiez traumatisé par les mathématiques qui vous ont été mal enseignées à l'école, commencez au moins par les aventures de la convergence en philosophie (2/) avant d'aborder cette thématique en droit (3/).

Rien n'était plus incertain que le projet des Lumières dans ces trois domaines étroitement corrélés. Cette inquiétude commune justifie ces lignes à l'écart du droit proprement dit avant de le rejoindre.

Je continue donc pour les courageux ou les curieux, fatigués de se contenter d'un panorama vague.

Au départ, les praticiens ne se demandent guère si les sommes infinies des développements de fonctions en série existent réellement pour toutes les valeurs de x . Soit la fonction $1/(1-x)$. Son développement est le suivant : $1/(1-x) = 1+x+x^2+ \dots x^n + \dots$ Lorsque $x = -1$, on obtient $\frac{1}{2} = 1-1+1-1+\dots$ Quand $x = -2$, on a $\frac{1}{3} = 1-2+2^2-2^3+\dots$ Le signe d'égalité entre la fonction et la série laisse perplexes. La partie gauche des équations représente des fractions irréductibles et la partie droite des sommes infinies de nombres entiers.² La fonction existe pour une valeur de x , mais son développement n'existe pas pour cette valeur. La série infinie ne converge pas vers la fonction $1/(1-x)$ quel que soit x .

Il ne suffit plus de manipuler avec habileté les suites et les séries infinies en postulant implicitement l'existence d'une limite. Il faut prouver que la série choisie converge !

¹ N. Verdier, *Le discret et le continu*, op. cit., pp.13-25 ; Alain Zalmanski, « Les trésors inépuisables de la suite de Fibonacci », in *Suites & séries. Les nombres, avec ou sans limite*, pp.14-15.

² Ph. Etchecopar, N. Garric et N. Verdier, *Calcul différentiel et intégral*, op., p.49.

Lagrange a cru lever la difficulté en développant en série des fonctions dans le voisinage d'une valeur de la variable pour laquelle ces fonctions sont définies. Le recours aux fonctions dérivées devait régler la situation. On aurait *un instrument sûr et commode pour abrégé et simplifier les démonstrations*.¹

Est-ce vrai ? Toute fonction serait-elle nécessairement développable en série de Taylor ? Répondre oui revient à affirmer que la série converge. Le mécanisme d'engendrement des (fonctions) dérivées à partir de la fonction : $f \rightarrow f' \rightarrow f'' \rightarrow f''' \rightarrow \dots$ donnerait cette assurance. Imaginez un empilement de briques de plus en plus minces avant que la dernière lamelle atteigne une hauteur fixée. On devine la convergence, mais attention ! la métaphore n'est valable que si les termes de la série sont croissants (comme dans la série $\sum 1/n^2$, où tous les nombres sont positifs). Dans d'autres cas, cette représentation est erronée. On peut par ex. avoir des dérivées 1^{re} et 2^e positives, et la 3^e ...négative !

Cette première objection n'est pas décisive. L'enchaînement des dérivées continue d'opérer. Le progrès est indéniable. L'étape qui consista à passer des fonctions algébriques aux fonctions développables en séries (et particulièrement en série de Taylor) fut décisive. [*Le pas franchi est comparable*] à celui qui sépare, en théorie de nombres, les rationnels et les irrationnels.² Dès le XVI^e siècle, les idées d'approximation et de convergence connurent le succès, mais des zones d'ombre subsistèrent malgré les tentatives de conforter son sentiment qu'une série infinie tend vers une limite.

L'approximation fut d'abord introduite au niveau des nombres. Soient deux nombres réels a et x , et un nombre réel positif ayant la particularité d'être très petit, ε . On dit que a est une valeur *approchée* de a à près ε si la valeur absolue entre x et a , soit $|x-a| > \varepsilon$ avec $\varepsilon > 0$. Dans ce cas, $x \in [a-\varepsilon, a+\varepsilon]$ ou $a-\varepsilon \leq x \leq a+\varepsilon$. Un nombre réel peut faire l'objet d'une suite infinie d'approximations (tel $\sqrt{2}$ par des fractions continues), mais par ce biais on peut également l'approcher par un développement fini. En prenant uniquement les premiers termes, on en obtient des approximations appelées les *réduites*

Par ex., les réduites du nombre 2,011 sont 2, puis 2,01111, puis 2,010989, puis 2,011, sachant que

$$2 + \frac{1}{90} \approx 2,0111, \quad 2 + \frac{1}{90 + \frac{1}{1}} \approx 2,010989, \quad 2 + \frac{1}{90 + \frac{1}{1 + \frac{1}{10}}} = 2,011$$

On approche le nombre 2,011 alternativement par défaut et par excès comme le nombre a par $+$ ou $-\varepsilon$.

Les Lumières ont-elles envisagé, dans le même esprit, l'approximation d'une série numérique ou algébrique ? Non, pour la simple raison qu'une série est une somme. Elle a une valeur. En revanche, elles ont pu approcher une fonction par le *développement limité* de sa série entière.

Etant donné l'importance des séries entières à cette époque, il n'est pas inutile de rappeler qu'une série entière est une série de puissances entières, $\sum a_n x^n$ avec $n \rightarrow \infty$. Chaque x^n est une fonction de puissance : $x^n = f_n(x) = \underbrace{x \times \dots \times x}_n$. Une série entière est une somme de fonctions puissances.

Dans une série entière, les notions de somme et de fonction coexistent. Une fonction, infiniment dérivable, est développable en série entière au voisinage d'un de ces points.

On retrouve la série de Taylor. Comment faut-il comprendre le développement *limité* d'une telle série ?

iii L'idée d'un développement limité

Considérons le développement en série de Taylor d'une fonction $y = f(x)$ au voisinage du point x_0 . La fonction est infiniment dérivable dans un intervalle autour de x_0 . Les coefficients des différents puissances de x correspondent aux valeurs des dérivées successives $f'(x_0)$, $f''(x_0)$, ..., $f^{(x^n)}(x_0)$. Toutes les dérivées sont évaluées au point de développement x_0 . Le développement limité de la fonction f au

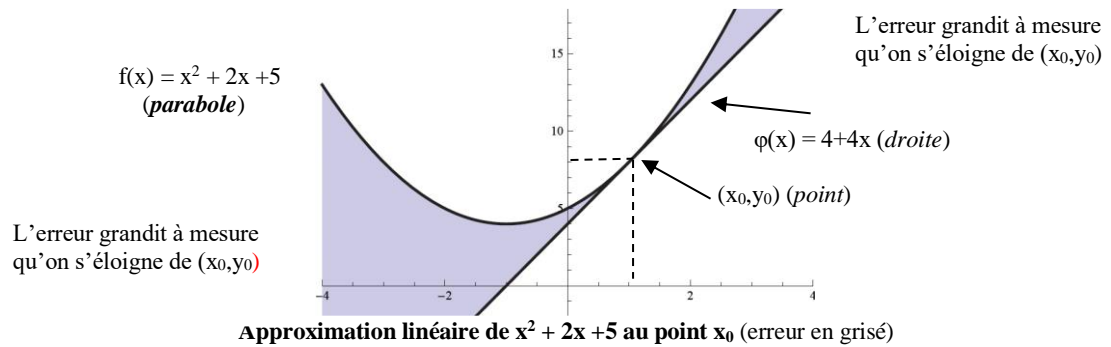
¹ Lagrange, *Mécanique analytique*, Préf. à la seconde éd. [1811], in A. Delachet, *L'analyse math.*, op. cit., p.44.

² Paul Germain, "Les grandes lignes de l'évolution des mathématiques", in *Les grands courants de la pensée mathématiques*, présentés par F. Le Lyonnais, Cahiers du Sud, 1948, p.235. L'auteur se réfère à Emile Bourtroux.

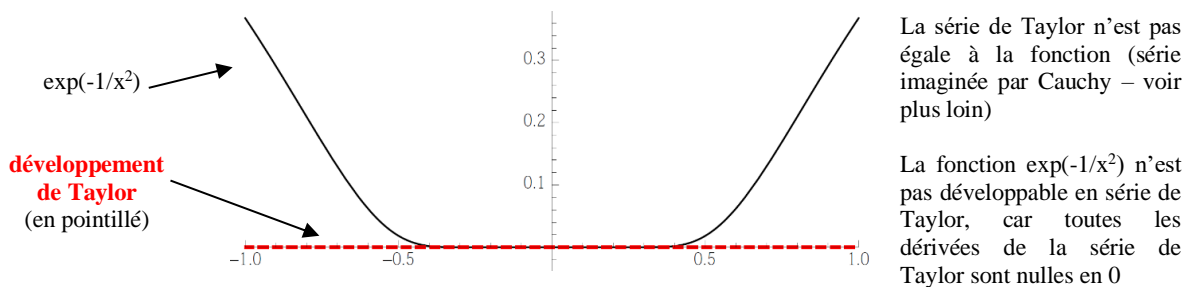
point x_0 est une approximation polynomiale de la fonction en ce point. Son écriture prend la forme d'un polynôme et d'un *reste* qui peut être négligé lorsque la variable est suffisamment proche du point x_0 .

Nous avons montré sans le dire un développement limité en considérant la fonction exponentielle, $y = e^x$. Voici d'autres exemples avec reste. Soit la fonction cosinus, $y = \cos x$. Son développement limité d'ordre 4 au voisinage de 0 s'écrit : $\cos x = 1 - x^2/2! + x^4/4! + o(x^4)$. La fonction logarithme, \log (ou \ln , en notation d'aujourd'hui) peut également s'écrire : $\ln(1+x) = x - x^2/2 + x^3/3 - x^4/4 + o(x^4)$. Il est indispensable de ne pas oublier le reste, car sinon la fonction considérée ne serait qu'un polynôme. Dans ces deux fonctions, on a poussé le développement limité jusqu'à l'ordre 4. Le reste, par exemple $o(x^4) = \ln(1+x) - [x - x^2/2 + x^3/3 - x^4/4]$ tend plus vite vers 0 que x^4 , le terme d'ordre 4. La limite est 0.

Dispose-t-on d'un théorème qui garantit que le reste tende vers une limite ? Est-on sûr que cette limite soit 0, c'est-à-dire que $R_n(x) = 0$ quand $n \rightarrow \infty$? Poussons davantage le développement limité. Le problème devient de plus en plus visible. La différence entre la fonction et son développement limité ne cesse de grandir. L'espace qui la représente s'élargit en s'éloignant du point de développement :



Avons-nous résolu la difficulté ? Non, pas encore. Une série peut tendre vers 0 sans être convergente. Elle peut être infiniment dérivable au point 0 sans être développable en série entière à l'origine. Soit par exemple l'exponentielle $y = \exp(-1/x^2)$. Sa série de Taylor est nulle à tout ordre ($x, x^2, x^3 \dots$). Elle converge (une somme de 0 converge vers 0), mais pas dans la direction qu'on croit. Elle ne converge pas vers la fonction. La série ne converge vers elle que tant que la courbe est plate. Cf. la figure infra :



Résumons. Plus le polynôme du développement limité est de degré élevé, plus il approxime la fonction $f(x)$. On monte en exactitude mais non en certitude car l'écart résiduel risque de s'élargir lorsque le degré tend vers l'infini. La convergence n'est pas toujours au rendez-vous. La réciproque manque à l'appel. La convergence des séries n'est une affaire de *feeling*. Il faut des critères rigoureux.

On sait qu'une série converge si son terme général tend vers 0. Ce critère est nécessaire (s'il fait défaut, la série diverge), mais il n'est pas suffisant : l'inverse n'est pas vrai. Sous le choc, les mathématiciens des Lumières vont rivaliser pour approfondir le critère de convergence. Leibniz et d'Alembert ouvrent la voie. Au début du XIX^e siècle, Cauchy imposera un critère plus indiscutable.

Le critère de Leibniz est envisageable pour une famille de séries.

Soit une série alternée de la forme $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots$. Les coefficients de la série a_n sont des nombres réels positifs, $a_n > 0$. On suppose que les termes en valeur absolue $|a_n|$ tendent vers zéro en décroissant : $|a_1| > |a_2| > |a_3| > \dots > |a_n| > \dots$ et $\lim |a_n| = 0$ quand $n \rightarrow \infty$. Si cette condition est

satisfaite, la série $\sum a_n$ converge. La somme $\sum a_n$ est positive, mais elle n'est pas supérieure au premier terme. On s'en assure en notant que la valeur absolue du reste $|\sum_{n+k} a_n|$ est inférieure à a_{n+1} avec $k \geq 1$.

Ce résultat permet de prouver la convergence d'un grand nombre de développements en séries usuels comme ceux des fonctions $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1+x)$, etc. Le critère prouve, par ex., que la série harmonique *alternée*: $1-1/2+1/3-1/4+1/5+\dots+ [(-1)^{n+1}/n]+\dots$ est convergente. La série, dite semi-harmonique, a pour limite $\ln 2$, logarithme népérien de 2.

La série semi-harmonique peut se présenter autrement : $-1+1/2-1/3+1/4-1/5+\dots+ [(-1)^n/n]+\dots$ (on commence par -1 et non par $+1$). La série converge, mais sa somme vaut $-\ln 2$. Dans ce cas comme le précédent, la simple somme $\sum a_n$ n'est pas *absolument* convergente. Pour qu'une série le soit, il faudrait que tous ses arrangements convergent vers la même limite. On s'en assure en considérant la série des valeurs absolues, $|\sum a_n|$ (et pas seulement la valeur absolue du reste). La série semi-harmonique est semi-convergente. Un ordre des termes différent aboutit à une limite différente.¹

Jusqu'ici, on écrivait une somme infinie suivie d'un pointillé. D'Alembert commence à la réécrire sous forme de limite : par ex. $1/2+1/4+1/8+\dots+1/2^n+\dots = \lim_{n \rightarrow \infty} 1/2+1/4+1/8+\dots+1/2^n$, avec $n \rightarrow \infty$. C'est un *changement de notation très subtile mais cette innovation fait toute la différence!*² On commence à comprendre qu'il est vain de trop scruter l'horizon. Le pointillé n'a pas disparu, mais il est au milieu des premiers termes de la série $\sum u_n$ et de son terme général u_n . L'attention se déplace vers le début.

iv Des critères de convergence

Cauchy achève de mettre à jour l'innovation. Son critère de convergence explicite le mode de pensée des Lumières.

Pour savoir si une série converge, Cauchy n'a plus besoin d'en connaître la limite, projetée au lointain. Il entend toujours accompagner la série, mais pour savoir si le voyage aboutit, il ne trouve pas utile d'indiquer dans son journal de bord le nom du lieu-dit. Le trajet compte autant que la destination. Le mathématicien se contente d'une information sur la valeur des éléments de la série et non sur la valeur de la somme. Cette information a valeur de critère. Il est applicable aux suites (u_n) autant qu'aux séries puisque l'étude d'une série infinie revient à travailler sur la suite des sommes partielles.

Critère de Cauchy pour les suites. Soient deux entiers n et p . La suite (u_n) converge si $|u_n - u_{n+p}|$ tend vers 0 quand $n \rightarrow \infty$. Autrement dit, $|u_n - u_{n+p}| \leq M_n$ avec $M_n \rightarrow 0$. La partie gauche de l'inégalité, $|u_n - u_{n+p}|$, dépend de p , mais celle de droite, M_n , ne dépend que de n (le nombre $M_n \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$). Voilà la trouvaille ! On ne cherche pas à borner la différence $|u_n - \text{limite}| \leq M_n$, 0 quand $n \rightarrow \infty$, mais la différence $|u_n - u_{n+p}| \leq M_n$. On n'a plus besoin de la limite. M_n marche pour tous les p au-delà de n .

*L'intérêt de ce critère est qu'il ne fait intervenir que les termes de la suite u_n . Il permet de reconnaître si la suite converge sans qu'on ait à en calculer la limite.*³

La suite u_n satisfait au critère de Cauchy qui se réécrit comme suit: $|u_n - u_{n+p}| \leq \varepsilon$ (les termes u_n et u_{n+p} ne suivent pas nécessairement ; u_{n+p} peut être n'importe quel terme de la suite (u_n) au-delà de u_n).

Critère de Cauchy pour les séries. Une série est infinie si la suite des sommes partielles de ses termes, $S_1, S_2, S_3, \dots, S_n$ se dirige vers l'infini. A contrario, la série converge si l'écart entre la somme totale S et la somme partielle S_n se réduit quand n tend vers l'infini. La série est convergente si $|S - S_n| < \varepsilon$, avec $\varepsilon > 0$.

Appliquons le critère de Cauchy aux séries. Pour qu'une série $\sum u_n$ converge, *il faut et il suffit*, pour tout $\varepsilon > 0$, qu'il existe un rang N tel que, pour tout $n \geq N$ et tout entier $p \geq 0$, on ait $|S_n - S_{n+p}| \leq \varepsilon$. Ce critère fournit une condition nécessaire et suffisante de convergence. La condition est nécessaire (*il faut* qu'elle soit satisfaite). Elle est suffisante (*il suffit* qu'elle le soit). La série $\sum u_n$ est convergent si, et

¹ Ph. Boulanger, « La surprenante divergence lente de la série harmonique », op. cit., p.94..

² Ch. Seife, *Zéro*, op. cit., p.160.

³ Jean Combes, *Suites et séries*, Puf, Paris, 1995, p.14 et 36.

seulement si, la valeur absolue de la différence de deux sommes partielles, soit $|\sum u_k| \leq M_n$ (avec k allant de $n+1$ à $n+p$), est plus petite que tout nombre très petit ne dépendant que de n (i.e. $|\sum u_k| \leq \varepsilon$).

Le critère de Cauchy est applicable aux séries numériques : $|u_n + u_{n+1} + \dots + u_{n+p}| = |\sum u_n| \leq \varepsilon$ (l'indice n variant de n à p). Ce critère assure que la série harmonique $1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} = |\sum 1/n|$ avec n allant de 1 à l'infini diverge (la suite des sommes partielles S_n , strictement croissante, n'a pas de limite finie)¹. Grâce à cet outil, les mathématiciens comprennent mieux les conditions de convergence d'une série numérique. Ils n'exigent plus seulement que le terme général de la série tende vers 0 . La série harmonique $\sum 1/n$ fournit un contre-exemple très clair. La condition est nécessaire mais non suffisante.

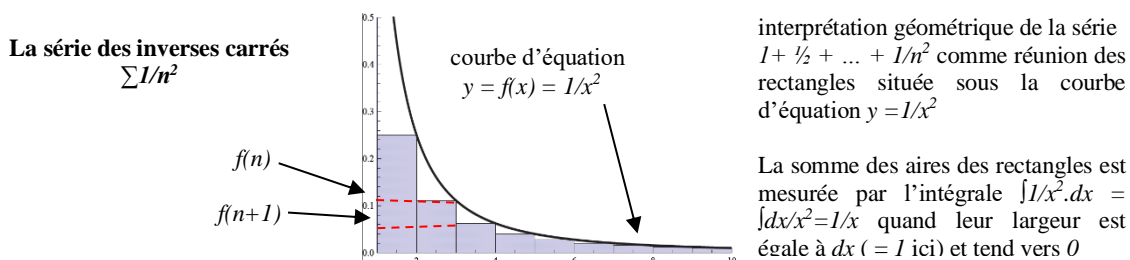
Le critère de Cauchy montre la convergence d'une limite d'une suite (ou d'une série) dont on ignore la limite. Cet apport fut inappréciable, mais il ne dispensa pas les praticiens d'édicter des règles simples donnant des indications sur la convergence des séries. Faute de pouvoir calculer la somme d'une série afin d'en trouver la limite, ils se rapprochèrent de choses connues pour savoir vers quoi tend une série. Ils conçurent différents tests de comparaison (test de l'intégrale, recours à des séries usuelles).

(§18-c)

Test de l'intégrale. Pour calculer des intégrales difficiles, les mathématiciens des Lumières n'avaient pas hésité à se tourner vers les *primitives* qui leur étaient familières. Ils recoururent également à des séries, mais encore devaient-ils savoir vers quoi elles convergent. Pour les simples, aucun problème, mais quid des compliquées ? Les séries peuvent diverger au-delà où nous porte notre vue. Comment faire ? En faisant à nouveau des comparaisons avec des intégrales plus commodes à travailler. C'est maintenant au tour des intégrales de venir en aide aux séries difficiles.

Comparer une suite à une intégrale revient à établir l'égalité : $(a_{n+1} - a_n) = \int f'(x) dx$, x allant de n à $n+1$. La limite de a_n est l'intégrale entre n et $n+1$. Si on trouve l'intégrale, on trouve la suite. Le test de l'intégrale considère des séries et non des suites. Il ne s'agit pas de calculer la somme de chacune, mais de fournir des informations sur sa nature. On n'entend pas à en donner la valeur, i.e. la *limite* (si on le pouvait, ce serait parfait !), mais on s'efforce de savoir si la série est convergente ou divergente.

Soit une série dont le terme général correspond à une fonction facilement intégrable. L'étude de la série en découle comme suit. Si la fonction est continue et croissante, la série $\sum f(n)$ avec $n \geq 0$ a même nature que l'intégrale $\int f(x) dx$, x allant de 0 à ∞ . Si l'intégrale converge, la série converge, étant rappelé que les termes de la série doivent être strictement décroissants. Si l'intégrale diverge, la série diverge. La tendance de la série colle à celle de l'intégrale (tendance à converger ou à diverger).



Les autres méthodes sont des tests de comparaison entre deux séries. L'idée est de s'en rapporter à une série usuelle, telle la série géométrique $\sum q^n$ sachant que cette série converge si $|q| < 1$. Exemple numérique ? Soit la série géométrique (de raison $q = 2$ et de premier terme $a = 2$) : $2+4+8+32+64+128+256$. La somme partielle d'une telle série vaut 510 suivant la formule générale : $S_n = a(1-q^{n+1})/(1-q) = 2(1-256)/(1-2) = 510$. Si la valeur absolue de la raison $|q|$ avait été inférieure à 1 , c'est-à-dire $|q| < 1$, la somme partielle S_n aurait convergé. La limite de la série aurait valu : $a/(1-q)$. La condition est nécessaire et suffisante : la série géométrique $\sum q^n$ converge si et seulement si $|q| < 1$.

Sur la base de cette idée, d'Alembert établit une règle précise. Cette règle sera généralisée par Cauchy. L'un et l'autre choisirent des séries géométriques qui ne dépendent pas des premiers termes.

¹ « Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$. La suite (u_n) diverge. En effet, $u_{2n} - u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$. Le second membre comprend n termes, tous $\geq 1/2n$, donc il est $\geq 1/2$. Si on prend $\varepsilon < 1/2$, on ne peut satisfaire la condition du critère de Cauchy. » (J. Combes, *ibid.*, p.15).

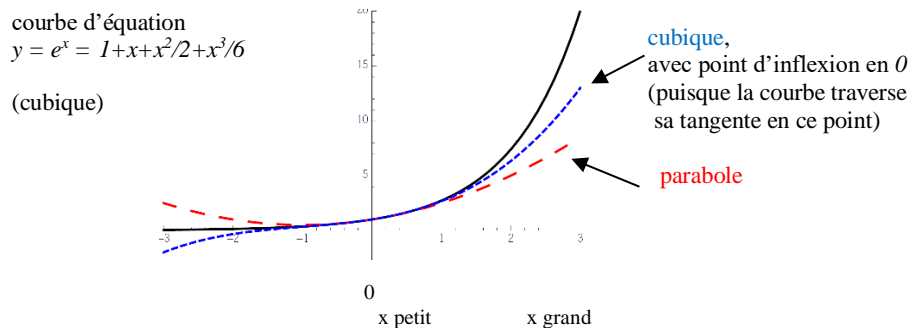
La règle de d'Alembert. Soit une série à termes positifs : $\sum u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots$. Mettons-la en regard de la série géométrique $\sum r^n$ de raison r en considérant le rapport u_{n+1}/u_n et l'inégalité $u_{n+1}/u_n < r$. La quantité u_{n+1}/u_n a pour limite r lorsque $n \rightarrow \infty$. Si $r < 1$, la série $\sum r^n$ converge. La série $\sum u_n$ idem. Si $r > 1$, la série $\sum r^n$ diverge. La suite u_n est croissante. Elle ne peut tendre vers 0. La série $\sum u_n$ diverge. Si $r = 1$, on ne peut rien dire. Le critère s'utilise avec des factorielles. Ex : $\sum (2^n/n!)$. Pour savoir si la série converge, écrivons $\lim 2^{n+1}/(n+1)! \cdot n!/2^n$ (il faut multiplier par l'inverse car on doit diviser par $2^n/n!$), soit $\lim 2^{n+1}/2^n \cdot n!/(n+1)!$ (en invertissant) = $\lim 2/n+1=0$ avec $n \rightarrow \infty$. Comme $0 < 1$, la série $\sum 2^n/n!$ converge.

La règle de Cauchy. Soit à nouveau une série à termes positifs : $\sum u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots$ et comparons-la à la série $\sum r^n$ de raison r . Considérons la quantité $(u_n)^{1/n} = \sqrt[n]{u_n}$ et l'inégalité $u_n < r^n$ ou $\sqrt[n]{u_n} < r$. La quantité $\sqrt[n]{u_n}$ tend la limite r lorsque $n \rightarrow \infty$. Si $r < 1$, la série $\sum r^n$ converge. Idem pour la série $\sum u_n$. Si $r > 1$, l'une et l'autre divergent. Si $r = 1$, on ne peut rien dire. Ex : $\sum [(n^2+3)/(2n^2+5)]^n = \lim \sqrt[n]{[(n^2+3)/(2n^2+5)]^n} = \lim [(n^2+3)/(2n^2+5)] = \lim [(n^2)(1+3/n)/(n^2(2+5/n))] = \lim (1+3/n)/(2+5/n) = 1/2$ avec $(1+3/n) \rightarrow 1$ et $(2+5/n) \rightarrow 2$ lorsque $n \rightarrow \infty$. D'où : $r = 1/2$. Comme $1/2 < 1$, la série $\sum [(n^2+3)/(2n^2+5)]^n$ converge vers une limite finie.

La règle de d'Alembert prend en compte le taux de variation des termes d'une suite (le rapport u_{n+1}/u_n) alors que la règle de Cauchy en considère les termes mêmes u_n . Nonobstant cette différence, les deux approches démontrent *la convergence d'une série via l'existence d'un majorant qui tend vers 0*. Le critère de Cauchy, $|\sum u_n| \leq \varepsilon$, est sous-jacent à l'entreprise. Plus on avance, plus l'écart à la limite est faible. On majore l'écart par une quantité très faible, extrêmement petit ε .

L'idée de majoration est active dans le développement limité d'une fonction via la considération du reste. Le resserrement du reste est l'objectif majeur.

Un développement limité est un polynôme qui s'arrête (une série infinie ne s'arrête pas). Plus le nombre de termes s'accroît dans le développement (en ne cessant d'élever le degré du polynôme), plus le développement s'approche de la valeur de la fonction. Au point 0, la fonction exponentielle $y = e^x$ est mieux approchée par $y = 1 + x + x^2/2$ (équation d'une parabole) que par $y = 1 + x$ (équation d'une droite). Plus x est grand, plus il est nécessaire d'augmenter N (le nombre de termes en x^n). Par exemple, le développement limité $1+x+x^2/2+x^3/6$ permet de mieux calculer la valeur de la fonction e^x .



La différence entre le polynôme et la série constitue un reste. C'est ce reste que Lagrange majore dans la série de Taylor. Il évite d'avoir besoin d'avoir recours à un grand nombre de termes. Il arrête son développement à un certain N (dernier terme du développement). Le nombre de termes est donc fixé. Il choisit x très petit. Les termes en x^n deviennent négligeables car les coefficients du polynôme demeurent fixes quand $x \rightarrow 0$. Le reste se rétrécit comme peau de chagrin. Portant sur moins de termes, le calcul gagne en rapidité. La série converge plus vite vers la limite qui est supposée exister.

La technique de resserrement d'un reste affleurerait déjà dans la mise en œuvre du critère de Leibniz. Soit le développement d'une série u_n dont la valeur absolue $|u_n|$ tend vers 0 en décroissant. Si on tronque le développement au rang n , le reste de la série, $u_{n+1} + u_{n+2} + \dots$, est, en valeur absolue, inférieur à $|u_n|$. Ce résultat permet d'estimer l'erreur maximale commise en négligeant le reste.

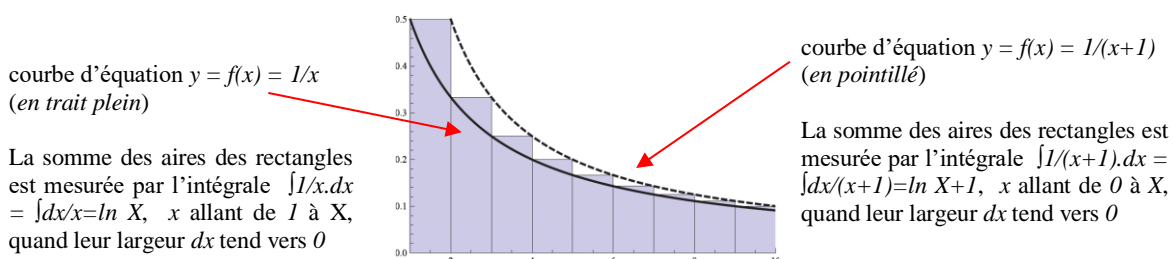
Les règles de d'Alembert et de Cauchy s'inscrivent dans la même approche. Les sommes partielles des séries à termes positifs constituent des suites croissantes. Elles sont convergentes si et seulement si ces sommes partielles sont majorées. Si on majore une série par une autre qui converge, la première converge. A contrario, si une série est minorée par une série qui diverge, elle

diverge.¹ L'époque a appris à majorer les séries en recourant à des séries plus simples. Les séries géométriques servent d'étalon pour reconnaître la convergence ou la divergence des autres séries.

Pour dissiper les ténèbres, les Lumières ne se contentent pas de majorer les séries. Elles les encadrent.

Considérons à nouveau la série harmonique, $\sum 1/n$.

Il existe un autre moyen de prouver que cette série diverge : l'insérer entre deux inégalités, soit : $\int dx/(x+1)$ (x allant de 0 à n) $\leq 1 + 1/2 + \dots + 1/n \leq 1 + \int dx/x$ (x allant de 1 à n). Le terme général $1/n$ représente l'aire du rectangle compris entre les abscisses $n-1$ et n et les ordonnées 0 et n . La réunion des rectangles peut être approximée par l'intégrale $\int dx/x$, située sous la courbe d'équation $y = 1/x$ (courbe en trait plein). Elle peut aussi être approximée par l'intégrale $\int dx/(x+1)$, située sous la courbe d'équation $y = 1/(x+1)$ (courbe en pointillé), en dessous de la courbe en trait plein sachant que $1/(x+1) < 1/x$. Les termes qui encadrent la somme $1 + 1/2 + \dots + 1/n$ diffèrent de moins de 1 . L'intégrale $\int 1/n = \ln n$. Dans cette intégrale, $\ln n$ représente une primitive de la fonction $1/n$ (avec $n \neq 0$). Cette primitive approxime $\sum 1/n$ à une unité près. On voit par là que la série $\sum 1/n$ diverge.²



Le critère de Cauchy couronne l'approche des Lumières procédant par majoration et encadrement. C'est grâce à cette approche indirecte qu'il prouve qu'une suite converge sans connaître sa limite. Comme tout théorème, son champ d'application paraîtra limité, mais son énoncé confirme que

le temps des égalités portant sur des expressions infinies est dépassé ; l'avenir appartient à de méthodes nouvelles fondées sur des inégalités et des encadrements. Le problème central va vite devenir celui de la convergence et de l'évaluation de leurs restes.³

Au cours des Lumières, l'algèbre des infinis (des séries infinies en x) avait succédé à l'arithmétique des infinis (les séries numériques). L'époque complète son investigation par l'algèbre des inégalités. Sans disparaître, le signe d'égalité fait place au signe d'inégalité. La nouvelle algèbre répond à la question de savoir vers quoi tendent les séries. Leur convergence ne va plus de soi, mais elle n'est pas non plus totalement aventureuse. Des critères de convergence existent. Ils ne sont pas une panacée, mais ils ont le mérite d'exister. Les séries inconnues peuvent être comparées à des séries connues. Les techniques de majoration et d'encadrement éclairent le développement de telles séries.

2/ En philosophie

i La bonne approximation

ii Des mains de travailleur

Il faut accepter d'avoir de la terre sur les mains pour voir comment Newton approche le nombre e :

¹ Gilles Cohen, « Séries géométriques et critères de convergence », in *Suites & séries*, op. cit., p.112.

² Hervé Lehning, « Le calcul des sommes de la série harmonique », in *Suites & séries*, p.99.

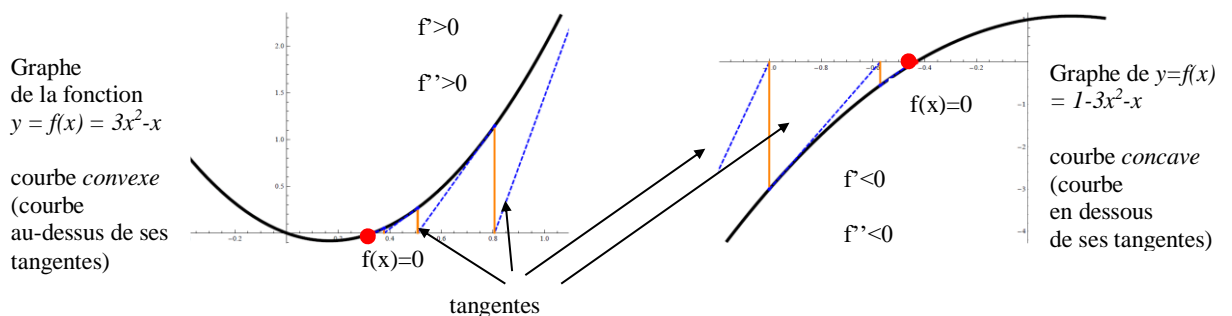
³ Dominique Tournès, *L'intégration approchée des équations différentielles ordinaires*, Univ. Denis Diderot, Thèse, 20 juin 1996, p.117.

approximation de e par le binôme de Newton ¹	
$(1+1/1)^1$	= 2
$(10+1/10)^{10}$	= 2, 5937425...
$(100+1/100)^{100}$	= 2,7048136...
$(1000+1/1000)^{1000}$	= 2,7169238...
$(10\ 000+1/10\ 000)^{10\ 000}$	= 2,7181461...
$(100\ 000+1/100\ 000)^{100\ 000}$	= 2,7182681...
...	...
limite	= 2, 7182818...

Le nombre e est égal approximativement à 2,71828. La valeur n'est pas exacte car e est un nombre irrationnel. Newton avait généralisé le binôme pour un nombre quelconque : fractionnaire, incommensurable,.. (§ 25-ii) Le calcul est ingrat, mais, grâce à lui, on retrouve le nombre e qui avait été approché par la série des factorielles inverses $\sum 1/n!$ (on pourrait également établir un tableau pour cette série). Il est rassurant que e puisse être obtenu par des moyens aussi différents. Qu'on se rappelle que le nombre e peut concurremment faire l'objet d'un développement en fractions continues.

Tel est l'esprit des Lumières, collé au monde autant que contemplatif. Il ne suffit pas d'en saisir l'essence. Il faut en faire l'expérience. *La chouette de Minerve ne prend son envol qu'à la tombée de la nuit.*² Dixit Hegel. Encore faut-il mettre la main à la pâte avant que le crépuscule commence. Une idée sans calcul à l'appui n'est pas tout à fait une solution. Lorsque Hegel évoque l'apport de Newton à l'analyse, il passe sous silence la *méthode des tangentes* que celui-ci avait imaginée. Cette autre méthode numérique permet de trouver, par approximations successives, la racine d'une équation. Nous sommes au cœur du *mauvais infini*, mais Hegel ne voit pas la bonification qui opère en catimini.

La méthode des tangentes. Comment parvenir aux racines d'une équation ? En cherchant les solutions de l'équation $f(x)=0$. Soit la courbe représentative de la fonction. Le nombre de racines est le nombre de fois où la courbe coupe l'axe des abscisses. La méthode de Newton repose sur cette observation. Elle consiste : 1/ à choisir un élément x_0 d'un intervalle sur l'axe des x ; 2/ à calculer $y_0=f(x_0)$; 3/ si $y_0 \neq 0$, à déterminer la tangente, au point de coordonnées (x_0, y_0) , au graphe de la fonction f ; 4/ à chercher l'abscisse x_1 du point où cette tangente coupe l'axe des x . On construit ainsi, de proche en proche, les termes d'une suite $(x_0, x_1, \dots, x_n, \dots)$. Le processus s'épuise lorsque la suite converge vers un élément x de l'intervalle considéré. Cet élément est solution de l'équation $f(x)=0$.³



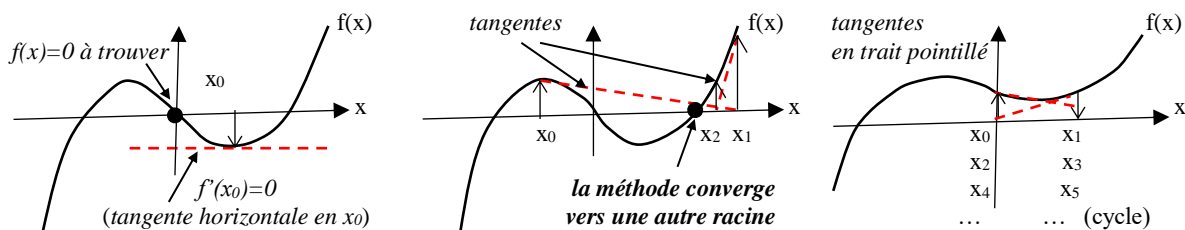
La méthode de Newton a l'avantage de converger très vite (la distance à la solution diminue comme celle de la suite $1/n^2$). C'est une méthode d'accélération de la solution. Cependant, un certain nombre de conditions doivent être satisfaites. La fonction doit être monotone (strictement croissante ou décroissante, i.e. $f' > 0$ ou $f' < 0$), convexe (i.e. $f'' > 0$) ou concave ($f'' < 0$). Hors de ce cadre, point de salut ! La méthode est inopérante si on déforme la courbe à un point où apparaîtrait une tangente horizontale (là où $f'(x) = 0$). En ce point, la courbe ne coupe pas l'axe des x . Elle est aussi ineffective si on choisit un point x_0 qui n'est pas proche du 0 à trouver (la suite converge vers la solution la plus éloignée). *Last but not least*, la méthode ne marche pas lorsque l'itération devient cyclique ou chaotique.⁴

¹ Le résultat de la deuxième ligne du tableau s'obtient en cinq minutes [à la main] et donne exactement : 2,5937424601 ; la troisième ligne exigerait cinquante minutes, etc. La dixième est une suite d'un milliard de multiplications ! Les calculs doivent être effectués par logarithmes [étant rappelé qu'avec ces derniers permet de ramener toute multiplication à une addition]. (M. Boll, *Histoire des math.*, op. cit., p.57).

² Hegel, *Princ. de la phil. du droit*, préface.

³ Charles-Michel Marle, *Systèmes dynamiques*, Ellipses, Paris, 2003, p.10.

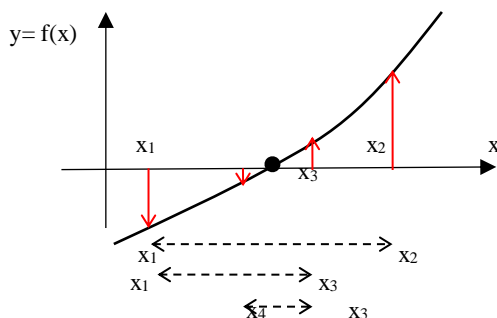
⁴ John Hubbard, Beverly West, *Equations différentielles et systèmes dynamiques*, Cassini, Paris, 1999, pp.190-191.



La méthode de Newton n'est pas seulement visuelle. Un algorithme est applicable à l'équation. Newton calcula la racine de l'équation $x^3-2x-5=0$ en partant de $x_0=2$. Il obtint une 1^{re} approximation : $x_1=2,1$, une 2^e approximation : $x_2 \approx 2,0946$, etc. Il poursuit l'opération aussi longtemps qu'il convient. Il avait commencé par une estimation grossière. Il l'affina pas à pas par approximations successives.

Le point $x_0=2$ diffère de moins de 10% de la valeur de la racine x recherchée. Soit $x = 2+d_0$, où d_0 est l'accroissement à donner à 2 pour obtenir x . Remplaçons x par $2+d_0$ dans l'équation $x^3-2x-5=0$. Celle-ci devient : $d_0^3+6d_0^2+10d_0-1=0$. En négligeant $d_0^3+6d_0^2$ en raison de sa petitesse, il reste $10d_0-1=0$ ou $d_0=0,1$, ce qui donne comme première approximation de la racine : $x_1 = x_0+d_0=2,1$. Ecrivons $d_2=0,1+d_1$, où d_1 est l'accroissement à donner à d_0 pour obtenir la racine de l'équation précédente, $d_0^3+6d_0^2+10d_0-1=0$. Remplaçons-y d_0 par $0,1+d_1$ pour obtenir $d_1^3+6,3d_1^2+11,23d_1+0,061=0$. (On obtiendrait la même équation en remplaçant x par $2,1+d_1$ dans la première équation, $x^3-2x-5=0$.) Négligeant les deux premiers termes, il reste $11,23d_1+0,061=0$ ou $d_1 \approx -0,0054$, ce qui donne comme nouvelle approximation de la racine $x_2 = x_1+d_1 \approx 2,0946$. Et ainsi de suite. V. Jean-Luc Chabert, *Histoire d'algorithmes. Du caillou à la puce*, Paris, Belin, 2010, pp.195-199.

La méthode est simple et ingénieuse, mais un philosophe comme Hegel retiendrait que l'algorithme n'est pas infaillible. La convergence n'est pas toujours assurée. L'ignore-t-il, les Lumières ont forgé d'autres méthodes de tâtonnement. Celle de la dichotomie en est une. Elle est plus lente mais plus sûre. A chaque étape, on divise par deux la taille de l'intervalle d'étude. La solution est la racine de la fonction $f(x)$ lorsque celle-ci vaut 0 dans l'intervalle considéré, par exemple l'intervalle (x_1, x_2) infra :



L'intervalle (x_1, x_2) encadre la racine de la fonction f étudiée. On divise cet intervalle en 2 au point x_3 (les parties ne sont pas forcément égales)

On recommence à partager l'intervalle (x_1, x_3) jusqu'à sélectionner le sous-intervalle dans lequel existe $f(x)=0$

L'algorithme de dichotomie consiste à prendre la moitié de la longueur L de l'intervalle initial. A la 1^{re} itération, L devient $L/2 = L/2^1$; à la seconde, $L/4 = L/2^2$; à la n -ième itération : $L/2^n$. On souhaite que cet intervalle soit inférieur à une quantité donnée, la précision à obtenir. Soit Δr l'erreur qu'on accepte de commettre sur la valeur de la racine r recherchée. Quel n choisir pour que $L/2^n < \Delta r$? Pour y répondre, passons par le logarithme qui préserve cette inégalité. On sait que la fonction logarithmique est une fonction croissante. On a donc : $\log(L/2^n < \Delta r) < \log \Delta r$ ou $\log L - n \log 2 < \log \Delta r$, d'où $n \log 2 > \ln L - \ln \Delta r$ et $n > \lceil \ln(L/\Delta r) / \ln 2 \rceil = \log_2(L/\Delta r)$. Il suffit que le nombre d'itérations n soit supérieur au plus petit entier n_0 contenu dans $\log_2(L/\Delta r)$, soit, en en prenant la partie entière E , $n > n_0 = E[\log_2(L/\Delta r)]$.

(§25-3/)

Le lecteur a observé qu'au cours du calcul, le logarithme népérien (\ln) a été remplacé par \log_2 (log en base 2). On a quitté à nouveau la pure théorie (le log népérien renvoie à la fonction logarithme et à sa représentation en surface sous l'hyperbole $1/x$ pour des abscisses variant entre 1 et x). Le calcul de $\log_2(2)$ peut se faire à la main en remarquant que $2^{10} \approx 1000$, donc $10 \log_2(2) \approx 3$, soit $\log_2(2) \approx 0,3$. Ce calcul est approché. Les praticiens (physiciens, économistes, ...) utilisent habituellement le logarithme décimal. Le $\log_{10}(10)$ est plus pratique. Il précise de façon exacte à quelle puissance il faut élever 10 pour retrouver le nombre de départ. Par ex., si $x=10$, $\log_{10}(10) = 1$ car $10^1 = 10$; si $x=100$, $\log_{10}(100) = 2$ car $10^2 = 100$; si $x=1000$, $\log_{10}(1000) = 3$ car $10^3 = 1000$; etc. (Si $x=0,01$, $\log_{10}(0,01) = -2$ car $10^{-2} = 0,01$.)

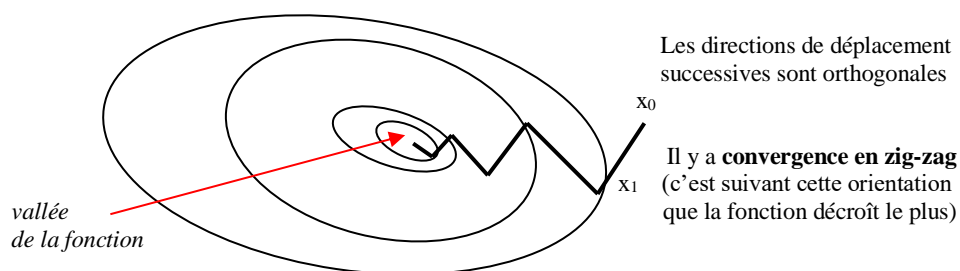
Les Lumières allient l'audace intellectuelle et les astuces de calcul, mais elles ne négligent aucunement le bon sens quand elles doivent suppléer à la théorie par des méthodes de tâtonnement.

La *méthode des gradients*, utilisée par Cauchy, est exemplaire à ce titre. Retournez mentalement dans l'état de nature. Vous êtes perdu. Vous ne voyez pas le point où vous voulez aller... Que faire ?

Le gradient d'une fonction désigne à la fois une variation et une direction. Soit le poids d'une force. Le gradient indique la direction dans laquelle se déplace un objet qui ne serait soumis qu'à son seul poids. Le gradient est le plus petit déplacement élémentaire dans le sens de la plus grande variation de la fonction (en l'espèce, vers le centre de la Terre). Le gradient mesure la variation d'une grandeur qui dépend d'un paramètre. Un autre exemple : la variation de la température en fonction de l'altitude.

Comme dans la méthode de Newton, je ne connais pas le but, mais, à la différence de cette méthode, je ne cherche plus un 0 (via la pente de la courbe). J'emprunte une direction privilégiée menant le plus rapidement possible à un maximum ou à un minimum (un déplacement effectuée dans la direction opposée au gradient de manière à faire décroître la fonction). A chaque pas, je choisis la plus grande pente. L'état de nature où je suis égaré est en montagne. Je désire rejoindre la vallée, mais la forêt m'empêche de voir au loin. Panique ! l'horizon est bouché, mais je peux voir à faible distance. Une stratégie est possible : faute de boussole, je prends la direction de la plus grande pente jusqu'au point où elle cesse de descendre. Si je continue dans la même direction, je remonte. Je change de direction et reprends ma descente selon la plus grande pente. Je vois enfin le fond de la vallée. Je suis sauvé.

On peut imaginer la marche à tâtons inverse. Je cherche à atteindre le sommet mais je ne peux le viser. Je choisis de prendre le sentier dont la pente est la plus raide. Je réitère le processus au moment où la pente s'adoucit et remonte. Pour monter (ou descendre) au plus vite, je dois choisir une direction qui soit perpendiculaire à la courbe de niveau qui relie les points de même altitude (la tangente à chaque courbe de niveau est perpendiculaire au gradient dans le sillon duquel je marche).



Les méthodes de calcul sont des *essays and trials* qui ont le mérite de répondre à des questions concrètes. Développements limités avec reste, méthode de Newton, dichotomie, algorithme du gradient, etc. sont des modes de pensée qui comblent l'ignorance des limites. On ne saurait comme Hegel faire fi de telles méthodes qui permettent d'avancer dans le noir. Elles ont l'art de se faufiler dans la pénombre. Majoration et encadrements successifs sont à la fois des garde-fous et des pistes.

iii Une philosophie qui n'est plus dans la lune

3/ En droit

i L'infini majoré

ii Le contrat social comme issue d'un jeu

iii La conversion du contrat social en institution de trust

iv Les critères d'encadrement

v Conclusion

§ 35.- ENCADREMENT STRICT ET ENCADREMENT PROBABLE

i Le théorème des gendarmes et la loi normale, 151

ii Le théorème central limite, 157

iii L'intervalle de confiance, 160

o

i Le théorème des gendarmes et la loi normale

Au siècle où triomphe la série, les discussions renaissent sans cesse pour en comprendre l'évolution.

De divers points de l'Europe, on s'interroge sur *les séries dont on ignore les sommes*. On scrute la loi de progression qui unit A , un terme quelconque, et B , le terme suivant immédiatement après. On pose les conditions de l'intégration d'une formule différentielle. Dans les courriers échangés, on applaudit la méthode *infaillible et démonstrative* et renâcle à adopter la *tâtonneuse ou l'extrêmement proluxe*. Parmi les élèves, figurent

- celle qui établit le terme général d'une suite de nombres dont la loi de progression est $Ax=B$;
- celle qui consiste à approcher les racines d'une équation par le moyen de suites récurrentes.¹

On prend conscience qu'une suite (u_n) ou une série $\sum u_n$ peut être définie par récurrence, même si ses termes ne semblent pas en provenir. La propriété de récurrence permet de déduire les termes d'une suite, soit à partir du 1^{er} terme, u_{n0} , soit à partir de la détermination du terme général u_n . Dans le 1^{er} cas, le calcul risque d'être laborieux (voilà une méthode qui se traîne !) ; dans le second, on voltige on ne peut mieux ! (voir par ex., la suite définie par $u_0 = 1$ et par le terme général $u_{n+1} = (n+1)u_n$ pour tout entier n , La suite considérée est celle des factorielles $u_n =: n!$ Une illustration ? $u_6 = 6.5.4.3.2.1=720$).

La méthode des tangentes de Newton implique une suite récurrente. Newton trace la tangente à la courbe représentative d'une fonction f et cherche le point où elle coupe l'axe x . Cette méthode revient à considérer la suite récurrente définie par une valeur u_0 , proche de la racine, et par la relation $u_{n+1} = u_n - f(u_n)/f'(u_n)$. Il est facile de s'en assurer en recourant à la série de Taylor apparue après Newton.

Considérons la série entière de la variable $(x-a)$. La série de Taylor de la fonction f en a peut être définie comme suit : $f(a) + f'(a)/1! (x-a) + f''(a)/2! (x-a)^2 + f^{(3)}(a)/3! (x-a)^3 + \dots$. La série de Taylor procède d'une relation de récurrence entre ses coefficients (les dérivées successives de la fonction f , soient f' , f'' , etc. Soient l'équation $f(x) = 0$ et x_0 aux abords de la racine r , Le développement de Taylor d'ordre 1 de la fonction en x_0 a pour expression: $f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + O((x - x_0)^2)$. Pour trouver une valeur approchée de r (ce que recherchait Newton), on ne garde que la partie linéaire du développement (le terme en x^1). On résout l'équation : $f(r) = 0 \approx f(x_0) + (r - x_0)f'(x_0)$. Si $f'(x_0) \neq 0$, alors : $r \approx x_0 - f(x_0)/f'(x_0)$.

Ah ! qu'il est agréable de tomber sur des séries par le moyen desquelles on peut sans peine, très vite et sûrement, approcher toutes les racines de toutes les équations tant numériques qu'algébriques.² Même si la série de Taylor n'est vraie que si elle converge car les valeurs ici sont indéterminées, chacun se plaît à songer à une loi de progression réductible à une formule générale !

Dans une certaine mesure, le rêve est en voie d'être réalisé. L'*Encyclopédie* acte le sentiment de l'époque. *La théorie et l'usage des suites infinies ont été cultivés avec beaucoup de succès*. Vous ne trouvez pas la valeur exacte d'une quantité ? Ce n'est pas grave. Contentez-vous de l'approcher dans l'adversité ! Il ne faut pas désespérer du bas monde. Les *méthodes d'approximation* ne sont pas

¹ *Correspondance mathématique et physique de quelques célèbres géomètres du XVIII^e siècle*, Saint-Pétersbourg, 1843. V. not. les lettres des 30 janv., 21 févr., 18 août et 18 nov. 1729 entre Goldbach et Daniel Bernoulli.

² *Ibid.*

parfaites par définition, mais elles permettent d'établir *des séries convergentes tant on approche si près de la valeur exacte de la quantité cherchée. Et cela, plus ou moins rapidement, selon la nature de la série* !¹

(§24
1/-ii)

Le raisonnement par récurrence permet de démontrer qu'une propriété P_n qui dépend d'un entier naturel n est vraie pour tout entier naturel n . Pascal a imaginé ce raisonnement dans son triangle arithmétique. S'il nous demande à son tour de démontrer que $4^n - 1$ est un multiple de 3, nous pouvons nous inscrire dans son mode raisonnement. Procédons par étapes :

- on pose que $P_n = 4^n - 1$ est un multiple de 3 (la propriété que l'on veut démontrer) ;
- on ne suppose pas, comme Descartes, le problème résolu, mais on commence par montrer que P_n est vrai, ce qui est le cas car $P_0 = 4^0 - 1 = 0$ et 0 est un multiple de 3 ;
- on montre que pour tout nombre n , si P_n est vrai, alors P_{n+1} est encore vraie, car $4^{n+1} - 1 = (4^n \times 4) - 1 = 4^n(3 + 1) - 1 = (4^n \times 3) + (4^n \times 1) - 1 = (4^n \times 3) + (4^n - 1)$;
- $4^n \times 3$ est par définition un multiple de 3. Or $4^n - 1$ est aussi un multiple de 3 car P_n est vraie. La somme de deux multiples de 3 est un multiple de 3, donc $(4^n \times 3) + (4^n - 1)$ est un multiple de 3, donc $(4^n \times 3) + (4^n - 1) = 4^{n+1} - 1$ est un multiple de 3, donc P_{n+1} est vraie ;
- étant donné que P_0 est vraie, et que, pour tout n , $P_n \Rightarrow P_{n+1}$, on a $P_0 \Rightarrow P_1$, donc P_1 est vraie, $P_1 \Rightarrow P_2$, donc P_2 est vraie, etc. ;
- on peut conclure que P_n est vraie pour tout n . Par principe de récurrence, P_n est vraie $\forall n$.

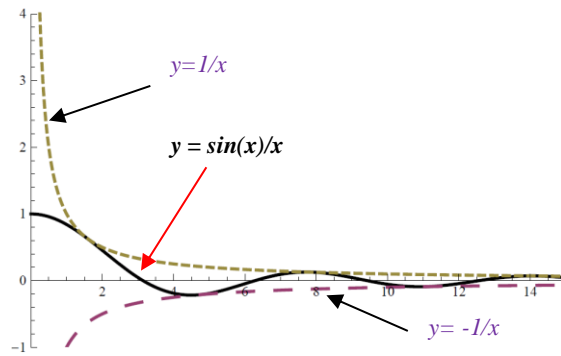
(Annexe I)

La relation de récurrence est un moyen de démontrer la convergence, mais attention ! le chemin n'est pas toujours assuré, car toute suite définie par une relation de récurrence ne converge pas nécessairement (ex. : $u_{n+1} = (n+1)(u_n)$, la factorielle $(n+1)(u_n)$ diverge quand n augmente de plus en plus). Imaginons cependant une série de termes aléatoires, chacun étant affecté d'un coefficient. Au fur et à mesure que l'on additionne les termes, les coefficients apparaissent de plus en plus petits. Une telle majoration des coefficients assure, elle, que la série converge sans qu'il existe une relation de récurrence entre les termes. La technique de majoration a une portée plus vaste que la récurrence. Elle a l'avantage, de plus, de prouver qu'une suite ou une série converge ... sans connaître sa limite !

La majoration ne suffit pas non plus ? On peut la renforcer en recourant aux gendarmes ! Rien de tel pour encadrer la suite, la série, la fonction qui s'égarerait en chemin... L'idée est intuitive. A la fin du XVIII^e siècle, Gauss la formalisa sous forme de théorème. On butte sur une fonction dont il n'est pas possible de connaître la limite, mais il arrive qu'une autre fonction permette de résoudre le problème. Comparaison n'est pas raison, répètera-t-on. Dans certains cas, ce n'est pas vrai. On a entrevu déjà des théorèmes de comparaison qui démentent cette assertion (comparaison avec des séries géométriques). Le *théorème des gendarmes*, aussi, participe à l'analyse élémentaire des Lumières.

Soit la fonction $\sin(x)/x$. Pas facile d'en trouver la limite ? Faisons appel à deux autres fonctions qui joueront le rôle de gendarmes en encadrant fortement son évolution. Sur la figure infra, la fonction $\sin(x)/x$ est prise en étau entre la courbe $y = -1/x$ et la courbe $y = 1/x$. Grâce à cet encadrement musclé, je peux écrire $-1/x < (\sin(x)/x) < 1/x$ car les valeurs de $\sin(x)$ sont comprises entre -1 et 1 (par ex. $0, \sin 0^\circ = \sin 90^\circ = 1, \sin 270^\circ = -1$, ou en radians : $\sin 0 = 0, \sin \pi/2 = 1, \sin 3\pi/2 = -1$, sachant que π radians = 180°). Flanqué de deux gendarmes, la fonction suspecte a peu de chances de s'échapper. Elle ira où les deux membres des forces de l'ordre se rendront. Or, $\lim_{x \rightarrow +\infty} -1/x = 0$ quand $x \rightarrow +\infty$, et $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1/x = 0$ quand $x \rightarrow +\infty$. D'après le théorème des gendarmes, on en déduit que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin(x)/x = 0$ quand $x \rightarrow +\infty$.

¹ Encyclopédie, art. « Série », t.15, Neuchâtel, 1765, p.93; art. « Approximation », t.1, Neuchâtel, 1751, p.93



Démonstration :

$$-1 \leq \sin(x)/x \leq 1 \text{ pour } x > 0,$$

d'où

$$-1/x \leq \sin(x)/x \leq 1/x.$$

En effet, comme $x > 0$, on garde le même sens dans l'inégalité.

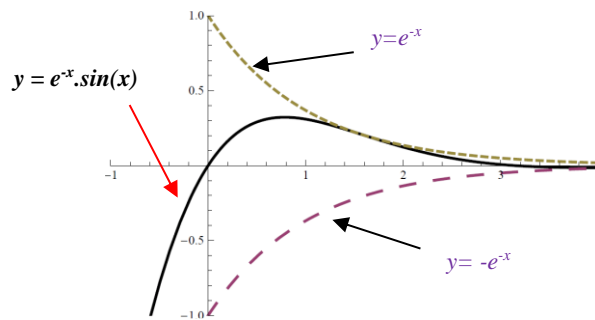
Or

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} -1/x = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1/x = 0$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sin(x)/x = 0$$

Rem. d'un spécialiste : Il n'est pas parfois nécessaire de prendre un marteau pour forger le fer. Dans $\sin(x)/x$, « chacun » sait que le sinus est borné en valeur absolue quel que soit x par 1. Il est évident que lorsque x tend vers plus l'infini, le rapport tend vers 0 par valeurs positives. L'attirail que vous déployer supra pour annoncer ce résultat n'est pas nécessaire !

Un autre exemple ? Soit la fonction $f(x) = e^{-x} \cdot \sin(x)$. On sait que $e^x \rightarrow +\infty$ quand $x \rightarrow +\infty$ et $e^x = 0$ quand $x \rightarrow -\infty$. Lorsque x tend vers $+\infty$, e^{-x} tend vers 0 et $\sin(x)$ n'a pas de limite. Le produit d'un terme qui tend vers quelque part et d'un terme qui s'égaré à l'infini est plus que problématique. La limite en $+\infty$ de la fonction f reste indéterminée. Appelons notre couple de gendarmes à la rescousse ! Pour tout réel x , il a été rappelé supra que $-1 \leq \sin(x) \leq +1$. Après avoir multiplié par le nombre positif e^{-x} , il vient : $-e^{-x} \leq f(x) \leq e^{-x}$. Or lorsque x tend vers $+\infty$, $-e^{-x}$ et e^{-x} tendent vers 0. L'encadrement est réalisé !



Coincé entre deux fonctions qui jouent le rôle de gendarme, $f(x)$ ne peut que suivre le chemin tracé par la loi.

- En vertu du théorème des gendarmes, nous vous prions de nous accompagner !

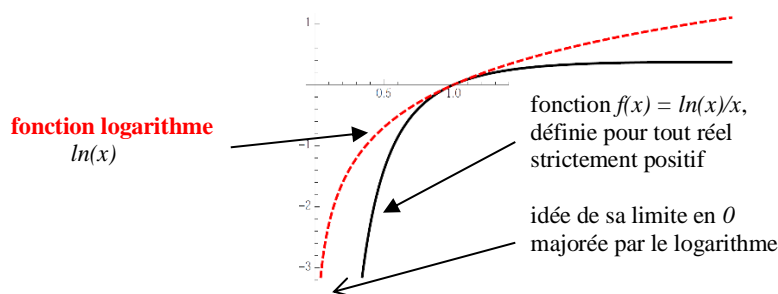
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

(§25-3/)

D'aucuns feront observer qu'un tel procédé d'encadrement ne date pas d'hier. Que faisait d'autre Archimède quand il approximait π en encadrant un cercle par des polygones réguliers de chaque côté? Polygones inscrits et polygones circonscrits serraient de plus en plus le cercle de diamètre π . On ne saurait jamais trop louer Archimède, mais l'époque des Lumières finit par trouver un encadrement plus fin de la solution en poussant à l'extrême le procédé. Dans l'exemple ci-dessus, on cherche à voir ce qui se passe quand $x \rightarrow +\infty$. La notion de limite présuppose des fonctions continues (leur graphe peut être tracé sans lever le crayon). Elle en est la clé de voûte.¹ La propriété de continuité est fondamentale. Grâce à elle, on peut parfois n'avoir à recourir qu'à un seul gendarme.

Déterminons la limite en 0 de la fonction f définie par $f(x) = \ln(x)/x$ pour tout réel strictement positif (\ln signifie logarithme naturel ou népérien). Pour avoir une idée de cette limite en 0, traçons le graphe de cette fonction. Voir la nouvelle figure infra. Lorsque x se rapproche de 0, la fonction $f(x)$ semble plonger vers $-\infty$. Démontrons cette constatation en comparant la fonction $f(x)$ et la fonction logarithme $\ln(x)$. Lorsque x est compris entre 0 et 1, on sait que $\ln(x) \leq 0$ et $1/x \geq 1$. Ainsi, pour tout x proche de 0 (en particulier ceux plus petits que 1), on a $(\ln(x)/x) \leq \ln(x)$ en multipliant $1/x \geq 1$ par $\ln(x)$ (l'inégalité change de sens car \ln devient un nombre réel négatif lorsque x , compris entre 0 et 1, tend vers 0). A l'approche de 0, la fonction f est majorée par la fonction logarithme qui a pour limite $-\infty$. La fonction $f(x) = \ln(x)/x$ est bordée par une fonction qui plonge dans l'abysse près de 0. Elle ne peut échapper au même sort... Autrement dit, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$ quand $x \rightarrow 0$. Le gendarme - et le voleur - quittent l'horizon...

¹ N. Verdier, *Le discret et le continu*, op. cit., pp.92-93. Autre ex. simple de calcul de limite par théorème des gendarmes : celui de la fonction $(3 \cos(n) + n)/n+2$. On sait que $-1 \leq \cos(n) \leq 1$. En multipliant par 3 (nombre > 0), on obtient en conservant la précédente inégalité : $-3 \leq 3 \cos(n) \leq 3$. En ajoutant +4, l'expression devient : $1 \leq \cos(n)+4 \leq 7$. En divisant par $(n+2) > 0$, on a $1/(n+2) \leq [\cos(n)+4]/(n+2) \leq 7/(n+2)$. En passant aux limites, on constate : $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1/(n+2) = 0$ quand $n \rightarrow +\infty$ (car $1/\infty$) et $\lim_{n \rightarrow +\infty} 7/(n+2) = 0$ quand $n \rightarrow +\infty$ (car $7/\infty$). On parvient de part et d'autre à la même limite. D'après le théorème des gendarmes, $(3 \cos(n) + n)/n+2 \rightarrow 0$. La limite de cette fonction est bel et bien 0.



On retrouve notre algèbre des inégalités. L'essentiel du travail consiste toujours à obtenir l'inégalité qui permet la comparaison. Le théorème des gendarmes est un théorème d'encadrement des limites. Il en existe des variantes pour les suites et les séries de nombres autant que de fonctions (par ex., pour une suite numérique (u_n) , il faut passer par l'inégalité $v_n \leq u_n \leq w_n$ pour en connaître la limite bien qu'on en ignore la destination). Point n'est besoin de se soucier de l'arrivée. C'est le chemin qui intéresse. Un chemin dans une vallée qui se resserre est plus utile qu'un zigzag en rase campagne !

Jusqu'ici, nous avons affaire à un encadrement strict. Le voleur qu'encadrent les gendarmes n'a pas la possibilité de s'aventurer en dehors du chemin tracé par son escorte musclée. Que se passe-t-il si l'encadrement n'est plus strict mais probable ? Comment les mathématiques des Lumières font-elles face si le voleur pouvait de temps en temps s'écarter de la voie dans laquelle il est censé rester ?

- Avant de songer de le ramener dans le droit chemin, il conviendrait de s'interroger sur la pertinence de votre analogie en droit. Si je ne m'abuse, les gendarmes encadrent un prévenu, mais ils ne sont pas eux-mêmes prévenus. Il y a deux gendarmes et un voleur. Ils ne sont pas de même nature, à moins d'insinuer que pour être gendarme ou policier, il faut être, dit-on, un peu voleur dans l'âme...

- L'analogie ne doit pas être trop prise à la lettre. Ce qui compte dans une analogie sont les rapports, non les termes. Il y a un déplacement de l'attention : dans cette perspective, il faut apprendre à être indifférent à l'objet et favoriser la relation. En l'espèce, il suffit de considérer trois individus dont deux d'entre eux encadrent un troisième afin qu'il ne s'échappe pas à l'improviste... Leur rôle social diffère comme différent des fonctions mathématiques entre elles, certaines étant plus proches que d'autres.

Pour mieux poser les données du problème, on pourrait imaginer un individu qui a commis de nombreux vols avant d'être arrêté. Dans une telle hypothèse, la loi pénale se calquerait sur la *loi des grands nombres*, étant donné que les tentatives de vol de l'intéressé sont légion et qu'elles sont punissables à raison d'un commencement d'exécution. Son avocat répliquera légitimement qu'il s'agit d'une hypothèse imaginaire car le nombre des tentatives ne pourra jamais être très grand. – Comment voulez-vous expliquer à des juristes une notion inconnue en recourant à un exemple aussi irréaliste !

OK. Imaginons plutôt un grand nombre de voleurs. Chacun des intéressés est appréhendé ou pas par la force publique. Soit p le rapport entre le nombre de voleurs arrêtés en étant pris sur le fait ou dénoncés et le nombre de vols rapportés à la police. Comme le nombre de vols est élevé, la probabilité d'avoir commis un vol est assimilable à la proportion p . Les données du départ sont susceptibles d'être interprétées comme des probabilités comme si elles procédaient d'un lancer d'une pièce de monnaie, d'un dé ou d'un tirage de boules de couleurs différentes dans une urne. Il y a beaucoup de lancers ou de tirages. La succession des probabilités est régie par une loi semblable à celle du pile ou face en posant 1 pour pile et 0 pour face. Quelle est loi que suivent ces probabilités ?

(nouvel embarras provenant du même esprit critique)

- Pour parler de la loi des grands nombres, il faut supposer que les lancers de dé ou les tirages de boules soient indépendants. Vos voleurs arrêtés (ou ceux qui ne le sont pas) ne sont pas en fait indépendants. Un voleur noir ou immigré dans un pays développé a plus de chances d'être arrêté, et plus de chances d'être condamné en conséquence. Les gendarmes et les juges ne sont guère moins exempts de préjugés que la grande majorité des gens.

- Vous m'enquiquinez. Votre réflexion est pertinente, quand on voit le mauvais usage des probabilités notamment en droit pénal sur la base de données précisément non indépendantes.¹ Pour le moment, rien ne nous empêche de construire un modèle simple, sans le filtrage des préjugés, quitte ensuite à réajuster les données. Si on considère une population relativement homogène, on peut légitimement utiliser ce modèle en droit. Le fait d'attraper un voleur par hasard peut donc considéré comme une variable aléatoire. Prendre un voleur en flagrant délit est un exemple pas trop biaisé.

Jacques Bernoulli donne la première version de la loi des grands nombres dans son *Ars Conjectandi* (1713). L'époque est plus que jamais sensible aux différences. Considérons un unique lancer de dé à 6 faces. La probabilité d'un *écart significatif* entre la fréquence observée d'une face et sa probabilité théorique de sortie ($1/6$) est faible. Considérons maintenant une suite de lancers de dé. L'écart se révèle d'autant plus faible que le nombre de lancers est grand. L'*écart relatif*, c'est-à-dire le rapport de l'écart au nombre de lancers décroît de plus en plus à mesure que le nombre de lancers augmente.

Revenons sur l'expérience d'attraper ou non un voleur.

L'expérience est aussi hasardeuse que le jet de dé précédent. L'issue possible n'est pas déterminée. Soit p la probabilité de succès des autorités. Elles répètent n fois l'expérience et elles comptent le nombre de succès obtenus. Les succès étant indépendants les uns des autres, ce nombre est assimilable à une somme (le vol constaté est chaque fois un cas différent). Soient S_n une telle somme et ε l'écart entre la fréquence des succès et la probabilité d'un succès. Alors, quel que soit l'écart $\varepsilon > 0$, la probabilité $P(|S_n/n - p| > \varepsilon)$ tend vers 0 quand $n \rightarrow +\infty$. La probabilité P que la fréquence des succès s'écarte de la probabilité d'un succès, de plus d'une quantité fixée, est infime pour n très grand. Le procureur, le juge, peuvent estimer sans se tromper que p est le taux des vols élucidés S_n/n .

L'avocat d'un prévenu fera valoir que la probabilité p que son client soit voleur n'est pas tout à fait exacte. Il est un fait que si on lance un million de fois une pièce de monnaie, la probabilité d'obtenir *exactement* 500 000 pile est extrêmement faible (elle est de l'ordre de $1/1\,000$). On doit s'attendre à avoir *environ* 500 000 pile. Cet *environ* fait toutefois l'objet d'une quantification par la loi des grands nombres par le biais d'une inégalité... Les avocats continueront d'argumenter qu'il s'agit d'une loi *faible*. L'application de la loi pénale ne saurait en dépendre ! Nos défenseurs n'ont pas tort.

La loi des grands nombres est une loi faible car la convergence dont il est question ne porte que sur des probabilités. Le rapport du nombre d'expériences fécondes, S_n (nombre de succès, en l'espèce nombre de voleurs mis hors d'état de nuire), au nombre total d'expériences répétées (n), soit S_n/n , converge en probabilité vers p quand n tend vers l'infini. On ne dit pas que la moyenne observée S_n/n converge vers la moyenne théorique p . On dit seulement que c'est la probabilité P que l'écart entre S_n/n et p soit grand qui diminue. il n'est pas impossible d'obtenir 1 000 fois pile en lançant une pièce de monnaie 1 000 fois, mais cette probabilité est extrêmement faible. Si on fait l'expérience, on constate qu'on obtient environ 50 % de pile et 50 % de face, comme s'il existait une loi d'équilibre naturelle, comme si le chaos était impossible et les catastrophes improbables.

La loi faible des grands nombres est la version de Bernoulli, mais on a montré depuis (au XX^e siècle) que la convergence vers p se fait *presque sûrement*. On parle alors de loi forte des grands nombres. Soit notre pièce de monnaie. La proportion de résultats pile ou face lors des n premiers lancers d'une série potentiellement infinie de lancers converge *presque sûrement* vers 0,5, la moyenne théorique.

Le prévenu n'est pas présumé coupable (il incombe au procureur de prouver le contraire), mais le modèle probabiliste est présumé pertinent pour deviner le résultat possible d'un processus aléatoire.²

La somme, S_n , est une variable aléatoire prenant la valeur x_i avec la probabilité p_i . Une variable x aléatoire signifie que le nombre x d'apparitions sur n tirages est imprévisible a priori. Comme on répète n fois l'expérience de façon indépendante et que l'on compte le nombre S_n de succès obtenus, la variable aléatoire S_n suit, selon Jacques Bernoulli, une *loi binomiale* pour employer un vocabulaire actuel. Veut-on connaître la probabilité d'avoir tel ou tel nombre de succès ? La détermination de cette probabilité relève de l'analyse combinatoire (loi binomiale = loi du binôme).

¹ Leila Schneps, Coralie Colmez, *Les maths au tribunal. Quand les erreurs de calcul font les erreurs judiciaires*, Seuil, Paris, 2015, passim.

² Daniel Teman, « Quand les grands nombres font la loi », in *Hasard et probabilités*, ed. Pole, Paris, 2004 Tangente hors série n°17, p.75 ; Benoît Rittaud, *Hasard et probabilités*, Le Pommier, Paris, 2002, p.121. Sur « La démonstration par Jacques Bernoulli de son théorème », v. Michel Henry, in *Histoires de probabilités et de statistiques*, coord. par E. Barbin & J.-P. Lamarche, Ellipses, Paris, 2004, pp.121-140.

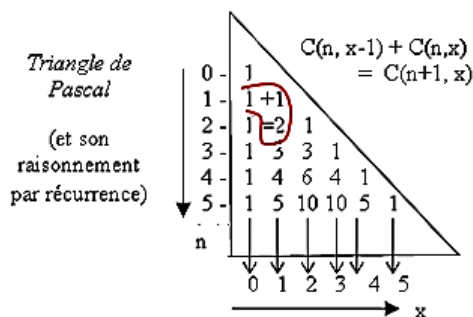
On en revient à Pascal (§ 24-i) et à Newton (§ 25-i) dont l'expertise apparaît nécessaire.

On commence par calculer la probabilité en n lancers pour une pièce de monnaie de tomber sur pile (considéré comme succès) avec une probabilité p . On obtient, au bout du k -ième lancer, la valeur p^k . On calcule au $(k+1)$ -ième lancer la probabilité pour la pièce de monnaie de tomber sur face (considéré comme échec) avec une probabilité $1-p$. On obtient, au n -ième lancer, la valeur $(1-p)^{n-k}$. Puisque les lancers sont indépendants, la probabilité de la conjonction de tous ces résultats est le produit des probabilités individuelles, soit $p^k(1-p)^{n-k}$. Mais il ne s'agit pas seulement de connaître la probabilité d'avoir d'abord k succès puis une série d'échecs. Il importe de connaître la probabilité d'avoir en tout k succès quel que soit l'ordre avec lequel ceux-ci sont arrivés. Pour obtenir la probabilité cherchée, il suffit de multiplier $p^k(1-p)^{n-k}$ par le nombre de manières possibles de ranger les k succès (ici, les pile) parmi les n essais, soit C_n^k . La probabilité d'avoir k succès est $C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$, avec $C_n^k = n! / k!(n-k)!$.¹

Jouons avec une pièce de monnaie parfaite (parfaitement équilibrée). La probabilité d'amener pile à chaque lancer est $\frac{1}{2}$. Il en est de même d'amener face. La variable aléatoire X représente le nombre x d'apparitions de pile sur n tirages. Sa loi de probabilité p_n vaut $C_n^k / 2^n$, où 2^n décrit le nombre de possibilités offert par n tirages (il suffit de dessiner un arbre comportant deux branches, chacune étant divisée en deux nouvelles branches, etc., pour s'en rendre compte) et C_n^k le nombre de combinaisons de x éléments parmi n . Le nombre de cas favorables est égal à C_n^k ou, autrement écrit : $C(n,x)$.

(§24
1/ii)

Pascal a eu l'idée de ranger les valeurs de $C(n,x)$ dans un tableau triangulaire où le nombre n augmente de haut en bas et le nombre x de gauche à droite :



La 1^{ère} colonne est 1, car il n'y a qu'une manière de choisir 0 parmi n . La diagonale est 1, car il n'y a aussi qu'une manière de choisir n éléments parmi n .

Le $(n+1)$ -ième tirage donne soit face soit pile. Si l'on tire face, on a $C(n,x)$ possibilités d'avoir x pile parmi les n tirages précédents indépendamment de leur ordre. Si l'on tire pile, on a $C(n,x-1)$ possibilités d'avoir x fois pile.¹

La somme des deux nombres donne les $C(n+1,x)$ possibilités d'avoir x fois pile après $(n+1)$ tirages.²

Le procédé relève bien du raisonnement par récurrence. On cherche à démontrer combien il y a de cas différents parmi toutes les possibilités d'avoir x pile au bout du $(n+1)$ -ième tirage.

Le $(n+1)$ -ième tirage est soit pile soit face. S'il est pile, pour avoir x piles au $(n+1)$ -ième tirage, il fallait $(x-1)$ piles au n -ième tirage, soit $C(n,x-1)$ possibilités parmi toutes les possibilités. S'il le $(n+1)$ -ième tirage est face, il fallait x piles parmi les n précédents puisque le dernier n'est pas pile, donc $C(n,x)$ en sachant que toutes les autres possibilités ne mènent pas au résultat recherché.

Par conséquent, $C(n,x+1) = C(n,x-1) + C(n,x)$. La formule de construction du triangle de Pascal apparaît.

Considérons par ex. la 5^e ligne.

La somme des nombres (1 5 10 10 5 1) est le double de la somme de la 4^e ligne (32=2x16). Il y a 32 combinaisons possibles pour 5 tirages, ce qui correspond au nombre total de combinaisons possibles d'avoir x fois pile sur n tirages, chaque tirage pouvant donner soit pile, soit face ($2^n = 2^5 = 32$). Il y a $C(5,x)$ combinaisons dans lesquelles apparaissent x pile sur 5 tirages :

$C(5,0) = 1$ combinaison sur 32 qui donne 0 fois pile ; $C(5,1) = 5$ combinaisons sur 32 dont chacune donne 1 fois pile ; $C(5,2) = 10$ combinaisons sur 32 dont chacune donne 2 fois pile ; $C(5,3) = 10$ combinaisons sur 32 dont chacune donne 3 fois pile ; $C(5,4) = 5$ combinaisons sur 32 dont chacune donne 4 fois pile ; $C(5,5) = 1$ combinaison qui donne 0 fois pile.² On retrouve avec les chiffres $C(n,x)$, égal à $C(n,n-x)$ puisque x pile correspond à $C(n,n-x)$ face (symétrie entre n et k dans $C_n^k = n! / k!(n-k)!$).

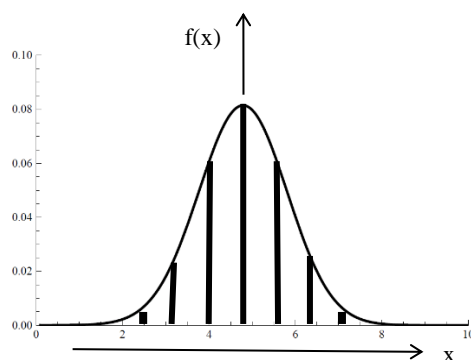
¹ Benoît Rittaud, « La loi binomiale », in Tangente hors série n°17, op. cit., pp.21-22.

² Emile Borel, *Le hasard*, Paris, Félix Alcan, 1920, p.26.

Les $C(n,x)$ sont les coefficients du binôme de Newton. Considérons, en effet, deux réels strictement positifs a et b et une variable aléatoire suivant une loi binomiale $B(n,p)$ avec $p = a/(a+b)$. On sait que $\sum P(X=k) = 1$, la sommation des probabilités de $k=0$ à $k=n$ étant égale par définition à 1. D'après la loi binomiale, la probabilité d'avoir k succès est $C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$, avec $C_n^k = n! / (k!(n-k)!)$ Or $p^k = (a/a+b)^k$ et $(1-p)^{n-k} = (b/a+b)^{n-k}$. Autrement dit, $\sum C_n^k (a/a+b)^k (b/a+b)^{n-k} = 1$. Cette dernière relation peut s'écrire sous la forme : $(a+b)^n = \sum C_n^k a^k b^{n-k}$ pour k allant de 0 à n . On retrouve la formule de Newton pour deux réels strictement positifs. C_n^k est le coefficient de a^k dans le développement du binôme $(1+a)^n$. Il vaut $n! / (k!(n-k)!)$, où $n!$ désigne la factorielle de n , i.e. le produit des n premiers entiers : $n(n-1)(n-2)\dots 3 \times 2 \times 1$.¹

Le triangle de Pascal suffit pour résoudre les problèmes qui portent sur un petit nombre de tirages, mais en est-il de même lorsque le nombre de tirages devient considérable ? Peut-on prolonger le triangle arithmétique jusqu'à la centième ligne (100 tirages), jusqu'à la millièmème ligne (1000 tirages), etc. ? En principe, oui, mais, en pratique, le calcul se révèle laborieux et presque impossible. Il faut avoir le temps et la patience de prolonger le triangle arithmétique. Grâce à l'algèbre et l'analyse mathématique, la formule des grands nombres fournit le moyen d'obtenir plus facilement le résultat.²

Bernoulli avait compris que la loi des grands nombres exprime une condition de l'application au monde réel des probabilités, mais comment se comporte la loi binomiale en cas de grands nombres ? La question est posée en 1733 par Abraham de Moivre qui entend comprendre le comportement à la limite de la loi binomiale. La loi binomiale, définie par les probabilités p_n , est représentable par un diagramme à bâtons. La variable aléatoire est discrète. Lorsque le nombre de tirages n tend vers l'infini, la variable aléatoire devient continue. Le diagramme des probabilités s'approche de la courbe en cloche représentative de la *courbe normale* :



La variable aléatoire X (par ex. la taille des individus dans une population donnée) prend des valeurs continues sur l'axe des abscisses

Si on mesure au hasard la taille d'un individu, on obtient un nombre qui dépend de ce choix : une réalisation particulière x de la variable X

La fonction $f(x)$ représente la loi de distribution des probabilités variant de 0 à 1 d'une variable aléatoire continue. La loi normale est la *densité de probabilités* la plus couramment utilisée

Sur l'axe vertical sont étalonnées les probabilités de 0 à 1 ; sur l'horizontal, la taille des individus. Dans le cas du lancer d'une pièce de monnaie, la variable aléatoire n'est plus la taille des individus mais le nombre x de tirages ayant donné pile. En ordonnée, on lira la probabilité d'amener x fois pile après 1 tirage, 2 tirages, 3 tirages, 4 tirages, ..., n tirages. Lorsque le nombre n augmente, la loi binomiale qui décrit le pourcentage d'apparitions $f(x)$ de pile sur n tirages converge vers la loi normale.

Mais est-on sûr que la loi binomiale converge vers la loi normale quelle que soit la valeur de p ? De Moivre se cantonnait au cas $p = 1/2$ (probabilité d'amener pile ou face à chaque lancer avec une pièce de monnaie parfaite). Que se passe-t-il dans le cas général où p , située entre 0 et 1, diffère de $1/2$?

ii Le théorème central limite

Dans sa *Théorie analytique des probabilités* (1812), Laplace démontre que la répartition des résultats des lancers tend vers une loi normale. La convergence reste vraie.

Laplace démontre plus encore. Il remonte à la source de la loi binomiale : la loi de Bernoulli, suivant laquelle une expérience aléatoire n'a que deux issues possibles (succès ou échec). Cette loi est une composante de la loi binomiale qui rend compte du nombre de succès qu'on obtient en répétant la même expérience plusieurs fois de suite. La loi binomiale est une somme de lois de Bernoulli

¹ B. Rittaud, « La loi binomiale », p.22 ; Aimé Fuchs, « La loi normale, reine des statistiques », in Dossier hors série: *Le hasard*, Pour la science, Paris, avril 1996, p.55.

² Emile Borel, *Le hasard*, p.28.

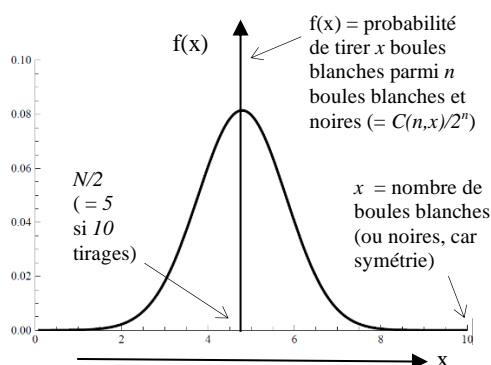
indépendantes. Soit S_n ladite somme. S_n est la somme de n variables aléatoires de Bernoulli, $S_n = X_1 + \dots + X_n$. Laplace s'intéresse au comportement de la moyenne arithmétique, S_n/n , pour de grandes valeurs de n . Cette moyenne constitue une nouvelle variable aléatoire qui tend vers la loi normale.

On ne saurait trop insister sur l'importance d'être en présence de tirages indépendants (connaître X_1 ne permet pas de connaître X_2). Cette exigence est au cœur du théorème de Laplace (dénommé plus tard *Théorème central limite*). Il faut non seulement que les tirages soient aléatoires, il faut non seulement qu'ils soient en grand nombre, il faut aussi qu'il n'y ait entre eux aucune corrélation :

Soit une urne contenant en proportions égales des boules blanches et des boules noires. Si l'on effectue un grand nombre de tirages [aléatoires et indépendants], on a l'intuition qu'on devrait observer à peu près autant de boules blanches que de boules noires, mais on se rend compte aussi qu'on peut jouer de malchance et ne tirer que des boules noires. Le théorème central limite nous donne la fréquence relative de ces cas pathologiques et nous permet de constater qu'elle diminue très vite avec le nombre de tirages.

Ainsi, si l'on effectue 1500 tirages, on a un nombre astronomique de scénarios possibles, 2^{1500} , mais, pour la moitié d'entre eux, la fréquence observée de boules blanches sera comprise entre 49 % et 51 %. Elle s'écartera de moins de 1% de la proportion exacte. La probabilité d'observer entre 49 % et 51 % de boules blanches en 1500 tirages est donc de 0,5, et elle monte à 0,954 si l'on effectue 10 000 tirages, à 0,999 si l'on en effectue 27 000. Dans ce dernier cas, on a moins d'une chance sur mille de se tromper en situant la proportion exacte dans une fourchette de 1% autour de la fréquence observée.¹

La loi que suit la somme des résultats est représentée par la courbe en cloche, la courbe normale.



Soit N un grand nombre de tirages indépendants de boules blanches ou noires. Nous comptons nos boules blanches à la fin : 0 si nous n'en trouvons aucune (tous les tirages ont donné une boule noire) ; N si tous les tirages ont donné une boule blanche et tous les cas intermédiaires.

Au regard de chaque chiffre n compris entre 0 et N , nous portons le nombre de scénarios qui aboutissent à ce total de boules blanches. On obtient la courbe en cloche, symétrique autour la valeur moyenne $N/2$ (si l'urne contenait autant de boules blanches que de boules noires)²

Les tirages sont supposés indépendants. Cette hypothèse implique la remise de la boule après chaque tirage pour éviter que la probabilité de tirer une blanche ou une noire soit affectée par le tirage précédent. Il en irait différemment si les boules sont dans l'urne en nombre infini. Le jeu est apparenté à un jeu de pile ou face avec deux boules blanche et noire avec remise chaque fois de la boule tirée. La composition de l'urne ne change pas : il y a autant de boules blanches que de boules noires (une de chaque dans cette configuration).

La loi normale a été imaginée indépendamment par Gauss. Ce grand savant, au croisement des XVIII^e et XIX^e siècles, en a popularisé l'usage au point que la loi est connue aujourd'hui sous le nom de loi de Gauss, quelquefois de Laplace-Gauss. Gauss effectue en astronomie une série d'observations indépendantes pour déterminer la position d'une étoile donnée. Ces observations sont rarement identiques, mais leur répartition forme une courbe en cloche. Gauss démontre que la fréquence des erreurs peut être représentée par une fonction du type $\exp(-x^2)$ centrée réduite.³

Gauss parle d'erreurs d'observations car ce qu'il observe est au-dessus ou en dessous de la vraie valeur. En faisant beaucoup d'observations, il réduit l'erreur de chacune de ses observations. Dans le cadre du lancer d'une pièce de monnaie, il n'y a pas d'erreur de mesure. Pile ou face n'en sont pas. Ce sont des écarts par rapport à une moyenne. Gauss et Laplace offrent deux approches différentes des phénomènes aléatoires, mais la loi des grands nombres s'applique dans chaque cas !

¹ Ivar Ekeland, *Au hasard. La chance, la science et le monde*, Paris, Seuil, 1991, p.179. Texte allégé.

² *Ibid.*, p.180.

³ D. Teman, « Quand les grands nombres font la loi », pp.76-78 ; A. Fuchs, « La loi normale, reine des statistiques », pp.54-55.

*L'universalité de la courbe normale, omniprésente dans tous les domaines de la science, est une conséquence du théorème central limite.*¹

C'est trop dire, nous susurre un ami à la lecture de cette citation. La loi normale est dans le théorème central limite, mais n'en est pas nécessairement une conséquence. Autant dire que π est généré par des sommes infinies alors qu'il peut être aussi défini par un rapport de longueurs (circonférence du cercle et diamètre). La loi normale n'est pas plus intrinsèque audit théorème que π ne l'est à telle ou telle somme infinie (par ex. $\sum 1/n^2 \rightarrow \pi^2/6$). Le fait que la loi normale soit présente souvent dans la nature est étonnant, mais il ne faut pas oublier que la loi normale est plutôt une bonne approximation.²

Pour que le théorème central limite conserve toute sa portée, une condition autre que le grand nombre et l'indépendance doit être observée : aucune variable aléatoire X_i figurant dans la somme S_n ne doit être disproportionnée. George Polya a démontré au XX^e siècle que les variables aléatoires pouvaient ne pas être de Bernoulli (l'issue peut ne pas être binaire : pile ou face, 1 ou 0, etc.), mais la condition ajoutée par Laplace demeure : l'addition des effets d'une série de causes indépendantes en grand nombre suit la loi normale à condition qu'aucune n'exerce une influence supérieure aux autres.³

L'approche de Polya généralise le théorème de Laplace qui généralise le théorème de De Moivre. Le *théorème central limite* consacre cette évolution.

Techniquement, cette condition signifie que le plus grand des écart-types individuels doit être négligeable devant l'écart-type de la somme.

L'*écart-type* ? Expliquons, car cette notion réapparaîtra en droit.⁴ Soit une variable aléatoire X qui suit une loi de probabilité P . L'expression $P(X=x_i) = p_i$ signifie : la probabilité que X prenne la valeur x_i est égale à p_i . On appelle *espérance* de X la moyenne des x_i pondérés par leurs probabilités p_i respectives. Il s'agit d'une moyenne. Jetons à nouveau une pièce de monnaie. La variable aléatoire X vaut 1 avec la probabilité p et 0 avec une probabilité $1-p$ (1 pour pile, 0 pour face). Après un lancer, l'espérance est : $1 \cdot p + 0 \cdot (1-p) = p$. L'espérance du nombre de pile, au terme de n lancers, est donc de np . Si la pièce est équilibrée, $p=1/2$ et l'espérance $n/2$, ce qui correspond à l'idée d'une moyenne :

*L'espérance est par définition une moyenne. Elle constitue une valeur centrale de la variable aléatoire et représente une première indication sur l'allure générale de la loi de cette variable.*⁵

[L'espérance mathématique d'une loi binomiale, comportant n expériences aléatoires élémentaires identiques et indépendantes s'écrit formellement : $E(X) = np$, où p est la probabilité de succès d'une expérience élémentaire. De façon générale, il convient de multiplier chaque valeur possible x de X par la probabilité $P(x)$ que X prenne cette valeur. On additionne ensuite tous les termes, soit $E(X) = \sum P_i x_i$, avec i allant de 1 à n .]

Ce point de vue est purement idéal. Avec de vrais lancers, le nombre de pile est rarement égal à la valeur théorique $n/2$. On a besoin de considérer un autre outil que l'espérance mathématique : la *variance* qui permet de quantifier les écarts par rapport à la pratique.

Jetons 100 fois une pièce de monnaie. Nous avons n valeurs : x_1, x_2, \dots, x_n . Comme on n'obtient guère que la moyenne $m = 100/2$ (l'espérance n/p), considérons tous les écarts $v_i - m$ pour avoir une idée de l'éparpillement autour de la moyenne.

Tâchons de quantifier cette idée en les sommant : $(x_1 - m) + (x_2 - m) + \dots + (x_n - m)$. Les écarts en plus et en moins s'annulent : $(x_1 - m) + (x_2 - m) + \dots + (x_n - m) = 0$. C'est à nouveau la moyenne. Au lieu d'envisager l'écart algébrique, prenons l'écart absolu, $|x_i - m|$, ou plutôt le carré de l'écart $(x_i - m)^2$ qui caractérise mieux la dispersion des diverses valeurs x_i autour de l'espérance. La *variance* est par définition la somme des carrés des écarts $(x_1 - m)^2 + (x_2 - m)^2 + \dots + (x_n - m)^2$, divisée par la quantité obtenue par n .

¹ I. Ekeland, *Au hasard*, P.180.

² Le terme de *normal* a été appliqué à la loi en cause à la fin du XIX^e siècle. V. Henri Poincaré, mais aussi Karl Pearson et Irving Fisher.

³ D. Teman, « Quand les grands nombres font la loi », p.77; A. Fuchs, « La loi normale, reine des statistiques », pp.56-57.

⁴ Le terme d'*écart-type* est également employé pour la première fois à la fin du XIX^e siècle, mais l'idée est déjà exprimée chez De Moivre.

⁵ Albert Jacquard, *Les probabilités*, Puf, Paris, 2000, p.27.

La variance est une autre forme de moyenne : la moyenne des carrés des écarts à la moyenne (formellement : l'espérance des carrés des écarts à l'espérance, notée $Var(X) = E[X - E(X)]^2$). De façon générale (cas de probabilités différentes à chaque expérience), la variance d'une variable aléatoire est la moyenne des carrés des écarts entre l'espérance et les diverses valeurs que prend cette variable, pondérée par les probabilités attachées à ces valeurs : $V(X) = \sum P_i [x_i - E(x)]^2$.

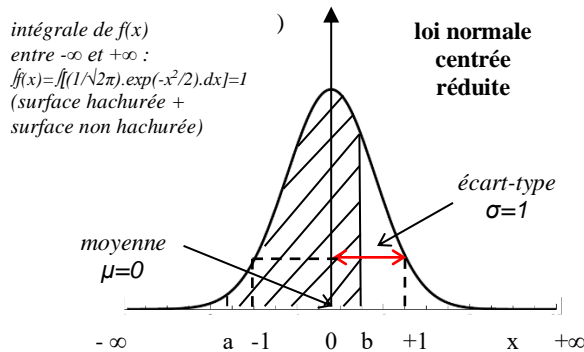
En pratique, l'espérance est la moyenne des carrés moins le carré de la moyenne, $\sum P_i x_i^2 - [E(x)]^2$ en remarquant que, par définition, $\sum P_i x_i = E(x)$. Une distribution avec une même espérance et une variance plus grande apparaîtra comme plus étalée. Soit une distribution de notes à un examen. Cas 1 : moyenne = 10, variance nulle. Tous les élèves sont moyens. Cas 2 : moyenne = 10, variance élevée. Certains candidats sont très forts et d'autres très faibles.

En comparer la variance avec la moyenne, un problème d'unité peut se poser. Par ex., si les valeurs x_i sont des distances mesurées en mètres, leur moyenne (la distance moyenne) le sera également. La variance sera mesurée en mètre carré. Pour éliminer cette particularité, on retient l'écart-type, σ , la racine carrée de la variance, qui a la même dimension que celle de la variable aléatoire X . Si X désigne un gain (par ex. en euros aujourd'hui), alors l'écart-type $\sigma(X)$, est aussi une somme d'argent. Alors que la variance reflète un écart à la moyenne, l'écart-type indique, de façon précise, un écart-typique par rapport à celle-ci. $\sigma(X)$ est un écart-typique par rapport l'espérance mathématique.¹

Jetons un dé. La variable aléatoire est le résultat du lancer. Ses valeurs possibles sont les entiers de 1 à 6. Chacune a une probabilité de réalisation égale à 1/6. La valeur moyenne des valeurs possibles est : $1/6 \times 1 + 1/6 \times 2 + 1/6 \times 3 + 1/6 \times 4 + 1/6 \times 5 + 1/6 \times 6 = 3,5$. Nous savons que la variance $V(X)$ est la moyenne quadratique des écarts à la moyenne et que $V(X) = \sigma^2$. L'écart-type σ est : $\sqrt{1/6 \times (1 - 3,5)^2 + 1/6 \times (2 - 3,5)^2 + 1/6 \times (3 - 3,5)^2 + 1/6 \times (4 - 3,5)^2 + 1/6 \times (5 - 3,5)^2 + 1/6 \times (6 - 3,5)^2} = 1,71$.

La variance et l'écart-type d'une variable aléatoire X sont visualisables sur la courbe en cloche lorsque X prend des valeurs continues lors de prélèvements faits au hasard (cf. l'ex. de la taille des individus).

Pour tout intervalle fermé $[a, b]$, la probabilité pour que X prenne une valeur dans cet intervalle est égale à l'intégrale définie entre les bornes a et b , soit $\int_a^b f(x) dx$. On commence par multiplier chaque valeur possible x de X par la probabilité $P(x)$ que X prenne cette valeur. On additionne ensuite tous les termes $xP(x)$, i.e. $xf(x)$. L'espérance mathématique $E(X)$ est l'aire totale située sous le graphe de la fonction $f(x)$ lorsque x évolue entre a et b . L'aire est délimitée par la verticale d'abscisse a , la verticale d'abscisse b et l'axe des x (cf. la zone hachurée). L'écart-type $\sigma(X)$ est lisible sur l'axe des x :



La courbe en cloche est une fonction du type $f(x) = (1/\sigma\sqrt{2\pi}) \cdot \exp(-1/2)(x-\mu/\sigma)^2$. Le coefficient $1/\sigma\sqrt{2\pi}$ est un coefficient de normalisation qui assure que l'intégrale entre $-\infty$ et $+\infty$ de la densité de probabilité $f(x)$, sous le graphe f , $= 1$ (la propriété de *normalisation* garantit que la probabilité qui traduit la certitude est égale à 1)

Sur la figure, la densité de probabilité a pour expression : $f(x) = (1/\sqrt{2\pi}) \cdot \exp(-x^2/2)$. Par commodité, l'espérance mathématique $E(X)$ est nulle ($\mu=0$); la variable X est dite *centrée*. La variance est égale à 1 ; elle est dite *réduite*.²

L'écart-type est la racine carrée de la variance, $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$. La variance $V(X) = 1$ emporte un $\sigma = 1$

Le fait que l'on ne s'occupe plus que d'une variable centrée réduite ne met nullement en cause la portée du théorème central limite. La question demeure toujours de savoir quelle est la limite d'une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi. On retranche de la variable, construite à partir d'autres variables, la valeur de son espérance μ pour obtenir une variable aléatoire nulle (*centrée*) qu'on divise par son écart-type σ pour obtenir une variable aléatoire de variance 1 (*réduite*).

¹ Laurent Vivier, « De la moyenne à l'espérance », in *Hasard et probabilités*, op. cit., pp.19-20 ; « Un paramètre de dispersion : la variance », pp.32-33 ; Albert Jacquard, *Les probabilités*, Puf, Paris, 2000, pp.25-27 ; B. Rittaud, *Hasard et probabilités*, op. cit., pp.58-61.

² L'équation de cette courbe se ramène, par un choix convenable des unités, à la forme $y = \exp(-x^2)$. (Emile Borel, *Le jeu, la chance et les théories scientifiques modernes*, Paris, Gallimard, 1941, p.123)

Remplacer une variable aléatoire X par $(X - \mu)/\sigma$ ne change rien du point de vue qualitatif mais permet de mieux cerner ce qui se passe quand le nombre de tirages devient très grand.

Au vu de ces définitions et de leur représentation, on comprend mieux la condition ultime posée par Laplace : le plus grand des écart-types individuels doit être négligeable devant l'écart-type de la somme, car s'il arrive qu'un seul écart soit comparable à la somme de tous les autres (par ex. la fluctuation d'une valeur en bourse par rapport à l'ensemble des autres fluctuations), alors la loi des écarts (des fluctuations des valeurs en bourse) ne tend plus vers une loi normale. L'écart disproportionné impose sa loi. On comprend que le théorème central limite puisse intéresser le droit.

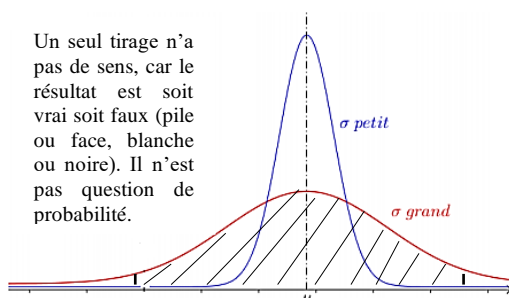
iii L'intervalle de confiance

La loi des grands nombres revient à comparer une fréquence observée et une probabilité théorique. Le théorème central limite reprend cette mise en relation en comparant une moyenne empirique et une moyenne théorique. Le théorème assure que la distribution (ou répartition de la grandeur considérée) est normale de moyenne μ et d'écart-type σ si le nombre d'observations n est très grand.

Une valeur estimée peut inspirer plus ou moins confiance. Peut-on se fier les yeux fermés à la moyenne empirique qui a été observée, S_n/n ? Alors que la moyenne théorique ne pose pas a priori de problème, la précision du paramètre S_n/n peut être mise en question. Le théorème central limite demeure instructif à cet égard. Procédons à nouveau un grand nombre de tirages (boules ou autres). Le théorème nous enseigne que la précision augmente comme la racine carrée du nombre de tirages :

[On suppose toujours que la proportion exacte de boules blanches dans l'urne est de $\frac{1}{2}$. La proportion exacte joue le rôle de la moyenne théorique.]

Pour un niveau de confiance donné, 1/1 000 par ex. (on veut avoir moins d'une chance sur 1000 de se tromper), la fréquence exacte se situera dans un intervalle de 0,33 % de part et d'autre de 50 % au bout de cent tirages [50 % est la vraie valeur], 0,033 % au bout de 10 000 tirages, et 0,0033 au bout d'un million de tirages. L'intervalle est réduit d'un facteur 10 chaque fois que le nombre de tirages est multiplié par 100, le niveau de confiance restant fixé à 1/ 1 000. Les tirages aberrants continuent d'exister. Il est toujours possible de tirer consécutivement cent, dix mille ou un million de blanches, mais leur proportion diminue. On peut interpréter ce résultat en disant que des erreurs aléatoires indépendantes et de moyenne nulle ont tendance à se compenser si on les ajoute.¹



En pratique, l'événement a 5% de chances de se produire lorsque l'écart-type dépasse 2σ . Un seul σ n'a pas d'intérêt car il est trop proche de la moyenne : il y a trop de possibilités de l'autre côté. À partir de 3σ (incluant 99,7% des données), on peut savoir si le phénomène est dû au hasard ou non. À 5σ , le hasard ne joue plus guère.

Avec un niveau de confiance de 3σ , l'erreur tolérée est représentée par la probabilité de l'ordre de $3/1000$ d'être en dehors de l'intervalle de confiance (surface non hachurée). (l'intervalle contient très vraisemblablement la vraie valeur).²

Plus le nombre de tirages est élevé, plus l'intervalle se rétrécit et plus, en conséquence, la précision augmente. Si on veut obtenir un intervalle plus fin avec le même degré de confiance, il faut augmenter le nombre n de tirages. Pour diviser par 10 la longueur de l'intervalle de confiance, il faut multiplier n par $10^2=100$. Autrement dit, pour augmenter la précision de l'intervalle de confiance, il faut multiplier le nombre de tirages par n^2 . Une estimation est 10 fois plus précise avec 100 fois plus d'observations.

Jetons un dé. Avec la loi des grands nombres, les pile et les face finissent par s'équilibrer. Avec le théorème central limite, l'excédent des pile sur les face (ou l'inverse) est pareillement de l'ordre de \sqrt{N} , où N désigne un grand nombre de lancers. Sur 100 lancers, l'excédent sera de l'ordre de $\sqrt{100} = 10$, soit une proportion de $1/10$. Sur 10 000 lancers, l'excédent sera de $\sqrt{10\ 000} = 100$, soit une proportion de $1/100$. La proportion de pile en excédent sur les face diminue avec de plus en plus de lancers.

¹ I. Ekeland, *Au hasard*, p.180.

²<https://guydoyen.fr/2012/02/09/comment-peut-on-savoir-si-une-decouverte-est-vraiment-significative/>;

https://fr.wikipedia.org/wiki/écart_type; <http://cedric.cnam.fr/~saporta/Rappels%20sur%20les%20intervalles%20de%20confiance.pdf>

Le hasard n'exclut ni la loi des grands nombres ni ce mécanisme de cause à effet (\uparrow nombre d'observations $\Rightarrow \uparrow$ précision de l'estimation).

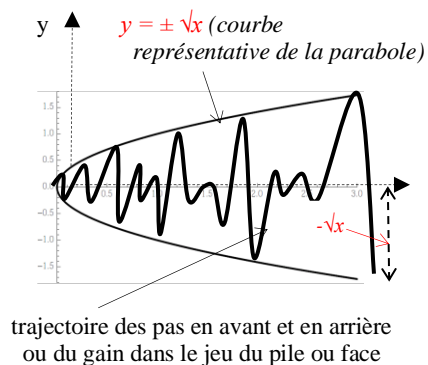
En présence d'une suite (X_n) de variables aléatoires, la loi des grands nombres dispose que la moyenne empirique S_n/n converge vers la moyenne théorique $m = E(X)$, mais quid des fluctuations autour de m ? La taille des fluctuations est précisée par le théorème central limite selon lequel $\sqrt{n}(S_n/n - m) \rightarrow \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ avec $n \rightarrow \infty$. L'expression $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ désigne une loi normale centrée de variance σ^2 . Ce théorème peut s'écrire sous la forme d'une loi normale centrée réduite $(S_n/n - m)/(\sigma\sqrt{n}) \rightarrow \mathcal{N}(0, 1)$ par changement de variable (on remplace la variable aléatoire X par la variable aléatoire $(X - m)/\sigma$). Les écarts autour de la moyenne théorique au bout de n expériences sont de l'ordre de $\sigma\sqrt{n}$.

Pourquoi $\sigma\sqrt{n}$, et non plus simplement \sqrt{n} comme supra? L'expérience de probabilité permet de trouver l'écart-type. Il suffit d'accepter un écart-type, σ , égal à 1 pour retrouver \sqrt{n} puisque $1 \cdot \sqrt{n} = \sqrt{n}$.

Considérez un homme saoul et titubant. Il avance ou recule, avec la même probabilité, d'un pas de longueur 1. Après n pas, notre ivrogne s'est déplacé d'une distance S_n égale à la somme des n pas. En moyenne, cette distance est nulle, mais on montre que, pour de grandes valeurs de n , elle se répartit autour de la valeur moyenne selon une loi normale, d'écart-type \sqrt{n} . Lorsque n est très grand, la longueur d'un pas, soit 1, est négligeable devant l'écart-type, \sqrt{n} , de la somme.¹

La somme des pas en avant ou en arrière comme des pile et des face tend vers la moyenne égale à 0, mais il ne faut pas confondre la moyenne des gains et le gain absolu. Si deux joueurs jouent longtemps à pile ou face, la perte de l'un constitue le gain de l'autre (jeu à somme nulle), mais le gain de chaque joueur passera alternativement par des hauts et des bas. La moyenne a beau être nulle, la moyenne de la distance à la moyenne fait apparaître un écart grandissant qui oscille entre $+\sqrt{n}$ et $-\sqrt{n}$.

Le gain est borné entre ces deux valeurs qui s'écartent en parabole sur un grand nombre de jeux :



La parabole est une fonction du 2nd degré d'équation : $y = ax^2 + bx + c$, où a , b et c sont des constantes réelles ($a \neq 0$). En faisant $a=1$, $b=0$ et $c=0$, l'équation devient plus simple : $y = x^2$, ou $x = y^2$ en invertissant x et y (on tourne le système d'axes de 90°), soit $y = \pm \sqrt{x}$.

Il y a un mouvement qui éloigne du point de départ la trajectoire des pas ou du gain qui croît avec le temps comme \sqrt{x} (ex. : 10 au bout de 100 pas ou tirages). En intégrant la fonction qui vaut +1 ou -1 à chaque pas (le résultat du tirage est représenté sous forme de fonction), on obtient une somme qui tend vers 0 (ce qui est au-dessus compense ce qui est en dessous : \sum des pas en avant et en arrière ; \sum des pile et des faces)

Soit le jeu de pile ou face dont le résultat est soit 1 ou -1. Quand le nombre de jets N est très grand, la moyenne, i.e. le rapport entre la somme et le nombre de jets, soit S_N/N , tend vers 0, car la moyenne à chaque jet est nulle, ce qui explique que la moyenne à long terme tend vers 0. La somme S_N/N est très petite devant N . Son ordre de grandeur est de l'ordre de \sqrt{n} .

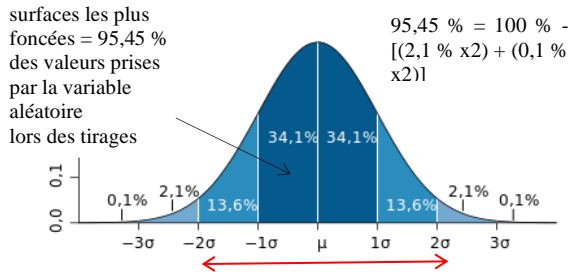
La trajectoire est bornée en moyenne, mais le gain réel peut dépasser $|\sqrt{n}|$ avec une probabilité infiniment faible. L'encadrement n'est pas certain ; on ne peut encadrer que la moyenne. Il s'agit d'un ordre de grandeur, non de bornes strictes. Faute d'être exacte, la moyenne fait l'objet d'une estimation entre deux nombres, mais l'in vraisemblable n'est pas exclu. Il n'est pas impossible de sortir du cadre.²

L'encadrement probable figure au nombre des propriétés de la loi normale qui apparaît dans le théorème central limite et dans la nature. L'estimation trouvée est une estimation par intervalle, mais cet intervalle n'est plus proprement dit un intervalle de confiance. La loi est connue. Chaque réalisation fait l'objet d'une probabilité précise. Il n'y a aucun doute à son sujet. La zone où tombe tel % d'observations ressemble à un intervalle de confiance mais il n'y a point lieu de parler de confiance.

¹ A. Fuchs, « La loi normale, reine des statistiques », p.56. L'ivrogne titube en avant ou en arrière. On aurait pu imaginer qu'il titube de droite à gauche. On serait toujours en une dimension. Sa marche aléatoire s'effectuerait dans un plan s'il titubait en avant et en arrière ET à droite à et à gauche. S'il sautait en outre de temps en temps, on aurait une marche aléatoire dans un espace à trois dimensions (un volume).

² Il n'y a qu'à l'infini que tous les écarts sont intégrés dedans. La moyenne fait place à une équation exacte. On ne peut plus sortir du cadre.

Soit à nouveau un grand nombre, N , de tirages indépendants (prélèvement de boules ou de cailloux dans une urne). Dans le cadre de la théorie, l'écart-type, qui mesure les résultats qui s'écartent de la moyenne, n'est plus un intervalle de confiance proprement dit puisque la probabilité que les résultats soient dans l'intervalle $[\mu-r\sigma, \mu+r\sigma]$ est précise : par exemple, 95,45 % des mesures de la variable aléatoire (nombre de boules obtenues sur n boules blanches) sont regroupées autour de la moyenne μ (égale ici à $N/2$) dans l'intervalle $[\mu-2\sigma, \mu+2\sigma]$; 68,27 % dans l'intervalle $[\mu-\sigma, \mu+\sigma]$.



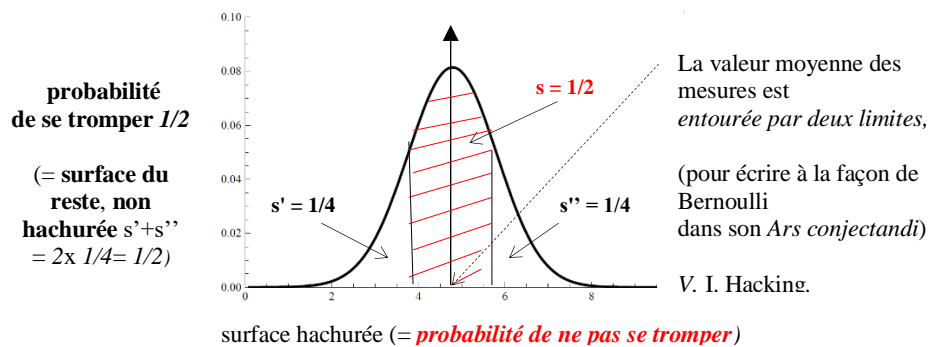
Les diverses surfaces colorées représentent les probabilités des intervalles $[\mu-r\sigma, \mu+r\sigma]$. La surface totale sous la courbe égale 1 (proba=1).

Comme il a été indiqué sur une figure précédente, la valeur moyenne μ a environ 95 % de chances de se trouver entre $\mu-2\sigma$ et $\mu+2\sigma$. Il y a 95 fois sur 100 que la valeur relevée se trouve dans cet intervalle (sur 100 mesures, 95 sont en dedans ; 5 en dehors)

Dans le domaine pur des probabilités, la question de la confiance ne se pose pas. Dès que je connais la loi, je calcule la probabilité de chaque réalisation sans état d'âme (celle par exemple d'avoir 3 Pile et 2 Face). **En revanche, dès qu'on fait appel à l'expérience, l'évaluation des quantités n'est pas assurée. Avoir confiance ne va plus de soi.**

Je sais que je peux me tromper et décide que la probabilité de me tromper δ soit inférieure à telle probabilité que suggère l'expérience. A ce niveau de confiance, je calcule une grandeur en me donnant la certitude que cette grandeur à laquelle j'ajoute ou retranche une erreur donnée ε se trouve dans l'intervalle de confiance, $[m-\varepsilon, m+\varepsilon]$. La probabilité que cette grandeur soit située dans cet intervalle dépasse toute probabilité donnée $1-\delta$ (Dans son *Ars conjectandi*, Bernoulli avait postulé $1-\delta = 0,999$, soit $\delta=0,1\%$ ou $1/1000$ comme dans notre exemple supra d'un tirage de x boules blanches.)¹

Si mon niveau de confiance change, l'intervalle de confiance en subit les conséquences. Au lieu d'accepter de nous tromper une fois sur 1000, assumons le risque de nous tromper une fois sur deux. Les bornes entre lesquelles je place ma confiance vont se rapprocher. L'écart-type calculé à partir de la fonction que décrit la loi normale ne sera plus de 33 % pour un tirage, mais beaucoup moindre. Supposons qu'il soit de 10 %. On est plus proche de la moyenne. La prédiction d'avoir un risque de se tromper de moins de 50 % est osée, mais nous avons plus de chances de nous tromper même si, en multipliant les tirages, la précision du résultat augmente ! Le théorème central limite a ses limites...



surface hachurée (= **probabilité de ne pas se tromper**)

Un intervalle implique une comparaison. Une moyenne indique une tendance centrale. On est en droit de parler d'intervalle de confiance si on compare une moyenne empirique et une moyenne théorique ou deux moyennes empiriques. Dans chaque cas, on est confronté à une estimation. Dans chaque cas, on peut faire usage du théorème central limite en approchant la loi d'une somme par une loi normale. On infère la loi à partir de la population (toutes les données relatives à la taille ou au poids d'individus appartenant à une même classe d'âge) ou d'un échantillon qui représente la population.

Soit un échantillon de taille n pris au hasard. On cherche à estimer la moyenne m et l'écart-type σ d'une population de taille N ou infinie. On connaît la moyenne observée \bar{x} et l'écart-type observé σ_x de

¹ Ian Hacking, *L'émergence de la probabilité*, Paris, Seuil, 2002, p.213.

l'échantillon. La question de la précision du résultat est vitale. L'estimation ponctuelle est peu réaliste et n'indique pas le risque de se tromper. Une fourchette d'estimation fournit une meilleure évaluation.

Le résultat ne sera pas exact mais suivi d'une erreur probable (ex. : $1,75m \pm 0,02$) dont on s'efforce de déterminer une limite de sorte que la valeur véritable soit comprise à l'intérieur d'un intervalle. Le risque d'erreur est fixé à l'avance. L'intervalle qui englobe la mesure est un intervalle de confiance.

Nous sommes entrés en statistique. Il est généralement impossible de recenser toute la population. Il convient d'extrapoler une information à partir d'un échantillon. La moyenne de l'échantillon est une statistique. L'observation d'un autre échantillon conduira vraisemblablement à une autre valeur statistique. La réflexion des statisticiens procure des outils pour prendre en compte cette variabilité.

La statistique est le fruit d'une démarche inférentielle. Sensible à cette approche plus que tout autre, la pensée anglaise du XVII^e siècle est au premier rang des études statistiques et de leur transformation en science. La méthode inductive de Bacon trouve en ce domaine un terrain privilégié :

C'est en Angleterre de la fin du XVII^e siècle que naissent des techniques liées à la collecte de données et surtout à leur traitement et à leur extrapolation, rassemblées sous la dénomination d'arithmétique politique, ancêtre de la statistique mathématique.

Les calculs de cette "arithmétique" s'appuient sur la théorie naissante des probabilités et en alimentent en retour la réflexion (Huygens et l'espérance de vie, Jacques Bernoulli et sa loi des grands nombres).

A la suite des travaux fondateurs John Graunt sur les bulletins de décès et les naissances (il découvre la proportion plus grande de naissances masculines : 107 pour 100 naissances féminines), William Petty systématise les études démographiques sur les naissances, décès, nombres de personnes par famille. Ce sont des travaux d'experts, liés à des préoccupations pratiques. Graunt fut commerçant ; Petty, médecin, mathématicien, parlementaire, fonctionnaire et homme d'affaire. En 1696, l'astronome anglais Edmond Halley établit une table de mortalité en se basant sur cinq ans d'état civil de la ville de Breslau (Pologne).

En Hollande, le calcul des probabilités est appliqué non seulement à l'espérance de vie mais aussi à l'estimation du prix d'achat d'une rente à l'aide de tables de mortalité (Jan De Witt en 1671).

En France, Antoine Deparcieux rectifie en 1746 la table établie par Halley. En 1806, Duvillard publie également une table de mortalité. Leurs tables seront utilisées par les assureurs pour le calcul des rentes viagères et des primes d'assurance en cas de décès.¹

Nos statisticiens avant la lettre entendaient connaître les caractéristiques d'une variable aléatoire liée à une population mère (la longévité des habitants d'une ville). Ils s'efforçaient de les estimer à l'aide d'un échantillon, mais la taille de celui-ci, n , est beaucoup plus petite que celle de la population mère, N . En pratique, si $n > 20$, une approximation basée sur la loi normale est généralement satisfaisante, mais n'est-ce pas contradictoire avec le théorème central limite qui n'est vrai qu'à la limite (à l'infini) ?

Le théorème central limite énonce qu'à la limite une somme de variables aléatoires S_n/n tend vers une loi normale, $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$. Ce résultat nécessite paradoxalement une démonstration qui mette à jour une majoration ; autrement, la somme ne pourrait tendre vers une moyenne égale à 0. Le théorème central limite n'en demeure pas moins un résultat limite, mais un amendement au théorème a pu montrer pourquoi l'approximation d'une telle somme par une loi normale marche pour n petit ($n \ll N$).

Si donc je veux connaître la taille des hommes avec un échantillon, le théorème central permet de dire quelle erreur je fais. Ce théorème donne une estimation très précise de l'erreur que je commets en approchant la moyenne de la population par la moyenne de l'échantillon. Comparant deux moyennes empiriques, je suis amené à parler en termes d'intervalle de confiance en me référant à la loi normale.

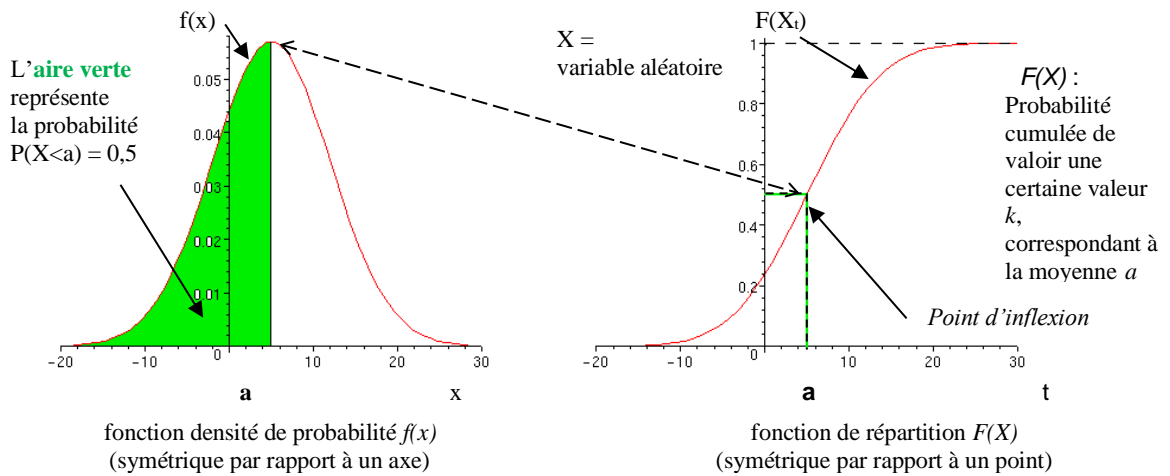
La moyenne globale approchée a environ 95 % de chances de se trouver entre $\mu - 2\sigma$ et $\mu + 2\sigma$. Sur 100 mesures, 95 entrent dans l'intervalle de confiance ; 5 en sortent. Sur 100 000, les chiffres seraient respectivement de 95 000 et de 5 000. Entre $\mu - \sigma$ et $\mu + \sigma$, la confiance en l'estimation tombe à 68 %.

¹ *Journ@l Electronique d'Histoire des Probabilités et de la Statistique* : <http://www.jehps.net>. John Graunt fut marchand de drap et échevin dans la Cité de Londres. William Petty écrivit un *Political Arithmetic*, publié peu après sa mort. V. *Encyclopaedia Universalis* en ligne.

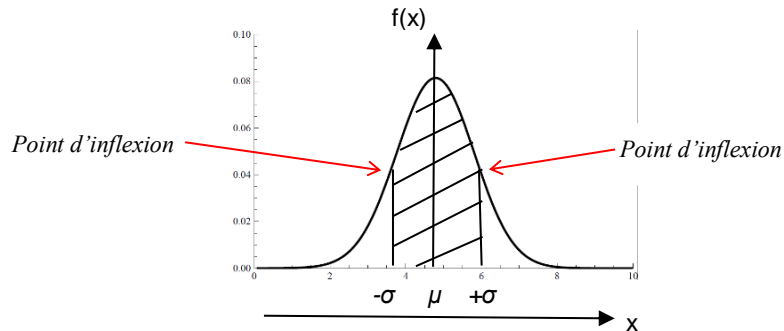
La courbe en cloche représente toujours la densité de probabilité $f(x) = 1/\sqrt{2\pi} \exp(-1/2((x-\mu)/\sigma)^2)$. La présence d'une exponentielle fait craindre le pire, mais, avec une loi en $\exp-x^2$, si x augmente, $-x^2 \rightarrow -\infty$ et $e^{-\infty}=0$. La densité de probabilité n'est pas seulement décroissante. Elle tend très rapidement vers 0 entre $-\infty$ et $+\infty$ quand on s'éloigne de la moyenne de part et d'autre (symétrie de la loi normale). Grâce à une telle vitesse de convergence, l'intégrale de la fonction est définie et l'aire bornée. (Sur le flanc gauche de la cloche, e^{900} est très négligeable ; l'intégrale s'arrête quelque part.)

La primitive de la fonction de densité de probabilité représente les probabilités cumulées au cours du temps. Cette fonction, appelée *fonction de répartition*, possède un point d'inflexion en un point de la courbe correspondant sur une autre courbe à la moitié de l'aire totale qui en dessous. La fonction de répartition présente un frein qui correspond au point de passage sur la densité de probabilité entre une fonction globalement croissante et une fonction globalement décroissante. La fonction de répartition croît de plus en plus puis de moins en moins jusqu'à devenir asymptote près de $F(X) = 1$ (mesure de l'aire sous la courbe représentative de $f(x)$ d'une variable aléatoire X centrée et réduite).

Voici le tracé des fonctions de distribution et de répartition de la loi normale de paramètre $(\mu, \sigma) = (0, 1)$:



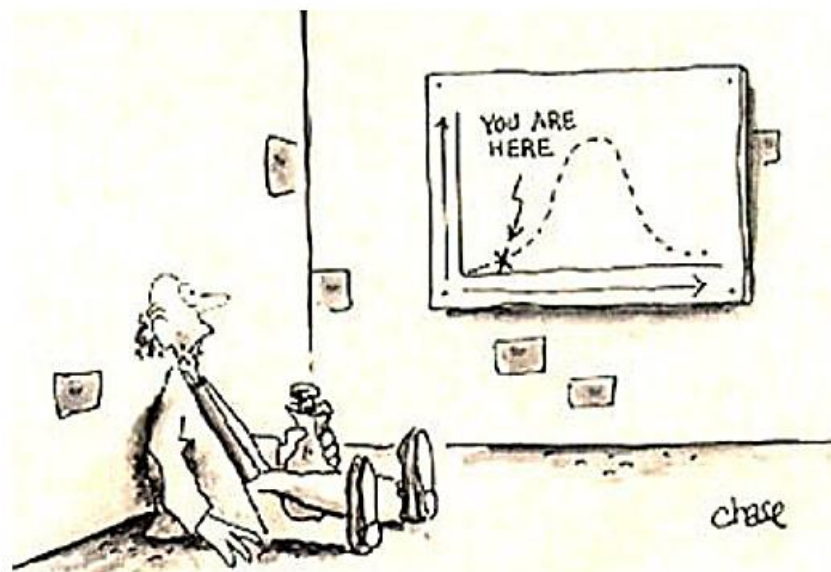
La fonction de densité de probabilité possède elle-même deux points d'inflexion en $\mu - \sigma$ et $\mu + \sigma$. Ce sont les points où la dérivée seconde f'' s'annule et change de signe. Les deux points se situent approximativement aux trois cinquièmes de la hauteur totale.



La loi normale appartient à la famille des fonctions exponentielles, mais sa conduite est rassurante. La convergence d'une somme de variables aléatoires lorsque leur nombre tend vers l'infini n'intéresse a priori que le mathématicien des Lumières. Aucun phénomène ne peut croître indéfiniment. Sa croissance est limitée par le milieu dans lequel il se trouve, mais le théorème central limite s'insinue aussi en statistique.

La loi normale a connu un succès sans égal depuis l'évaluation par Laplace de la population française au XVIII^e siècle.¹ Tant que la somme consiste à superposer des causes nombreuses plus ou moins indépendantes, la loi représente une large variété de phénomènes naturels de manière raisonnablement efficace. Pour le praticien, il suffit de s'arrêter un peu avant la limite en remplaçant l'infini (∞) par un grand nombre A qui est mesurable. La somme d'un grand nombre d'erreurs n'est plus gaussienne (normale) mais presque. L'approximation est plus commode que la loi exacte.

Le constitutionnalisme des Lumières n'échappe pas à l'emprise du théorème central limite. Soucieux de limiter le pouvoir en politique, il cherche à l'encadrer de façon non seulement stricte mais probable. Nous dévoilerons divers aspects de cette emprise dans le §37 intitulé : *L'encadrement en moyenne*. Pour apprécier ce dernier, d'autres notions sont toutefois nécessaires à entrevoir comme celles de resserrement des écarts, de majoration et d'encadrement. Le §36, autonome en lui-même, y prépare.



2

¹ Pierre-Simon Laplace, *Théorie analytique des probabilités*, Paris, 1812, Liv. II, p.391 et suiv. La méthode de Laplace consistait à choisir judicieusement des paroisses réparties sur le territoire français afin d'obtenir le résultat d'ensemble le plus significatif possible. Dans cet ouvrage, Laplace observe l'évolution de la population pendant une période de dix ans et aborde les limites statistiques de ses résultats.

² <https://morioh.com/a/109b8706ddd1/the-powers-of-normal-distribution>

Annexe I

Arithmétique modulaire et raisonnement par récurrence

Si le lecteur a en tête l'**arithmétique modulaire** présentée au §27-6/c), il observera que cette approche est plus facile que la simple **méthode de récurrence**.

Par ex. : $4^n - 1 \equiv 0 \pmod{3}$, i.e.4 congru (ou équivalent) à 0 modulo 3, étant rappelé que *modulo* signifie que **3** est le diviseur qui sert de module. En clair : $4^n - 1$ est divisible par 3 (ou est **un multiple de 3**). Pour $n=0$, on a $4^0 - 1 = 1 - 1 = 0 = 0 \times 3$, donc divisible par 0. La propriété reste vraie pour $4^{n+1} - 1 \equiv 0 \pmod{3}$, puisque pour $n = 1$, on a $4^1 - 1 = 1 - 1 = 0$, idem. Pour $n = 2$, on a : $4^2 - 1 = 16 - 1 = 15 = 5 \times 3$, donc toujours divisible par 3. Pour $n = 3$, on a $4^3 - 1 = 64 - 1 = 63 = 21 \times 3$. Etc. Si la propriété est vraie pour n et si elle est vraie pour $n+1$, elle est toujours vraie.

A noter que cette propriété de divisibilité de $4^n - 1$ est connue sous le nom de **petit théorème de Fermat** : *Si p est un nombre entier et a un entier naturel premier avec p [ici, 3], alors $a^{p-1} - 1 \equiv 0 \pmod{p}$. Autrement dit, a est un entier non divisible par p alors que $a^{p-1} - 1$ est un multiple de p . En effet : $4^{n-1} - 1 = (4 - 1)(4^{n-1} + 4^{n-2} + \dots + 1)$ donc 4^{n-1} est divisible par 3 donc $4^n - 1 \equiv 0 \pmod{3}$, ou $4^n \equiv 1 \pmod{3}$. On voit la puissance de l'outil « congruence » instantanément. Fermat énonce ce théorème en 1640. Leibniz, Euler et Gauss en donneront des démonstrations.¹*



"I love repeating offences." 2

¹ https://fr.wikipedia.org/wiki/Petit_théorème_de_Fermat

² <https://www.google.com/search?q=cartoon+reasoning+by+recurrence>

§ 36.- LA PORTE ETROITE DU DROIT

a) Une marche en avant balisée

- i Le resserrement des écarts*
- ii Le processus de délibération*

b) Un affranchissement de tous sous majoration

- i Lois et mœurs*
- ii Lois somptuaires et divorce*
- iii Le théorème des accroissements finis*

c) La garantie des encadrements

o

§ 37.- L'ENCADREMENT EN MOYENNE

1/ Des individus distincts et indépendants

- i Les institutions sont des moyennes*
- ii Quid de la moyenne en présence de deux Chambres ?*
- iii Un calcul des anticipations*
- iv Une courbe en cloche qui sonne mal*

2/ Loi des grands nombres et contrat social

a) Locke

b) Rousseau

- i Volonté générale et jeu de hasard*
- ii « Normaliser » ce qui est général*

c) Condorcet

- i Améliorer la qualité des décisions*
- ii Relever le niveau d'éducation*

3/ Des individus distincts et interdépendants

a) La faction, fauteur de trouble

- i L'indépendance individuelle en question*
- ii Des incendiaires furieux sur le terrain*

b) La genèse et la multiplication des factions

- i Un modèle pressenti de formation des factions*
- ii Un premier modèle de neutralisation des factions*

c) La solution madisonienne

- i Encourager la multiplication des factions et préconiser leur chevauchement*
- ii Semer le trouble parmi les trublions à la manière d'une aiguille de Buffon*

Annexes I et II, 169

o

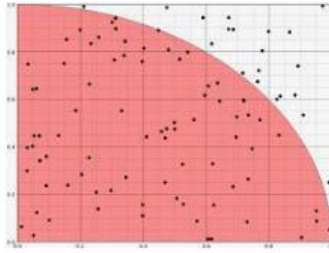
La méthode de Monte-Carlo (version simplifiée)¹

Cette méthode est proche de l'expérience des aiguilles de Buffon.

Soit un point M de coordonnées (x, y) , où $0 < x < 1$ et $0 < y < 1$. On tire aléatoirement les valeurs de x et y entre 0 et 1 suivant une loi uniforme. Le point M appartient au disque de centre $(0,0)$ de rayon $R=1$ si et seulement si $x^2 + y^2 \leq 1$.

La probabilité que le point M appartienne au disque est $\pi/4$, puisque le quart de disque est de surface $\sigma = \pi R^2/4 = \pi/4$, et le carré qui le contient est de surface $S = R^2 = 1$: si la loi de probabilité du tirage de point est uniforme, la probabilité de tomber dans le quart de disque vaut $\sigma/S = \pi/4$.

En faisant le rapport du nombre de points dans le disque au nombre de tirages, on obtient une approximation du nombre $\pi/4$ si le nombre de tirages est grand.



Exemple de détermination de la superficie d'un lac :

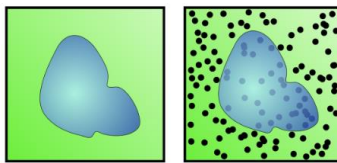
Soit une zone rectangulaire ou carrée dont les côtés sont de longueur connue. Au sein de cette aire se trouve un lac dont la superficie est inconnue. Grâce aux mesures des côtés de la zone, on connaît l'aire du rectangle.

Pour trouver l'aire du lac, on demande à une armée de tirer X coups de canon de manière aléatoire sur cette zone. On compte le nombre N de boulets qui sont restés sur le terrain. On détermine le nombre de boulets qui sont tombés dans le lac : $X - N$. Il suffit alors d'établir un rapport entre les valeurs :

$$\frac{\text{superficie}_{\text{terrain}}}{\text{superficie}_{\text{lac}}} = \frac{X}{X - N}$$

$$\Rightarrow \text{superficie}_{\text{lac}} = \frac{(X - N)}{X} \times \text{superficie}_{\text{terrain}}$$

Si le terrain fait $1\,000\text{ m}^2$, que l'armée tire 500 boulets et que 100 projectiles sont tombés dans le lac, alors une estimation de la superficie du plan d'eau est de : $1000 \times 100 \div 500 = 200$.



La qualité de l'estimation s'améliore (lentement) en augmentant le nombre de tirs et en s'assurant que les artilleurs ne visent pas toujours le même endroit mais couvrent bien la zone, de manière uniforme.. Un générateur aléatoire biaisé est comme un canon qui tire toujours au même endroit : les informations qu'il apporte sont réduites.

Définition d'un générateur aléatoire :

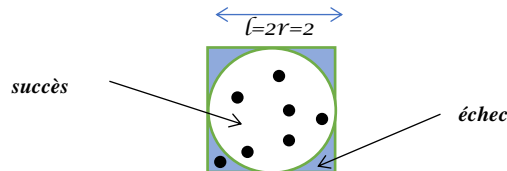
Un générateur de nombres aléatoires (random number generator, en anglais), est un dispositif capable de produire une séquence de nombres pour lesquels, **il n'existe aucun lien déterministe (connu) entre un nombre et ses prédécesseurs**, de façon que cette séquence puisse être appelée « suite de nombres aléatoires ».

Des méthodes pour obtenir des nombres aléatoires existent depuis très longtemps et sont utilisées dans les jeux de hasard : dés, roulette, tirage au sort, mélange des cartes, etc. Elles peuvent toutefois souffrir (et souffrent généralement) de biais. Actuellement, les meilleures méthodes, **censées produire des suites véritablement aléatoires**, sont des méthodes physiques qui profitent du caractère aléatoire des phénomènes quantiques.

¹ https://fr.wikipedia.org/wiki/Méthode_de_Monte-Carlo.; https://fr.wikipedia.org/wiki/Générateur_de_nombres_aléatoires

La méthode de Monte-Carlo (présentation plus affinée)¹

Cette méthode est pratiquée pratiquement dans tous les domaines fondamentaux de la physique, de l'ingénierie, de la finance et de l'économie. Elle a permis dans le cadre du projet Manhattan pendant la Seconde guerre mondiale, de simuler les réactions en chaîne d'une bombe atomique au lieu de faire des essais avec de vraies bombes... Son idée est d'interpréter une intégrale comme une espérance par rapport à une certaine probabilité et de calculer l'espérance comme une moyenne suivant la loi des grands nombres. L'estimation de π est un exemple **en partant du même pari que Buffon de faire intervenir la géométrie dans le calcul des probabilités**. Soit donc un carré à l'intérieur duquel est inscrit un disque de rayon $r = 1$:



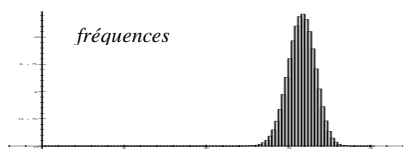
On tire au hasard des points (x,y) dans le carré. L'abscisse x et l'ordonnée y suivent une loi uniforme, s allant de -1 à $+1$, ainsi que y . La loi uniforme signifie que l'on ne tire jamais au même endroit. Les variables x et y sont indépendants. Comme tous les points sont tirés uniformément, la probabilité p de toucher le disque devrait être proche du rapport des deux aires : la surface du disque/la surface du carré, i.e. : $\iint dx dy$ (intégrale double avec $x^2+y^2 \leq 1$) / $\iint dx dy$ (intégrale double avec $-1 \leq x,y \leq 1$) = $\pi/4$, étant rappelé que $r=1$ et que $\pi.r^2/2.2 = \pi/4$, soit $\pi = 4p$. θ (probabilité de tomber dans le disque).

Le nombre de points dans le disque constitue une somme Z_n qui suit une loi binomiale, car les variables x et y basculent, de façon binaire, entre 0 (point hors du disque) et 1 (point dans le disque). Vu le grand nombre n de points, la loi binomiale est approximée par la loi des grands nombres qui suggère de construire une estimation θ à partir de la moyenne empirique, $\theta^* = Z_n/n$ (la fréquence du nombre de points de tomber dans le disque). $\theta^* = Z_n/n \rightarrow \theta$ avec $n \rightarrow \infty$, **sachant que la moyenne empirique θ^* , qui n'est autre que la moyenne arithmétique des tirages, est une variable aléatoire** (si on refaisait un autre tirage, on obtiendrait une valeur qui pourrait être différente ; **sa valeur varie à chaque simulation** de n points (x,y)).

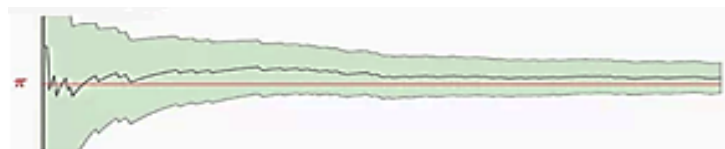
On estime donc π par $4.\theta^*$. La question qui se pose est de savoir si je peux donner un sens à cette estimation. Autrement dit : peut-on en contrôler la qualité ? comment peut-on décrire les fluctuations de l'estimateur $4.\theta^*$? L'idée, que l'on ne développera pas ici, est de recourir à « l'inégalité de Bienaymé-Chebyshev » qui donne un moyen d'évaluer la distance entre les valeurs prises par une variable aléatoire X et son espérance (la valeur que l'on s'attend à trouver en moyenne).

Cette inégalité donne une majoration de la probabilité que l'écart soit grand. **On borne la probabilité de l'écart entre l'estimateur (de la valeur de π) et la valeur trouvée (ou tirée)** pour s'assurer que la variable aléatoire prendra, avec une grande probabilité, une valeur relativement proche de son espérance. Il faut que la probabilité soit plus petite que quelque chose. Comme nous avons par ailleurs une autre inégalité, $\theta(1-\theta) \leq 1$ (car θ est une probabilité comprise entre 0 et 1), i.e. une autre borne, nous obtenons une façon d'encadrer l'erreur en fonction de n , le nombre de tirage de points. **π fait l'objet d'un encadrement** entre une probabilité que π soit plus grand que telle quantité (qui comprend l'estimateur θ^* , ou θ chapeau que l'on ne peut écrire en word) et une probabilité qu'il soit petit que telle autre (qui comprend également l'estimateur θ^*).

On a donc **un intervalle de confiance** qui nous dit telle valeur attribuée à ce qui est estimé, θ^* . On peut tracer l'histogramme (ou répartition des fréquences) de cet estimateur dont la forme se rapproche de la courbe en cloche. Si l'on veut, avec cette méthode, une meilleure précision, i.e. un intervalle d'estimation plus étroit, il faut un estimateur d'écart-type plus étroit, ce que l'on peut obtenir en augmentant le nombre de simulations ou tirages (jeter des points au hasard). L'intervalle se rétrécit autour de π comme $1/\sqrt{n}$, de façon assez lente **conformément au théorème central limite**. On peut accorder une bonne confiance à l'estimateur avec un grand nombre de simulations. Une précision acceptable exige cette condition.



histogramme de l'estimateur



approximation de π dépendant du nombre de tirages n (ex. :10 points, ...210, etc.)

Une telle condition explique les difficultés d'application de la méthode de Monte Carlo. Dans le domaine du droit constitutionnel où le nombre de « points » jetés au hasard serait, par exemple, le jeu des factions dans l'histoire, les difficultés seraient encore plus grandes. Le nombre d'occurrences est beaucoup moins élevé et la « mesure » beaucoup moins évidente. Néanmoins, l'approche en esprit est la même, perceptible chez Buffon comme ... chez Madison.

¹ J.-P. Chazottes, *Méthode de Monte-Carlo*, Ecole polytechnique, site déjà cité ; <https://math.unice.fr/~diener/Stat05/COURS2.pdf>

Quatrième leçon des Lumières : La self-regulating machine

§ 38. De l'auto-engendrement à l'autorégulation. 171.- § 39. La machine de Watt constitutionnelle, 171

§ 38. – DE L'AUTO-ENGENDREMENT A L'AUTOREGULATION

1/ L'auto-engendrement impose sa loi

- i La fin de l'errance*
- ii Un engendrement qui doit rester dans les clous*
- iii Des signaux d'arrêt*
- iv Que conclure ?*

2/ L'auto-engendrement et ses écarts

- i L'ordre du jour*
- ii Comment converger avec deux Chambres ?*
- iii Interpellation (comme au Parlement)*
- iv monocaméralisme v. bicaméralisme*
- v L'emballlement d'une « série »*
- vi L'analyse de Malthus*

--

§ 39. - LA MACHINE DE WATT CONSTITUTIONNELLE

1/ Le modèle de l'horloge

- a) Foliot, ressort spiral, balancier, 172**
- b) Rousseau, de parents citoyens- horlogers**

2/ L'horloge en retard d'un temps

- a) le modèle n'a plus la cote**
- b) Les pré-machines de Watt, 175**

3/ La machine de Watt

a) Le régulateur à boules, 178

Annexe I, 180

b) Le double effet

- i Petite leçon de mécanique, 180*
- ii La pensée équivalente en droit*

c) Le volant d'inertie

- i Moment d'inertie, stockage et restitution d'énergie, 183*
- ii Le règlement de la « pression » en droit*

4/ La question de la réalimentation

- a) Le « carburant », 185**
- b) L'impulsion-rébellion, 185**

Annexes II, III, IV, V et VI, 186

o

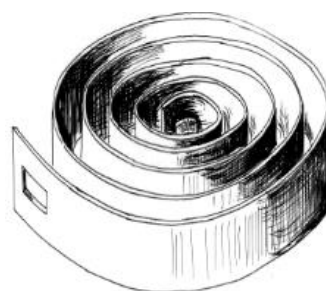
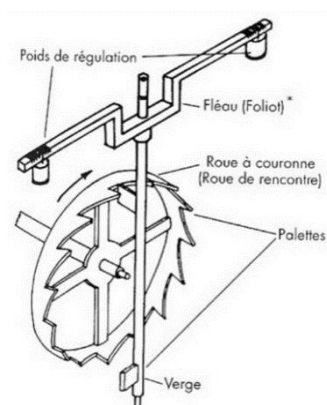
1/ Le modèle de l'horloge

a) foliot, ressort spiral, balancier

Comme une série qui ne serait pas purement aléatoire, la loi de nature lie et relie, mais aussi régule. Les machines que construit l'homme imitent la nature selon le savoir disponible. Ce qui caractérise une machine est sa capacité d'être autonome. *Nous voyons*, écrit Descartes, *des horloges, des fontaines artificielles, des moulins, et autres semblables machines, qui n'étaient faites que par les hommes, ne laissent pas d'avoir la force de se mouvoir elles-mêmes en plusieurs façons.*¹ Toutes semblent disposer d'un organe régulateur.

L'horloge en dispose plus que d'autres, pendant une grande partie de l'époque moderne. Dès l'horloge mécanique à poids, les horloges régulent la force motrice qui les fait agir. *C'est une sorte de robinet qui s'ouvre et se ferme périodiquement pour fournir à chaque ouverture une petite quantité d'énergie, toujours la même, qui agit sur les rouages et fait avancer les aiguilles.* La chute d'un poids est freinée par un mécanisme d'échappement placé sous le contrôle du *foliot*.² L'échappement à foliot est placé entre la source d'énergie (le « moteur », le poids en l'espèce) et l'organe réglant la mesure du temps (la suite des roues dentées).

Le foliot est l'invention majeure des XIV et XV^e siècles. Pour ralentir le mouvement des roues dentées, le foliot oscille de gauche à droite et bloque le poids à intervalles réguliers pendant un temps très bref, mais sa précision laisse à désirer. Au XVI^e siècle, un ressort bandé remplace le poids comme force motrice. Cette substitution, qui permet la miniaturisation des horloges et leur transport, requiert un nouvel organe régulateur, la *fusée*. *La forme conique de la fusée permet de réguler la force transmise par le ressort. Au début de la détente, la force du ressort est plus forte qu'en fin de détente. Cette perte de puissance doit être compensée afin que la force transmise au rouage soit constante.*³



ressort spiral

Le foliot se compose d'une barre verticale appelée verge possédant deux palettes. Le fléau est perpendiculaire à la verge qu'il met en mouvement. Il est composé de deux régules (poids). Le mouvement de la verge, les deux palettes entrent en contact avec la roue de rencontre, chacune leur tour, dans un sens puis dans l'autre, laissant échapper (d'où le nom d'échappement) les dents de cette roue de rencontre une par une. Le ressort spiral, habituellement enfermé dans son boîtier, sert de force motrice quand il est remonté.⁴

Poids, ressort, accompagné le premier du foliot comme organe régulateur, et de la fusée pour le second. Au XVII^e siècle, le pendule apparaît comme nouveau système de régulation de la force motrice des horloges. L'invention du pendule (et son usage comme échappement)

améliore de façon exceptionnelle la précision des montres et des horloges. A la différence des autres progrès de l'horlogerie, il s'agit d'une invention d'abord théorique et parfaitement localisable. Galilée publie la théorie du pendule dans son Discorsi e dimotrazioni matematiche intorno a due

¹ Descartes, *L'homme* [1664, inclus dans *Le Monde*], Paris, Le Seuil, 1996, chap. 18, p.119.

² Encyclopédie Larousse en ligne, « Horlogerie », <http://www.larousse.fr/encyclopedie/divers/horlogerie/58714>, p.1.

³ Aurélie Désannaux, « Mesure du temps et histoire des techniques : les débuts de l'horlogerie en Normandie (XIV^e-XVI^e siècles) », Association des Annales de Normandie, 20101, 60^e année, p.7.

⁴ *Ibid.*, p.5.

nuove scienze. En 1641, son fils Vincenzo et l'horloger Vivian dessinent une horloge à poids utilisant un pendule comme régulateur. Elle ne sera jamais construite. La première horloge dotée d'un pendule est réalisée par Camerini à Rome en 1655. En 1656, à la Haye, Christian Huygens, qui travaille indépendamment de Galilée, conçoit une horloge à pendule. Il la décrit en 1657 et un horloger, Coster, la construit la même année.¹

Galilée avait découvert qu'il existe dans la nature un mécanisme quasi-isochrone. Huygens invente le moyen d'adapter le pendule simple aux horloges en créant la pendule. Cette innovation majeure fait elle-même l'objet d'amendements. La principale innovation viendra d'Angleterre où une première horloge utilisant à la fois un ressort et un balancier est fabriquée par William Clément.

Ce n'est plus un instrument approximatif ; elle indique l'heure à la minute près et on peut se fier au temps qu'elle énonce. Ni le soleil ni la clepsydre ne sont plus alors capables de la régler. Mais le foliot, qu'elle utilise encore, n'est plus lui-même assez précis pour assurer la transmission régulière aux rouages de la période du pendule et de l'énergie du ressort. Le problème est réglé un peu plus tard, en 1715, par l'intervention d'un nouvel échappement. Un horloger anglais, George Graham, met en effet au point un mécanisme capable d'entretenir les oscillations du pendule des horloges sans en perturber la période. Il le nomme ancre, selon la forme de la pièce principale.²

Les montres ne sont pas oubliées. La fusée, qui règle la force du ressort, s'essouffle aussi à être précise. Une montre pouvait aisément afficher un retard journalier d'une heure. En 1675, Huygens invente le ressort spiral, l'organe réellement régulateur de la montre. Au ressort spiral, qui sert de force motrice, est donc adjoint un ressort non moins spiral, de plus petite taille, servant de force régulatrice.³

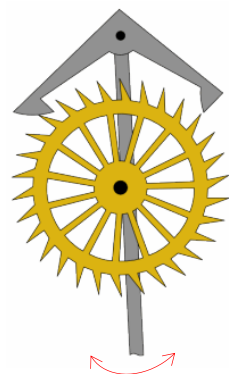


fig.a

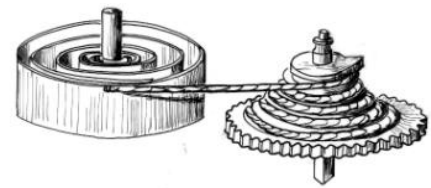


fig.b

ressort spiral avec fusée

(Fig. a : échappement à ancre, utilisé dans les horloges à pendule) Le principe du mécanisme à ancre est de ne faire agir la force motrice que par impulsion lorsque le régulateur passe au voisinage de sa position d'équilibre. Pendant le reste de sa course, le balancier oscille presque librement. Sa course en devient beaucoup plus régulière.

(Fig. b : Le ressort spiral, servant de force motrice, accompagné de la fusée qui égalise la force du dispositif pendant toute la détente du ressort) La forme de la fusée apparaît conique, mais il s'agit en réalité d'une hyperbole.⁴

Telle est l'histoire du progrès de l'horlogerie à l'âge des Lumières. Cette histoire est indissociable de l'échappement qui canalise le flux d'énergie que délivre le poids qui tombe ou le ressort bandé. Il s'agit, répétons-le d'une sorte de robinet qui règle l'alternance des entrées et des sorties d'un tel flux. L'échappement à foliot, le pendule, le pendule-ressort, l'ancre, assurent cette fonction pour l'horloge. Le ressort réglant joue ce rôle pour la montre.

Le régulateur est la pièce maîtresse de toute horloge [et de toute montre] puisque la précision de l'instrument en dépend. C'est lui qui impose le rythme, qui décompose le temps en intervalles égaux à partir desquels se fera la mesure du temps. L'obtention de cette égalité du rythme, quelles que soient les conditions extérieures (température, force du ressort, résistance des rouages, mouvement global de l'instrument, etc.) a constitué la grande entreprise de l'horlogerie.⁵

¹ Jacques Attali, *Histoires du temps*, Paris, Fayard, 1982, pp.156-157. V. aussi : Michèle Porte, *Mémoire de la science*, E.N.S. de Fontenay, Séminaire 1985-1986, vol.1, p.179.

² J. Attali, *Histoires du temps*, p.179.

³ *Huygens et le ressort spiral*, Musée du temps, ville de Besançon,

⁴http://fr.wikipedia.org/wiki/échappement_%28horlogerie%29;http://www.besancon.fr/gallery_files/site_1/346/353/782/46658/huygens_et_1_e_ressort_spiral_fiche_professeur.pdf, fig.8.

⁵ Encyclopédie Larousse en ligne, « Horlogerie », p.2.

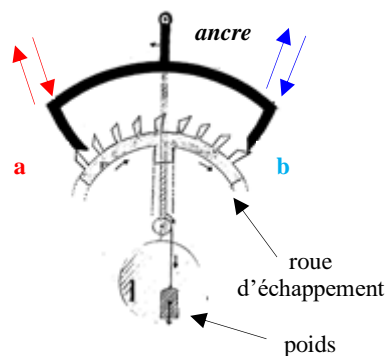
Du point de vue de la mesure du temps, l'horloge et la montre ont fait leur preuve bien que le cristal de quartz continue aujourd'hui d'augmenter la précision. Du point de vue de l'autorégulation, demeurent toutefois certaines limites qui empêchent que le modèle de l'horloge soit parfaitement transposable au plan politique.

Dans le même paragraphe 28-v du présent travail, il a été rappelé que la régulation de l'horloge accorde une large place aux frottements, sachant que ces derniers sont à la fois le problème et la solution de l'autorégulation. Il y a de bons et de mauvais frottements, les bons jouant un rôle de modération, les mauvais entraînant la nécessité d'entretenir à leur encontre le mouvement.

Les bons frottements ont pour effet, dans une horloge à poids, de bloquer l'accélération créée par la chute du poids. Ces frottements ralentissent à dessein le mouvement, à l'instar de ceux qui, dans un véhicule, s'interposent entre les freins et les roues ou à l'instar de l'air qui offre une résistance à la chute des corps par exemple. Passer de l'horloge à poids à celle à pendule ne modifie pas cet objectif : l'échappement à foliot transforme un mouvement continu en un mouvement discontinu en bloquant alternativement la descente du poids ; l'échappement à ancre transforme un mouvement périodique en un mouvement discontinu, puisque à chaque battement du pendule (une demi-oscillation), le balancier libère d'un cran une roue dentée, également entraînée par la chute du poids.

Grâce à ces dispositifs, l'horloge parvient mécaniquement à faire tic-tac à intervalles de temps égaux.

Les mauvais frottements sont ceux qui sont la cause d'irrégularités du mouvement. L'usure, la perte d'énergie et de rendement, l'échauffement en sont des exemples habituels. Dans le cas de l'horloge, les oscillations du pendule ont tendance à s'amortir ; elles finissent par s'arrêter. Pour lutter contre, l'échappement assume une double fonction : celle de brider la force motrice du poids (ou du ressort) et celle de la relâcher non moins régulièrement. Ces deux fonctions correspondent aux phases 1 et 2 :



Phase 1 : la palette **a** est repoussée vers le haut par la roue à échappement pendant que la palette **b** glisse vers le bas sur une autre dent. L'ancre subit une première impulsion.

Phase 2 : la palette **b** arrive au contact avec la dent qui suit. Celle-ci subit une nouvelle impulsion pendant que la palette **a** glisse sur la dent qui l'avait précédemment poussée.

L'ancre subit donc deux impulsions par période, qui sont communiquées au pendule pour entretenir son mouvement.¹

Grâce aux *phases 1 et 2*, l'échappement régule et assure l'apport d'énergie nécessaire à l'entretien du régulateur (l'aller et retour du pendule).

Pour améliorer la maintenance, les Lumières eurent également l'idée de séparer l'ancre du pendule pour créer l'ancre libre qui évita au balancier de subir le frottement passif de l'ancre. Elles eurent l'idée de corriger également les variations de la température extérieure qui allonge ou accourcissent la tige de métal soutenant la lentille du pendule. De telles variations modifient la durée et l'amplitude des oscillations et le mouvement des aiguilles.²

En dépit de ces avancées, l'entretien du mouvement régulateur continue de souffrir certains défauts. Si bons soient-ils d'un certain côté, les frottements ne suffisent pas pour résoudre tous les problèmes. Il a été rappelé également au paragraphe 28-v que les horlogers n'hésitent pas à ajouter à leur système des éléments d'inertie.

¹ Minne Amélie & Yvoz Clémence, *Les horloges à balancier*, <http://jmpodvin2000.free.fr/Seconde/calendrier/horlogebalancier.html>, p.5.

² *Les origines de l'horloge mécanique*, <http://comtoise.caudine.pagesperso-orange.fr/lancetre.htm>, p.2. Par *lentille* du pendule, il faut entendre la masse métallique de forme ronde, suspendue à l'extrémité inférieure du balancier.

Les premières horloges à poids recourent à un pendule de torsion sous la forme d'un fil torsadé (*fig.a*). Quand le foliot tourne autour du fil vertical, celui-ci réagit à la torsion en exerçant des forces de rappel équivalente à un couple dont le *moment* par rapport à l'axe est proportionnel à l'angle de torsion.¹ Un tel moment est qualifié *moment de rappel*. L'horlogerie s'est efforcée à améliorer une telle inertie en ralentissant le mouvement de torsion. Le foliot s'est vu doté d'un système de contrepoids de part et d'autre d'un balancier où coulisent des masses réglables. Le *moment d'inertie* change si l'on modifie l'emplacement des masses mobiles à l'instar de celui d'une danseuse pivotant sur elle-même (lorsqu'elle a les bras écartés, son moment d'inertie est plus grand parce qu'une partie de sa masse est située plus loin de l'axe de rotation; son moment d'inertie diminue lorsqu'elle les rapproche). (*fig.b*)



fig.a

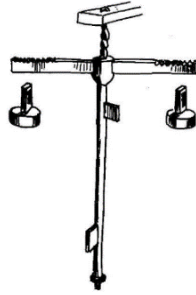


fig.

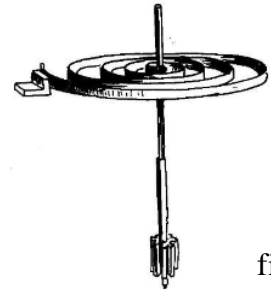


fig.c

Comme pour la torsion d'un fil, le ressort spiral réglant table également sur un moment de rappel. avec son volant d'inertie (*fig. c*). Enfin, dans une horloge à balancier, les horlogers veillent à ce que celui-ci dispose d'une masse suffisante pour assurer assez d'inertie. C'est dire si les dispositifs inertiels jouent un rôle non négligeable dans la conception générale du système, mais leur intervention doit rester modeste pour ne pas entraver le mouvement d'ensemble. Ce qui compte est d'entendre battre chaque seconde et sonner l'heure !

b) Rousseau, de parents citoyens- horlogers

2/ L'horloge en retard d'un temps

- a) le modèle n'a plus la cote
- b) Les pré-machines de Watt

Voyons de plus près le dossier en rappelant quelques inventions qui ont abouti à la machine de Watt.

En 1679, Denis Papin invente en France la marmite à pression et la soupape de sécurité. La marmite à pression est une marmite sur laquelle est solidement fixé un couvercle. Grâce à ce procédé, l'eau qui bout dans la marmite atteint une température supérieure à celle d'un récipient ouvert. La cuisson (par ex. des aliments) en est accélérée, mais la marmite risque d'exploser tant la vapeur d'eau exerce de force sur les parois de l'enceinte chauffée. Papin a l'idée complémentaire de percer dans le couvercle une ouverture maintenue fermée par un bouchon lestée d'un poids. C'est l'idée de notre « cocotte-minute » d'aujourd'hui avec sa soupape qui laisse échapper l'excès de vapeur avant de retomber et de refermer la marmite. C'est une première.

C'est en effet un automatisme. La marmite, munie de sa soupape, libère la vapeur quand c'est nécessaire sans intervention humaine, c'est-à-dire « automatiquement ». C'est, d'autre part, un exemple de système à sécurité intrinsèque.²

L'ébullition de l'eau donne des idées.

Elle donne également à Papin celle d'utiliser un récipient cylindrique fermé par un piston. L'eau qui bout produit de la vapeur qui pousse le piston vers le haut. *En écartant la source de chaleur, la vapeur se refroidit, se condense, et le piston revient à son point de départ, poussé vers le bas par la pression*

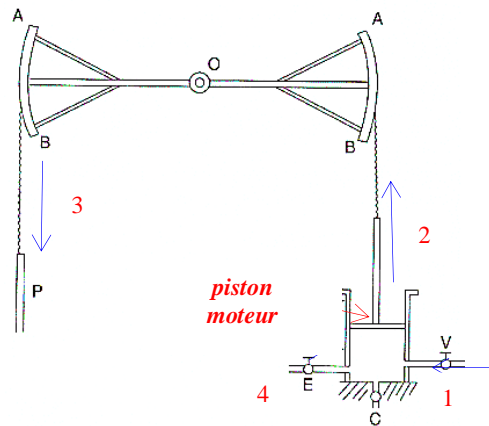
¹ Le moment du couple résistant, résultant de la torsion, a pour expression $-C\theta$, où C représente la constante dite de torsion et θ l'angle dont le fil a été tourné avant de s'immobiliser. La constante de torsion dépend de la longueur et du diamètre du fil ainsi que de la nature du matériau constituant le fil (l'inertie du fil n'est pas quasiment nulle comme celle d'un simple fil de laine).

² J. Baudet, *De l'outil à la machine. Histoire des techniques jusqu'en 1800*, op. cit., p.291.

atmosphérique. Un cycle naît en approchant à nouveau le foyer de la base du cylindre : l'eau s'évapore à nouveau, le piston se resoulève, et tout recommence. Le cycle se décompose en un temps qui consomme de la chaleur (pendant lequel le piston monte) et un temps « moteur » (le piston en redescendant, peut entraîner une charge et donc produire un mouvement utile).

Papin convertira cette nouvelle idée en machine qu'il décrira en 1707 dans une brochure intitulée: *Nouvelle manière pour lever l'eau par la force du feu*. Papin utilisera cette machine pour actionner une pompe. Savery améliorera en Angleterre le procédé pour l'exploitation des mines de charbon. L'urgence d'inventivité s'impose dans ce pays, menacé de déforestation. Comment continuer l'exhaure des mines, c'est-à-dire leur dénoyage ? ¹ En 1712, Newcomen prolonge l'innovation en reprenant l'idée du cylindre-piston de Papin.

La machine de Newcomen



Au centre du piston moteur disposé verticalement, est fixé un axe vertical relié à une extrémité d'un balancier. A l'autre extrémité, est suspendu un autre axe, P, relié à un autre piston, celui de la pompe. En oscillant autour du centre O du balancier, les pistons subissent un déplacement vertical alternatif. Un jeu de robinets permet d'admettre alternativement de la vapeur et de l'eau froide dans le cylindre sous le piston moteur.

L'arrivée de vapeur (robinet V) pousse le piston moteur vers le haut (et le piston de la pompe descend), puis l'arrivée d'eau (E) fait se condenser la vapeur, et la pression atmosphérique repousse le piston moteur vers le bas (tandis que le piston de la pompe monte).²

La machine de Newcomen fut une réussite technique. Vers 1750, l'Angleterre en comptait plus de 500. La machine fut à son tour améliorée par James Watt qui inventa le condensateur pour régler le problème de l'injection de l'eau froide qui refroidit le cylindre, et donc la vapeur qui s'y introduit avant de produire son effet moteur (la remontée du piston). Il y aurait donc perte de chaleur, c'est-à-dire de charbon, si une chambre distincte du cylindre n'était pas construite pour que la condensation de la vapeur se fasse sous l'action d'une arrivée d'eau froide. Avec le condensateur, l'ensemble cylindre-piston reste à la température de la vapeur précédente avant une nouvelle admission de vapeur d'eau.

Injectée dans un cylindre constamment chaud, la vapeur y développe toute sa puissance ; puis, évacuée dans un condensateur toujours froid, elle établit rapidement le vide. Ce dispositif, apparemment simple, transformait la machine atmosphérique [la machine dont la pression atmosphérique repousse le piston moteur vers le bas] en véritable machine à vapeur.³

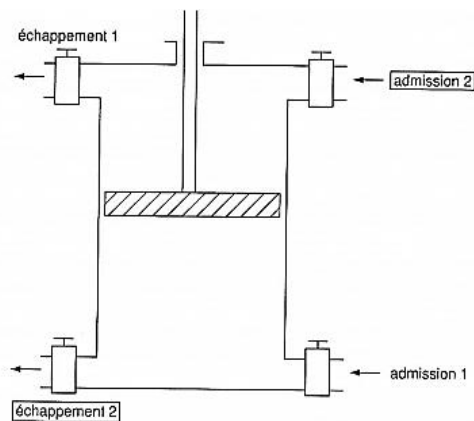
C'est encore beaucoup dire, bien que James Watt dépose un brevet pour cette invention en 1769 et s'associe avec le propriétaire d'une manufacture pour l'exploiter. *Telle qu'elle se présente, la machine à condensateur est encore à simple effet, une seule poussée motrice s'exerçant, de bas en haut, à l'intérieur du cylindre. En 1783, Watt construit la machine à double effet : le cylindre reçoit la vapeur, alternativement, par le bas et par le haut. Travaillé sur l'une puis l'autre face, le piston subit un va-et-vient interrompu, communiqué au balancier.⁴*

¹ *Ibid.*, pp.291-292.

² *Ibid.*, pp.242-243.

³ *Ibid.*, p.242 et 281 ; Jacques Mérand, « James Watt », *Encyclopædia Universalis*, <http://www.universalis.fr/encyclopedie/james-watt>. p.2

⁴ J. Mérand, « James Watt », p.3.

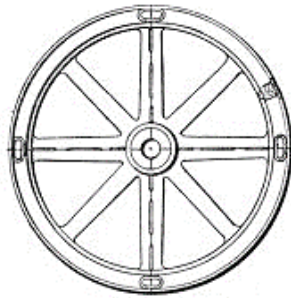


Le 25 octobre 1781, James Watt fait son invention capitale. Jusqu'à présent, la vapeur était utilisée pour soulever le piston, et c'est l'atmosphère [encore] qui, en le rabaisant, produisait l'action motrice.

En somme, le piston faisait un aller-retour et la vapeur d'eau n'était utilisée qu'à l'aller. Et si l'on faisait venir la vapeur, alternativement, des deux côtés du piston ? Si la vapeur est capable de soulever le piston dans le premier temps, ne peut-elle pas abaisser le piston dans le second (en remplaçant donc l'action de l'atmosphère) ? Eh bien, ça marche. La consommation de charbon est considérablement diminuée. L'on se sert bien mieux de la vapeur avant de l'envoyer se condenser.¹

C'est à partir de ce *critical insight* que l'atmosphère ne joue plus en fait aucun rôle. **Les machines à double effet sont les vraies machines à vapeur.** Dorénavant, on distinguera les machines d'après 1781 des machines antérieures,² mais les nouvelles machines sont-elles proprement auto-régulées ?

Pas encore ! D'autres perfectionnements, réalisés par Watt, rendront la chose de plus en plus possible. Comment réguler la vitesse de fonctionnement de la machine ? Faire appel aux bons frottements pour la ralentir ? Les frottements ont un effet si les mouvements sont petits, mais face à un mouvement ample, ils ne servent à rien. Ils gênent tout au plus. C'est à nouveau du côté de l'inertie qu'il faut chercher pour stabiliser la vitesse d'une grosse machine. Il faut y ajouter des masses pour obtenir une vitesse constante. A cette fin, un impressionnant volant d'inertie (*flywheel*) est introduit.



Si la machine tourne trop vite, le volant se met en rotation plus rapidement et accumule ainsi une partie de l'énergie.

Les frottements étant réduits, le volant poursuit son mouvement.

Le volant peut restituer à la machine son énergie si sa vitesse de fonctionnement tend à diminuer.³

Un nouveau progrès pour réduire les causes résiduelles d'un mauvais fonctionnement de la machine ! Mais hélas, le volant ne suffit pas à réaliser à lui seul une vitesse uniforme. Pour le pompage de l'eau des mines, passe encore, moudre le grain aussi, mais pour actionner des métiers à filer et à tisser, il faut assurer sans faille une vitesse constante. Watt en a conscience. Il y a lieu d'ajouter à la machine, écrit-il, un *regulator or Governor* qui, quoique *not absolutely necessary*, l'est à sa manière, *when kept order itself*. Cet organe régulateur fournira la stabilisation requise (*greater steadiness and regularity*).⁴

3/ La machine de Watt

Qu'est-ce donc ce *Governor* qui finalise la machine à vapeur pour qu'elle produise *an equal motion* ?

¹ J. Baudet, *De l'outil à la machine. Histoire des techniques jusqu'en 1800*, p.282.

² *Ibid.*

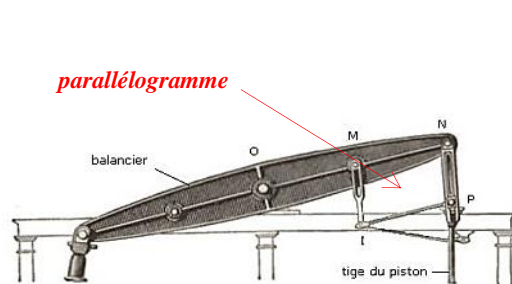
³ *La machine de Watt*, <http://visite.artsetmetiers.free.fr/watt.html>, p.1. *The inertia of the flywheel kept the engine turning*. (Richard L. Hills, *Power from stream. A History of the stationary steam machine*, Cambridge Univ. Press, 1989, p.61.

⁴ James Watt [1789], in R. L. Hills, *Power from stream*. p.85.

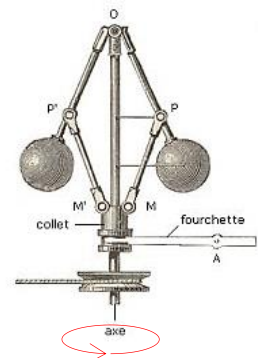
The whirling regulator (ou flyball governor), en français: le régulateur à boules.

a) Le régulateur à boules

Pour actionner le volant, Watt a imaginé un balancier tournant d'un point O et lié un parallélogramme, MNPI. Ce dispositif ingénieux transforme le mouvement de translation du piston (\updownarrow) en un mouvement de rotation permettant de faire tourner un arbre moteur relié au volant. Les quatre côtés du parallélogramme sont de longueur constante. Le changement du mouvement est rendu possible par la mobilité des quatre sommets. Voilà notre machine à vapeur devenue tournante. La machine demeure puissante, mais la régularité souffre d'un défaut majeur pour certaines applications. **Le régulateur à boules offre à la machine l'opportunité de régler elle-même sa vitesse de rotation.**



Le parallélogramme de Watt



Le régulateur de Watt

Le régulateur de Watt est aussi appelé *régulateur centrifuge* parce qu'il met en jeu des forces centrifuges. Lorsque la rotation augmente, les masses rondes s'élèvent sous l'effet de ces forces, et ce mouvement est transformé en une **rétroaction** diminuant la vitesse de rotation. Reportons-nous à la figure de droite supra.

Quand la machine fonctionne au bon régime l'écartement des boules permet à la fourchette d'être horizontale. Si la vitesse est trop élevée, les boules s'éloignent de l'axe entraînant le collet vers le haut et la fourchette pivote autour de l'axe A et appuie sur la valve [d'admission de la vapeur provenant de la chaudière]. Si la vitesse de fonctionnement est trop faible, les boules se rapprochent de l'axe, le collet s'abaisse et la fourchette pivote autour de l'axe A et relève la valve [qui laisse s'échapper la bonne quantité de vapeur]. Ainsi, quand la machine tourne trop vite, la quantité de vapeur diminue, et inversement dans le cas contraire.²

Le mécanisme de double effet a permis à la machine à vapeur d'organiser par elle-même la périodicité du mouvement. Le régulateur à boules achève de la rendre opérationnelle. Cet ajout n'en pas un. Il fait corps avec la machine. Toutes les pièces sont solidaires : de l'axe A au clapet d'admission de la vapeur.

Si la machine à vapeur tourne plus vite, son arbre entraîne l'axe vertical qui tourne plus rapidement, les boules s'écartent, soulèvent la pièce commandant le clapet qui se referme partiellement diminuant l'arrivée de vapeur, et donc ralentissant la machine.

C'est l'accélération de la machine qui provoque son ralentissement !³

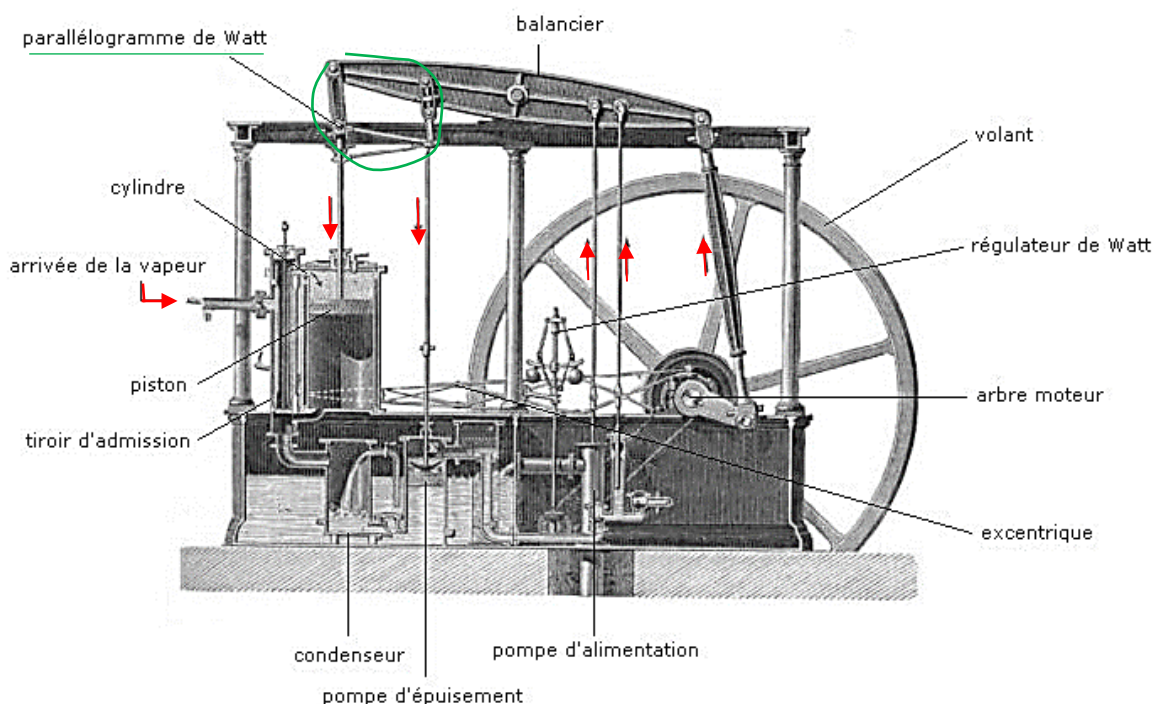
Nous voici arrivés. La machine a incorporé une régulation automatique. L'intervention d'un machiniste devient superflue. Apparaît le 1^{er} système mécanique réglant la vitesse d'une machine en agissant sur la commande de celle-ci (la valve d'ouverture). La machine de Watt finit par se présenter ainsi⁴ :

¹ *La machine de Watt*, <http://visite.artsetmetiers.free.fr/watt.html>, p.2.

² *Ibid.*

³ J. Baudet, *De l'outil à la machine*. p.285.

⁴ *La machine de Watt*, <http://visite.artsetmetiers.free.fr/watt.html>, p.2.



En quoi la machine de Watt éclaire-t-elle davantage certains aspects de la constitution des Lumières mieux que ne le font l'horloge et la montre ?

L'horloge et la montre servent à comprendre le mode de séparation des pouvoirs qu'est la spécialisation des organes. L'analogie utilisée par Rousseau ne renvoie nullement à une analogie qui demeurerait *une de ces notions confuses, indéfinissables, qui se sentent mais ne se concluent pas*.¹ Il y a, par-delà l'intuition, quelque chose d'analysable, un rapport de rapports comme dirait René Thom. Pour Rousseau, la proportion est claire :

régulation/impulsion = balancier/ressort = Souverain (ensemble des citoyens)/Etat (ensemble des sujets)²

La machine à vapeur n'est pas mentionnée par Rousseau, ni par l'*Encyclopédie* de Diderot et de d'Alembert. Et pour cause : la machine à vapeur n'est pas encore véritablement au point. En revanche, son apparition en Angleterre donne une image de l'autre mode de séparation des pouvoirs adopté et continuellement réadapté dans ce pays. Dans le *Fédéraliste* n° 69, Hamilton ne compare-t-il pas la constitution anglaise, ayant opté pour la balance des pouvoirs, à une *machine* dont le Parlement s'efforce qu'elle ne s'emballe pas (*[acts] to keep the machine from running into disorder*) ?³

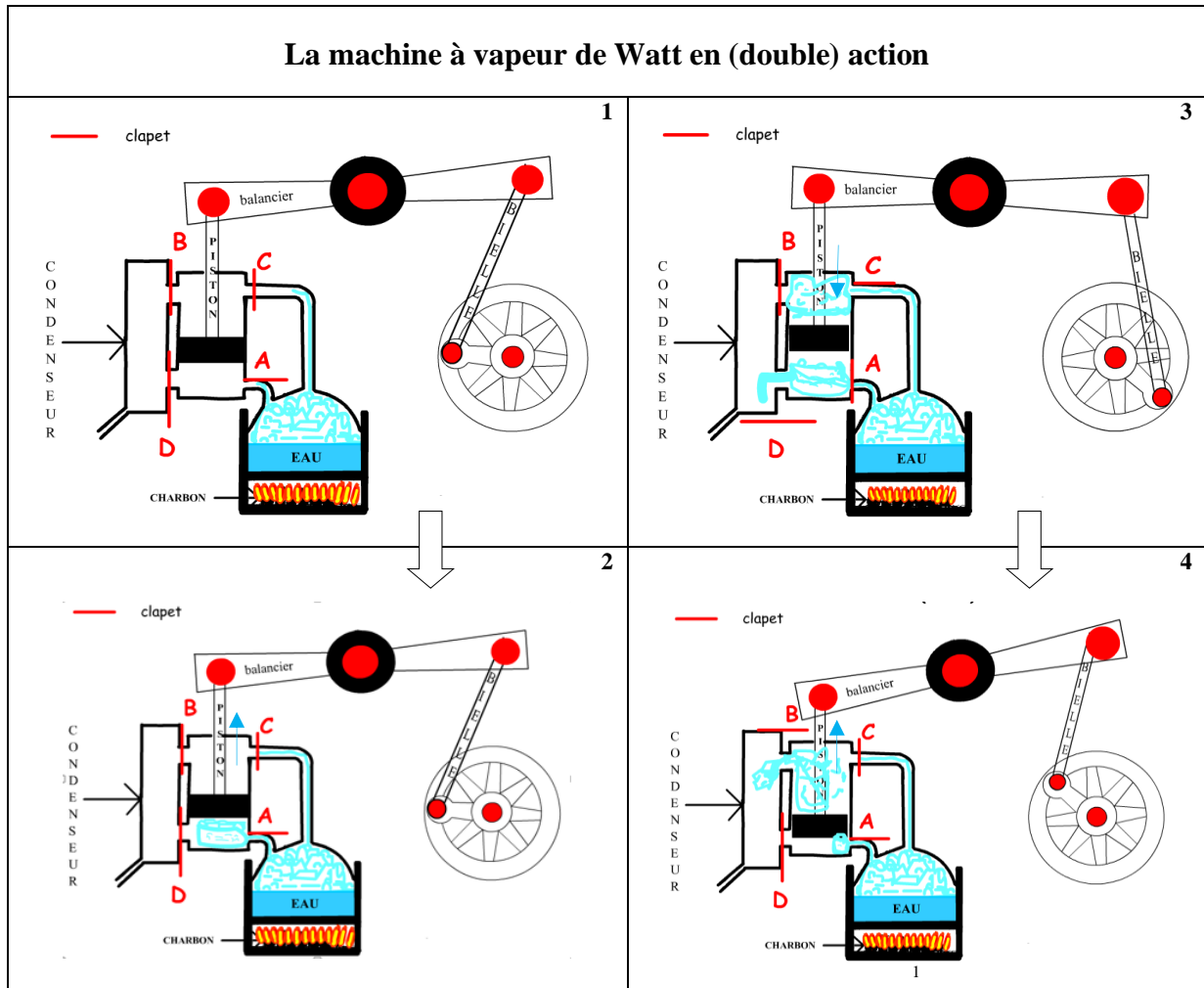
C'est un premier indice qui indique que nous sommes sur la bonne piste. Cherchons dans la balance des pouvoirs les proportions pertinentes comparant ce type de constitution et la machine de Watt. La comparaison portera sur deux aspects : le double effet de la machine de Watt (*the double-acting machine*) et la régularisation de sa vitesse par le volant d'inertie, affinée par le régulateur à boules.

¹ Pierre Duhem, *Le mixte et la combinaison chimique. Essai sur l'évolution d'une idée* [1902], Pars, Fayard, 1985, p.89.

² Revoir notre § 28-v.

³ Hamilton, *The Federalist*, n°69.

Annexe I

**b) Le double effet***i Petite leçon de mécanique*

La balance des pouvoirs fait appel à l'inertie plutôt qu'aux frottements pour modérer l'ensemble. Dans un système mécanique, les frottements peuvent être utiles pour stabiliser une position, mais quand on a affaire à une masse imposante, il faut penser à d'autres forces. Idem en politique. Comment régler la masse impressionnante que représente Léviathan ? Comment régler seulement une de puissances qui le composent ? Comment réguler la puissance exécutive par un simple frottement (par ex : les conseils de prudence prodigués au Prince par son entourage) ? Autant essayer, tel Superman, d'arrêter un camion, roulant même à faible allure, en se mettant au travers de la route pour le freiner !

¹ <http://colleges.ac-rouen.fr/dunant-evreux/SPIP/>



Superman tente d'arrêter un camion qui roule. Puisque le coefficient de frottement de ses pieds sur la route est, au plus, égal à 1, il ne peut pas, sans glisser, exercer une force horizontale supérieure à son poids.

Cette glissade est provoquée par la force de réaction exercée par le camion. Malgré sa superforce, son effort pour arrêter le camion d'un mouvement du bras échouera lamentablement.¹

La force du frottement exercée sur la route n'est pas suffisante pour s'opposer de manière appréciable au camion en pleine lancée. Une administration qui ralentit l'action du pouvoir exécutif puissant n'empêche pas celui-ci d'être omnipotent. La bureaucratie retarde au plus l'exécution des ordres, mais ne contredit pas la tyrannie.

- Vous oubliez, s'écrira-t-on, les freins pour ralentir ou arrêter, au besoin d'urgence, un mouvement !

(§27
6/d)
-ii)

L'équivalent des « freins » a été envisagé dans le cadre de la spécialisation des organes avec les limites que l'on sait quand on pense, par ex., au mandat impératif qui bride trop la volonté des représentants. La balance des pouvoirs préfère le mandat représentatif qui laisse à l'élu sa liberté de jugement, mais ses concepteurs ne croient pas pour autant que les élus soient capables de freiner par eux-mêmes leur tendance à abuser de leur fonction. Les Lumières, dans leur ensemble, considèrent que la loi de Locke est plus crédible que la volonté de Descartes de maîtriser les passions. Les désirs infinis du Prince, on ne connaît que trop ; la volonté - infinie, selon Descartes - d'y résister : ah bon ?²

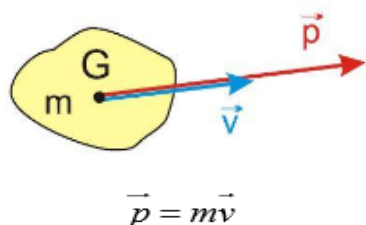
C'est donc du côté de l'inertie des masses que le droit dominant se tourne pour balancer les pouvoirs.

Faut-il rappeler que la physique nouvelle est une *physique de l'inertie*.³

Revenons aux fondamentaux de la mécanique.

Selon la 1^{re} loi du mouvement de Newton (principe d'inertie), il n'existe qu'un mouvement simple, le mouvement rectiligne à vitesse constante. Tout changement (accélération ou décélération, déviation par rapport à la ligne droite) nécessite l'action d'une force extérieure. Selon la 2^e loi du mouvement de Newton, plus un objet est « inerte », plus cette force doit être grande pour en modifier le mouvement. L'accélération et la force sont proportionnelles en grandeur. La première grandeur doit être multipliée par la seconde par une constante de proportionnalité, la masse. La masse d'un objet est la quantité de matière qui le constitue. Elle est la mesure de son inertie.

Aussi inerte soit-elle, la masse peut être aussi bien en mouvement qu'en repos. La quantité de mouvement est une grandeur qui considère et la masse d'un corps et la vitesse de ce corps. Elle est égale au produit de l'une (le scalaire, m) par l'autre (le vecteur, \mathbf{v}). L'anglo-américain d'aujourd'hui exprime bien l'idée : *An object momentum is a measure of how much it wants to keep moving – and how long it can exert a force for when it stops. You can figure something's momentum by multiplying its mass by its velocity.* La quantité de mouvement est, comme la vitesse, une grandeur vectorielle, $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$. Le vecteur quantité de mouvement \mathbf{p} et le vecteur vitesse \mathbf{v} ont même sens et même direction.⁴



Au vu du produit $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$, la quantité de mouvement est directement proportionnelle à la masse et à la vitesse.

Notre camion, évoqué supra, possède une quantité de mouvement supérieure à celle d'une voiture voyageant à la même vitesse, mais une voiture qui se déplace à grande vitesse peut avoir la même quantité de mouvement qu'un camion qui se déplace à vitesse réduite.

¹ J. Kane et M. Sternheim, *Physique*, Paris, Interéditions, 1986, p.60. Le coefficient de frottement dépend de la nature des surfaces, de leur propreté, de leur poli, de la quantité d'humidité présente, etc. Pour un frottement entre métaux, le coefficient varie de 0,3 à 1,0.

² *C'est la volonté principalement qui me fait connaître que je porte l'image et la ressemblance de Dieu.* (Descartes, *Méditations*, 4, in O.C., Pléiade, p.305.)

³ I. Bernard Cohen, *Les origines de la physique moderne*, op. cit., p.97.

⁴ <http://www.explainthatstuff.com/motion.html>; http://www.physique94.com/index_htm_files/C08_COURS_Inertie_qte_mouvement.pdf, p.3.

Conformément à la 2^e loi du mouvement de Newton, l'action d'une force extérieure fait varier la quantité de mouvement. Or, conformément à la 1^{re} loi du mouvement de Newton, un corps isolé obéit à la loi d'inertie. Il ne peut pas modifier son propre mouvement rectiligne et uniforme. Il faut postuler l'existence d'autres corps capables d'exercer une certaine action sur lui (Descartes raisonnait pareillement à partir de la sensation qu'éprouvait l'âme pour déduire l'existence du corps et leur union). Supposons donc deux corps en présence l'un de l'autre.

Lorsque deux corps interagissent, les deux sont affectés par cette rencontre. Le mouvement de chacun est modifié ; chacun d'eux est soumis à une force extérieure. Deux corps identiques qui se déplacent l'un vers l'autre à la même vitesse doivent éprouver la même modification de mouvement lors de l'impact ; ils doivent exercer la même force, l'un sur l'autre.¹

Newton a formulé cet effet dans sa 3^e loi du mouvement : Si une force exerce une force \mathbf{F} sur un second objet, le second objet exerce sur le premier une force égale mais opposée $-\mathbf{F}$:

L'interaction de deux corps a lieu toujours par l'intermédiaire d'une force et d'une contre-force de même module et de direction opposée. L'action d'une entité active sur une entité passive n'existe pas ; il y a seulement interaction de deux entités. Une main ne peut pas simplement agir sur une chaise pour la pousser ; la chaise doit toujours repousser la main. Les entités interagissent, l'une sur l'autre : la force est une affaire de paires. Quand nous voyons un objet qui paraît dévier de la loi d'inertie, nous devons être capables de trouver un autre objet qui interagit avec lui.²

Quelle que soit la taille des objets en présence, la loi d'action et de réaction de Newton s'applique. Si la terre exerce une force gravitationnelle sur un livre, cette force est dirigée vers le centre de la terre, mais le livre exerce, à son tour, une force de même intensité sur la terre, dirigée vers le haut. La force exercée sur un objet modifie son état de mouvement, c'est-à-dire sa quantité de mouvement, un objet étant caractérisé par sa masse et sa vitesse, et une force exercée par un objet modifie le mouvement d'un autre objet, c'est-à-dire sa quantité de mouvement. Quant à savoir laquelle des forces doit être définie comme l'action ou la réaction, c'est souvent une question de choix.³

Newton avait d'autres sources d'inspiration que Descartes, plus attentif à la métaphysique qu'à la physique qui demeure peu quantitative. Comme ses contemporains, Newton pouvait observer le choc des boules de billard ou les expériences effectuées sur les gaz qui étaient à la mode :

Lorsqu'un gaz est comprimé dans un récipient par un piston poussé vers le bas, il y a une réaction ; le piston tend à revenir vers le haut. Le « ressort de l'air » était une expression commune utilisée pour décrire cet effet. En fait, un ressort était une illustration parfaite pour analyser l'interaction : poussez-le pour comprimer, il réagit en vous poussant et tirez-le, il réagit en vous tirant dans la direction opposée.⁴

Dans la machine de Watt, la loi de l'action et réaction s'exerce à deux niveaux : lors de l'introduction de la vapeur au bas du cylindre (admission 1), le piston est poussé vers le haut, provoquant une contre-poussée vers le bas ; lors de l'introduction de la vapeur en haut du cylindre (admission 2), le piston est poussé vers le bas, provoquant une contre-poussée vers le haut. A chaque phase, le piston se comporte comme un frein. Le double effet inventé par Watt permet au piston d'être moteur à l'aller et au retour. Dans le cylindre à double action, la vapeur entraîne le piston en montée et en descente.

- Et le droit là-dedans ? Comment envisagez-vous l'analogie de la quantité de mouvement, la loi d'action et de réaction et le double effet ?

¹ Eugene Hecht, *Physique*, Bruxelles, De Boeck et Larcier, 2003, p.135.

² *Ibid.*

³ J. Kane et M. Sternheim, *Physique*, p.48.

⁴ Eugene Hecht, *Physique*, p.135. Avant même de jouer au billard et de s'appliquer aux boules en collision, la 3^e loi de Newton est en œuvre : chaque boule pousse la table, et la table empêche chaque boule de s'enfoncer...

*ii La pensée équivalente en droit***c) Le volant d'inertie***i Moment d'inertie, stockage et restitution d'énergie*

La balance des pouvoirs est moins une balance en équilibre permanent qu'une balance qui oscille comme une balançoire. Or, dans un mouvement en rotation, la distance entre un plateau de la balance et le pivot joue le rôle d'un bras de levier. Le *moment d'une force* prend en compte et la force et la distance de sa ligne d'action où elle agit à partir de son point d'application. Dans une balançoire, la force est le poids. Le moment d'une force est ce qui pousse un corps à tourner (le *moment* mesure l'effet produit) comme la force est ce qui pousse un corps à se mouvoir en translation. Or que se passe-t-il si on associe, non plus la distance et la force, mais la masse et la vitesse de rotation ?

On rappellera précisément que *le moment d'une force* est le produit d'une force par la longueur de la perpendiculaire au vecteur qui porte cette force. Dans le moment d'un couple de forces, la distance entre les deux perpendiculaires à leurs lignes d'action est doublée.

Revenons encore aux bases : le principe d'inertie, pour lequel il n'existe qu'un mouvement simple, le mouvement rectiligne à vitesse constante. Tout changement (accélération ou décélération, déviation par rapport à la ligne droite) nécessite l'action d'une force extérieure. Plus un objet est « inerte », plus cette force doit être grande pour en modifier le mouvement. L'inertie d'un objet est caractérisée par sa masse. Un objet en rotation implique un changement de direction. En pareil cas, on ne parle plus d'inertie mais de moment d'inertie. Le *moment d'inertie* est à la rotation ce que la masse est à la translation : plus le moment d'inertie d'un corps est important, plus il est difficile de le faire tourner. Le moment d'inertie tient compte de la distribution de la masse par rapport à l'axe de rotation (ex : balai).

Le moment d'inertie mesure la résistance de l'objet quand un moment de force est appliqué à cet objet. Le moment d'inertie d'un objet s'oppose à un couple de forces qui tend à le faire tourner.

Le moment cinétique caractérise la tendance d'un objet à continuer à tourner du fait de son inertie. Dans sa formulation, un tel moment prend donc en compte et le moment d'inertie et la vitesse de rotation. Le moment cinétique est égal au produit du moment d'inertie par la vitesse angulaire. Leur combinaison décrit la distribution de la quantité de mouvement par rapport à l'axe de rotation. (Quand je tourne le volant pour aborder un virage, je produis le moment cinétique du volant. La vitesse angulaire du volant est par ex. 2 radians par secondes, i.e. $2 \times 57^\circ = 114$ degrés en une seconde.) En l'absence de forces extérieures (par ex. de frottement), le moment cinétique reste également constant.

Comme dans le moment d'une force, un phénomène de rééquilibrage interne se produit. La diminution du moment d'inertie est compensée par une augmentation de la vitesse angulaire. Admirons à nouveau l'exploit de notre danseuse sur glace : en rapprochant les bras de leur corps, son moment d'inertie diminue, mais il tourne plus vite. Réciproquement, en écartant une jambe ou les bras de l'axe de rotation (ou les deux !), sa vitesse angulaire de rotation diminue et elle ralentit son mouvement.

(Annexes I et II)

Pour qu'un volant d'inertie se mette en marche, il faut exercer sur lui, comme sur un volant de voiture, un couple de forces. Pas moyen plus facile pour le faire tourner, mais on peut aussi enrouler une corde sur son axe de rotation et attacher à cette dernière un poids : sous l'action de la pesanteur, la corde se déroule et le volant d'inertie commence à bouger.¹

Apparemment, par rapport à l'horloge à poids, le progrès n'est pas sensible... En fait, si.

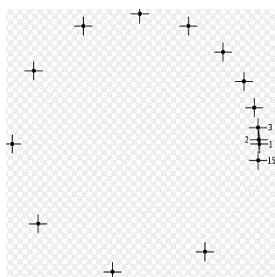
Le volant d'inertie acquiert de la vitesse angulaire, via le balancier articulé au piston qui monte sous la pression de la vapeur (se rappeler la loi de Boyle reliant la pression et la température). Mais le volant n'en reste pas là. Il n'a pas besoin d'être remonté comme un poids pour que celui-ci chute à nouveau.

¹ Nelson Thomas, *Applied physics, chap.1: Rotational dynamics*, 2009, http://chellanathan.ashbournecollege.co.uk/wp-content/uploads/2015/02/physa_a2_c_nir_notes1_launch.pdf.

La taille et la masse importante du volant d'inertie d'une machine à vapeur confèrent au système une grande inertie de rotation. Une fois lancé, la masse continue de tourner même si aucune énergie ne continue d'alimenter le système.

Le volant d'inertie tourne à vitesse uniforme (moment cinétique constant), stockant provisoirement l'énergie sous forme de rotation mécanique. Cette énergie est ensuite restituée, d'où la baisse de la vitesse du volant d'inertie, appelée toutefois à remonter à chaque poussée de vapeur. L'intégration d'un volant d'inertie à la machine à vapeur permet ainsi de rendre plus régulier le régime de son fonctionnement. Le volant absorbe l'irrégularité des à-coups du piston. Il en diminue les vibrations.

D'aucuns feront observer que le volant d'inertie ne date pas de la révolution industrielle. Dans l'antiquité, les roues des moulins à eau jouaient un rôle similaire. La roue que le potier utilisait pour modeler son argile, aussi. Ils ont raison, mais les volants d'inertie de la révolution industrielle ont un large diamètre et tournent plus vite. La masse la plus importante est localisée au bord afin que le moment d'inertie soit plus grand et que la vitesse angulaire soit en conséquence « plus constante ». Le volant d'inertie n'est plus en pierre ou en bois, mais en fer et en acier afin de résister à des accélérations angulaires extrêmes, dépassant de beaucoup l'accélération gravitationnelle coutumière.



Pour avoir une idée comment se manifeste une accélération angulaire, on peut observer pas à pas ses effets.

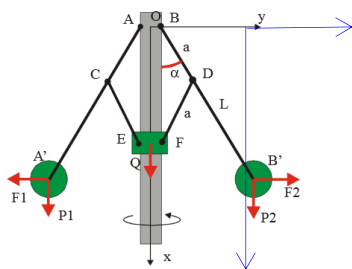
Les positions ayant été prises à des intervalles de temps réguliers, on constate qu'il y a bel et bien accélération angulaire puisque la distance séparant deux points consécutifs sur la courbe est de plus en plus grande.

Si l'accélération angulaire est trop élevée, le volant d'inertie finit par se disloquer et éclater en morceaux.¹

Un lecteur attentif fera observer que le volant d'inertie n'est en fait qu'une sorte de frein. Pour une part, oui, et non de l'autre, car, à la différence du frein, il y a stockage d'énergie et restitution. En donnant de la vitesse au volant d'inertie, on fournit à celui-ci de l'énergie, mais cette énergie est récupérée quand le volant ralentit. L'énergie n'est pas perdue, mais réutilisée pour ré-accélerer. **Certes, l'inertie du volant d'inertie ne régule pas directement la machine, mais elle permet d'agir sur la source d'énergie pour en contrôler le flux. C'est un processus d'asservissement.**²

Pour en mieux dompter le mouvement, Watt améliore sa machine en finissant d'y intégrer le régulateur à boules dont nous avons déjà parlé. Cet ajout permet très à propos d'en régler plus finement la vitesse. Ce n'est plus le *flywheel*, mais le *flyball governor* qui prend les commandes en utilisant la force centrifuge de deux masses en rotation liées à une pièce de masse qui coulisse sur l'arbre de rotation. Les mouvements de cette pièce dirigent le processus d'asservissement grâce au contrôle d'une soupape servant à fermer ou à ouvrir le conduit par où débouche la pression de vapeur.

Pour bien à avoir à nouveau en tête le régulateur à boules, voici un schéma précis des forces en jeu :



Le régulateur centrifuge est une machine tournante dont la vitesse de rotation est uniforme. Sous l'action de la force centrifuge, les masses m_1 et m_2 s'écartent de l'axe de rotation et entraînent la coulisse de poids q vers le haut bien qu'elle soit soumise comme les masses m_1 et m_2 à la pesanteur.

*Les forces actives sont p_1 , p_2 et q . Les forces d'inertie sont les forces centrifuges F_1 et F_2 qui s'exercent sur les boules.*³ En projetant les données sur les axes Ox et Oy à la manière de Descartes, on peut déterminer l'angle α .

¹ C. Woodford, *How do flywheels store energy ?* 2014, <http://www.explainthatstuff.com/flywheels.html>; fr.wikipedia.org/wiki/accélération_angulaire

² [https://fr.wikipedia.org/wiki/Volant_d'inertie](https://fr.wikipedia.org/wiki/Volant_d%27inertie). L'article représente un volant d'inertie construit à partir des dessins de Léonard de Vinci.

³ <http://ressources.univ-lemans.fr/AccessLibre/UM/Pedago/physique/02/meca/regboule.pdf>. *La force centrifuge qui n'est autre que l'inertie.* (R. Feynman, *La nature des lois physiques*, op.cit., p.35)

Avec un tel système d'autorégulation, nous dépassons *la puissance régulatrice du pendule dont le balancier sert à ralentir le mouvement des autres parties*. Déjà, il est vrai, *toute la régularité des horloges à balancier vient d'abord de la force d'inertie de ce modérateur*. L'horloge est un *automate* en ce qu'il est *un engin qui se meut de lui-même, ou une machine qui porte en elle le principe de son mouvement*. Entreraient dans cette catégorie *les instruments de la mécanique, mis en mouvement par des ressorts, des poids internes, etc. comme les horloges, les montres*. Y entreraient aussi les automates de Vaucanson, tel le joueur de flûte et le canard qui provoquèrent l'admiration du public.¹

L'automatisme de la machine de Watt va plus loin. La machine à vapeur possède le principe de son mouvement, mais aussi celui de sa régulation. Cette nouvelle machine peut persévérer dans l'être, pour parler comme Hobbes. La mécanique est proche de l'humain, plus qu'elle ne l'a jamais été, l'adjectif *automatique* étant déjà appliqué à l'animal dans l'*Encyclopédie* :

Automatique : se dit des mouvements qui dépendent uniquement de la structure du corps, et sur lesquels la volonté n'a aucun pouvoir.

Nous sommes à la limite de l'animal-machine de Descartes dans le *Discours de la méthode* duquel l'animal est présenté comme pure matière et pure machine. Il n'y a pas en lui d'union de l'âme et du corps pour la raison qu'il ne possède pas d'âme et que ne fonctionne qu'un corps.² Dans leur ensemble, les Lumières sont loin d'adopter les thèses de *L'homme-machine* de La Mettrie, mais elles aimeraient, au plan politique, se passer de la volonté des gouvernants lorsqu'elle est peu éclairée... De ce point de vue, l'automatisme aurait du bon, si jamais il pouvait éviter les lubies humaines !

Comme l'écrit Michel Foucault, *les fameux automates n'étaient pas seulement une manière d'illustrer l'organisme ; c'étaient aussi des poupées politiques, des modèles réduits de pouvoir*.³ Foucault prend la chose en mauvaise part. Il ne donne comme exemple que *l'obsession de Frédéric II, roi minutieux des petites machines, des régiments bien dressés et des longs exercices*. Comme si le roi de Prusse était un paragon du constitutionnalisme du XVIII^e siècle ! La mécanique des soldats ne correspond guère à la mécanique nouvelle des institutions. Les Lumières sont parfois noires comme sous l'ère de la Terreur, mais celle-ci manquait, faut-il le répéter, d'un *régulateur* qui l'en aurait empêchée. Ah ! si les Français n'avaient pas craint, avec une seconde chambre, de *r'ouvrir une porte à la noblesse héréditaire et aux abus de l'ancien régime* ! jugeait-on, en 1792, contre l'idée d'une seule assemblée.⁴

Quel est donc le pouvoir dont la machine de Watt représente le modèle réduit ? Toujours assurément la balance des pouvoirs, car, en plus de comprendre un double effet, sa constitution possède un système d'asservissement assez comparable au volant d'inertie et au régulateur à boules.

ii Le règlement de la « pression » en droit

4/ La question de la réalimentation

a) Le « carburant » (Annexe III, IV et V)

b) L'impulsion-rébellion (Annexe VI)

¹ *Encyclopédie*, art. « Horloge », t.8, Neuchâtel, 1765, p.301; art. « Balancier », t.2, Paris 1751, pp.29-30 ; art. « Automate », t.1, p.896. Dans les montres automatiques d'aujourd'hui, on se sert beaucoup de l'inertie.

² *Encyclopédie*, art. « Automatique », t.1, p.897 ; Descartes, *Discours de la méthode*, 5^e partie, O.C., Pléiade, pp.164-166.

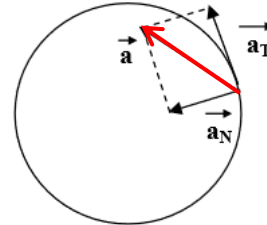
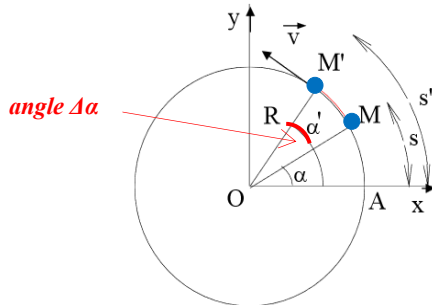
³ Michel Foucault, *Surveiller et punir. Naissance de la prison*, Paris, Gallimard, 1975, p.138.

⁴ Opinion rapportée par M. de La Croix, Professeur de droit public au Lycée, trad. du livre de John Adam, *Défense des constitutions américaines ou de la nécessité d'une balance des pouvoirs dans un gouvernement libre*, Préface, p.xxij.

Annexe II

La vitesse angulaire

La vitesse angulaire se présente comme suit par rapport à la vitesse linéaire d'un point M en rotation :



1

La vitesse tourne au cours du temps

La *vitesse linéaire* $v = \Delta s / \Delta t$ en $m \cdot s^{-1}$, avec $\Delta s = s' - s$.

Le *vecteur vitesse instantanée* a pour direction la tangente au cercle au point M ; il est perpendiculaire au rayon R.

La *vitesse angulaire* ou pulsation $\omega = \Delta \alpha / \Delta t$ (l'équation définit de combien le point tourne en radians par seconde).

Comme $s = r\alpha$, on a : $\Delta s = R \Delta \alpha$, d'où $\Delta s / \Delta t = R \Delta \alpha / \Delta t$, soit $v = R\omega$ (la vitesse linéaire est égale au rayon multiplié par la vitesse angulaire).

Le vecteur accélération est défini par la relation $\mathbf{a} = \Delta \mathbf{v} / \Delta t$ (la notation en gras remplace celle en flèche des vecteurs)

Dans un mouvement circulaire, le vecteur accélération peut prendre diverses directions, mais il est toujours orienté vers l'intérieur du cercle (voir figure ci-contre)

Vitesse angulaire et accélération angulaire

Pour simplifier l'étude de l'accélération circulaire, on la décompose en deux accélérations :

- l'*accélération tangentielle* : \mathbf{a}_T , porté par la tangente au cercle au point considéré ;

- l'*accélération normale* (ou *radiale*) : \mathbf{a}_N , porté par le rayon OM.

Le vecteur d'*accélération totale* est donné par : $\mathbf{a} = \mathbf{a}_N + \mathbf{a}_T$

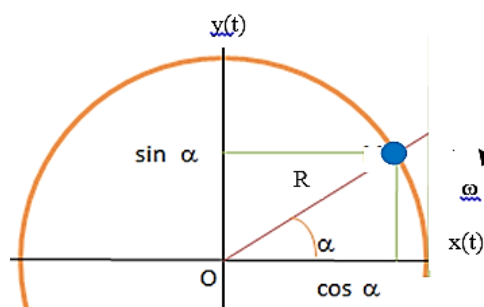
La valeur de l'accélération tangentielle est : $a_T = \Delta v / \Delta t = R \Delta \omega$, avec a_T en $m \cdot s^{-2}$.

La valeur de l'accélération normale est : $a_N = v^2 / R = R\omega^2$ (car $v = R\omega$)

La valeur de l'accélération totale est : $a = \sqrt{(a_N)^2 + (a_T)^2}$, en vertu du théorème de Pythagore.

Le lecteur, peu habitué à ces expressions, pourrait se demander comment l'époque a pu trouver la valeur de l'accélération normale. Pour comprendre d'où viennent $v = R\omega$ et $a_N = v^2/R$, il faut revoir en *Annexe III* quelques expressions basiques en considérant à nouveau un objet décrivant un cercle.

¹ Cinématique du solide en rotation. <http://plrostand.free.fr/download/Rotation.pdf>. (La dynamique de la rotation étudie l'effet d'une force sur la rotation, d'où les notions de moment d'une force, avec la règle du tir bouchon, le moment d'inertie d'un solide, etc.).

L'accélération normale¹

A chaque instant, la position de l'objet fait un angle α avec l'horizontale.

L'angle α n'est pas constant : il varie avec le temps en fonction d'une vitesse angulaire ω .

Dans un mouvement rectiligne, la distance $d = vt$; dans un mouvement angulaire, $\omega = \alpha t$.

Selon les formules de la trigonométrie :

$$\begin{aligned} x(t) &= R \cdot \cos(\alpha) = R \cdot \cos(\omega t) \\ y(t) &= R \cdot \sin(\alpha) = R \cdot \sin(\omega t) \end{aligned}$$

La vitesse étant la dérivée de la position, on a :

$$\begin{aligned} V_x(t) &= dx/dt = -R \cdot \sin(\omega t) \\ V_y(t) &= dy/dt = R \cdot \cos(\omega t) \end{aligned}$$

Sachant que $V^2(t) = V_x^2(t) + V_y^2(t)$ et que $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$, on a $a = R^2 \cdot \omega^2 \cdot (\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t)) = R^2 \cdot \omega^2$, d'où $\mathbf{V} = \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\omega}$

L'accélération étant la dérivée de la vitesse, on a :

$$\begin{aligned} A_x(t) &= dV_x/dt = -R \cdot \omega^2 \cdot \cos(\omega t) \text{ et } A_y(t) = dV_y/dt = -R \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega t) \\ \text{d'où : } A^2 &= R^2 \cdot \omega^4, \text{ et } A = R \cdot \omega^2 = R^2 \cdot \omega^2 / R, \text{ soit } \mathbf{A} = \mathbf{V}^2 / \mathbf{R} \end{aligned}$$

Cette approche devient coutumière pendant les Lumières. Une autre façon de comprendre la valeur de l'accélération normale est de passer par une autre approche qui emprunte davantage le raisonnement différentiel que le calcul trigonométrique :

Considérons un accroissement très petit de vitesse entre le vecteur $\mathbf{v}(t)$ et le vecteur $\mathbf{v}(t+dt)$. Soit $d\mathbf{v}$ cette différence ($d\mathbf{v}$ est un vecteur) et $d\theta$ le très petit accroissement d'angle.

Projetons le vecteur $\mathbf{v}(t)$ (le vecteur \mathbf{OM}) sur le vecteur $\mathbf{v}(t+dt)$ (le vecteur \mathbf{OM}').

dv (en valeur absolue) = $\sin\theta \cdot v$. Comme $\sin\theta \approx \theta$ (pour un angle très petit, θ), on a : $dv = \theta v$.²

En considérant la dérivée de la vitesse par rapport au temps, soit dv/dt , l'accélération angulaire a pour expression $a = (d\theta v)/dt$. Or $\omega = d\theta/dt$, soit $d\theta = \omega dt$. D'où : $a = \omega v$. Comme $dv = R\theta$ ou $dv = \theta R$, on a $dv/dt = d\theta R/dt$, on obtient la valeur de l'accélération normale recherchée : $a = \omega^2 R$.

¹ <http://astronomie-smartsmur.over-blog.com/article-annexe-iii-notions-de-base-de-mecanique-102679695.html>.

² Quid si la courbure de la trajectoire n'est pas celle d'un cercle? Une trajectoire est toujours assimilable localement à un cercle de centre O et de rayon R. Si la trajectoire n'est pas un cercle, O et R changent tout le temps.

Annexe IV

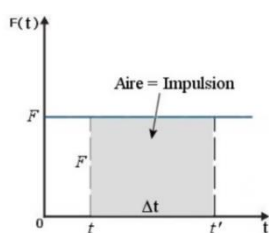
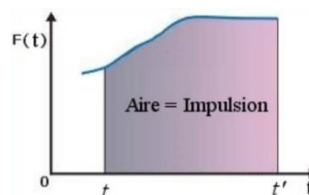
L'impulsion : une 1^{re} approche

Dans une première approche, l'impulsion est le mouvement ou la tendance à se mouvoir qu'un corps donne à un autre corps (par ex., l'impulsion que reçoit une balle de tennis lorsque le joueur frappe la balle avec sa raquette).

La force et la durée de l'impulsion entrent en ligne de compte dans la grandeur de l'impulsion. Par ex., pour sauter en hauteur, vous devez exercer la force le plus grand possible sur votre jambe et exercer cette force aussi longtemps que possible. Vous commencez par lancer votre première jambe en l'air et vous vous propulsez grâce à la poussée que vous exercez sur l'autre au sol. Vous vous donnez une impulsion vers le haut. Idem, avec les deux jambes, si vous sautez d'un plongeur. Idem, avec les deux bras, en soulevant, comme un athlète, une masse au-dessus de votre tête).

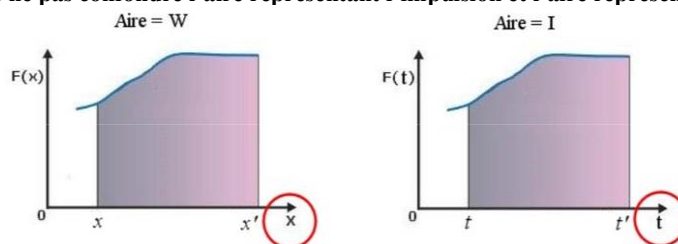
L'impulsion est un vecteur, puisque le mouvement communiqué a une direction. De façon précise, l'impulsion \mathbf{I} est le produit de la force \mathbf{F} par l'intervalle de temps Δt durant lequel cette force s'exerce : $\mathbf{I} = \mathbf{F} \cdot \Delta t$ (la force est aussi un vecteur). Un objet, soumis à une impulsion, reçoit une quantité de mouvement, proportionnelle à la grandeur de l'impulsion. La variation de la quantité de mouvement d'un objet est égale à l'impulsion qu'il a reçue : $\mathbf{F} \cdot \Delta t = m\Delta\mathbf{v}$ (avec \mathbf{v} pour la vitesse).¹

Annexe V

Représentation graphique de l'impulsionL'impulsion avec une force **constante**L'impulsion avec une force **variable**

Lorsque la force est constante, l'impulsion est représentée par l'aire sous la courbe de F en fonction du temps t . Idem lorsque la force est variable, mais pour calculer l'aire, il ne suffit plus de multiplier la hauteur F d'un rectangle par sa largeur Δt . Il faut calculer l'intégrale en considérant des temps très courts : $I = \int_t^{t'} F dt$.

Attention de ne pas confondre l'aire représentant l'impulsion et l'aire représentant le travail.



Le travail est aussi donné par l'aire sous la courbe de la force agissant sur l'objet, mais l'aire sous la courbe de la force F en fonction de la position x est le travail (W), et celle sous la courbe de la force F en fonction du temps t est l'impulsion.² L'aire $\mathbf{I} = \int_t^{t'} \mathbf{F} dt$ est une intégrale vectorielle alors que l'aire $W = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{M}$ avec $d\mathbf{M} = dx$ est un scalaire. **Le travail peut être nul sans que l'impulsion le soit.** Supposons que le vecteur \mathbf{F} soit orthogonal au vecteur \mathbf{V} (vitesse), alors $\int_t^{t'} \mathbf{F} \cdot \mathbf{V} = 0 \rightarrow W = 0$ mais $\int_t^{t'} \mathbf{F} dt \neq 0 \rightarrow \mathbf{I} \neq 0$.

¹ <ftp://ftp2.sio2.be/sio/physique4/8%20Quantite%20de%20mouvement.pdf>. D'après la 2^e loi de Newton, $F = ma$. La lettre a représente l'accélération moyenne. On a donc : $F = m(v'-v)/\Delta t$, v étant la vitesse initiale et v' la vitesse finale. Ou encore : $F\Delta t = mv'-mv = m\Delta v$. Comme la quantité de mouvement est par définition égale à $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$, on voit également que $F\Delta t = \mathbf{p}' - \mathbf{p} = \Delta\mathbf{p}$, avec \mathbf{p} la quantité de mouvement initiale et \mathbf{p}' la quantité de mouvement finale. $\mathbf{p}' - \mathbf{p}$ est une soustraction vectorielle. (Kane/Sternheim, *Physique*, op. cit., p.163).

² <http://physique.merici.ca/mecanique/chap10.pdf>.

Annexe VI

Une deuxième loi de Newton plus générale

Nous avons vu que **la puissance** est définie comme le travail divisé par le temps nécessaire pour effectuer ce travail. Si l'on divise l'impulsion par le temps nécessaire pour donner cette impulsion à cet objet, on obtient : $I/\Delta t = (F\Delta t)/\Delta t = F$. La quantité obtenue est simplement la force qui s'applique sur l'objet.

Comme $I = \Delta p$ et $F = I/\Delta t$, on trouve $F = \Delta p/\Delta t$ dans le cas d'une force **constante**.

Si la force est **variable**, on peut calculer l'impulsion pendant un temps infinitésimal dt . La variation de la quantité de mouvement Δp devient alors elle-même infinitésimale, dp . L'impulsion est la dérivée dp/dt du vecteur quantité de mouvement. D'où la 2^e loi de Newton sous sa forme plus générale : $F = dp/dt$.

C'est Léonard Euler qui proposa en 1752 cette formule pour améliorer la loi de Newton. Elle est meilleure que celle qui relie la force à l'accélération puisqu'elle s'applique à des situations où la masse des objets varie comme une fusée par exemple qui éjecte des gaz au cours de sa lancée.¹

Pour retrouver l'ancienne formulation ($F=ma$), il suffit d'écrire : $F=dp/dt = d(mv)/dt = dm/dt.v + m.dv/dt$.

Si l'objet a une masse constante, le terme dm/dt est nul, d'où $dp/dt = m.dv/dt = m.a$ (avec **a** comme accélération instantanée). On retrouve bien la formule connue jusqu'ici.

¹ *Ibid.*

SECTION 3 (suite)

LA CONSIDERATION DU PARTICULIER DANS LE GENERAL

B/ Le fait général n'est pas englobant

Cinquième leçon des Lumières :

La souveraineté individuelle et la volonté générale au cœur l'une de l'autre

§ 40. – Une nouvelle vision de l'optique à l'âge des Lumières, 190. § 41. - L'expérience de Young et son rapport au droit, 197 - - § 42. - Le caractère perturbateur de la résonance, 202. – Portrait de Pitt le Jeune (peinture).

Addendum : Figures de pensée permettant de suivre comment le balancement des opinions se convertit en action.

§.43. Relativité, dualité et dissymétrie au berceau des partis politiques, 216.- § 44. Analyse de Fourier en droit positif, 229 - § 45. Filtrage, convolution et ondelettes, 246. - § 46. La spécificité de l'interprétation constitutionnelle, 258. § 47. La moyenne (des voisins) jurisprudentielle, 291.

§ 40. – UNE NOUVELLE VISION DE L'OPTIQUE A L'AGE DES LUMIERES

i Petite leçon d'optique, 190. - *ii L'optique des Lumières*, 193

i Petite leçon d'optique

L'individu dans l'état de nature poursuit son mouvement d'autoconservation. C'est le postulat des théories du contrat social qui constituent l'épine dorsale du constitutionnalisme des XVII^e et XVIII^e siècles. La plupart des penseurs du droit moderne présupposent, avec des variantes, que ce contrat ait été souscrit par les individus, considérés comme tels, pour la première fois. En postulant un tel pacte, ils réfléchissent à la façon des phénoménologues du XX^e siècle : ils mettent entre parenthèses *l'attitude naturelle* qui consiste à croire que le monde existe en soi, sans être *pour nous* (en relation avec nous). Un acte de conscience, opérant à l'insu des individus, serait à la base du pacte social :

Il faut distinguer deux choses : d'une part, les actes de conscience – perception extérieure, souvenir, prédication, jugement de valeur, position d'une fin, etc. – accomplis spontanément, et, d'autre part, les réflexions (actes réflexions) qui nous révèlent ces actes spontanés et qui sont elles-mêmes des actes perceptifs d'un ordre nouveau. Dans la perception spontanée, nous saisissons la maison, non la perception de la maison. Dans la réflexion seulement, nous nous « tournons vers » cet acte lui-même et son orientation perceptive « sur » la maison.

Dans la réflexion naturelle qui s'effectue dans la vie courante, mais aussi en psychologie (dans l'expérience psychologique de mes propres états psychiques), nous sommes placés sur le terrain du monde, le monde posé comme existant. C'est ainsi que nous énonçons dans la vie courante : « Je vois là-bas une maison », ou encore : « Je me rappelle avoir entendu cette mélodie », et ainsi de suite. Au contraire, dans la réflexion, nous quittons ce terrain en pratiquant l'ἐπιτοχή [mise entre parenthèses de l'attitude naturelle] quant à l'existence ou la non-existence [absolue] du monde.¹

Mais, dira le lecteur, vous n'êtes plus à l'âge des Lumières en évoquant la phénoménologie beaucoup plus tardive !

Oui et non, car les théoriciens du contrat social (Hobbes, Locke et Rousseau pour citer les principaux) sont, en philosophie du droit, des phénoménologues avant la lettre. Comme Husserl, ils distinguent un *état primitif* (la perception extérieure de la maison) et un état qui altère cet état (la maison n'existe plus

¹ Edmund Husserl, *Méditations cartésiennes* [1929], Paris, Vrin, 1969, 2^e Méditation, pp.28-29. Texte allégué. Nous soulignons.

en soi, séparée totalement de moi).¹ L'état primitif est l'état de nature, et la réflexion qui modifie cet état est l'état de société et l'entrée en droit (dans le constitutionnalisme moderne). *La réflexion rend conscient, voire évident, non pas quelque autre état, mais cet état même* (l'état de nature), en créant toutefois chez le spectateur une prise de distance et l'occasion d'en sortir si cet état se révèle pénible (la prise de distance provoque l'analyse, i.e. la recherche des conditions pour que l'état de nature devienne un état de société supportable. L'acte phénoménologique déclenche la méthode analytique).

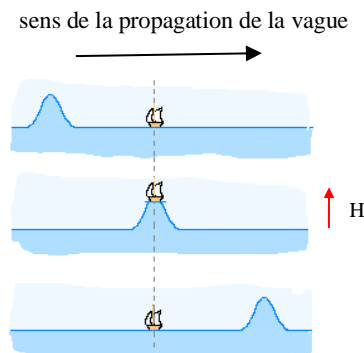
Comme le décrit Hobbes, la vie de l'homme dans l'état de nature est *nasty, brutish and short* pour la raison que le mouvement de chaque individu subit des perturbations causées par les mouvements des autres. Ces perturbations peuvent être comparées à des chocs entre objets ou particules de matière mais aussi à des ondes qui se propagent dans un milieu. L'optique se libère de la mécanique bien qu'elle parte des règles du choc entre les corps matériels pour fonder l'hypothèse ondulatoire.

Les ondes sont des phénomènes très courants. On peut en saisir les effets à chaque instant : la lumière qui nous parvient, les sons que nous entendons, les vibrations du sol que nous sentons lorsqu'un camion (ou une diligence à l'époque) passe à proximité.

(§ 37
-b)i)

Nous pouvons nous-mêmes en provoquer en lançant par exemple une pierre sur une large étendue d'eau calme. Nous créons une perturbation qui se propage à la surface en générant des cercles concentriques dont le rayon grandit. La pierre, en percutant la surface, génère une vague circulaire qui s'éloigne du point d'impact. La vague présente un sommet suivie d'un creux, comme nous l'avons montré en présentant la forme produite par une goutte d'eau qui tombe sur un étang. La vague est généralement suivie d'autres vagues, moins marquées, créées par les remous engendrés par la chute de la pierre. Ces vagues correspondent à la propagation d'une onde à la surface de l'eau.

Aujourd'hui, nous distinguons deux types d'ondes : les ondes mécaniques et les non mécaniques. Les ondes mécaniques désignent la propagation d'une perturbation dans un milieu élastique sans transport de matière. (Un milieu élastique est un milieu qui reprend sa forme après le passage d'une onde). La propagation d'une vague à la surface de l'eau en est l'illustration puisque au passage d'une vague, un bouchon s'élève par l'énergie apportée par l'onde avant de se retrouver dans la même position lorsque la surface de l'eau redevient immobile. Il y a déplacement des vagues qui s'éloignent du point d'impact et non déplacement du bouchon qui ne s'éloigne pas de la source de perturbation.²

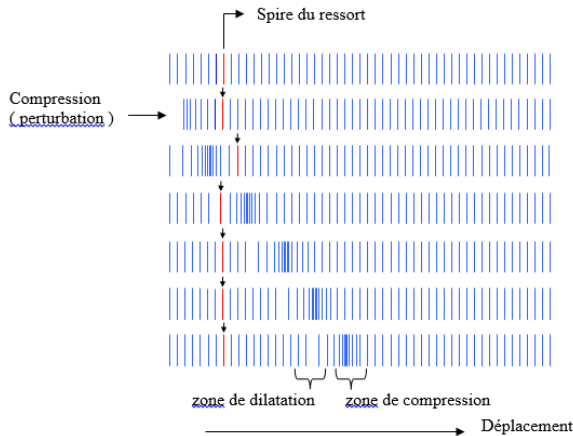


Bateau soulevé sur place d'une hauteur H

On discerne, parmi les ondes mécaniques, des ondes transversales comme ci-dessus ou le phénomène du Holà ! dans une tribune lorsque l'on voit les gens de travée en travée se lever et s'asseoir en restant à leur place. La perturbation d'un milieu élastique comme la corde d'un instrument de musique comme la guitare en est un autre exemple. Sa déformation se déplace de proche en proche dans la direction horizontale alors que les points de la corde se déplacent verticalement (de bas en haut puis de haut en bas). Les ondes sont longitudinales lorsque la perturbation se propage dans une direction parallèle à la propagation. Il en est ainsi d'un autre instrument de musique comme l'accordéon, le ressort, le mouvement des tranches d'un gaz comprimé ou celui d'un serpent au sol.

¹ *Ibid.*, p.29.

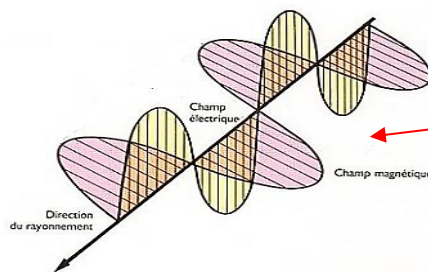
² <http://www.cyberphon.ish-lyon.cnrs.fr/Partie1/P1C1.htm> ; <http://www.web-sciences.com/fichests/fiche1/fiche1.php>.



Une onde mécanique longitudinale :

la compression des spires d'un ressort et leur relâchement (ou détente) ¹

La lumière ne répond pas, de nos jours, à la définition d'une onde mécanique car elle se propage dans le vide. Elle entre dans la catégorie des ondes électromagnétiques comme les micro-ondes ou les ondes radars. Comme toutes les ondes électromagnétiques, la lumière est *une onde transversale*

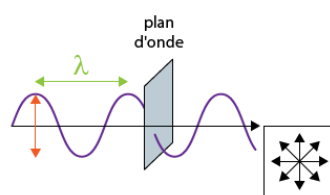


la lumière comme onde électromagnétique

alors que l'onde sonore est une onde mécanique longitudinale qui se propage dans un milieu élastique comme l'air, l'eau, le métal, etc. (au passage d'une onde sonore, l'air subit des mouvements de va-et-vient longitudinaux qui engendrent comme un ressort une zone de compression-dilatation qui se propage; une fois la perturbation passée, l'air retrouve son état initial comme le ressort son état).
²

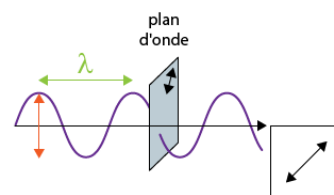
Toutefois, comme toute onde, la lumière se propage, à partir de la source, dans toutes les directions qui lui sont offertes. Une onde à une dimension a lieu dans une seule direction, par ex ; le long d'une corde ; une onde à 2 dimensions a lieu dans un plan, par ex. à la surface de l'eau lorsqu'on y jette une pierre ; une onde à 3 dimensions a lieu dans l'espace, par ex ; une onde sonore qui se propage dans toutes les directions. La lumière (non polarisée) se propage également dans toutes les directions :

lumière non polarisée



il y a des vibrations dans toutes les directions du plan d'onde

lumière polarisée



une seule direction de vibration dans le plan d'onde³

- une lumière polarisée est une lumière qui vibre dans une seule direction dans le plan perpendiculaire à la direction de propagation. La lumière blanche ne présente pas de polarisation
- Les ondes émises par des sources ponctuelles sont sphériques. Si le rayon est très grand, la surface sphérique est quasiment un plan. Ce plan est appelé *plan d'onde*
- λ représente *la longueur d'onde*, la périodicité spatiale des oscillations (la distance entre deux sommets ou deux creux consécutifs)

¹ <http://site.ac-martinique.fr/spc/?p=1157>

² <http://www.futura-sciences.com/magazines/matiere/infos/dossiers/d/physique-relativite-restreinte-naissance-espace-temps-509/page/5>.

³ Michel Dubois, *Rappels sur la lumière*, Université Lille-1, 2014, http://minweb.univ-lille1.fr/cours/co/chap03_01.html. C'est Etienne-Louis malus qui a introduit, au début du XIX^e siècle, le terme de polarisation. Michel Blay, *La naissance de la science classique au XVII^e siècle*, Paris, Nathan Université, 1999, p.90.

Une onde non périodique serait par exemple un flash de lumière, un son non répété (un bruit comme celui d'une chute, le tonnerre, un choc), une impulsion unique, etc., mais, comme l'illustre les deux dessins côte à côte précédents, la lumière, dans la plupart des cas, présente un caractère périodique. On appelle *onde périodique* une onde dont la perturbation est entretenue. La perturbation se répète à l'identique pendant des intervalles de temps égaux. **La longueur d'onde représente la distance parcourue par l'onde pendant une période d'oscillation. Une onde périodique est donc caractérisée par une périodicité spatiale (la longueur d'onde) et temporelle (la période, qui s'exprime en seconde(s)).**

La *fréquence* d'un phénomène périodique est égale au nombre de périodes par seconde (nombre de cycles par seconde). La fréquence est l'inverse de la période : $f = 1/T$. Elle s'exprime en hertz (Hz).¹

Tous ces rappels sont nécessaires pour comprendre l'apport des Lumières en ce domaine et voir comment le constitutionnalisme moderne a emprunté les mêmes voies de raisonnement **en allant plus loin, lui aussi, que le paradigme newtonien qui paraît réduire la physique à la mécanique.**

ii L'optique des Lumières

Les XVII^e et XVIII^e siècles considéraient encore que la lumière se propageait dans un fluide : *l'éther*, à la manière du son dans l'air. Cependant, contrairement à un milieu matériel élastique ordinaire (l'air justement), l'éther était conçu comme un milieu ad-hoc sans lequel on n'imaginait pas la propagation de la lumière. Certains savants de l'époque n'imaginèrent pas plus la nature ondulatoire de la lumière.

Newton le premier interprète la lumière dans les termes qui lui sont familiers : en termes de forces et de grains de lumière se propageant en ligne droite. L'évidence quotidienne plaide pour cette thèse. Entrez la porte d'une pièce plongée dans l'obscurité. Vous constatez un rai de lumière. Regardez le soleil qui perce les nuages après un orage. Vous observez les rayons du soleil. Contemplez-vous dans un miroir : votre image vous est renvoyée, fidèle à vous-même. *Pendant longtemps, l'étude de la lumière a été confondue avec celle des rayons lumineux. Ces rayons qui se propageaient en ligne droite étaient constitués, à n'en pas douter, par un flot continu de petites particules minuscules.*²

(§17
-a)-i)

Les Grecs n'ignoraient pas la loi de la réflexion. Au XVII^e siècle, Descartes en reprendra l'étude et l'élargira au phénomène de la réfraction. La théorie corpusculaire de Newton est capable de décrire de manière adéquate ces deux phénomènes. La réfraction par ex., n'est-elle pas une déviation du rayon lumineux au passage de la surface de séparation entre deux milieux ? Pourquoi, d'ailleurs, la lumière serait-elle une onde ? Les ondes présentent la particularité de contourner les obstacles. On le voit en observant les ondes qui se propagent à la surface de l'eau. On l'entend dans le cas des ondes sonores. Le fait qu'il soit impossible de voir une source lumineuse placée derrière un obstacle opaque paraît constituer une autre évidence en faveur de la théorie de l'émission de la lumière de Newton.³

Dans son étude de l'optique, Newton découvre pourtant des anneaux circulaires concentriques en éclairant une lentille convexe posée sur une plaque de verre. Son regard tombe sur une alternance de cercles noirs et de cercles colorés que l'idée d'une lumière corpusculaire a peine à faire comprendre.⁴

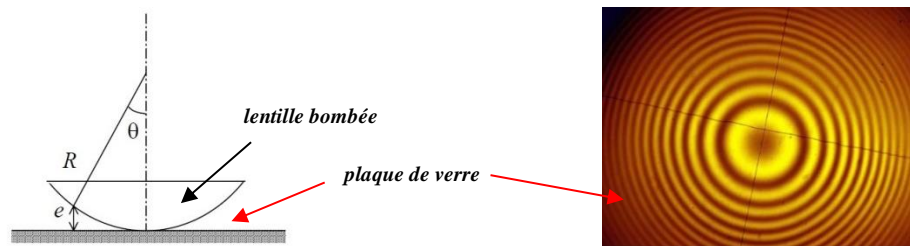
¹ Un Herz (Hz) est une unité de mesure de fréquence. 1 Hz = une fois par seconde = 1 s⁻¹ = 1/s. Fréquence de tant de Hz = nombre de fois qu'un événement périodique se produit à l'identique par seconde. Un Mégahertz (MHz) = un million de fois par seconde.

² Claude Allègre, *Petit dictionnaire amoureux de la science*, Paris, Pocket, 2013, p.437 : *Un peu de science pour tout le monde*, Paris, Fayard, 2003, p.86.

³ Kane/Sternheim, *Physique*, op. cit., p.516.

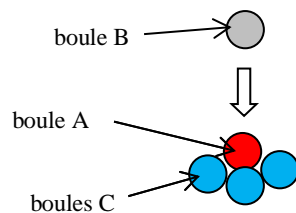
⁴ http://res-nlp.univ-lemans.fr/NLP_C_M09_G01/co/Contenu_042.html.

Les anneaux de Newton (observés en réflexion)



Il appartient à Huygens d'améliorer la vision de son temps sur la lumière. Dans son *Traité de la lumière*, publié en 1690, il proposa une théorie ondulatoire des phénomènes optiques. Pour Huygens, la lumière se propage sphériquement dans l'éther. *Le phénomène d'onde lui permet d'interpréter le fait que deux lumières se croisent sans en être affectées, contrairement à ce qui se passerait s'il s'agissait de corpuscules.*¹ Il fait l'analogie avec le son qui, écrit-il, *s'étend tout alentour du lieu où il a été produit par un mouvement qui passe successivement d'une partie de l'air à l'autre.*² Il étend son analogie à un liquide perturbé comme l'eau quand on y jette une pierre. Des rides se produisent. La ressemblance de la lumière avec ce phénomène l'amène à reprendre à son compte le terme d'*onde*.

L'analogie de la lumière avec le son, comparé à *un tremblement réglé de l'air*, permet à Huygens de comprendre que la lumière ne se propage en un instant comme le croyait Descartes. Elle se propage de façon pulsatoire, i.e. sans transport de matière, et successive selon un mécanisme de transmission en droite ligne rappelant le choc des corps. L'analogie de la lumière avec l'eau suggère à Huygens que la lumière se propage de tous côtés. Huygens fusionne les deux analogies en présentant le schéma suivant où une boule A, au contact de trois boules C, est heurtée par une boule B :



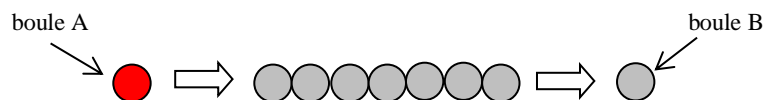
Une boule A en touche plusieurs pareilles CCC. Quand elle est frappée par une boule B, elle impressionne toutes les CCC qu'elle touche. Elle leur transporte tout son mouvement et demeure après cela immobile comme la boule B également.

(Christian Huygens, *Traité de la lumière*)³

Huygens suppose un éther pour imaginer une transmission dans le vide, mais les boules en question n'ont pas le même statut que ce milieu luminifère. La métaphore mécanique a ses limites. Huygens est très clair : *je ne vois pas qu'il soit besoin de supposer que les particules éthérées soient de forme sphérique.*⁴ Ce qu'il faut surtout retenir, c'est la propagation du mouvement dans toutes les directions.

Sur la base de son concept d'onde, Huygens dépasse la mécanique de son temps en complétant sa théorie de la lumière par deux principes.

Le premier énonce l'idée de composition ou superposition : *les ondes s'unissent de sorte que sensiblement elles se composent en une seule onde.* Huygens réfute par avance l'objection d'un entrecroisement des ondes. Il note qu'il est certain qu'une même particule de matière peut servir à plusieurs ondes de même que, dans une rangée de boules d'égale grandeur une boule située au centre transmet le mouvement reçu sans déplacement.⁵ Pour se faire entendre, Huygens suggère un autre schéma dans lequel le mouvement d'une boule A rejaille dans le mouvement d'une boule D :



¹ Jean-Claude Bodenot, *Histoire de la physique et des physiciens*, Paris, Ellipses, 2001, p.126.

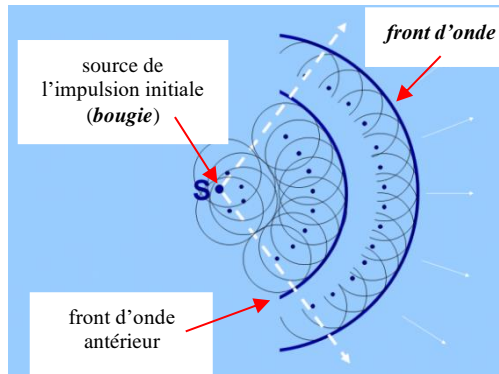
² Christian Huygens, in J.-C. Bodenot, p.126.

³ Texte allégué, in Fabien Chareix, *La philosophie naturelle de Christian Huygens*, Paris, Vrin, 2006, p.249.

⁴ *Ibid.*

⁵ Christian Huygens, in J.-C. Bodenot, p.126; F. Chareix, *La philosophie naturelle de Christian Huygens*, p.251.

Le choc des corps guide toujours l'hypothèse ondulatoire, mais il reste entendu que la lumière n'est pas constituée de véritables corpuscules. La lumière résulte d'impulsions qui se propagent dans le milieu de l'éther dans toutes les directions possibles. Chaque onde agit comme une source secondaire, chacune devenant le point de départ d'une autre onde qui émet, à son tour, une ondelette dans son voisinage. Toutes les ondelettes se rejoignent en un *front d'onde*, tangent à toutes les ondelettes. Cette idée d'une tangente commune définit le second principe dit de Huygens :

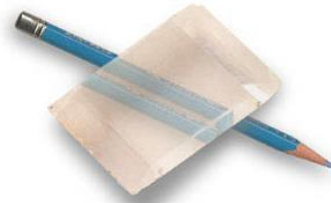
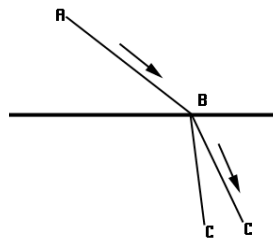


Le front d'onde représente l'*enveloppe* des points en phase, c'est-à-dire que tous ces points ont mis le même temps de parcours depuis la source. Le front d'onde évolue dans l'espace à la vitesse de propagation de l'onde sphérique dans une direction *normale* (perpendiculaire) à la surface.

Le point S peut être l'éclairage d'une flamme de bougie, comme le suggère Huygens sur un dessin en 2D.

Plus précisément, le front d'onde est l'enveloppe des ondelettes émises par tous les points d'un front d'onde antérieur.¹

En résumé, Huygens arriva à la conclusion qu'une source lumineuse émet des impulsions successives, donnant naissance à une perturbation localisée sur une surface appelée *front d'onde*. Sa conception du comportement ondulatoire de la lumière lui permit d'éclairer le phénomène de double réfraction, découvert à l'époque en observant le passage de la lumière à travers un cristal d'Islande.²



La biréfringence est la propriété physique d'un matériau dans lequel la lumière se propage de façon anisotrope (le trajet du rayon lumineux est altéré dans certaines directions). Pour expliquer ce phénomène de biréfringence, Huygens envisage des formes non sphériques mais ellipsoïdales (des demi-ellipses) comme surfaces d'ondes.³

L'approche se révéla fructueuse, mais l'aura de Newton fit de l'ombre à la conception de la lumière d'Huygens. *C'est grâce à l'autorité acquise par son auteur que l'optique newtonienne fut mieux acceptée en dépit des problèmes et des anomalies qu'elle recelait. La théorie ondulatoire connut un sévère purgatoire au XVIII^e siècle, mais purgatoire ne signifie pas mort et disparition. Un des plus formidables savants du siècle se fit l'avocat de cette cause. Ce fut Euler.*⁴ Sans entrer dans les détails de son argumentation, voici ce qu'il écrit dans sa correspondance à une princesse d'Allemagne :

*Pour ce qui regarde la propagation de la lumière par l'éther, elle se fait d'une manière semblable à la propagation du son par l'air. Comme un ébranlement causé dans les particules de l'air constitue le son, de même un ébranlement causé dans les particules de l'éther constitue la lumière ou les rayons de lumière de sorte que la lumière n'est autre chose qu'une agitation ou ébranlement causé dans les particules de l'éther qui se trouve partout à cause de l'extrême subtilité avec laquelle il pénètre tous les corps.*⁵

¹ https://fr.wikipedia.org/wiki/Front_d'onde ; <http://www.gatinel.com/recherche-formation/diffraction/huygens-principe-de/>

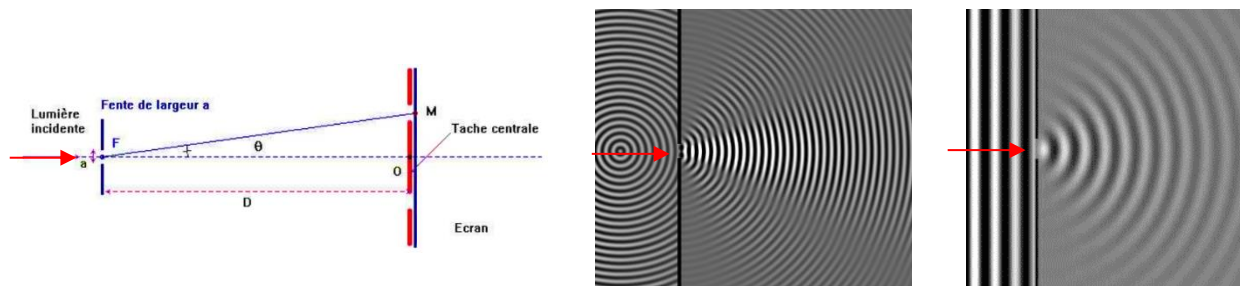
² <http://www.gemstones.net.au/en-au/physical/refraction.aspx> ; <http://www.olympusmicro.com/primer/lightandcolor/birefringence.html>.

³ F. Chareix, *La philosophie naturelle de Christian Huygens*, pp.255-256.

⁴ Vincent Jullien, *L'histoire des sciences pour les nuls*, Paris, First éditions, 2009, p.297.

⁵ L. Euler, *Lettres à une princesse d'Allemagne* [1760-1762], op. cit., L.20, pp.37-38.

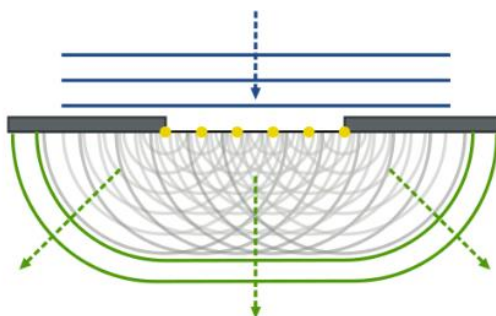
La théorie ondulatoire n'en présente pas moins des défauts. Huygens continua d'assimiler la lumière à la propagation d'une vibration longitudinale dans un milieu spécifique (*l'éther*). La lumière se propagerait en ligne droite. Cette vue n'est plus admise dans la conception électromagnétique de la lumière. Le savant hollandais négligea en outre d'appliquer sa théorie originale au phénomène de diffraction alors que ce fait est plus compréhensible avec l'idée d'onde. *Il est analogue à ce qu'on peut voir avec des ondes qui se déplacent sur l'eau et de heurtent à un obstacle : les bords de la fente se comportent comme des sources secondaires qui réémettent la lumière dans toutes les directions.*¹



La diffraction se produit lorsqu'une onde rencontre un obstacle matériel (fil, cheveu, poussière, ...) ou une ouverture dans une surface (fente, trou, ...). L'onde peut être aussi mécanique, i.e. portée par un milieu matériel (ondes sonores, déformations de la surface de l'eau ...) qu'électromagnétique (lumière). La *fig.a* représente une lumière incidente diffractée par une fente d'une dimension proche de sa longueur d'onde. Plus l'ouverture est petite, plus le phénomène de diffraction est marqué. Sur l'écran apparaissent des taches lumineuses séparées par des zones sombres. La *fig.b* représente la diffraction d'ondes circulaires. Sur La *fig.c*, la même ouverture a diffracté les ondes de surface formées dans une cuve (on peut y voir des vagues entrant dans un port).²

Grâce à la diffraction, des détails fins deviennent plus visibles. On peut entendre également une conversation en se plaçant devant une porte entr'ouverte, mais le son est souvent déformé. La diffraction limite de même la résolution des appareils d'optique (le détail d'une image ne peut être détecté que s'il a une dimension supérieure au flou créé par la diffraction). Il reviendra à Fresnel en 1815 d'interpréter correctement la diffraction de la lumière en complétant le principe de Huygens.

Selon ce nouveau principe, chaque élément d'un front d'onde peut être considéré comme le centre d'une perturbation secondaire qui donne naissance à des ondelettes sphériques. Cependant, l'intensité des ondelettes décroît graduellement dans la direction opposée de propagation (Huygens prévoyait une intensité uniforme émise dans toutes les directions à partir de chaque point du front d'onde). Dans le phénomène de diffraction, tous les points de la fente produisent également des ondes sphériques, mais ces ondes n'interfèrent plus les unes avec les autres de la même façon que dans un front d'onde où la somme des ondelettes est nulle partout sauf sur la tangente commune.³



La diffraction est le résultat de l'interférence des ondes diffusées par chaque point. Il n'y a pas de diffraction sans interférences, bien qu'il existe des interférences sans diffraction (ex : anneaux de Newton).⁴ L'idée d'onde ne finit pas de faire des vagues... jusqu'en droit, avec précisément cette notion d'interaction entre ondes. L'expérience de Thomas de Young sera fort éclairante à cet égard.

¹ C. Allègre, *Petit dictionnaire amoureux de la science*, op. cit., p.438.

² http://www.lerepairedessciences.fr/terminale_S/Observer/chap3/TS_chap3.pdf ;

http://melusine.eu.org/syracuse/G/pstricks/cuve_a_ondes/diffraction_cuve/animation02/ ; <http://lewebpedagogique.com/physique/ondes-mecaniques-progressives-periodiques-ce-qui-faut-en-retenir>

³ Alexis Poncet, *Le phénomène de diffraction*, 25 mars 2014. <https://www.eleves.ens.fr/home/aponcet/files/Diffraction-web.pdf>. Le nouveau principe est appelé *le principe de Huygens-Fresnel*.

⁴ <https://fr.wikipedia.org/wiki/Diffraction>.

§ 41. - L'EXPERIENCE DE YOUNG ET SON RAPPORT AU DROIT

a) L'expérience de Young, 19/

i une source lumineuse face à deux trous, 197

ii Phase et déphasage, 197

b) Un modèle de raisonnement en droit constitutionnel

i Un rapprochement inédit

ii Diverses voies de passage

iii Les trajets des « enclosure bills »

iv Une interférence spécifique

v Plus de deux fentes

c) Un effet final de moirage

i Un nouvel art du tissage

ii Moirage et manœuvres en sous-main dans l'Union européenne

Annexe, 201

o

a) L'expérience de Young

i une source lumineuse face à deux trous

(§11)

Au tout début du XIX^e siècle, Thomas Young repense l'analogie de Huygens entre les ondes sonores et les ondes lumineuses. Nous avons déjà rencontré Thomas Young en évoquant la théorie de la couleur (optique, et non picturale) comme combinaison linéaire de trois couleurs primaires (rouge, bleu, vert). Bien que Newton fût l'auteur de la première théorie mathématisée du son (*Principia*, Bk II, sect. 8), il continua de ne pas croire à la nature ondulatoire de la lumière en s'efforçant d'expliquer le phénomène d'interférences par le mécanisme des accès :

Pour Newton, un corpuscule de lumière possède périodiquement, le long de sa trajectoire, des « accès » de transmission aisée et des « accès » de réflexion aisée. Il explique ainsi les franges d'interférence, successivement sombres et claires.¹

Newton ne convainquit ni Euler ... ni, un demi-siècle plus tard, le jeune Thomas Young. Dans sa Communication *Son et Lumière* qu'il présenta en 1800, ce dernier pointa les insuffisances du système newtonien reposant sur l'idée d'une émission de particules de lumière se succédant le long de lignes droites, à très grande vitesse, dans toutes les directions de l'espace. Pourquoi, notamment, deux faisceaux de lumière peuvent-ils se croiser sans se modifier ?

Thomas Young répond à la question : *Lorsque deux ondulations, issues de sources différentes, coïncident en direction parfaitement ou de manière rapprochée, leur effet commun est une combinaison des mouvements de chacune.* (Proposition VIII). Dans la même Communication, Thomas Young explicite son propos ainsi :

Si deux ondulations de même fréquence coïncident exactement, le mouvement résultant est le plus intense ; si elles présentent un écart d'une demi-oscillation, le mouvement résultant est le plus faible, voire nul.²

Dans son mémoire *Expériences et calculs relatifs à l'optique physique*, présenté également à la *Royal Society* en 1803, Thomas Young étaye son principe de démonstrations expérimentales à l'occasion desquelles il propose le terme d'*interférences* pour qualifier l'interaction des ondes lumineuses. Dans ce Mémoire, il décrit l'expérience de deux trous (ou de deux fentes) qui porte aujourd'hui son nom.

¹ Riad Haidar, *Thomas Young et la théorie ondulatoire de la lumière*, janv.2011, <https://www.bibnum.education.fr/pdf>, p.3, n.2.

² *Ibid.*, p.6.

(Annexe)

Comme chez Huygens, Thomas Young est parvenu à ce résultat sur la base d'une analogie avec les ondes sonores.

Contrairement à l'idée reçue de son époque, Thomas Young avait remarqué que l'intensité du son produit par un nombre donné d'instruments de musique identiques n'est pas en proportion du nombre d'instruments : il y a des endroits où le son est moins intense, et d'autres où il est plus intense. De plus, le phénomène des battements des ondes sonores l'aurait conduit à l'idée de l'interférence des vibrations : les ondulations d'où résultent ces battements ne sont ni de même origine ni de même période, mais si les périodes sont peu différentes, ces vibrations se renforcent ou s'affaiblissent comme le confirme l'oreille.¹ L'écoute attentive des harmoniques fut une bonne école pour le savant !

Thomas Young devint à même de comprendre des phénomènes restés jusqu'ici mystérieux : les anneaux colorés de Newton, les couleurs des lames minces et certaines figures de diffraction.

Le phénomène des interférences lumineuses à la surface de lames minces avaient déjà été observées au XVII^e siècle en Angleterre par Boyle puis Hooke. Young reprend cette expérience consistant à diriger un faisceau lumineux sur une lame mince, taillée dans un cristal de façon que les deux faces soient parallèles. Young suggère une explication : la lumière réfléchie en partie sur la première face de la lame (trajet SCO) s'ajoute à l'autre partie de la lumière réfléchie sur la deuxième face (trajet SAEFO). Cette addition détermine la formation de franges.²

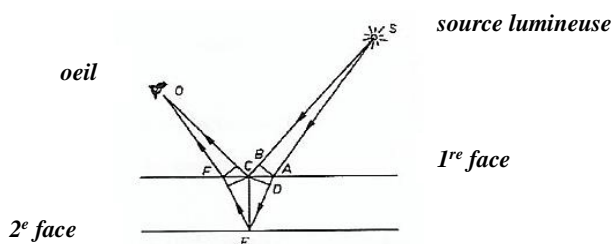


Schéma de Young expliquant l'obtention des franges à partir de lames minces

Thomas Young ne fait pas que réveiller la thèse de Christian Huygens qui considérait que tous les points d'une onde peuvent être le siège d'un nouvel ébranlement. Huygens ne faisait pas d'hypothèse sur la périodicité de l'onde alors que Young, pour mieux expliquer le comportement de la lumière, fait état de vibrations périodiques d'une onde continue et non plus d'une série d'impulsions.

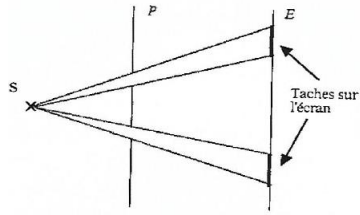
Thomas Young réalise deux autres expériences qui confirment et affinent son point de vue. D'abord, il montre que si on éclaire un écran à travers une fente étroite, il se forme des franges très lumineuses en des points qui auraient dû restés dans l'ombre si la lumière s'était propagée en ligne droite. *Une fois passé la fente, le pinceau lumineux s'élargit et éclaire, grâce à un halo d'intensité plus faible, une zone plus large que ne le faisait supposer la taille de la fente. C'est le phénomène de diffraction.*³

Le jeune savant réalise une autre expérience qui conforte davantage la théorie ondulatoire de la lumière. Au moyen d'une double fente, il montre encore plus étonnamment que deux rayons lumineux peuvent se combiner pour produire une alternance de bandes claires et sombres. Il n'est plus question seulement de diffraction, mais d'interaction. Figurent sur l'écran des *franges d'interférence*.

¹ Intissar Romdhane, *La cohérence de la lumière et les interférences lumineuses*, Univ. Paris 7 Diderot, Thèse, 2007, p.92.

² *Ibid.*, p.93.

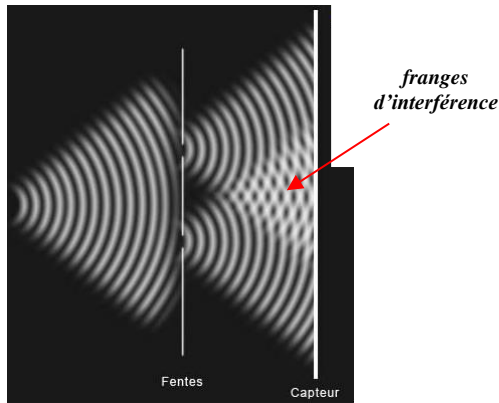
³ C. Allègre, *Un peu de science pour tout le monde*, op. cit., p.96.



Trous de Young en théorie corpusculaire

Les bandes sombres indiquent une destruction mutuelle des faisceaux qui peut se comprendre aisément dans une approche ondulatoire et s'expliquer très difficilement dans un modèle corpusculaire.¹

Conformément à la première expérience, chaque fente va donner une zone de lumière étendue, mais apparaît une zone où les halos de lumière se superposent



On aurait pu penser que, dans la mesure où deux zones lumineuses se superposaient, la résultante serait encore mieux éclairée, plus lumineuse, plus brillante. Or, à l'inverse, on constate sur l'écran de cannelures de franges, autrement dit de petites bandes alternativement noires (je dis bien noires) et blanches, beaucoup plus brillantes.

Les bandes brillantes ne posent pas de problème, car le phénomène est conforme à l'intuition, à savoir que la lumière renforce la lumière : la lumière provenant d'une fente s'additionne à la lumière venue de l'autre.

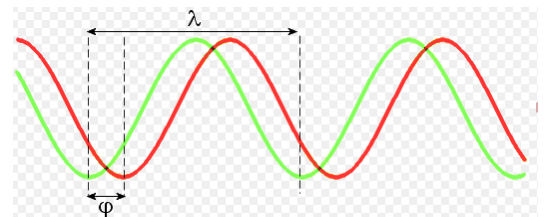
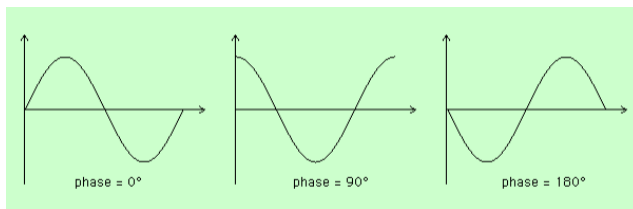
Mais les bandes noires ? Il faut se rendre à l'évidence : en certains endroits de la lumière, plus de lumière donnait de l'obscurité, du noir. L'addition de lumières était noire !²

En masquant l'une des fentes, les franges disparaissent. Young explique l'interférence lumineuse en mettant en avant la notion de *longueur d'ondulation*, appelée aujourd'hui longueur d'onde. Fort de cette notion, il établit les conditions d'obtention de ce fait d'interaction étrange, bizarre, inattendu.

ii Phase et déphasage

(§37-ii)

Nous avons vu que des ondes mécaniques, telles que les rides d'un étang sur lequel tombent des gouttes d'eau, pouvaient donner lieu à des phénomènes d'interférence. Par certains côtés, les ondes lumineuses se comportent de façon semblable. Leur interaction forme une vague qui résulte de deux vagues identiques qui se croisent. Elle est soit deux fois plus haute lorsque les crêtes de l'une correspondent aux crêtes de l'autre, soit inexistante lorsque les crêtes de l'une comblent les creux de l'autre. Autrement dit, les ondes s'additionnent si elles sont *en phase* et s'annulent *en déphasage*.



La phase est un décalage. Elle s'exprime en degrés. Le premier dessin présente une phase φ nulle, le second une phase $\varphi = 90^\circ$, et le dernier une phase $\varphi = 180^\circ$. Ce sont des cas particuliers de déphasage. On remarquera que les maxima des premier et dernier dessins sont symétriques par rapport à l'axe horizontal. On dit qu'ils sont en *opposition de phase* (en déphasage de $\pm\pi$).³

Deux ondes de même longueur d'onde λ présentent un déphasage φ . Si φ égalait 0, les ondes seraient en phase. Un déphasage négatif correspond à un *retard de phase* tandis qu'un déphasage positif correspond à une *avance de phase*. Dans un phénomène périodique, on ne peut parler d'un simple décalage. **Le décalage se répète.**⁴

¹ I. Romdhane, *La cohérence de la lumière et les interférences lumineuses*, p.96 ; Kane/Sternheim, *Physique*, op. cit., p.528.

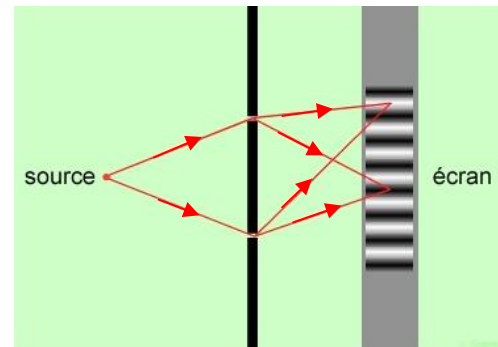
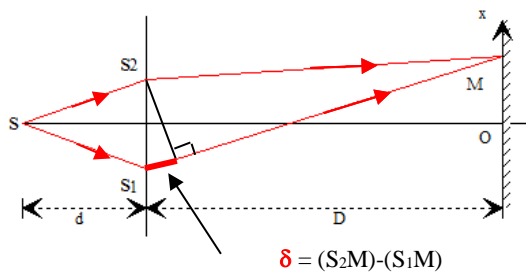
² <http://www.lmpt.univ-tours.fr/~brodier/Galois/expose.html> ; C. Allègre, *Un peu de science pour tout le monde*, op. cit., p.98.

³ http://astronomia.fr/1ere_partie/lumiere.php.

⁴ <https://fr.wikipedia.org/wiki/Déphasage>.

Thomas Young modélise toutefois la lumière comme une onde sinusoïdale alors l'onde est transversale sur une surface d'eau comme il a été rappelé avec l'image du petit bateau sur la mer. En clair, l'énergie se déplace dans le sens de déplacement de l'onde. Soient S une source lumineuse et S_1 et S_2 les deux fentes qui se comportent comme des sources secondaires. M est un point situé sur l'écran. Pour décrire l'amplitude de la vague résultante, on peut écrire : $E_1 = E_0 \cdot \sin(\omega \cdot t)$ et $E_2 = E_0 \cdot \sin(\omega \cdot t - \Delta\phi)$ où E_0 est l'amplitude, ω la pulsation des ondes, $\Delta\phi$ leur déphasage et t le temps.

(Quand le phénomène périodique est une rotation comme dans une onde longitudinale, la fréquence f est liée à la vitesse angulaire ω , dite pulsation ou fréquence angulaire, soit $\omega = 2\pi f$. Un tour vaut 2π radians. Le lecteur peu habitué à cette notation pensera à un point d'une roue de vélo qui tourne et revient au même point au bout d'un tour, soit la circonférence de la roue, soit 2π si son rayon $R = 1$.)



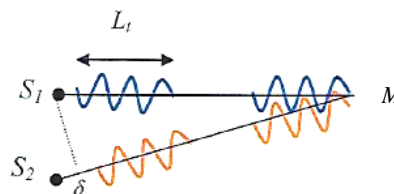
$\Delta\phi$ caractérise le fait qu'une onde a **un certain retard par rapport à l'autre**. En effet, pour arriver au point M , le chemin à parcourir n'est pas de la même longueur pour la lumière qui provient d'une source ou de l'autre.

Si $\Delta\phi$ est un multiple pair de 2π , les ondes s'ajoutent et on obtient une frange lumineuse sur l'écran, que l'on appelle une **interférence constructive**. En revanche, si $\Delta\phi$ est un multiple impair de 2π , alors les ondes s'annulent et on obtient une frange sombre sur l'écran, que l'on appelle une **interférence destructive**. [Le déphasage, dû à une différence de marche] explique pourquoi on observe, sur l'écran, des franges successivement claires et sombres.¹

Sur la fig. de gauche, l'état d'interférence au point M dépend du chemin optique parcouru par la lumière émise par S_1 entre S_1 et ce point et du chemin optique parcouru par la lumière par S_2 entre S_2 et ce point. Plus précisément, l'état d'interférence en M dépend de la différence de chemin optique (la différence de marche δ , avec $\delta = (S_2M) - (S_1M)$ qui peut être calculé en passant par la trigonométrie).

La notion de déphasage n'est pas limitée aux ondes sinusoïdales. Tout phénomène périodique peut présenter des déphasages, mais les interférences lumineuses répondent à des conditions d'obtention particulières.

Les ondes qui interfèrent en M ne doivent pas seulement être sinusoïdales. Elles doivent être **cohérentes**, i.e. être synchrones (avoir la même fréquence) et partir d'une source unique S . Le **train d'ondes** qu'elles émettent (il n'existe pas d'onde sinusoïdale de durée infinie) doit présenter un déphasage constant. Il faut que la différence de marche δ entre les sources secondaires et le point M soit petite devant la longueur d'un train d'onde L_t pour que les trains d'onde provenant de S_1 et S_2 puissent se superposer. Une différence δ trop grande entraîne une perte totale de cohérence.²



Trains d'ondes, issus de deux sources, arrivant en un même point

¹ *Ibid.* ; http://uel.unisciel.fr/physique/interf/interf_ch02/co/sexcercer_ch02_05.https://fr.wikipedia.org/wiki/Fentes_d'Young.

² I. Romdhane, *La cohérence de la lumière et les interférences lumineuses*, op. cit., pp.69-70.

Aujourd'hui, il n'apparaît pas toujours nécessaire que les ondes proviennent d'une source primaire unique S. On peut obtenir des interférences lumineuses à partir de deux lasers identiques. (Chaque laser émet déjà par lui-même une lumière de phase constante plutôt qu'aléatoire ou incohérente.)

En revanche, Thomas Young a négligé une condition en ne prenant pas en compte la largeur de la source primaire. Si la source est étendue, il y aura addition d'ondes incohérentes émises par chaque point source, ce qui peut brouiller les interférences. On parle dans ce cas de *cohérence spatiale*, définie comme la capacité de chacun des points du front d'onde à interférer avec n'importe quel autre point. La cohérence spatiale n'est pas à confondre avec la cohérence des ondes précédemment évoquée, qualifiée de *cohérence temporelle* (les ondes sinusoïdales doivent avoir la même fréquence, ou la même longueur d'onde, ce qui impose que la lumière émise de S soit monochromatique).¹

Telles sont les principales propriétés requises pour obtenir des interférences lumineuses. Ces propriétés seront précisées et complétées par Fresnel au cours de la première moitié du XIX^e siècle dans le cadre d'une théorie mathématique rigoureuse ne négligeant pas non plus l'expérience (Fresnel utilisera deux miroirs plans faisant entre eux un petit angle. Sur chacun des miroirs parois, il fera tomber un faisceau lumineux. Les deux faisceaux réfléchis se croiseront. Dans la région qui leur est commune, Fresnel observera le même phénomène d'interférence que découvrit Thomas Young.)²

Avec Huygens, l'époque a appris que la lumière est une vibration. Avec Thomas Young, que les vibrations lumineuses s'additionnent ou se soustraient, se renforcent ou s'annulent, mais la théorie corpusculaire de la lumière de Newton n'est pas devenue obsolète. Ne parle-t-on encore de rayon, de faisceau, de trajet, de train ? La description de la lumière suggère que ses aspects corpusculaire et ondulatoire coexistent. Il faudra toutefois attendre le XX^e siècle pour voir concilier une telle dualité.

Le droit, en revanche, n'a pas attendu aussi longtemps pour adopter le mode de raisonnement en œuvre dans l'expérience de Young.

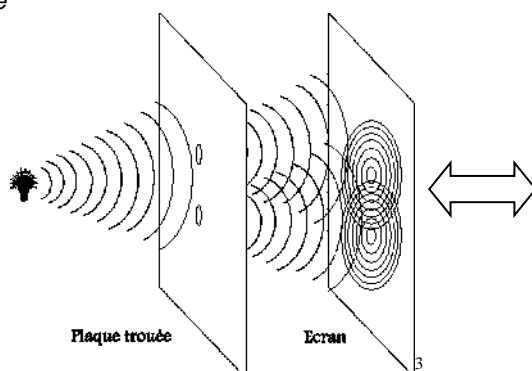
b) Un modèle de raisonnement en droit constitutionnel

- i Un rapprochement inédit. ii Diverses voies de passage. iii Les trajets des enclosure bills.*
- iv Une interférence spécifique. v Plus de deux fentes*

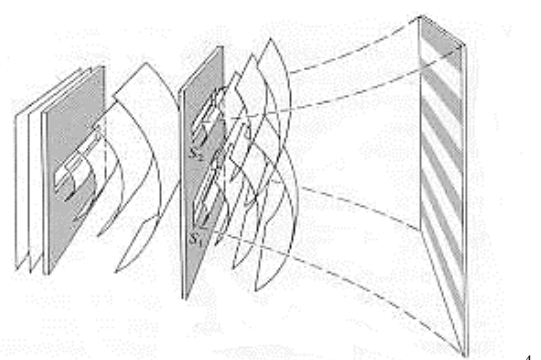
c) Un effet final de moirage

- i Un nouvel art du tissage*
- ii Moirage et manœuvres en sous-main dans l'Union européenne*

Annexe



Interférence avec deux trous de Young



Interférence avec deux fentes de Young

¹ https://fr.wikipedia.org/wiki/Onde_monochromatique. La lumière d'un laser est hautement chromatique. Kane/Sternheim, *Physique*, p.529.

² I. Romdhane, *La cohérence de la lumière et les interférences lumineuses*, p.47.

³ http://www.obs.u-bordeaux1.fr/radio/JMHure/Docs/MIS103_2006JMH1.pdf

⁴ <https://www.u-picardie.fr/~dellis/TpMaitrise/interferences.htm>.

§ 42. – LE CARACTERE PERTURBATEUR DE LA RESONANCE

1/ La résonance en physique, 202

i L'expérience de Huygens, 202

ii Les conditions de la résonance, 204

iii Vues théoriques, 206

iv L'effet perturbateur de la résonance, 208

v Comment lutter contre un tel effet ? 180

2/ Le contrôle de la résonance en droit

a) Résonant = oppressant

b) Le « tore » électoral

c) Degrés d'amortissement et « disbalance »

3/ Résonance non-linéaire et chaos, 213

i Un pendule double ou triple, 213

ii Du non-linéaire problématique

Annexe, 215

○

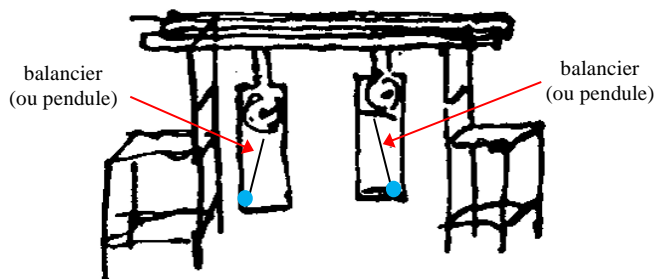
1/ La résonance en physique

i L'expérience de Huygens

Christian Huygens n'a pas travaillé au XVII^e siècle sur la seule lumière, ni sur le barycentre, ni sur l'idée de réguler les horloges au moyen d'un pendule. Incidemment, il a remarqué que deux horloges à balancier, placées sur une même cloison, synchronisaient leurs mouvements. Il y avait égalité parfaite entre leurs périodes.

Mystère. Les deux balanciers se mettaient en opposition de phase. Ils oscillaient systématiquement en opposition, comme si l'un était le miroir de l'autre. Quand l'un allait gauche, l'autre allait à droite. Que l'on perturbe l'un ou l'autre mouvement, au bout d'une demi-heure, le couplage reprenait ses droits !

Huygens a tenté d'expliquer ce mystère. Ce sont les courants qui créeraient l'interaction entre les deux horloges. Huygens intercale une planche de bois. Le phénomène d'interaction cadencée des horloges se reproduit. Huygens suspendit les deux horloges sous deux planches.



Dessin de Huygens¹.

Les pendules finissent par se balancer exactement en direction opposée

A première vue, rien ne change. Les deux horloges demeurent en parfaite synchronie, l'une faisant **tic** lorsque l'autre fait **tac**.

En décalant volontairement le balancement de l'un des deux pendules, Huygens s'aperçoit que les chaises supportant les deux planches sur lesquelles sont suspendues chacune des horloges se mettent étonnamment à se balancer sous la force oscillatoire des pendules désynchronisés, cette vibration subite ne cessant que lorsque les deux pendules retrouvent leur cadence.²

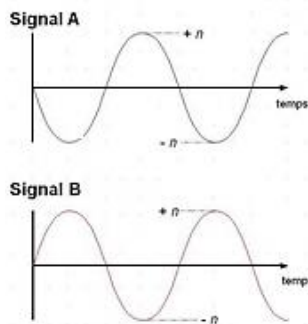
¹ Sciences & Avenir, *Synchronisation des horloges : une énigme de 350 ans en passe d'être résolue*, 27 juil. 2015.

² Maxime Sainte-Marie, *Les horloges sympathiques : l'organisation sociale au rythme de la syntonisation*, Les Cahiers du LANCI (Laboratoire d'Analyse Cognitive de l'Information), Univ. du Québec à Montréal, mars 2008, p.3.

Pour décrire ce qu'il observe, Huygens parle de *sympathie*. C'est une métaphore. Les deux horloges battent toujours ensemble, de façon (presque) parfaite. Les deux pendules sont de même longueur, donc de même longueur d'onde. Dès que l'on commence à faire osciller l'un d'eux, le deuxième commence à osciller de plus en plus fort à la même fréquence jusqu'à ce qu'ils s'équilibrent. Comme le rapporte Huygens à un membre de la Royal society, les chaises, à ce moment, ne bougent plus.

Se rappeler que la période propre d'un pendule est proportionnelle à la racine carrée de sa longueur (§31-i). Or **la longueur d'onde est l'équivalent spatial de la période temporelle**, sachant que la longueur d'onde est la distance parcourue par l'onde au cours d'une période. On voit le lien entre la longueur du pendule et la longueur d'onde. (La masse du pendule oscille de part et d'autre de sa position d'équilibre au point le plus bas du mouvement du pendule. En posant que la position d'équilibre est à $x=0$, on peut dire que la position prend alternativement des valeurs positives et négatives. Le graphe de la position du pendule en fonction du temps a l'allure d'une onde sinusoïdale.)

Huygens a compris que les deux pendules interagissaient via la cloison. La sympathie était dû à d'imperceptibles mouvements que les pendules transmettent à leur support solide, que ce soit une cloison, un mur, une barre en bois ou un plancher. La science d'aujourd'hui a confirmé la chose en deux temps. Des physiciens ont d'abord montré que la force du couplage dépend du rapport de la masse des pendules (les deux pendules ont la même masse) sur celle de l'ensemble du système.



Lorsque ce rapport est petit, le couplage est important et les pendules reviennent en opposition de phase. Si les pendules étaient en phase, leurs effets conjugués entraîneraient le déplacement du support. Le mouvement de ce dernier étant très amorti, l'énergie du système s'épuiserait et les pendules s'arrêteraient. Au contraire, lorsque les pendules sont en opposition de phase [cf. fig.] l'énergie du système reste stable. Il tend donc vers cet état.

Lorsque le rapport des masses augmente et que le couplage diminue, aucune synchronisation ne se produit.¹

En clair, le couplage dépend du lest (masse pesante) installé sur le support. Quand il est léger, la synchronisation est si forte que l'une ou les deux horloges finissent par s'arrêter. Quand il est très lourd, les horloges retrouvent leur indépendance. Voilà le contexte. D'autres chercheurs ont montré que la modification des mouvements des balanciers est liée à la production d'impulsions sonores. Les impulsions sont infimes. Leur modèle mathématique fait appel à la théorie (déterministe) du chaos.²

Le balancement d'un pendule peut être décrit par une fonction sinusoïdale dans le temps. Le balancement d'un second pendule par une seconde fonction sinusoïdale dans le temps. La somme de deux fonctions sinusoïdales synchrones présente une amplitude maximale lorsque les deux sinusoïdes sont en phase, et minimale lorsqu'elles sont en opposition de phase. Dans les deux cas, les pendules finissent par décrire le même mouvement. Il s'agit d'une synchronisation dite spontanée.

L'expérience de Huygens a été de nos jours répétée en plaçant deux (ou plusieurs) métronomes sur une planche posée elle-même sur deux canettes vides. Les métronomes sont réglés de façon à ce qu'ils oscillent à la même fréquence (par ex. 192 battements par mn). Avec une pichenette, on démarre les métronomes l'un après l'autre. Leurs mouvements sont donc, au départ, tous décalés. Au bout d'un certain, les métronomes se synchronisent, non plus en opposition de phase, mais en phase, la planche oscillant légèrement de plus en plus en même temps. En plaçant la planche sur une table, les pendules oscillent à nouveau de façon désynchronisée tandis que la planche, elle, ne bouge plus.³

Ici encore, le couplage des métronomes est issu du mouvement non amorti de la base commune. C'est la planche sur lequel ils sont situés qui permet leur synchronisation.

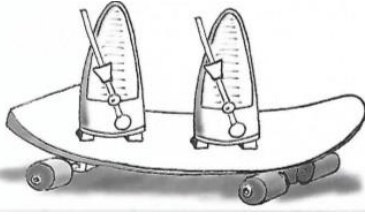
L'absence de synchronisation en phase observée dans l'expérience de Huygens peut être expliquée par de larges oscillations du balancier qui déstabilisent la synchronisation en opposition de phase. Cependant, cette synchronisation peut tout de même être obtenue en augmentant

¹ Laurette Tuckerman, *Les pendules de Huygens*, Pour la science, n° 301, août 2003, p.23.

² Henrique M. Oliveira & Luis V. Mel, *Huygens synchronisation of two clocks*, Scientific reports 5, Article number: 11548, 12 May 2015.

³ Harvard Natural Sciences Demonstrations, *Synchronisation of metronomes*, 8 juin 2010, <https://www.youtube.com>.

l'amortissement de la base [c'est-à-dire la masse du support], ou en utilisant de très larges oscillations de fréquences.¹



Lorsqu'un métronome oscille, il transmet une partie de son énergie à la planche qui elle-même va perturber le second métronome.

Ces perturbations modifient le mouvement de telle sorte que le plus lent augmente légèrement sa fréquence de battements. Le plus rapide au contraire va la diminuer. Si au départ les deux métronomes sont réglés sur des fréquences différentes, mais voisines [les deux métronomes battent des mesures légèrement différentes], la synchronisation va s'opérer.²

On trouve de nombreux exemples de synchronisation dans la nature : le chant des criquets, le clignotement des lucioles à l'unisson (alors que deux lucioles séparées ne clignotent pas à la même fréquence), les bancs de poissons et les essaims d'oiseaux, les phénomènes de chasse collective chez les lions et les loups. L'organique n'y échappe pas quand on constate la syntonisation des cellules cardiaques (voire entre les rythmes cardiaques et le pacemaker implanté dans la cage thoracique) ni le social avec la syntonisation motrice (mimiques, applaudissements d'une foule, etc.).³

Certains de ces phénomènes avaient été entrevus à l'époque des Lumières.⁴ Ils démontrent l'importance comportementale et sociale de la synchronisation. Ils remettent en question l'idée d'un fondement exclusivement intentionnel à la coordination et coopération sociale. L'idée de *syntonisation* (qui étend celle de synchronisation mécanique à d'autres phénomènes physiques) permettrait de resserrer les liens d'une communauté en imposant aux hommes les mêmes contraintes que subissent les animaux, voire les corps matériels, mais on ne saurait négliger le phénomène de résonance qui vient perturber autant la synchronisation mécanique que la syntonisation et ses effets de socialisation.

ii Les conditions de la résonance

La résonance diffère de la synchronisation qui fait interagir deux systèmes, amenés par la force des choses à décrire le même mouvement. La résonance requiert un signal périodique externe, celui d'un oscillateur, appelé *excitateur* qui affecte un autre oscillateur, appelé *résonateur*. Ce dernier subit des oscillations forcées s'il oscille à **une fréquence imposée par l'excitateur**. L'exemple le plus simple est celui d'une balançoire. Le balancement ne peut s'amplifier que si on pousse la balançoire à intervalles réguliers correspondant à la fréquence de la balançoire. Celle-ci absorbe l'énergie fournie.



¹ www.msc.univ-paris-diderot.fr/.../Synchro/SynchronisationSpontanée, 16 mai 2015.

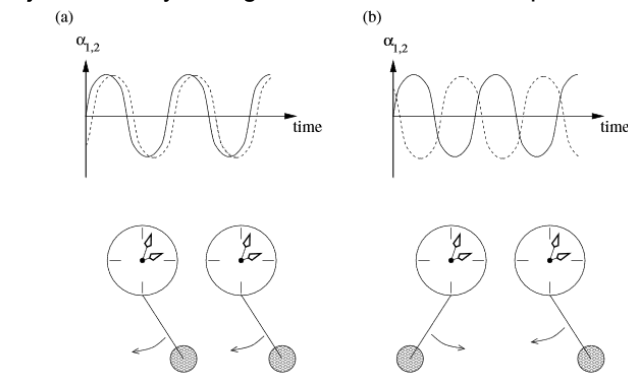
² André Deiber, Daniel Husson, Jean-Louis Isbicki, Roland Lehoucq, sous la direc. de Dominique Meier, *La physique pour les nuls*, Paris, First edit., 2009, p.382.

³ M. Sainte-Marie, *Les horloges sympathiques : l'organisation sociale au rythme de la synchronisation*, op. cit., passim.

⁴ Par ex., la synchronisation des lucioles avait observé en 1577 par Sir Francis Drake lors d'une expédition en Asie du Sud-Est (*ibid.*, p.12).

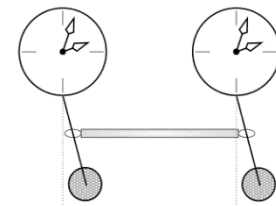
Fragonard, *Les hasards heureux de l'escarpolette* (1767-1769)¹

La synchronisation à la Huygens exige la présence de deux *self-sustained oscillators*, i.e. deux systèmes capables de générer leurs propres rythmes. N'entre donc pas dans cette catégorie par exemple le couple d'animaux lièvre-lynx- puisque chacune des deux espèces, qui interagit avec l'autre dans le cadre de la relation proie-prédateur, n'est pas un oscillateur elle-même. Si ces deux espèces sont séparées, on n'observerait aucune oscillation propre à chacune. La résonance exige également deux oscillateurs, mais, contrairement à la synchronisation, les deux oscillateurs sont capables d'ajuster leur rythme grâce à une interaction qui n'est pas faible (comme dans l'ex. de la balançoire).²



Possible synchronous regimes of two nearly identical clocks : they may be synchronised almost in-phase (a), with the difference $\phi_2 - \phi_1 \approx 0$, or in anti-phase (b), when $\phi_2 - \phi_1 \approx \pi$ [opposition de phase].³

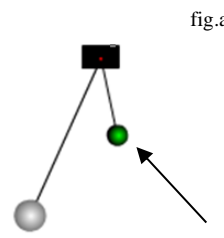
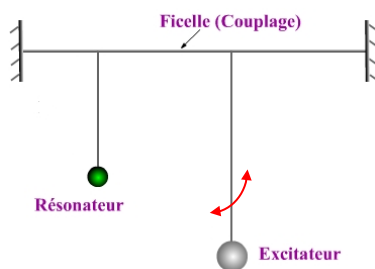
synchronisation spontanée



Les pendules sont ici couplés (en sus de la cloison qui les unit). Il n'y a plus de synchronisation spontanée. Les deux pendules se comportent comme s'ils entraînent en résonance. Les oscillations de l'un ne sont plus libres mais paraissent forcées par l'autre (voir plus bas l'analyse de deux pendules couplés).

synchronisation non spontanée

Dans l'expérience des métronomes, on pourrait croire que la synchronisation n'est pas seule en cause dans la mesure où la résonance du support semble forcer les métronomes à battre la même mesure. En fait, il s'agit moins d'une question de résonance que d'absence d'amortissement. Le mouvement de base de la planche, posée sur des canettes vides, conditionne la synchronisation spontanée. Quand on pose les métronomes sur une table ou un matelas, le phénomène disparaît. On parle, en revanche, de résonance lorsqu'un pendule, écarté de sa position d'équilibre, excite l'autre immobile :



résonateur

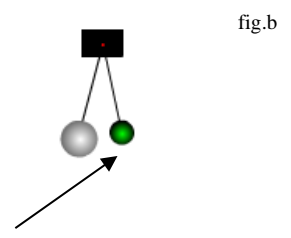


fig.b

On écarte l'excitateur de sa position d'équilibre d'un angle donné sans vitesse initiale pour qu'il oscille
 - soit à une fréquence beaucoup plus faible que celle du résonateur (**l'excitateur balance beaucoup moins vite**) (fig 2) ;
 - soit à une fréquence légèrement inférieure à celle du résonateur (fig.3).

Le résonateur est affecté par le balancement de l'excitateur : le résonateur entre en balancement, mais l'amplitude de ses oscillations est faible.

Le résonateur est également affecté par le balancement de l'excitateur, mais cette fois l'amplitude de ses oscillations est beaucoup plus importante. **Le résonateur entre en résonance d'élongation avec l'excitateur.**⁴

¹ https://fr.wikipedia.org/wiki/Les_Hasards_heureux_de_l'escarpolette.

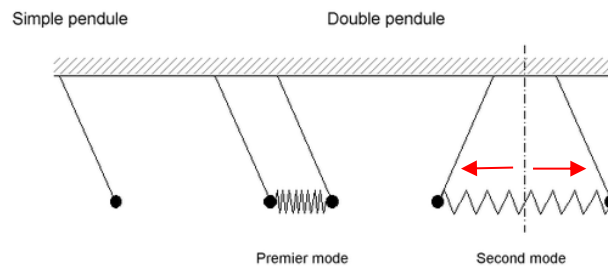
² Arkady Pikovsky, Michael Rosenblum and Jürgen Kurths, *Synchronisation : A universal concept in nonlinear sciences*, Cambridge Univ. Press, 2001, pp.14-18.

³ *Ibid.*, p.13 et 17.

⁴ Expérience de deux pendules simples couplés, <http://cherchari.legtux.org/quatrieme/oscillateur/franosc/oscforce.htm>.

Comme la synchronisation spontanée, la résonance est un processus dynamique (les oscillateurs en interaction évoluent dans le temps), mais à la différence de la première, l'oscillateur excité impose sa fréquence à l'autre **si sa fréquence (dite de résonance) est proche de celle propre au résonateur.**

Lorsque deux pendules sont en présence l'un de l'autre, chacun d'eux est susceptible d'engendrer une résonance en conséquence de l'excitation de l'autre. Deux pendules qui oscillent à la même fréquence présentent, comme pour la synchronisation spontanée, deux modes propres : *en phase* (comme s'ils étaient liés par une barre rigide à l'instar de ce que montre une figure précédente différenciant la synchronisation et ce qu'elle n'est pas) et *en opposition de phase*. Les physiciens s'en assurent en



considérant deux pendules identiques reliés, non seulement par un support commun, mais aussi par un ressort :

- dans le 1^{er} mode (*en phase*), le ressort ne joue pas son rôle de ressort, mais de barre rigide la fréquence du système est la même que celle du pendule simple. Les pendules oscillent de concert ;
- dans le 2nd mode (*opposition de phase*), le ressort tient son rôle en se contractant et en se détendant alternativement. *Les pendules oscillent en opposition comme si le ressort avait été fixé. Une moitié de ressort accroît la raideur associée à chacun d'eux, ce qui augmente leur fréquence propre.*¹

iii Vues théoriques

Les Lumières ne se sont pas contentés d'oser peindre une jolie personne juchée sur une balançoire. Elles ont commencé à penser la résonance in abstracto. L'Antiquité n'ignorait pas déjà l'influence du son émis par une corde sur une autre. Dans le *Timée*, Platon écrivait : *Sont consonants deux sons tels que si l'on produit l'un sur un instrument à cordes, l'autre résonne en vertu d'une certaine affinité et sympathie.* Et Aristote se demandait *par quelle raison les sons graves en renferment de plus aigus.*²

Comme la plupart des Modernes, Descartes rejettera la thèse ancienne de la musique comme expression d'une harmonie universelle. La musique relève moins d'une perception d'un ordre complexe que d'un mécanisme purement physique. Le premier échappe toujours un peu au *je* alors que le second se réduit à l'ébranlement du corps et de l'esprit par le son. Descartes est lui-même sous l'influence de Monteverdi et de sa *seconda prattica* qui entend ramener la musique à la production d'un effet sur l'auditeur (lors de son passage à Venise en 1624, Descartes assista aux offices de Saint-Marc où le compositeur était maître de chapelle).

*La grande nouveauté de cette musique italienne est de ne plus viser à retrouver un arrière-monde originel par une méditation esthétique : la musique ne fait participer à rien ; c'est une pure technique par laquelle on parvient à provoquer une mise en situation du texte en plaçant l'auditeur au « point de vue » auditif déterminé par une théâtralisation du verbe.*³

L'*Abrégé de musique* de Descartes reflète déjà cette conception en mettant l'accent sur le caractère subjectif du goût. Suivant Monteverdi, Descartes insiste sur la nécessité de mettre de la diversité dans la musique pour susciter l'attention et émouvoir l'auditeur. Son correspondant, le Père Mersenne, accommodera les recommandations de Descartes et de Saint-Augustin qui voyaient l'utilité d'ébranler les sens, dont l'ouïe, pour mieux contempler les beautés divines. Descartes refusera toutefois, de son côté, de faire sienne l'explication de l'écho par Mersenne comme un phénomène de réflexion. La raison qu'il donne est claire : le son ne se déplace pas en ligne droite, mais *en rond de tous côtés*

¹ <https://fr.wikipedia.org/wiki/Résonance>.

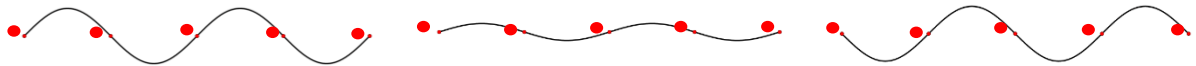
² in Ali Mouhouche, Abdelkrim El Hajami, « *Etude de la résonance : quels obstacles épistémologiques* », Le Bup physique chimie, Paris, 2010, vol.924, p.602.

³ Pascal Dumont, in Descartes, *Abrégé de musique [Compendium musicae, 1618]*, paris, méridiens Klincksieck, 1990, Introduction, p.29.

(Descartes est ici en avance sur Newton). Il ne rebondit pas comme une balle. L'écho doit être comparé à un phénomène de consonance : si on chante près d'un luth et que le son de la voix s'accorde avec les cordes du luth, l'instrument rendra un « écho » plus sonore que le son de la voix.¹

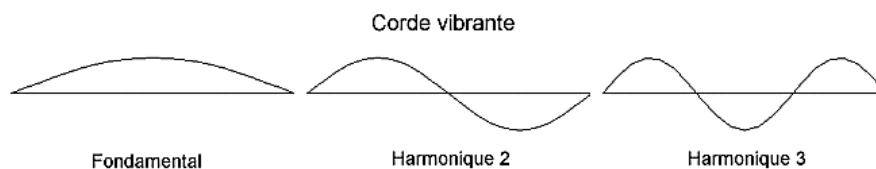
L'étude des cordes vibrantes sera plus avant développée par Mersenne et des savants comme Joseph Sauveur qui fondera, au début du XVIII^e siècle, la science du son, *l'acoustique*.

Sauveur étudiera minutieusement les rapports des sons qui se font entendre à côté de la note fondamentale en distinguant des intervalles moins familiers que l'octave, la quinte, la quarte, les tierces majeures et mineures. Il emploiera des cavaliers de papier pour déterminer la position des nœuds et des ventres de vibrations d'une corde vibrante excitée.



Les points rouges marquent **les nœuds** ; les points d'amplitude maximale sont **les ventres**

Avec Joseph Sauveur, la notion d'onde stationnaire apparaît (nous y reviendrons plus loin). Sauveur appliqua sa théorie des sons harmoniques à la composition des jeux d'orgue (un tuyau d'orgue est un tuyau sonore comme une clarinette ou une flûte dans laquelle une colonne d'air est excitée par une vibration sinusoïdale qui entre en résonance pour des fréquences multiples d'une fréquence donnée).



Lorsqu'une corde sans raideur est excitée, les modes propres ont des formes sinusoïdales. La plus basse fréquence est appelée fréquence fondamentale tandis que les harmoniques ont des fréquences multiples de celle-ci. Le *spectre* est l'ensemble des fréquences propres que l'on entend (note fondamentale + les *harmoniques supérieures*, au dire de Sauveur).²

Sensible lui-même aux vibrations, Euler le sera autant au siècle suivant au phénomène physique d'excitation, non seulement du son, mais de la lumière. Dans ses *Lettres à une Princesse d'Allemagne*, il récuse l'idée que les rayons du soleil se réfléchissent sur des corps opaques. Pour réfuter ce *sentiment absolument insoutenable*, Euler avance divers arguments dont celui consiste à observer que *les rayons réfléchis d'un miroir nous représentent toujours les couleurs des corps dont ils proviennent originellement, et le miroir, où se fait la réflexion, n'y change rien*. Hélas, *le grand Newton s'est arrêté à la plus étrange idée sur la propagation des rayons*. Reconnaissons-le aussi en science: *la grandeur de l'esprit ne garantit jamais d'absurdité des sentiments qu'on a une fois embrassés*.

La comparaison avec la résonance du son aide Euler à développer son propos sur *l'ébranlement* (sic) des particules notamment d'un corps opaque sur lequel tombent les rayons du soleil :

*C'est une vérité bien constatée que, de tous les corps que nous voyons, les moindres particules dans leur surface se trouvent dans une certaine agitation, ou un mouvement de vibration semblable à celle d'une corde pincée, mais incomparablement plus vif et plus rapide, soit que cette agitation soit l'effet d'une force intrinsèque, comme dans les corps luisants d'eux-mêmes, soit qu'elle soit produite par les rayons de lumière qui tombent sur les corps, c.-à-d. par l'illumination, comme il arrive dans les corps opaques.*³

Les particules formant les corps opaques, habituellement en repos, se mettent à vibrer sous l'influence d'une lumière incidente à la façon d'une corde tendue qui vibre par résonance quand une corde semblable est excitée. *Pour Euler, les couleurs des corps opaques résultent d'une absorption*

¹ *Ibid.*, p.42. L'expression *en rond de tous côtés* est bien de Descartes. On sent venir Huygens

² P. Costabel, « L'acoustique du XVI^e au XVIII^e siècle », in R. Taton, *La science moderne de 1450 à 1800*, op. cit., pp.528-529 ; Léon Auger, « Les apports de J. Sauveur (1653-1716) à la création de l'acoustique », *Revue d'histoire des sciences et de leurs applications*, 1948, vol.1, n° 4, pp.323-336 ; https://fr.wikipedia.org/wiki/Onde_stationnaire ; <https://fr.wikipedia.org/wiki/Résonance>.

³ L Euler, *Lettres à une Princesse d'Allemagne* [1760-1762], op. cit., L. 24 et 25, pp.45-47 ; L.27, p.51

*totale suivie d'une réémission sélective qui caractérise le corps éclairé. Ce mécanisme est proche de celui que font intervenir les explications modernes de la fluorescence et de la phosphorescence.*¹

Fluorescence et phosphorescence sont deux formes différentes d'émission de lumière. Selon la théorie actuelle, un corps fluorescent possède la propriété d'absorber de l'énergie lumineuse (lumière d'excitation) et de la restituer rapidement sous forme de lumière fluorescente (lumière d'émission). La fluorescence se produit plus rapidement que la phosphorescence. Il vaut de noter qu'on parle aujourd'hui de fluorescence de résonance quand le rayonnement émis possède la même fréquence que le rayonnement d'excitation.²

Comme pour le son, il se produit un transfert d'énergie du donneur vers un accepteur. L'énergie des photons provenant d'une source lumineuse est absorbée par le donneur (certains minéraux, végétaux et animaux) qui passe dans un état excité par modification de la répartition de ses électrons par rapport à l'état fondamental.³ Nous n'entrerons pas ici dans les arcanes de la physique quantique. Nous retiendrons simplement l'idée d'un couple donneur-accepteur avec surexcitation de l'accepteur.

Sans atteindre les éclaircissements du XX^e siècle, l'âge des Lumières a entrevu le caractère général du phénomène de résonance. En partant du son, on a peu à peu compris que dans un système soumis à une force extérieure oscillante, **les oscillations qui en résultent sont forcées, voire renforcées**. A l'instar d'une corde tendue qui vibre par résonance quand une corde semblable est excitée (on pourrait le vérifier avec un instrument de musique qui posséderait des cordes donnant la même note), la résonance et son impact deviennent un objet d'investigation autant que l'interférence.

iv L'effet perturbateur de la résonance

A l'unisson, les vibrations sonores sont particulièrement intenses. Le résultat est plutôt agréable à l'oreille, mais si un chanteur émet un son d'une certaine fréquence, sa voix peut produire des vibrations dans un verre d'une amplitude suffisante pour le casser. De même, si une mère pousse son enfant sur une balançoire en cadence, on observera un phénomène oscillatoire en résonance, mais si la mère pousse trop fortement ou trop souvent la balançoire, l'amplitude que fournit sa force à la balançoire deviendra trop grande. L'oscillation ne sera pas seulement entretenue. L'enfant risquera de tomber. (S'il donne lui-même de fortes impulsions en cadence, il se retrouvera tout autant par terre !)

Sauf erreur, personne n'a rapporté à l'époque des Lumières qu'un pont pouvait s'écrouler quand une colonne de soldats le traverse au pas, mais ce phénomène advint en France en 1850. La troupe, qui le traversait en ordre serré, en provoqua la rupture par résonance. 236 soldats périrent. *Pourtant, le règlement militaire interdisait déjà de marcher au pas, ce qui laisse penser que ce phénomène était connu auparavant.* Un accident similaire eut lieu en Angleterre sur un pont suspendu près de Manchester. Ce pont s'était écroulé en 1831 lors du passage d'un détachement de 60 hommes qui avançaient au pas. Le balancement synchrone du pont alla croissant jusqu'à son affaissement fatal.⁴

Point n'est besoin d'avoir un défilé de soldats sur un pont. Un pont suspendu peut être agité par des vents. Une telle excitation peut provoquer par résonance l'effondrement du pont. Il suffit que le vent excite une des fréquences propres de vibration du pont. A cette fréquence est associée une amplitude suffisante pour que ce résultat désastreux se produise après plusieurs heures de vibrations forcées croissantes causées par le vent (pont de Tacoma aux Etats-Unis en 1940).

Ces phénomènes, dira-t-on, ont été relevés après l'époque des Lumières, mais **l'effet perturbateur de la résonance avait déjà été observé non seulement par les savants mais par tout un chacun**. Qui ne connaît – et n'a connu – en France les marées du Mont Saint-Michel qui peuvent avoir une amplitude particulièrement grande ? L'eau contenue dans la baie joue le rôle d'un oscillateur qui rentre en résonance lors des « grandes marées ». Idem sur la côte du Nouveau-Brunswick au Canada. La fréquence naturelle de l'oscillation de la masse d'eau dans la baie de Fundy est voisine

¹ M.-A Tonnelay, « Diffusion de l'optique newtonienne », in R. Taton, *La science moderne de 1450 à 1800*, op. cit., p.526.

² Douglas Arvid Skoog, F. James Holler, Timothy A. Nieman, *Principes d'analyse instrumentale*, Bruxelles, De Boeck, 2003, p.137.

³ Arpège BioCampus Montpellier, *Le transfert d'énergie par résonance*, 2012, <http://www.arpege.cnrs.fr/IMG/pdf>.

⁴ K. Dobson, D. Grace, D. Lovett, *Physics*, op. cit., p.124; <https://fr.wikipedia.org/wiki/Résonance>; *ibid*-wiki/Pont_de_la_Basse-Chaîne.

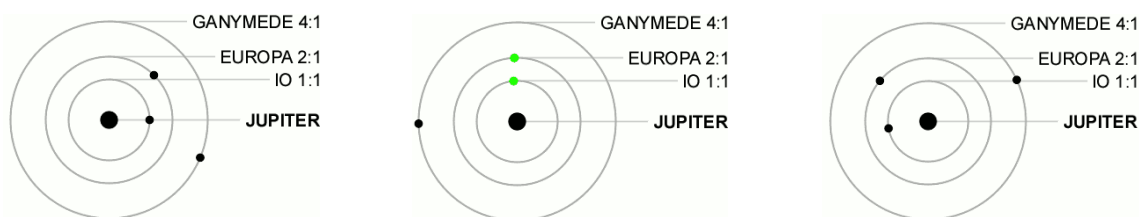
de celle des marées de l'océan. Il y a donc pratiquement résonance, d'où les énormes amplitudes constatées.¹

Point n'est besoin d'être sur un navire d'aujourd'hui pour savoir que les vagues engendrent certains mouvements oscillatoires dangereux pour leurs bateaux. Les marins savaient déjà que le roulis, de bâbord à tribord, peut tomber dans les périodes des vagues. Pour lutter contre ce phénomène, ils n'ignoraient pas qu'il fallait éviter de prendre les vagues de travers. Les bateaux, amarrés au large, peuvent, pour la même raison, être déplacés si leur période propre est excitée par celle des vagues.

Comme pour le son et la lumière, les Lumières ont subodoré un phénomène de résonance jusqu'entre les corps du système solaire. L'apport de Laplace est reconnu de ce point de vue. De petites perturbations gravitationnelles peuvent produire des effets prépondérants si elles contiennent des fréquences proches des fréquences naturelles des corps considérés. Dans de telles circonstances, les perturbations entre orbites s'additionnent et s'amplifient de manière cohérente.

*Une résonance orbite-orbite se produit si deux objets célestes ont périodiquement les mêmes positions l'un par rapport à l'autre, de telle sorte que la force de gravitation réciproque tende à conserver la configuration de manière stable (**résonance stable**) au lieu de s'écarter rapidement de cette situation (**résonance instable**), et ce même si cette force de gravitation mutuelle est beaucoup plus petite que la force de gravité entre le Soleil et l'un des objets célestes.²*

Dans le cas d'une résonance orbitale entre deux objets célestes, il y a égalité entre un multiple de la période orbitale (année) du premier objet et un multiple de la période orbitale de l'autre objet. Pluton est dans une orbite résonante 2 :3 avec Neptune veut dire que le temps mis par Pluton pour effectuer deux révolutions autour du Soleil est le même que celui mis par Neptune pour effectuer trois révolutions autour du Soleil. La résonance étudiée par Laplace concernait trois lunes de Jupiter : Io, Europe, Ganymède. Ces satellites, ainsi que Callisto, avaient été découverts par Galilée en 1610. Ce fait démontrait que la Terre n'était pas le seul centre de mouvement dans l'Univers. Selon Laplace, Ganymède est en résonance 4 :1 avec Jupiter, Europe en résonance 2 :2 et Io en résonance 1 :1.³



résonance de Laplace 4:2:1 entre 3 satellites de Jupiter. Sur la fig. centrale, **Europe et Io résonnent**

Les trois satellites résonnent deux à deux. Leurs phases orbitales sont également liées et empêchent une triple conjonction de se produire. Callisto, plus éloignée, ne serait pas en résonance avec les autres lunes. Selon le mot de Georges Lemaître, qui prédira l'expansion de l'univers au XX^e siècle,

les découvertes de Laplace dans la théorie des satellites de Jupiter sont d'une originalité profonde ; elles font apparaître sous un jour nouveau le phénomène de la résonance tel qu'il se manifeste en mécanique céleste. En particulier, Laplace a clairement mis en lumière l'analogie que présente ce phénomène avec les divers types de mouvement dont est susceptible un pendule simple. Celui-ci peut être lancé dans le même sens avec une grande vitesse, décrivant un mouvement uniforme auquel se superpose une perturbation périodique, ralentissant au sommet, accélérant en bas. [...]

Laplace a remarqué que le phénomène de résonance est régi précisément par les mêmes équations que celles qui décrivent le mouvement du pendule simple.⁴

¹ Kane/Sternheim, *Physique*, op. cit., pp.215-217 ; V. Jullien, *L'histoire des sciences pour les nuls*, p.113.

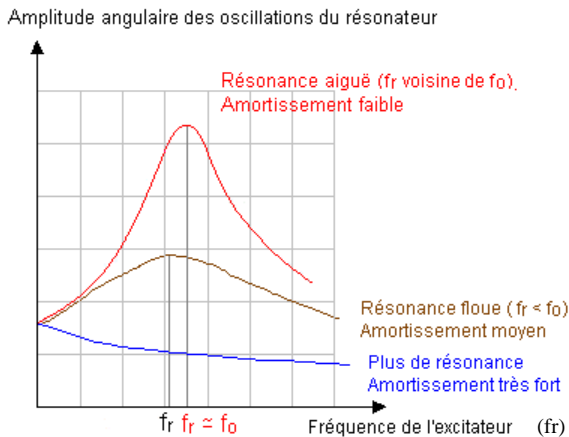
² Benoît Meyssignac, *Introduction à la mécanique céleste*, Supaero, 2011, pp.69-70, <http://personnel.isae.fr/sites/personnel/IMG.pdf>

³ *Ibid.*; https://fr.wikipedia.org/wiki/Satellite_galiléen. Les quatre satellites galiléens sont les plus grands satellites du système de Jupiter. On dénombre aujourd'hui 67 satellites naturels de Jupiter. https://fr.wikipedia.org/wiki/Satellites_naturels_de_Jupiter.

⁴ Georges Lemaître, « Laplace et la mécanique céleste », Société astronomique de France, 1950, vol.64, pp.89-97, p.93, adsabs.harvard.edu/full/1950LAsr..64...89L. Laplace publia sa *Théorie des satellites de Jupiter en 1788*. Nous soulignons.

La résonance orbitale renforce sensiblement l'influence gravitationnelle mutuelle de deux corps célestes circulant sur leurs orbites respectives. Dans la plupart des cas, le résultat est une interaction instable, dans laquelle les corps échangent leurs quantités de mouvement et déplacent leurs orbites jusqu'à ce que la résonance cesse d'exister. Ici encore, l'apport d'énergie du corps céleste (excitateur) à l'autre (résonateur) se fait plus efficacement lorsque la force extérieure possède la fréquence proche de celle qui est propre au système (faisant office de résonateur) en l'absence d'une force extérieure.

L'époque a compris que l'amplitude des oscillations forcées d'un oscillateur, tel qu'un pendule, est fonction de la fréquence f_0 de la force extérieure sinusoïdale. L'amplitude est maximale à la fréquence de résonance f_r qui coïncide pratiquement à la fréquence propre du pendule. On notera sur la courbe dite de résonance que le maximum croît, comme dans l'expérience des métronomes, à mesure que l'amortissement faiblit (ou, dit autrement : dès que la constante d'amortissement diminue) :



L'excitateur impose sa fréquence au résonateur

L'amplitude du résonateur, de fréquence propre f_0 , passe par un maximum pour une fréquence particulière, f_r , imposée par l'excitateur (**fréquence de résonance**).

La fréquence imposée par l'excitateur peut être amortie pour des raisons diverses, à commencer sur Terre par les frottements de l'air.

Si l'amortissement augmente, la fréquence de résonance diminue et la résonance devient plus floue. La résonance cesse tout à fait lorsque l'amortissement devient très fort.¹

Lorsque la Lune et le Soleil sont en convergence de phase, la marée du Mont Saint-Michel est de forte amplitude. Lorsque la Lune et le Soleil ne sont pas convergents, la marée sur le site est de faible amplitude.² Cet exemple est spectaculaire, mais pas nécessairement dommageable. En revanche, quand la fréquence de la force extérieure égale celle d'un système qui peut être dangereusement excité, les oscillations forcées prennent de l'ampleur **au point de devenir totalement incontrôlables**.

D'où la question importante qui se pose :

v Comment lutter contre un tel effet ?

Les ingénieurs, instruits par la science des Lumières, ont imaginé divers moyens pour circonscrire la résonance.

On peut d'abord tenter de l'éliminer. La résonance d'un diapason vous ennuie. Vous cassez le pendule, mais en le cassant en deux, les choses ne changent guère : les deux parties continueront de vibrer quand elles seront frappées. Il y a mieux, surtout quand on voit aujourd'hui comment les techniciens analysent aussi finement que possible les fréquences et les déformations associées. Ils travaillent sur la dynamique des structures (et non sur leur statique, pour laquelle le paramètre temps n'est pas pris en compte). Ils font, comme on dit, de l'analyse modale, à la fois expérimentale (en utilisant par ex. un marteau de choc pour exciter toutes les réponses vibratoires possibles de la structure) et numérique (en étudiant le comportement des structures sur ordinateur ; la simulation d'un modèle en matière d'éoliennes par ex. leur permet d'éviter un couplage entre les pales et la tour).³

- A l'époque même des Lumières ?

On peut isoler la résonance en empêchant les vibrations de se propager dans la structure qui peut résonner. Sinon, attention aux oreilles ! *Le vacarme et la résonance provoqués par les roulements de*

¹ Kane/Sternheim, *Physique*, op. cit., pp.215-216 ; *Le phénomène de résonance*, leçon 17, <http://physique.chimie.pagesperso-orange.fr/>

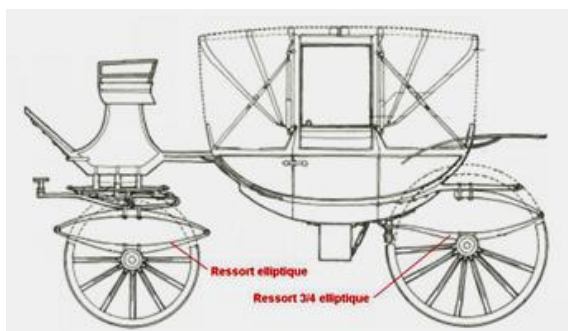
² V. Jullien, *L'histoire des sciences pour les nuls*, p.113.

³ <http://www.imaginascience.com/articles/sciencesphysiques/mecanique/resonance/resonance3>.

tambour étaient assourdissants et faisant mal à la tête, rapporte un voyageur à la fin du XVIII^e siècle.¹ Interdit de pénétrer dans les lieux, sauf à étouffer par un chiffon le son des instruments de musique !

(§20
d)-ii)

On peut, sinon tuer la résonance, la diminuer. L'époque n'a pas fait faute d'imaginer la suspension des diligences rendue nécessaire par le sautellement à la verticale de leur masse. Chaque secousse, chaque caprice de la route pouvait être un calvaire ! Qu'on se souvienne des déboires de Jefferson qui craignait que sa carriole ne verse sur le côté. La question du centre de gravité s'était à lui posée, mais son esprit curieux a dû s'interroger en route sur la manière d'en adoucir les soubresauts (Sans doute devinait-il que l'amplitude des oscillations du centre d'inertie de son véhicule dépendait de deux facteurs comme dans un véhicule à moteur, à savoir l'amplitude et la fréquence de l'excitation sinusoïdale produite par les creux, ou les pleins, d'un chemin cabossé sous chaque roue.)



Invention du ressort à lames elliptique
par Obadiah Elliott en 1804

La suspension d'une diligence a permis d'atténuer les vibrations verticales qui nuisent au confort et à la sécurité des passagers lors du passage dans un trou ou sur une bosse.

Dans une culture post-lockéenne où le souci du confort est devenu une priorité avouée, on s'inquiétait du retentissement du mouvement des roues au contact de la route sur le mouvement de la masse de la diligence. **Le premier mouvement jouait le rôle d'excitateur et le second de résonateur.**

Des systèmes de ressorts et de lanières cherchaient à réduire la mise en résonance redoutée par les voyageurs !

On peut rigidifier ou alourdir les structures en augmentant leur masse afin que le système bouge plus difficilement pour un même niveau de vibration. Les fréquences naturelles de la structure vers de plus hautes fréquences sont décalées vers de plus basses fréquences. On obtient ainsi des amplitudes moins élevées. L'architecture des Lumières savait utiliser des façades lourdes pour atténuer les bruits venus de l'extérieur ; des tapis et des tentures, non seulement pour lutter contre le froid, mais aussi contre les chocs intérieurs. A l'inverse, elle savait, de façon empirique, améliorer l'acoustique des bâtiments (églises afin de créer un écho, conduits pour entendre les conversations éloignées, etc.).³

On peut enfin **contrecarrer la résonance en ne changeant nullement les fréquences, mais en opposant le mal au mal en laissant résonner une vibration de même fréquence mais de phase opposée**. Nous retrouvons ici l'idée d'un déphasage semblable à celui constaté dans l'expérience de Young. Le déphasage entraîne des interférences destructrices (les ondes s'annihilent mutuellement), mais à la différence de l'expérience de Young, les interférences constructives ne sont plus présentes en alternance. Elles sont évitées. Les ondes ne se renforcent pas, par ailleurs, mutuellement. Nous sommes seulement en présence d'un signe + contre un signe -, soit une somme nulle, et non 2 fois +.

Les signes sont des signaux, des perturbations. L'amplitude du signal somme de deux signaux sinusoïdaux de même pulsation est minimale lorsque les signaux sont en opposition de phase ($\varphi = \pi$). Voilà un moyen fondamental de contrôler la résonance. **Il faut s'arranger pour que l'excitateur oscille, non pas en phase, à la résonance**, avec toutes les conséquences qu'elle peut entraîner, **mais en opposition de phase** avec la fréquence la plus susceptible d'être sollicitée du résonateur.

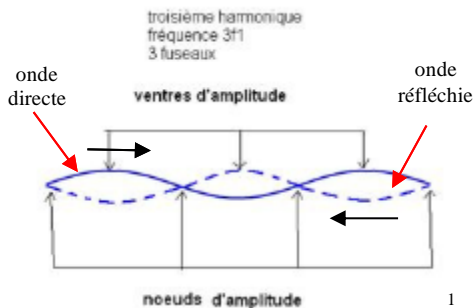
Les ondes stationnaires, entrevues par Joseph Sauveur, montrent comment la résonance peut être partiellement contrariée. A l'âge des Lumières, Joseph Sauveur a été le premier à observer qu'une corde vibrante peut vibrer en plusieurs parties avec des nœuds et des ventres. Les *nœuds* sont les points de la corde qui ne bougent pas ; les *ventres*, les points où l'amplitude est maximale. Le son harmonique peut présenter un nombre variable de nœuds et de ventres suivant sa fréquence. Plus la fréquence est aigue, plus le nombre de nœuds et de ventres augmente (voir infra la 3^e harmonique).

¹ Wilhem von Wolzogen, *Journal de voyage à Paris (1788-1791)*, Presses univ. du Septentrion, 1998, p.110

² Application à la suspension automobile, sans date, afsm.free.fr/IMG/doc/suspensions_cours.doc ; <https://fr.wikipedia.org/wiki/Diligence>.

³ <http://www.imaginascience.com/articles/mecanique/resonance> ; https://fr.wikipedia.org/wiki/Acoustique_des_batiments_anciens.

Jusqu'à présent, nous nous sommes surtout référés à des ondes qui se propagent en milieu « ouvert ». Lorsqu'un milieu est limité (comme la corde vibrante attachée aux deux extrémités), les ondes atteignent les frontières du milieu et donnent naissance à des ondes réfléchies qui vont se superposer aux ondes incidentes. Nous avons déjà parlé d'ondes réfléchies en évoquant en droit le contrôle des factions.



Deux ondes qui se propagent en sens contraire forment des interférences lorsqu'elles se rencontrent. Ces ondes peuvent provenir de deux sources différentes ou d'un même signal dont une partie est réfléchiée une fois ou plusieurs fois par un obstacle (aux deux côtés d'une corde tendue par ex.). Les multiples réflexions produisent des interférences qui donnent lieu la plupart du temps à une onde quelconque. **Les interférences de deux ondes de même fréquence et de même amplitude créent des ondes stationnaires.**

Le système de la corde alors résonne. Il existe **plusieurs fréquences de résonance (ou d'excitation) possibles**. Ces fréquences (f_n) sont appelées fondamentale, harmonique 2, harmonique 3... La 3^e comprend deux nœuds et trois ventres (fig.).

En agitant la surface d'un verre d'eau, on crée des ondes qui rebondissent au bord. Ces ondes génèrent par endroits, comme pour le son, des ondes stationnaires.

Les ondes auxquelles nous sommes le plus habitués, comme les ondes sonores, sont dites progressives ; un son avance dans une certaine direction et à vitesse constante, tout comme les vaguelettes formées par un caillou lancé dans la mare. Une onde stationnaire s'obtient en superposant deux ondes progressives de même amplitude et de directions opposées. Le résultat est une onde qui n'« avance » pas.

Chacun peut en faire l'expérience en formant des vaguelettes dans une baignoire qui, une fois réfléchies sur le bord de celle-ci, donnent naissance à une seconde onde qui se propage dans une direction inverse à celle de la première. On observe alors des régions où l'eau monte puis descend, d'autres où l'eau reste à hauteur constante, mais nulle progression de vagues dans une direction ou une autre.²

Dans la baignoire, les nœuds et les ventres demeurent des points particuliers. L'existence d'un nœud confirme à nouveau l'absence de mouvement, et un ventre atteste un mouvement maximal. Des points semblables sont repérables dans l'océan où l'amplitude de marée est toujours nulle (par ex. au milieu de la mer du nord). Les nœuds peuvent prendre parfois la forme de lignes nodales sur des surfaces comme la membrane d'un instrument de musique que l'on frappe comme une timbale.

Au ventre d'amplitude, l'onde incidente et l'onde réfléchiée sont en phase (l'amplitude résultante est égale à la somme des amplitudes des ondes composantes). Au nœud d'amplitude, elles sont en opposition de phase (l'amplitude résultante est égale à la différence des amplitudes, différence qui est en l'espèce nulle car les ondes composantes ont la même amplitude). Au nœud, l'onde progressive ne vibre plus ; elle devient stationnaire. Les ondes stationnaires peuvent être gênantes pour l'acoustique d'une salle de concert par exemple, mais leur existence confirme **l'idée qu'un exciteur et un résonateur doivent osciller en opposition de phase à une fréquence de vibration donnée pour éviter que la résonance emporte, elle aussi, dans d'autres situations, des effets néfastes.**

Telles sont les vues des XVII^e et XVIII^e siècles sur la résonance. La science poursuivra l'étude du phénomène en découvrant notamment que la lumière peut elle-même exciter une corde vibrante (expérience d'une corde éclairée par un stroboscope émettant une lumière intermittente de fréquence variable). L'époque a entrevu, au-delà du son, la portée générale du phénomène de la résonance. Reste à savoir si le droit des Lumières a pris part à cette perspicacité en devinant, au niveau constitutionnel, un phénomène équivalent et en prévenant, dans l'affirmative, ses conséquences.

¹ PSCI, *Ondes stationnaires*, 2015, <http://psi1.physique.pagesperso-orange.fr/Os.pdf>. Joseph Sauveur resta muet jusqu'à l'âge de 7 ans, et *comble de disgrâce acoustique*, devint progressivement sourd. Malgré ses infirmités, il professa les mathématiques au Collège de France et fut élu à l'Académie des sciences. (*ibid*).

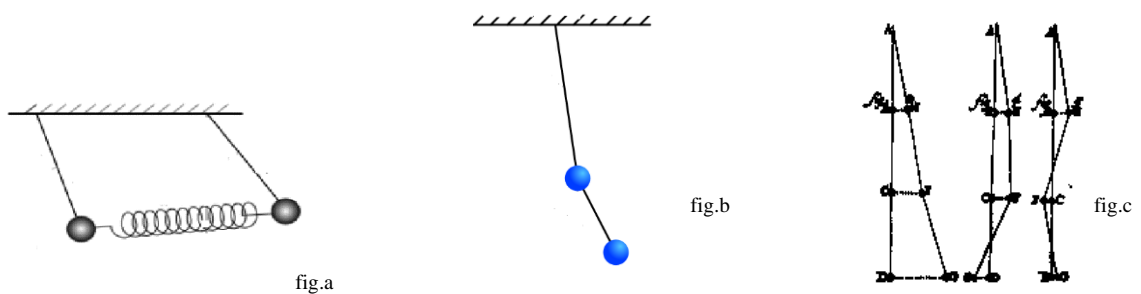
² Frédéric Dias, « Montrer l'existence des ondes stationnaires », *La recherche*, 2004, n° 373, p.28.

- 2/ Le contrôle de la résonance en droit
 a) Résonant = oppressant
 b) Le « tore » électoral
 c) Degrés d'amortissement et « disbalance »

3/ Résonance non-linéaire et chaos

i Un pendule double ou triple

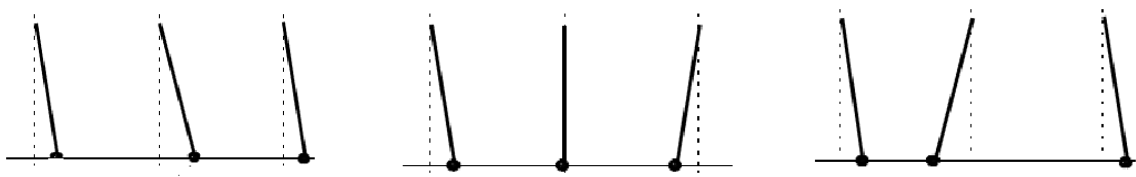
Avec une multiplicité d'oscillations, la balance des pouvoirs est consolidée ou plus ou moins menacée. Le jeu couplé des pendules perdure si les pendules sont suspendus les uns aux autres. Lorsque l'un des pendules est agité, son mouvement excite à son tour les autres. La rotation de l'un (son moment cinétique ou angulaire) va engendrer (ou faire varier) la rotation de l'autre. Des pendules associés horizontalement ou verticalement produisent le même effet : l'énergie de l'un est transmise à l'autre.



La comparaison avec la physique classique n'est nullement arbitraire. A l'âge des Lumières, on réfléchit dans les mêmes termes. Daniel Bernoulli s'est intéressé aux *pendules multiples*, c'est-à-dire N pendules suspendus les uns aux autres de façon à former une chaîne de N maillons. (fig.c) Ce mathématicien découvrit en 1738

qu'un tel système pouvait osciller à n'importe laquelle des N fréquences propres f_1, \dots, f_N où l'on note f_1 la plus petite fréquence et f_N la plus grande d'entre elles. Dans le mode donné par la plus petite fréquence, le pendule se balance d'avant en arrière plus ou moins d'un seul tenant, comme s'il formait un unique et long pendule simple. Aux fréquences plus élevées au contraire, les pendules adjacents se balancent dans des directions opposées à chaque instant.¹

Rappelons que par fréquence propre, il faut entendre le nombre d'oscillations d'un pendule au cours d'une unité de temps. Daniel Bernoulli décèle trois modes d'oscillation d'un pendule triple que l'on peut représenter équivalentement comme suit :



Le modèle de Daniel Bernoulli débouche sur un résultat relativement rassurant. Si l'on considère un pendule multiple de n masses, nous obtenons n solutions dites *stationnaires*, c'est-à-dire constantes, dont les fréquences dépendent des masses et des distances de ces masses au point de suspension. Un pendule a n masses et exactement n oscillations stationnaires, leurs fréquences étant une fonction des masses et des distances. Le mathématicien effectua un calcul jusqu'à $n = 5$, et étendit son résultat à n en supposant des masses égales et équidistantes et en passant à la limite (n à l'infini).²

¹ David Acheson, *Mathémagiques ! Balades mathématiques*, Paris, Belin/Pour la science, 2002, p.153.

² Chi-Sing Man, Roger L. Fosd, *The Rational Spirit in Modern Continuum Mechanics*, New York, Kluwer, 2005, pp.44-45; David Speiser, *Discovering the Principles of Mechanics 1600-1800*, Basel, Birkhäuser, 2000, p.81. Une solution stationnaire est une solution constante de l'équation différentielle $y(t) = y^*$. La dérivée d'une telle équation est nulle ; $y' = 0$. Au point y^* , $f(y^*) = 0$. Soit l'équation : $y' = 3y - 2$. Une solution stationnaire non nulle est donné par : $y' = 0 = 3y^* - 2$, d'où $y^* = 2/3$.

Nous retrouvons notre corde vibrante et ses harmoniques dont la présence est liée à l'existence de nœuds. Les nœuds sont des points fixes d'une onde stationnaire résultant de la superposition de plusieurs ondes progressives sinusoïdales de même pulsation mais de sens opposé. Au lieu d'y voir une nouvelle onde qui se propage, on constate une vibration stationnaire mais d'intensité différente.

Chaque onde stationnaire a une longueur d'onde ou une fréquence propre. Si l'onde est sonore, elle émet un son spécifique, une note. Un accord en musique est un accord entre des ondes stationnaires différentes, des harmoniques. Plus les harmoniques sont nombreuses, plus l'accord est riche. En droit constitutionnel, nous pouvons imaginer la coexistence des pouvoirs comme celle d'ondes stationnaires différentes. Montesquieu y a pensé pour nous en comparant à balance des pouvoirs à **l'harmonie**. Les pouvoirs émettent des sons divers, voire opposés, qui finissent par se compléter :

Ce qu'on appelle union dans un corps politique est une chose très équivoque : la vraie est une union d'harmonie qui fait que toutes les parties, quelque opposées qu'elles nous apparaissent, concourent au bien général de la société comme les dissonances dans la musique concourent à l'accord total.¹

Au sein déjà d'un même pouvoir, la répartition des tâches est susceptible de rendre un son musical. La collaboration des Chambres peut déboucher sur un accord entre elles. Le Roi (ou le Président de la République) se prononce sur le long terme tandis que les ministres (ou les Secrétaires d'Etat) s'occupent davantage de l'intendance. Bien que leurs compétences se chevauchent, notamment en matière de défense et de diplomatie, le public est en droit d'espérer que le son final soit audible. En pareils cas, la résonance est positive, mais rien n'assure qu'un beau son soit toujours au rendez-vous.

La résonance qui en sort peut-être non-linéaire. Rien de dramatique a priori. Prenons précisément l'exemple de la musique. Le son d'un instrument à cordes est produit par l'association d'un exciteur (l'archet) et d'un résonateur (la caisse d'un violon par ex.). L'exciteur est non-linéaire (la pression et la vitesse de l'archet font vibrer la corde du violon ; autrement dit, une fonction constante ne produit pas une autre fonction constante mais périodique). En général, le résonateur est considéré comme non-linéaire : le son généré par les cordes et la caisse de l'instrument peuvent enrichir sensiblement l'harmonie. Le son n'est pas seulement plus fort ; il rend un son différent d'un instrument à l'autre.²

Le public apprécie une telle résonance, mais quid de la résonance qui est négative et non-linéaire ?

(§31-ii)

Revenons au pendule pesant assimilable en première approximation à un pendule simple caractérisé par une masse ponctuelle ou faible au bout d'une liaison rigide de masse nulle. Le pendule tourne dans un plan vertical. L'effet du poids tend constamment à ramener le pendule vers le bas. Le pendule oscille dès qu'il a été écarté de la verticale, puis laissé à la seule action de la pesanteur. Son mouvement de va-et-vient est si régulier que Galilée a eu l'idée de l'utiliser comme étalon pour mesurer le temps. Précisément, Galilée a établi la loi de l'isochronisme qui stipule que la durée d'une oscillation ne dépend que de la longueur du pendule et non de l'amplitude du mouvement.

Nous sommes dans le cas idéal. Un pendule réel peut être amorti faiblement ou fortement. Lorsque l'amortissement est faible, l'amplitude des oscillations du pendule décroît avec le temps. Lorsqu'il est fort, le pendule perd sa périodicité avant de retrouver également sa position la plus basse. On observe de tels résultats en considérant un pendule élastique constitué d'un ressort. Les mathématiques confirment ces changements. Veut-on forcer le pendule pour qu'il oscille à nouveau ? Nous pouvons ajouter une force excitatrice (périodique), mais nous savons qu'un phénomène de résonance peut advenir lorsque l'excitateur à la même fréquence que la fréquence propre du résonateur (le pendule).

ii Du non-linéaire problématique

¹ Montesquieu, *Considérations sur les causes de la grandeur des Romains et de leur décadence*, op. cit., chp.9, Pléiade, p119.

² François Durand, *Non-linéarités de la caisse de résonance des instruments à cordes*, Paris, Laboratoire d'acoustique musicale, 31 juil. 2001, http://www.normalesup.org/~fradurand/sciences/Rapport_violon.pdf.

Qu'est-ce qu'un phénomène non-linéaire ?

Un phénomène est non-linéaire notamment lorsque ses grandeurs caractéristiques reliées entre elles **ne varient pas proportionnellement l'une à l'autre**. Son comportement peut alors être décrit par une expression, un modèle ou des équations faisant intervenir les variables autrement qu'au premier degré.

Une propriété essentielle de tels phénomènes est qu'ils n'obéissent pas au principe de superposition. On s'en rend aisément compte en étudiant la réponse d'un phénomène décrit par la fonction $y = f(x) = x^2$ à une excitation $x = x_1 + x_2$. Cette réponse est $f(x_1 + x_2) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2$. Elle ne correspond pas à la somme des réponses séparées aux deux excitations : il existe maintenant **un terme d'interaction, dit terme d'interférence**, entre les différentes excitations. C'est là une propriété générale des phénomènes non-linéaires qui rend l'étude plus compliquée puisqu'on ne peut plus superposer de solutions.

Certains phénomènes ou équations sont « naturellement » non-linéaires (par exemple, l'équation de Navier-Stokes en mécanique des fluides), mais il faut bien garder à l'esprit que de nombreuses lois physiques ne sont linéaires que pour des niveaux d'excitation pas trop élevés. A partir d'un certain seuil, le développement au premier ordre des variables n'est plus suffisant : on sort du domaine de validité des approximations linéaires. La plupart des phénomènes physiques sont non-linéaires, et **la linéarité n'est souvent qu'une première approximation**. [...]

La non-linéarité d'un phénomène peut être mise en évidence de nombreuses manières. La plus simple consiste à étudier directement la fonction $y = f(x)$ mais on peut également invoquer les signatures que sont

- l'existence d'un seuil ;
- la présence d'hystérésis (à une excitation donnée, ne correspond plus une réponse univoque) ;
- l'apparition de nouvelles fréquences dans le spectre d'un signal ;
- L'apparition possible du chaos lorsque le système non-linéaire est non-intégrable.

Les phénomènes non-linéaires sont extrêmement répandus, tant dans le monde inanimé de la physique qu'au sein des organismes vivants. Cette omniprésence rend leur étude indispensable mais au-delà, par le biais de la transformation de Fourier, une évolution quelconque peut être décomposée en une somme de contributions périodiques.

Il est donc naturel que l'oscillateur [tel que **le pendule paramétrique, simple ou double**] suscite à lui seul un intérêt scientifique considérable.¹

NB : Par *pendule paramétrique*, il faut entendre un pendule dont l'un des paramètres varie au cours du temps.

On pensera par exemple à la longueur du *botafumeiro* dans la cathédrale de Saint-Jacques de Compostelle en Espagne. Le *botafumeiro* est un encensoir géant qui se balance comme un pendule. Les variations de sa longueur amplifient son mouvement. Le préposé qui en entretient le mouvement raccourcit la corde quand le pendule est en bas, et l'allonge quand le pendule est au sommet.² Le mouvement du pendule est donc soumis lui-même à un mouvement vertical alternatif, d'où ses effets spectaculaires.

Un enfant qui se balance sur une balançoire offre un autre exemple de pendule paramétrique.

Le texte en référence fait allusion à l'équation de Navier-Stokes et aux notions d'hystérésis et de transformation de Fourier. Nous éclaircirons ces points par la suite.

¹ S. Bourdreux, *Exemples d'effets de non-linéarité sur le comportement d'un oscillateur*, op. cit., Introd., pp.4-5.

² *Le pendule paramétrique*, http://gilbert.gastebois.pagesperso-orange.fr/java/pendule/botafumeiro/theorie_parametrique.pdf.

§. 43.- RELATIVITE, DUALITE ET DISSYMETRIE AU BERCEAU DES PARTIS POLITIQUES

1/ Le principe de relativité

a) En physique

- i Galilée comme toujours*
- ii Des intuitions proches dans la littérature des Lumières*
- iii Moue dubitative d'un physicien*

b) La relativité en droit constitutionnel

- i Au coeur de la séparation des pouvoirs*
- ii La différence résiduelle*

2/ La dualité

a) La dualité en géométrie

- i Desargues, 217*
- ii Gergonne et Poncelet, 219*

b) La dualité en en droit constitutionnel

- i La dualité des partis politiques*
- ii La dualité des stratégies*

3/ Symétrie, dissymétrie, asymétrie

a) Symétrie

- i La symétrie dans les assemblées représentatives*
- ii Le filtrage des fréquences basses et hautes de l'opinion*

b) Dissymétrie

- i Les mains impures de Kant*
- ii Tir à la corde*
- iii La règle du tire-bouchon*
- iv Les tournants politiques*
- v Un modèle « catastrophiste » (et non catastrophique)*

c) Bipartisme et électricité, 222

- i La polarisation dans la nature, 222*
- ii La polarisation de la vie politique*

d) Asymétrie

- i En marge du bipartisme*
- ii La condition des femmes et celle des enfants*

Annexe, 228

○

1/ Le principe de relativité

a) En physique

- i Galilée comme toujours*
- ii Des intuitions proches dans la littérature des Lumières*
- iii Moue dubitative d'un physicien*

b) La relativité en droit constitutionnel

- i Au coeur de la séparation des pouvoirs*
- ii La différence résiduelle*

2/ La dualité

a) La dualité en géométrie

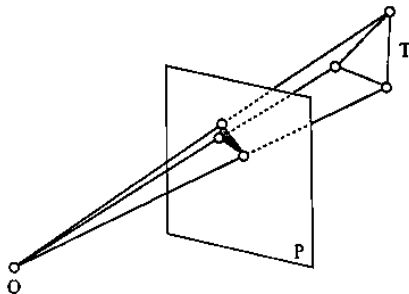
i Desargues

En ce domaine, ce n'est pas Descartes qui innove, mais Desargues, son contemporain, dont Descartes admire l'œuvre. Comme Descartes, Desargues reprend l'étude des coniques des Anciens, mais sans utiliser de notations algébriques. Sa première originalité est de *considérer les coniques [cercles, ellipses, paraboles, hyperboles] comme perspectives d'un cercle, base d'un cône dont le sommet est l'emplacement de l'œil : le cercle est alors observé et le tableau est le plan de coupe dans lequel la conique est l'apparence du cercle. Conique d'Apollonius et perspective du Quattrocento sont réunies.*

Comme chez Galilée, Desargues combine courbes et mouvement. *Il a compris, de son côté, qu'il fallait voir le voir lui-même, c'est-à-dire regarder un œil placé au sommet d'un cône et observer les modifications qu'entraînent un déplacement continu des données, ce que Leibniz appellera « la mutation d'apparence ».* Tout dans son *Brouillon projet d'une atteinte aux événements des rencontres du cône avec un plan*, publié en 1639, témoigne de *cette vision cinématique des choses.*¹

(§16
2/-ii)

Historiquement, les coniques correspondent aux sections d'un cône et d'un plan ne passant pas par son sommet. Desargues ne l'ignore pas, et chacun peut en faire lui-même l'expérience. En variant sa position et la direction de sa prise de vue, il est possible d'obtenir toutes les coniques. *Pour le vérifier, rendez-vous près d'une balustrade, une arène ou toute forme circulaire. Placez-vous à l'extérieur, en regardant horizontalement vers le centre. Vous voyez une ellipse. Dirigez-vous vers le centre. Quand vous arrivez au bord, l'ellipse devient une parabole. Une fois à l'intérieur, vous voyez une branche d'hyperbole.*² Le modèle de Desargues permet de comprendre notre vision comme *projection centrale (ou conique)* associant à un objet une prise de vue particulière.



Si l'œil est en O, le plan de vision en P, le triangle T est vu comme la section par P du tétraèdre de sommet O de base T. [Les plans ne sont pas parallèles, sinon les triangles garderaient la même forme par homothétie. Il y a à la fois agrandissement et changement de forme.]

*Si le triangle est remplacé par un cercle C, il est vu comme la section du cône de sommet O de base C. Cette section est une conique qui peut prendre les trois formes usuelles [cercle, ellipse, hyperbole].*³

Dans la projection centrale, toutes lignes fuyantes relatives à un point fixe passent par le sommet d'un cône situé en ce point. La vision cinématique de Desargues devient dynamique. Tous les faisceaux,

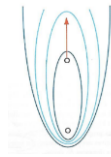
¹ Jean-Pierre Le Goff, « Desargues et la naissance de la géométrie projective », in *Desargues et son temps*, sous la dir. de J. Dhombres et J. Sakarovitch, Paris, Librairie scientifique Blanchard, p.164.

² Hervé Lehning, « L'unification des coniques », in *La géométrie projective*, Tangente, n°162, janv. 2015, p.32.

³ *Ibid.*, p.33.

écrit-il, *tendent vers un même but*, qu'il soit à distance finie ou infinie. Desargues complète la projection centrale en ajoutant un point à l'infini aux points habituels du plan d'Euclide. A l'infini, toutes les droites sont des sécantes. *La notion de point à l'infini est considérée comme point commun à plusieurs parallèles*. Les points à l'infini sont vus comme *des points ordinaires*¹:

Desargues ira jusqu'à définir la ligne droite comme un cercle de rayon infini, assimilant droite et cercle d'un certain point de vue.



Dans le même esprit, on peut rapprocher parabole et ellipse en envoyant l'un des foyers de l'ellipse à l'infini

Fort de ses résultats, Desargues parviendra à mettre en évidence un invariant qui permet le transport, le long des génératrices du cône, des propriétés remarquables des figures. C'est l'innovation majeure de Desargues. Le transport parallèle des grandeurs d'une droite à une droite conserve lesdites grandeurs (*fig.a*). Le même transport d'une autre, non nécessairement parallèle (c'est la configuration de Thalès, qui généralise la précédente) conserve le rapport des grandeurs) (*fig.b*). Or Desargues observe que la configuration perspective d'un couple de droites et d'un faisceau concourant généralise à son tour celle de Thalès. Il généralise également la découverte de Pappus qui avait trouvé que ce que l'on appelle aujourd'hui le *birapport* de quatre points est conservée par projection (voir *fig. a, b et c*) :

(§14
1/-i)

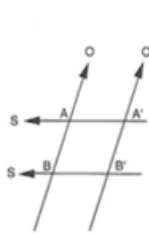


fig.a

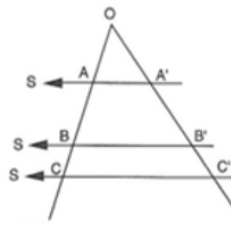


fig.b

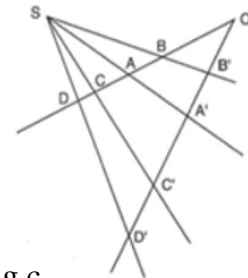


fig.c

Dans le quadrillage (*fig.a*), les grandeurs projetées sont conservées : $AB = A'B'$. Dans la configuration de Thalès (perspective de front de la précédente, *fig.b*), ce sont les rapports des grandeurs : $AB/AC = A'B'/A'C'$, ou : $AB.A'C' = A'B'.AC'$. Dans la perspective de Desargues (perspective des deux précédentes en vue d'angle, *fig.c*), on a : $(B,A,C,D) = (B',A',C',D')$, ou encore $AB.A'C'/DB.D'C' = A'B'.AC'/D'B.DC$.

Quelle soit la figure, Desargues démontre que, pour quatre droites sécantes en O , coupées par deux, trois ou quatre transversales en A, B, C et D en respectivement A', B', C' et D' , les birapports (ou quotients) $[A, B, C, D]$ et $[A', B', C', D']$ sont égaux. La projection centrale de centre O qui envoie A sur A' , B sur B' , C sur C' et D sur D' ne change pas le birapport. Autrement dit, le birapport est invariant par projection.²

Comme tout moderne, Desargues généralise les apports du passé comme il a su unifier, à l'instar de Descartes, les coniques.

(§16
2/-ii)

Au lieu de traiter cas par cas les différentes courbes, Descartes avait choisi une classification, basée sur la représentation algébrique, le degré d'une courbe, les coniques correspondant aux courbes du second degré. *Il réalise une extension qui est unificatrice par indifférenciation*. Desargues classe également les figures planes, *mais en retenant la projection centrale comme moyen discriminatoire*. *Il réduit toute conique à celle qui sera considérée le moment venu, et à l'occasion de telle preuve particulière, comme la plus simple, éventuellement un cercle, ou deux droites au besoin ; c'est une façon qui est unificatrice par réduction*.³

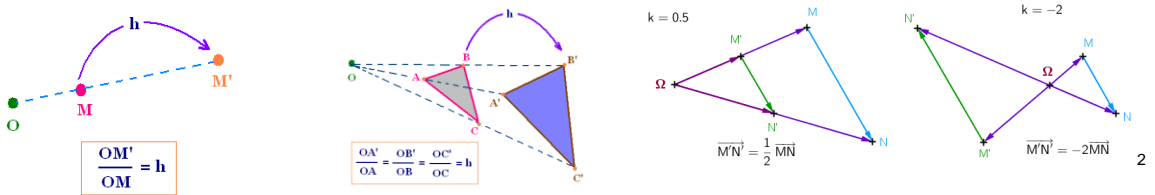
L'*épistémè* des Lumières pénètre les esprits par diverses filières, et non par la simple porte de la filiation.

¹ Rudolf Bkouche, « Desargues au XIX^e siècle : l'influence d'un livre non lu », in *Desargues et son temps*, p.210.
² J.-P. Le Goff, « Desargues et la naissance de la géométrie projective », pp.203-204 ; Elisabeth Busser, « Dix personnages en quête d'une géométrie », in *La géométrie projective*, Tangente, n°162, janv. 2015, p.24.
³ Jean Dhombres, « La culture mathématique au temps de la formation de Desargues : le monde des coniques », in *Desargues et son temps*, p.56.

Descartes et Desargues ont tous deux la quarantaine. La *Géométrie* de Descartes paraît en 1637, le *Brouillon projet* en 1639. Force est de constater que l'après n'a pas été une voie unique. Au fond, avec le travail sur les coniques, il y avait chez l'un et l'autre la volonté d'achever l'entreprise inaugurée par les Grecs : Descartes comme Desargues ont su renverser cette perspective et, en lieu et place de conclusion, préparer des ouvertures, mais il subsiste entre les deux hommes des différences :

Toute perception projective ou perspectiviste, en particulier en optique, implique l'espace de trois dimensions – hauteur, largeur et longueur – point de vue qui apparaît si peu chez le Descartes de la Géométrie, ou plutôt ne reçoit aucun privilège chez cet auteur puisque la méthode adoptée ne discrimine en rien le plan et le spatial. En réduisant exactement les coniques aux équations algébriques du second degré, Descartes aplatissait la richesse spatiale que Desargues [déployait].¹

Parmi les ouvertures figure l'émergence de la notion de *dualité* dans le premier tiers du XIX^e siècle. Chez Desargues, la perspective apparaît être le premier exemple de transformation qui transforme « vraiment ». L'homothétie en est une en associant à chaque point d'une figure initiale un autre point d'une figure image à partir d'un point fixe (le centre d'homothétie) suivant un facteur h ou k (le rapport d'homothétie), la distance entre les points correspondants étant constante (voir infra comme exemples).

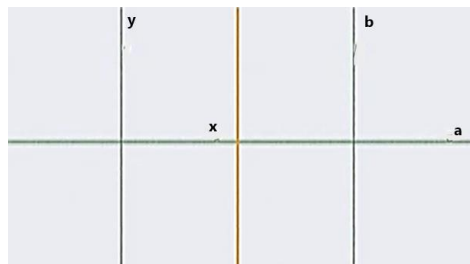


Lorsqu'une symétrie ou une homothétie comme se constatent, point n'est besoin de définir une correspondance point par point pour vérifier l'invariance des grandeurs isométrie ou de leurs rapports par similitude. C'est à ce genre d'économie que participe la notion de dualité. Au lieu d'associer à un point un autre point, on associe un point et une droite, ou plus exactement, une conique étant donnée, à un point du plan, un pôle, une droite, sa polaire.

Ce faisant, on divise, au dire de Gergonne un de ses concepteurs en concurrence avec Poncelet, les théorèmes par deux. Dès qu'on en trouve un, on a sans effort, automatiquement, son double !³

ii Gergonne et Poncelet

Voulez-vous en avoir une 1^{re} idée ? Considérons le plan d'axes de coordonnées x, y et le plan « dual » d'axes de coordonnées a,b. A la droite d'équation y = ax-b dans le plan de gauche, on associe le point (a,b) dans le plan dual à droite (on a écrit y = ax-b, plutôt que y = ax+b par commodité par la suite).



Le plan d'axes x,y et le plan dual d'axes a,b

Soient dans le plan d'origine, deux droites d'équation x= -2x+1 et y = 2x-3 qui se coupent en (1 ; -1). A la droite d'équation y= -2x+1 (de pente négative -2), on fait correspondre le point (-2 ; -1), à la droite d'équation y = 2x-3 le point (2 ; 3). Au point d'intersection (1 ; -1), la droite b= a+1 relie, dans le plan d'axes a ,b les deux points (-2 ; -1) et (2 ; 3). (voir infra) On peut appliquer le processus à l'envers et

¹ Ibid., p.57.
² <http://scientificsentence.net/Equations/Maths2/geometrie.homothetie> http://www.ilemaths.net/maths_1-translations-homotheties.
³ Emmanuel Giroux, *Les colonnes de Gergonne : dualité, controverses et paradoxe*, Conférence, Paris, Bibliothèque nationale, 18 janv. 2012. http://www.bnf.fr/fr/evenements_et_culture/anx_conferences_2012/a.c_120118_giroux.html

on retrouvera les deux équations. Il n'est donc pas la peine d'ajouter un autre plan, le dual du dual, car le 1^{er} plan sert lui-même de plan dual au plan de la droite de coordonnées (a,b). Si on rajoute quatre autres droites d'équation passant par le même point d'intersection, on obtient de l'autre côté des points qui sont tous alignés sur la droite $b = a + 1$. A la droite d'équation $y = -1$ (une horizontale), on associe le point (0 ; 1), à la droite $y = x - 2$ le point (1 ; 2), à $y = 4x - 5$ le point (4 ; 5), à $y = 6x - 7$ le point (6 ; 7).



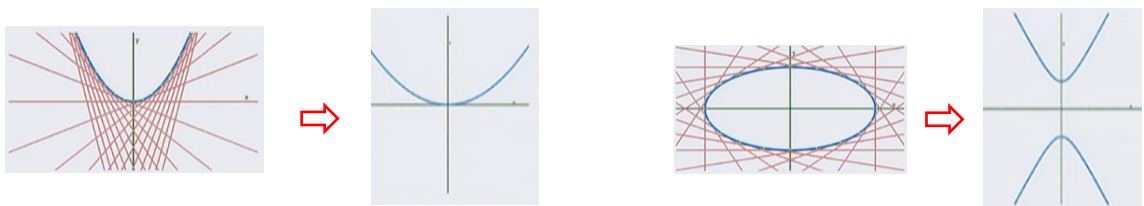
En partant de droites concourantes dans le plan, on récupère des points alignés. Mieux, on observe que plus la pente a de l'équation $y = ax - b$ augmente, plus les points ont tendance à partir vers la droite à l'infini quand la pente est positive, vers la gauche à l'infini quand la pente est négative. Nous ne commenterons pas ici ces propriétés remarquables, mais on voit qu'une telle construction est riche d'enseignements (ce qui se passe à l' ∞ dans le 2nd plan est représenté à distance finie par des droites verticales dans le 1^{er}).¹ Ce qui nous intéresse, nous, en particulier, est **la réciprocité des deux plans**.

Sous forme à dessein de deux colonnes, Gergonne explique dans l'une ce qui se passe dans un plan et dans l'autre ce qui se passe dans son dual.² - Voici une propriété en partant de points à droites :

<p>1.^o Autant il y aura dans l'un de systèmes de points situés en ligne droite, autant on rencontrera dans l'autre de systèmes d'un égal nombre de droites concourant en un même point,</p>	<p>1.^o Autant il y aura dans l'un de systèmes de droites concourant en un même point, autant on rencontrera dans l'autre de systèmes d'un égal nombre de points situés en ligne droite,</p>
--	--

(§ 18-c)

On peut compliquer un peu les choses en recourant aux coniques dont nous évoquions l'unification. Soit la parabole la plus simple, $y = x^2$. On sait qu'en chaque point d'une courbe lisse (sans point particulier), il existe une droite particulière qui est la tangente à la courbe. Donc, à chaque tangente de la parabole, je peux y associer un point du plan dual, appartenant à **la polaire** d'équation $b = a^2/4$. C'est encore une parabole. L'équation diffère légèrement, mais si on considère une ellipse d'équation $x^2/4 + y^2 = 1$, i.e. un cercle que l'on a étiré dans une certaine direction, on obtient une parabole d'équation $4a^2 - b^2 = 1$ en associant, à chaque tangente de l'ellipse, un point de b dans le plan dual.



Pour passer d'une courbe à sa forme polaire, il faut partir de l'équation de la tangente : $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$ et remplacer $f'(x_0)$ par a et $f'(x_0)(x - x_0)$ par b . On fait varier x_0 et on regarde les points (a, b) associés à toutes les valeurs de x dans \mathbb{R} . On obtient la courbe paramétrée recherchée : $a = f'(x)$ et $b = x f'(x) - f(x)$.³

Veut-on encore compliquer davantage ? On peut envisager une courbe comportant un point d'inflexion comme $y = x^3$ avec ses tangentes. On obtient, dans le plan dual, une polaire comportant un

¹ Ibid.
² Joseph D. Gergonne, *Recherches sur les lois qui régissent les lignes [i.e. courbes] et surfaces algébriques* [1827], in E. Giroux, *Les colonnes de Gergonne : dualité, controverses et paradoxe*.
³ E. Giroux, *Les colonnes de Gergonne : dualité, controverses et paradoxe*

point de rebroussement.¹ (fig.1) Imagine-t-on une courbe comportant deux points d'inflexion par rapport à l'origine (en deux points, la tangente est la même), on découvre comme polaire une queue d'aronde, chère au XX^e siècle à René Thom, avec un point double (correspondant à la tangente en deux points du 1^{er} plan) et les 2 points d'inflexion qui donnent les 2 points de rebroussement dans le plan dual.² (fig.2)

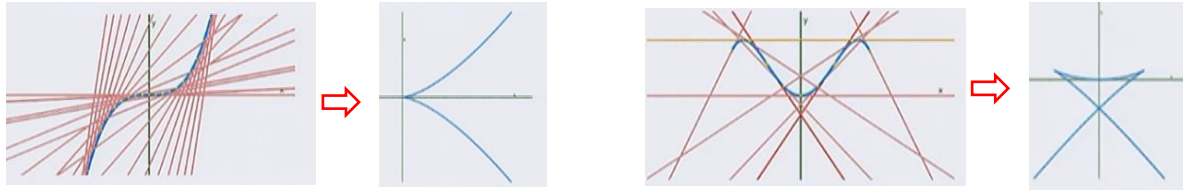


fig.1

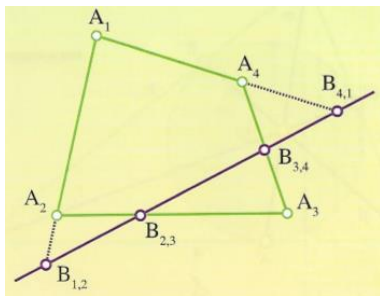
fig.2

Dans ces deux derniers exemples, on observe une symétrie entre les énoncés des théorèmes et de leur traduction duale. Les théorèmes, démontrés indépendamment, sont duaux : ils montrent, par une autre voie, un unique théorème.

Plus besoin d'attendre maintenant si longtemps ! Quand on a un théorème, on s'attend à avoir très vite son dual. Il n'est point étonnant que la dualité ait essaimé dans toutes les mathématiques des Lumières à nos jours. On la retrouve aussi en droit public, en œuvre dès le berceau des partis politiques.

(§32
1/-ii)

Qu'on ne croie pas que les mathématiciens des Lumières qui se sont penchés sur la dualité ignoraient complètement les vicissitudes de la politique. On sait que Lazare Carnot ne fut pas que général, membre du Comité de salut public et « organisateur de la victoire ». Il a écrit sur le calcul infinitésimal. Il a réfléchi également sur les transversales qui sont une application de la géométrie projective. Gergonne s'est engagé comme soldat au service de la Révolution française. Il a participé à la victoire



La méthode des transversales de Lazare Carnot révèle de remarquables propriétés pour tout polygone joignant n points A_1, A_2, \dots, A_n du plan. Le général annonce que le produit des distances, prises dans un sens ou dans l'autre, est constant

Pour le quadrilatère par ex., joignant les quatre points ; A_1, A_2, A_3, A_4 , on obtient :

$$A_1B_{12} \times A_2B_{2,3} \times A_3B_{3,4} \times A_4B_{4,1} = B_{1,2}A_2 \times B_{2,3}A_3 \times B_{3,4}A_4 \times B_{4,1}A_1.$$

de Valmy. Poncelet sera général après avoir accompagné Napoléon en Russie où il fut grièvement blessé et fait prisonnier. Tous ont un pied dans les événements et contribué à l'histoire de leur temps.

§ 27
b)-i)

Poncelet est en fait le véritable inventeur de la géométrie projective, avant Gergonne certainement malgré une publication plus tardive (1834) due à la lenteur de lecture de l'Académie de sciences. C'est lui qui a établi *le bon cadre qui fait marcher la dualité*.³ Gergonne a utilisé ses idées en les simplifiant plus qu'il ne fallait, mettant de côté en géométrie projective l'usage des nombres complexes qui permettent de comprendre notamment l'existence d'*intersections idéales* et *infiniment distantes* (le degré d'une courbe qui définit l'équation est le nombre de point d'intersections de la courbe avec la droite réelle, mais les solutions complexes éventuelles de l'équation ne la coupent pas).

Un homme de science ne peut être qu'ébloui par de si beaux résultats géométriques issus du calcul algébrique. Il est difficile en droit de raisonner de façon si a priori et de façon si précise. Notre lecteur ne pourra qu'être déçu par notre approche moins déductive qu'inductive, utilisant plutôt des exemples concrets au service de vues théoriques. **Ici encore, nous ne visons que la similitude, à défaut de trouver une « loi » proprement isomorphe. Nous nous efforçons d'identifier moins un mode de**

¹ Ibid. La tangente au point d'inflexion traverse la courbe $y = x^3$ (en bleu). La polaire a pour équation $4a^3 = 27b^2$ (parabole dite semi-cubique). Le point de rebroussement correspond exactement au point d'inflexion. La tangente s'arrête et repart dans l'autre sens.

² Ibid. La courbe (en bleu) a pour équation $y = 2x^2 - x^4$.

³ E. Giroux, *Les colonnes de Gergonne : dualité, controverses et paradoxe*.

calcul qu'un mode de raisonnement qui n'est pas sans rapport en droit avec celui de Gergonne.

b) La dualité en en droit constitutionnel

i La dualité des partis politiques

ii La dualité des stratégies

3/ Symétrie, dissymétrie, asymétrie

a) Symétrie

i La symétrie dans les assemblées représentatives

ii Le filtrage des fréquences basses et hautes de l'opinion

b) Dissymétrie

i Les mains impures de Kant. ii Tir à la corde. iii La règle du tire-bouchon

iv Les tournants politiques. v Un modèle « catastrophiste » (et non catastrophique)

c) Bipartisme et électricité

i La polarisation dans la nature

Observateur des partis en Angleterre et aux Etats-Unis de la fin du XVIII^e au XX^e siècle, Moisei Ostrogorski relève que la vie des partis *canalise les sentiments politiques et les volontés agissantes des citoyens*. Les partis politiques deviennent le démiurge de la démocratie naissante de part et d'autre de l'Atlantique. Même aux Etats-Unis, il est impossible de nier *le rôle régulateur que la discipline e parti a joué et les services qu'elle a appelés à rendre*.¹ La canalisation des sentiments de la population, résultant de la discipline croissante des partis, a conduit à une « polarisation » de l'opinion.

- Vous jouez sur le mot de « polarisation » pour rapprocher la polarisation en physique et la polarisation en politique. – Non, pas vraiment, car les deux phénomènes ont un point commun : dans les deux phénomènes se dégage dans chaque cas une direction privilégiée parmi tout un tas de directions.

Pour ne pas donner toutefois en droit une fausse image de la polarisation, il est bon de cerner davantage cette notion en physique avant de l'envisager sous le rapport des partis politiques.

A l'âge des Lumières, comment les esprits curieux, et pressés d'en savoir plus sans charlatanisme, appréhendaient-ils les phénomènes électriques et magnétiques ? A entendre les historiens des sciences, l'époque en était venue à concevoir deux types de charges (positives et négatives), deux types de forces (attractives et répulsives) et deux types de matériaux (les isolants et les conducteurs, étant loin encore d'imaginer des semi-conducteurs et supraconducteurs).²

Deux types de charges. Pour la faire courte, il appartient à Benjamin Franklin d'avoir distingué deux états, notés + et -. Sans que le concept de charge élémentaire soit clairement défini, Benjamin Franklin considéra qu'un corps devient *minus or negative* s'il perd du fluide électrique (*electrical fluid*). Qu'au contraire, un corps *is said to become « plus » or « positive »* s'il acquiert plus d'électricité. L'électricité positive et négative est comprise comme défaut ou excès d'un fluide électrique à l'intérieur d'un corps.³

Pareille distinction conduit Benjamin Franklin à concevoir l'idée d'un corps électriquement neutre s'il est *unlectrified (i.e. natural)* et celle d'une conservation de la charge électrique par remise à l'équilibre du surplus et du déficit d'électricité. Cette dernière idée lui permet de comprendre l'expérience de *la*

¹ M. Ostrogorski, *La démocratie et les partis politiques*, op. cit., Avant-propos, p.29.

² Jean-Claude Boudenot, *Histoire de la Physique et des Physiciens. De Thalès au boson de Higgs*, Paris, Ellipses, 2001, p.79. La bouteille de Leyde, inventée en 1745, est un récipient en verre fermé par un bouchon de liège et rempli à moitié d'eau. Une tige métallique traverse le bouchon, l'une de ses extrémités baigne dans l'eau, l'autre est reliée à une machine [ou générateur] électrostatique. (J.-C. Boudenot, p.78)

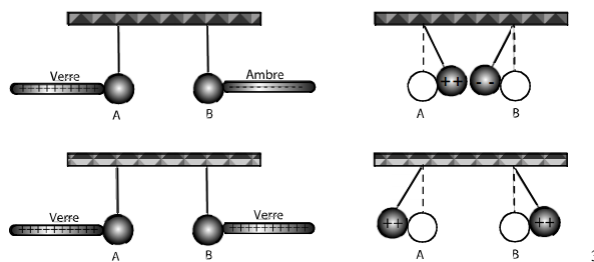
³ Benjamin Franklin, *Principles of electricity containing diverse new Theorems and Experiments together with Analysis*, London, 1779, §5,

bouteille de Leyde qui pouvait stocker des charges électriques et les restituer pour obtenir un bref courant électrique. Dans son éloge de M. Franklin à l'Académie des sciences, voici comment Condorcet commente l'approche du savant, homme d'affaires et homme politique américain :

M. Franklin explique les phénomènes électriques par l'existence d'un fluide insensible, tant qu'il reste en équilibre, et qui se manifeste, soit lorsque l'on rompt cet équilibre, soit pendant qu'il se rétablit. Son analyse de la bouteille de Leyde est un chef d'œuvre de sagacité, de justesse et de finesse à la fois. Les phénomènes variés et merveilleux qu'elle présente dépendent d'un seul fait, la différence d'électricité qui existe entre les deux surfaces isolées d'un corps idioélectrique [qui peut être électrisé par frottement], et le retour instantané de l'équilibre quand on établit entre elles une communication.¹

Les travaux de Benjamin Franklin s'efforçaient d'unifier le fluide électrique au lieu et place de deux sortes d'électricité : l'électricité « vitrée », produite lorsque l'on frotte un bâton de verre et l'électricité « résineuse » apparaissant sur les bâtons de résine [ex. : ambre].² La première produit de l'électricité, positive, et la seconde de l'électricité négative, pour reprendre les qualificatifs donnés par Franklin.

Deux types de forces. La théorie du fluide unique n'éclairait qu'une partie des phénomènes. Le bâton d'ambre attirait spontanément des poussières ou de petits copeaux de sureau. Le bâton de verre attirait d'autres poussières. Si l'on mettait en présence le même matériau (par ex. verre, verre ; ambre, ambre) sous forme de boules A et B, elles se repoussent. En revanche, les boules de matériaux différents (verre, ambre), elles s'attirent. Il existerait donc des forces qui repoussent ou attirent ces deux boules.



À la veille de la Révolution française, l'ingénieur Coulomb calcula les effets répulsifs et attractifs des deux forces suivant une loi dont la formulation est semblable à la loi de la gravitation universelle de Newton. Alors que l'interaction de la gravitation a pour expression :

$$F_{A/B} = (G M_A M_B) / d^2$$

F étant la force exercée sur le corps B, de M_B , par le corps A, de masse M_A , et G la constante de gravitation)⁴

la loi de Coulomb s'énonce comme suit : $F = K Q Q' / r^2$, la constante de proportionnalité K dépendant des unités choisies, et Q et Q' des grandeurs scalaires, positives ou négatives, selon la nature des charges électriques ; r mesure la distance QQ'. Deux charges électriques immobiles Q et Q' s'attirent ou de repoussent mutuellement avec une force proportionnelle au produit des valeurs de ces charges et inversement proportionnelle au carré de la distance r qui les sépare.⁵

Avec la 2^e loi du mouvement (le principe fondamental de la mécanique, $F = ma$) et la loi de la gravitation applicable autant sur terre qu'au ciel, Newton expliquait comment les parties du monde formaient système. La loi de Coulomb est la 1^{re} loi quantitative en matière d'électricité qui explique comment les parties du monde tiennent autrement ensemble à une autre échelle.

En raison de sa similitude avec la loi de Newton, la loi de Coulomb fut immédiatement acceptée par l'Académie à Paris, mais on ne saurait confondre totalement les deux lois. Dans loi de Newton, les

¹ Condorcet, *Eloge de M. Franklin, séance publique de l'Académie des sciences*, 13 nov. 1790, Paris, 1791, p.12.

² Isabelle Desit-Picard, *Une petite histoire de la physique*, Paris, Ellipses, 2001, p.67.

³ *Le champ électrostatique*, <http://ipag.obs.ujf-grenoble.fr/~ferreirj/enseignement/EChapitreI.pdf>.

⁴ Newton, *Principia*, vol.2 : Le système du monde, Univ. of Calif.Press ;https://fr.wikipedia.org/wiki/Loi_universelle_de_la_gravitation.

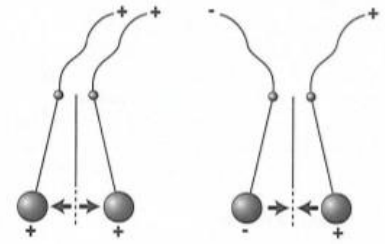
⁵ M-E. Berthon, *Les grands concepts scientifiques et leur évolution*, op. cit. , « Electricité », ^^,114-116.

corps ne font que s'attirer (la force ne va que dans le sens de l'attraction) ; dans celle de Coulomb, les corps s'attirent ou se repoussent suivant que les corps sont du même genre ou non : la force peut aller dans les deux sens, comme permet de s'en assurer la pile électrique conçue par Volta à la même époque :

Volta démontra que des disques de zinc et d'argent, séparés par un tissu imbibé par une solution légèrement acide et reliés par deux fils par deux fils électrolytiques, fabriquent de l'électricité. En reliant les deux fils à deux petites billes suspendues à un fil, les deux billes s'attirent immédiatement. Si, au contraire, on relie les deux billes à la même sortie de la pile, ces deux billes se repoussent.

[...]

C'est dans cette expérience que gît le principe de l'électromètre, c'est-à-dire de l'instrument qui évalue la force créée par l'électricité. Pour y parvenir, on prend la mesure des angles de déviation des deux fils (voir fig. ci-contre).¹



Volta avait produit de l'électricité non électrostatique grâce à des paires de disques formées de deux matériaux différents. C'étaient des couples dissemblables, mais ces matériaux étaient des conducteurs d'espèces différents. L'électricité se produisait à leur contact via un carton imbibé d'eau salée (l'eau de mer est bien meilleure conductrice que l'eau douce). La borne négative de la pile possède un excès d'électrons et un défaut à la borne positive. Volta s'aperçut que la tension électrique (différence de potentiel) qui existait aux bornes de la pile augmentait lorsque les piles étaient juxtaposées en série (le potentiel est maximal à la borne positive et minimal à la borne négative). L'idée de batterie était née.

Comme on ne peut pas voir le courant électrique, les physiciens lui ont donné un sens arbitraire. Le courant électrique circule de la borne positive vers la borne négative de la pile ou du générateur. On pensait que le sens du courant était celui des charges positives puisque pour Franklin la matière contenant trop peu de « fluide électrique » est chargée négativement. Bien que l'idée de Franklin d'un fluide en excès ou en défaut ne soit pas finalement fautive, il apparaît en fait que, dans les métaux, ce sont les particules chargées négativement qui se déplacent très majoritairement en sens inverse...²

Deux types de matériaux. Des matériaux comme le verre et l'ambre, qui ne chargent pas de la même façon par frottement, sont des isolants. A travers eux, le courant électrique ne peut circuler. Dans un circuit allant d'un pôle + au -, et comportant un isolant, une lampe ne peut s'allumer ; elle reste éteinte. Le bois, les matières plastiques, le papier, la soie sont aussi de bons isolants alors que les métaux de façon générale (aluminium, fer, cuivre, zinc, laiton, argent, or) sont de bons conducteurs électriques.

Le phénomène de *polarisation électrique* apparaît lorsque nous approchons par ex. un isolant dont le frottement produit des charges positives d'un autre corps chargé de particules négatives et positives. On observe que les particules négatives du corps en question émigrent du côté de l'isolant chargé positivement (*polarization through induction*). *The positive and negative sides are attracting each other.* Aujourd'hui, si on approche deux boules métalliques d'un petit générateur Van de Graff dont la surface est chargée positivement, la boule la plus proche devient chargée négativement. Un *dipôle* est créé.³

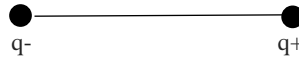


¹ C. Allègre, *Un peu de science pour tout le monde*, op. cit., p.179.

² Le courant électrique peut avoir différentes causes : un écoulement de particules négatives ou un écoulement de particules positives, ou un écoulement de particules négatives et positives dans des sens opposés. Pour réduire cette complexité, les électriciens emploient toujours la convention de Franklin et imaginent le courant électrique, connu sous le nom de courant conventionnel, comme constitué d'un écoulement de particules exclusivement positives. (https://fr.wikipedia.org/wiki/Charge_électrique). Dans les semi-conducteurs, par ex., les deux types de charges électriques se déplacent dans des directions opposées

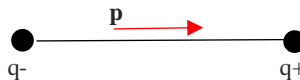
³ Walter Lewin, *Electricity and magnetism*, Lect.01, Spring 2002, MIT, <https://www.youtube.com/watch?v=Lx64cq0HeXY>.

Dans un dipôle électrostatique, la répartition des charges électriques est telle que le barycentre des charges positives ne coïncide pas avec celui des charges négatives. Le schéma le plus simple d'un tel dipôle est un couple de deux charges de signe opposé, séparées par une certaine (petite) distance :



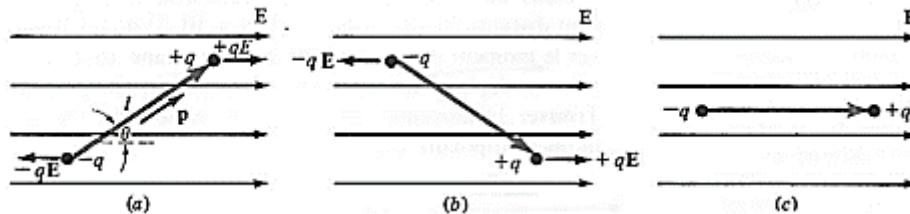
De façon plus générale, le dipôle électrique est un composant électrique possédant deux bornes, une borne d'entrée et une borne de sortie. On distingue les générateurs, ou dipôles actifs, qui produisent du courant électrique (ex. : piles), et les récepteurs, ou dipôles passifs, qui reçoivent le courant électrique (ex. : lampes). Une tension est perceptible aux bornes du dipôle.

La science post-Lumières a montré que *les atomes et les molécules fournissent de nombreuses illustrations de dipôles électriques*. Par exemple, une molécule d'eau [H_2O] a un excédent de charges négatives près de son atome d'oxygène et un excès positif près des atomes d'hydrogène. Un dipôle est caractérisé par son *moment dipolaire*. Si l est le vecteur distance de $-q$ à $+q$, le moment dipolaire est défini par $\mathbf{p} = q\mathbf{l}$ (les lettres en caractères gras sont des vecteurs).



Dans un champ électrique \mathbf{E} uniforme, i.e. un champ de force constant en direction, en sens et en valeur (lignes de champ parallèles), capable d'agir sur toute charge électrique placée dans ce champ, un dipôle électrique subit une force $q\mathbf{E}$ sur sa charge positive et une force $-q\mathbf{E}$ sur sa charge négative (\mathbf{E} est une grandeur vectorielle). La somme des deux forces est nulle de sorte que la force résultante sur le dipôle électrique est nulle, mais le moment résultant sur le dipôle ne l'est pas car les forces égales et opposées ont des lignes d'action différentes et forment un couple. (La lettre en gras désigne toujours un vecteur.)

Quand le dipôle est orienté comme sur la figure infra (a), le moment tend à faire tourner le dipôle dans le sens des aiguilles d'une montre. Quand le moment est dirigé comme sur la *fig.b*, il tend à faire tourner le dipôle dans le sens opposé des aiguilles d'une montre. Quand il est dirigé parallèlement au champ (*fig.c*), le moment est nul et le dipôle est en équilibre stable.¹



Par convention également, la direction des lignes de champ électrique en un point correspond à celle du champ \mathbf{E} , i.e. la direction de la force exercée sur une « charge test » positive. Le sens de \mathbf{E} est indiqué par une flèche. Les lignes de champ partent d'une charge ponctuelle positive et sont dirigées vers une source de champ négative. La particule d'essai positive est repoussée comme en l'espèce par la particule q^+ et attirée par la particule q^- .²

Des isolants comme le verre, le bois sec, etc., qui ne conduisent pas le courant électrique, sont par définition des *diélectriques*. Ces isolants électriques ne sont pas cependant inertes électriquement. A très petite échelle, ils présentent des dipôles électrostatiques qui interagissent avec un champ électrique externe, \mathbf{E} . Cette interaction se traduit par la création d'une polarisation. Les charges positives et négatives se séparent à l'intérieur d'un grand nombre de molécules (*fig.d*). Si le champ électrique change de direction, les molécules polarisées changent elles-mêmes de direction par rapport à leurs voisines (*the polar molecules rotate relative to their neighbours*).³

¹ Kane/Sternheim, *Physique*, op. cit., pp.359-360.

² http://patrick.kohl.pagesperso-orange.fr/spectro_part/spectro_part_1.htm : <http://www.iihe.ac.be/~cvdvelde/Info/Cours/ChapV.pdf>. La charge d'essai doit être petite pour quelle ne perturbe pas elle-même le champ électrique et que l'on puisse regarder la force de Coulomb F qui s'exerce sur elle due à la présence des charges électriques environnantes qui créent le champ électrique.

³ K. Dobson, D. Grace, D. Lovette, *Physics*, op. cit., pp.457-458 ; <https://fr.wikipedia.org/wiki/Diélectrique>.

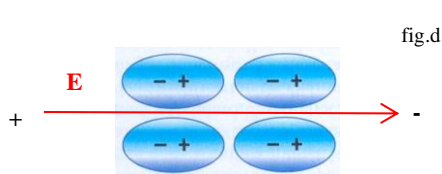


fig.d

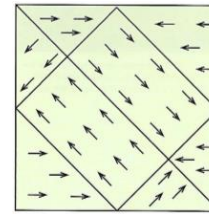
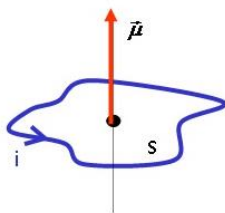


fig.e

Certains matériaux polarisent spontanément : les charges positives et négatives qu'ils contiennent se séparent en l'absence d'un champ électrique. Dans ces matériaux, dits *ferroélectriques*, la direction de polarisation peut ne pas être la même. On y observe différentes zones orientées (fig.e). Cet effet *piézoélectrique* a été remarqué également dans certains cristaux (quartz par ex.) sous l'action d'une contrainte mécanique. Sous pression, ils accumulent des charges électriques positives sur une de leurs faces et des charges électriques négatives sur une autre.

Ce phénomène est exploité à l'heure actuelle dans les montres à quartz précisément pour créer des impulsions d'horloge, mais un phénomène proche (l'effet pyroélectrique) avait été étudié dès le milieu du XVIII^e siècle par Linné qui avait découvert qu'un changement de température entraînait une variation de la polarisation électrique d'un cristal. En 1817, l'abbé René Just Haüy avait obtenu une « électricité de pression » (sic) en comprimant, comme la montre, un cristal entre ses doigts.¹

On appelle dipôle magnétique une boucle de courant qui se comporte, dans un champ magnétique, d'une façon très similaire à un dipôle électrique dans un champ électrique. Le passage du courant crée un *moment magnétique* dont la notion a été étudiée par Coulomb en 1779. Coulomb examinait la torsion du fil du mouvement d'un aimant suspendu dans un champ électrique. Un dipôle magnétique, doté d'un moment magnétique, plongé dans un champ magnétique uniforme, est soumis à un couple de forces qui tend à aligner le moment magnétique sur le champ magnétique. Le couple de forces s'annule lorsque le moment magnétique du dipôle est parallèle au champ.²



Le moment magnétique apparaît en électromagnétisme dès qu'un courant électrique se ferme sur lui-même pour former une boucle (on suppose ici que la surface sous-tendue par la boucle est plane). On associe alors à ce courant i un vecteur de moment magnétique μ défini comme suit :

- 1°) une direction perpendiculaire au plan de la boucle ;
- 2°) une orientation donnée par la règle du tire-bouchon (un tire-bouchon qui tournerait dans le sens du courant progresserait dans le sens du moment magnétique) ;
- 3°) sa norme $\mu = iS$ est le produit du courant i par la surface de la boucle.³

Dans les matériaux ferromagnétiques aussi bien que dans les matériaux ferroélectriques, un ordre directionnel, caractéristique de la polarisation, finit par apparaître sous l'action d'un champ d'excitation. Si l'on inverse le sens du courant ou du champ, l'alignement ou la rotation se fait dans l'autre sens.

Suivant le type de matériaux soumis à un champ magnétique généré par ex. par un aimant, les savants ont découvert que cette direction pouvait disparaître quand le champ d'excitation est coupé ou non. Un milieu paramagnétique acquiert une aimantation dirigée dans le même sens que le champ d'excitation dans le même sens que le champ d'excitation tant que cette excitation perdure, à la différence d'un milieu matériel ferromagnétique qui garde une partie de cette aimantation lorsqu'il n'est plus soumis à un champ magnétique externe.⁴

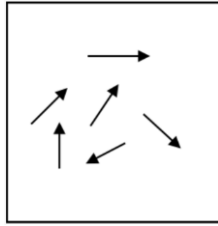
¹ K. Dobson, D. Grace, D. Lovette, *Physics*, op. cit., pp.457-458 ; <https://fr.wikipedia.org/wiki/Piézoélectricité>.

² J.-C. Boudenot, *Histoire de la Physique et des Physiciens*, op. cit., p.79 ; Kane/Sternheim, *Physique*, op. cit., pp.423-424.

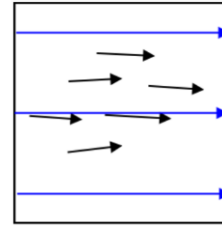
³ <http://www.phys4med.be/notions-physiques/moments-dipolaires>.

⁴ <http://physiquereussite.fr/le-magnetisme-quest-ce-que-cest/>

paramagnétisme



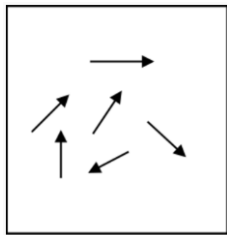
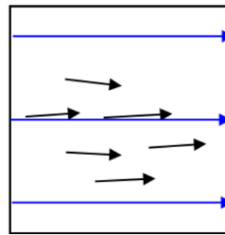
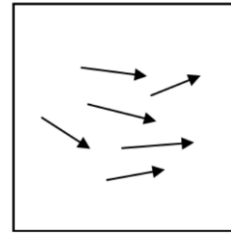
milieu en l'absence d'un champ magnétique extérieur



milieu soumis à un champ magnétique extérieur

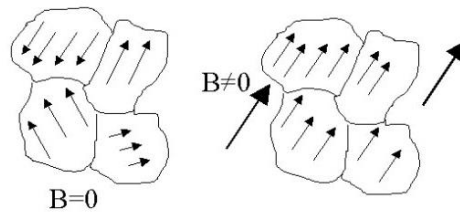
Les flèches noires représentent l'orientation spécifique des molécules qui composent le matériau étudié (à chaque atome ou molécule est associé un dipôle magnétique qui agit comme un mini-aimant, d'où les flèches noires). **Les flèches de couleur bleu** représentent le champ magnétique extérieur (le champ d'excitation)

ferromagnétisme

milieu en l'absence
d'un champ magnétique extérieurmilieu en présence
d'un champ magnétique extérieurle champ magnétique est coupé,
mais le milieu reste aimanté

Lorsque le champ d'excitation est coupé, les molécules gardent leur alignement mais le matériau perd petit à petit son aimantation sous forme de chaleur. On parle de relaxation du système. Le matériau ne reste aimanté qu'un certain temps.

Toutes ces notions et expériences, qui ont commencé à être débattues et mises en lumière à la fin du XVIII^e siècle, suggèrent qu'il existe une parenté de pensée entre les phénomènes de polarisation en physique et en politique. Les matériaux ferroélectriques et ferromagnétiques confirment la possibilité de la nature d'orienter toutes les directions aléatoires à l'approche par exemple d'un aimant. Encore faut-il être en présence d'un matériau susceptible d'être orienté dans une seule direction comme le fer et non le bois ! Encore faut-il aussi en politique que le milieu soit susceptible d'être aligné aussi « mécaniquement » qu'un matériau ferromagnétique soumis à un champ magnétique externe **B** ? Encore faut-il enfin que ce milieu soit capable de conserver un certain temps sa « magnétisation » ?



Le « champ » politique est-il comparable à un champ magnétique **B** ?

ii La polarisation de la vie politique

d) Asymétrie

i En marge du bipartisme

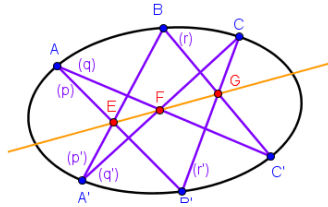
ii La condition des femmes et celle des enfants

¹ http://dydaktyka.fizyka.umk.pl/zabawki1/files/elmag/baczkewaz_big-fr.html.

La dualité géométrique (un retour à Pappus...)

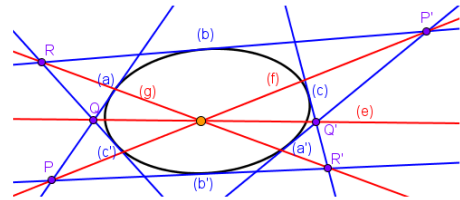
Les configurations compliquées ne datent pas que d'aujourd'hui si l'on pense à un théorème de Pascal, énoncé dans son *Traité des coniques*, qui trouvera son pendant dual au début du XIX^e avec Brianchon. Idem pour le théorème de Pappus que généralisa, via l'algèbre, Descartes. (§16-2/i) Ce théorème a aussi une version duale.

/



Théorème de Pascal

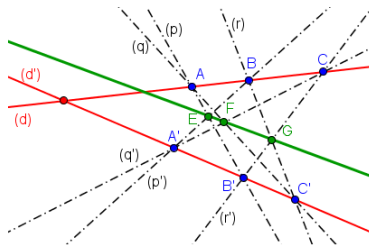
Soient A, B, C, A', B', C', six points distincts sur une conique (ex. : ellipse). Alors les points **E**, **F** et **G** sont alignés (sur la ligne rouge).



Théorème de Brianchon

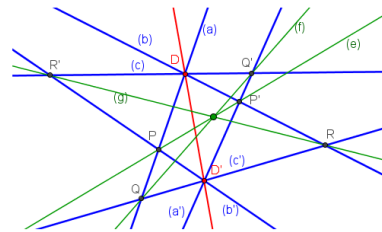
Soient (a), (b), (c), (a'), (b'), (c'), six droites distinctes tangentes à une conique. Alors les droites **(e)**, **(f)**, **(g)** sont concourantes. Le théor. de Pascal est duisé.

Dans le théorème de Pascal, un hexagone de sommets A, B, C, A', B', C', est inscrit dans l'ellipse. Dans le théorème de Brianchon, les tangentes à la polaire de l'ellipse fabriquent un hexagone circonscrit. On peut voir que le théorème de Pascal est une généralisation [via la géométrie] du théorème de Pappus, puisque un couple de droites n'est qu'un cas particulier de conique dégénérée.¹



Théor. de Pappus

les points **E**, **F** et **G** sont alignés



Théor. dual de Pappus

les droites **(e)**, **(f)**, **(g)** sont concourantes

¹ <http://eljjdx.canalblog.com/archives/2014/04/13/29630101.html>

§ 44. – ANALYSE DE FOURIER EN DROIT POSITIF

1/ Séries de Fourier et transformée de Fourier

a) Les séries de Fourier, 213

i Une synthèse additionnelle, 213

ii Exemples, 213

b) La transformée de Fourier

i Le passage au continu

ii L'utilité d'une transformée de Fourier

2/ Observations préalables en droit

a) La mesure de l'interprétation juridique

i Les différentes mesures

ii Le thermomètre de l'interprétation

iii La mesure de la variation interprétative

b) Les chroniques (ou séries chronologiques ou temporelles), 213

i Une invite à la recherche, 213

ii L'effet de la hiérarchie du droit, 213

3/ La « périodicité » du droit et de ses sous-structures

a) Les Etats-Unis

i Un nouveau soupçon de cycle en droit

ii La synthèse additionnelle américaine

iii La valeur moyenne d'un signal

iv Le coefficient de fréquence de l'interprétation constitutionnelle

v Les coefficients de fréquence de l'interprétation des lois et des cas

b) L'Angleterre

i The rule of (the common) law

ii La souveraineté du Parlement sous le feu de l'interprétation

iii Le parallélisme des fluctuations des common law anglaise et américaine

iv La spécificité de la synthèse additionnelle anglaise

c) La France

i La recomposition du droit positif français

ii L'imprégnation d'un certain cartésianisme

iii L'histoire constitutionnelle mouvementée française

iv Des ondulations sous l'équanimité des lois

Addendum

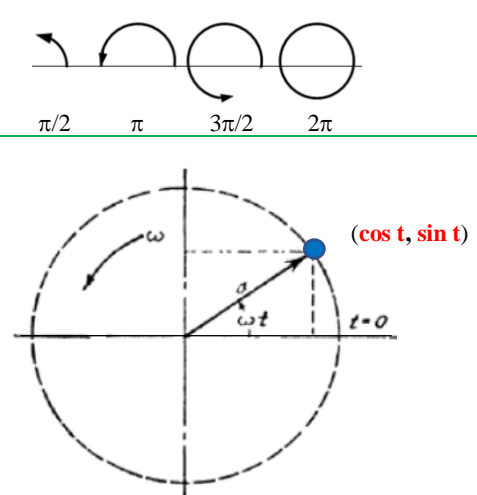
Comparaison entr la méthode des moindres carrés et l'échantillonnage d'un signal
(et son intérêt en droit)

1/ Séries de Fourier et transformée de Fourier

a) Les séries de Fourier

i Une synthèse additionnelle

Nous ne présenterons pas ici son équation de la chaleur (nous le ferons dans une autre section), mais nous nous arrêterons à sa solution qui fait appel à un outil puissant qui rappelle le développement d'une fonction en série de Taylor-Lagrange. Sur ce modèle, Fourier recourt aux séries trigonométriques en sinus et cosinus qui décrivent des fonctions périodiques qui retombent, si on peut dire, sur leurs pieds ... A chaque période T , ces fonctions retrouvent la même valeur après une révolution complète égale à 2π radians. Comme un radian est parcouru en T/π , la vitesse angulaire ou de rotation ω est égale à l'inverse, soit $\omega = 2\pi/T = 2\pi f$, la lettre T désignant la période et f la fréquence (le nombre de fois où le phénomène se reproduit dans un intervalle donné comme le nombre de pulsations à la minute du pouls).

Petit lexique et schéma élémentaire pour y voir clair	
<p>Mouvement périodique = mouvement qui se répète à intervalles de temps égaux (le mouvement se répète identique à lui-même)</p> <p>idée de cycle (au terme d'une période, le système effectue un cycle)</p> <p>Le cycle peut être représenté géométriquement par un cercle (mais pas nécessairement)</p> <p>ω = vitesse angulaire</p> <p>Quand $\omega t = 2\pi$ (la vitesse angulaire x temps = distance parcourue pour accomplir un cercle en 2π), l'intervalle de temps t est égal à la période de vibration T, ou $T = 2\pi$ sec.</p> <p>(vibration = mouvement d'oscillation(s) rapide(s) comme la vibration d'une corde, de la voix, d'un moteur, de l'air)</p> <p>Comme la fréquence f est l'inverse de la période ($f=1/T$), $f = \omega/2\pi$ (la fréquence mesure le nombre de cycles par seconde)¹ ou $\omega = 2\pi f$ (fréquence circulaire)</p>	 <p>Le mouvement périodique peut être représenté par un vecteur tournant. Le point de départ est celle du vecteur à l'horizontal. La projection horizontale du vecteur est : $a \cos \omega t$ et la projection verticale $a \sin \omega t$ (avec a signifiant l'amplitude)</p>

Quelle est l'idée essentielle ?

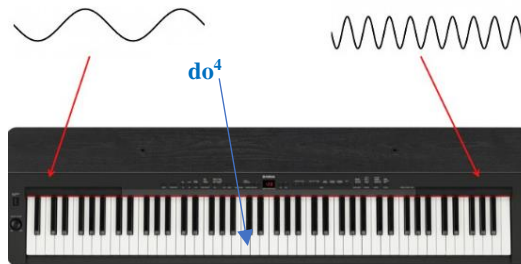
L'idée est conforme à la méthode analytique des Lumières. On raisonne sur les effets et non sur les causes, et on décompose ce qui est supposé connu. Vous appréciez un gâteau. Vous voudriez en connaître la recette. Quelle est la liste des ingrédients qui le composent et quelle est la bonne combinaison pour en faire un soi-même et le savourer à nouveau ? La série dite de Fourier répond à ces deux interrogations face à un phénomène qui fluctue à travers le temps ou l'espace comme la température qui se répand dans une barre de métal, une musique que l'on entend, ou un tout autre signal comme une image plus ou moins nette (l'image est une onde parce que la lumière est une onde).

Toutefois, à la différence d'un gâteau dont la saveur naît d'une interaction subtile entre ingrédients, la fonction qu'entend décomposer Fourier résulte d'une superposition d'effets simples. Une fonction périodique peut être considérée comme la somme algébrique d'un terme constant et de fonctions sinusoïdales dont les fréquences sont des multiples entiers de la fréquence de la première.

La fonction périodique peut être par exemple un son qui n'est pas pur. La fréquence de la première sinusoïdale serait celle de la note fondamentale ; les fréquences multiples première, seconde,

¹ La fréquence de vibration est mesurée en cycles par secondes ou *Hertz* (Hz). Par ex., 50 Hertz signifie que 50 fois par seconde le signal passe par la même valeur.

troisième, etc., celles des autres sinusoïdales appelées harmoniques. Toutes ces fréquences, ou nombre de périodes par unité de temps, sont des notes de musique qui peuvent être repérées sur le clavier d'un piano (on aurait dû choisir, à titre d'illustration, le clavecin, à cordes pincées, plus caractéristique des Lumières, que le piano, à cordes frappées, mais le *piano forte* fait la transition dès le XVIII^e siècle).



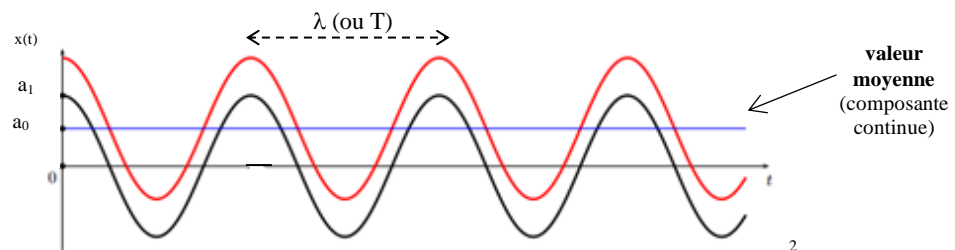
L'harmonique fondamentale est ici le do^1 . En frappant la note et en mettant la pédale, d'autres harmoniques se font entendre. Dans l'ordre : do^2 sol^2 do^3 mi^3 sol^3 bsi^3 do^4 mi^4 fa^4 \#sol^4 ..., les intervalles successifs étant les mêmes quelle que soit la note fondamentale : octave, quinte, tierce majeure, tierce mineure 2 fois, seconde majeure, seconde majeure 3 fois, seconde mineure ...¹

Soit une fonction périodique $x(t)$, de période T . La décomposition de $x(t)$, sous la forme d'une somme infinie de fonctions périodiques plus simples (sinus ou cosinus), a pour expression :

$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t))$ avec $\omega = 2\pi/T = 2\pi f$, T étant la période et f la fréquence.

$n\omega t$ signifie n fois ωt , c'est-à-dire n fois 2π (ou n fois un tour du cercle complet) puisque $\omega t = 2\pi$. Les cosinus et sinus ne sont pas utilisés dans le cadre d'un triangle, mais sont associés avec l'idée d'une périodicité spatiale dans le cadre d'un cercle, étant donné que $\cos(t+2\pi) = \cos t$ et $\sin(t+2\pi) = \sin t$.

Dans l'expression générale, a_0 est un terme constant (c'est la valeur moyenne de $x(t)$, de fréquence nulle) ; $a_1 \cos(n\omega t) + b_1 \sin(n\omega t)$ est la composante ou fréquence fondamentale caractérisée par les valeurs a_1 et b_1 ; ... $a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t) + \dots$ les harmoniques ou multiples de la fréquence principale, caractérisée par les valeurs des autres coefficients de Fourier a_n et b_n . Les coefficients a_n et b_n sont **les coefficients de pondération des différentes fréquences** dans $x(t)$.



$$x(t) = a_0 + a_1 \cos(n\omega_0 t), \text{ de période } T_0 = 2\pi / \omega_0 \text{ et de fréquence } f_0 = \omega_0 / 2\pi$$

Le coefficient a_0 représente exactement le double de la valeur moyenne de la fonction sur un intervalle donné : $a_0 = 1/T_0 \int f(t) dt$ entre 0 et T_0 , soit la valeur de la fonction $f(t)$ divisée par la longueur de l'intervalle. Le coefficient a_0 a une valeur constante, indépendamment des sinusoïdes avec lesquelles, à partir du rang 1, peut s'écrire la fonction. Ce n'est donc pas à proprement parler la moyenne des amplitudes des fluctuations, mais la moyenne de la fonction. a_0 est seulement une constante de décalage. Si $a_0 = 0$, il n'y a plus de sinusoïdes.

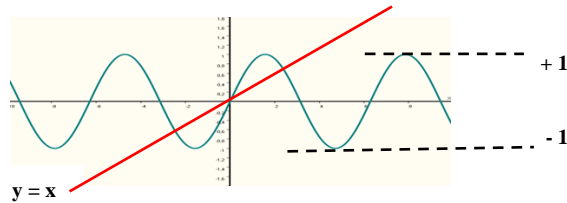
La période, T , exprimée en seconde, correspond à la périodicité temporelle : elle mesure le temps nécessaire pour qu'une perturbation comme le son en un point donné décrive une reproduction à l'identique de la perturbation. Le son est une variation rapide de la pression atmosphérique. Sa longueur d'onde, λ , exprimée en mètre, correspond à la périodicité spatiale : elle mesure la distance qui mesure deux points consécutifs de l'espace qui se trouvent dans le même état de perturbation à un instant donné. Elle représente la distance parcourue par le son pendant la durée d'une période. (Sur la figure, le même vecteur en pointillé peut représenter la période spatiale ou temporelle suivant la mesure.)

¹ The Physicist, *What is a Fourier transform? What is it used for?* Sept.24, 2012, <http://www.askamathematician.com/> ; Marc Sage, *Sons, fréquences, harmoniques, tons : le compromis du piano*, <http://www.normalesup.org/~sage/Musique/Harmonie.pdf>

² <http://www.seigne.free.fr/Cours/AnaFourier.pdf>. Si la fréquence ou pulsation ω est nulle, $x(t) = a_0 \cos(n\omega t) + a_1 \cos(n\omega_0 t)$ devient $x(t) = a_0 + a_1 \cos(n\omega_0 t)$ car $\cos(0) = 1$.

La périodicité spatiale des sinus ou cosinus expriment bien la périodicité temporelle : $x(t+T) = x(t)$. Mathématiquement, les signaux sont aussi des fonctions. Fourier ira au-delà de cette simple assimilation. Il considèrera que **tout signal périodique de période T (comme le son ou tout autre phénomène semblable) peut se décomposer en une somme limitée ou illimitée de sinusoides dont les fréquences sont des multiples de la fréquence de base $f_1 = 1/T$** . (On dit pareillement sinusöide, mouvement sinusöidal, ou sinusöidale, pour décrire la variation du sinus ou cosinus d'un angle.)

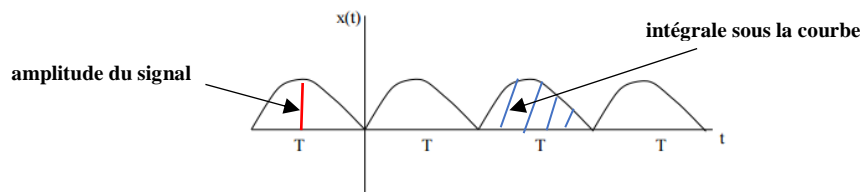
Lorsque la somme est limitée, nous avons affaire à un polynôme trigonométrique sans point de suspension à la fin. Il s'agit d'une série de Fourier tronquée qui peut être interprétée comme un développement limité d'une fonction à décrire. Chaque terme ajouté permet de diminuer l'écart entre la série tronquée et la série complète qui comporte une infinité de termes... Le fait que la fonction sinus ou cosinus, bornée entre -1 et 1, n'ait pas de limite ne pose pas davantage de problème qu'une droite non moins infinie des deux côtés ($y = ax+b$ est déjà lui-même le développement limité d'une droite) :



Une droite peut faire l'objet d'un développement limité, i.e. d'une approximation polynomiale au voisinage d'un point. On considère par ex la somme $y = ax + b$ sur un intervalle donné, mais alors que la série de Taylor est un développement limité au voisinage d'un point, la série de Fourier offre une approximation sur tout un intervalle : $[-1, +1]$, ou même sur tout \mathbb{R} car elle est périodique sur \mathbb{R} .

§ 41-

En utilisant des identités trigonométriques familières aux spécialistes, nous pouvons déterminer les coefficients de pondération a_0 , a_n et b_n par le biais également d'une somme (une intégrale, \int , calculée sur la période T) comme suit : $a_0 = 1/T \int_0^T x(t)dt$, $a_n = 2/T \int_0^T x(t) \cos(n\omega t)dt$, $b_n = 2/T \int_0^T x(t) \sin(n\omega t)dt$. Les harmoniques de rang n ont, quant à elles, pour expression $\cos(n\omega t) + b_1 \sin(n\omega t) = A_n \cos(n\omega t - \varphi_n)$, A_n représentant l'amplitude (la valeur maximale de l'onde sinusöidale), $2\pi/n\omega$ la période sachant que $\omega = 2\pi/T$, et φ_n la phase, i.e. l'angle, étant rappelé que $\varphi = 0$ signifie que les signaux en cause sont en phase, et que les autres valeurs de φ signifie que les signaux sont déphasés ou décalés (avec par ex. $\varphi = 90^\circ$ ou $\pi/2$), voire en opposition de phase (avec $\varphi = \pm 180^\circ$ ou $\pm\pi$).



En déplaçant les bornes de l'intervalle d'intégration, les coefficients d'une fonction sinusöidale T -périodique auraient pu également s'écrire : $a_0 = 1/T \int_{-T/2}^{T/2} x(t)dt$, $a_n = 2/T \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cos(n\omega t)dt$, $b_n = 2/T \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \sin(n\omega t)dt$. Si la période $T = 2\pi$, les bornes de l'intervalle deviennent : $-T/2 = -2\pi/2 = -\pi$ et $T/2 = 2\pi/2 = +\pi$. Dans le cas d'une 2π -périodique intégrable sur $[-\pi, +\pi]$, nos coefficients de pondération se simplifient comme suit : $a_0 = 1/2\pi \int_{-\pi}^{\pi} x(t)dt$, $a_n = 1/\pi \int_{-\pi}^{\pi} x(t) \cos(nt)dt$, $b_n = 1/2\pi \int_{-\pi}^{\pi} x(t) \sin(nt)dt$ en remplaçant ω par $2\pi/T$ selon la définition de la vitesse angulaire ou de rotation ω .¹

Au dire de Fourier, toute fonction périodique se présente ainsi comme une combinaison de fonctions périodiques. **Leurs effets, indépendants entre eux, se superposent en une synthèse additionnelle**. Nous sommes en présence d'une base en sinus et cosinus. Fourier dépasse le XVIII^e siècle qui pensait que les fonctions périodiques discontinues (par ex. en forme de dents de scie, d'escalier ou en créneau) ne sont pas des vraies fonctions, indéfiniment dérivables et susceptibles

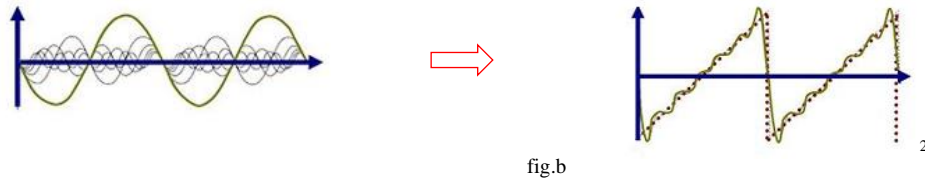
§25-iv

¹ <http://lumimath.univ-mrs.fr/~jlm/cours/fourier/fouriersos;htm> <http://c.caignaert.free.fr/chapitre12/node2.html>

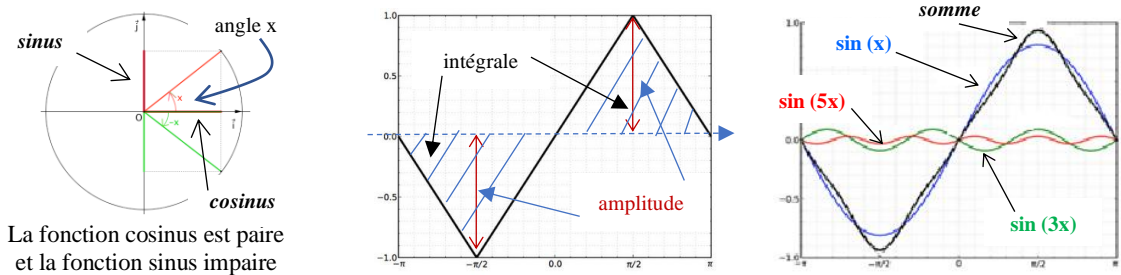
d'être développées en séries entières.¹ Dans leur représentation trigonométrique, les dérivées n'interviennent plus comme dans la série de Taylor-Lagrange. Le signe de l'intégration suffit dans la formule, même si les fonctions ne sont continues et dérivables que par morceaux. On se contente qu'elles soient suffisamment régulières.

ii Exemples

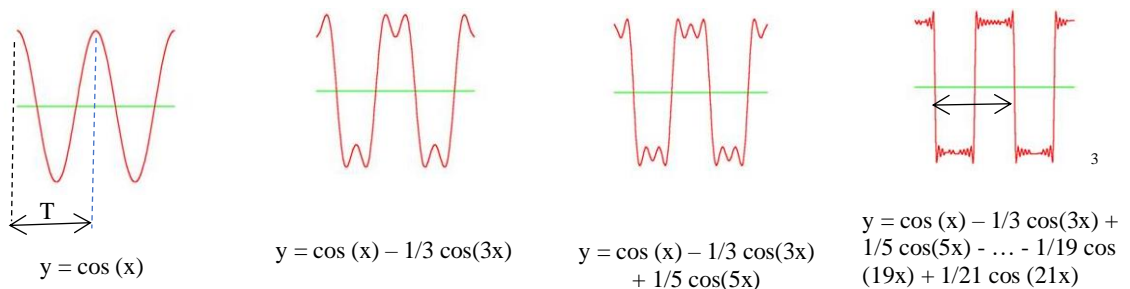
Les exemples de fonctions discontinues précitées sont, dans ces conditions, représentables trigonométriquement. En additionnant des ondes de fréquence variable, il devient aisé de reconstituer une fonction en dent de scie. (fig.a et b) Voilà à l'œuvre notre physicien-mathématicien diplomate qui arrondit les angles et les pics sur le chemin de la connaissance ! Le passage de la fig. a à la fig. b est spectaculaire, et on voit comment des courbes périodiques retracent un tracé pour le moins heurté.



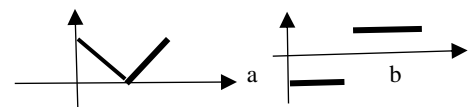
Examinons de plus près ce passage d'une fonction d'onde triangulaire. Il s'agit d'une fonction impaire : $f(-x) = -f(x)$, la variable x représentant $n\omega t$ avec $\omega = 2\pi/T$. Tous les coefficients cosinus sont égaux à 0. Comme chaque demi-onde est symétrique, les coefficients sinus pairs valent aussi 0. Après avoir déterminé ses coefficients (via un calcul d'intégrale recourant aux primitives dans l'intervalle soit $(-\pi, 0)$, soit $(0, \pi)$), la série de Fourier peut s'écrire pour cette onde d'amplitude alternativement négative et positive et de période 2π comme $8/\pi^2 [\sin(x) - 1/9 \sin(3x) + 1/25 \sin(5x) - 1/49 \sin(7x) + 1/81 \sin(9x) - \dots]$. En s'arrêtant aux 5 premiers termes, on voit comment la série serre au plus près la fonction :



Ces exemples montrent combien une fonction périodique peut faire l'objet d'une très bonne approximation en additionnant de plus en plus d'harmoniques à la fondamentale (ici, en bleu). On le constate aussi avec une courbe en créneau (l'harmonique fondamentale est située tout à gauche) :



La fonction en créneau, comportant des coins, est continue par morceaux avec des dérivées discontinues (les coins n'ont pas de dérivées) comme il advient également avec les fonctions en dents de scie ou ci-contre :



¹ Jean Dhombres, Jean-Bernard Robert, *Fourier. Créateur de la physique mathématique*, Paris, Belin, 1998, pp.550-560.

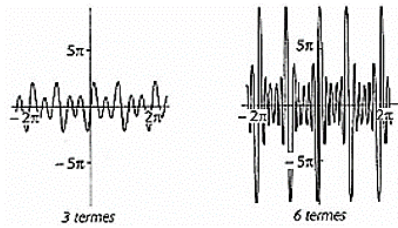
² https://en.wikipedia.org/wiki/Convergence_of_Fourier_series

³ <http://www.leancrew.com/all-this/2015/01/the-michelson-fourier-analyzer/> ; <http://villemin.gerard.free.fr//Analyse/Fourier.htm> ;

(le théorème fondamental de l'analyse établit qu'une fonction est continue sur un intervalle $[a,b]$ si $F'(x) = f(x)$ avec $F(x) = \int_a^x f(x) dx$)

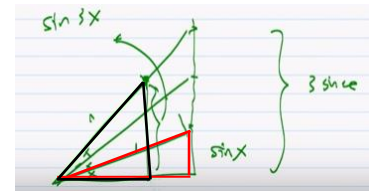
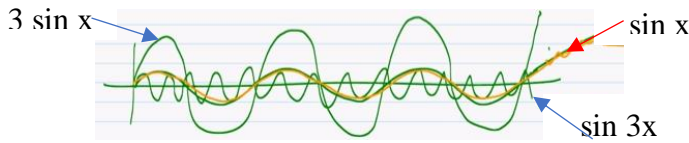
Comme la fonction en dent de scie, un créneau peut être décrit par les fonctions sinus ou cosinus. En continuant d'ajouter des fonctions cosinus, avec des coefficients impairs successifs, alternativement négatifs et positifs, on se rapproche de plus en plus de la fonction crénelée (située à l'extrême droite). Si l'ordonnée y du signal fluctue en permanence par ex. entre -1 et $+1$, le coefficient a_0 a une valeur nulle ($a_0 = 0$), ce qui n'est pas étonnant sachant que la moyenne d'une fonction sinusoïdale est nulle.

Fourier pensait avoir démontré que des fonctions discontinues similaires pouvaient être approchées par des fonctions continues. Le développement en séries trigonométriques devait converger, mais son théorème ne s'appliquait en fait qu'aux cas particuliers qu'il traitait. Il appartiendra à Dirichlet, en 1829, de démontrer dans un cadre plus général la convergence d'un développement en sinus et cosinus servant à reconstituer une fonction arbitraire entre des limites données.¹



Soit $\sin x + 3 \sin 3x + 5 \sin 5x + \dots$ Cette série de sinusoïdes semble converger avec 3 termes mais diverge avec 6 ...²

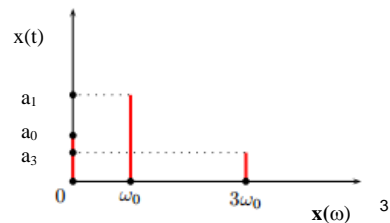
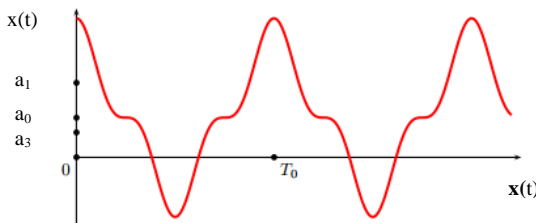
Ne pas confondre $\sin 3x$ et $3 \sin x$.



$\sin x$ est recopié en rouge ; $\sin 3x$, comporte 3 sommets au sein de chaque crête ou creux de $\sin x$; avec $3 \sin x$, l'amplitude de $\sin x$ est multipliée par 3. Une autre façon de voir la différence via deux triangles rectangles d'angle x et $3x$

Nous avons jusqu'ici procédé à une représentation temporelle d'un signal sinusoïdal comme le son par exemple. Il peut s'avérer utile de privilégier les deux informations que sont l'amplitude et la pulsation ou la fréquence. On rappelle que ces deux grandeurs sont liées par la relation $\omega = 2\pi f$ qui traduit leur proportionnalité, π étant constant. L'amplitude en fonction de la pulsation ou de la fréquence est appelé le *spectre du signal*. Il s'agit d'un graphe portant l'amplitude en ordonnées et la pulsation en abscisses.

Considérons, par ex., le signal $x(t) = a_0 + a_1 \cos \omega_0 t + a_3 \cos 3\omega_0 t$. Ce signal comporte 3 pulsations $\omega = 0, \omega = \omega_0$ et $\omega = 3\omega_0$. Nous pouvons le représenter sous forme temporelle $x(t)$, ou pulsationnelle $x(\omega)$:

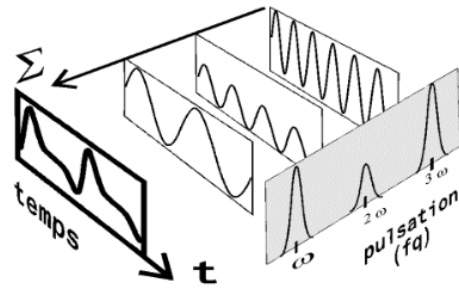


¹ J. Dhombres, J.-B. Robert, *Fourier, op. cit.*, pp.645-653.

² Barbara Burke Hubbard, *Ondes et ondelettes. La saga d'un outil mathématique*, Belin- Pour la science, Paris, 1995, p.37.

³ <http://www.seigne.free.fr/Cours/AnaFourier.pdf>.

soit, en mettant ensemble ces deux représentations pour mieux comprendre leur relation avec la décomposition d'une fonction périodique de forme quelconque en une somme Σ de fonctions sinusoïdales simples comme dans cet autre exemple :

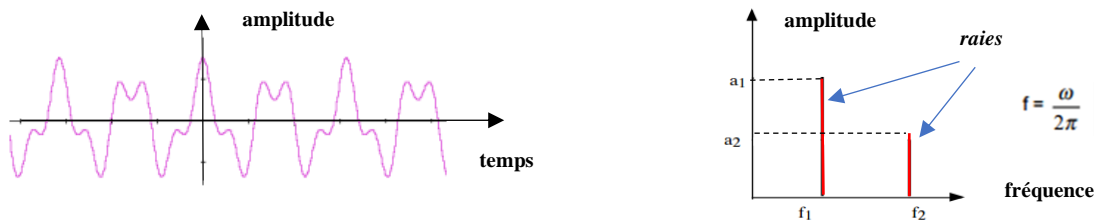


Les termes « signa! » et « fonction périodique » sont équivalents. Le terme signal est davantage employé dans la science de l'ingénieur, le terme de « fonction périodique » plus utilisé par les mathématiciens..Nous employerons l'un ou l'autre

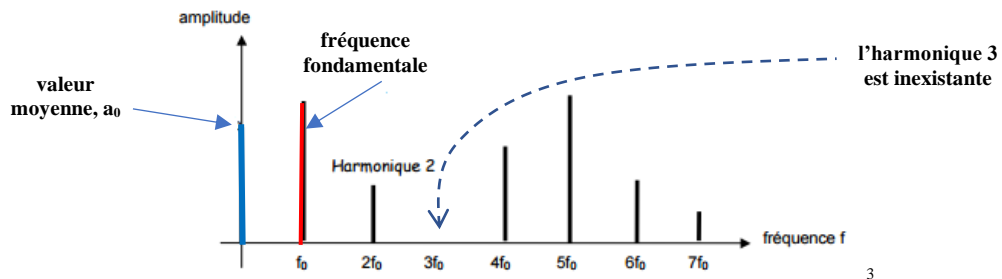
Comme on le voit sur cette figure, le spectre d'un signal définit sa composition en fréquences (fq ou f).

Dans un grand nombre de cas, cette décomposition n'est pas seulement une astuce mathématique ; elle révèle les diverses ondes physiques composant le signal. Ainsi les ondes acoustiques engendrent des variations de pression de l'air que nous percevons quand nous écoutons de la musique ou une conversation. Les sons aigus sont constitués d'ondes de hautes fréquences : les maxima de pression sont serrés. Les sons graves sont constitués d'ondes de basses fréquences : les maxima sont espacés.²

Soit par ex. le signal $x(t) = a_1 \cos(2\pi f_1 t) + a_2 \cos(2\pi f_2 t)$, l'expression $n\omega t$ dans $a_n \cos(n\omega t)$ étant simplement remplacé par $2\pi f_n$:



Dans ce signal de deux signaux sinusoïdaux de fréquence f_1 et f_2 , les coefficients de pondération a_n mesurent l'amplitude de chacune des fréquences ou harmoniques composant le signal d'ensemble. Le spectre d'un signal périodique est toujours un spectre de raies et les différentes raies ne peuvent se trouver qu'aux fréquences nf_0 . Les abscisses sont des entiers correspondants aux rangs des harmoniques, la fondamentale f_0 étant de rang 1. Nous pouvons par ex. avoir le spectre suivant :



La représentation fréquentielle ne prend pas en compte un éventuel déphasage φ entre les différentes courbes périodiques qui composent le signal. Le spectre de fréquences serait identique pour les signaux $x(t) = a_0 \cos(2\pi f_0 t)$ et $x(t) = (2\pi f_1 t + \varphi)$. (Ne pas confondre a_0 , la valeur moyenne, et f_0 , la fréquence fondamentale. Voir la figure supra.) Cependant, une telle représentation a aussi pour intérêt de savoir **quelles sont les fréquences qu'il convient de filtrer pour améliorer un signal comme le son ou une image en ne laissant passer que les hautes (rapides) fréquences ou les basses (les lentes).**

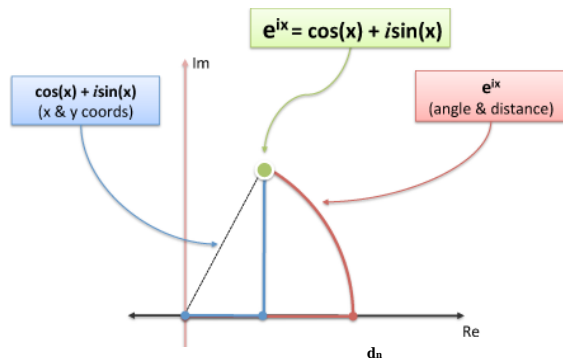
¹ http://chezmic.free.fr/deux_visions.htm
² B. Burke Hubbard, *Ondes et ondelettes*, p.42.
³ <http://www.ta-formation.com/acrobat-cours/spectre.pdf>

Le poids relatif de chaque fréquence est représenté par l'amplitude $d_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ (voir en note le pourquoi).¹ Cette amplitude augmente quand n augmente : les harmoniques contribuent d'autant moins au signal que leur rang est élevé.

Après la lecture de cette présentation, le lecteur pourrait déjà s'étonner que l'on puisse faire un rapport entre la possibilité de trouver la série de Fourier d'une fonction et le droit constitutionnel des Lumières.

- Vous supposez, dira-t-il, une fonction périodique, mais êtes-vous sûr que la jurisprudence que vous allez évoquer est aussi périodique que vous le pensez ? Croyez-vous vraiment que le signal en cause (s'il existe) soit celui d'un clignotement comme le clignotant d'une voiture qui oscille entre deux niveaux : un niveau haut « allumé » et un niveau bas « éteint » ? Ce type de signal ne varie pas continûment. Le clignotant ne s'allume pas doucement, ne devient pas plus intense, puis s'éteint. Ce serait dangereux !

- Avant de répondre, il convient de rappeler au préalable que grâce aux formules d'Euler les termes en cosinus et sinus peuvent se convertir en exponentielles complexes dont les propriétés facilitent le calcul (en analyse de Fourier, les nombres complexes permettent de n'avoir qu'un seul coefficient de Fourier pour chaque fréquence ; on n'a plus besoin des sinus et des cosinus).



$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

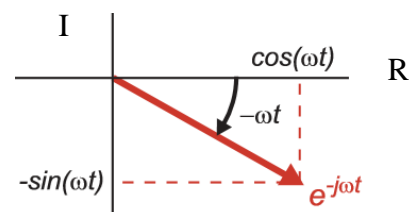
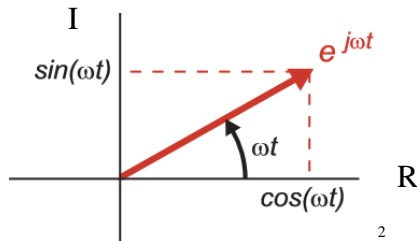
(d'après Euler, voir fig. ci-contre)

De même,

$$e^{-ix} = \cos x - i \sin x$$

en remplaçant, dans $e^{ix} = \cos x + i \sin x$, la variable x en $-x$ et en observant que la fonction cosinus est paire ($\cos(-x) = \cos x$) et la fonction sinus impaire ($\sin(-x) = -\sin x$), (<https://betterexplained.com/articles/intuitive-understanding-of-eulers-formula/>)

Le nombre imaginaire $i = \sqrt{-1}$ est parfois réécrit en $j = \sqrt{-1}$. Autrement dit, $e^{j\omega t} = \cos(\omega t) + j \sin(\omega t)$ et $e^{-j\omega t} = \cos(\omega t) - j \sin(\omega t)$, le nombre complexe $e^{-j\omega t}$ étant le conjugué de $e^{j\omega t}$. L'intérêt du plan complexe est de décrire, non seulement l'amplitude (la longueur du vecteur), mais aussi la phase (l'angle $\varphi = \omega t$) :



Amplitude $A=1$, $\varphi=0$, \Rightarrow nb réel = 1 ; $A=1$ et $\varphi=45$: comme $A=\sqrt{(\text{réel}^2 + \text{imag}^2)}$ (théor. Pythagore) et $\tan \varphi = \text{Im}/\text{Re}$, $\Rightarrow \text{Re} = \sqrt{2}/2$ et $\text{Im} = \sqrt{2}/2i$. *fig.a* : Quand le temps t croît, le vecteur tourne dans le sens contraire des aiguilles d'une montre. (sens trigonométrique conventionnel). *fig.b* : Quand t croît, le vecteur tourne dans le même sens des mêmes aiguilles.

¹ Soit $a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$. Comme $\cos x = \sin(x+\pi/2)$, $a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t) = a_n \sin(n\omega t+\pi/2) + b_n \sin(n\omega t)$. On sait que la somme de deux sinusôides de même pulsation est une sinusôide de même pulsation. Ecrivons donc que $a_n \sin(n\omega t+\pi/2) + b_n \sin(n\omega t) = d_n \sin(n\omega t+\varphi_n)$. La méthode vectorielle permet de déterminer d_n et φ_n , les vecteurs \mathbf{a}_n et \mathbf{b}_n pouvant être les côtés d'un triangle rectangle dont l'hypoténuse, représentant le vecteur \mathbf{d}_n , est l'image de $d_n \sin(n\omega t+\pi/2)$. On en déduit l'amplitude, soit l'hypoténuse $d_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$, ainsi que la phase, soit l'angle $\varphi_n = \arctan a_n/b_n$. ([Http://hpallam.pagesperso-orange.fr/bs1secours/C107analyseharmonique.pdf](http://hpallam.pagesperso-orange.fr/bs1secours/C107analyseharmonique.pdf))



\mathbf{a}_n , \mathbf{b}_n et \mathbf{d}_n en gras indiquent des vecteurs. \mathbf{a}_n et \mathbf{b}_n sont les côtés, et \mathbf{d}_n l'hypoténuse (l'arc tangente φ_n d'un nombre réel est la mesure d'un angle orienté dont la tangente vaut ce nombre)

² <http://web.mit.edu/6.02/www/s2007/lec3.pdf>

Pour convertir la somme $x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$ avec $\omega = 2\pi/T = 2\pi f$ en somme d'exponentielles complexes, les mathématiciens utilisent les précédentes formules d'Euler : $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ et $e^{-ix} = \cos x - i \sin x$ pour en obtenir deux nouvelles : $\cos(x) = (e^{ix} + e^{-ix})/2$ et $\sin(x) = (e^{ix} - e^{-ix})/2i$.¹ C'est à partir de ces formules que l'on obtient la somme $x(t)$ en complexes et non plus en réels : $s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in2\pi ft}$. Les nombres constants c_n sont la nouvelle forme des coefficients.² Pour le cas $T = 2\pi$, l'expression de la somme apparaît plus simple : $\sum c_n e^{int}$.

Le poids de chacune des composantes fréquentielles constitue donc une fonction imaginaire de la fréquence (ou pulsation). c_n est un nombre complexe dont le module est bien égal à $|c_n| = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ comme dans la précédente note.

Cela étant précisé, je suis plus à l'aise pour aborder votre question.

b) La transformée de Fourier

i Le passage au continu

Il suffit d'avoir un signal continu avec des répétitions sans que celles-ci soient régulières. La périodicité n'est pas condition absolue. Par un procédé appelé *transformée de Fourier (TF)*, on convertit également la somme \sum de la série de Fourier en intégrale \int . L'intégrale de Fourier remplace la série de Fourier. La transformée n'est qu'un simple calcul si la fonction existe. Ce calcul s'applique même sur une image.

Soit $x(t)$ un signal à temps continu. La transformée de Fourier est l'analyse d'un signal sous forme d'une infinité de composantes sinusoïdales complexes, soit la fonction $X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-2\pi i f t} dt$. La littérature mathématique utilise habituellement l'expression : $F(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-2\pi i \nu t} dt$, la lettre f représentant une fonction (réelle, définie sur \mathbb{R} , de $-\infty = +\infty$) et non plus une fréquence, notée ici ν , $f(t)$ étant réciproquement déterminée comme l'inverse de la transformée de Fourier : $f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\nu) e^{2\pi i \nu t} d\nu$.

(Dans l'équation $f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\nu) e^{2\pi i \nu t} d\nu$, le terme $F(\nu)$ représente le poids de chaque fréquence dans le signal, *the strength of the frequency* ; $e^{2\pi i \nu t}$ représente la fonction qui varie sinusoïdalement ; $d\nu$ est la différence entre les fréquences ν et $\nu + d\nu$ comprenant la pulsation de la composante sinusoïdale.)

Ce sont ces deux équations qui constituent la *transformée de Fourier*. La 1^{re} équation transforme une fonction, du temps, $f(t)$, en une fonction de fréquence, $F(\nu)$: la 2^{de} équation fait l'inverse en transformant une fonction de fréquence $F(\nu)$ en une fonction du temps, $f(t)$. La transformée de Fourier relie deux domaines, celui des données temporelles et celui des données fréquentielles comme nous l'avons déjà entrevu en représentant un signal au moyen d'une série de Fourier discrète. Ces deux domaines paraissent différents, mais ils renvoient à un même phénomène comme si pour indiquer à autrui où nous nous situons, nous donnions notre adresse habituelle (n° de rue, etc.) ou notre adresse en GPS.³

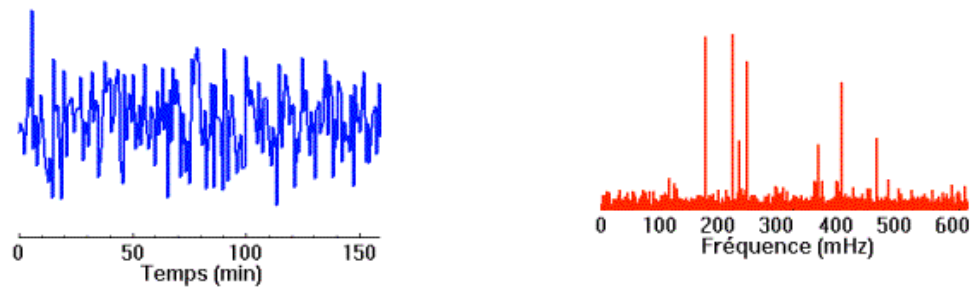
Les physiciens parlent de **dualité temps-fréquence** puisque les 2 équations décrivent la même réalité.

- Intéressant, mais quelle est l'utilité d'une telle dualité en physique ? et quel est surtout son intérêt en droit ? - La transformée de Fourier facilite la recherche de composants périodiques dans un signal.

¹ $e^{ix} + e^{-ix} = (\cos x + i \sin x) + (\cos x - i \sin x) = 2 \cos x$, sachant que $e^{-ix} = \cos x - i \sin x$ en remplaçant x en $-x$ et en observant que la fonction cosinus est paire ($\cos(-x) = \cos x$) et la fonction sinus impaire ($\sin(-x) = -\sin x$). D'où : $\cos(x) = (e^{ix} + e^{-ix})/2$ et $\sin(x) = (e^{ix} - e^{-ix})/2i$.

² http://www.personal.soton.ac.uk/jav/soton/HELM/workbooks/workbook_23/23_6_complex_form.pdf

³ Brian Douglas, *Introduction to the Fourier Transform*, (Part1), <https://www.youtube.com/watch?v=1JnayXHhjlj>



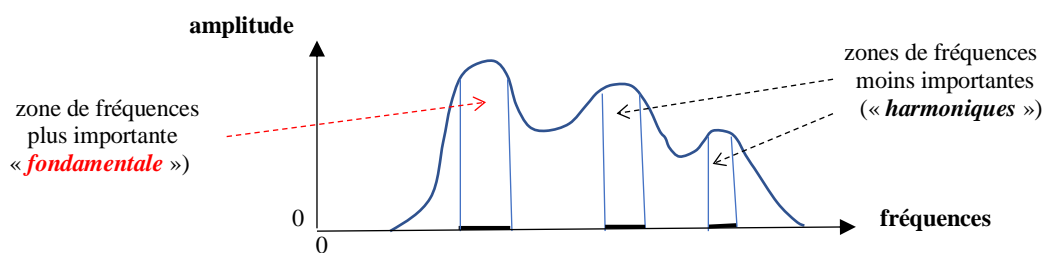
La série temporelle (extrait en *bleu*) ne montre rien de définissable. Son spectre de Fourier (en *rouge*) dévoile en revanche les fréquences propres qui constituent le signal en les distinguant clairement du bruit.¹

A la différence d'un son périodique qui offre un spectre discontinu (raies représentant certaines fréquences dans le signal, toutes les autres ayant une intensité nulle), un son apériodique offre un spectre continu (toutes les fréquences sont présentes dans le signal, à différentes intensités).

Dans le cadre d'une transformée de Fourier (FT), les notions de fréquence fondamentale et d'harmoniques subsistent même si les rapports entre elles ne sont plus des entiers multiples. Dans un morceau de musique par exemple, à la différence de l'émission du son d'un instrument, décomposable strictement en série de Fourier, l'amplitude maximale peut être considérée comme la fréquence fondamentale et tout le reste de la courbe comme des harmoniques en nombre infini bien que les praticiens ne retiennent que les plus audibles.²

- Le problème est que l'on ne parle plus de fondamentale et d'harmoniques en transformée de Fourier. Nous ne sommes plus en série de Fourier où on envisage ces notions ainsi que celle de coefficients de pondération.

- Je sais, mais si on considère, en transformée de Fourier, une courbe continue d'amplitude en fonction de la fréquence dans une zone limitée qui ne soit plus entre $-\infty$ et $+\infty$ comme en mathématiques, tu peux repérer d'éventuelles bosses dans la courbe. Chaque bosse, qui correspond à une zone plus étroite de fréquences, joue équivalamment le rôle d'une « harmonique », la plus importante étant l'harmonique de premier rang, « la fréquence fondamentale », ou son fondamental, qui détermine la hauteur du son. Le rapport d'amplitude d'une zone « harmonique » à la zone « fondamentale » joue pareillement le rôle de coefficient dans une série de Fourier. Je reconnais que ce n'est très rigoureux (le rapport notamment n'est pas un nombre entier), mais la similitude a un sens.



Généralement, dans la zone limitée, les extrémités baissent. Une fréquence nulle indique l'absence de fréquence

En principe, il est plus facile de travailler sur le spectre de fréquences que directement sur l'évolution temporelle qui peut être embrouillée pour extraire certaines informations (par ex. : une amplitude à un instant donné). La représentation fréquentielle est plus lisible que la temporelle (l'amplitude en fonction des fréquences est plus claire et distincte pour parler comme Descartes). Cependant, la transformée de Fourier ne s'applique pas telle quelle. Comme partout en science, il faut passer du continu au discret. L'intégrale \int de $F(\nu)$ doit devenir une somme \sum . De même, il est impossible de connaître le signal tout entier de $-\infty = +\infty$. On n'analyse souvent qu'une partie du signal de $t=0$ à

¹ http://chezmic.free.fr/deux_visions.htm

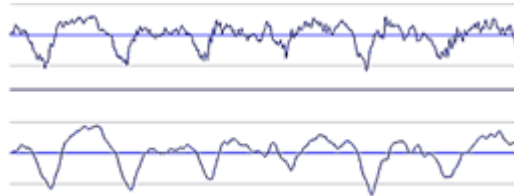
² Gaël Richard, Roland Badeau, *Détection de fréquences fondamentales*, sans date (probablement 2004), http://perso.telecom-paristech.fr/~grichard/Enseignements/ATIAM/TP_multiF0/TP-multipitch3.pdf.

$t=N.T_e$ (T_e étant la période d'échantillonnage, c'est-à-dire des valeurs numériques retenues). Le temps lui-même est discrétisé.¹

ii L'utilité d'une transformée de Fourier

Dans le cas d'un son apériodique autant que périodique, **la transformée de Fourier permet de mettre à jour les fréquences et de sélectionner certaines d'entre elles**, en dehors de son utilité pour résoudre des équations différentielles (comme celle de la chaleur) à l'instar d'une autre transformée de l'époque, celle de Laplace et de son inverse.²

Vous entendez un son, résultant d'un tas de notes mélangées (une note de guitare par ex.). Vous pouvez amplifier ou diminuer le volume des harmoniques de la note principale. Vous voulez, disons, vous débarrasser des aigus. Vous filtrez le signal en atténuant les harmoniques qui ont tendance à produire les sifflantes (les *ss* et les *ff*) et les occlusives avec un intensité élevée. A l'aide de la trans-



En haut : un signal riche en aigus ; en bas : le même signal filtré et débarrassé de ses aigus³

-formée de Fourier, votre appareil, délivrant la musique, utilise un *filtre passe-bas* pour laisser surtout passer les harmoniques basses. De la même manière, il utiliserait un *filtre passe-haut* pour laisser passer les harmoniques hautes, et un *filtre passe-bande* pour couper les harmoniques hautes et basses et laisser passer les moyennes. Il suffit pour l'auditeur de jouer avec un égaliseur (*equalizer*) ou avec les boutons correspondants. Si vous tournez le bouton des « basses », les fréquences basses sont multipliées par une valeur plus grande que les hautes fréquences. Autrement dit, pour avoir la bande de fréquences voulue, vous jouez sur les coefficients constants devant les exponentielles complexes...

(§43- Nous avons déjà rencontré cette question de filtrage en étudiant le bipartisme naissant dans le constitutionnalisme moderne. Peut-on revenir sur cette question, à la lumière ses séries de Fourier, en imaginant un filtrage fréquentiel face à l'évolution, visiblement fort compliquée, du droit positif qui commence à se moderniser aux XVII-XVIII^e siècle ? Nous arrivons, vous le voyez, à votre question.

- Enfin ! mais je reste sceptique...

- Votre scepticisme est de bon aloi en science. Vous devez toutefois en réduire la portée en admettant d'emblée que l'idée de cycle, à la base des séries de Fourier, n'est pas étrangère en politique comme en économie.

(§43-iii) Nous avons déjà rencontré cette idée en évoquant le phénomène d'hystérésis, même si, je vous l'accorde, un tel phénomène n'est pas représentable géométriquement par un cercle et algébriquement par des cosinus et des sinus ou des exponentielles complexes ! En économie, des erreurs de politique économique laissent des traces qui peuvent gêner l'application d'une nouvelle politique. La décision politique accuse aussi des retards d'adaptation face aux changements de l'opinion. Nous sommes déjà proche du droit constitutionnel qui encadre ces variations de politique.

(§41-ii) **L'idée de cycle remet en question celle d'équilibre ou de moyenne au profit d'une vision dynamique dans laquelle les fluctuations jouent un rôle.** On retrouve l'idée d'écart que privilégie le droit à l'occasion par ex. du vote d'un texte en termes identiques à l'instar du modèle de Young en optique (politique basée sur le contraste, l'influence partielle n'étant pas noyée dans l'influence totale).

Au XIX^e siècle, les économistes se sont ouverts à cette idée. Dans leurs propres modèles,

¹ <http://www.ferdinandpiette.com/blog/2011/05/la-transformee-de-fourier-discrete/>

² J. Dhombres, J.-B. Robert, *Fourier, op. cit.*, pp.577-578

³ <http://www.freesoundeditor.com/filtration.htm>

l'introduction du temps n'est plus perçu *comme moyen de converger vers un équilibre général ou partiel, mais comme élément explicatif d'enchaînements en permanente mutation à l'origine de la théorie du cycle économique (business cycle)*.¹ Les économistes ont fait mieux en donnant une explication endogène des cycles, cherchant, dans les mécanismes économiques eux-mêmes (et non plus seulement par ex. dans les tâches du soleil qui affecteraient les récoltes), les facteurs qui expliqueraient cette évolution (Clément Juglar notamment a mis en lumière l'évolution de la quantité de monnaie qui seraient à l'origine des fluctuations de la production, avec un cycle d'expansion, de crise et de liquidation ou contraction).²

Le cycle des affaires de Juglar est d'une durée d'environ 8 à 10 ans, mais on a découvert en économie d'autres cycles de période comme celui de Kondratieff de période 55 ans. Nous ne sommes comme en physique : la récurrence des phénomènes se révèle déjà moins exacte que la fréquence d'un signal !

En droit, il est encore moins aisé de repérer la répétition d'un phénomène, plus ou moins régulier, tant les données sont encore plus embrouillées et moins mesurables a priori. Il suffit de tester les différentes sources du droit positif (i.e. posé par l'autorité politique humaine et non déposé par l'autorité divine). Examinons les essentielles : la Constitution, la législation, la jurisprudence, et laissons de côté les conventions internationales applicables directement ou indirectement via leurs lois par les Etats. (Nous incluons pour le moment le droit créé par le pouvoir exécutif dans la législation.)

Au 1^{er} degré de similitude, on pourrait **comparer, non pas la Constitution elle-même, mais son interprétation à un son**. L'interprétation de la Constitution jouerait le rôle d'un son fondamental et, pour poursuivre la métaphore, l'interprétation de la législation et celle de la jurisprudence, celui des harmoniques.

A cette suggestion, qui paraît à première vue bizarre, on serait en droit de répondre que la Constitution n'est qu'un texte ou un ensemble de dispositions écrites ou non codifiées. C'est vrai, répliquerais-je à moi-même, mais il faut reconnaître qu'un pays, qui s'inscrit dans le constitutionnalisme des Lumières, ne cesse de s'y référer comme dans un contrat où chaque article renvoie implicitement, pour sa compréhension, au préambule. N'est-ce pas cet avant-propos qui expose l'objet ou l'idée générale de la convention ? Comme le préambule d'un contrat, la Constitution se situe à fois dans le droit et un peu en marge, ou du moins à l'extrémité du droit positif. Sa position centrale autant qu'excentrée permet à l'interprète d'y entrevoir plusieurs critères pour juger le droit, comme peut l'être d'ailleurs une Déclaration des droits vis-à-vis même de la Constitution si celle-ci, ou son interprétation, en reconnaît la validité.

(*continuation de l'échange, à la façon toujours des Lumières qui discutaient et rediscutaient sans cesse*)

- Hum... (*mon interlocuteur tousse*), mais pourquoi envisager une onde comme le son et pas simplement une « chronique » comme en économie dont vous parliez ? A supposer que vous puissiez mesurer l'interprétation du droit positif (ce qui est déjà une grosse affaire !), il faut connaître à la fois son ordonnée et son abscisse pour que l'évolution de cette l'interprétation apparaisse comme une « onde », tel un son pur ou n'importe quelle onde sinusoïdale. Par ordonnée, j'entends son amplitude, et par abscisse le temps marqué par des cycles ou des retours réguliers. Le temps est plus simple à tracer, mais j'ai hâte de voir comment une telle « onde » est décomposable en d'autres « ondes » sinusoïdales.

Bon courage !

- Merci. Disons tout de suite que l' « onde » dont il est question n'est ici comparable ni à un son pur ni, à l'autre extrême, au bruit assimilable à une onde non périodique. Nous sommes dans l'entre-deux. **Par « onde », nous entendons une oscillation plus ou moins importante et plus ou moins périodique.**

Je vais toutefois satisfaire votre curiosité avant d'aborder directement la question de la « périodicité »

¹ Jean-Marc Daniel, *Histoire vivante de la pensée économique. Des crises et des hommes*, Paris, Pearson, 2^e édit., 2014, p.259.

² *Ibid.*, pp.260-261

du droit et de ses sous-structures sous l'angle du mode de raisonnement des séries de Fourier. **Je parle bien d'un mode d'approche similaire et non d'une démonstration ou d'une application similaire.** J'évoquerai, à cette fin, le cas des Etats-Unis, de l'Angleterre et de la France. Vous vous attendez au pire ? Pour vous y préparer, voici donc deux observations préalables relatives à la mesure de l'interprétation en droit et à la notion de chronique. Elles adoucissent, comme les séries ou la transformée de Fourier, le caractère âpre (discontinu, sans la moindre dérivée au bord) de votre contestation.

2/ Observations préalables en droit

a) La mesure de l'interprétation juridique

*i les différentes mesures. ii Le thermomètre de l'interprétation
iii La mesure de la variation interprétative*

b) Les chroniques (ou séries chronologiques ou temporelles)

i Une invite à la recherche

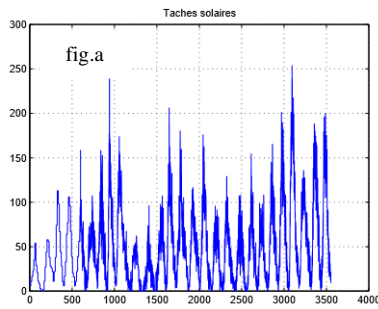
Les séries chronologiques (*time series* en anglais) sont des collections de mesure ordonnées dans le temps. L'idée ne date pas d'hier.

Le plus ancien graphique connu dans le monde occidental remonte au X^e siècle. Le graphique représente l'inclinaison de planètes en fonction du temps. Dans la seconde moitié du XVI^e siècle, le danois Tycho Brahe accumule, toujours en astronomie, d'autres séries chronologiques. Son assistant allemand, Kepler, les utilisera pour formuler les lois du mouvement des planètes au début du XVII^e siècle. Au cours du même siècle, l'anglais Petty suggère des cycles en économie. Il mentionne la nécessité d'en corriger certains lorsque l'on veut, par exemple, déterminer le loyer d'un terrain. De son côté, John Graunt analyse des séries chronologiques relatives à la population et à la mortalité.

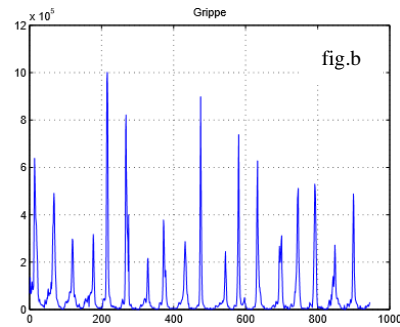
Durant la seconde moitié du XVIII^e siècle, les graphiques de séries chronologiques commencent à envahir les écrits scientifiques. Les astronomes y découvrent notamment des périodicités multiples. Grâce à elles, ils se rendent compte que les lois de Kepler ne s'appliquent pas de façon exacte. Apparaissent des fluctuations irrégulières. Les planètes semblent, de plus, animées de mouvements séculaires à périodes longues. Lagrange et Laplace s'efforcent d'identifier différentes périodes. Puis vint au début du XIX^e siècle Fourier, aux yeux de qui toute fonction périodique peut s'écrire comme une somme de fonctions sinusoïdales et cosinusoïdales.¹ Le un devient multiple et le multiple un !

Depuis, les séries chronologiques ne cessent d'essaimer partout sous forme de graphiques. En physique, comme toujours (ex. : les tâches du soleil) mais aussi en économie où on a déjà parlé de Clément Juglar. Dans ce domaine, on en trouve sans compter au sujet des taux d'intérêt, de la masse monétaire, de la production, des prix, du chômage, du nombre de grèves. En finance également, pour observer l'évolution des cours des actions et deviner le jackpot ! En médecine, s'agissant des épidémies comme la grippe (Petty et Juglar avaient été autrefois médecins). En transport (trafic des trains et des avions), en écologie (pollution à l'ozone, au CO₂). Enfin, en sociologie et en droit, surtout en matière criminelle pour suivre par ex. le taux de crimes ou le taux d'emprisonnement le long d'un temps donné.

¹ Jean-Marie Dufour, *Histoire de l'analyse des séries chronologiques*, Université de Montréal, Département d'économétrie, 10 janv. 2006, https://www2.cirano.qc.ca/~dufourj/Web_Site/ResE/Dufour_1998_C_TS_HistoryTSA_F.pdf

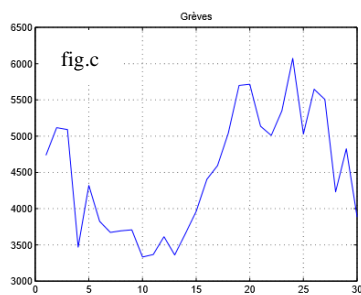


Nombre mesuel de taches solaires de 1700 à 1995, soit 3552 valeurs

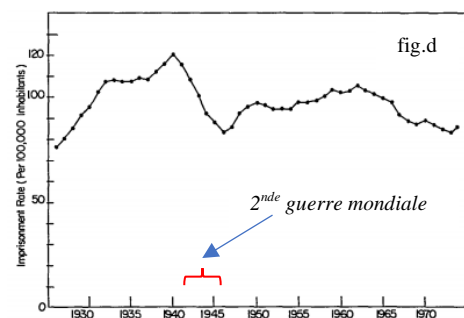


Evolution des cas de grippe en France, de 1984 à 2002, soit 945 valeurs

fig.a : L'analyse d'une telle chronique donne l'impression d'être face à de l'aléatoire, à du « bruit ». On voit pourtant un peu quelque chose de reproductible mais est-ce périodique ? Peut-être un filtrage permettra-t-il de voir surgir une sinusoïde. Les scientifiques de la discipline parlent aujourd'hui de différents cycles solaires (des cycles courts et un long).¹
fig.b : On est face à du plus flou. On se gratte la tête. Difficile de prévoir l'allure de la courbe en $t+\Delta t$ avec un Δt pas trop long, mais la hauteur décroissante des pics semble indiquer l'effet d'une politique de santé ou d'hygiène publique.



Nombre annuel de grèves aux États-Unis de 1951 à 1980, soit 30 valeurs²



Taux d'emprisonnement aux États-Unis entre 1925 et 1974³

fig. c : La courbe offre trop de variations pour prévoir un tant soit peu l'avenir. Si on enlevait la pente, entreverrait-on une période quelconque ? Le doute demeure. Il faut en poursuivre l'étude. *fig.d* : Même constat. Impression de chaos en dehors de l'influence marquée de la guerre. Nous sommes loin d'une chronique comme la consommation d'électricité dont on peut, dans le même pays ou un autre, anticiper l'évolution à telle période de l'année et adapter la production.

Existe-t-il des séries chronologiques portant sur l'interprétation du droit positif ? Sans doute, car on n'imagine pas un Ministre de la justice en France, en Angleterre et aux États-Unis ignorer quels sont les juges qui sont libéraux ou sévères en matière par exemple de prononcé des peines. On n'imagine pas non plus un Président américain qui n'ait pas sur son bureau le profil d'interprétation des juges fédéraux, des professeurs de droit ou des avocats susceptibles d'être nommés à la Cour suprême. Le Président souhaite par ex. nommer un juge qui interprète restrictivement les conditions de l'avortement. Ses conseillers scruteront l'interprétation de tel juge sur le sujet tout au long de sa carrière. Ils établiront à leur façon une chronique avec le temps en abscisse et une évaluation de l'interprétation en ordonnée.

- Il faut être prudent, car, comme l'écrit le philosophe de droit américain, Ronald Dworkin, sur l'oeuvre duquel nous reviendrons: *Statistics about judicial opinions* peuvent être parlantes (*revealing*), particulièrement dans le cas d'un juge fédéral qui souhaite être nommé (ou poussé) à la Cour suprême des États-Unis, mais ces statistiques *must be treated with great care, since a judge's decision in any particular case may turn on facts and doctrinal subtleties that are hard to fit into neat categories.*⁴

- C'est sûr. Il n'empêche que l'analyse par ex. des *dissenting opinions* d'un tel juge dans des cas bien

¹ https://fr.wikipedia.org/wiki/Cycle_solaire

² Michel Prenat, *Séries chronologiques*, Univ. Paris-Sud, Master Ingénierie Mathématiques, 2010-2011, vol.1, https://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~rossigno/Enseignement/ens_files/cours_sc.pdf

³ Alfred Blumstein, Soumyo Moitra, « An Analysis of the Time Series of the Imprisonment Rate in the United States », *Journal of Criminal Law and Criminology*, Vol.70, 1979, p.380.

⁴ Ronald Dworkin, «The Strange Case of Judge Alito», in *The New York Review of Books*, February 23, 2006, p.15.

établis peut être effectivement révélateurs des tendances libérales ou conservatrices d'un tel candidat.

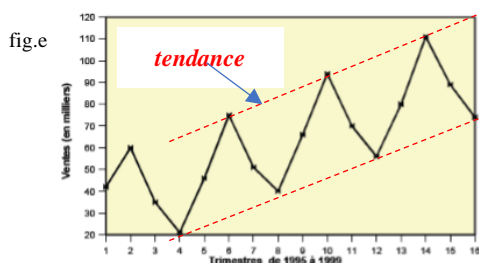
Nous ne jurons pas que cette évaluation obéisse à la méthode que nous avons indiquée, mais il nous semble qu'elle opère intuitivement de cette façon entre deux « notes » extrêmes, un *min* numérisant l'interprétation stricte, et un *max*, la large. En revanche, les chroniques portant sur de plus longues périodes ne courent pas les rues. On en confectionne peut-être, mais peu sont accessibles au grand public. On en trouve toutefois dans des revues spécialisées. Malgré leur mérite, ces chroniques rapportent des données relativement classiques (dates, nombre de jugements, etc.). L'évolution de l'interprétation n'est guère précise, sauf aux Etats-Unis où elle apparaît un peu mieux « quantifiée ».

Vous devriez, recommandera-t-on, en estimer vous-même la tendance (*trend*) et la saisonnalité, si importante en droit. Hé ! (*notre interlocuteur vient de s'en rappeler*), tel tribunal commercial ne siège-t-il pas toujours le même jour en dehors des vacances judiciaires ? Les audiences de référé à civil ne se répètent-elles aux mêmes moments dans l'année ? La tendance, vous savez, correspond à l'évolution d'un phénomène indépendamment de ses fluctuations à court terme. – Oui, facile à dire, mais difficile à faire en matière d'interprétation, même en s'inspirant du travail d'analyse opéré dans d'autres disciplines.

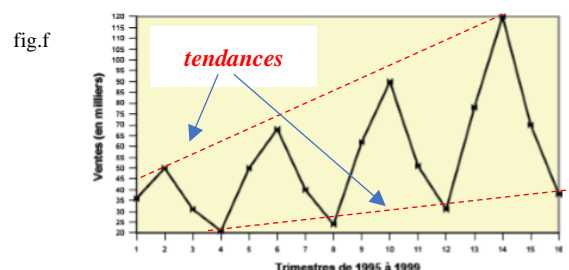
Normalement, il faut s'assurer que l'interprétation juridique soit une chronique avant d'affirmer qu'elle pourrait être une « onde ». A cette fin, il faut tracer des points (sans points, point de courbe !), et si d'aventure des courbes sortent du brouillard, il faut se mettre dans les pas d'un statisticien qui proposerait pour la circonstance deux modèles de séparation des variables :

- soit un modèle de décomposition additive $y_t = m_t + s_t + u_t$, où m_t représente la tendance, s_t la saisonnalité et u_t un terme aléatoire. Les composantes sont indépendantes les unes des autres. Le modèle décrit une amplitude constante autour de la tendance (*fig.e*). Dans ce modèle, la soustraction peut remplacer l'addition;

- soit un modèle de décomposition multiplicative $x_t = m_t \cdot s_t \cdot u_t$. Les composantes sont dépendantes les unes des autres. Le modèle décrit une amplitude proportionnelle à la tendance. (*fig.b*).¹ Dans ce modèle aussi, la multiplication peut être remplacée par la division (par ex., s_t pourrait avoir un exposant négatif comme s_t^{-1} , i.e. $1/s_t$, pour décrire un rétrécissement des écarts par rapport à la tendance).



Ex : ventes de billets à telle station de métro
(la variation saisonnière s'ajoute simplement à la tendance)



Ex : ventes de billets à telle autre station de métro
(les trends basés sur mes maxima et minima ne sont plus parallèles)

Les courbes des *fig. e* et *f* sont rassurantes : on peut repérer la période et supputer, sans risque d'erreur, la suite, mais il existe des modèles mixtes où addition et multiplication mêlent leurs eaux (par ex. : la composante saisonnière peut agir de façon multiplicative alors que les fluctuations irrégulières, erratiques, sont additives comme dans le modèle : $x_t = z_t \cdot s_t + \varepsilon_t$. Il faut aller plus loin dans l'analyse.

La recherche consiste donc à déterminer des tendances et des phénomènes saisonniers. Il est bon de rappeler à cet égard le vocabulaire employé par les experts. On parle de *série stationnaire* lorsqu'elle est stable autour de sa moyenne. C'est le cas d'une série gaussienne, entièrement définie par sa moyenne et sa variance. Lorsqu'elle croît sur l'ensemble de l'échantillon considéré, elle est *non stationnaire*. On parle de *tendance* comme dans les deux exemples ci-dessus où le phénomène décrit apparaît saisonnier puisqu'il comporte manifestement un *cycle*.² Une série non stationnaire peut

¹ O. Roustand, *Introduction aux séries chronologiques. Méthodes statistiques et applications*, nov. 2008, p.6, Ecole Nationale Supérieure des Mines, Saint-Etienne, http://www.emse.fr/~roustand/Documents/polycopie_series_temporelles_2008_2009.pdf ; Agnès Lagnoux, *Séries chronologiques*, Univ. Toulouse Le Mirail, Master 1, sans date, http://www.math.univ-toulouse.fr/~lagnoux/Poly_SC.pdf.

² Emmanuel César & Bruno Richard, *Les séries temporelles*, Univ. de Versailles Saint-Quentin-en-Yvelines, mars 2006,

cependant comporter une composante non déterministe, comme le facteur ε_t qui complète le modèle.

(§17-b) L'estimation de la tendance peut se faire en imposant une forme paramétrée ; par ex., une fonction de la forme $y_t = ax_t + b$ où a et b jouent le rôle de paramètres. On sait qu'une telle expression de la droite est capable de modéliser un nuage de points par la méthode des moindres carrés en minimisant une fonction à deux variables. Il arrive toutefois (il faudrait dire « plus souvent » que parfois) que la tendance ne soit pas linéaire. Elle peut être quadratique, en étant modélisée par une courbe du 2nd degré comme une parabole (fig.g). Elle peut être aussi non polynomiale (par ex., logarithmique ou exponentielle).

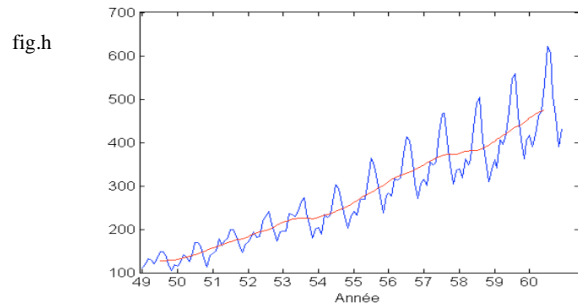
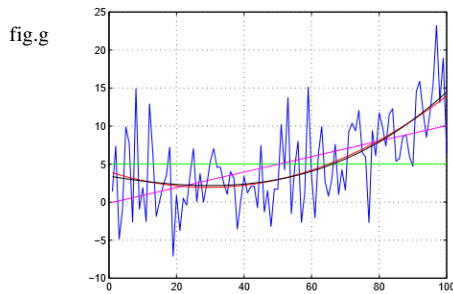


fig.g : La tendance n'est pas claire : a-t-elle la forme d'une droite croissante ou celle d'une parabole ? Malgré les calculs, on ne peut rien tirer de définitif, car plusieurs types de trajectoire sont possibles. On reste dans la croyance tant que l'on n'a pas attendu suffisamment de temps pour voir si la courbe n'est pas le jouet du hasard ou du chaos. fig. h : il y a visiblement quelque chose de périodique, mais est-ce une vraie période, un T qui se reproduit, ou est-ce au plus quasi-périodique ?

Dans certaines situations, il n'est pas facile non plus de trouver le degré du polynôme d'ajustement. Si on utilise un polynôme de degré élevé, le nombre de paramètres à estimer sera important et le calcul fastidieux. Dans ce cas, les praticiens recourent à une estimation non paramétrée en approximant la tendance par une *moyenne mobile* consistant à « lisser » la série temporelle. La moyenne est appelée mobile ou glissante car son calcul est effectué jour après jour, ou mois après mois, ou trimestre après trimestre, ou année après année, la « fenêtre » pouvant ainsi varier (la fig.h en donne un aperçu).

L'estimation de la tendance se fait ainsi en « filtrant » la saisonnalité, mais on peut aussi *filtrer* la tendance elle-même pour s'assurer s'il existe un *cycle* plus ou moins caché. Un filtrage supprime des valeurs alors que l'échantillonnage d'un signal collecte des points pour essayer de constituer une courbe. (Cette dernière méthode est comparable, de ce point de vue, à celle des moindres carrés qui s'efforce d'en dégager une d'un nuage de points : voir l'annexe III pour plus de précision). En conséquence, un filtrage met en œuvre l'idée d'*intégration* et non de dérivée puisqu'il ne joue que sur la sommation et non sur la différence. (Rappelons que l'opération de dérivation correspond à la différence $y_{t+1} - y_t$ entre deux valeurs consécutives. Pour revenir à y_t à partir de y'_t , il suffit en sens inverse d'*intégrer* en écrivant $y(t) = y(0) + \int_0^t y'(u) du$, l'intégrale rétablissant la moyenne, i.e. la tendance.)¹

Par ex., voici, côte à côte, une série chronologique (fig.i) et une série différenciée (fig.j) rapportant un même phénomène (le chômage des femmes de 16 à 19 ans aux Etats-Unis de janv. 1961 à déc. 1985) :

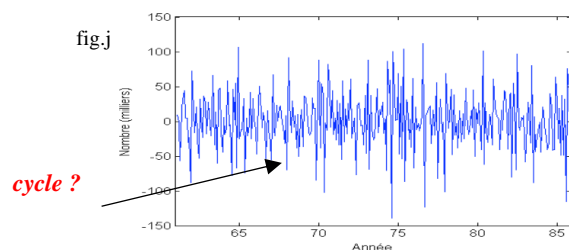
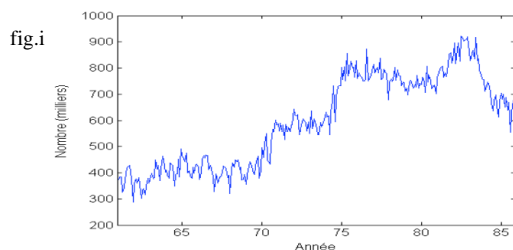


fig. i : L'intégration lisse et rend la courbe moins chaotique comme un condensateur qui empêche qu'un moteur file trop vite (le lecteur se souvient peut-être de cette idée lors de la présentation de la machine de Watt au §39-3). fig. h : le

http://georges.gardarin.free.fr/Surveys_DM/Survey_Time_Series.pdf, p.5.

¹ O. Roustand, *Introduction aux séries chronologiques. Méthodes statistiques et applications*, pp.12-15.

filtrage sur la dérivée (si la courbe est continue) ne donne apparemment que du bruit sans déboucher sur un hypothétique cycle.

Toutes ces notions participent à la fabrication des séries chronologiques. Celles qui établissent l'interprétation juridique n'y échapperaient pas si elles devaient être confectionnées dans l'art à partir de données régulièrement collectées sur de longues années. Il existe d'autres outils, d'autres « tests », qui aident à « interpréter » les chroniques, y compris celles qui porteraient sur l'interprétation juridique ! En sus de la représentation temporelle, on peut concevoir une représentation spectrale ou fréquentielle en utilisant une série de Fourier, ou à défaut, une transformée de Fourier comme nous l'avons montré.

Beaucoup de chroniques étudiées sont des séries réelles, mais on rencontre aussi des séries temporelles complexes en traitement du signal (on en verra par la suite).

L'établissement de telles séries temporelles a également pour intérêt de découvrir d'éventuelles corrélations, voire un lien de causalité, entre elles. Il en est ainsi en économie entre le taux d'intérêt sur le marché des capitaux à court terme et la masse monétaire ou la vitesse de circulation de la monnaie dans un pays donné.

Pourquoi donc, reviendrait-on à la charge, s'encombrer avec l'analyse de Fourier dont le rapport avec votre sujet crée plus de difficultés qu'il n'en résout ? Au lieu de vous perdre dans de multiples contraintes à respecter, contentez-vous d'établir et d'analyser des chroniques suivant les méthodes que vous avez préconisées.

Examinons cette sage suggestion.

Notre réponse sera d'ordre pratique et théorique.

Au plan pratique, la fabrication des séries temporelles est un travail en soi qui demande beaucoup de temps et de patience. Il faut collecter des centaines de données, les éplucher et les analyser pour en tirer quoi que ce soit comme nous nous y sommes essayés précédemment. Nous nous sommes nous-mêmes attelés à la tâche en économie pour tester des modèles mathématiques.¹ Certes, nous en sommes plus à l'époque des cartes à perforer à entrer dans un ordinateur, mais un tel labeur alourdirait considérablement notre travail qui est déjà tellement « chronophage » avant d'arriver à terme. Il n'en reste pas moins que les chroniques s'imposent à tout théoricien du droit qui voudrait aller plus loin. Pour qu'elles existent à ses yeux comme à ceux de ses collègues, il faut impérativement les construire !

ii L'effet de la hiérarchie du droit

3/ La « périodicité » du droit et de ses sous-structures

a) Les Etats-Unis

- i Un nouveau soupçon de cycle en droit. ii La synthèse additionnelle américaine*
- iii La valeur moyenne d'un signal. iv Le coefficient de fréquence de l'interprétation constitutionnelle*
- v Les coefficients de fréquence de l'interprétation des lois et des cas*

b) L'Angleterre

- i The rule of (the common) law. ii La souveraineté du Parlement sous le feu de l'interprétation*
- iii Le parallélisme des fluctuations des common law anglaise et américaine*
- iv La spécificité de la synthèse additionnelle anglaise*

c) La France

- i La recomposition du droit positif français. ii L'imprégnation d'un certain cartésianisme*
- iii L'histoire constitutionnelle mouvementée française*
- iv Des ondulations sous l'équanimité des lois*

¹ Alain Laraby, *Demande de monnaie et taux d'intérêt*, France 1947-1972, mémoire de DEA, sous la dir. de Maurice Allais, futur prix Nobel d'économie, Univ. Paris-X-Nanterre, 1974, 130 p.

§. 45. – FILTRAGE, CONVOLUTION ET ONDELETTES

1/ Filtrage

a) Un mot de physique, ²⁴⁶

b) Un retour au droit

i un filtrage « passe-bas » des décisions de 1^{re} instance

ii L'unité dans l'application des règles de droit

2/ Convolution

a) La physique, toujours la physique, ²⁴⁸

b) La physique, soit, mais sans oublier le droit

i Aux Etats-Unis

ii En Angleterre

iii En France

3/ Autoprotestation

1^{re} self-questionning sur la « convolution »

2^e self-questionning sur la transposition de la transformée de Fourier en droit

3^e self-questionning sur l'éventualité d'une décision de justice abrupte

4^e et dernière self-questionning d'ordre prospectif

4/ La transformée en ondelettes, ²⁵¹

i une forme de « débruitage » sophistiquée, ²⁵¹

ii Débruiter les référendums à tendance plébiscitaire

iii Référendum, « ballot propositions » et Condorcet

Annexes I, II, IV et V, ²⁵⁵

○

1/ Filtrage

a) Un mot de physique

- Ce sont les séries de Fourier, ou plutôt la transformée de Fourier si la courbe étudiée présente, plus souvent que prévu, comme en droit, des variations plus ou moins grandes, dans la période de base.

- Jusqu'ici, je comprends, car vous en avez parlé auparavant, mais continuez, je suis impatient d'en savoir plus et de voir si ce que vous dites a un rapport avec le droit.

- La transformée de Fourier (avec son intégrale) opère sur ce qui se répète plus ou moins dans le temps (un signal), sur une surface (une image), dans un volume (un cristal, avec une transformée discrète dans ce cas). Elle décompose l'objet initial en une superposition de fréquences qu'elle représente sous forme de spectre continu. Elle transforme une courbe (temporelle) en une autre courbe (fréquentielle). C'est à ce niveau qu'opère le filtrage. La transformée de Fourier permet de sélectionner les fréquences. Celui qui est aux manettes peut décider d'enlever certaines fréquences en mettant leur amplitude à 0 au-delà d'une certaine fréquence (par ex. : ce qui varie 100 fois plus vite est éliminé). Une fois la tâche accomplie, la transformée de Fourier inverse redonne le signal avec une information plus facile à traiter.

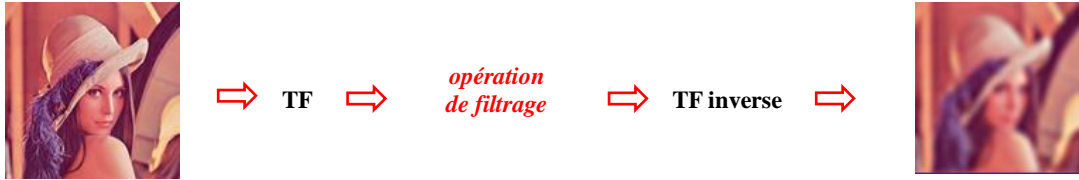
- C'est une belle façon de reconstituer l'information. On part de sinuosités à fréquences multiples et on en fait en retour une lecture plus aisée. Je devine son intérêt en droit, mais, avant d'y revenir, pourriez-vous donner un ou deux exemples concrets pour que ma compréhension du processus soit complète.

- Certainement.

Soit une image donnée, pouvant être regardée comme une onde attendu qu'une image est une répartition d'intensités lumineuses dans un plan, donc un signal à deux dimensions. La transformation de Fourier qui s'y applique est bidimensionnelle.

La transformée de Fourier agit sur des caractéristiques qui se répètent (texture du dessin ou du

papier, grains de la peau ou tel autre détail reproductible) et non pas sur des éléments uniques ou presque (forme générale du visage, bouche, yeux). Il ne suffit pas que l'image soit régulière (symétrique) ; il faut qu'elle soit périodique). La transformée de Fourier agit sur leur périodicité spatiale en « lissant » dans l'image ce que l'on souhaite gommer ou en accusant au contraire les contrastes. Veut-on par ex. la flouter ? Voici le processus qui la retransforme dans ce sens (avec TF = transformation de Fourier) :



La fréquence dans une image représente la variation de l'intensité des pixels de l'image (*pixel* = élément d'image). Le filtrage passe-bas laisse passer les basses fréquences et atténue les hautes fréquences. **La modification du spectre des fréquences se situe entre la transformée de Fourier (TF) et son inverse (TF inv.)**. Les détails de l'image disparaissent. Les basses fréquences correspondent à des changements d'intensité lents et représentent les régions homogènes et floues.¹

Ici, la transformée de Fourier opère sur le centre de cette image où se concentrent les basses fréquences (le centre de l'image est l'origine du système de coordonnées des fréquences spatiales) :

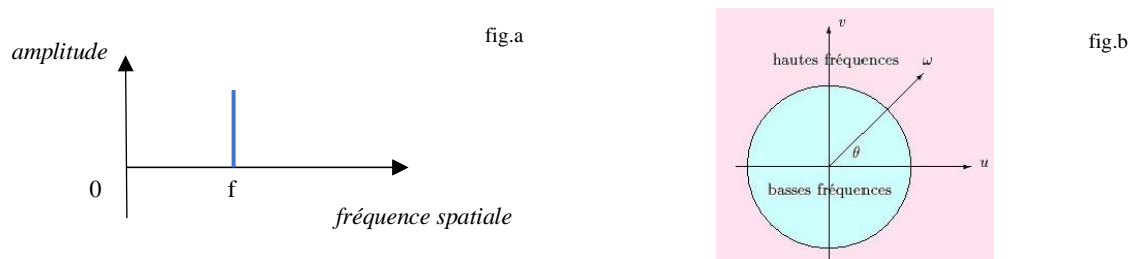


Fig. a : au point 0, se situe l'intensité lumineuse moyenne des pixels si on considère une image en noir et blanc suivant une seule direction. Le niveau de gris est représenté par un nombre réel. *Fig. b* : les deux variables u et v représentent les fréquences spatiales selon les directions Ox et Oy . La répartition énergétique des pixels se voit mieux en considérant la représentation en coordonnées polaire (ω, θ) du plan des fréquences spatiales (changement de variables $(u, v) \rightarrow (\omega, \theta)$).²

Veut-on préciser quelque chose dans la même image ? la rendre beaucoup plus nette ? Loin de devenir floue et d'avoir des contours moins nets, l'image « filtrée » voit ses contours rehaussés au risque d'apparaître « bruitée » si on augmente trop l'amplitude des hautes fréquences (le grain grossit).



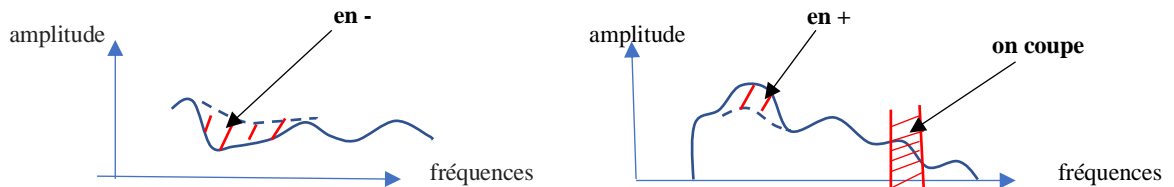
Comme dans le filtrage passe-bas, l'image est numérisée. Chacun de ses éléments (chaque pixel) indique la valeur de la couleur. Le filtrage passe-haut laisse passer les hautes fréquences. Les détails de l'image ressortent. Les hautes fréquences correspondent à des changements d'intensité rapides et représentent les contours et les changements brusques d'intensité.³

L'image désirée dépend donc de la composante « hautes fréquences » ou « basses fréquences » que

¹ Traitement global (filtrage spectral), https://elearn.univ-ouargla.dz/2013-2014/courses/TI/document/Cours/Image_Chap04.pdf?cidReq=TI
² <http://cns-alumni.bu.edu/~slehar/fourier/fourier.html> ; <http://users.polytech.unice.fr/~leroux/crim2/node10.html> ;

³ <http://www.imagemagick.org/Usage/fourier/> ; Traitement d'images - Traitement global (filtrage spectral), https://elearn.univ-ouargla.dz/2013-2014/courses/TI/document/Cours/Image_Chap04.pdf?cidReq=TI ; <http://www.imagemagick.org/Usage/fourier/>. *La photo de la jeune femme est classiquement utilisée pour tester les techniques de traitement de l'image car elle offre un mélange intéressant de détails, de régions uniformes et de textures. Même si ce n'est pas avoué, la beauté du modèle a sans doute influencé ce choix.* David Delaunay, « Images : la compression par réduction », Tangente Plus, *Les matrices*, mai 2012, n°65, p.7.

l'on entend valoriser. Il y a des fréquences qui paraissent plus utiles que d'autres. Dans une image comme dans un signal, la transformée de Fourier permet d'explorer une telle composition fréquentielle et de lui appliquer un filtre passe-haut ou passe-bas, voire un filtre passe-bande si l'on veut ne garder que les fréquences comprises dans un certain intervalle. Par ex., l'augmentation de l'amplitude d'une fréquence rend l'image plus nette (on améliore la zone de contraste), et on peut couper tout simplement des fréquences en enlevant les basses ou les hautes dans un intervalle donné de fréquences.



Ici, on diminue l'amplitude dans une zone particulière

Là, on augmente l'amplitude et on enlève des fréquences

Du point de vue des mathématiques, il importe peu qu'une variable représente une grandeur temporelle ou spatiale. L'image est également décomposée sur un ensemble de signaux qui sont des cosinus, des sinus ou l'exponentielle imaginaire qui forment la base d'une série de Fourier.¹

b) Un retour au droit

- i un filtrage « passe-bas » des décisions de 1^{re} instance
- ii L'unité dans l'application des règles de droit

2/ Convolution

a) La physique, toujours la physique

La *convolution* signifie littéralement l'action de s'enrouler sur soi-même ou autour d'un autre corps. En mathématiques, le sens du mot n'est pas complètement éloigné de cette acception primitive. Il désigne une opération par laquelle deux fonctions sont mises dans un rapport suggérant une sorte d'enroulement de l'une sur l'autre. Le produit de convolution, multipliant deux fonctions, remonte à la période chevauchant les XVIII^e et XIX^e siècles. On doit à Siméon-Denis Poisson cette notion qui lui a permis de résoudre l'équation de la chaleur de Fourier à une dimension.²

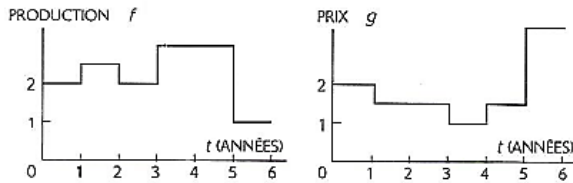
La transformée de Fourier est un cas particulier de convolution. L'idée de base demeure celle d'une décomposition, non plus par le biais d'une addition (une série trigonométrique), mais d'une multiplication (entre fonctions). De ce point de vue, une convolution n'est autre que l'algorithme qu'on nous apprend à l'école primaire pour multiplier deux nombres.³

Considérons par ex. deux histogrammes pour décrire une production industrielle, année par année. La fonction f représente la production de l'acier et la fonction g le prix moyen de l'acier. La somme des produits des deux fonctions année par année sur 6 années peut être représentée par l'intégrale $\int_0^6 g(t) f(t) dt$ qui donne la valeur totale de la production d'acier sur six ans ($\sum g(t) f(t)$ ici, car t est un entier) :

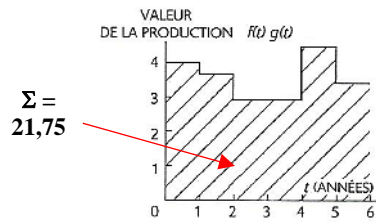
¹ On a affaire ici à des images « réelles » (en 2D), mais les mathématiciens conçoivent également des images « complexes » où l'intensité est représentée par un nombre complexe (image comportant 3 axes, projeté en 2D). Grâce à la dimension verticale, la composante hautes fréquences et la composante basses fréquences sont montrées en perspective. <http://users.polytech.unice.fr/~leroux/crim2/node10.html>

² <http://www.cnrtl.fr/definition/convolution>; Thomas Lachand-Robert, *Analyse harmonique, distributions, convolution*, Techniques de l'ingénieur, Paris, 1993, A 142-5.

³ Barbara Burke Hubbard, *Ondes et ondelettes. La saga d'un outil mathématique*, Belin, Paris, 1995, p.80.



Les unités de production et de prix restent vagues à dessein. Il suffit d'additionner le produits : $2.2 + 2.5.1,5 + 2.1,5 + \text{etc.}$

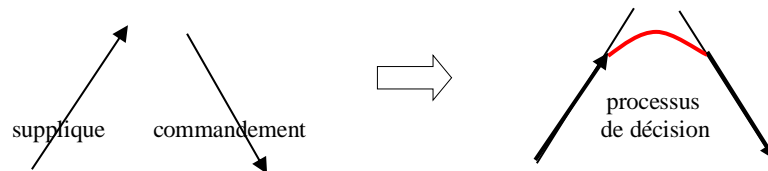


La surface hachurée représente la valeur de la production totale de la production d'acier sur six ans

La technique de convolution relève du même esprit que la multiplication de deux nombres ou de deux fonctions. Seule l'interprétation diffère. *Au lieu de dire que la multiplication du nombre 426 par le nombre 32 donne le nombre 13 632, on dit que la convolution de la suite de chiffres (4,2,6) par la suite de chiffres (3,2) donne la suite (1,3,6,3,2).*¹ Nous en verrons un exemple plus précis par la suite.

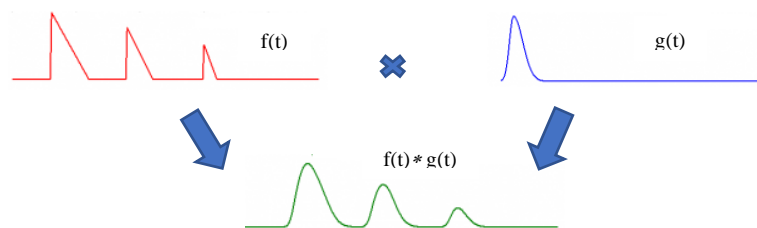
Dans le cas d'une convolution comme dans celui d'une transformée de Fourier, il s'agit de « lisser » des pics ou d'éliminer des petites oscillations autour d'une plus grande. Le lecteur a déjà entrevu cette idée en droit lorsqu'à une époque le couple (supplique d'en bas, commandement d'en haut), privé de connexion ou aboutissant à un pic, fut remplacé par un processus de décision continu :

(§32
1/-i)



La technique de convolution rappelle celle de Fourier qui parvient à approcher par ex. une fonction crénelée (avec des petites fréquences autour d'une parabole), mais à la différence d'une série de Fourier dont les derniers termes peuvent s'éloigner de la fonction étudiée, la convolution garde davantage l'allure générale en séparant la tendance et le cycle (dans notre ex., la parabole devient lisse, le résultat plus stable).

En quoi consiste cette technique opérant entre deux courbes quelconques, dont l'une est hérissée et de fréquence plus élevée, et une courbe presque en cloche permettant d'en arrondir les aspérités ? La convolution simplifie en enlevant des fréquences. Le graphique ci-dessous décrit la rencontre des deux courbes. La courbe résultante a éliminé les pics (on ne les voit plus ce qui est gênant), bien que les pics (par ex. une impulsion) ne soient pas toujours du « bruit » (attention : la convolution n'améliore pas nécessairement le signal ; elle peut le rendre plus flou ou moins flou ; elle n'est pas connotée en elle-même comme bien ou mal). En voici un exemple :



Se rappeler que la « courbe en cloche » est en rapport avec la loi des grands nombres. Il y a des écarts par rapport au comportement moyen attendu, mais l'écart dans la loi des grands nombres suit approximativement une loi normale ou gaussienne centrée sur la moyenne.

La convolution correspond à la réponse d'un filtre (*fig. en haut à droite*) posé à l'entrée d'un signal (*fig. en haut à gauche*). Techniquement, la convolution consiste à multiplier deux signaux $f(t)$ et $g(t)$ au moyen d'une intégrale : $[f * g](t) = \int f(t) g(t-\tau) d\tau = \int g(t) f(t-\tau) d\tau$, l'intégrale évoluant dans l'intervalle fini $[0, t]$ ou de $-\infty$ à $+\infty$ plus souvent.² Rappelons que l'intégrale est proprement une somme de rectangles infiniment émaciés en nombre infini. Les deux fonctions (réelles ou complexes) sont parcourues en sens contraire l'une de l'autre. Le terme $(t-\tau)$ exprime le décalage par rapport à t . (Dans

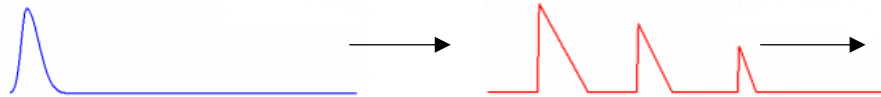
¹ *Ibid.*, p.117.

² <http://mathworld.wolfram.com/Convolution.html>

le produit $f * g$, on part de g , qui est écrit pourtant en dernier, car g s'applique ou glisse sur f ; inversement, pour $g * f$.)

Supposons que g soit une fonction en forme de bosse (ressemblant un peu à une cloche). L'autre fonction f n'est pas lisse, mais vous voulez qu'elle le soit de façon approximative.

La rencontre des deux fonctions $[f * g]$ produit une nouvelle fonction dont la valeur en t est donnée en moyennant les valeurs de f autour de t . A cette fin, vous utilisez g (la fonction en forme de bosse) comme mesure, vous la translatez sur f par rapport à laquelle g était en décalage, soit $g(t-\tau)$; lors de son déplacement, elle devient elle-même centrée en t . L'intégrale (i.e l'aire obtenue) correspond à la moyenne des valeurs de f autour de t pondérée par g .



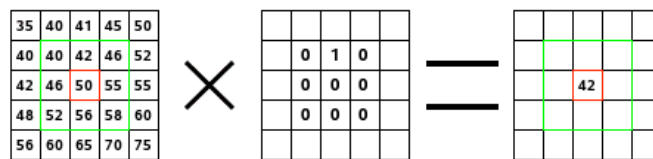
La fonction g en forme de bosse se déplace dans la direction de la flèche vers la fonction f comme pour la raboter en passant sur elle. La convolution atténue, amoindrit, les aspérités.

La fonction g a rendu f plus floue (revenir sur la précédente figure où une courbe est tracée en vert). Oh ! c'est comme si j'avais enlevé mes lunettes. Je vois la même fonction f de façon moins distincte...

- Pourriez-vous illustrer à nouveau votre point de vue en revenant à l'exemple d'une image qui semblait plus éclairant ?

- Oui, bien sûr. Je me dois de vous aider au mieux pour montrer, derrière le langage hermétique des mathématiques, un mode de raisonnement plus simple qu'il n'apparaît aux profanes.

Nous avons vu qu'une image est une matrice, une collection de pixels, en coordonnées cartésiennes ou polaires. Raisonnons en cartésiennes, précisément rectangulaires, pour permettre de quadriller un plan. Nous sommes en présence d'une matrice de nombres à laquelle on applique une « matrice de convolution » ou « noyau » 3x3 qui va nous servir de filtre. Ce filtre multiplie chaque pixel de la matrice initiale (qui représente sous forme numérique une image) et chacun des huit pixels qui l'entoure par la valeur correspondante dans le noyau. On additionne l'ensemble des résultats (on aboutit à une moyenne de l'alentour) et le pixel initial prend alors la valeur du résultat final comme dans cet exemple :



Chaque pixel est indiqué par sa valeur. Le pixel initial est encadré de rouge, la zone d'action du noyau de vert. Au centre, se trouve le noyau et, à droite, le résultat de la convolution une fois que le filtre a lu successivement, de gauche à droite et de haut en bas, les pixels d'action du noyau, multiplié chacun d'eux par la valeur correspondante du noyau et additionné les résultats : $40 \times 0 + 42 \times 1 + 46 \times 0 + 46 \times 0 + 50 \times 0 + 55 \times 0 + 52 \times 0 + 56 \times 0 + 58 \times 0$. Le pixel initial a pris la valeur 42. Le résultat graphique est un décalage du pixel initial (42) d'un pixel vers le bas (42 au centre de la matrice ou image filtrée).¹

(Annexe I, pour un exemple un peu moins simple)

Le filtre dépose ses résultats sur une copie de l'image et non directement dans la première image :



¹ <https://docs.gimp.org/fr/plugin-in-convmatrix.html>

L'image finale est une combinaison linéaire des deux images précédentes. On obtient un carré arrondi. Ce n'est pas une superposition d'images (un cercle dans un carré) mais la réalisation d'une forme intermédiaire nouvelle.

Dans cette opération, la transformée de Fourier peut être présente. Dans ce cas, avant de parvenir à l'image finale, chaque forme est passée en Fourier (sous forme de spectre de fréquences). La TF et son inverse permettent de restituer l'image initiale comme image intermédiaire entre deux images. On aboutit à une seule image, composée par ex. de 90 % de l'image 1 et de 10% de l'image 2.

Devant une photo du Taj Mahal prise en Inde (*fig.a*), le produit de convolution de cette image a pour intérêt par ex. soit d'en augmenter le contraste (*fig.b*), soit de la rendre floue (*fig.c*), soit d'en détecter les bords (non reproduite ici, car on ne voit que très faiblement les lignes de la structure sur fond noir) :



fig.a

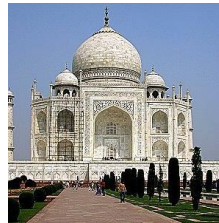


fig.b

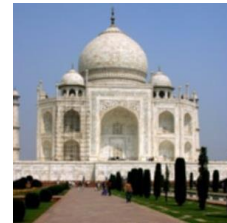


fig.c

Mais revenons en Europe et en Amérique à l'âge des Lumières et à ses effets en droit par la suite.

b) La physique, soit, mais sans oublier le droit

i Aux Etats-Unis. ii En Angleterre. iii En France

3/ Autoprotestation

1^{re} self-questionning sur la « convolution »

2^e self-questionning sur la transposition de la transformée de Fourier en droit

3^e self-questionning sur l'éventualité d'une décision de justice abrupte

4^e et dernière self-questionning d'ordre prospectif :

4/ La transformée en ondelettes

i une forme de « débruitage » sophistiquée

Comme nous parlons de l'avenir, il est utile de savoir en droit que l'analyse de Fourier, conçue par un savant issu de la Révolution française, a fait place en de nombreux domaines de la physique et de la technologie aux « **ondelettes** ». Au lieu d'envisager par ex. une transformée de Fourier, on applique une transformée en ondelettes, moins sur les sons que sur les images. Pour apprécier la portée de cette découverte, il faut d'abord revenir sur celle de Fourier que la théorie des ondelettes prolonge et affine.

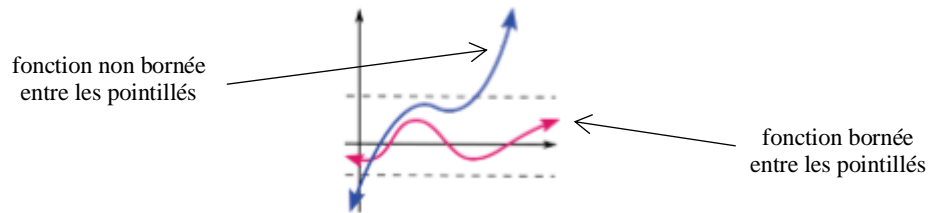
L'originalité foncière de Fourier est l'idée nouvelle que les ondes sont des sortes de briques qu'il convient d'agencer pour recomposer de très nombreux phénomènes. Au XVIII^e siècle, la majorité des savants pensaient encore que les polynômes (de la forme $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$) étaient les seules fonctions disponibles pour faire des calculs. Ces fonctions étaient généralement simples (par ex. la parabole, $y = x^2$), mais elles croissaient rapidement parce que les polynômes qui les représentaient finissaient par exploser lorsque la variable était grande (hors de la zone où la série de Taylor était encore capable de réduire l'écart entre le calcul et la courbe).² La prédiction à long terme paraissait difficile, les erreurs d'approximation pouvant augmenter de façon catastrophique malgré

¹ <https://docs.gimp.org/fr/plugin-convmatrix.html>. Nous n'avons pas retrouvé, dans ce document, l'image originale exacte.

² En principe, *polynomial functions have predictable long-run behaviour, known as a function's end behaviour. For any polynomial function, as x approaches $\pm\infty$, $f(x)$ approaches $\pm\infty$. That is, as the magnitude (absolute value) of x gets larger and larger, the magnitude of the function values will also get larger and larger. Symbolically we write $x \rightarrow \pm\infty, f(x) \rightarrow \pm\infty$.* (F. C. Wilson, *Applied Calc, op. cit.*, p.34)

leur essai d'encadrement.

L'introduction des ondes entre -1 et +1 permet de borner les fonctions comme il est montré infra :



(§42
-1/)

L'approche de Fourier est adaptée à l'analyse et à la synthèse des ondes stationnaires que nous avons entrevues lors de notre étude sur la résonance (voir l'Annexe IV qui en retrace les caractéristiques).

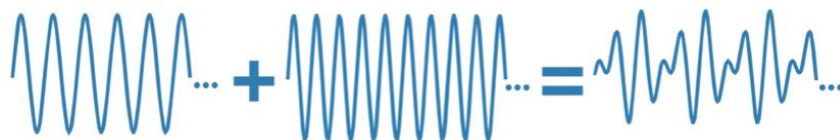
C'est la variation d'amplitude de l'onde stationnaire qui produit ainsi le son. Par ex., si on pince une corde d'un instrument, la corde va imprimer une pression sur l'air de bas en haut et de haut en bas d'une façon périodique. Le son aura pour fréquence celle de l'onde résultante qui parcourt la corde.¹

Cependant, l'analyse de Fourier bute sur des irrégularités très fines. Dans la voix d'un chanteur par ex., il est difficile de reproduire le vrai son après l'avoir décomposé en fréquences, d'autant plus que d'une note à l'autre, une attaque ou une relaxation peut se produire, sans parler d'événements brusques comme l'avènement d'une note très aigue. Toutes les notes sont des fréquences instantanées, mais certaines sont plus transitoires que d'autres et peuvent avoir une signification particulière. Dans l'analyse de Fourier, ces notes vont manquer à l'appel alors qu'il conviendrait de zoomer tel morceau d'onde (ou telle partie de l'image si on envisage des images) pour obtenir des informations pertinentes.

On pourrait représenter l'analyse de Fourier comme un orchestre idéal dont chaque instrumentiste jouerait indéfiniment la même note ; le silence serait alors obtenu par des sons qui s'annuleraient exactement les uns les autres et non par l'absence de son. Bien entendu, ce n'est pas ainsi qu'un orchestre joue ou cesse de jouer et la variable temporelle doit avoir un rôle beaucoup plus actif et dynamique.

Cette décomposition des sons en sons purs est donc imparfaite, car elle ne rend pas compte, dans le cas de la musique, des sons complexes produites par l'attaque de l'instrument, par la recherche de la note et, plus généralement, elle est inadaptée à l'étude des sons transitoires et des bruits divers. L'analyse de Fourier n'est réellement efficace que si elle est limitée à l'étude des phénomènes périodiques ou, plus généralement, stationnaires.²

Illustrons ces propos en comparant l'analyse de Fourier et celle en ondelettes sans entrer dans la technique mathématique. L'esprit de la méthode des « ondelettes » est d'avoir d'abord une vue d'ensemble puis de cerner les détails qui intéressent particulièrement (par ex. dans une image médicale, la zone qu'il convient d'analyser plus finement sans s'encombrer du reste de l'image). Contrairement à l'analyse de Fourier, les ondelettes sont des ondes qui ont non seulement un début et



Transformée de Fourier, non localisée en temps et dans l'espace, et aveugle aux petits changements abrupts³

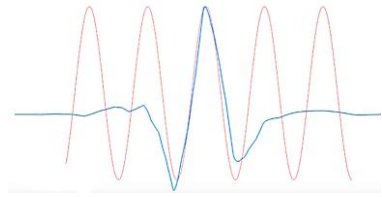
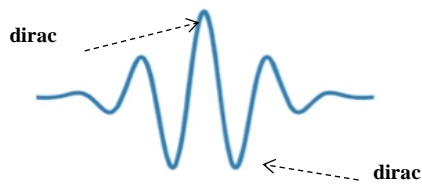
une fin, mais elles présentent des pics à la dirac en haut et en bas que l'on comprend en comparant

¹ Par quels phénomènes nous est-il possible d'émettre un son via les instruments de musique, puis, après sa propagation, de le percevoir ? <http://rmn.sup.fr/>

² Yves Meyer, « Les ondelettes et la révolution numérique », in *Université de tous les savoirs*, sous la dir. d'Yves Michaud, Odile Jacob, Paris, 2001, vol.4, p.57.

³ Kirthi Devleker, MatlabTech Talks, *Understanding wavelets, Part 1 : What are wavelets*, 18 août 2016, Robi Polikar, *The wavelet tutorial*, Part III, <https://www.youtube.com/watch?v=QX1-xGVFqmw>; <http://users.rowan.edu/~polikar/WAVELETS/WTpart3.html>.

une ondelette d'un certain type (il y a en plusieurs) à une onde sinusoïdale de même fréquence :

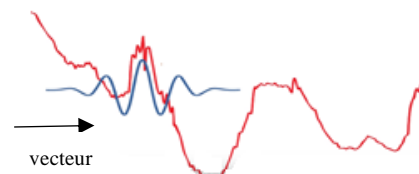
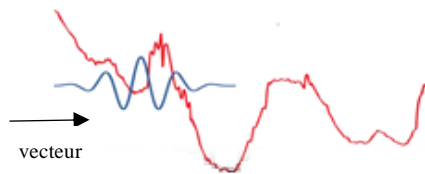


Une ondelette n'est qu'un morceau d'onde, de moyenne nulle, composée d'un dirac dirigé en haut et un autre en bas)

Comparaison d'une onde sinusoïdale (en rouge) et d'une ondelette (en bleu). On perçoit le double dirac dans le temps

Une ondelette comme morceau d'onde de moyenne nulle signifie que l'intégrale sous l'ondelette est nulle (dans la somme, les hauts et les bas se neutralisent, ce qui n'est pas le cas par exemple sous une courbe en cloche où l'intégrale est $\neq 0$)

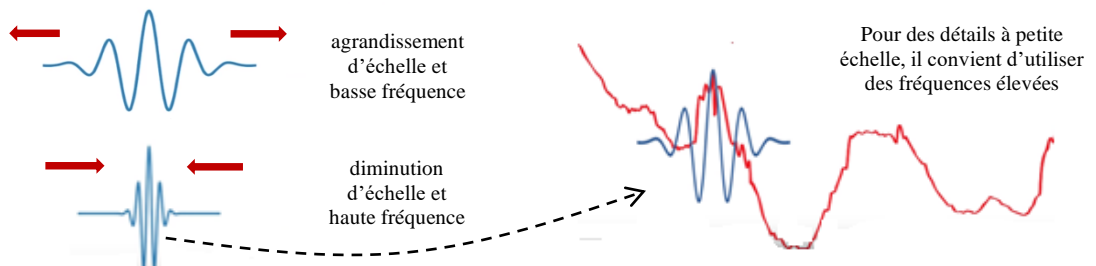
Veut-on focaliser son attention sur la zone qui fait problème, on procède comme une convolution en faisant glisser l'ondelette jusqu'à la partie de l'onde en question :



déplacement d'une ondelette vers une partie de la courbe

superposition de l'ondelette sur la partie de la courbe

A la différence toutefois de l'analyse de Fourier, il est possible de contracter ou de dilater la petite oscillation qu'est l'ondelette pour l'ajuster au mieux à la zone à explorer ou à traiter. L'ondelette peut filtrer les irrégularités constatées et rendre « propre » l'onde sur laquelle elle est superposée. C'est une forme de « débruitage » sophistiqué dans la lignée de pensée de Fourier de la fin du XVIII^e siècle. Alors que *la transformation de Fourier décompose un signal selon ses fréquences, la transformée en ondelettes décompose un signal en ses composants aux différentes échelles*. L'analyse par ondelettes est une manière d'exprimer notre sensibilité aux variations.¹



ondelette étirée ou resserrée comme si on joue à ajustement de l'échelle sur la partie de la courbe étudiée l'accordéon

(Annexe V)

La multirésolution, avec ses échelles ajustables, fait des miracles. L'ondelette comprimée ou dilatée donne l'image d'un signal à une résolution donnée. Quand on augmente la résolution (on la double par exemple), les détails émergent. Leur finesse améliore l'approximation, *mais si on l'étire dans l'autre sens, on finit par ne plus voir du tout comme si on essayait d'approximer 88/7 en utilisant des centaines.*²

Un tel ajustement peut aider à repérer des parasites notamment dans un son et à essayer ensuite de débruité ce dernier. Nous sommes toujours dans l'idée qu'il faut faire une moyenne (glissante) autour de quelques points voisins afin d'éliminer le bruit constitué de petites variations brusques indésirables.

¹ B. Burke Hubbard, *Ondes et ondelettes*, op. cit., 71 et 75

² *Ibid.*, p.98.

- Mais, dira-t-on, pourquoi utiliser un outil si savant qui ne semble servir à rien en droit ? Donnez-nous un exemple où on voit l'intérêt !

- Une fois encore, nous ne cherchons pas à « utiliser » la technique mathématique en droit. On se contente (ce qui est déjà beaucoup) de montrer le parallélisme des raisonnements en droit. Appliquer une technique dans un domaine étranger à son usage premier n'est pas la fin première recherchée, même si, dans l'avenir, certains accommodements soient possibles. **On ne cherche qu'à comprendre comment la société des Lumières négocie avec la nature et ses lois pour ne pas disparaître faute de les connaître et de s'en inspirer. La négociation est confuse, peu consciente et à tâtons.**

On fait toujours le pari que le droit ne relève pas que du hasard. Même le droit constitutionnel, qui voisine avec la politique et ses désordres, est un entre-deux entre la loi de la nature et le chaos. Cet entre-deux peut-être précisément la nature pseudo-ondulatoire du droit dans certains cas. Des esprits chagrins diront que la plupart du temps le droit est dans l'aléatoire ou l'a-périodique pur (les coefficients de la série de Fourier seraient tous nuls ; on n'entendrait que du « bruit blanc » par analogie avec la lumière blanche qui mélange toutes les fréquences lumineuses). Peut-être, mais nous devons comprendre pourquoi le droit perdure parfois en dépit des secousses. Il serait être aveugle de ne pas voir qu'il y a un peu de répétitif à ses différents niveaux (là une fréquence entre 70 et 90 ans, là une fréquence de ± 5 ou 10 ans, etc. comme pourraient le révéler des chroniques bien établies par pays).

L'analyse à la façon de Fourier ne se limite pas en droit à montrer l'existence d'une fondamentale dans une série pseudo périodique. La fondamentale, l'œil la devine à l'œil nu, plus facilement que l'oreille en musique, car c'est une moyenne, mais les harmoniques, surtout après la 1^{re}, ça, c'est autre affaire ! De ce point de vue, l'analyse spectrale en fréquences donne une meilleure idée des composantes et de leur importance relative dans « l'onde » que l'on observe ou que l'on subodore sous les données.

- Vous vous répétez. Vous l'avez déjà dit. Nous attendons plutôt votre exemple exhibant en droit un mode de raisonnement rappelant celui des ondelettes.

*ii Débruiter les référendums à tendance plébiscitaire
iii référendum, « ballot propositions » et Condorcet*

L'analyse du signal porte sur vaste ensemble de phénomènes et sur des réalités physiques diverses : la variation de la pression de l'air en un lieu donné en fonction du temps est un signal sonore ; l'évolution de l'intensité du courant en un point d'un réseau est un signal électrique ; la vibration du sol est un signal sismique et les fluctuations de l'indice de la bourse constituent un signal économique.

Ces signaux dépendent d'une seule variable (ici le temps), mais ce n'est pas toujours le cas. Une photographie en noir et blanc peut être interprétée comme une quantité numérique (le niveau de gris) fonction de deux variables (les coordonnées du point considéré).

L'analyse du signal consiste à extraire dans chacun de ces cas l'information pertinente, la nature de celle-ci différant selon la nature du signal.

(L'analyse par ondelettes, Pour la science, 1987) ¹

¹ Y. Meyer, S. Jaffard et O. Rioul, « L'analyse par ondelettes », op. cit., p.28

Annexe I

Convolution et matrice

La convolution, qui a été présentée dans le corps du texte, a le mérite de la clarté, mais elle est sans doute trop simple pour les initiés, car elle se ramène au décalage du seul pixel 42. De plus, s'il y a plusieurs 1, la convolution ne marche pas. Il faut normaliser par le nombre de 1. Voici un exemple plus pertinent qui renforce les contrastes :

100	100	100	100	100
100	100	100	100	100
100	100	150	100	100
100	100	100	100	100
100	100	100	100	100

 \star

0	-1	0
-1	5	-1
0	-1	0

 $=$

100	100	100	100	100
100	100	50	100	100
100	50	350	50	100
100	100	50	100	100
100	100	100	100	100

Dans cet ex., tous les pixels ont une intensité de 100, sauf le pixel central qui a une intensité de 150. Si on applique un produit de convolution au pixel central, on obtient $:(150 \times 5) + (-1 \times 100) + (-1 \times 100) + (-1 \times 100) + (-1 \times 100)$. Les pixels des quatre coins n'apparaissent pas parce que leur valeur est zéro.

La somme de tous les coefficients d'une matrice de convolution indique le poids du filtre. Il est possible d'éviter un calcul de « normalisation » si cette somme est égale à 1. Dans la matrice indiquée, la normalisation est égale à 1, car $5 - 4(-1) = 1$. Grâce à la normalisation, le filtre n'aura pas un poids relatif ou coefficient plus important dans une zone particulière de l'image dont il doit filtrer l'ensemble. La normalisation oblige à prendre en compte toute l'image. On peut également normaliser une matrice par le déterminant.

Cet exemple peut correspondre à un fond de ciel d'intensité constante avec une étoile faible dont toute la luminosité est concentrée dans un seul pixel. Comment souligner la présence de cette étoile ? La réponse est d'en augmenter le contraste.¹

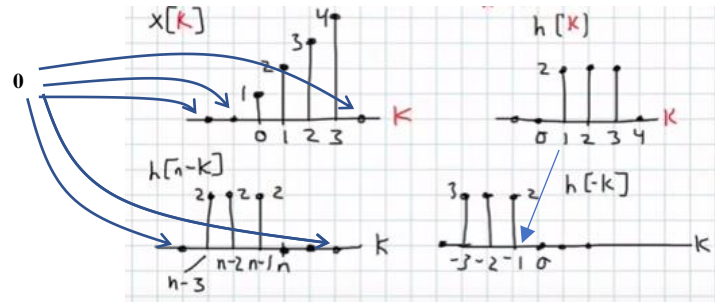
¹ Traitement d'images, <http://xmcvs.free.fr/astroart/Chapitre4.pdf>

Convolution

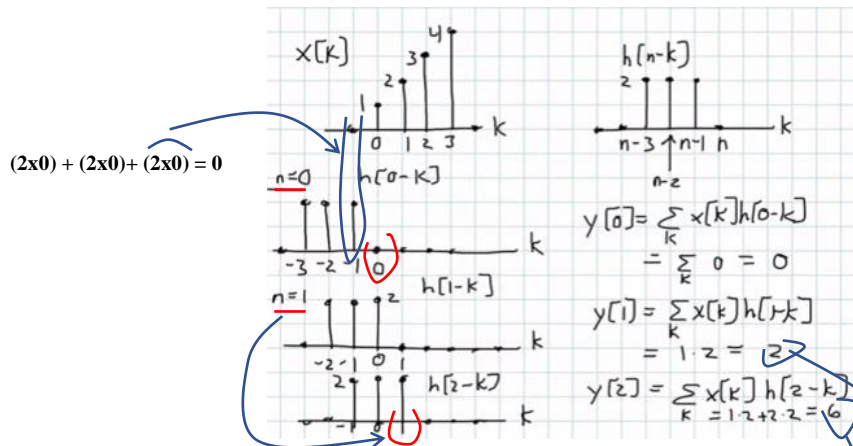
La convolution est un produit de fonctions qui doit répondre à deux conditions : la linéarité et l'indépendance du filtre vis-à-vis du temps (système invariant). Elle peut se présenter sous deux formes : $y[n] = \sum h[k] x[n-k] = \sum x[k] h[n-k]$, k allant de $-\infty$ à $+\infty$. Sous la 1^{ère} forme, $x[n]$ est l'*input* et $h[k]$ l'*impulse response*, et l'inverse sous la 2nd forme. Dans les deux cas, l'*output* est le même, car l'opération de convolution est **une opération commutative**. On peut renverser les rôles.

Ex. de calcul de la convolution $y[n] = h[n]*x[k] = \sum h[k] x[n-k]$, k allant de $-\infty$ à $+\infty$, combinant la séquence (discrète), $x[n]$, avec la réponse impulsionnelle, également discrète, $h[n]$:

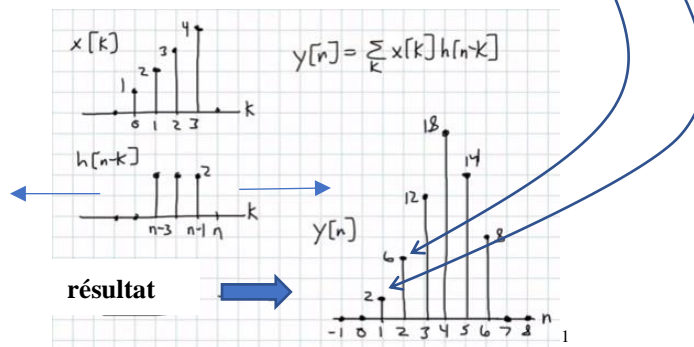
1^{re} étape : mettons en place les choses en inversant (temporellement) $h[k]$ et en écrivant $h[n-k]$ par rapport à $x[k]$:



2^e étape : calculons $\sum h[k] x[n-k]$, en multipliant chaque séquence par l'autre, point par point, pour toutes les valeurs de n :



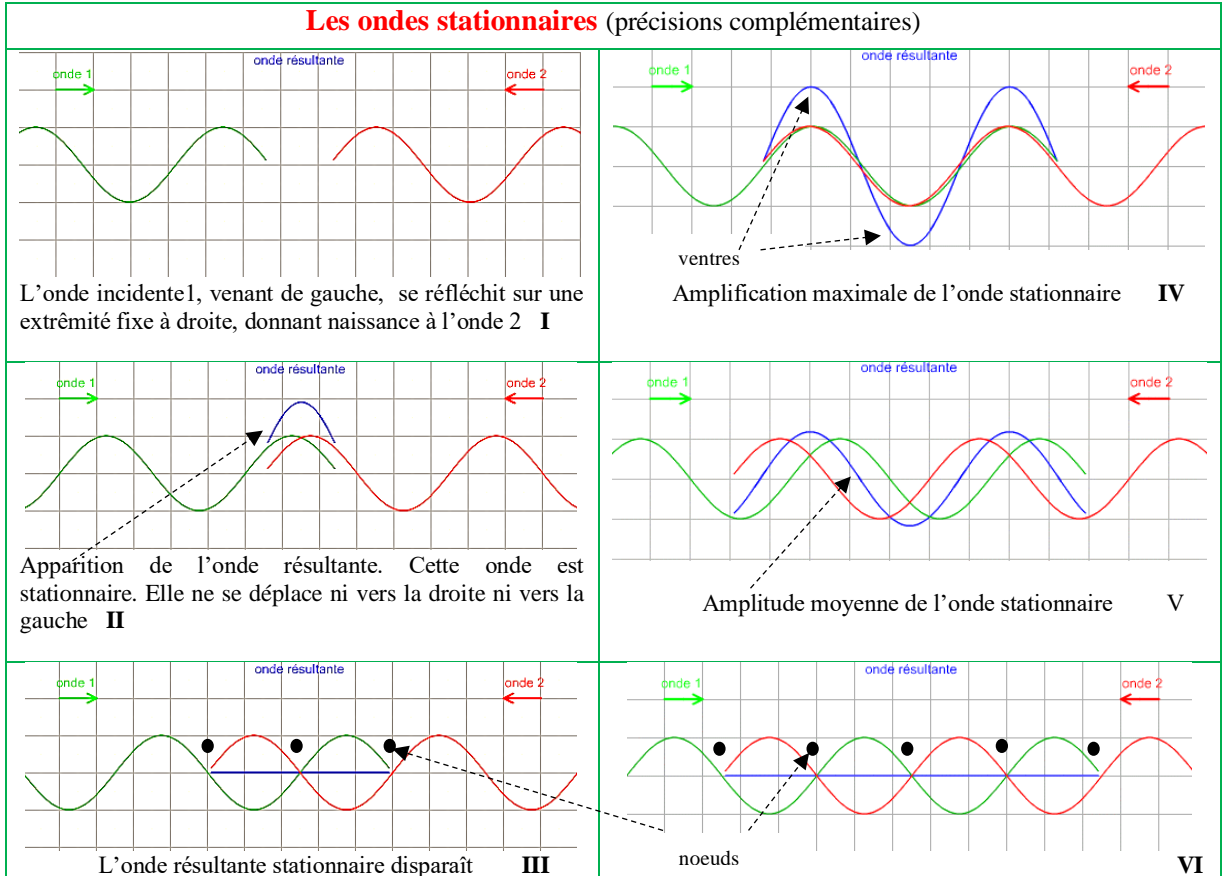
Et de façon générale :



Rem : au lieu de multiplier deux séquences discrètes, on peut multiplier deux signaux continus si les données recueillies vont en ce sens. Dans ce cas, le résultat final se présentera comme un chevauchement d'aires calculées par des intégrales.²

¹ Kathleen E. Wage, *EC E 201 course*, Dept. of Electrical and Computer Engineering, George Mason University, spring 2016, <https://www.youtube.com/watch?v=W56uw9GUvxU>
² Darry Morrell, *Example of computing the continuous time convolution of two rectangular impulses*, 4 juin 2012, https://www.youtube.com/watch?v=4-FSSGN_vFE

Annexe IV

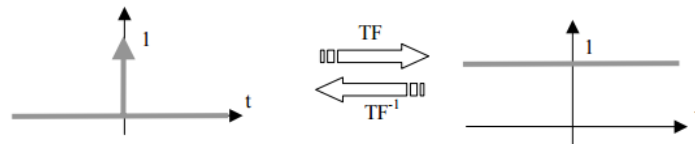


Il faut lire les figures de I à VI, voire au-delà... **Deux ondes de même fréquence et de même amplitude** se propageant en sens contraire donnent, en se superposant, une onde stationnaire (cette onde résultante ne se propage pas elle-même). En allant en sens contraire, **l'onde 1** (onde incidente) et **l'onde 2** (onde réfléchie) s'additionnent ou se compensent de façon partielle ou totale. Aux points de neutralisation (ou annihilation) totale, les vibrations des ondes 1 et 2 disparaissent en des emplacements fixes, les **noeuds**. Aux **ventres**, les vibrations de l'onde stationnaire deviennent amplifiées et maximales.¹

Annexe V

Dirac et transformée de Fourier

Un pic de dirac δ est un signal qui a des variations très importantes pendant un intervalle très bref (ex. : un changement brutal de vitesse créant une discontinuité de vitesse). Il contient à part égale des composantes sur toutes les fréquences, ce qui explique sa caractéristique. Bien que δ ne doit pas être confondu avec une fonction qui vaut 1 et 0 ailleurs sachant que l'intégrale de δ vaut 1, un dirac **fait la transition entre les fonctions et les suites discrètes**. (Le graphe de δ est représenté par convention par une flèche verticale vers le haut de hauteur 1.) δ peut se construire avec une fonction quelconque:



Sur la figure de gauche supra, le dirac est représenté en $t = 0$ par une fonction constante égale à 1. Par la transformée de Fourier (TF), l'impulsion de Dirac temporelle est convertie en impulsion de Dirac fréquentielle en 0. Par la transformée de Fourier inverse (TF^{-1}), la version temporelle d'une impulsion à la fréquence ν nulle redevient le signal constant à 1. Corollaire : *Un signal temporel ayant une composante continue, c'est-à-dire une valeur moyenne non nulle, verra sa représentation fréquentielle avoir en 0 une impulsion ayant pour amplitude la valeur de sa composante continue.*²

¹http://www.sciences.univnantes.fr/sites/genevieve_tulloue/Ondes/ondes_stationnaires/stationnaires.php

² *La théorie de l'échantillonnage : le théorème de Shannon*, https://www.scei-concours.fr/tipe/TIPE_2003/sujets_2003/M14_texte.pdf

§ 46. - LA SPECIFICITE DE L'INTERPRETATION CONSTITUTIONNELLE

1/ La notion de dérivée partielle

- i Bien cerner la notion de dérivée, 259*
- ii Bien cerner la notion de différentielle, 259*
- iii Bien cerner la notion de dérivé partielle, 262*

2/ Applications en philosophie naturelle, 265

- a) L'équation des ondes, 265**
- b) L'équation de la chaleur, 267**

3/ Applications en droit

a) La matrice jacobienne de l'interprétation

- i L'interprétation constitutionnelle*
- ii La figuration de l'interprétation constitutionnelle*
- iii La fonction « mathématique » de l'interprétation*
- iv La déformation de l'interprétation globale, 269*
- v Contraction et dilatation, 272*
- vi La question de la stabilité de l'interprétation*
- vii L'effet d'interprétations conjointes*

b) Les butées d'interprétation constitutionnelle

- i Des butées mutuelles*
- ii Travail d'interprétation « moteur » ou « résistant »*
Annexes I, II, III et IV, 276

4/ Le partage de l'interprétation constitutionnelle

a) Un malentendu au départ

b) Retour sur la théorie des jeux

- i Les stratégies d'interprétation*
- ii Additionner en droit constitutionnel ?*
- iii Sur la marche aléatoire*
- iv Le postulat de la maximisation en question*

c) Réapparition du triangle équilatéral

- i Dynamique au sein du triangle équilatéral*
- ii La signification des chiffres d'utilité*

5/ Les gains de pouvoir et les alliances

a) Fondement de la comptabilité des utilités

- i Une conséquence du principe d'autoconservation individuelle*
- ii Mise en rapport des utilités de différentes interprétations*
- iii L'ineffectivité des butées constitutionnelles en cas de collusion*

b) Triangle équilatéral et coalitions

- i Solution de Nash et valeur de Shapley, 279*
- ii Est-ce la fin de l'histoire ? 282*

c) Le « cœur » (core) d'un jeu de coalitions

- i Les conditions de sa réalisation, 285*
- ii Jeu ou combinaison convexe, 287*
- iii Retour sur la connivence entre pouvoirs*
- iv Les occurrences de « cœur » dans l'histoire constitutionnelle américaine*

d) Le « calcul » à l'épreuve des faits

- i Remise en selle de la valeur de Shapley*
- ii L'indice de Shapley-Shubik*
- iii Réserves ultimes*

6/ La voix off de la volonté générale

- i Fiction ou réalité latente ?*
- ii La volonté générale, sujette à l'interprétation*
- iii La volonté générale comme effet d'un « réseau »*
- iv Une volonté générale sans cesse recomposée*

o

1/ La notion de dérivée partielle

i Bien cerner la notion de dérivée

Présenter la notion de dérivée des Lumières n'est plus à faire a priori, mais il est bon d'en remettre une couche au lecteur peu habitué à utiliser cette notion même s'il raisonne en termes de dérivée à longueur de journée !

(§19
a)

Soit une fonction f moins « banale » qu'une fonction linéaire (une droite). « Banal » veut dire courant au sein de l'enseignement élémentaire, mais une fonction linéaire reliant par ex. le pouvoir et le talent n'est pas, faut-il le rappeler, peu courante dans la réalité. La partie hachurée est l'intégrale $[f(t') - f(t)] \cdot (t' - t)$. **C'est un produit** (de la largeur dt par la hauteur f), **alors que la dérivée est rapport, une division df/dt** . (l'hypoténuse du *triangle caractéristique* de Leibniz tend vers la tangente à la courbe quand t' tend vers t ; la tangente est celle de l'angle que fait l'hypoténuse avec le côté horizontal du triangle).

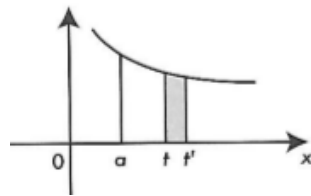


fig.a

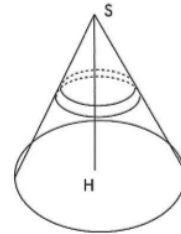


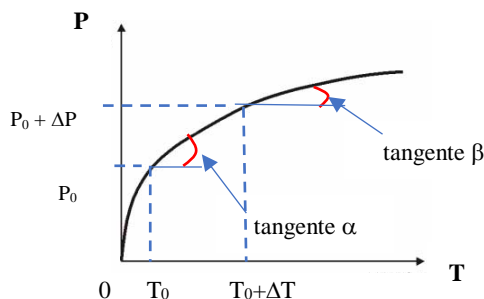
fig.b

La dérivée est une vitesse instantanée : $f(t') - f(t)/t' - t$ quand l'écart temporel $t' - t$ s'amenuise autant qu'on le peut au point, quand le rectangle devient infiniment émacié (fig.a) ou la bande sur la surface du cône infirment petite (ou un petit tronçon du volume du cône, si jamais on avait l'intention de « sommer » tous ces petits tronçons d'intégrale en un tout) (fig.b).

(§ 14
1/-iii)

Comme le lecteur le sait, la dérivée est un moyen bien plus simple de calculer des aires que ne le faisait par ex. Archimède en calculant l'aire limitée par un arc de la parabole. Une fonction qui a pour dérivée x^2 est $x^3/3$, et l'aire demandée est $a^3/3$. La méthode de découpage, prenant appui sur l'algèbre de la Renaissance, est caractéristique de l'analyse moderne, et s'applique aussi bien aux volumes comme le montre l'exemple d'un cône (ou une pyramide, à une différence près), découpé en n infiniment petits tronçons de longueur h/n . (fig. b supra)¹

En reprenant la relation entre le pouvoir et le talent, nous pouvons représenter la dérivée, via la tangente d'un angle, comme suit, étant rapporté que le rapport $\Delta P/\Delta T$ définit la tangente de l'angle considéré (si du moins $\Delta T \rightarrow 0$) :



La dérivée première de la fonction de pouvoir est partout positive (la fonction est monotone croissante). La dérivée seconde est négative (la courbe représentative de cette fonction est concave).

L'interprétation juridique est la suivante : le pouvoir croît toujours quand le talent croît (dérivée 1^{re} >0), mais le pouvoir croît moins que proportionnellement que le talent (dérivée 2^{nde} <0). Clairement : **$\tan \alpha > \tan \beta > 0$** .

Grâce à la dérivée 2^{nde}, on voit dans le cas d'espèce un phénomène équivalent à la loi des rendements décroissants.²

¹ Jean-Louis Boursin, *Les maths pour les nuls*, édit. First, Paris, 2005, pp.358-360.

² Olivier Ferrier, *Maths pour économistes. L'analyse en économie*, vol.1 : Les fonctions d'une seule variable, De Boeck, Bruxelles, 2003, p.p.118.

Nous supposons, comme Hobbes, que le pouvoir devrait être une fonction croissante du talent. A l'époque du philosophe, où prévalait encore l'aristocratie sur la bourgeoisie, cette relation était loin d'être le cas (du moins pour le talent commercial). Aujourd'hui, le reproche pourrait être le même, car il y a mille pouvoirs P_i et mille talents T_j . La relation devrait être $P_i = f(T_j)$.

(§ 20
b)-ii)

Le pouvoir est le pouvoir (et la responsabilité) de prendre une décision dans l'Etat en réponse au talent de l'imaginer ou de la mettre en œuvre, le talent étant reconnu comme tel par le Prince ou la collectivité. La précédente courbe décrit la satiété du « consommateur » du pouvoir, mais ce phénomène n'est guère observable en politique comme il a été rappelé. Il est difficile pour celui qui détient, « possède » le pouvoir, de le lâcher tant il s'y accroche à désespérer. Le risque pour lui est l'effondrement psychologique comme un drogué en manque de substance hallucinogène. Au lieu de dessiner une branche de parabole, nous aurions dû à nouveau tracer, dans le même cadran, une branche d'hyperbole horizontale condamnée à s'approcher infiniment d'une asymptote voisine sans jamais l'atteindre...

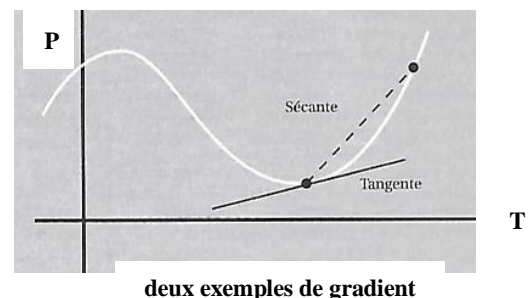
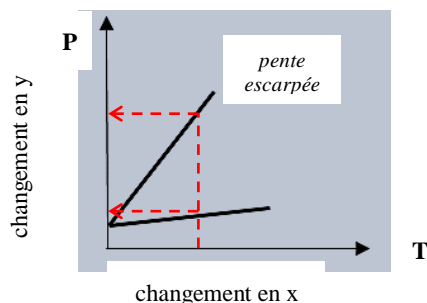
Il ne s'agit pas d'affirmer l'existence d'une forme exacte dont on connaît l'équation. En étant trop précis, on tomberait dans le faux en droit. Il est question seulement de l'allure. Ça ressemble à.

Mais revenons à un graphe, non moins idéal, $y = ax+b$, pour bien comprendre la généralisation, entreprise dès l'âge des Lumières, de la notion de dérivée pour une fonction à plusieurs variables.

Si le graphe de la fonction montre une forte pente, le taux de variation dP/dT change rapidement. Si la pente est peu prononcée, le taux de variation change lentement. (fig.a) En marchant dans un paysage de collines ou de vallées, on affronte des pentes plus ou moins accentuées, plus ou moins « graduées ».

(§ 34
2/-ii)

Pour une droite, le « gradient » (ou la pente a) est constant. Pour un graphe plus général, **la tangente indique le gradient de la courbe en un seul point**. Lorsque le gradient existe en ce point, il est appelé dérivée, mais la sécante entre deux points possède également un gradient (fig.b)¹ **Le gradient indique la direction et le sens de la fonction dans l'espace** (par ex. la direction et le sens d'une température).



deux exemples de gradient

(§ 24)

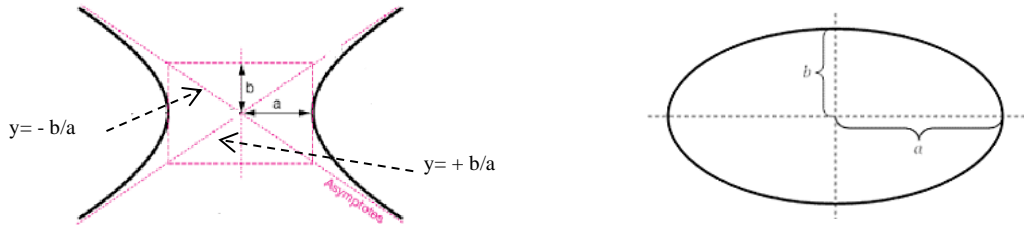
Dernière précision avant de cerner la notion de dérivée partielle. Nous avons signalé une première différence sémantique entre la variable (par ex. d'état) et le paramètre comme élément d'information pris en compte dans une décision ou l'effectuation d'un calcul. En mathématiques, il convient de mieux distinguer les deux notions. Un paramètre est quelque chose que l'on fixe alors qu'une variable est quelque chose qui prend toutes les valeurs suivant une procédure qui comporte deux étapes : 1/ on fixe les paramètres ; 2/ on fait bouger par ex. la variable x pour faire bouger la variable y . En faisant bouger x et y , avec un ou plusieurs paramètres fixes, on obtient la forme de la courbe que l'on peut tracer.

Les paramètres existent dans une équation. Par ex., dans l'équation polynomiale $y = ax^2 + bx + c$, les paramètres sont a , b et c , et les variables sont x et y . L'équation peut être non polynomiale, par ex. $y = e^{ax}$, où a est le paramètre, mais il existe aussi des équations sans paramètres, par ex. ; $U = RI$ en électricité, U étant la tension, R la résistance et I l'intensité. Dans cette équation, il n'y a que trois variables comme dans l'équation $PV = nRT$, avec P la pression, V le volume, T la température, nR

¹ Paul Glendinning, *Mathématiques minute*, édit. Contre-Dires, Paris, 2014, pp.206-207.

une constante que l'on ne peut manipuler (il ne dépend pas de nous de la faire bouger comme pour un paramètre).

L'hyperbole dont nous parlions supra a par ex. deux paramètres, a et b. Il suffit de fixer autrement les paramètres pour changer de forme d'hyperbole (lorsque a = b, l'hyperbole devient équilatère). Il en est de même d'une autre conique comme l'ellipse : lorsque a = b, l'ellipse devient un cercle. (L'hyperbole équilatère est à l'hyperbole ce que le cercle est à l'ellipse.) :



Rappel : l'équation du cercle est $x^2 + y^2 = r^2$ (avec r le rayon) $\Leftrightarrow x^2/r^2 + y^2/r^2 = 1$, et l'équation de l'ellipse : $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ (l'ellipse a deux rayons, a et b). L'équation de l'hyperbole : $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$, d'où $y = \pm \sqrt{(b^2/a^2)x^2 - b^2}$. Lorsque $y = 0$, on a $x = \pm a$. Lorsque $x = 0$, on obtient : $y = \pm b$. Lorsque $x \rightarrow \pm\infty$, on détermine les deux asymptotes : $y = \pm b/a x$

Pour sortir des coniques qui sont du 2^e degré, nous pouvons reprendre $y = ax + b$ du 1^{er} degré. Par ex., *pouvoir = a. talent + b*, avec a la pente i.e. le rapport des variations du pouvoir et du talent, et b le pouvoir à l'origine (sans talent ou talent = 0). Le paramètre a est aussi le gradient de la fonction $f(x) = ax + b$. En un de ces points, il est le gradient d'une ligne tangentielle qui effleure le graphe en ce point.

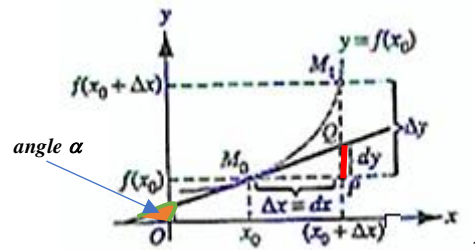
ii Bien cerner la notion de différentielle

Voilà l'ambivalence de la notion de paramètre dissipée et son rapport avec la notion de gradient. Il vaut enfin de rappeler la notion de différentielle aussi rencontrée.

(§ 18 c&d)

Nous savons déjà que les différentielles dx et dy permettent de calculer la dérivée dy/dx quand dx $\rightarrow 0$. Soit une courbe d'équation $y = f(x)$ où f(x) est une fonction différentiable sur un certain intervalle.

En traçant la tangente à cette courbe au point M (x_0, y_0), on sait également que $f'(x_0) = \tan \alpha$. Considérons le triangle ΔM_0PQ , on a : PQ (en trait rouge) = $M_0P \cdot \tan \alpha = f'(x_0) dx = dy$ quand $\Delta x \rightarrow 0$.



Différentielle **dy** de f(x) en x_0

La différentielle $dy = f'(x_0) dx$ est l'accroissement (vertical) de l'ordonnée y du point M (x_0, y_0) lorsque l'on passe de ce point au point d'abscisse ($x_0 + dx$) de la tangente à la courbe représentative de f(x) en M(x_0, y_0).

La différentielle dy se calcule autant que la dérivée f'(x). Sur la figure, on voit que $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$ et on observe deux points P et Q sur la verticale au point ($x+\Delta x$), d'ordonnée y_p et y_q . Or on sait que f'(x), la pente de la tangente en P(x, f(x)) = $(y_q - y_p)/(x_q - x_p) = dy/dx$, d'où **dy = f'(x) Δx ≈ f'(x).dx** quand Δx est petit.

A travers les fluxions [les vitesses des grandeurs variables dans le temps que sont les « fluentes »], Newton est l'inventeur de la notion de dérivée alors que Leibniz est celui de différentielle. Les deux approches se complètent, même si la notation différentielle est plus commode.²

Le calcul différentiel met en scène des dérivées et des différentielles. Ces deux outils permettent d'évaluer les impacts de petites variations sur la valeur d'une fonction. Les effets peuvent être étudiés

¹ O. Ferrier, *Maths pour économistes. L'analyse en économie*, op. cit., vol.1, p.125.

² H. Lehning, *Toutes les mathématiques du monde*, op. cit., p.317.

séparément (dérivées partielles) ou bien conjointement (différentielles).¹ Nous y voilà ! Nous entrons dans le monde des fonctions à plusieurs variables que les Lumières ont exploré sans tarder :

*La notion de fonctions à plusieurs variables apparaît très tôt en physique où l'on étudie souvent des quantités dépendantes de plusieurs autres mais elle se développe considérablement à partir de la fin du XVII^e siècle. En 1667, James Gregory en donne une des premières définitions. Le XVIII^e siècle voit le développement du calcul infinitésimal et la recherche de solutions d'équations différentielles et d'équations aux dérivées partielles. Quant à la notion même de dérivée partielle, elle apparaît dans le traité *Institutiones calculi differentiativis* d'Euler (1755) et chez Clairaut (1747). Les deux mathématiciens y ont reconnu l'outil de base du calcul différentiel des fonctions de plusieurs variables.*²

Quelle interprétation géométrique peut-on donner de la dérivée partielle ?

iii Bien cerner la notion de dérivé partielle

La dérivée d'une fonction, lorsqu'elle existe, est liée aux variations de la fonction **lorsqu'une de ses variables parcourt une direction**.

Pour les fonctions d'une variable réelle, la seule direction possible à parcourir est l'axe des abscisses. *Pour les fonctions de plusieurs variables*, la situation est très différente, car l'espace \mathbb{R}^n possède une infinité de directions. **Si la direction choisie est l'une de ces directions, on parle de dérivée partielle de la fonction par rapport à l'un de ses variables.**³

Après la sémantique, la syntaxe, assortie d'une visualisation.

Soit une surface, dans un espace de dimension trois, d'équation $z = f(x, y)$ où f est une fonction continue et dérivable par rapport à x et à y dans un certain domaine. (*fig. a*) Au point $M(x_0, y_0)$ est associé le point $N(x_0, y_0)$ de la surface $z = f(x, y)$. En $M(x_0, y_0)$, la dérivée partielle, notée $(\partial z / \partial x)$, en M_0 , est une fonction de x à $y = y_0$ constant, i.e. $z = f(x, y_0) = f_1(x)$ se comporte comme une fonction d'une seule variable. *L'autre variable y est considérée comme un paramètre de la fonction et l'on représente z en fonction de l'autre variable pour diverses valeurs du paramètre.*⁴

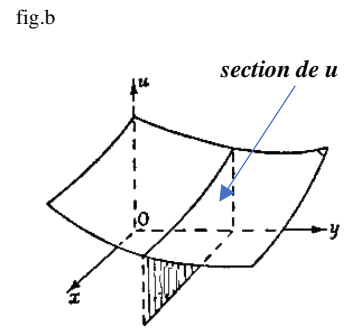
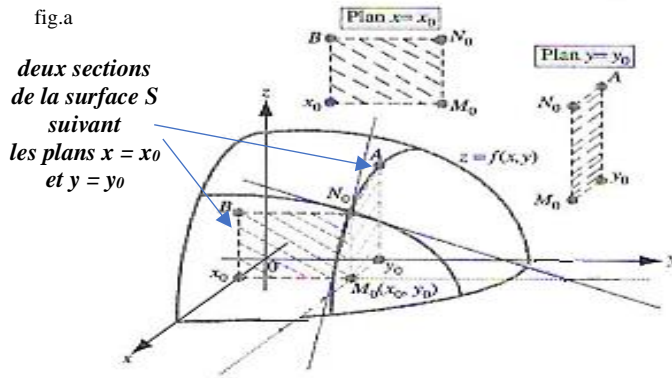
La fonction $z = f_1(x)$ est représentée par la courbe suivant laquelle le plan $y = y_0$ coupe la surface (S). Or, dans le cas d'une fonction à une seule variable, $f'_1(x) = \tan \alpha$ où α est l'angle formé par l'axe Ox et la tangente à la courbe (L) en M_0 . On a : $f'_1(x) = (\partial z / \partial x)$ en (x_0, y_0) de telle sorte que $(\partial z / \partial x) = \tan \alpha$. De même, au regard de l'autre variable y , on a $(\partial z / \partial y) = \tan \beta$. La *fig. b* représente une autre type de surface, $u = f(x, y)$, résultant de l'action des deux variables, x et y . L'intersection de la surface et du plan $y = y_0$ est représentée par l'équation $u = f(x, y_0)$. Conformément à la définition de la dérivée, la dérivée partielle de $f(x, y)$ par rapport à x au point (x_0, y_0) a pour expression $\lim [f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)]/h$ avec $h \rightarrow 0$.

¹ O. Ferrier, *Maths pour économistes. L'analyse en économie*, op. cit., vol.2, p.56.

² https://fr.wikipedia.org/wiki/Fonction_de_plusieurs_variables ; O. Ferrier, *Maths pour économiste*, op. cit., vol.2, p.56 note 1.

³ <https://www.ljll.math.upmc.fr/~nardoni/polyagr13/2017/chapt3.pdf>

⁴ Carl P. Simon, Lawrence Blume, *Mathématiques pour économistes*, De Boeck, Bruxelles, 1998, p.177. La notation ∂ pour désigner la dérivation partielle par opposition à d désignant la dérivation ordinaire a été préconisée par Legendre (1786) et vulgarisée par Jacobi (1841). (O. Ferrier, *Maths pour économistes*, vol.2, p.56, note 2).



Quelle est la signification géométrique de la différentielle totale (nous sommes toujours en 3 D) ?

La différentielle totale, qui est la somme des différentielles partielles, s'écrit : $df = df_x + df_y$, d'où :

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \quad \text{sachant que } df_x = f'(x).dx \text{ et } df_y = f'(y).dy$$

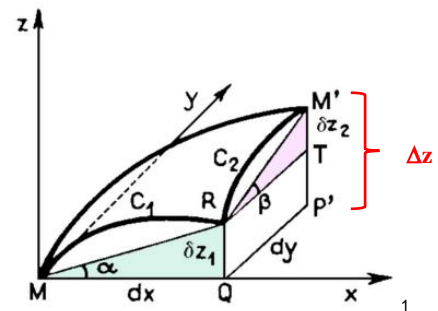
Cette formule est très utile, car elle décompose la variation de la différentielle en fonction de la variation de ses coordonnées, de son abscisse et de son ordonnée. Encore faut-il, dira-t-on, être capable de mesurer les différentielles dx et dy sans parler des dérivées partielles $\partial f/\partial x$ et $\partial f/\partial y$! C'est vrai, mais l'obsession de la mesure ne doit pas empêcher la réflexion de se développer sur le plan qualitatif. Nous continuons d'explorer le mode de raisonnement commun éventuel entre le droit et la science. Nous ne sommes pas encore dans l'ingénierie constitutionnelle, à supposer qu'elle soit réductible à la mesure.

Soit donc Δz la variation d'altitude quand on passe d'un point M à un point M' très voisin de la surface (S). Sur la fig. infra, $\Delta z = P'M'$. On peut décomposer le trajet $MM' = MR + RM'$ avec MR dans le plan Mxz (altitude δz_1) et RM' dans le plan parallèle à Myz (altitude δz_2) passant par Q . On a : $\Delta z = P'M' = P'T + TM' = \delta z_1 + \delta z_2$.

Lorsque M' se rapproche de M , R se rapproche de M et M' de R . Les sécantes tendent alors vers les tangentes correspondantes :

$$\delta z_1 \rightarrow dz_1 = \frac{\partial f}{\partial x} dx = df_x$$

$$\delta z_2 \rightarrow dz_2 = \frac{\partial f}{\partial y} dy = df_y$$



$\Delta z = \delta z_1 + \delta z_2 \rightarrow dz = df$, la variation d'altitude sur le plan tangent en M à la surface (S).

La dérivé partielle, $\partial f/\partial x$ ou $\partial/\partial x f$, s'écrit parfois avec le symbole de Cauchy, D , soit : $\partial f/\partial x = D_x f$. Elle représente la tangente à la courbe d'intersection de la surface $z = f(x, y)$ avec le plan d'équation $x = x_0$, perpendiculaire à l'axe des x .

En notation matricielle du XIX^e siècle (qui prolonge l'idée des Lumières), la dérivée $y = F(x_1, \dots, x_n)$ en un point donné x^* , correspond à la « matrice ligne » suivante :

$$DF_{x^*} = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}(x^*) \quad \dots \quad \frac{\partial F}{\partial x_n}(x^*) \right).$$

¹ Christine Melodelima, *Dérivées et différentielles des fonctions de plusieurs variables*, Univ. Joseph Fourier de Grenoble, 2011-2012, http://unf3s.cerimes.fr/media/paces/Grenoble_1112/melodelima_christelle/melodelima_christelle_p06/melodelima_christelle_p06.pdf
² C. P. Simon, L. Blume, *Mathématiques pour économistes*, op. cit., p.305.

Une matrice est un tableau de nombres distribués en lignes et en colonnes par commodité. Les nombres sont ici des dérivées partielles de la fonction F par rapport à chacune des variables x_i . La notion de matrice impose la linéarité, à savoir le respect de deux propriétés : celle de l'additivité ($f(x + y) = f(x) + f(y)$) et l'homogénéité de degré 1, soit ($f(\alpha x) = \alpha f(x)$) pour tout α . L'expression de DF_x peut donc être considérée comme celle d'une fonction linéaire donnant l'approximation de F au voisinage de x^* .

La dérivée de F en un point x^* peut être également reconvertie en la « matrice colonne » de la fig. a infra :

fig.a
$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x_1}(x^*) \\ \vdots \\ \frac{\partial F}{\partial x_n}(x^*) \end{pmatrix}$$

fig.b
$$\nabla F(x^*) \cdot \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x_1}(x^*) \\ \vdots \\ \frac{\partial F}{\partial x_n}(x^*) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_i}(x^*) v_i$$

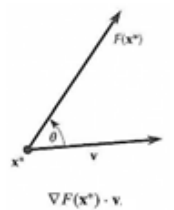
Le lecteur juriste doit malheureusement connaître ces représentations qui lui seront utiles par la suite.

fig. a. Cette matrice colonne représente un vecteur (donc une suite de nombres) de R^n dont l'origine se situe au point x^* . Ce vecteur, noté $\nabla F(x^*)$ ou $\text{grad } F(x^*)$, est le *gradient* ou le *vecteur gradient* de F au point x^* . (∇ se dit « nabla »). Comme les deux caractéristiques importantes d'un vecteur sont sa longueur et sa direction, celles d'un vecteur gradient \mathbf{v} ont une signification précise :

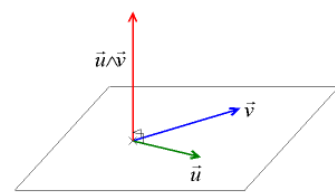
1/ la dérivée directionnelle $DF_x(\mathbf{v})$ au point x et suivant la direction \mathbf{v} , s'écrit sous la forme du produit scalaire des deux vecteurs $\nabla F(x^*)$ et \mathbf{v} (voir fig.b), étant rappelé qu'un produit matriciel s'effectue ligne par colonne en croisant chaque ligne avec chaque colonne et en additionnant le tout. Par ex. :

Le produit *scalaire* de deux vecteurs donne lieu à un scalaire, c'est-à-dire un nombre réel (ou complexe) et non un autre vecteur, perpendiculaire au plan formé des deux autres comme dans le produit *vectorel*.

(§4-iii) 2/ la dérivée directionnelle $DF_x(\mathbf{v})$ mesure le **taux auquel F augmente ou diminue** lorsqu'on se déplace à partir du point x^* dans la direction \mathbf{v} . En utilisant les propriétés habituelles des produits scalaires, la



produit scalaire



produit vectoriel

dérivée de F suivant la direction v s'écrit :

$$\nabla F(x^*) \cdot \mathbf{v} = \|\nabla F(x^*)\| \|\mathbf{v}\| \cos \theta = \|\nabla F(x^*)\| \cos \theta$$

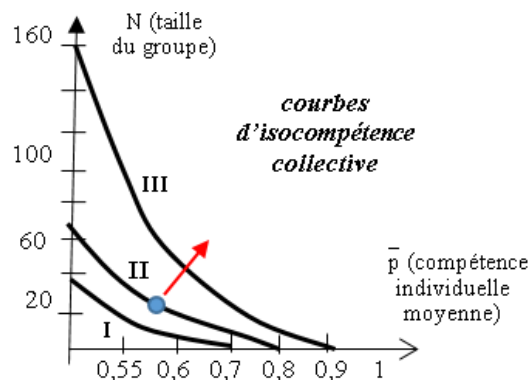
¹ Ibid., pp.305-306.

² Calcul matriciel, https://www.unilim.fr/pages_perso/jean.debord/math/matrices/matrices.htm

en ne considérant que les vecteurs unitaires, i.e. $\|\mathbf{v}\| = 1$ (\mathbf{v} est en gras car c'est un vecteur). Une telle expression n'a d'intérêt que si on procède au calcul. Si on connaît l'angle θ , la réponse est immédiate : comme $-1 < \cos \theta < +1$, il découle que $\nabla F(x^*) \cdot \mathbf{v}$ est le réel le plus grand lorsque $\cos \theta = 1$, i.e. quand $\theta = 0$. Par conséquent, $\nabla F(x^*) \cdot \mathbf{v}$ est la quantité la plus grande parmi les vecteurs \mathbf{v} de longueur unitaire lorsque le vecteur \mathbf{v} a la même direction que le vecteur $\nabla F(x^*)$. Faute d'être aussi précis, on se contentera de voir approximativement **dans quelle direction F s'accroît le plus rapidement**.¹

Pour ne pas trop introduire de notions nouvelles en même temps, le lecteur a peut-être souvenance de la position de Condorcet sur la nécessité d'une éducation populaire pour élever le niveau d'« isocompétence collective ». Par un tel niveau, il faut entendre toutes les combinaisons possibles entre la taille d'un groupe et la compétence individuelle moyenne d'où il résulte la même isocompétence collective (la même valeur de compétence pour toutes les combinaisons). La tendance vers le niveau d'isocompétence collective le plus élevé est indiqué par le gradient. C'était un exemple où deux variables étaient en jeu et où Condorcet s'efforçait de s'assurer du taux de variation le plus rapide.

(§37
2/b)-ii)



Du point de vue de Condorcet,

- la courbe d'isocompétence collective I représente une compétence collective moins élevée que la courbe d'isocompétence collective II ;
- la courbe d'isocompétence collective II représente elle-même une compétence collective moins élevée que la courbe d'isocompétence collective III ;
- Plus on se dirige du côté nord-est, plus la compétence collective du groupe s'élève (existence d'un **gradient**)

La direction du **vecteur gradient (en rouge)** correspond à celle où le « niveau d'isocompétence » collective (de ne pas se tromper en prenant une décision ensemble) augmente le plus rapidement

Voilà une transition avec le droit, mais le lecteur a déjà rencontré la notion de dérivée partielle en droit sans s'en rendre compte lors de l'évocation de la méthode des moindres carrés pour ajuster un nuage de points. Pour ne pas trop alourdir la présentation, le lecteur intéressé se reportera à l'Annexe I. Dans sa façon de procéder, la méthode des moindres carrés, élaborée à la fin du XVIII^e siècle, n'ignore pas ce mode de raisonnement dans ses ajustements. Il en est de même de la philosophie naturelle.

(§17
b)-i)

2/ Applications en philosophie naturelle

Deux exemples de fonction à plusieurs variables frappent l'attention au milieu du XVIII^e siècle et au début du XIX^e siècle : l'équation des ondes par d'Alembert et l'équation de la chaleur par Fourier.

a) L'équation des ondes

C'est dans ses *Recherches sur la courbe que forme une corde tendue mise en vibration*, publiée en 1749 par l'Académie royale de Berlin, que d'Alembert démontre l'utilité de considérer la dérivée partielle. D'Alembert participe parallèlement au mouvement intellectuel des Lumières qui révolutionne tant de connaissances. Dans l'Encyclopédie de Diderot, qui s'impose comme le manifeste de la philosophie des Lumières, d'Alembert a rédigé, à lui tout seul, près de 700 articles touchant notamment les mathématiques (dont le calcul infinitésimal et le calcul intégral), la mécanique et l'astronomie.²

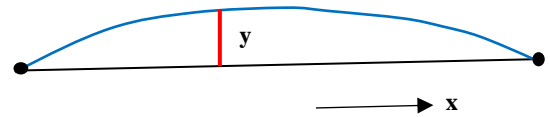
¹ C. P. Simon, L. Blume, *Mathématiques pour économistes*, op. cit., p.307.

² Patrick Gérard, *Les Lumières et les ondes*, Conférence donnée à la Bibliothèque nationale de Paris dans le cadre de la série *Un texte, un mathématicien*, 27 mars 2013.

L'étude d'une corde vibrante n'est pas nouvelle. L'époque de Pythagore savait déjà qu'en raccourcissant une corde d'un instrument de musique, le son devient plus aigu (la corde vibre plus vite ; sa fréquence, i.e. le nombre de périodes par sec., s'élève). En la coupant d'un $\frac{1}{2}$, on entend l'octave ; par $\frac{2}{3}$ la quinte, etc. Au XVIII^e siècle, Brook Taylor, l'auteur de la série de Taylor, donne une formule pour le son fondamental et indique que sa forme est celle d'une sinusoïde. Cependant, va montrer que Taylor n'a vu qu'une partie du phénomène en laissant de côté les harmoniques.

Quelles sont les données physiques du problème ?

La tension T de la corde (due au fait que la masse est plus ou moins lourde) qui est la même en tout point
 La masse par unité de longueur, μ , qui est également la même partout (corde homogène)
 La longueur de la corde, l (plus la corde est longue, plus elle émet un son fondamental grave)



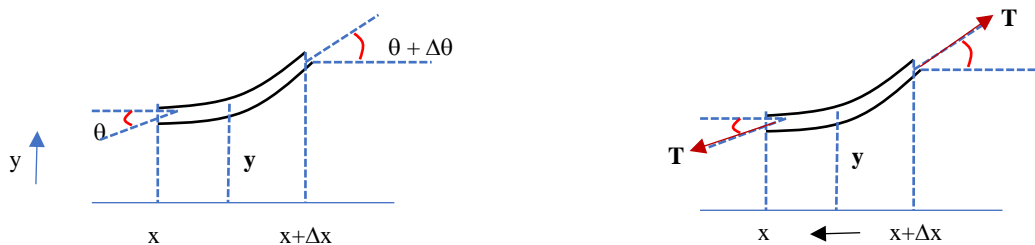
Quelle est l'inconnue du problème ?

Le déplacement vertical ou ordonnée y de la corde par rapport à la ligne droite. Ce déplacement est une fonction de deux variables, la distance parcourue x et le temps t , soit $y = f(x, t)$. D'Alembert entreprend un calcul infinitésimal à plusieurs variables en dérivant par rapport à chacune des variables, la distance ou l'abscisse x et le temps t :

- il dérive par rapport au temps : $p = \partial y / \partial t$ en fixant la variable x . La dérivée de l'espace au temps est une vitesse. En l'espèce, il s'agit de la vitesse du déplacement vertical ;
- il dérive une seconde fois par rapport au temps : $\partial / \partial t (\partial y / \partial t) = \partial^2 y / \partial t^2$ (en continuant de fixer la variable x pour obtenir l'accélération verticale a (dérivée de la vitesse verticale) ;
- il dérive par rapport à la distance horizontale en fixant la variable t ; la courbe devient une fonction de x , la dérivée ayant pour expression $q = \partial y / \partial x$ (pente de la tangente à la courbe) ;
- il dérive une seconde fois par rapport à l'espace, à la même localisation, en continuant de fixer la variable t , soit : $k = \partial^2 y / \partial x^2$. Cette dérivée seconde définit la courbure (dans un plan) de la courbe ; elle quantifie combien la courbe est courbée. Si $\partial^2 y / \partial x^2 = 0$ partout, il n'y a pas de courbure ; une fonction qui a telle dérivée seconde nulle a une dérivée première constante ; il s'agit dans ce cas d'une fonction affine (une droite du genre $y = ax + b$). Au contraire, plus la courbe est courbée, plus cette dérivée est importante.

Voilà les principaux personnages de l'histoire (sic).¹ Pour mettre en équation toutes ces données et l'inconnue, d'Alembert va utiliser la seconde loi de Newton, $F = m \gamma$ (ou $F = m \gamma$ avec γ comme accélération), appliquée à un petit élément de la corde et projetée sur l'axe vertical, F étant assimilée à la tension de la corde, T . D'Alembert obtient ainsi la 1^{re} équation des ondes : $\mu \partial^2 y / \partial t^2 = T \partial^2 y / \partial x^2$.

Comment d'Alembert établit-il une telle équation où les deux dérivées secondes apparaissent comme les personnages principaux aux côtés de la tension ? Considérons les deux figures suivantes :



La fig. a représente un petit bout de corde, de masse μ par unité de longueur. Sur la fig. b, on suppose qu'il existe la même tension T aux deux extrémités de la corde. Il s'agit d'une approximation raisonnable pour une amplitude modeste. Pour cette amplitude, nous n'avons pas à nous inquiéter du mouvement dans la direction x . La seule chose qui importe est le mouvement de va-et-vient vertical

¹ Ibid.

qui revient à l'équilibre. Le petit bout de corde a pour masse une infiniment petite masse dm (lorsque $\Delta X \rightarrow 0$).¹

Cela dit, $F_y = -T \sin \theta + T \sin (\theta + \Delta\theta)$, le signe - décrivant le mouvement de T vers le bas à gauche et le signe + le mouvement de T vers le haut à droite, loin de l'équilibre. On sait que pour des petits angles, $\sin \theta = \theta$ en radians. Cette hypothèse sied avec notre amplitude. D'où : $F_y = -T \sin \theta + T \sin (\theta + \Delta\theta) = T \Delta\theta$. En appliquant la 2^{nde} loi du mouvement de Newton, $F = m\gamma$, on a : $(dm) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \mu \Delta X \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = T \Delta\theta$ avec $dm = \Delta x \mu$, étant rappelé que μ est la masse par unité que l'on multiplie par la distance Δx .

(D'Alembert utilise la dérivée partielle par rapport à une variable en fixant l'autre variable, soit la variable x comme valeur constante quand le temps t varie, soit t qui ne change à aucun moment quand x varie.)

En faisant $\Delta x \rightarrow 0$ (voir *fig. b*), la tangente à la courbe tend vers T qui se dirige vers le bas et $\tan \theta = \frac{\partial y}{\partial x}$. En dérivant la tangente de l'angle θ de la fonction, on a : $\frac{1}{\cos^2 \theta} \frac{d\theta}{dx} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$. En raison de l'approximation pour des petits angles, $\frac{1}{\cos^2} = 1$, d'où $\mu \Delta x \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$. En éliminant Δx de part et d'autre (on est en physique, non en mathématiques), on obtient $\mu \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = T \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$, soit $\mu/T \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$.

cqfd. D'Alembert a établi l'équation qui réunit une double dérivation par rapport au temps et une double dérivation par rapport à l'espace, et il réussira à la résoudre en trouvant toutes les solutions qui satisfont cette équation aux dérivées partielles.

L'équation de la chaleur

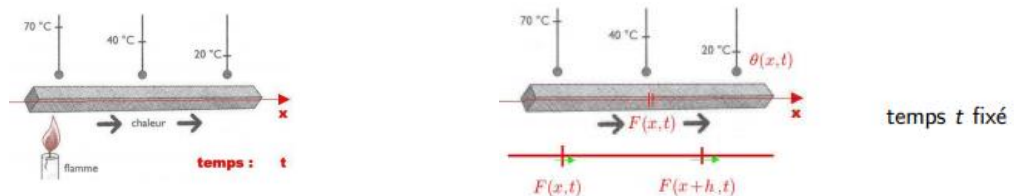
L'équation de la chaleur met également en scène une fonction à deux variables emportant une dérivation par rapport au temps et une double dérivation par rapport à l'espace. Nous avons parlé de séries de Fourier. Nous avons commencé en fait par la fin, car ces séries trigonométriques, définies chacune comme somme de solutions élémentaires, ne sont que l'instrument pour résoudre une telle équation qui se présente comme suit pour une plaque métallique, mince et plate dans le plan xOy de laquelle la chaleur se propage :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = K \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

Dans cette équation, le signe + relie les deux dérivées partielles secondes alors que l'équation des ondes le signe est - attendu que $\mu/T \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ devient $\mu/T \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$ ou $\rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$ le coefficient ρ résumant la densité du matériau. La température de la plaque u dépend du temps t et du point (x,y) où elle est déterminée. Le coefficient de proportionnalité $K, >0$, dépend aussi du matériau.

Comment Fourier a-t-il établi une telle équation, $u(x,t)$?

Fourier étudie d'abord une barre métallique sans épaisseur. Ce n'est même pas une plaque et encore moins un volume. Il ne retient qu'une seule coordonnée : la position de la température sur la barre au point x qu'il chauffe à l'une de ses extrémités. Il enlève la flamme. Comment, se demande-t-il, la température qu'il appelle θ évolue-t-elle dans l'espace x et le temps t ?



Pour modéliser le problème, Fourier pose (θ, t) la température au point x et au temps t . La diffusion de la chaleur dans la barre suit une évolution qui obéit à l'équation :

$$\theta'_t(x, t) = D \theta''_{xx}(x, t) + \frac{P}{\rho c}$$

¹ Walter Lewin, Lect. 8.03 : *Wave equation*, MIT, Cambridge, Boston, sept. 30, 2004, <https://www.youtube.com/watch?v=c9AePvHDvIo>.

La dérivée par rapport au temps (avec x constant), $\theta'_t(x,t)$, est égale à la dérivée seconde θ''_{xx} par rapport à l'espace (avec t constant). Le coefficient de proportionnalité D , dit de diffusivité thermique, indique la facilité de transfert de chaleur dans la barre (sa conductivité interne). Le rapport $p/\mu c$ complète ce qui est relatif au matériau : p désigne ici la production interne de chaleur, μ la masse volumique du matériau, c la chaleur spécifique (pour un apport donné de chaleur, la température d'un corps est inversement proportionnelle à sa masse).¹

Le membre gauche de l'équation, $\theta'_t(x,t)$, est un flux, $F(x,t)$. Il indique la propagation de la chaleur. Fourier ne prétend pas connaître la cause intime de la chaleur. Ce n'est qu'aujourd'hui que l'on sait que la chaleur est le produit de l'agitation des molécules. Il ne parle pas d'énergie cinétique interne, mais il est capable de décrire de façon très précise la propagation de la chaleur.

Tout révolutionnaire qu'il est, Fourier est baigné dans la culture scientifique de l'époque. Sa loi de la chaleur en une dimension, connue de nos jours sous la forme d'une équation différentielle partielle $\partial T/\partial t = K \partial^2 T/\partial x^2$ (avec T la température et K la conductivité thermique), n'est pas sans rappeler la loi fondamentale de la mécanique : $\gamma = F/m = d^2x/dt^2$. Le flux est une dérivée semblable à une vitesse instantanée. Un flux entre au point x et sort au point $x+dx$, puis au point $x+2dx$, etc. Chaque accroissement de quantité de chaleur génère un accroissement de température dont le bilan thermique s'écrit : $K (\partial T/\partial x (x+dx, t) - \partial T/\partial x (x, t))$. La différence entre dérivées partielles restitue la dérivée partielle seconde : $\partial T/\partial t (x, t) = K \partial^2 T/\partial x^2 (x, t)$.

La conduction thermique, provoquée par une différence de température, devance de peu la loi d'Ohm sur la conduction électrique, $U_1-U_2=RI$ (la différence de potentiel U_1-U_2 est égale, comme nous y avons fait allusion plusieurs fois, au produit de la résistance R et de l'intensité I du courant qui la traverse : $U=RI$). L'épistémè des Lumières œuvre !

Le flux de chaleur $F(x, t)$, qui est un vecteur, est d'autant plus grand que la température varie plus vite avec x , mais comme la chaleur a tendance à se refroidir en se propageant, la dérivée de la température par rapport à x est précédée d'un signe moins, $F(x,t) = -\theta'_x(x,t)$. Le flux de chaleur est précisément proportionnel à la dérivée par rapport à x , le coefficient de proportionnalité a étant négatif : $F(x,t) = -a \theta'_x(x,t)$:

Si on élève, en chaque point [à la barre], une ordonnée perpendiculaire dont la longueur est proportionnelle à la température fixe de ce point, [...] il est très facile de déterminer par le calcul la nature de la ligne courbe qui passerait par les extrémités des ordonnées. La ligne changera continuellement de forme. [...] Lorsqu'on aura enlevé le foyer, la chaleur continuera de se propager. Toutes les températures varieront et diminueront sans cesse.²

Calculons. Pour une quantité de chaleur $\delta Q/\delta t$ pénétrant dans un tronçon $[x, x+h]$, on a :

$$\frac{\delta Q}{\delta t} = F(x, t) - F(x+h, t) \simeq -F'_x(x, t)h = ah \theta''_{xx}(x, t) \quad \text{soit} \quad \frac{\delta Q}{\delta t} = ah \theta''_{xx}(x, t)$$

étant observé que le symbole delta minuscule, δ , indique en physique que $\delta Q/\delta t$ est une petite quantité élémentaire, un apport, non une variation bien que la variation (Δ , d ou ∂) peut dépendre de cet apport.

Or, la variation du tronçon de la température du tronçon $[x, x+h]$ est proportionnelle à la quantité de chaleur que ce tronçon a reçu et inversement proportionnel à sa masse. En conséquence :

$$\theta'_t(x, t) = b \times \frac{1}{\rho h} \times \frac{\delta Q}{\delta t} = \frac{ab}{\rho} \theta''_{xx}(x, t)$$

En posant $D = ab/\rho$, on trouve l'équation de la chaleur pour le cas où $P = 0$ (pas de production interne de chaleur).³

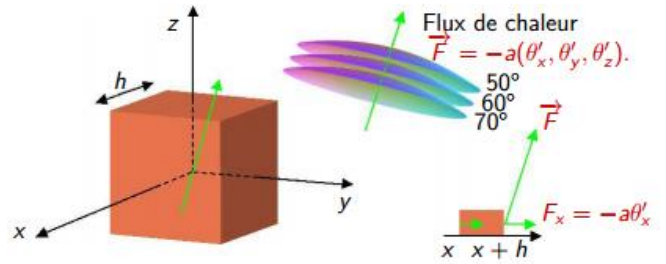
En dimension 3, l'abscisse x ne suffit plus pour étudier la répartition des températures. Le calcul différentiel opère sur de minuscules cubes. Le flux (vectoriel) n'atteint plus seulement des points d'une

¹ J.-P. Demailly, « Même le feu est régi par les nombres », Conférence déjà citée sur la *Théorie analytique de la chaleur* [1822] de Fourier, dans le cadre du cycle : *Un texte, un mathématicien*, Bibliothèque nationale de Paris, 9 février 2011.

² Fourier, chap.I, sect.1, 3, p.2.

³ J.-P. Demailly, « Même le feu est régi par les nombres », op. cit., passim.

hauteur de 70°, 60°, 50°, etc. mais des surfaces isothermes de même degré. Soit $\theta(x,y,z,t)$, la température au point (x,y,z) et au temps t . Le flux de chaleur $F(x,y,z,t) = -a(\theta'_x, \theta'_y, \theta'_z)$ apparaît ainsi :



La quantité de chaleur circulant entre les deux faces d'abscisses x et $x+h$ vaut $\delta Q/\delta t$, laquelle est égale à la variation de $F_x = -a\theta'_x$ entre x et $x+h$, soit $ah\theta''_{xx}$ lorsque h est petit ($h \rightarrow 0$). En faisant la somme sur les trois paires de faces opposées, on trouve une équation plus générale introduisant les dérivées de la température non seulement par rapport au temps mais aussi par rapport à x, y et z , soit l'équation :

$$\theta''_t(x, y, z, t) = D(\theta''_{xx} + \theta''_{yy} + \theta''_{zz})(x, y, z, t) + \frac{P}{\rho C}, \text{ notée autrement : } \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{K}{CD} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right)$$

L'équation $\partial T/\partial t = K/CD[\partial^2 T/\partial x^2 + \partial^2 T/\partial y^2 + \partial^2 T/\partial z^2]$ mesure la température $T(x,y,z)$ en un point (x,y,z) d'un solide et au temps t . La dérivée de la température $\partial^2 T/\partial x^2$ résulte de l'addition de trois effets représentée par la somme des trois dérivées secondes, C désignant la chaleur spécifique, D la densité. Cette mise en équation fait écho aux équations aux dérivées partielles de d'Alembert décrivant les vibrations sonores.²

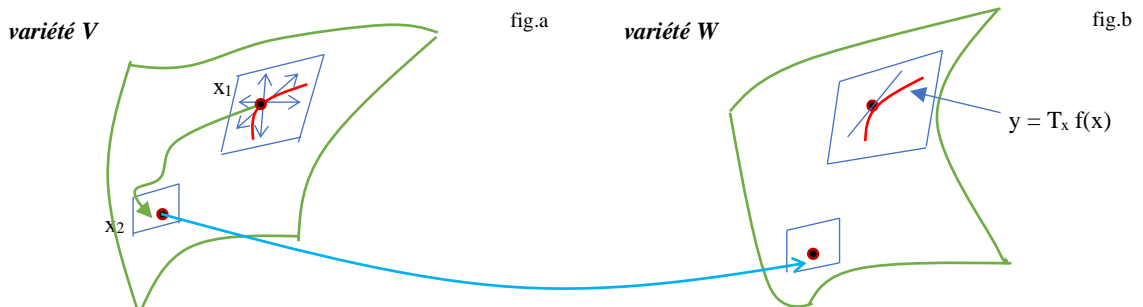
3/ Applications en droit

a) La matrice jacobienne de l'interprétation

- i L'interprétation constitutionnelle. ii La figuration de l'interprétation constitutionnelle
- iii La fonction « mathématique » de l'interprétation

iv La déformation de l'interprétation globale

Dans la variété V d'une telle interprétation, on se déplace d'un point à l'autre, d'une interprétation globale à une autre. Ce déplacement se retrouve dans la variété W correspondante des dérivées partielles puisque la déformation initiale de la variété V , représentative de toutes les interprétations globales, provoque dans la variété des dérivées partielles W une modification qui entraîne des variations d'interprétation des autres acteurs restants en réaction.



¹ Ibid.

² J. Dhombres, J.-Bernard Robert, *Fourier*, op. cit., p.673.

fig.a : Sur le plan tangent $T_x V$ de la variété V sont dessinés plusieurs vecteurs tangents appartenant à ce plan. **Le plan tangent colle à la variété, la qualifie, la définit en un endroit précis.** Dans ce plan, une petite courbe a été tracée également (la courbe est petite car la déformation est locale). Sur la variété V , nous passons d'un point x_1 , situé au carrefour des vecteurs tangents, à un point x_2 , situé sur un nouveau plan tangent à la même variété V .

fig.b : Sur le plan tangent $T_{f(x)} W$ de la variété W figure la tangente $y = T_x f(x)$ au bout de courbe représentative de $f(x)$. La matrice des dérivées partielles, qui opère dans le plan tangent de la variété W , se déforme continûment à l'image de la déformation observée dans la variété V . S'il existe un plan tangent partout sur la variété V (« partout » veut dire en tout point), il existe un plan tangent partout sur la variété W . La correspondance entre les deux plans est une bijection bi-différentiable. C'est, comme on dit en mathématiques, un *difféomorphisme*.

La variété V représente le point de vue intégral. La variété W représente le point de vue différentiel. Nous voyons le mouvement qui est en œuvre d'un plan tangent à un autre dans chaque variété. Dans la variété W , le processus de différentiation aboutit à un autre ensemble de dérivées partielles. Dans la variété V , nous glissons d'un premier résultat global, donné au départ, vers un second résultat global.

Avec trois variables, la fonction mathématique f , qui correspond à la fonction juridique d'interprétation de la Constitution, permet de passer d'un espace R^3 d'interprétations (I_{PL}, I_{PE}, I_{PJ}) à un autre espace d'interprétation R^3 composé de toutes les dérivées partielles de la fonction $f(I_{PL}, I_{PE}, I_{PJ})$. Avec plus de trois variables, une autre fonction permet de passer d'une variété R^n d'interprétations $(I_{PL}, I_{PE}, I_{PJ}, \dots, I_{Pn})$, à une autre variété R^n composée de toutes leurs dérivées partielles. Les plans tangents de chaque variété permettent de linéariser ou d'approximer localement les espaces courbes de ces deux variétés.

- Une question ?

- Oui, pardon, j'en dis trop sans doute.

- Votre vision concrète demeure très abstraite et qualitative ! On a compris qu'une petite perturbation, due à une petite variation, aboutit à une perturbation des résultats. Cela revient en fait à modifier les conditions initiales d'une fonction. Vous avez déjà évoqué l'équation de la chaleur et le pendule. L'équation de la chaleur, précisément, est une équation aux dérivées partielles stable parce que des petites perturbations des conditions initiales conduisent à des faibles variations de la température à un temps ultérieur. Si un système mécanique est dans un état d'équilibre stable, alors une petite poussée se traduira par un mouvement localisé. C'est aussi le cas d'un pendule soumis à de petites oscillations.

Cependant, pour savoir exactement si le nouveau résultat ne met pas en cause l'équilibre entre les pouvoirs qui interprètent telle ou telle disposition de la Constitution, il ne suffit pas de considérer la matrice jacobienne $(n,p, \text{ avec } n=p)$. Il faut aller plus loin : considérer son déterminant, *le jacobien* qui vous assurera si l'équilibre demeure stable ou non. Vous parliez du XIX^e siècle. C'est justement, au début de siècle, que le déterminant jacobien apparaît pour la 1^{ère} fois dans un article de Cauchy en 1815. C'est Jacobi qui en fait une étude systématique, d'où ce nom de *jacobien* donné par Sylvester.¹

(Voir en Annexe II l'historique de cette notion qui a été pensée avant même Cauchy au XVIII^e siècle)

La stabilité peut se déterminer en calculant les valeurs propres de la matrice jacobienne, car cette matrice que représente le système et contient l'information de l'équation dite caractéristique dont les racines sont les valeurs propres de la matrice. L'équation caractéristique s'établit à partir du déterminant de la matrice. Vous avez fait l'impasse sur tous ces détails essentiels qui appuient votre idée si vous savez les utiliser.

- Ne vous inquiétez pas. J'y songe, mais je m'effraie aussi du détour que cette présentation exige avant d'en venir au cœur du sujet. S'adresser à des juristes curieux, peu frottés aux sciences, est une gageure qui n'est guère facile de relever autant que celle d'expliquer à des scientifiques qui n'en connaissent du droit que le contentieux souvent mal réglé ou frustrant ! On risque, à tous les coups, de perdre le fil, la clarté et l'élégance de l'exposé. Je me lance tout de même car les juristes, justement, découvriront combien les notions que nous allons clarifier (*déterminant, valeurs et vecteurs propres*) ont également été utilisées par des scientifiques américains pour analyser, par certains

¹ <http://www.bibmath.net/dico/index.php?action=affiche&quoi=-/j/jacobien.html>

côtés, la jurisprudence de leur pays. Il faut attendre notre § 47 pour s'en étonner et juger que le résultat n'est pas si dénué d'intérêt.

Commençons donc par supposer que la matrice dont nous parlons soit un tableau des nombres susceptibles d'être connus ou approchés, et commençons par rappeler le principe de l'écriture matricielle transformant par exemple un système de 2 équations linéaires par commodité de calcul.

Soit le système :

$$\begin{cases} 3x + 5y = 1 \\ 2x + 6y = 4 \end{cases}$$

Ce système se traduit par :

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

De même, nous avons vu que le gradient ∇f d'une fonction à plusieurs variables pouvait déjà se traduire sous forme vectorielle, sachant que le gradient est un vecteur représentant la variation d'une fonction par rapport à la variation de ses diverses variables. Le gradient généralise l'idée de dérivée.

Par ex., le gradient de la fonction définie sur \mathbb{R}^2 par $f(x, y) = x^2$ s'écrit :

$$\nabla_{(x,y)} f = \begin{pmatrix} 2x \\ 0 \end{pmatrix}$$

Le gradient de cette fonction est le champ de vecteurs horizontal (voir infra pour le rappel de *champ de vecteurs*)

Par ex., la fonction f , comportant trois variables, $(x,y,z) = 2x + 3y + 2xy + 5$, peut s'écrire, après dérivation par rapport chacune des variables :

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 2 + 2y \\ 3 + 2x \\ 0 \end{pmatrix}$$

Du vecteur à la matrice, il n'y a qu'un pas, la matrice jacobienne pouvant s'écrire de façon ramassée en termes de gradient, ou de façon développée en termes de toutes les dérivées partielles :

$$\mathcal{J}_f = \begin{pmatrix} {}^t \nabla f_1 \\ \vdots \\ {}^t \nabla f_m \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{J}_f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Une équation différentielle, comportant une dérivée première, voire seconde, sinon plus, peut également s'écrire sous forme matricielle :

Soit par ex., le système de deux équations différentielles linéaires du premier ordre. Ce système peut se réécrire sous sa forme matricielle :

$$\begin{cases} y_1' = a y_1 + b y_2 \\ y_2' = c y_1 + d y_2 \end{cases} \iff \frac{d}{dx} Y = A Y, \quad \text{où} \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

(§18-e)

dY/dx et Y sont des vecteurs et A une matrice. Il en est de même pour y' et y dans l'équation différentielle $y' = A y$ dont la figure infra représente le champ de vecteurs de cette équation. Par ex., un champ de vitesses comme le vent est un champ de vecteurs. En tout point de la surface de la terre, on associe un vecteur qui représente la force, la direction et le sens du vent. (A ne pas confondre avec un champ de scalaires comme la température qui n'est qu'un nombre qui varie en fonction du lieu et du temps.)

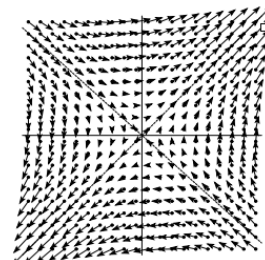
A chaque point (x,y) du plan, on associe une direction donnée par la pente $f'(x,y)$:

on parle de **champ de directions de l'équation différentielle** (ou encore de son champ de vecteurs).

Le graphe d'une solution de l'équation différentielle est en tout point tangent au champ de directions (on définit un **champ de tangentes** associée à l'équation différentielle).

Une solution est une ligne de champ.

Le tracé du champ de directions permet de deviner le comportement des solutions.¹



champ de vecteurs de l'équation différentielle :

$$y' = \begin{pmatrix} 0.3 & 2.0 \\ 1.8 & 0.5 \end{pmatrix} y$$

¹ <http://www.bibmath.net/dico/index.php?action=affiche&quoi=/c/champ.html>; <https://www.unige.ch/~wanner/teaching/Numi/Numi5.pdf>.

Sur la *fig. supra*, deux directions sautent aux yeux : les diagonales. Ce sont les directions où le vecteur \mathbf{Av} prend celle du vecteur \mathbf{v} , ce qui se traduit par l'équation $\mathbf{Av} = \lambda\mathbf{v}$ ou $(A-\lambda I)\mathbf{v} = 0$, la lettre I signifiant la matrice identité. Si cette équation est vérifiée, λ s'appelle **valeur propre** de la matrice et \mathbf{v} est le **vecteur propre** correspondant. On cherche une solution \mathbf{v} non nulle pour ne pas résoudre trivialement le système. L'équation $(A-\lambda I)\mathbf{v} = 0$ en possède une, \mathbf{v} non nulle, ssi $P_A(\lambda) = \det(A-\lambda I) = 0$.

(\mathbf{v} est un vecteur colonne, parce que les vecteurs colonnes sont les éléments de l'ensemble d'arrivée de l'application qui fait correspondre à l'ensemble de départ (x_1, x_2, \dots, x_n) l'ensemble d'arrivée :

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{bmatrix} f'(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ f''(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \dots \\ f^n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f'(x_1) & f'(x_2) & \dots & f'(x_n) \\ f''(x_1) & f''(x_2) & \dots & f''(x_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f^n(x_1) & f^n(x_2) & \dots & f^n(x_n) \end{bmatrix}$$

Dans cette matrice, les colonnes représentent des vecteurs. Ce sont des « images » au sens de la théorie des ensembles. $f(x)$ est l'image de x . Les vecteurs colonnes peuvent être « liés » ou libres.)

Le polynôme $P_A(\lambda)$ est *le polynôme caractéristique* de la matrice A . Les valeurs propres de A sont les zéros de ce polynôme.

v Contraction et dilatation

Les **vecteurs propres** sont précisément **les directions qui ressortent dans le champ de vecteurs parmi toutes les autres directions possibles**. Ce sont **des axes privilégiés** sur lesquels les vecteurs, multipliés par une même constante produisent **un effet de dilatation** (par ex. volumique). La valeur propre n'est autre que le rapport de dilatation ou d'homothétie, sachant que le vecteur change sa taille sans changer de direction. Une *valeur propre* associée à un *vecteur propre* est le facteur de modification par lequel il faut multiplier le vecteur pour obtenir son image. Ce facteur peut être négatif (renversement du sens du vecteur) ou nul (vecteur transformé en un vecteur de longueur nulle).

La matrice identité ou matrice unité est une matrice carrée ($n = p$) avec des 1 sur la diagonale et des 0 partout ailleurs. Sa particularité est de laisser inchangée la matrice qu'elle multiplie.¹

$$I_1 = (1), I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \dots, I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice unité n'a aucun effet sur une matrice donnée à n lignes p colonnes :

$$I_n A = A I_p = A$$

$\det(A-\lambda I)$ signifie *le déterminant* de la matrice $(A-\lambda I)$. C'est un nombre réel qui s'avère essentiel pour identifier les points maximum et minimum ou les points selle d'une fonction de plusieurs variables. (Un point selle est un col comme peut l'être un col de montagne, marquant à la fois un maximum pour l'altitude de la route qui le franchit, et un minimum pour la ligne de crête. Un jeu non coopératif à somme nulle ou constante présente un tel col : tout progrès pour un joueur s'accompagne d'une dégradation pour l'autre. Tout couple de stratégies qui conduisent à un col forme un équilibre d'utilités opposées.)²

Le déterminant pour une matrice 2x2 est simple à calculer : on fait la différence entre le produit des éléments d'une diagonale et le produit des éléments de l'autre diagonale :

Soit la matrice carrée A de dimension 2x2

Le déterminant de la matrice est défini par la relation :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

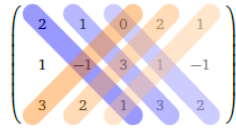
¹ https://fr.wikipedia.org/wiki/Matrice_identit%C3%A9

² HEC Montréal, *Les déterminants des matrices*, Centre d'aide en mathématiques, Rubriques d'aide, 2017, pp.1-9, http://www.hec.ca/cam/rubriques/Les_determinants_des_matrices.pdf ; Jean-Louis Boursin, *Initiation à la théorie des jeux*, Montchrestien, Paris, 1998, p.19.

Le déterminant de la matrice 3x3 est un peu plus sophistiqué (règle dite de Sarrus) :

Calculons par ex. le déterminant de la matrice A suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$



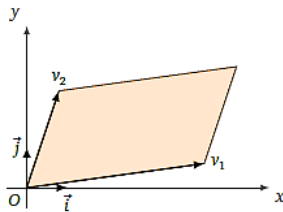
Par la règle de Sarrus,

$$\det A = 2 \times (-1) \times 1 + 1 \times 3 \times 3 + 0 \times 1 \times 2 - 3 \times (-1) \times 0 - 2 \times 3 \times 2 - 1 \times 1 \times 1 = -6.$$

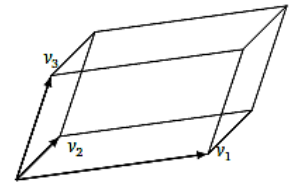
Il existe d'autres méthodes de calcul pour le déterminant de la matrice 3x3 comme il existe d'autres méthodes pour des matrices de dimensions supérieures.¹

Le fait que le déterminant d'une matrice soit nul ou pas permet de répondre à un certain nombre de questions dont celle de savoir si les vecteurs colonnes sont effectivement liés ou libres. En effet, en dimension 2, les déterminants correspondent à des aires et en dimension 3 à des volumes.

Soient deux vecteurs $v_1 = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ et $v_2 = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$. Ces deux vecteurs v_1, v_2 déterminent un parallélogramme. L'aire de ce parallélogramme, engendrée par ces vecteurs, est donnée par la valeur absolue du déterminant. De manière similaire, trois vecteurs de l'espace R^3 : v_1, v_2, v_3 définissent un parallélépipède dont le volume est donné par la valeur absolue du déterminant :



$$v_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix}$$



$$\mathcal{A} = |\det(v_1, v_2)| = \left| \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right|$$

$$\mathcal{V} = |\det(v_1, v_2, v_3)| = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Si les vecteurs v_1 et v_2 sont colinéaires alors le parallélogramme est aplati, donc d'aire nulle. Autrement dit, un déterminant nul signifie que les deux vecteurs pointent dans la même direction ou bien dans les directions opposées. Ils sont liés. De même pour le cas tridimensionnel : le déterminant est nul si ces trois vecteurs sont *co-planaires* (en 3D, ils appartiennent tous au plan tangent à la surface). Ils sont encore liés. Si le déterminant n'est pas nul, les vecteurs sont libres. Ils forment une base.²

(Annexe III)

Comment repérer dans une matrice que les vecteurs sont liés ?

Le déterminant d'une matrice est nul si et seulement si les vecteurs colonnes (respectivement les vecteurs lignes) sont par exemple identiques entre eux ou l'un est le double de l'autre :

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 6 & 12 \end{bmatrix} \quad |A| = 48 - 48 = 0$$

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} \quad |B| = 24 - 24 = 0$$

la deuxième colonne est le double de la première colonne

la deuxième ligne est le double de la première ligne

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 4(0) - 1(0) + 0 = 0$$

un déterminant qui a deux lignes identiques est nul

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

un déterminant qui a deux colonnes identiques est aussi nul³

¹ http://exo7.emath.fr/cours/ch_determinants.pdf

² *Ibid.*; <http://www.math.univ-angers.fr/~tanlei/istia/CM6.pdf>.

³ L3 Math Stat 1, <http://www.foad-mooc.auf.org/IMG/pdf/M02-3.pdf>. Le calcul du déterminant de la matrice 3x3 procède ici d'une méthode

Si le déterminant est nul, le polynôme caractéristique de la matrice carrée l'est également. Les racines sont les valeurs propres de cette matrice. Exemple avec une matrice 2x2 :

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4-\lambda & -5 \\ 2 & -3-\lambda \end{bmatrix} \quad \det(A - \lambda I) = (4-\lambda)(-3-\lambda) - (-5)(2) = \lambda^2 - \lambda - 2$$

Le polynôme caractéristique de la matrice, $\lambda^2 - \lambda - 2$, admet -1 et 2 comme racines. La matrice A admet donc deux valeurs propres : $\lambda_1 = -1$ et $\lambda_2 = 2$. Si λ est une valeur propre de A, alors il existe un vecteur colonne propre v non nul tel que $Av = \lambda v$, soit $(\lambda I - A)v = 0$.

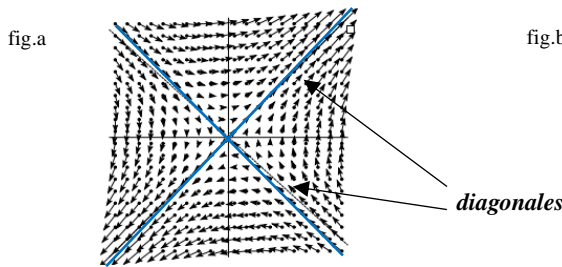
- Voilà un long détour ! Où voulez-vous enfin en venir ?

- Patience ! On arrive à un endroit susceptible d'avoir un lien avec le droit. Que nul n'ait crainte !

Au dire des historiens, *les premiers vecteurs et valeurs propres viennent des équations différentielles (Lagrange 1759, théorie du son), la théorie des perturbations séculaires des orbites des 6 planètes connues à l'époque (Lagrange 1781), et les axes principaux d'inertie d'un corps solide (Euler 1758, Lagrange 1788).*¹ Les axes principaux, voilà - pour répondre à votre Voilà - en un mot l'idée des vecteurs propres, et cette idée, on le verra, intéressera des chercheurs actuels qui veulent comprendre le droit.

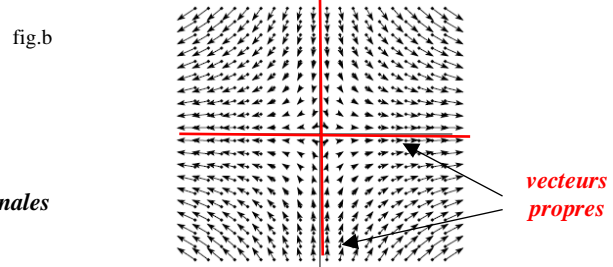
Les diagonales de la fig a, qui sautaient aux yeux, deviennent sur la fig. b les axes principaux du même champ de vecteurs. On reproduit toutes les trajectoires possibles à la lumière des vraies directions qui structurent en fait l'ensemble. Les diagonales deviennent les vecteurs propres. On gagne en clarté.

(§18
ann.I)



champ de vecteurs de l'équation différentielle :

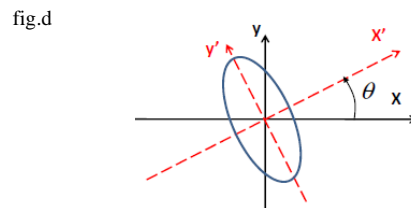
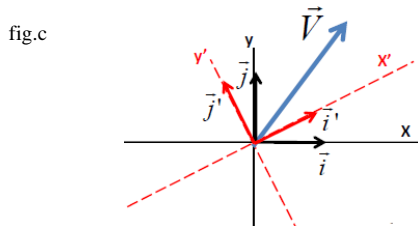
$$y' = \begin{pmatrix} 0.3 & 2.0 \\ 1.8 & 0.5 \end{pmatrix} y$$



même champ de vecteurs de l'équation différentielle transformée sur la base des vecteurs propres :

$$y' = \begin{pmatrix} 2.3 & 0.0 \\ 0.0 & -1.5 \end{pmatrix} y$$

Le changement de base permet de passer des variables primitives aux variables caractéristiques. En géométrie euclidienne, elle permet de déterminer autrement les composantes d'un même vecteur dans une autre base. (fig. c) Autrement signifie plus simplement. Il faut trouver la bonne base, associée à une matrice par exemple de rotation (une matrice qui comprend des sinus, des -sinus et des cosinus à cette fin) pour observer une courbe C d'équation $5/4 x^2 + 7/4 y^2 + \sqrt{3}/2 xy = 1$. (fig. d) A l'aide des nouvelles coordonnées, l'équation devient $2x'^2 + y'^2 = 1$. C'est une ellipse qui décrit C.²



autre que celle de la règle de Sarrus.

¹ Université de Genève, Faculté des sciences, <https://www.unige.ch/~wanner/teaching/Numi/Numi5.pdf>

² Méthodes mathématiques pour ingénieurs, <http://www.math.univ-montp2.fr/~nicoud/Cours/Support%20de%20cours%20MMI2.pdf>

L'exemple de l'ellipse tombe bien, car nous avons supposé que la Constitution générique des Lumières, basée sur la séparation des pouvoirs, est un ellipsoïde qui n'est que la version en 3 D de l'ellipse. Cet ellipsoïde est horizontal, mais il peut aussi être vertical, voire plus vraisemblablement oblique suivant les tiraillements entre les trois pouvoirs pour interpréter la Constitution. Dans ce cas, les trois axes linéairement indépendants des trois pouvoirs interprétant la Constitution ne facilitent pas la description des directions qui se dégagent et orientent l'interprétation globale résultante.

Comme des vecteurs propres, les directions qui apparaissent principales peuvent être assimilées à des axes privilégiés permettant d'observer au mieux l'évolution de cette interprétation constitutionnelle. Le constitutionalisme moderne en fourmille d'exemples.

vi La question de la stabilité de l'interprétation

vii L'effet d'interprétations conjointes

b) Les butées d'interprétation constitutionnelle

i Des butées mutuelles

ii Travail d'interprétation « moteur » ou « résistant »

(Annexe IV)

S'il fallait procéder au calcul du « produit scalaire » des interprétations en droit, il faudrait considérer les interprétations comme des vecteurs, ce qui n'est pas impossible a priori car une interprétation a une origine, une grandeur et un sens. La méthode des coordonnées suppose que l'on connaisse x et y , donc une échelle sur chaque axe pour les évaluer. Sur chaque axe, nous avons deux contraintes, un minimum et un maximum que représentent les bornes α_1 et α_2 sur un axe et les bornes $1/\alpha_2$ et $1/\alpha_1$ sur un autre. Ces contraintes suggèrent un ordre (une interprétation plus grande ou plus petite), à défaut d'une mesure précise. Une échelle approximative est donc envisageable sur chaque axe.

Il est plus difficile de comprendre immédiatement ce que signifie l'angle entre deux vecteurs. On peut y voir cependant la mesure du degré de corrélation entre eux. Plus l'angle θ est ouvert, plus la collaboration entre les pouvoirs est problématique pour avoir une interprétation globale satisfaisante. On retrouve ce que nous avons dit à propos de la complémentarité ou opposition possible entre les deux clauses du 1^{er} Amendement américain sur l'interdiction d'une Eglise anglicane ou catholique et sur le libre exercice de toute religion. L'angle entre ces deux « vecteurs » par les pouvoirs est bien une indication de différence d'interprétation constitutionnelle par les 3 pouvoirs, dont la Cour suprême.

(§4-iii)

Si jamais un calcul était possible quelle que soit la méthode choisie, ce calcul devrait respecter les propriétés de commutativité et de distributivité du « produit scalaire ». La valeur du produit scalaire $A \cdot B = B \cdot A$ est celle de la projection d'un vecteur sur l'autre en mesure euclidienne, mais on oublie trop que projeter A sur B n'est pas la même chose que projeter B sur A. Il faudrait davantage y réfléchir.

Le travail d'interprétation d'une « puissance » ou force variable.

Dans le cas du travail d'une force F qui est constante le long d'un chemin AB, nous savons que : $W_{AB}(F) = \mathbf{F} \cdot \mathbf{AB}$ co (F, AB). Si la force varie au cours du chemin AB, on découpe ce chemin en portions élémentaires $d\mathbf{l}$, et on considère que la forme de norme F qui s'applique le long de ce chemin est constante. **Cette méthode est celle-là même du calcul différentiel et intégral des Lumières**, soit en l'espèce : $W_{AB}(\mathbf{F}) = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}$ co (F, $d\mathbf{l}$).

En pareil cas, on observe une dynamique au cours de laquelle le « produit scalaire » se déploie. L'« intégrale du produit scalaire » (l'interprétation fournie au bout du compte) traduit cette situation.

Sans doute, en droit, est-il plus raisonnable, dans certaines circonstances, de penser en termes de somme discrète plutôt que continue. (On l'a vu chez Hobbes si on somme les individus plutôt que les talents) Il faut imaginer, au cours d'une période donnée, une accumulation de bouts d'interprétation dont l'ensemble constituerait l'interprétation d'ensemble avancée par un tel pouvoir de telle disposition constitutionnelle (voir par ex. la jurisprudence qu'une cour constitutionnelle entend développer le long des années sur une étendue d'interprétation AB). Dans ce cas, on écrirait $W_{AB} = \sum dW_i$ avec $dW_i = \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{l}_i = F \cdot d\mathbf{l}_i \cdot \cos(\mathbf{F}, d\mathbf{l}_i)$.¹ (W_{AB} est toujours un scalaire, un réel.

¹ http://thierry.col2.free.fr/restreint/exovideo_lycee/resum/15_energie_meca1.html.

Annexe I

droite des moindres carrés et dérivées partielles

Soit à nouveau la droite $y=mx + b$ (avec m la pente ou le coefficient directeur de la droite). Il convient de considérer, on l'a vu, la somme des carrés des erreurs (SCE) par rapport à la droite estimée, soit $SCE = \text{erreur } \varepsilon_1 + \text{erreur } \varepsilon_2 + \dots + \text{erreur } \varepsilon_n$, i.e. $SCE = (y_1 - (mx_1+b))^2 + (y_2 - (mx_2+b))^2 + \dots + (y_n - (mx_n+b))^2$. En minimisant SCE, on minimise la somme des erreurs elles-mêmes pour trouver la droite qui ajuste au mieux le nuage de points. Ce faisant, **on raisonne sans le dire en dérivée partielle**.

Vérifions-le en essayant de déterminer m et b dans la somme des erreurs par rapport à la droite estimée.

$SCE = (y_1 - (mx_1+b))^2 + (y_2 - (mx_2+b))^2 + (y_3 - (mx_3+b))^2 + \dots + (y_n - (mx_n+b))^2 = (y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2) - 2m(y_1x_1 + y_2x_2 + \dots + y_nx_n) - 2b(y_1 + y_2 + \dots + y_n) + m^2(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) + 2mb(x_1 + x_2 + \dots + x_n) + nb^2$. En faisant la moyenne de chaque parenthèse comme par ex. $\bar{y} = (y_1 + y_2 + \dots + y_n)/n$ donnant $y_1 + y_2 + \dots + y_n = n\bar{y}$, on obtient $SCE = n\bar{y}^2 - 2mn\bar{x}\bar{y} - 2bn\bar{y} + m^2n\bar{x}^2 + 2mbn\bar{x} + nb^2$. C'est cette somme qu'il convient de minimiser en cherchant les deux valeurs de m et de b à cette fin, sachant que m et b sont les seules variables, x et y étant ici des données). En conséquence, cette expression simplifiée va représenter une surface à 3 dimensions (m , b , SCE). Voir fig infra.

Quel est le point le plus faible ou la valeur minimale de cette surface ?

Il s'agit précisément d'effectuer un calcul différentiel à plusieurs variables dans lequel il convient de trouver **les dérivées partielles par rapport à m et b** . On va rendre nulles ces deux dérivées en cherchant les points m et b qui les annulent : $\partial SCE/\partial m = 0$ et $\partial SCE/\partial b = 0$.

Quand on dérive par rapport à une variable (par ex. m), on suppose que l'autre (b) est constante, et inversement (par ex. b , et l'autre m). Autrement dit, dans chaque cas, on réduit l'expression SCE à une fonction à une variable. L'extremum est atteint quand chaque dérivée partielle s'annule.¹

Tous les points sur la surface représentent des droites a priori candidates pour ajuster au mieux les données. En annulant les deux **dérivées partielles**, $\partial SCE/\partial m = 0$ et $\partial SCE/\partial b = 0$, on doit trouver le minimum de cette surface en déterminant les valeurs de m et de b pour lesquelles la SCR est minimale, mais que signifie géométriquement une dérivée partielle nulle ?

$\partial SCE/\partial m = 0$ signifie que la tangente au point minimum dans la direction de la variable m est horizontale (l'autre variable b étant constante).

$\partial SCE/\partial b = 0$ signifie qu'au même point la tangente dans la direction de b est aussi horizontale (m étant constant).

Finalement, au point minimal de la surface, on doit avoir un plan tangent formé par deux vecteurs tangents (en vert), parallèle au plan dessiné par les axes de coordonnées (m , b)

En repartant de $SCE = n\bar{y}^2 - 2mn\bar{x}\bar{y} - 2bn\bar{y} + m^2n\bar{x}^2 + 2mbn\bar{x} + nb^2$, et en dérivant par rapport à m puis b , on a :

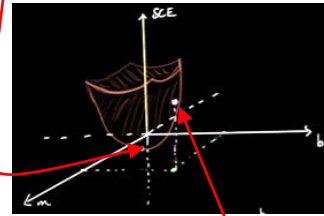
$$\partial SCE/\partial m \text{ (en considérant } b \text{ constant, et } x, y \text{ et } n \text{ donnés)} = -2n\bar{x}\bar{y} + 2mn\bar{x}^2 + 2bn\bar{x} = 0$$

$$\partial SCE/\partial b \text{ (en considérant } m \text{ constant, et } x, y \text{ et } n \text{ donnés)} = -2n\bar{y} + 2mn\bar{x} + 2bn = 0$$

On a réussi à mettre en place un système de deux équations à deux inconnues (m et b) que l'on peut résoudre par des méthodes classiques d'algèbre datant de l'âge des Lumières. Ce système s'écrit, en divisant par 2 et par n chaque équation

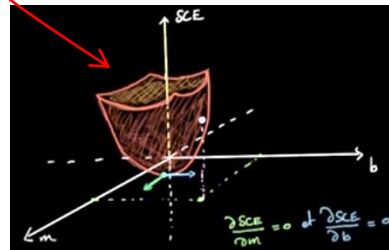
$$\begin{cases} -\bar{x}\bar{y} + m\bar{x}^2 + b\bar{x} = \bar{x}\bar{y} \\ -\bar{y} + m\bar{x} + b = \bar{y} \end{cases} \text{ (forme qui rappelle l'équation } y = mx+b, \text{ ce qui signifie que le point,} \\ \text{disons } G, \text{ de coordonnées } (\bar{x}, \bar{y}), \text{ i.e. les moyennes des deux séries de } x \text{ et de } y, \text{ appartient à la droite d'ajustement). Cette} \\ \text{information nous indique que la droite des moindres carrés doit passer par le point moyen } G(\bar{x}, \bar{y}), \text{ i.e. le point qui a pour} \\ \text{coordonnées les deux moyennes, ce qui se comprend intuitivement. Cette droite minimise les carrés des erreurs.}$$

minimum



une valeur de la SCE pour des valeurs particulières de m et de b

intérieur de la surface
qui ne nous intéresse pas en l'espèce



¹ Droite des moindres carrés, Khan academy (part 1 à 4), <https://www.youtube.com>.

Pour tracer la droite, il nous faut un 2^e point que fournit la 1^{re} équation divisée par \bar{x} , soit : $m (\bar{x}^2/\bar{x}) + b = \overline{xy}/\bar{x}$, d'où le 2^e point de coordonnées $(\bar{x}^2/\bar{x}, \overline{xy}/\bar{x})$. Ce point appartient aussi à la droite des moindres carrés. On n'a pas encore déterminé l'équation de la droite des moindres carrés, car on n'a pas encore les valeurs de m et de b qui minimisent la somme des moindres carrés, mais on a déjà trouvé deux points qui appartiennent à cette droite, ce qui est déjà un gros pas.

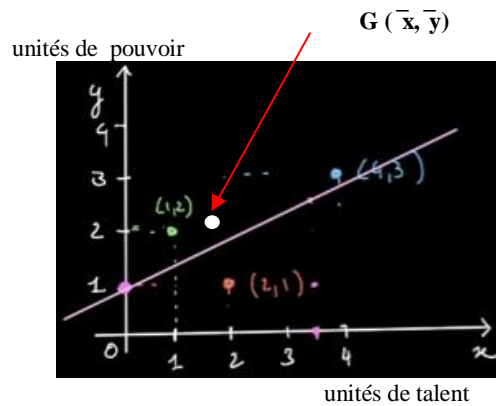
L'étape finale consistera à trouver les valeurs de m et de b, soit en résolvant le système de deux équations à deux inconnues et à trouver une expression de m et de b, soit trouver l'expression de la droite qui passe par ces deux points.

Soit donc
$$\begin{cases} m\bar{x}^2 + b\bar{x} = \overline{xy}/\bar{x} \text{ ou, en remplaçant la 1}^{\text{re}} \text{ équation par la 1}^{\text{re}} - \text{la 2}^{\text{de}} : \\ m\bar{x} + b = \bar{y} \end{cases} \begin{cases} m(\bar{x}^2/\bar{x} - \bar{x}) = (\overline{xy}/\bar{x}) - \bar{y} \\ m\bar{x} + b = \bar{y} \end{cases}$$

En isolant m dans la 1^{re} équation et en multipliant le rapport obtenu par \bar{x}/\bar{x} , on trouve : $m = (\overline{xy} - \bar{y}\bar{x})/(\bar{x}^2 - (\bar{x})^2)$ et $b = \bar{y} - m\bar{x}$. Tels sont les paramètres de la droite des moindres carrés : sa pente, m, et son ordonnée à l'origine, b.

Illustration (en reprenant la relation supposée simple entre le pouvoir et le talent)

Soit un nuage comprenant seulement trois points : ((1,2), (2,3) et (4,3), sachant que **(1,2) par ex. signifie 1 unité de talent pour réussir et 2 unités de pouvoir d'agir**. On peut au jugé deviner par où peut passer la droite des moindres carrés, mais ici on va trouver exactement la droite qui minimise les carrés des écarts par rapport aux données.



(Calcul de m) \bar{x} (moyenne des x) = (1+2+3)/3 = 7/3 ; \bar{y} (moyenne des y) = 2 ; \overline{xy} (moyenne des produits de xy) = (1.2 + 2.1 + 4.3)/3 = 16/3 ; \bar{x}^2 (moyenne des x au carré) = (1² + 2² + 4²)/3 = 7, d'où $m = (16/3 - (7/3).2)/(7 - (7/3)^2) = 3/7$ (pente de la droite)

(Calcul de b) $b = \bar{y} - m\bar{x} = 2 - (3/7).(7/3) = 1$, d'où l'équation de la droite des moindres carrés : $y = 3/7 x + 1$. Quand le talent augmente de 7 unités, le pouvoir augmente de 3 unités, ou si le talent croît de +7/2 = 3,5, le pouvoir croît de 3/2 = 1,5 + 1 (l'ordonnée à l'origine) = 2,5

Les unités de talent x et celles de pouvoir y ne sont pas nécessairement égales. Elles ne sont pas comparables.

Annexe II

La notion de « déterminant » à l'âge des Lumières

Le terme « déterminant » a été introduit à la fin du XVIII^e siècle en théorie des nombres (Lagrange, Gauss).

Peut-on, comme pour les objets géométriques, parler de la forme d'un nombre ? Comment la déterminer ? Prenons les nombres n de la forme, dite quadratique, $n = ax^2 + 2bxy + cy^2$; on montre que la quantité $b^2 - ac$ détermine la forme du nombre : cette quantité est le déterminant de la forme.

En parcourant l'histoire de la notion de déterminant, on apprend par exemple que Cauchy introduit en 1815 (mémoire publié en 1827) le déterminant :

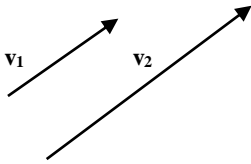
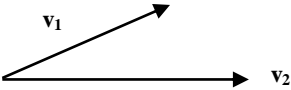
$$\begin{vmatrix} \frac{\partial a}{\partial x} & \frac{\partial a}{\partial y} & \frac{\partial a}{\partial z} \\ \frac{\partial b}{\partial x} & \frac{\partial b}{\partial y} & \frac{\partial b}{\partial z} \\ \frac{\partial c}{\partial x} & \frac{\partial c}{\partial y} & \frac{\partial c}{\partial z} \end{vmatrix}$$

← dérivées premières de a

en voulant calculer le volume occupé par une molécule tétraédrique lorsque les positions des sommets a, b, c varient en fonction des coordonnées x, y, z. Cauchy calcule le déterminant en utilisant la règle introduite plus tard par Sarrus.¹

¹ Claude-Paul Bruter, *Comprendre les mathématiques. Les dix notions fondamentales*, Odile Jacob, Paris, 1996, pp.120-121

Annexe III

vecteurs libres, vecteurs liés	
libres \iff volume $\neq 0 \iff$ det $\neq 0$.	
liés \iff volume = 0 \iff det = 0.	
 <p style="text-align: center;"><i>deux vecteurs liés</i></p>	<p>Deux vecteurs \mathbf{v}_1 et \mathbf{v}_2 sont liés lorsqu'ils sont colinéaires ou proportionnels ($\mathbf{v}_2 = k \mathbf{v}_1$ avec k réel, l'un des vecteurs peut s'exprimer en fonction de l'autre).</p> <p>On ne parle pas de colinéarité en présence de plus de deux vecteurs. On parle plutôt de famille liée parce que trois vecteurs ne sont pas nécessairement deux à deux colinéaires.</p>
 <p style="text-align: center;"><i>deux vecteurs libres</i></p>	<p>Trois vecteurs $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ sont dits liés s'il existe une combinaison linéaire non triviale de ces vecteurs égale au vecteur $\mathbf{0}$ (le zéro doit être écrit en gras), soit</p> $a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2 + c\mathbf{v}_3 = \mathbf{0},$ <p>les coefficients réels a, b et c n'étant pas simultanément nuls.</p> <p>Ici encore, l'un des trois vecteurs peut être exprimé en fonction des deux autres.</p>

Annexe IV

Deux méthodes pour calculer le « produit scalaire »	
Soient deux vecteurs \mathbf{u} et \mathbf{v} . Que faut-il respecter en science selon ces deux méthodes ?	
la méthode des coordonnées	la méthode algébrique
$\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ et } \vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ $\vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ $= x \cdot x' + y \cdot y'$ <p>et non pas :</p> $\begin{pmatrix} xx' \\ yy' \end{pmatrix}$ <p>car ceci est un nouveau vecteur et non un nombre (un réel)</p>	$\vec{u} \cdot \vec{v} = \ \vec{u}\ \cdot \ \vec{v}\ \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v})$ <p>i.e le produit des normes (des distances) par le cosinus de l'angle entre les vecteurs \mathbf{u} et \mathbf{v}, soit θ</p> <p>le résultat est toujours un scalaire qui possède les propriétés suivantes :</p> <ul style="list-style-type: none"> - commutatif, car $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$ - si $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ ou $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, alors $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$ (le scalaire est nul) - $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u}^2 = \ \mathbf{u}\ ^2$ (on voit le lien entre un scalaire $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ et une norme qui n'est rien d'autre qu'une distance) - distributif, car $\mathbf{u}(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$ et $k(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = k\mathbf{v} + k\mathbf{w}$, ces formules s'appliquant quelle que soit la méthode utilisée

4/ Le partage de l'interprétation constitutionnelle

a) Un malentendu au départ

b) Retour sur la théorie des jeux

- i Les stratégies d'interprétation. ii Additionner en droit constitutionnel ?
iii Sur la marche aléatoire. iv Le postulat de la maximisation en question*

c) Réapparition du triangle équilatéral

- i Dynamique au sein du triangle équilatéral. ii La signification des chiffres d'utilité*

5/ Les gains de pouvoir et les alliances

a) Fondement de la comptabilité des utilités

- i Une conséquence du principe d'autoconservation individuelle
ii Mise en rapport des utilités de différentes interprétations
iii L'ineffectivité des butées constitutionnelles en cas de collusion*

b) Triangle équilatéral et coalitions

- i Solution de Nash et valeur de Shapley*

Soient donc trois « bandits de grand chemin » que nous appelons le Bon, la Brute et le Truand, en souvenir d'un célèbre film de western de Sergio Leone. Notre modèle est caricatural à dessein.¹

Le Bon, la Brute et le Truand négocient le partage d'un butin provenant de leur future coopération. Chacun a l'opportunité de « faire un coup » seul qui lui rapporte en moyenne 1 (ou valeur de coalition 1). Il s'agit d'un gain espéré que chaque joueur considère comme son utilité de réserve, à défaut d'avoir plus. L'association des trois bandits leur permet un coup plus tordu (et plus « juteux ») rapportant en moyenne 6 (un gain moyen est une « espérance » de gain, là encore). Le butin comprend des pièces d'or. Les utilités des joueurs sont donc transférables d'un joueur à l'autre en raison d'un étalon commun.

(Dans le film, le trésor est caché dans une tombe d'un cimetière quelque part dans l'Ouest américain. Chaque joueur ne possède qu'une partie de l'information. Tous ont besoin plus ou moins des autres pour localiser le trésor. La coalition entre eux, ou une partie d'entre eux, s'avère donc nécessaire.)

Le jeu de nos bandits (si on peut parler de jeu car il comporte un risque de mort d'homme ou de torture) est un jeu à somme nulle ou constante. Ce que l'un d'eux gagne se fait nécessairement au détriment au moins de l'un des deux autres (le nombre des pièces d'or est compté). Ce que gagne une coalition se fait nécessairement au détriment du joueur resté en dehors ou voulant rejoindre une autre coalition.

Soit v la valeur de la coalition. $v(\{Bo\})$ représente la valeur du fruit de la coalition de l'association du Bon avec lui-même (ou utilité de réserve dans la négociation avec les autres). $v(\{Bo, Br, Tr\})$ représente la valeur du fruit de l'association des trois bandits. Voici, rassemblées, ces valeurs respectives :

$$\begin{aligned} v(\{Bo\}) = 1 & \quad v(\{Br\}) = 1 & \quad v(\{Tr\}) = 1 \\ v(\{Bo, Br, Tr\}) = 6 & \end{aligned}$$

An n-person game can be defined by listing the value v to each of its coalitions. This listing is called the 'characteristic function' of the game. (Anatol Rapoport, « Three-and-Four-Person Games, Comparative Group Studies, op. cit., p.195).

¹ Nous reprenons les exemples du cours dispensé par nous-mêmes et Benjamin Carton à Sciences Po Paris à l'adresse des entreprises, année 1998 et suivantes intitulé du cours : *La négociation à la lumière de la théorie des jeux*. Pour une référence plus accessible, voir notamment H. Raiffa, with J. Richardson and D. Metcalfe, *Negotiation Analysis*, op. cit., ch.23 : Coalitions.

Plus savamment, *characteristic function form game* is given by a pair (N, v) where $N = \{1, 2, \dots, n\}$ is a set of players and v is a real-valued function on the set of all subsets of N , called a *characteristic function*. A subset of N is called a *coalition*. The set N is called the *grand coalition*. For each coalition S , represents the worth achievable by S , independent of players in the complement $N \setminus S$. For the empty set ϕ , we let $v(\phi) = 0$. (Shigeo Muto, « Optimization and Operations Research », Tokyo Institute of Technology, Vol. III, TU Games, p.217). Nous désignons les sous-ensembles (*subsets*) par $\{\dots\}$

Ce n'est pas un hasard si la valeur de la coalition est au moins égale à la simple somme des utilités de réserve des joueurs. Les conditions de formation d'une coalition dépendent beaucoup plus de la valeur ajoutée apportée par les joueurs qui la composent que de leur valeur lorsqu'ils sont isolés (hypothèse dite de suradditivité).¹ Il n'y aurait sinon aucun intérêt (*incentive*) pour eux de se coaliser, mais ils ne peuvent ensemble obtenir plus que les ressources disponibles présentes (*frontière* dite de Pareto).

(§34
3/-ii)

Les trois bandits doivent s'entendre sur les gains respectifs x_{Bo} , x_{Br} , x_{Tr} du Bon, de la Brute et du Truand. Un partage possible est la « solution de Nash » (à ne pas confondre avec « l'équilibre de Nash » en théorie des jeux non coopératifs que nous avons présentée lors du passage de l'état de nature à l'état de société chez Hobbes). Cette solution revient à maximiser le produit des écarts à l'utilité de réserve

$$(x_{Bo} - v(\{Bo\}))(x_{Br} - v(\{Br\}))(x_{Tr} - v(\{Tr\})) = (x_{Bo} - 1)(x_{Br} - 1)(x_{Tr} - 1)$$

sous la contrainte que le total des gains de chacun ne dépasse pas la valeur du butin (frontière des possibles) : $x_{Bo} + x_{Br} + x_{Tr} \leq v(\{Bo, Br, Tr\}) = 6$. (Voir en *Annexe III* la raison d'un tel produit des écarts.) La solution de Nash revient à partager le surplus en parts égales. Avec les valeurs particulières du jeu :

- chaque joueur obtient, à lui seul, 1 ;
- le surplus est 6-3, soit 1 pour chacun ;
- le partage final est alors : $x_{Bo} = x_{Br} = x_{Tr} = 2$

(Annexe V)

So far, so good, mais le Bon fait monter les enchères. (*Le meneur de jeu rompt la symétrie.*) Il a un coup en solo qui lui rapporte plus gros :

$$\boxed{v(\{Bo\})=2} \quad v(\{Br\}) = 1 \quad v(\{Tr\}) = 1 \\ v(\{Bo, Br, Tr\}) = 6$$

Le Bon a une meilleure utilité de réserve (2 au lieu de 1). On maximise à nouveau le produit des écarts :

$$\boxed{(x_{Bo} - v(\{Bo\}))(x_{Br} - v(\{Br\}))(x_{Tr} - v(\{Tr\})) = (x_{Bo} - 2)(x_{Br} - 1)(x_{Tr} - 1)}$$

Sous ces nouvelles conditions, le surplus à partager est 6-4 = 2, soit 2/3 chacun. Le partage du butin penche lourdement du côté du Bon : $x_{Bo} = 2 + 2/3 = 8/3$; $x_{Br} = x_{Tr} = 1 + 2/3 = 5/3$.

Face à ce chantage du Bon, la Brute et le Truand trouvent une parade : *faisons le coup à deux, en se passant du Bon...* On tient compte désormais de **la valeur des associations intermédiaires**, et pas seulement la valeur de « la grande coalition » (celle qui regroupe tous les joueurs, de valeur 6) :

$$\boxed{v(\{Bo\})=2} \quad v(\{Br\}) = 1 \quad v(\{Tr\}) = 1 \\ v(\{Bo, Br\}) = 3 \quad \boxed{v(\{Br, Tr\}) = 4} \quad v(\{Tr, Bo\}) = 3 \\ v(\{Bo, Br, Tr\}) = 6$$

¹ A characteristic function v is called **superadditive** if for all $S, T \subseteq N$ with $S \cap T = \phi$. The superadditivity means that two disjoint coalitions gain more by unifying into one coalition. Thus if a characteristic function is superadditive, then disjoint coalitions would merge to get more, and eventually a grand coalition would be formed. Furthermore, characteristic functions arising from real game situations usually satisfy superadditivity. Therefore, in characteristic function form games it has been usually assumed that a grand coalition N is formed. The primary concern is thus how to divide the worth $v(N)$ among players $1, \dots, n$. (S. Muto, « Optimization and Operations Research », op. cit., *ibid.*).

Malgré cette nouvelle donne qui avantage davantage la Brute et le Truand, la solution de Nash maximise toujours de la même façon :

$$\frac{(x_{Bo} - v(\{Bo\}))(x_{Br} - v(\{Br\}))(x_{Tr} - v(\{Tr\}))}{(x_{Bo} - 2)(x_{Br} - 1)(x_{Tr} - 1)} =$$

car elle ne prend en compte que les utilités de réserve individuelles. Faute d'introduire les gains des coalitions intermédiaires, les gains obtenus restent les mêmes : $x_{Bo} = 8/3$; $x_{Br} = 5/3$; $x_{Tr} = 5/3$.

Le partage est identique. La Brute et le Truand obtiennent 10/3 à deux alors que leur alliance - sans le Bon - leur apporte 2/3 !

La solution de Nash, généralisée à n joueurs, ignore les associations qui excluent un des bandits. Elle ne connaît que des individus isolés comme dans les théories de Hobbes, de Locke et de Rousseau : le pouvoir de négociation n'est reconnu qu'aux individus. Pourtant, ces « coalitions intermédiaires » peuvent représenter **des points de menace** aussi forts que la menace de déviation unilatérale de chacun des bandits, évaluée par son utilité de réserve. Une solution avec des sous-coalitions s'impose.

Contemporain de Nash, Shapley a proposé au XX^e siècle une solution concurrente qui intègre les coalitions intermédiaires.¹ Il a imaginé une procédure consistant à construire pas à pas ces coalitions. Au départ, personne n'a l'idée de faire le coup. Un premier bandit pense le faire seul (soit le Bon, soit la Brute, soit le Truand) ; il est suivi par un second ; enfin, le troisième les rejoint. A chaque étape, le bandit qui rallie le groupe gagne exactement ce que sa participation ajoute au pot commun.

Nous reprenons les valeurs de coalition suivantes, comprenant une utilité de réserve individuelle différente et une coalition intermédiaire :

$$\begin{array}{l} \boxed{v(\{Bo\})=2} \quad v(\{Br\}) = 1 \quad v(\{Tr\}) = 1 \\ v(\{Bo, Br\}) = 3 \quad \boxed{v(\{Br, Tr\})=4} \quad v(\{Tr, Bo\}) = 3 \\ v(\{Bo, Br, Tr\}) = 6 \end{array}$$

Voici le résultat du calcul de la « valeur de Shapley », ϕ , c'est-à-dire la valeur ajoutée par la contribution des joueurs à une coalition prenant en compte leurs interactions en supposant connus le résultat du groupe ainsi que celui de tous les sous-groupes que les joueurs constituent entre eux. La contribution ajoutée ou « marginale » d'un joueur à une coalition est l'augmentation de la valeur de la coalition provoquée par son arrivée. Plus exactement, la valeur de Shapley est la contribution marginale moyenne d'un agent à une coalition. En l'espèce, chacune de ces contributions sont les suivantes :

Ordre d'arrivée	Gain marginal de chaque bandit		
	le Bon	la Brute	le Truand
Bo-Br-Tr	2	1	3
Bo-Tr-Br	2	3	1
Br-Bo-Tr	2	1	3
Br-Tr-Bo	2	1	3
Tr-Bo-Br	2	3	1
Tr-Br-Bo	2	3	1
moyenne	2	2	2

A chaque étape, le bandit qui rallie le groupe gagne exactement ce que sa participation ajoute au pot commun

Calcul de la 1^{re} ligne, soit Bo-Br-Tr : le Bon arrive le 1^{er} : il apporte sa valeur ajoutée 2 ; la Brute arrive en second avec une valeur ajoutée de 1 ; donc, le Truand apportera 6 (valeur du groupe entier) – (2+1) = 3. Calcul de la 2^{de} ligne, soit Bo- Tr- Br : le Truand arrive cette fois en second : il apporte sa valeur ajoutée 3 ; la Brute arrive en dernier avec une valeur de 6 - (2+3) = 1. Etc. En l'espèce, la contribution moyenne ajoutée de chaque joueur par colonne à la coalition est 2 ; chacun reçoit donc un nombre égal de pièces d'or, mais ce ne serait pas nécessairement le cas avec d'autres valeurs particulières.

¹ Ph. Straffin, *Game Theory and Strategy*, op. cit., pp.171-176.

La valeur de Shapley démontre que les solutions de repli de chaque bandit ne se réduisent pas à jouer solitaire en se satisfaisant de son utilité de réserve. La valeur de Shapley considère toutes les coalitions intermédiaires comme de nouvelles solutions de repli sur lesquelles les bandits peuvent s'appuyer pour réclamer leur part du butin. Dans l'exemple, aucun bandit ne peut tirer avantage de la valeur de Shapley

Quittons un moment nos bandits pour montrer des valeurs de Shapley φ différentes en reprenant un exercice de la littérature à ce sujet. Nous abandonnons nos « amis » pour un autre type d'affaires...

Soient trois actionnaires A, B et C. A d'une même société. A contrôle 50 %, B, 49%, et C 1%. Ils doivent diviser un dividende d'un dollar. Selon les statuts, A devrait recevoir 0,5 dollar, B, 0,49 et C 0,1 dollar. Cependant, la décision de diviser le dividende a été adoptée à la majorité des votes. Des coalitions sont inévitables. Il y a six façons d'entrer dans une coalition selon l'ordre d'arrivée :

ABC, BCA, CAB, CBA, BAC, ACB.

Aucun joueur n'a la majorité. Cependant, les coalitions (AB) et (AC) forment une majorité puisque chacune contrôle plus de 50 % du dividende (AB avec 50% + 49%, et AC avec 50% + 1%). Selon le procédé supra indiqué, le calcul des valeurs de Shapley donne $\frac{66}{3}$ pour A, $\frac{16}{3}$ pour B et $\frac{16}{3}$ pour C. Ces valeurs sont différentes. Elles reflètent, non les proportions du dividende détenues par les actionnaires A, B, C, mais leur pouvoir de vote véritable. En effet, dans 4 cas sur 6, A joue le rôle de **pivot**. Il peut faire basculer la majorité d'une coalition à l'autre en s'associant soit avec B soit avec C, et parvenir chaque fois à 50%). B est le pivot dans un seul cas. C également.¹

Ainsi, quand en moyenne un bandit augmente fortement la valeur du butin en ralliant une coalition, il obtient une part importante du butin total. Son pouvoir de négociation se mesure par son aptitude à prendre en compte toutes les possibilités d'alliance avec l'un ou l'autre bandit. En considérant la valeur de Shapley, son pouvoir s'élargit. Il dépend moins de ce que le bandit seul apporte dans une coalition. Le bandit a le pouvoir de monnayer son appui.

Dans une négociation à plusieurs, le pouvoir d'un joueur réside dans celui de participer au plus grand nombre d'alliances qui se forment en pointillé (il existe un flou avant qu'elles ne se forment). Etre au centre potentiel de toutes les coalitions alternatives est le rêve. Le bandit, qui l'occupe, a effectivement une position de pivot. Il est incontournable. Il peut jouer une alliance contre une autre, passer de l'une à l'autre en faisant perdre celle qui quitte et gagner celle qu'il rejoint. Il peut, cependant, n'être pivot que pour certaines alliances, et un autre joueur l'être moins dans d'autres.

ii Est-ce la fin de l'histoire ?

Pas nécessairement ... car il y a parfois du regret à quitter le groupe et à abandonner un joueur en chemin. Le mécanisme de Shapley peut à nouveau le laisser entrevoir ! Imaginons le jeu subtil suivant :

$$\begin{array}{lll} v(\{Bo\}) = 1 & v(\{Br\}) = 0 & v(\{Tr\}) = 0 \\ v(\{Bo, Br\}) = 2 & v(\{Br, Tr\}) = 1 & v(\{Tr, Bo\}) = 1 \\ & v(\{Bo, Br, Tr\}) = 2 & \end{array}$$

Lorsque le Truand rejoint la Brute, il apporte 1 à la coalition. Lorsqu'il rejoint, soit le Bon, soit la coalition formée par le Bon et la Brute, $v(\{Bo, Br, Tr\}) = 2$, il n'apporte rien du tout. En moyenne de Shapley, le Truand n'apporte pas grand-chose ($\frac{1}{6}$ ici), mais le Bon et la Brute ne sont pas prêts à lui accorder. Au vu de la valeur de leur propre coalition intermédiaire, $v(\{Bo, Br\}) = 2$, ils décident de se passer de lui (le Truand) et de se partager 2, car, avec le Truand, ils ne peuvent espérer en valeur de Shapley que $\frac{7}{6} + \frac{4}{6} = \frac{11}{6} < 2$. Ils envisagent donc une coalition (*they gang-up*) sans le Truand. Une fois le Truand écarté, la valeur de Shapley devient $\frac{3}{2}$ pour le Bon et $\frac{1}{2}$ pour la Brute. C'est payant !

¹ Anatol Rapoport, « Three-and-Four-Person Games, Comparative Group Studies, May 1971, p.201 [*The pivot is] the player who « swings » the majority ; that is, turns the coalition he joins into a majority coalition.* (ibid.)

C'est payant, du moins pour le Bon, car, à ce stade, la Brute, qui n'a qu'un $\frac{1}{2}$ en valeur de Shapley, se demande s'il a fait vraiment une bonne affaire en se privant du soutien du Truand. En réfléchissant, la Brute entrevoit encore pour elle encore deux options : elle peut soit préférer le partage du butin à trois, soit faire monter les enchères pour se trouver un meilleur allié et être mieux rétribuée.

1^{re} option. La Brute peut préférer le partage du butin à trois, i.e. celui de la grande coalition dont la valeur $v(\{Bo, Br, Tr\}) = 2$. Cette option lui assure un gain de $\frac{2}{3}$ ou $\frac{4}{6} > \frac{1}{2}$, sauf si le Bon s'engage, de façon crédible, à lui octroyer au moins ce qu'il pouvait espérer si le Truand était resté, soit au moins $\frac{4}{6}$. (L'idée de *crédibilité* emporte l'idée de contrainte réelle, pesant sur l'engagement ; la promesse en l'air d'un joueur ne suffit pas. Aucun joueur ne peut, de par sa seule volonté, remettre en cause la décision prise en commun. Ici, la crédibilité emporte sanction comme en droit constitutionnel.)

2^e option. La Brute peut préférer faire monter les enchères pour débaucher un des bandits en tentant une association, soit avec le Bon, soit avec le Truand :

- avec le Bon, l'affaire rapporte 2 (car $v(\{Bo, Br\}) = 2$), et il peut en obtenir entre 0 et 1 ;
- avec le Truand, i.e. $(\{Br, Tr\})$, l'affaire ne rapporte que 1, mais il peut aussi obtenir entre 0 et 1.

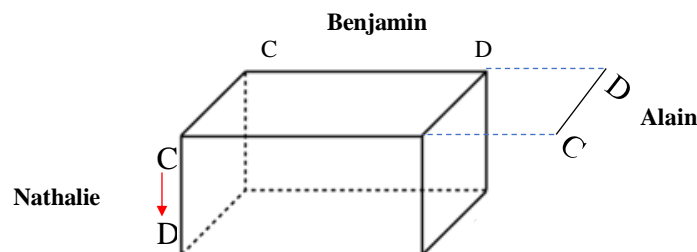
Cette option est aussi jouable que la 1^{re} pour la Brute, car, de leur côté, le Bon et le Truand ne sont pas en mesure de mettre en concurrence l'offre que leur fait la Brute. Sans elle, le Bon ne peut espérer plus de 1 (même en s'alliant avec le Truand, car $v(\{Tr, Bo\}) = 1$). Sans elle, le Truand ne peut espérer plus de 0 (même en s'alliant avec le Bon, car $v(\{Tr, Bo\}) = 1$)

Ayant le monopole de mise en concurrence des coalitions, la Brute peut négocier une part importante du butin comme un autre bandit pouvait le faire via la valeur de Shapley. Cependant, on n'est plus en présence d'un joueur qui fait jouer sa position de pivot comme en Shapley, mais d'un joueur qui joue une coalition contre l'autre (*he plays one off against the other*). Chacun choisit, dans son intérêt, la meilleure offre entre les différentes alliances à sa disposition. Ce n'est plus un joueur qui bloque par sa position ; c'est une coalition, si des opportunités extérieures se présentent à qui veut faire sécession.

- La conclusion est fort pessimiste comme vous l'annonciez. A vous entendre, le processus est inexorable. Peut-être n'est-ce pas le cas lorsque le jeu n'est pas à somme nulle ou constante ?

Vous oubliez une idée que vous avez-vous-même rappelée : celle de col ou point-selle, qui évoque un équilibre ! N'y aurait-il donc pas aussi un ou plusieurs point-selles lorsque, dans une grande coalition, des joueurs forment des coalitions ? Si tel est le cas, ne peut-on espérer une certaine stabilisation de la situation, que ce soit dans un jeu à somme nulle (strictement non coopératif) ou un jeu à somme non nulle n'excluant pas un surplus à partager ?

- Je ne le crois pas, mais testons votre idée en recourant à la représentation matricielle. Supposons trois joueurs, Alain, Benjamin et Nathalie, disposant de deux stratégies C et D chacun. La figure spatiale d'un jeu à 3 joueurs serait normalement un parallélépipède rectangle comme l'illustre le diagramme :



Ce diagramme est en réalité en mouvement, les flèches partent d'un sommet à l'autre, car les trois joueurs abandonnent les stratégies dominées au profit des dominantes qui procurent plus d'utilité (par ex., passage de C à D pour le joueur Nathalie)

Le diagramme est clair, mais peu facile pour y faire figurer les utilités des stratégies et le mouvement entre elles. Il est plus simple de décomposer ce volume en deux matrices de deux dimensions :

		Alain C		Alain D	
		Benjamin		Benjamin	
		C	D	C	D
Nathalie	C	(1, 1, 1)	(0, 3, 0)	(0, 0, 3)	(-2, 2, 2)
	D	(3, 0, 0)	(2, 2, -2)	(2, -2, 2)	(-1, -1, -1)

Dans (1, 1, 1), le 1^{er} chiffre renvoie au gain de Nathalie, le second à celui de Benjamin, et le troisième à celui d'Alain¹

Le jeu n'est pas à somme nulle ou constante, sachant la somme des répartitions égale parfois 3 (par ex. : 1+1+1 = 3, ou 0+3+0 = 3+0+0 = 3), parfois 2 (par ex. : 2-2+2). (Si le jeu était à somme nulle ou constante, on aurait par ex. comme répartitions : (1,1, -2) ; (-4, 3,1) ; (3, -2,-1) ; (-6 ; -6, 12) ; etc.)

Ce jeu s'avère symétrique pour Alain, Benjamin et Nathalie. La stratégie D domine la stratégie C pour chacun : tous préfèrent choisir D à C. L'unique équilibre est DDD, soit (-1,-1-1) mais cet équilibre n'est pas le plus souhaitable car la répartition (1,1,1) apparaît meilleure pour les trois joueurs. Nous sommes en présence d'un dilemme du prisonnier à 3 joueurs, semblable au dilemme à 2 joueurs décrivant l'état de nature de Hobbes. Un tel dilemme produit un *équilibre de Nash suboptimal*.

(§34-ii)

(Dans la répartition (-1,-1,-1), le premier -1 est préféré par Nathalie à -2, figurant dans sa colonne de choix ; le second -1 est préféré par Benjamin à -2 dans sa ligne dans la même matrice, Alain D ; le troisième -1 est préféré par Alain à -2 dans sa ligne dans la matrice Alain C.)

La présence d'un 3^e joueur ouvre la possibilité de coalitions, par ex. celle entre Benjamin et Alain. Le jeu en est transformé de la façon suivante :

		Benjamin et Alain			
		CC	CD	DC	DD
Nathalie	C	(1, 2)	(0, 3)	(0, 3)	(-2, 4)
	D	(3, 0)	(2, 0)	(2, 0)	(-1, -2)

Dans le jeu de Nathalie, apparaît un col en DDD, car -1 est le minimum de sa ligne (3,2, 2,-1) et le maximum de sa colonne (-1, -2). Nathalie aura, en tout état de cause, -1 (*security level*). Dans le jeu de Benjamin et Alain en coalition, DCD et DDD sont des cols, car 0 est le maximum de leur ligne (0,0,0,-2) et le minimum de leur colonne (0,3). Par symétrie, les résultats sont les mêmes pour les autres coalitions potentielles, d'où les valeurs de coalition :

$$\begin{aligned}
 v(\{\phi\}, \text{la coalition vide}) &= 0 & v(\{\text{Nathalie}\}) &= v(\{\text{Benjamin}\}) = v(\{\text{Alain}\}) = -1 \\
 v(\{\text{Nathalie, Benjamin}\}) &= v(\{\text{Nathalie, Alain}\}) = v(\{\text{Benjamin, Alain}\}) &= 0 \\
 v(\{\text{Nathalie, Benjamin, Alain}\}) &= 3
 \end{aligned}$$

A première vue, il serait avantageux pour Benjamin et Alain de former une coalition à deux que de jouer chacun dans son coin. De même, il serait mieux pour chaque joueur d'entrer dans la grande coalition si chacun joue C, soit (1,1,1). Cependant, ces résultats sont illusoire. En effet, si Benjamin et Alain d'une part, et Nathalie d'autre part, jouent prudemment, Benjamin et Alain auront 0 garanti (leur *security level*), mais Nathalie ferait beaucoup mieux que son -1 garanti. Elle aurait 2. La coalition (Benjamin, Alain) n'a été pour eux d'aucune utilité s'ils espéraient diminuer l'utilité de Nathalie.

Ensemble, ils ne peuvent faire mieux chacun que 0 divisé par 2 ... s'ils avaient consenti de partager par moitiés leur gain. On voit ici que la valeur v (la *fonction caractéristique* qui associe un nombre à une coalition telle que l'avaient conçue Morgenstern & von Neumann) est trompeuse ou perd de son intérêt dans un jeu à n joueurs à somme non constante. Former, dans ces conditions, une coalition en espérant une situation avantageuse durable, grâce à la présence de cols, ne résout rien. Le fait déjà qu'il y ait déjà dans le jeu un équilibre de Nash suboptimal rend encore la chose plus improbable.

¹ L'exemple numérique est tiré de Ph. Straffin, *Game Theory and Strategy*, op. cit., pp.139-140.

c) Le « cœur » (core) d'un jeu de coalitions

i Les conditions de sa réalisation

Rien donc, dans un jeu à somme nulle ou constante où surgissent des coalitions, n'apparaît vraiment stable, à moins de trouver un accord qui réponde à la condition que le gain obtenu soit au-dessus des utilités de réserve de **tous** les joueurs et de **toutes** les coalitions intermédiaires. C'est la seule chose qui sied. Aucun joueur ni aucune sous-coalition ne préférera faire sécession par rapport à cet accord qui donne au moins à chacun une part égale à ce qu'il obtiendrait ailleurs. Dans le jeu coopératif subtil précédent, un accord aurait satisfait cette condition s'il avait été robuste :

- non seulement aux déviations individuelles : $x_{Bo} \geq 1$, $x_{Br} \geq 0$ et $x_{Tr} \geq 0$;
- mais aussi aux déviations de deux joueurs : $x_{Bo} + x_{Br} \geq 2$, $x_{Bo} + x_{Tr} \geq 1$ et $x_{Br} + x_{Tr} \geq 1$
- et ce, dans la limite de la frontière de Pareto: $x_{Bo} + x_{Br} + x_{Tr} \leq 2$ (frontière des gains possibles).

Comme $x_{Bo} + x_{Br} \geq 2$, le **Bon** et la **Brute** ne laissent rien au **Truand**. Le seul accord possible est : $x_{Bo} = x_{Br} = 1$; $x_{Tr} = 0$. C'est le point de partage (1,1,0), étant rappelé que la valeur de la grande coalition (celle de tous les joueurs) est en l'espèce $v(\{Bo, Br, Tr\}) = 2$. Aucune autre répartition (ou *imputation*, en anglais) ne peut mettre en cause cette dernière.¹ Cette situation caractérise le « cœur » en jeu coopératif à n -joueurs. Quand on y arrive, on ne débauche plus, ni joueur, ni coalition. On ne peut plus proposer quoi que ce soit à qui que soit qui trouverait que la trahison vaudrait la peine d'être tentée.

Comment visualiser un tel accord, une telle répartition qui ne peut être dominée par aucune autre ? On en revient à notre représentation barycentrique dans le cadre d'un triangle équilatéral dans lequel chaque point représente un accord possible entre les trois joueurs. Chaque point est un partage. La somme des trois hauteurs $x_{Bo} + x_{Br} + x_{Tr}$ est constante. Dans le jeu subtil, le **Bon** préfère les accords au nord, la **Brute** au sud-est et le **Truand** au sud-ouest. (fig.a) Dans cet exemple, la valeur de Shapley et le cœur sont indiquées approximativement (fig.b).

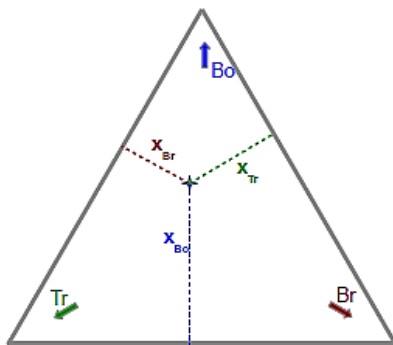


fig.a

La frontière de Pareto (le pourtour du triangle)

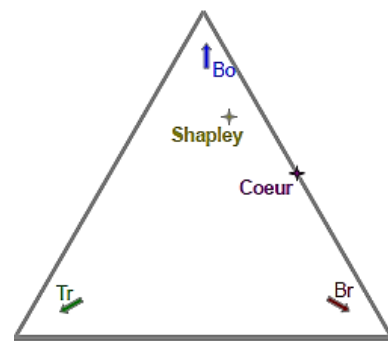


fig.b

Comparaison entre la valeur de Shapley et le cœur

fig.a : La frontière de Pareto est le pourtour du triangle ; au-delà, un butin plus grand n'est pas envisageable .

fig.b : La valeur de Shapley est le lieu où les coalitions intermédiaires sont des points de menace ; en l'espèce, la valeur de Shapley avantage fortement le **Bon**. Le cœur (core) représente le lieu où les coalitions intermédiaires ne sont plus des points de menace. **Le cœur rime avec l'idée de coalition stable**. Ici, il est plus favorable à la **Brute**.

Le théorème de Viviani (17 siècle), selon lequel la somme des trois hauteurs = la hauteur du triangle équilatéral, n'entraîne pas que, la somme $s = a+b+c$ soit une constante si a, b, c sont les distances aux sommets d'un point dans un triangle.. Il n'existe pas une telle invariance. Viviani était un collaborateur de Galilée.

Le « cœur » traduit le mot anglais *core*, signifiant noyau, *trognon*, comme un trognon de pomme qui exprime l'idée d'un reste.² Le mot suggère un noyau de résistance qui perdure après que toutes les opportunités de mise en concurrence des coalitions ont été exploitées. **Un processus de**

¹ An apportionment [partage, répartition] of payoffs among the members of the Grand Coalition is called an 'imputation'. (A. Rapoport., « Three-and-Four-Person Games, op. cit., p.204).

² A game has a **core** if there are imputations which is unprofitable for any subset of players to break away from the Grand Coalition. (A. Rapoport, p.205).

convergence semble achever. Cependant, le cœur est en fait une notion plus fragile que la valeur de Shapley parce qu'il n'est pas fréquent qu'un accord en vérifie toutes les conditions, notamment celles qui exigent que les solutions de repli des joueurs soient identiques. **Sans cœur, le jeu des alliances n'est pas résolu.**

Dans l'exemple du jeu subtil, le cœur se réduisait à un point, mais le cœur en fait n'est pas toujours unique : il peut être vide ou constitué d'un ensemble de points, chacun d'eux représentant une solution possible pour la Grande Coalition (celle qui résiste à toutes sortes de sous-coalitions).

*Ex. de cœur vide.*¹ Soient les valeurs de coalition suivantes obéissant toujours au postulat de rationalité de la théorie des jeux qui veut que chaque joueur s'efforce de maximiser son gain.²

$$\begin{aligned} x_1 \geq v(\{1\}) = 0, \quad x_2 \geq v(\{2\}) = 0, \quad x_3 \geq v(\{3\}) = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = v(\{1, 2, 3\}) = 1 \\ x_1 + x_2 \geq v(\{1, 2\}) = 1, \quad x_1 + x_3 \geq v(\{1, 3\}) = 1, \quad x_2 + x_3 \geq v(\{2, 3\}) = 1 \end{aligned}$$

En sommant les trois inégalités relatives aux valeurs des coalitions intermédiaires, nous obtenons : $x_1 + x_2 + x_3 \geq 3/2$, ce qui est contradictoire avec $x_1 + x_2 + x_3 = 1$. Par conséquent, le cœur est vide. Une illustration ? Le trésor recherché par nos trois brigands est finalement trouvé sous la forme de quatre valises. Deux porteurs suffisent pour les transporter. Il y a un porteur de trop et rien ne désigne lequel...³

*Ex. de cœur non vide.*⁴ Soient les valeurs de coalition :

$$\begin{aligned} x_1 \geq v(\{1\}) = 0, \quad x_2 \geq v(\{2\}) = 0, \quad x_3 \geq v(\{3\}) = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = v(\{1, 2, 3\}) = 20 \\ x_1 + x_2 \geq v(\{1, 2\}) = 6, \quad x_1 + x_3 \geq v(\{1, 3\}) = 0, \quad x_2 + x_3 \geq v(\{2, 3\}) = 8 \end{aligned}$$

Les trois inégalités représentent les contraintes qu'il faut respecter pour être dans le cœur (*core*). Géométriquement, les valeurs x_1, x_2, x_3 sont les coordonnées barycentriques du barycentre x . (*fig. a*) Le cœur est représenté par le pentagone *DEFG*. (*fig.b*) Le partage est situé dans cette zone assez large de points. La répartition (*imputation*) $x = (x_1, x_2, x_3)$, localisé sur *FE*, satisfait $x_2 + x_3 = v(\{2,3\}) = 8$ ou $x_1 = 20 - 8 = 12$. Le partage $x = (x_1, x_2, x_3)$ sur *DG* satisfait $x_1 + x_2 = v(\{1,2\}) = 6$ ou $x_3 = 20 - 6 = 14$.

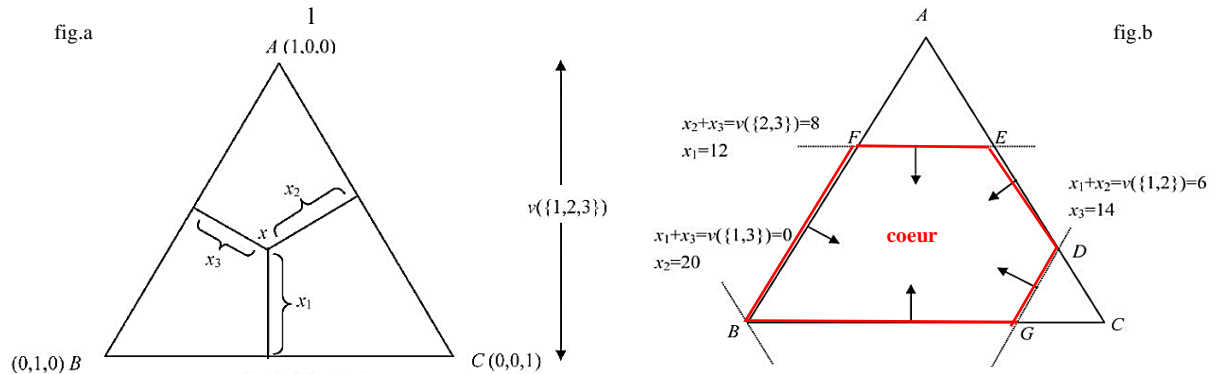
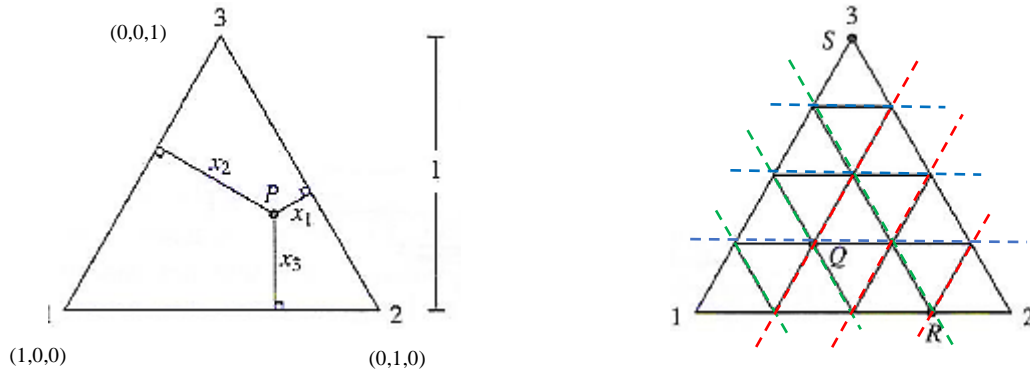


fig. a : Le point x représente le partage (x_1, x_2, x_3) .⁵ ; *fig.b* : le cœur (*core*) est formé d'un ensemble de solutions

Le lecteur désireux d'en voir une application en droit pourra se demander comment concrètement on peut repérer n'importe quel point dans le triangle équilatéral. Il peut deviner sur la *fig. supra* comment il faut procéder. Sur les deux autres figures infra, il verra une triangulation du triangle équilatéral

¹ Exemple numérique emprunté à S. Muto, « Optimization and Operations Research », op. cit., 220-221.
² A *rational player* is defined as one who makes his choices so as to maximize his payoff (at times the statistically expected payoff) in the outcome of the game [le résultat de la négociation]. Also he assumes that all of the other players are likewise rational. (A. Rapoport, p.192).
³ Pierre Dehez, *Théorie des jeux. Conflit, négociation, coopération et pouvoir*, Economica, Paris, 2017, p127.
⁴ Exemple numérique emprunté à S. Muto, « Optimization and Operations Research », op. cit., 220-221.
⁵ Theorem. Let P be any point in an equilateral triangle of height h . Then the sum of the distances from P to the three sides is equal to h . (Philip D. Straffin, *Game Theory and Strategy*, op.cit, p.151)

permise en traçant des parallèles à chaque côté du triangle qui vaut 0 (la 1^{re} parallèle à ce côté vaut 1/4 car on se rapproche du sommet opposé, la 2nde la moitié, la 3^e trois quarts et le sommet 1).



Par ex., sur la fig.b, le point S a pour localisation les coordonnées (0, 0,1), car la distance x_3 de la fig.a est maximale en ce point ($x_3 = 1$) et les distances x_2 et x_1 nulles. Le point Q a pour coordonnées $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ car

- $x_1 = \frac{1}{2}$ est situé à la moitié du chemin allant du côté opposé au sommet x_1 , valant $x_1 = 0$, à ce sommet valant $x_1 = 1$;
- $x_2 = \frac{1}{4}$, est situé au quart du chemin allant du côté opposé au sommet 2, où $x_2 = 0$, à ce sommet où $x_2 = 1$;
- et $x_3 = \frac{1}{4}$ est situé au quart du chemin allant du côté opposé au sommet 3, où $x_3 = 0$, à ce sommet où $x_3 = 1$.

Par le même procédé, on identifiera le point Q = $(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{1}{4})$ et tout autre point du triangle placé du moins au croisement des parallèles.¹

Notre lecteur demandera : vous supposez que la grande coalition rapporte 1. Mais, parmi vos exemples précédents, figurent d'autres valeurs quand tous coopèrent ensemble, par ex. $v(\{Bo, Br, Tr\}) = 6$ ou 2. Avec ces chiffres différents de 1, comment vous débrouillez-vous avec votre triangle de hauteur 1 ?

Cette différence n'est pas en effet rédhibitoire. Nous pouvons « normaliser » le résultat de la grande coalition N en amenant les valeurs $v(i)$ à 0 et en modifiant en conséquence les valeurs des coalitions intermédiaires et celle de la grande coalition. En voici un exemple, le i évoquant les joueurs 1, 2 et 3 :

$$\begin{array}{l}
 v(\{1\}) = 1 \text{ (-1)} \quad v(\{2\}) = 2 \text{ (-2)} \quad v(\{3\}) = 2 \text{ (-2)} \\
 v(\{1, 2\}) = 4 \quad v(\{1, 3\}) = 4 \quad v(\{2, 3\}) = 4 \\
 v(\{1, 2, 3\}) = 6
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{l}
 v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = 0 \\
 v(\{1, 2\}) = v(\{1, 3\}) = 1 \quad v(\{2, 3\}) = 0 \\
 v(\{1, 2, 3\}) = 1
 \end{array}$$

sachant que $v(\{1, 2\}) = 4 - 1 - 2$; $v(\{1, 3\}) = 4 - 1 - 2$; $v(\{2, 3\}) = 4 - 2 - 2 = 0$ et $v(\{1, 2, 3\}) = 6 - 1 - 2 - 2 = 1$

La valeur de la grande coalition valait 6. Après normalisation, elle vaut 1. Les jeux sont stratégiquement équivalents.² Illustrons à nouveau la chose. Que la valeur de la grande coalition entre nos trois brigands soit égale à 1 ou 6 ne change rien au problème. Si la part qui revient à chacun doit être 1/4 ou 1,5 par valise, le problème demeure qu'il y a un porteur de trop sans que l'on sache lequel...

Ce jeu de porteur de valises appartient aux jeux coopératifs, mais ce n'est pas, comme on dit, un jeu convexe. Il ne peut être représenté par un triangle équilatéral comme dans le jeu coopératif précédent, étant rappelé à nouveau qu'un triangle est une combinaison convexe de ses trois sommets.

ii Jeu ou combinaison convexe

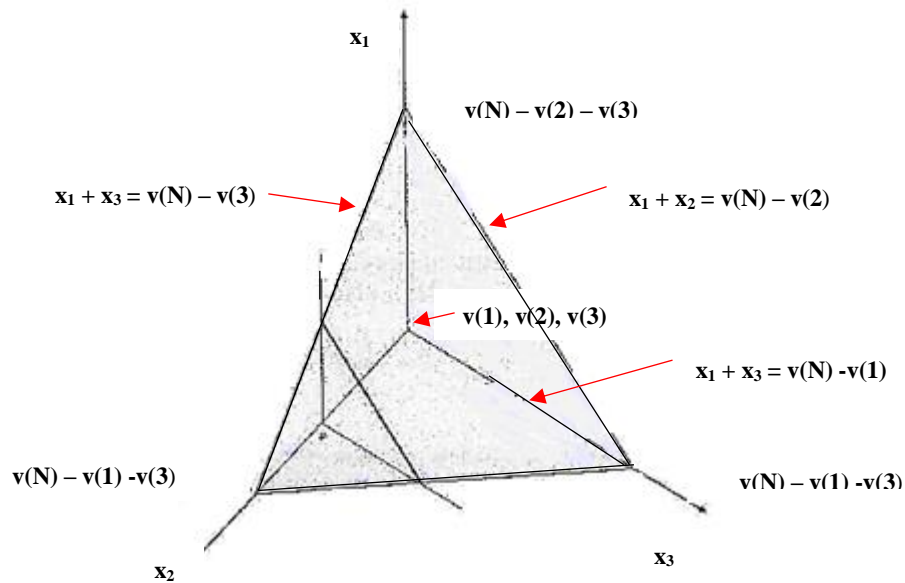
¹ P. D. Strafin, *Game Theory and Strategy*, op. cit., p.151.

² *Ibid.*, p.153 et 166..

Un jeu (N, v) , de grande coalition N et de fonction caractéristique v , est *convexe* si, pour toutes coalitions S et T , on a : $v(S \cup T) \geq v(S) + v(T) - v(S \cap T)$. Autrement dit, la valeur de coalition, découlant de la fusion de deux coalitions (\cup désigne l'union) dépasse la somme des valeurs de ces coalitions, déduction faite de la coalition formée des joueurs qui appartiennent aux deux coalitions (\cap désigne l'intersection). Appliquée à deux coalitions disjointes (leur intersection est vide, \emptyset), on retrouve la condition de suradditivité ($v(S) + v(T) \leq v(S \cup T)$, $\forall S, T \subseteq N$ avec $S \cap T = \emptyset$). Un jeu convexe est suradditif.

(Reprenons le jeu de porteurs de valise, avec les valeurs de coalition suivantes : $v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = 0$, et $v(\{1, 2\}) = v(\{1, 3\}) = v(\{2, 3\}) = v(\{1, 2, 3\}) = 6$. Soient $S = (\{1, 2\})$ et $T = (\{1, 3\})$, alors $v(S) + v(T) = 6+6 = 12 > v(S \cup T) = 6$. L'inégalité est inversée. Ce jeu est bien un jeu non convexe.)

Représentation d'un jeu convexe, qui réécrit autrement l'indication des représentations précédentes :



La surface du triangle représente $V(N)$, la valeur du jeu (N, v) . Cette surface est dite **Pareto efficace (Pareto efficient surface)**. Sur cette surface, le résultat atteint **globalement** est maximum quand les joueurs coordonnent au mieux leurs stratégies.

Les côtés du triangle équilatéral sont des distributions entre deux joueurs de $v(N)$ dont a préalablement soustrait la valeur individuelle du troisième.

Tout point $x = (x_1, x_2, x_3)$ du triangle est un centre de gravité obtenu en plaçant les poids x_1, x_2, x_3 sur ses trois sommets.¹

La convexité est une condition plus forte que la suradditivité.

Considérons par exemple un jeu de coalitions à somme constante. La somme des sommets d'un triangle équilatéral $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ et $(0, 0, 1)$ de hauteur 1 offre déjà une idée d'un simple jeu à somme constante. Un jeu de coalitions à somme constante est un peu plus sophistiqué puisqu'il intègre des coalitions. Un tel jeu signifie que la somme des gains d'une coalition et de la coalition adverse est toujours la même quelle que soit la coalition S comme dans cet exemple où la somme vaut 120, $\forall S$:

$$\begin{aligned}
 v(\emptyset) &= v(A) = v(B) = v(C) = v(D) = 0 \\
 v(AB) &= 50 & v(CD) &= 70 & v(AC) &= 30 \\
 v(BD) &= 90 & v(AD) &= 30 & v(BC) &= 90 \\
 v(ABC) &= v(ABD) = v(ACD) = v(BCD) = v(ABCD) = 120
 \end{aligned}$$

De façon formelle : $v(S) + v(\bar{S}) = c = v(N)$, avec \bar{S} le complément de S . Dans un jeu à trois joueurs, un jeu de coalitions à somme constante peut se ramener à un jeu de somme constante ou nulle de hauteur 1. Dans un jeu à somme nulle, $v(S) + v(\bar{S}) = v(N) = 0$.¹

¹ P. Dehez, *Théorie des jeux*, op. cit., pp.135-136 ; Henry Tulkens, *Internal versus core coalitional stability in the environmental externality : A reconciliation*, 2014, https://cdn.uclouvain.be/public/Exports%20redot/core/documents/coredp2014_58web.pdf

Un jeu à somme constante ou nulle, comportant une ou plusieurs coalitions, n'exclut aucunement l'hypothèse de suradditivité ($\sum v(i) < v(N)$, avec i indiquant le joueur i). Cette hypothèse est satisfaite, car, même dans ce jeu par ex. à trois, on gagne plus en coopérant à deux plutôt qu'en juxtaposant ses apports ou utilités de réserve. Cependant, dans ce jeu, toute coalition adverse a intérêt à minimiser le gain d'une autre coalition. Autrement le jeu ne serait plus à somme constante ou nulle. La suradditivité seule ne garantit donc pas que la fonction caractéristique de la grande coalition $v(N)$ soit maximale.

Soit, à titre d'illustration, le jeu à 3 joueurs à somme nulle suivant : $v(1) = v(2) = v(3) = -1$, $v(1,2) = v(1,3) = v(2,3) = 1$. En l'absence de coopération : $v(1) + v(2) + v(3) = -3$. En coopérant deux à deux, les joueurs augmentent leurs gains. Or on observe que : $v(1,2) + v(3) = 0$, $v(1,3) + v(2) = 0$, $v(1) + v(2,3) = 0$. (Nous avons omis les crochets qui indiquent que les chiffres sont des ensembles pour alléger la notation.)

Le cœur, s'il existe, entre dans le cadre d'un jeu coopératif à somme **NON** nulle ou **NON** constante car aucune coalition n'est frustrée par l'émergence d'une coalition adverse. La valeur de chacune n'est en rien diminuée au sein de la grande coalition, i.e. de la coalition qui regroupe tous les joueurs. Dans un jeu à trois joueurs, personne ne perd, même si deux joueurs sont seuls à profiter du cœur sur une des arêtes du triangle (voir l'exemple du « cœur » dans l'exemple du Bon, de la Brute et du Truand).

Dans un jeu à somme non constante, les intérêts des joueurs ne sont pas diamétralement opposés parce certaines répartitions du butin peuvent être préférées à d'autres by *both players*. Ce n'est que dans des cas extrêmes où les joueurs ont le même ordre de préférence qu'il n'y a pas en réalité de conflit. En général, cependant, les intérêts des joueurs dans un jeu à somme non constante sont *partially opposed*. Certains partages peuvent être préférés à d'autres, mais l'ordre de préférence (*preference order*) pour d'autres est opposé.²

Dans les jeux à somme non nulle, conflit et convergence peuvent coexister. Dans la préface de sa réédition en 1980 de son ouvrage 'Strategy of conflict's, Thomas Schelling raconte comment la lecture de son ouvrage avait marqué le Britannique John Strachey, économiste, marxiste et ministre du gouvernement travailliste d'après-guerre. Alors qu'il avait écrit sur le capitalisme et la lutte des classes, la stratégie nucléaire, le désarmement mutuel et le contrôle des armes nucléaires, Strachey lui avoua qu'il n'avait pas imaginé que la notion de conflit puisse exister en dehors d'un cadre à somme nulle : si conflit et intérêt commun pouvaient coexister, il s'agissait pour lui de questions essentiellement séparables.³

(§34-iii) Hobbes ne fut pas marxiste, n'en déplaise aux partisans de Marx. Dans son modèle de l'état de nature, **le conflit et la coopération coexistent**. Sans leur coprésence, on n'aurait pu analyser aujourd'hui un tel état de nature comme un jeu à somme **NON** nulle, en l'espèce un dilemme du prisonnier à n joueurs. Léviathan conforte indubitablement la coopération, mais la coopération était possible, au moins potentiellement. L'idée du contrat social hobbesien résulte de ces deux éléments inséparables.

*iii Retour sur la connivence entre pouvoirs
iv Les occurrences de « cœur » dans l'histoire constitutionnelle américaine*

d) Le « calcul » à l'épreuve des faits

i Remise sur selle de la valeur de Shapley. ii L'indice de Shapley-Shubik. iii Réserves ultimes

6/ La voix off de la volonté générale

*i Fiction ou réalité latente ? ii La volonté générale, sujette à l'interprétation
iii La volonté général comme effet d'un « réseau »
iv Une volonté générale sans cesse recomposée*

¹ P. D. Strafin, *Game Theory and Strategy*, op. cit., p.160, 153 et 52.

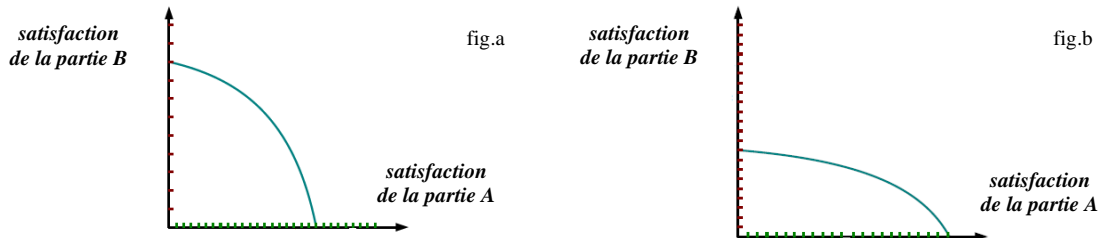
² A. Rapoport, « Three-and-Four-Person Games », op. cit., p.192.

³ P. Dehez, *Théorie des jeux. Conflit, négociation, coopération et pouvoir*, op. cit., p.54. Nous soulignons.

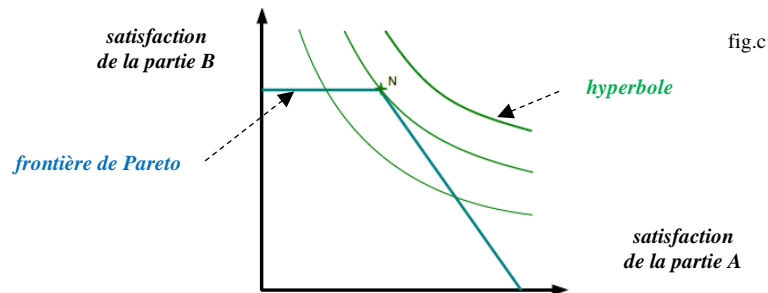
Annexe V

Le produit des écarts dans la théorie des jeux coopératifs

La solution ne doit pas dépendre de la façon de mesurer l'utilité, car il convient de faire attention aux changements d'échelle :



Le graphique de la *fig.b* représente exactement la même courbe que celui de la *fig.a* (l'ordre et le niveau de satisfaction n'ont pas changé). La *solution de Nash* ne dépend pas de l'échelle des utilités grâce au **recours de l'hyperbole** qui entraîne ipso facto la considération du produit des écarts ;



La **frontière de Pareto** est la frontière de l'efficacité au sens de Pareto (un accord est *efficace* quand il réalise l'*optimum de Pareto* (on ne peut plus améliorer le bien-être d'une partie sans détériorer celui d'un autre). On parle de frontière car au-delà, il n'y a plus en principe de ressources disponibles pour satisfaire les parties. La frontière peut avoir différentes formes. Elle peut notamment être plus ou moins convexe. La *fig. c* n'en montre qu'un exemple avec des droites.

Au point N sur la même *fig. c*, où se rencontrent l'hyperbole et la frontière de Pareto, la **solution de Nash** consiste à rendre maximale le produit des accroissements des utilités respectives, soit :

$$(U^B - U_0^B) \frac{1}{2} (U^A - U_0^A) \frac{1}{2}.$$

La solution est **équitable** avec un coefficient de répartition égal à $\frac{1}{2}$ si du moins les parties acceptent cette idée d'équité (les coefficients de répartition peuvent être différents – par ex. $\frac{3}{4}$ et $\frac{1}{4}$ - en fonction du rapport de forces ou de l'idée que l'une des parties mérite plus de recevoir que l'autre en raison de son apport propre).

§ 47. - LA MOYENNE (DES VOISINS) JURISPRUDENTIELLE

1/ Du combat des dieux au travail de tricot

2/ Une affaire de laplacien

- i Retour sur la notion de gradient, 292*
- ii Que signale le laplacien ? 293*
- iii Exemples actuels, 296*
- iv L'équation de Laplace moyenne tout (y compris la chaleur) , 299*
Annexe I, 304

3/ L'aspiration à la cohérence jurisprudentielle

a) La moyennisation des jugements

- i La fonction de jugement*
- ii Les analyses de Benjamin Cardozo et de Ronald Dworkin*
- iii Le juge choisit les cas voisins*

b) Une moyenne pondérée des jugements

- i Une démonstration via la jurisprudence américaine sur l'avortement*
- ii Petit passage technique obligé, 305*
- iii On reprend le fil*

c) Une moyenne des jugements sans distance rigide

- i Les cercles concentriques de Ronald Dworkin en question*
- ii La dilation et la contraction de la jurisprudence*
- iii La convergence en principe vers une « harmonie »*
Annexes II, III, IV et VI, 307

4/ Le bord du laplacien en droit

a) Le bord comme majorant ou minorant, 310

- i La comparaison avec un point originaire, 310*
- ii La surface d'une bulle de savon, 310*

b) L'écriture de la loi comme bord

- i L'espace circonscrit du droit*
- ii Des lois rétroactives au bord moins incertain*
- iii Don't trespass on « le bord » !*

5/ L'évolution jurisprudentielle du laplacien

- i Observons à nouveau une bulle de savon, 312*
- ii Ode aux dérivées secondes*
- iii Un rabibochage savant incessant*
- iv Un laplacien en droit n'excluant point l'aléa*

6/ Innovation et desserrement des bords

a) Faire place à l'irruption

- i Une affaire de principes*
- ii Une affaire de « pli »*
- iii Une affaire de « fibré »*

b) Laisser du jeu sur les bords

Annexe VII, 314

7/ Le dévoiement du laplacien $\Delta f = 0$

a) La divergence du laplacien

- i Le conformisme des juges*
- ii Slave law et free law*
- iii L'érosion des bords selon Bentham*
- iv La common law aussi rechigne*

b) Non-linéarité et non-connexité de la jurisprudence

- i Un « suivi » jurisprudentiel non-linéaire*
- ii Des morceaux de voisinage jurisprudentiels*
- iii Correspondance de structure entre jurisprudences*

c) Une jurisprudence reconfigurée étonnamment

- i Une reconnexion sous forme de « somme »*
- ii Une jurisprudence qui se mord la queue*
Annexe VIII, 317

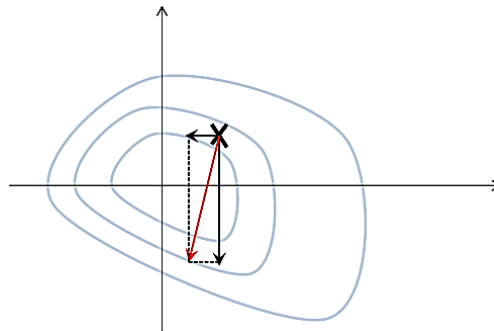
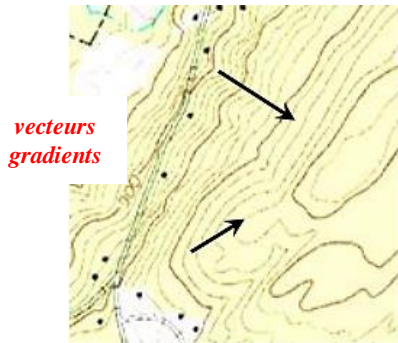
1/ Du combat des dieux au travail de tricot

2/ Une affaire de laplacien

i Retour sur la notion de gradient

(§34-2/-ii)
(§37-2/c)

Au cours de notre travail, nous avons abordé l'action de divers opérateurs comme l'addition ou la multiplication, voire des opérateurs différentiels comme la dérivation. Parmi ces derniers, nous avons rencontré la notion de gradient, un vecteur dirigé dans la direction ayant la plus forte pente. Ce vecteur pointe des valeurs hautes à partir des plus basses. Nous en avons parlé en évoquant la méthode du gradient de Cauchy et son emploi implicite chez Condorcet qui entendait élever la liberté de jugement de ses concitoyens en améliorant l'instruction publique. La « pente » est assurément fort raide pour parvenir à ce noble but, alors qu'il est très facile de descendre dans l'autre sens tant la « pente de l'abus » est glissante (la liberté de jugement s'altère vite en politique par les passions et les préjugés).



Deux vecteurs gradients indiquent la plus forte pente vers le sommet sur une carte topographique¹ Le vecteur **gradient** pointe grossièrement vers le sommet. Il peut être décomposé en une somme de deux vecteurs.

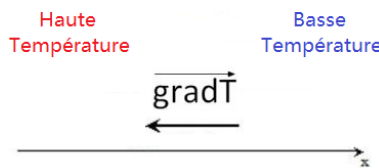
Imaginons que le champ $H(x,y)$ représente l'altitude au point M de coordonnées (x,y) sur un massif montagneux, alors le vecteur gradient de H représente la direction la plus difficile à escalader en partant de M , et son opposé $-\text{gradient de } H$ représente la direction prise par l'eau de pluie. [L'écoulement de l'eau de pluie indique la direction de la plus grande pente mais pas H]²

Le gradient, appelé aussi nabla ∇f , est un taux de variation instantané qui généralise la notion de dérivée que généralisent aussi d'autres opérateurs différentiels comme le rotationnel et la divergence. (Un taux de variation, puisque $f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$, et instantané puisque $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ avec $h \rightarrow 0$.)

Gradient

$$\vec{\text{grad}} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}$$

ou $\vec{\nabla} f$



Divergence

$$\text{div } \vec{A} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$$

A désigne le champ vectoriel³

Ces trois opérateurs définissent des relations locales en tout point. Il faut intégrer ces relations pour atteindre les quantités physiques.

Le *gradient* est un opérateur différentiel qui s'applique à un *champ scalaire*, i.e. à une fonction de plusieurs variables qui associe un seul nombre (ou scalaire) à chaque point de l'espace (le gradient est le vecteur orienté dans le sens de croissance du champ scalaire, indiquant par ex. la distribution de la température ou de la pression atmosphérique dans l'espace). Le *rotationnel* et la *divergence* sont des opérateurs différentiels qui s'appliquent, eux, à un *champ de vecteurs* indiquant la vitesse et

¹ Simon Ayrinhac, *grad, div, rot*, UPMC, Sorbonne univ., [http://www-ext.impmc.upmc.fr/~ayrinhac/documents/grad,div,rot_\(S.Ayrinhac\).pdf](http://www-ext.impmc.upmc.fr/~ayrinhac/documents/grad,div,rot_(S.Ayrinhac).pdf)

² Daniel Richard, *Thermodynamique & Transferts thermiques*, CNU35, http://step.ipgp.fr/images/4/4e/L2S4_GdE_TTT_annexeA.pdf

³ <https://jeretiens.net/difference-entre-les-operateurs-gradient-ou-divergence/>

la direction d'un fluide en mouvement comme la force magnétique ou gravitationnelle qui évolue point par point.¹

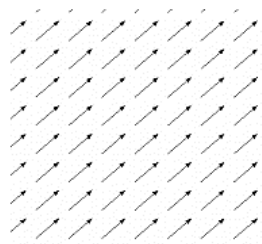


fig.a

champ « irrotationnel »

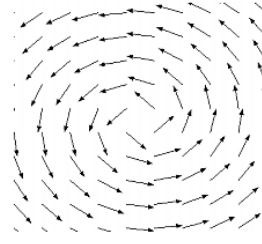
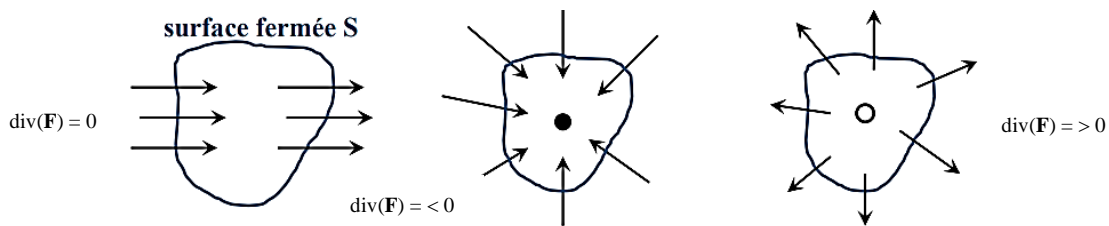


fig.b

champ « tourbillonnant »

Dans les deux cas, une flèche en un point représente la valeur du vecteur f , représentant la force en ce point. En revanche, alors que le *gradient* - et le *rotationnel* - transforment un champ scalaire (un ensemble de quantités, d'intensités) en un champ de vecteurs (un ensemble de directions), la *divergence*, qui s'applique toujours sur un vecteur, transforme à l'inverse un champ vectoriel en un champ de scalaires (nombre positif, nul ou négatif) :



divergence nulle ; divergence négative (vers un puits) ; divergence positive (à partir d'une source)²

Comme le gradient, le rotationnel et la divergence, **le laplacien, $\Delta f(x,y,z)$** , est également un opérateur différentiel qui constitue autant, fondamentalement un opérateur de dérivation. Il s'applique indifféremment à un champ de scalaires f ou vectoriel F . L'équation $\Delta f = 0$ signifie qu'il n'y a pas de source, ou de puits, d'un champ F à proximité. Par ex., pas de charge dans un champ électrostatique, i.e. un champ de forces invisible créé par l'attraction ou la répulsion de charges électriques, cause du courant électrique. L'équation $\Delta V = 0$ indique l'absence de telles charges dans un volume proche.

Le nom de Laplace explique l'emploi du mot laplacien, mais Laplace ne fut pas le seul à formaliser une telle idée à la fin du XVIII^e siècle et au début du XIX^e siècle (cf. par ex. leur contemporain Denis Poisson).

ii Que signale le laplacien ?

Le laplacien mesure l'écart entre un point et la moyenne des points dans son voisinage. En ce point, il évalue de combien le champ scalaire f (un champ de nombres) est différent de la moyenne du champ pris sur les points ou nombres voisins. **Le laplacien signifie l'écart à la moyenne, i.e. l'écart entre sa valeur moyenne au voisinage d'un point et sa valeur en ce point.** Lorsqu'au champ scalaire considéré est appliqué un gradient (un vecteur orienté), nous avons affaire à un champ vectoriel, et donc éventuellement à un laplacien vectoriel (le laplacien devient un vecteur) où chaque point n'est plus seulement la moyenne de ses voisins (une grandeur) mais la moyenne des grandeurs orientées de ses voisins. En raison du gradient, *the magnitude of vector laplacian gives the slope in the steepest direction.*

<p>champ scalaire + gradient (vecteur qui tend dans la direction du plus grand changement du champ scalaire)</p> <p style="text-align: center;">=</p> <p>champ vectoriel (champ doté de direction)</p>	<p>laplacien vectoriel</p> <p style="text-align: center;">=</p> <p>moyenne des grandeurs orientées (dans les trois directions x,y,z)</p>
--	---

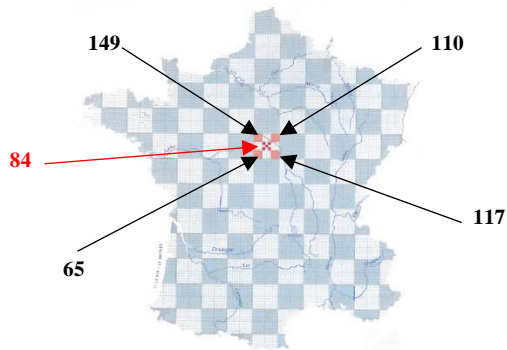
¹ Les lignes de champs sont faciles à imaginer. En chaque point, la tangente à la ligne de champs est donnée par le champ en ce point. Les lignes de champs de la fig.a sont des droites passant par l'origine, tandis que les lignes de champs de la fig. b sont des cercles centrés sur l'origine. https://www-liphy.ujf-grenoble.fr/pagesperso/bahram/Math/chap_DifOperateur.pdf

² Simon Ayrihac, *grad, div, rot*, Sorbonne Université, [http://www-ext.impmc.upmc.fr/~ayrihac/documents/grad,div,rot_\(S.Ayrihac\).pdf](http://www-ext.impmc.upmc.fr/~ayrihac/documents/grad,div,rot_(S.Ayrihac).pdf)

- Un exemple de laplacien, s'il vous plaît, qui parle à l'imagination, avant de poursuivre cette analyse qui reste, pour un juriste, un peu sèche.

(§24
2/-i)

- Considérez le champ scalaire représentant les densités de population au sein d'un département, qui était conçu comme un carré sous la France révolutionnaire. Focalisez-vous sur un petit carré comprenant quatre autres petits carrés rouges, représentant, disons, des communes. La densité de population est égale au rapport entre le nombre d'habitants et la superficie de la région concernée (en km^2). Imaginons des chiffres fantaisistes pour la démonstration. Supposons que le carré au centre ait pour densité 84 et que les quatre autres aient pour densités respectives : 149, 65, 110 et 117. Quel serait alors le laplacien? Ce serait l'écart entre la mesure effectuée en un point (le petit carré au centre) et la moyenne des mesures effectuées aux points voisins, soit $[(149+65+110+117)/4] - 84 = +26$.



On pourrait effectuer le même type de mesure pour tous les départements ayant la forme d'un carré et obtenir un autre **écart de Laplace**. Par ex., un carré dont le centre aurait comme densité de population 52 et pour densités voisines, non pas quatre points mais six points : 51, 65, 44, 63, 95 et 144. **Le laplacien** serait dans ce cas : $[(51+65+44+63+95+144)/6]-52 = +25$. Idem pour un autre département, en ne considérant que les densités de deux communes voisines : $[(84+110)/2] - 117 = -20$. Le signe *positif* du laplacien (ou écart de Laplace) indique un excès de densité de population des communes voisines par rapport à la densité d'une commune; le signe *négalif* une moindre densité de population des communes voisines.¹

Le laplacien peut être employé en physique dans de nombreux contextes, chaque fois que l'on veut comprendre, dans une situation géométrique donnée, les variations locales d'une certaine quantité (densité de population, température annuelle, altitude ou relief, déplacement d'une corde comme celle d'un instrument de musique qui vibre, etc.). Le laplacien peut être *discret*, lorsque des arêtes entre des points modélisent leurs relations de voisinage (cf. ci-dessus avec des densités de population), ou *continu*, en cas de variations d'altitude à la surface de la terre ou de la hauteur d'une corde vibrante.

A une quantité est associée une fonction, souvent notée $h(p)$. Ainsi $h(p)$ désigne désignera la valeur de h au point p . Dans notre illustration, le point p désigne la densité de population dans une commune donnée (dans le 1^{er} ex. $p=52$, au centre). Pour connaître le laplacien, une nouvelle fonction doit être construite qui associe, à chaque point p , l'écart de Laplace de h en ce point. Soit Δh cette nouvelle fonction. Pour tout point p en lequel on étudie h , on obtient la formule $\Delta h(p) = \text{moyenne de } h \text{ sur les voisins de } p - h(p)$. Une fois donnée la fonction h , le laplacien peut être calculé en chaque point p .²

Le laplacien d'une fonction mesure donc un **écart**, une « **anomalie locale** », prenant la forme, dans notre exemple, d'une variation de densité en fonction de la position sur la carte de France assimilée à un champ scalaire. Sur cette carte, le gradient de densité n'est autre que la dérivée d'un tel champ de densités en fonction de la position, vectoriellement dirigé dans la direction de plus forte variation.

(§46-1/)

En tant qu'**écart local**, le laplacien correspond à la **divergence du gradient** $\Delta f = \text{div}(\text{grad } f)$. *Intuitivement, il combine et relie la description statique d'un champ (décrit par son gradient) aux effets dynamiques (la divergence) de ce champ dans l'espace et le temps, le gradient étant défini à partir de la différentielle qui représente « la variation du champ scalaire » (Leibniz aurait dit à son époque « la combinaison des accroissements infinitésimaux des différents variables ») quand on se déplace d'un point M à un point M' infiniment voisin de l'espace.*³ Le laplacien peut être calculé en chaque point.

¹ Pour une démonstration sur une carte de France plus actuelle : Serge Cantat, Luc Hillairet, *Le laplacien*, Images des Mathématiques, CNRS, 2012, <http://images.math.cnrs.fr/Le-Laplacien.html>

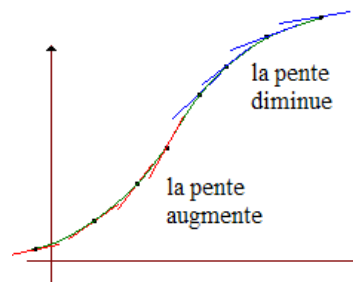
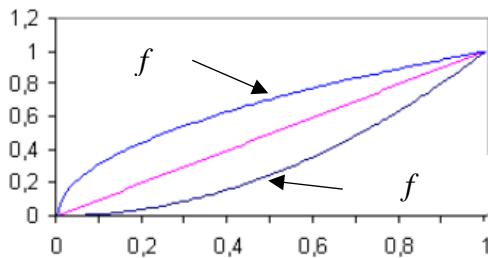
² Serge Cantat, Luc Hillairet, *Le laplacien*, Images des Mathématiques, CNRS, 2012, <http://images.math.cnrs.fr/Le-Laplacien.html>

³ <https://fr.wikipedia.org/wiki/Différentielle> ; Jean Sivardière, « Une introduction géométrique et physique du laplacien », in Bulletin de l'union des physiciens, mai 1992, vol. 86, n°744, p.786, <http://ogranier.g.o.f.unblog.fr/files/2010/03/articlebup2.pdf>.

gradient	divergence du gradient
<p>Le gradient est une grandeur vectorielle indiquant la façon dont une grandeur physique varie dans l'espace. Dans le schéma précédent des densités de population : 149, 65, 110 et 117, autour du centre 84, la valeur du gradient par ex entre 149 et 84 est 65 en allant de la basse intensité à la haute puisque l'on observe un accroissement de l'intensité dans une direction donnée (vers la commune de densité 149 et non vers les communes de densité 65 ou 110 ou 117).</p>	<p>Alors que le gradient est un vecteur, la divergence du gradient est un nombre (un scalaire) qui indique simplement ce qui sort d'un point donné (par ex. une goutte infinitésimale qui gonfle, ou dans notre cas, une commune qui voit sa densité de population augmenter ou décroître). Une grandeur divergente signifie que cette grandeur a tendance à s'éloigner de sa valeur initiale.</p>

(\$18)

En dimension 1, le laplacien est simplement la dérivée seconde. Comme toute dérivée, la dérivée seconde exprime aussi **une tendance infinitésimale ou momentanée**. La dérivée première donne beaucoup d'information sur une fonction : elle indique par ex. si la courbe représentative de la fonction est croissante, mais la dérivée première ne la caractérise pas complètement. Elle ne dit rien si elle croit de plus en plus ou de moins en moins alors que la courbe représentative, dans chaque cas, diffère par sa **courbure**. La dérivée seconde indique, elle, **la variation de la pente**. Lorsque, par ex., sur un intervalle donné, la courbure est orientée vers le haut, la fonction est dite convexe; vers le bas, concave.



S'agissant d'un champ et non plus d'une courbe, **le gradient d'un champ scalaire** (comme le champ de température ou de pression, ou un potentiel électrique) représente la « pente » du champ.

Lorsque la dérivée seconde s'annule et change de signe, un point d'inflexion apparaît. La courbure s'inverse. Le laplacien s'applique donc à une fonction supposée continue, et au moins deux fois dérivable sur son domaine. En 2D, le laplacien s'écrit comme une somme de deux dérivées partielles secondes, l'une mesurant l'écart entre un point et la moyenne des points à son voisinage dans la direction x , l'autre dans la direction y ; en 3D, comme une somme de trois dérivées partielles secondes, la dernière mesurant l'écart entre le point et la moyenne du voisinage dans la direction z , soit en coordonnées cartésiennes :

$$\Delta f(x, y, z) = \frac{\partial^2 f(x, y, z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(x, y, z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f(x, y, z)}{\partial z^2}$$

Le laplacien Δf peut également s'écrire en termes de nabla, ∇ , opérateur de dérivées premières, ∇ étant un vecteur de coordonnées $(\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$. Sachant que $\Delta = \nabla^2$, le laplacien se présente comme suit :

$$\Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad \Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad \Delta = \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$$

Le laplacien est un opérateur qui s'obtient en prenant la divergence du gradient (qui est déjà une somme), et en appliquant 2 fois ce dernier opérateur. Comme $\text{grad}(V) = \nabla V$, on peut écrire en nabla: $\Delta V = \nabla(\nabla V) = \nabla^2 V$ et $\Delta \vec{A} = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) = \nabla^2 \vec{A}$

Il résulte de ces considérations que le laplacien est la somme des dérivées partielles secondes **dans toutes les directions depuis le point de calcul**. Il mesure **une différence quantitative entre la moyenne des points voisins et ce point**.

Un petit calcul numérique, en coordonnées cartésiennes, démontre cette propriété rapidement. Partons du cas à deux dimensions pour être clair. Autour du point P d'un plan, choisissons deux

¹ https://fr.wikipedia.org/wiki/Opérateur_laplacien; mecaflotte.free.fr/themes/operateurs_mathematique/operateurs_mathematique.doc

points distants de h est calculons l'écart à la moyenne d'une fonction ϕ (pour la moyenne, il faut diviser ϕ par 2). La dérivée d'une fonction en un point situé sur une droite se définit, on le sait, comme la limite du rapport des variations autour de ce point de la fonction et de la variable lorsque cette dernière variation tend vers zéro. Une approximation de cette dérivée, et de la dérivée de cette dérivée (nous cherchons la dérivée seconde), est par conséquent obtenue pour un pas h en utilisant des petits accroissements ou « différences finies » :

$$\phi'(x) = \frac{\phi(x + h/2) - \phi(x - h/2)}{h} \quad \phi''(x) = \frac{\phi'(x + h/2) - \phi'(x - h/2)}{h} = \frac{\phi(x + h) + \phi(x - h) - 2\phi(x)}{h^2}$$

La quantité, $\phi''(x)$, qui tend vers le laplacien lorsque h tend vers 0, est proportionnelle à la différence entre la demi-somme des valeurs extrêmes et la valeur centrale. La propriété se généralise à un nombre quelconque de variables. De façon générale, **le laplacien est proportionnel à l'écart à la moyenne sur un petit domaine autour du point étudié**. En 3 D par ex., il est proportionnel à l'écart à la moyenne entre la valeur de la fonction en un point P d'une sphère de rayon h petit et du point P_0 de cette sphère.¹

- Pourriez-vous donner un exemple aussi parlant que le premier qui illustrerait ce laplacien continu ?

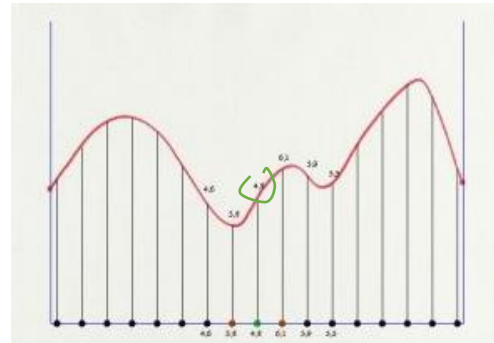
iii Exemples actuels

- Considérez la courbe suivante, extraite d'un article précédemment cité.² Ce peut être le profil d'une corde prise en photo, après l'avoir faite osciller en tenant ses extrémités. Ou ce peut être l'altitude d'un relief vu d'avion se déplaçant d'une ville à une autre en passant au-dessus d'une chaîne de montagnes.

Voilà des formes continues. Comment calculer les variations locales en un point p de la hauteur observée en utilisant la méthode des gradients et des écarts de Laplace ? Il est difficile d'envisager sur une figure les plus proches voisins de p . Pour contourner la difficulté, fixons un petit incrément e (un « pas »), et considérons les points $p+e$ et $p-e$ comme ses deux voisins à droite et à gauche. En utilisant les formules précédentes, les gradients deviennent $h(p+e)-h(p)$ et $h(p)-h(p-e)$ et l'écart de Laplace : $[h(p-e) + h(p+e)]/2 - h(p)$. Ainsi, nous avons remplacé notre corde continue par une version « discrète » :

Sur cette figure, la hauteur de la courbe **au point vert** est égale à 4,8. Les deux points adjacents pour le pas correspondant sont à une hauteur de 3,8 et 6,1. La valeur du gradient entre le point vert et son voisin de gauche est $4,8 - 3,8 = +1,0$; celle entre le point vert et le voisin de droite est $4,8 - 6,1 = -1,3$. L'écart de Laplace au **point vert** pour ce pas vaut donc : $(3,8 + 6,1)/2 - 4,8 = 0,15$.

Ces écarts ne sont qu'une approximation. Lorsque e s'approche de 0, l'écart de Laplace discret $[h(p-e) + h(p+e)]/2 - h(p)$ s'approche d'une valeur limite qui est le laplacien de h en p .³ Le laplacien continu que vous vouliez.



- Définir un objet à partir de ses bords, même s'il ne s'agit que des bords immédiats, me rappelle quelque chose...

- **Oui, nous ne sommes pas loin de l'idée de barycentre qui est calculé à partir de valeurs extrêmes (à partir par exemple des sommets d'un triangle). Cette idée rejoint aussi celle de la méthode analytique qui consiste à partir de la fin (de la solution supposée connue) pour résoudre un problème. Dans le laplacien, la moyenne, inconnue, est calculée à partir de la périphérie (pourtour d'une sphère ou d'un cube, etc.) où sont situées les valeurs, connues, des voisins.** Nous retrouverons cette façon d'appréhender les choses à partir du bord. Vous verrez bientôt.

¹ https://fr.wikipedia.org/wiki/Opérateur_laplacien; https://www-liphy.ujf-grenoble.fr/pagesperso/bahram/Math/chap_DifOperateur.pdf

² S. Cantat, L. Hillairet, *Le laplacien*, <http://images.math.cnrs.fr/Le-Laplacien.html>

³ *Ibid.*

Comme le laplacien a affaire avec la dérivée seconde, et que celle-ci indique la courbure d'une courbe ou d'une surface (la courbure est un écart dans la direction x , y ou z), le laplacien d'une fonction peut être interprété comme **la courbure moyenne locale** de la fonction représentant géométriquement **la déviation locale de la moyenne** par rapport à la valeur d'un point donné. En clair,

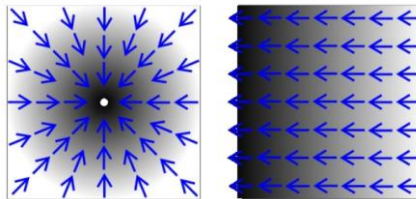
l'opérateur laplacien mesure les irrégularités dans les valeurs d'une fonction : une fonction « assez régulière » est de laplacien nul. L'importance de l'équation de Laplace (annulation du laplacien) a été remarquée dès le départ par Laplace dans l'étude de problèmes de gravitation. Il a également utilisé le laplacien pour les problèmes de diffusion de la chaleur et de propagation des ondes.¹

- La dernière figure, comme celle relative à la répartition des densités de population, donne une idée du laplacien comme **différence moyenne**, mais pourriez-vous en donner une image encore plus imagée ?

(§45-1/a)

- Un homme aussi avide d'images que vous doit être satisfait. Vous avez raison ; elles servent de contrepoint, à chaque instant, au texte écrit qui ne parlerait autrement qu'à l'entendement. Nous avons eu l'occasion, au cours de ce travail, d'aborder précisément le traitement d'image. Vous devinez peut-être que chaque tout petit élément d'image, chaque pixel, peut être vu comme moyenne de ses voisins.

Voyons d'abord ce que signifie concrètement le gradient dans le traitement d'image, étant rappelé à nouveau que le gradient est un vecteur représentant la variation d'une fonction par rapport à la variation de ses différentes variables. Nous sommes en 2 D. Une image est un champ scalaire de nombres (de pixels, si on passe du continu au discret). Le gradient d'une image peut être celui de sa couleur. Par ex., sur la fig. infra, les lignes bleues représentent le gradient de couleur du plus clair vers le plus foncé.²



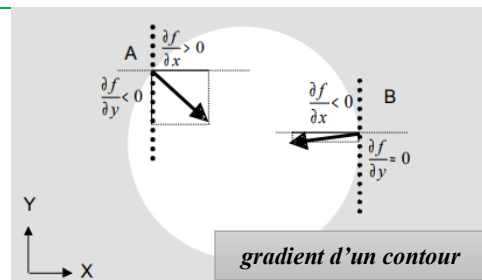
Un tel gradient peut nous aider à définir une frontière – ou contour - qui sépare, dans une image, deux objets ou un objet du fond. Un contour est une forte discontinuité, une variation brusque d'intensité que l'on peut observer dans une image composée justement d'une partie claire et d'une partie sombre. L'analyse de cette image permet d'étudier les points de contour par l'intermédiaire des variations locales du gradient entre la zone claire et la zone sombre. Comme tout vecteur, le vecteur gradient est caractérisé par sa norme (son module) et sa direction. Une forte variation locale du gradient - un module élevé - signale une forte transition dans l'image. Cette amplitude mesure la force du contour et sa direction indique la « pente » de la surface image dans le sens, infra, non plus du noir mais du blanc.³

Relation entre gradient et contour

Lorsqu'il y a un contour, c'est-à-dire une forte variation locale du niveau de gris, le vecteur gradient, [dirigé selon la direction du plus fort changement d'intensité], est perpendiculaire au contour.

Etant donné que la dérivée directionnelle est nulle dans la direction perpendiculaire au contour, la variation de niveau de gris est nulle le long du contour.⁴

La figure illustre le cas d'un contour circulaire théorique séparant une zone grise d'une zone claire.



¹ *Projet de mécanique des fluides*, Ensam Angers, http://mecaflotte.free.fr/themes/operateurs_mathematique/operateurs_mathematique.doc

² <https://fr.wikipedia.org/wiki/Gradient>

³ <http://devernay.free.fr/cours/vision/pdf/c3.pdf> ; Séverine Dubuisson, *Détection de contours dans les images*, https://www-master.ufr-info-p6.jussieu.fr/2006/Ajouts/Master_esj_2006_2007/IMG/pdf/detection_contours.pdf;

⁴ P. Bonnet, *Dérivation du signal image*, Cours de Traitement d'Image, USTL, <http://www-lagis.univ-lille1.fr/~bonnet/image/deriv1.pdf>

Dans la réalité, le contour est loin d'être un cercle aussi parfait, et le contour ne se présente pas non plus comme une séparation aussi franche entre une zone sombre et une zone claire. Le contour est plutôt une zone intermédiaire, une zone grise composée de pixels blancs et de pixels sombres. Ici, le gradient commence graduellement dans le sombre, atteint un maximum au contour, puis continue graduellement vers le clair. C'est rarement tout ou rien, sinon il n'y aurait guère de calcul à faire.

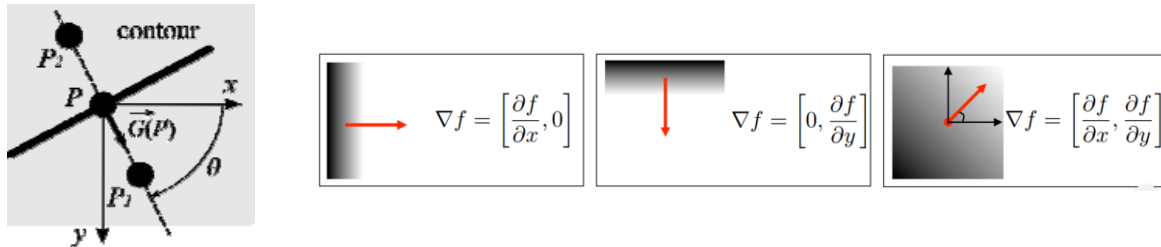


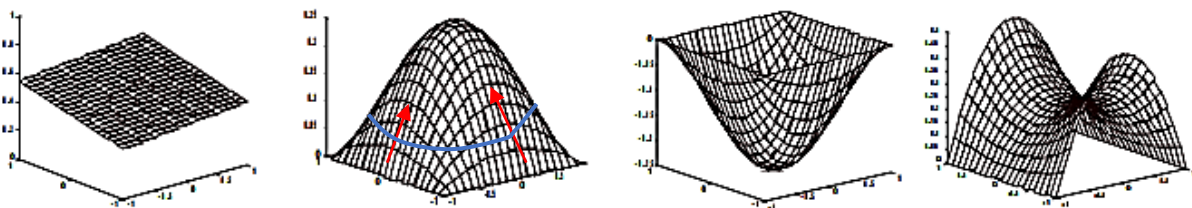
fig. de gauche : soient P_1 et P_2 les pixels situés de part et d'autre de P dans la direction θ du gradient G en P . On compare la norme du gradient en P avec celles du gradient en P_1 et en P_2 : alors P est un maximum local : si $\|G(P)\| \geq \|G(P_1)\|$ et $\|G(P)\| \geq \|G(P_2)\|$, alors P est un maximum local.¹ fig de droite : diverses expressions du gradient suivant sa direction.

- Et le laplacien Δf ?

- On y arrive. Le gradient permet de détecter un contour via la recherche d'un passage par un maximum ou extremum local. **Le calcul du gradient est un calcul de dérivée première qui révèle l'amplitude des perturbations.** Selon les directions du repère de l'image, le signe des dérivées premières $\partial f/\partial x$ et $\partial f/\partial y$ indiquent si l'on est en dehors du contour, sur le contour ou à l'intérieur, mais ce signe ne permet pas de différencier les points du contour du « bruit », i.e. des informations parasites qui dégradent la qualité du gradient. **Le laplacien offre une voie complémentaire pour détecter les contours.**

Les points de contour sont caractérisés par des passages par zéro du laplacien, qui est une valeur scalaire et non vectorielle comme le gradient. La dérivée seconde $\partial^2 f/\partial x^2$ ou $\partial^2 f/\partial y^2$ dans le laplacien exprime la « concavité » de la surface image au point considéré. Pour les cas où $\partial^2 f/\partial x^2$ et $\partial^2 f/\partial y^2$ sont de même signe, le laplacien la traduit effectivement ($\partial^2 f/\partial x^2 > 0$ et $\partial^2 f/\partial y^2 > 0 \Leftrightarrow$ concavité positive ; $\partial^2 f/\partial x^2 < 0$ et $\partial^2 f/\partial y^2 < 0 \Leftrightarrow$ concavité négative). Si $\Delta f = 0$, d'autres cas peuvent se présenter :

- $\partial^2 f/\partial x^2$ et $\partial^2 f/\partial y^2$ sont nuls tous deux ($\partial^2 f/\partial x^2 = \partial^2 f/\partial y^2 = 0$) : dans ce cas, la surface ne présente aucune concavité en ce point (surface plane ; le gradient devient un vecteur horizontal, à pente nulle) ;
 - $\partial^2 f/\partial x^2$ et $\partial^2 f/\partial y^2$ sont de valeur opposée ($\partial^2 f/\partial x^2 > 0$ et $\partial^2 f/\partial y^2 < 0$; ($\partial^2 f/\partial x^2 < 0$ et $\partial^2 f/\partial y^2 > 0$) : il s'agit alors d'un point selle qui représente autrement la forme locale de la surface.²



Formes de surface: (a) plane (b) concavité positive (c) concavité négative (d) point de selle

Sur la fig. b, nous avons indiqué, par des flèches rouges la direction du gradient (direction du plus grand changement). Le gradient d'altitude est orthogonal aux courbes de niveau (d'égale altitude) en bleu et orienté dans le sens de la montée.³

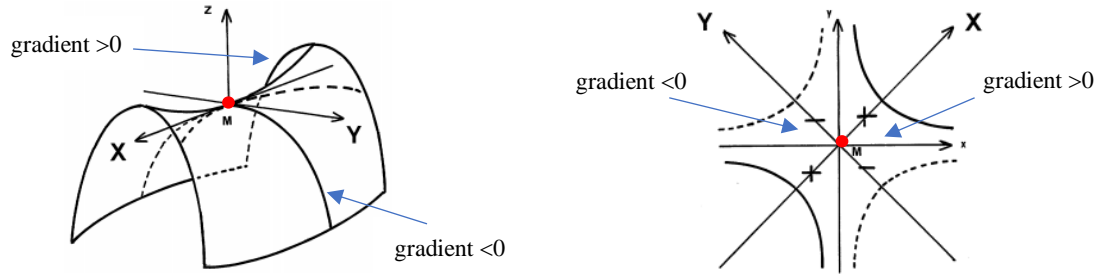
Dans tous ces cas, le laplacien de la « fonction image » $f(x,y)$ de deux variables, décrivant une surface, mesure son « anomalie locale », c'est-à-dire l'écart entre sa valeur moyenne au voisinage d'un point et sa valeur en ce point. La forme locale de la fonction traduit cette anomalie par soit une concavité ($\Delta f \neq 0$), soit un point selle M ($\Delta f = 0$). **Plus Δf est grand, plus la courbure moyenne de la surface en M est grande** (voir fig. infra en 3 D, projetée en 2D).⁴

¹ http://www-iut.univ-lille1.fr/LP_VI/cours-en-ligne/ue3-analyse-des-images/cours/seance-8-contours.pdf

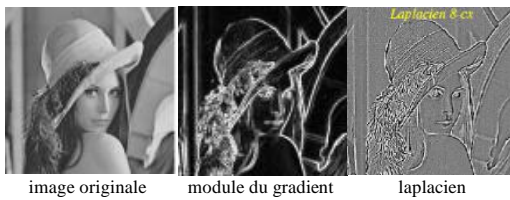
² http://www-iut.univ-lille1.fr/LP_VI/cours-en-ligne/ue3-analyse-des-images/cours/seance-8-contours.pdf

³ Un gradient d'altitude signifie par ex. que si on monte en altitude de 100m, la température diminue de 1°C. On parlera, dans ce cas, d'un gradient de température verticale de $-0.01^\circ\text{C}/\text{m}$.

⁴ J. Sivardière, « Une introduction géométrique et physique du laplacien », op. cit., p.780.



Au vu de cette représentation, il apparaît que la procédure de détection d'un contour dans une image consiste à le localiser à l'aide des dérivées 1^{ères} (*gradient*) et 2^{ndes} (*laplacien*, les dérivées secondes mixtes n'étant pas prises en compte). Le calcul des dérivées 1^{ères} précise les extrema locaux du gradient de la fonction d'intensité de l'image, et celui des dérivées 2^{ndes} les passages par zéro du laplacien à l'endroit où celui-ci change de signe et où se profile le contour.¹



	Δ_1	
Δ_2	Δ	Δ_3
	Δ_4	

Si $\Delta > 0$ et l'un des autres $\Delta_i \leq 0$ ou $\Delta < 0$ et l'un des autres $\Delta_i \geq 0$ alors on considère qu'il y a changement de signe.

Celui qui s'intéressera avec de tels effets pourra s'amuser à les observer sur le visage de Laplace même... (*Annexe I*)

- On est loin des Lumières avec une telle sophistication, sans parler du constitutionnalisme moderne !

(*Vif échange*)

- Pas du tout, mais laissons, pour le moment, le droit, bien que nous ayons déjà comparé l'interprétation à une image. Il faut encore mieux comprendre comment raisonnaient les savants de l'époque.

– Quelle conjecture impertinente de croire que le droit pourrait se prêter a priori à un tel traitement.

– Peut-être, mais mieux vaut conjecturer que rien penser. En attendant, rongez votre frein en admirant comment la physique des Lumières raisonnait si bien en moyennant les écarts ou anomalies locales.

(*Retour au calme*)

iv L'équation de Laplace moyenne tout (y compris la chaleur)

A tout seigneur, tout honneur. L'équation de Laplace, aux dérivées partielles du second ordre, fut introduite au départ en mécanique newtonienne par Laplace à la recherche d'un *champ scalaire* appelé *potentiel*. Dans cette équation, le laplacien prend une valeur nulle, $\partial^2 V / \partial x^2 + \partial^2 V / \partial y^2 + \partial^2 V / \partial z^2 = 0$ ou $\nabla^2 V = 0$. La quantité $\nabla^2 V$ est définie comme la densité, et sa valeur en chaque point indique l'excès au regard de sa valeur moyenne autour. Lorsque $\nabla^2 V = 0$, la fonction $u(x, y, z)$ peut être l'énergie potentielle de gravitation dans une région ne contenant pas de matière. La même fonction peut décrire, on l'a entrevu, le potentiel électrostatique dans une région ne contenant pas de charges, ou la température stationnaire (sans dépendance du temps) dans une région ne contenant pas de sources de chaleur.²

Nous ne nous n'attarderons pas ici sur le potentiel gravitationnel entre les planètes qui vérifie l'équation de Laplace, ni sur le potentiel électrique qui vérifie dans le vide, en régimes stationnaire, la

(§44-1/a)

¹ Elise Arnaud, *Informatique visuelle. Vision par ordinateur, Extractions de caractéristiques : – les contours*, M2P UFR IMA, https://team.inria.fr/steep/files/2015/03/contours_points.pdf

² https://fr.wikipedia.org/wiki/Pierre-Simon_de_Laplace ; http://www.msc.univ-paris-diderot.fr/~pottier/page2/files/Chapitre_8.pdf

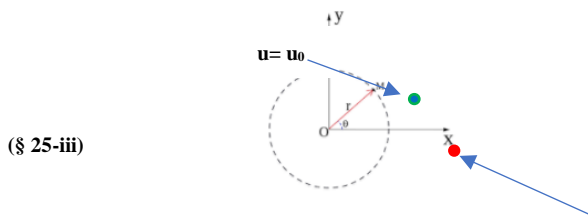
même équation. Revenons plutôt sur le phénomène de la diffusion de la chaleur que nous avons déjà abordé. Quelles sont en l'occurrence les solutions pour résoudre en 2D une telle équation, soit $\partial^2 u / \partial x^2 + \partial^2 u / \partial y^2 = 0$, le temps étant exclu de l'expression? Nous sommes encore en régime stationnaire (*in steady state*).

Considérons par exemple un cercle dans le plan x,y. On connaît la solution u sur le cercle. Problème : étant donné les valeurs autour du cercle ($u = u_0$), quelle est la température, $u(x,y)$, à l'intérieur du cercle ? La réponse apportée à cette question devrait permettre de résoudre l'équation de Laplace $\partial^2 u / \partial x^2 + \partial^2 u / \partial y^2 = 0$ qui comprend, nous le savons, des dérivées secondes par rapport à x et par rapport à y.¹

Essayons d'abord quelques solutions qui ne satisferont peut-être pas les conditions aux limites (*boundary values*, $u = u_0$), mais qui pourront être utilisées par la suite. $u = \text{constant}$ et $u = 1$ résolvent cette équation. Si $u = x$, la dérivée seconde dans la direction x égale 0 ; si $u = y$, la seconde dérivée dans la direction y égale 0 ; si $u = x^2 - y^2$, chaque dérivée seconde est 2, soit $2 - 2 = 0$; si $u = xy$, la dérivée seconde en x est 0 et celle en y aussi. Toutes ces solutions simples satisfont l'équation de Laplace.

Ce ne sont, toutefois, que quelques solutions. Nous avons besoin d'une infinité de séquences, car nous ne connaissons que les solutions pour le degré 0 ($u = \text{constant}$), pour le degré 1, soit x, et pour le degré 2, soit x^2 . Prenons x^3 , la seconde dérivée seconde de $\partial^2 u / \partial x^2$ sera 6x, donc j'ai besoin de 6x pour la dérivée seconde de $\partial^2 u / \partial y^2$ afin que $6x - 6x = 0$. Pour avoir une telle valeur, je devrais avoir $x^3 - 3xy^2$. Le pattern général devrait être de la forme $(x+iy)^n$. Quand $n=2$, la partie réelle de $(x+iy)^2$ est $x^2 - y^2$ et la partie imaginaire est $2ixy$. On retrouve les solutions $x^2 - y^2$ et xy . Quand $n=3$, la partie réelle de $(x+iy)^3$ est $x^3 - 3xy^2$ et la partie imaginaire $3yx^2 - y^3$. Pour toutes les puissances de n, le pattern $(x+iy)^n$ fonctionne, démontrant l'existence d'une grande famille de solutions pour les parties réelle et imaginaire. Je peux utiliser ces solutions pour trouver celles qui sont à l'intérieur même du cercle.

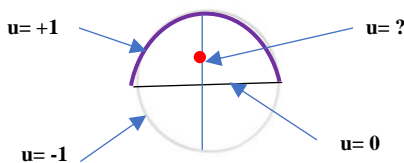
L'équation de Laplace $\partial^2 u / \partial x^2 + \partial^2 u / \partial y^2 = 0$ est linéaire (il y a un +). Je peux donc combiner les solutions déjà trouvées, 1, x, y, $x^2 - y^2$, xy, $x^3 - 3xy^2$, $3yx^2 - y^3$. Pour tout n, j'aurai aussi une solution. Nous sommes en présence d'une infinité de solutions au lieu d'un simple couple de solutions nulles. Nous cherchons toujours la solution $u(x,y)$ à l'intérieur du cercle dont nous utiliserons les coordonnées polaires, soient $u(x,y) = u(r,\theta)$, plutôt que les coordonnées cartésiennes du cercle d'équation de centre O(0,0), soit $x^2 + y^2 = r^2$, ou de centre I (a,b), soit $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ dont la présence de carrés et leur soustraction rend leur maniement plus lourd en l'espèce.



(§ 25-iii)

La famille de solutions $u = (x+iy)^n$ pour les parties réelles et imaginaires sont mieux exprimées à l'aide des coordonnées polaires, étant donné que $x+iy = r \cos\theta + i r \sin\theta = r(e^{i\theta})$ selon la formule d'Euler. A la puissance n, les parties réelle et imaginaire de $(x+iy)^n = r^n e^{in\theta}$ sont $r^n \cos n\theta$ et $r^n \sin n\theta$. Voilà les solutions de l'équation de Laplace. Une certaine combinaison de ces $u(x,y)$? comme $u = \sum a_n r^n \cos n\theta + \sum b_n r^n \sin n\theta$ donne la **solution générale de l'équation de Laplace**, les sommes allant de $n=1$ à $n = \infty$.

La tâche n'est pas finie. La solution générale doit également satisfaire les conditions aux limites (les valeurs au pourtour du cercle). Une telle prise en compte permettra de connaître les constantes a_n et b_n , chacune de ces constantes représentant une famille infinie de a_n ou de b_n .



Les conditions aux limites peuvent être par exemple $u_0 = 1$ de température dans la partie supérieure du cercle et $u_0 = -1$ de température dans la partie inférieure. Par symétrie, la température le long du diamètre horizontal sera 0. Si on veut connaître la température à mi-hauteur de la partie supérieure, nous savons que la solution devra être $u = \sum a_n r^n \cos n\theta + \sum b_n r^n \sin n\theta$ devant satisfaire les conditions aux limites au pourtour. Nous pouvons nous faciliter la tâche en fixant le rayon $r = 1$.

¹ Gilbert Strang, *Fourier series solution of Laplace's equation*, MIT, Fall 2015, <https://www.youtube.com/watch?v=WWphCZkdByA>

Le lecteur a reconnu que la solution générale était des séries de Fourier dont il convient de calculer les coefficients a_n et b_n qui doivent être en accord avec la fonction sur la périphérie du cercle et ses valeurs spécifiques. Le problème de résoudre l'équation de Laplace est réduit à celui d'une série de Fourier.¹

L'équation de Laplace $\partial^2 u / \partial x^2 + \partial^2 u / \partial y^2 = 0$ décrit la manière avec laquelle la chaleur, la température qui la mesure, se distribue quand on la laisse se diffuser seule.

La température au milieu est la moyenne sur la frontière. C'est une propriété clé naturelle de l'équation de Laplace. **La moyenne opère partout (it averages everything)**. Si je prends un petit cercle dans le grand cercle, la température au centre de ce petit cercle serait la moyenne autour du cercle. La propriété vaut pour tout cercle. Résoudre l'équation de Laplace moyennise chaque chose (**solving Laplace's equation averages everything**). La température est une fonction qui lisse (*smoothes*) quand on entre dans le cercle, mais explose ou tressaute au pourtour. Rien n'est jamais au-dessus du maximum ou en-dessous du minimum sur le pourtour. **Tout est moyenné (everything is being averaged)**.²

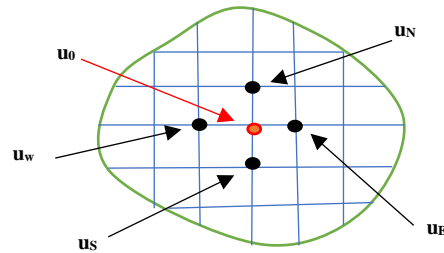
A défaut de pouvoir être en présence d'une fonction continue comme la température, la moyenne des voisins alentour peut être approchée numériquement. L'équation de Laplace continue son broyage dans le discret mathématique dont feront leur miel, à l'heure actuelle, les ordinateurs.

Soit une région de forme quelconque que l'on recouvre par un maillage. En chaque point du maillage, nous avons une équation reliant la valeur u en point u_0 au centre aux points u est (u_E) ; u ouest (u_O), u nord (u_N) et u sud (u_S).

Quelle est l'équation de Laplace ?

$$u_0 = \frac{1}{4} (u_E + u_W + u_N + u_S)$$

Les inconnus sont tous les u (les *mesh points*, les points du maillage). Nous avons une équation en chacun de ces points. Nous pouvons résoudre ce système qui nous donne une solution u en utilisant en l'espèce 5 points pour l'établir.³



Par le même raisonnement, le lecteur retrouve la méthode pour calculer la moyenne des densités de population dans un département tel que fut esquissé très idéalement sous la Révolution française.

Les fonctions dont le laplacien est nul sont dite « harmoniques ». *Sans doute trouve-t-on à ces fonctions une certaine harmonie puisque leur connaissance sur la frontière permet de connaître sur tout le disque*. En effet, un laplacien égal à 0 annule l'écart entre un point et la moyenne des points à son voisinage. Pas de tête qui dépasse trop, ou de trop grandes différences alentour ! *Leur nom vient peut-être aussi d'une relation avec les séries de Fourier*, que l'on trouve dans l'analyse du son et de la musique⁴

(Un lecteur, inaperçu, se réveillant)

- Fourier ? Ah, ce préfet de Napoléon qui travailla dans le sillage de Laplace sur l'équation de la chaleur ! Oui, c'est vrai : dans l'équation qu'il a établie, un laplacien (non nul) apparaît. Dans son équation, figurent des dérivées partielles où la température d'une plaque ne dépend plus seulement du point (x,y) mais aussi du temps t où elle est déterminée :

(§46-2/b)

¹ *Ibid.*

² *Ibid.* En prenant le développement de Taylor à l'ordre 2 au voisinage d'un point $M(x,y,z)$ à l'intérieur d'un cube de côté $2d$ et de volume V , soit $f(x+dx, y+dy, z+dz)$, on obtient $1/V \iiint_{-d}^{+d} f = \Delta f / 24 + o(1)$. On intègre sur chaque dimension, d'où les trois intégrales. Le coefficient $1/24$ (qui moyennise) vient naturellement de la forme du domaine considéré. A l'ordre 0, le laplacien est proportionnel à l'écart à la moyenne sur un petit domaine autour du point étudié. (Claire David, Pierre Gosselet, *Equations aux dérivées partielles*, Paris, Dunod, 2012, p.11).

³ G. Strang, *Fourier series solution of Laplace's equation*, <https://www.youtube.com/watch?v=WWphCZkdByA>

⁴ B. Hauchecorne, *Les mots et les maths. Dictionnaire historique et étymologique du vocabulaire mathématique*, op. cit., p.120.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = K \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

Le coefficient positif K dépend, lui, du matériau en jeu. Cette équation est résolue par les séries trigonométriques que l'époque postérieure à Fourier appellera précisément séries de Fourier.

- L'équation de la chaleur rassemble les dérivées partielles spatiales et temporelles du champ de température. Les premières symbolisent les accélérations spatiales et les secondes les accélérations temporelles. Il s'agit d'une équation de propagation, en l'espèce d'ondes thermiques. La chaleur se propage en 2 D (dans une barre métallique infiniment plus longue qu'épaisse), ou en 3D comme suit :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \nabla^2 u = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right), \quad \text{avec} \quad c^2 = \frac{K}{\sigma \rho}$$

K désigne toujours la conductivité thermique, σ et ρ la chaleur spécifique et la densité volumique du corps. Pour résoudre une telle équation, il faut, en sus du laplacien, des conditions aux limites et une condition initiale.

- Quelle différence faites-vous entre des « conditions aux limites » et des « conditions initiales » ?

- Les *conditions aux limites* sont les valeurs que prennent les solutions d'une équation aux dérivées ordinaires ou partielles sur une frontière alors que les *conditions initiales* font allusion au temps, ce qui est nouveau dans notre cas puisque l'on se demande maintenant comment la température évolue et non plus comment elle se stabilise. Les conditions initiales sont des conditions aux limites temporelles.

- La notion de *limites* que vous évoquez a-t-elle un lien avec la notion de *limite* dont vous avez parlé en présentant l'analyse des Lumières, celle qui apparaît dans le calcul différentiel et intégral ?

- Ce n'est pas exactement la même notion. Une équation aux limites comme celle de la chaleur veut dire équation aux bords dans le sens d'une « variété à bord » (une surface délimitée, par une pliure par ex.). Malgré tout, il faut bien que le mouvement soit continu, que la solution se « recolle » à la solution sur le bord de la variété. Et comme dans la notion de continuité, il y a celle de limite. Il y a un lien.

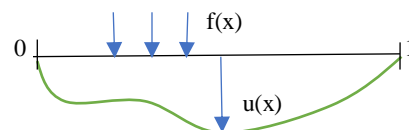
Les conditions initiales sont les conditions imposées au temps $t = 0$. Dans le cas d'une corde vibrante, les conditions aux limites sont celles indiquées, quel que soit le temps t , dût-il tendre vers l'infini, à ses extrémités. Par ex., on considéra que le déplacement des points extrêmes de la corde est nul.

Modèle simplifié : Problème aux limites unidimensionnelles (ex. de la corde vibrante en 1D)

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[0,1]$. On cherche une autre fonction u , définie sur le même intervalle, telle que

$$\begin{aligned} -u''(x) &= f(x) \text{ avec } 0 < x < 1 \\ u(0) &= 0 \\ u(1) &= 0 \end{aligned}$$

La situation physique qui correspond à ce problème est celle d'une corde élastique tendue, pincée aux extrémités, $x=0$ et $x=1$.



J'appuie sur cette corde avec une force $f(x)$ au point x . Sous l'effet de cette force, la corde se déforme. La déformation $u(x)$ est nulle aux extrémités 0 et 1, soit $u(0) = 0$ et $u(1) = 0$. Pour résoudre ce problème, il suffit d'intégrer deux fois $f(x) = -u''(x)$; j'obtiens les deux constantes qui interviennent dans cette intégration en utilisant les conditions aux limites.

Ne pas confondre ce problème avec le problème à valeurs initiales comme celui d'un corps, de masse m , accélérant sous l'effet d'une force extérieure f , dépendant de $u(t)$, et éventuellement de $u'(t)$ (i.e. la vitesse), soit $u''(t) = f(u(t), u'(t))$ avec $t > 0$ et comme conditions initiales $u(0)$ donné et $u'(0)$ aussi donnée. Il y a ici deux conditions initiales, et non aux limites, qui correspondent au fait par ex. que lorsque je lâche un objet, je dois connaître sa position initiale et sa vitesse initiale.¹

Pour revenir à l'équation de la chaleur étudiée par Fourier, cette équation est une équation de diffusion de la chaleur dans un corps, mesurée par la température en un point en fonction du temps

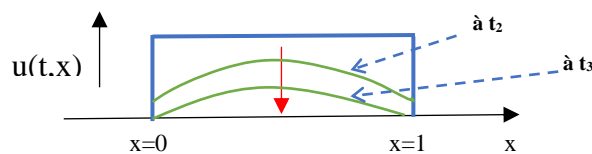
¹ Marco Picasso, *Analyse numérique pour ingénieurs*, chap.9, 13 nov. 2014, <https://www.youtube.com/watch?v=jeQVYAnHgI8>

sous une condition initiale donnée (la température à l'instant initial) et sous des conditions aux limites données (la température imposée aux bords d'une barre ou d'une plaque métallique par ex.).

Par contre, l'**équation de Laplace** est celle qui régit la répartition de cette température lorsque l'équilibre a fini par s'établir (« régime stationnaire » par opposition au régime transitoire précédent). La variable temps n'est plus présente dans cette équation (le laplacien ($u(x,y)$) égale 0) alors qu'elle l'est dans l'équation de la chaleur qui est une équation aux dérivées partielles en x , y et t : ici, le 0 du 2^e membre de l'équation de Laplace est remplacée par $du(x,y)/dt$ (si l'on est en 2 dimensions d'espace).

(§44
1/a)

- En somme, pour trouver les solutions particulières de l'équation de la chaleur, il faut également marier la solution générale (les séries de Fourier) avec, non seulement les conditions aux limites, mais aussi la condition initiale, pour déterminer les constantes dans ces séries composées de sinus et de cosinus puisqu'il s'agit d'onde oscillant de haut en bas qui meure progressivement aux bords (les sinus et cosinus se convertissent en exponentielle avec un exposant négatif). *We have to match the initial condition and the boundary conditions*, dit-on en anglais. Graphiquement, la solution pourrait se présenter ainsi à $t = 0$ et à $t > 0$ au sein d'une barre métallique qui a été gelée à ses deux extrémités :



À t_0 , la barre n'est pas chauffée ; à t_1 , elle se diffuse dans toute la barre, mais à t_2 , la température devient très basse aux extrémités et s'élève peu au milieu ; à t_3 , la température s'élève encore moins avant de revenir progressivement à 0. ¹

- Et l'**équation d'onde**, celle qui fut d'abord étudiée par d'Alembert ?

L'équation de Laplace résout les choses à l'intérieur d'un cercle ou d'une région fermée. Dans l'équation d'onde, le temps entre dans l'équation comme dans l'équation de la chaleur, mais cette dernière est une équation aux dérivées partielles du 1^{er} ordre en temps, $\partial u/\partial t$, alors que l'équation d'ondes est une équation aux dérivées partielles de 2nd ordre en temps avec $\partial^2 u/\partial t^2$ qui égale (*matches*) les dérivées partielles de 2nd ordre en espace, soit $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ avec un coefficient de vitesse c au carré. (En 3D, il faudrait ajouter, dans le second membre de l'équation d'onde, u_{yy} et u_{zz} pour compléter les dérivées secondes dans les toutes les directions.) En clair, dans l'équation d'onde, on a deux types de conditions initiales : $u(t=0,x)$ décrivant la distribution de la température dans l'espace et $\partial u/\partial t$ indiquant la vitesse initiale, mais nous nous éloignons trop avec ces considérations du laplacien dont nous traitons...

- L'équation d'onde fait pourtant appel aux séries de Fourier pour sa résolution.

- Oui, mais les séries de Fourier ne sont pas un outil réservé à la seule équation de Laplace. Il faut faire la différence entre les deux équations, comme il faut faire la différence entre l'équation de la chaleur, qui décrit des signaux qui voyagent à une vitesse infinie, et l'équation des ondes qui décrit des signaux qui se déplacent à vitesse finie comme le son d'une corde violon entre deux points, l'onde des vagues de l'océan ou celle de la lumière dans l'espace (*with no boundaries as far as we know*).²

Ce qu'il faut retenir simplement de **ces trois grandes équations aux dérivées partielles, datant des Lumières**, est l'idée que ce sont des équations que l'on retrouve dans moult domaines de la physique.

L'**équation de la chaleur** y est présente sous le nom générique d'équation de diffusion. L'équation de Schrödinger en mécanique quantique en est une suite, le coefficient de diffusion étant toutefois un nombre imaginaire. *Cette équation montre que la matière n'est pas faite de « points matériels », mais de particules oscillant à des fréquences bien déterminées donnant ainsi une importance accrue à l'analyse de Fourier*. Le nom de Fourier revient souvent tant il a découvert que *n'importe quelle fonction peut se décomposer en une multitude d'oscillations régulières qui sont les « électrons de*

¹ Gilbert Strang, *Heat equation*, MIT, Fall 2015, <https://www.youtube.com/watch?v=i8mEl8O-r0>

² Gilbert Strang, *The wave equation*, MIT, Fall 2015, <https://www.youtube.com/watch?v=9TQCKWWAVjM>.

l'analyse moderne ». ¹ Le monde du droit constitutionnel moderne n'échappe pas à cette invasion d'oscillations même s'il convient de mettre de l'eau dans son vin en envisageant des oscillations plutôt grossières.

L'équation d'ondes, ou équation de propagation, décrit, on vient de le rappeler toutes sortes d'ondes, à commencer par celle d'une corde vibrante ou le courant électrique le long d'une ligne de transmission.

Quant à **l'équation de Laplace**, c'est, répétons-le, l'équation idoine pour modéliser le comportement d'une fonction $u(x,y,z)$ qui peut être *l'énergie potentielle de gravitation dans une région ne contenant pas de matière, le potentiel électrostatique dans une région ne contenant pas de charges, ou encore la température stationnaire (c'est-à-dire ne dépendant pas du temps) dans une région ne contenant pas de sources de chaleur...*²

- ... et l'équation idoine pour modéliser l'interprétation juridictionnelle dans un domaine du droit ne subissant aucune source d'influence...

- C'est ce que nous allons voir, du moins du point de vue du raisonnement (et non de la formule), mais la condition que vous mentionnez annonce des complications que nous ne manquerons pas d'entrevoir.

Annexe I

Le portrait de Laplace a été modifié par ordinateur de plusieurs façons différentes.
Il vous appartient de retrouver celles qui utilisent **l'opérateur laplacien**.³



4 et 8 : **laplacien** ; 1 : original ; 2 : assombrie ; 3 : trop contrastée ; 7 ; sans contraste ; 3,9 : blanc= noir, noir = blanc

¹ San Vū Ngoc, *De l'horloge de Huguens à l'équation de Schrödinger : un monde d'oscillations*, Bibliothèque nationale, Paris, Conférence donnée dans le cadre *Un texte, un mathématicien*, 22 mars 2017. En mécanique quantique, la probabilité de présence en chaque point remplace la position.

² http://www.msc.univ-paris-diderot.fr/~pottier/page2/files/Chapitre_8.pdf

³ Opérateurs mathématiques, mecaflotte.free.fr/themes/operateurs_mathematique/operateurs_mathematique.doc, p.5.

3/ L'aspiration à la cohérence jurisprudentielle

a) La moyennisation des jugements

i La fonction de jugement

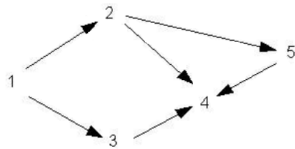
ii Les analyses de Benjamin Cardozo et de Ronald Dworkin. iii Le juge choisit les cas voisins

b) Une moyenne pondérée des jugements

i Une démonstration via la jurisprudence américaine sur l'avortement

ii Petit passage technique obligé

Avant de poursuivre l'article du collectif d'auteurs (qui renvoient eux-mêmes à d'autres articles), il est bon de voir aussi ce que signifie le produit de matrices dans le cas d'un graphe. Soit un graphe orienté, similaire à celui de leur article. Les nœuds, entre lesquels les flèches sont orientées, sont numérotés:



Sur un tel graphe, on considère une fonction (un poids) qui donne une valeur pour chaque chemin (par ex. 0 ou 1)

On construit la matrice représentative du graphe en mettant, comme chez le collectif d'auteurs,

- 1 à la place i,j s'il y a une flèche partant de i et allant à j ;
- 0 à la place i,j s'il n'y a pas de flèche partant de i et allant à j .¹

Dans cet exemple, on construit la matrice A, la matrice A² (en multipliant A par A), la matrice A³ (en multipliant A² par A) suivant les règles habituelles de la multiplication entre matrices (nous dispensons le lecteur des calculs)

$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ <p style="text-align: center;"> j varie → i varie ↓ </p>	<p>A x A = A², soit après calcul :</p> $A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	<p>A x A² = A³, soit après calcul :</p> $A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
<p>ex. : entre (2,5), il y a deux flèches partant de 2 : l'une vers 5, donc 1 dans la matrice au croisement de 2 et 5, l'autre vers 4, donc 1 aussi. Entre 1 et 5, il n'y a pas de flèche directe, donc 0</p>	<p>la matrice A² compte le nombre de chemins de longueur 2 entre i et j. Il y a deux chemins 1 et 4, en passant soit par le nœud 2 soit par le nœud 3</p>	<p>la matrice A³ compte le nombre de chemins de longueur 3 entre i et j. Il y a un seul chemin de longueur 3, entre les nœuds 1 et 4, en passant successivement par 2 et 5</p>

Se dessiner au fur et à mesure la **centralité d'un nœud** via le nombre de chemins et leur longueur.

L'avantage de l'écriture matricielle AV= VΛ apparaît à ce stade, car si on multiplie la matrice des valeurs propres V par son inverse V⁻¹, on obtient V⁻¹AV = Λ (la matrice diagonalisée en λ).² Or V⁻¹AV = Λ

¹ <https://perso.univ-rennes1.fr/marie-francoise.roy/siteAL1-2008-2009/AL1.Resume6.pdf>

² On dit qu'une matrice carrée A d'ordre n est inversible en son inverse A⁻¹ si A x A⁻¹ = I_n, la matrice d'identité d'ordre n, i.e. une matrice avec des 1 sur la diagonale et des 0 partout ailleurs, **jouant le rôle du nombre 1 pour les matrices**, et s'écrivant pour une matrice 2x2 comme:

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ex. d'une matrice E et de son inverse F :

les matrices 2 x 2 : E = $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ et F = $\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

peut se réécrire en $A = V\Lambda V^{-1}$, d'où $A^2 = V\Lambda V^{-1} V\Lambda V^{-1} = V\Lambda^2 V^{-1}$ et, par le même procédé, $A^n = V\Lambda^n V^{-1}$. Pour avoir A à la puissance n , il suffit d'avoir Λ à la puissance n . La diagonalisation de la matrice simplifie les choses si je considère par ex. la matrice 1000 fois. Les vecteurs propres dans V demeurent et je ne prends que la 1000^e puissance des valeurs propres. Si la valeur propre est supérieure à 1, la 1000^e puissance sera beaucoup supérieure à 1 ; si la valeur propre est inférieure à 1, la 1000^e puissance sera beaucoup plus petite ; si la valeur propre est exactement 1, rien ne changera (*steady state*).¹

En résumé, quand je multiplie une matrice, je considère les puissances d'une matrice. Comme l'écrit Gilbert Strang du Massachusetts Institute of Technology (MIT), cette approche est parallèle à celle qui est en œuvre avec une équation différentielle *when I solve forward in time*. Du côté des matrices, *this is taking steps, single steps, discrete steps*. Du côté de l'équation différentielle, cette équation *is moving forward continuously*. Et d'ajouter, de façon imagée: *This is a difference between hop, hop, hop in the discrete case, and run forward continuously in the differential case*. Dans les deux cas, les vecteurs propres dans V et les valeurs propres dans Λ *are the guide to what happens as time goes forward*.²

Nous voilà mieux armés pour mieux comprendre ce qui se passe même s'il est plutôt question, en matière d'arrêts, d'une séquence d'événements discrets que d'un flux continu comme une rivière.

Cependant, il apparaît encore nécessaire de saisir ce que signifie la « transposée d'une matrice » dont le lecteur ne peut faire l'économie de la notion sachant que dans la matrice A , les flèches vont de i à j (*outward citation* : l'arrêt qui cite se réfère à des arrêts précédents) alors que dans sa transposée, soit A^T , elles vont de j à i (*inward citation* : l'arrêt en cause est cité dans un ou plusieurs arrêts subséquents).

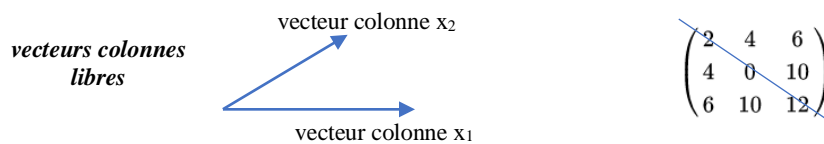
La transposée d'une matrice (en échangeant seulement ses lignes et ses colonnes)

La transposée d'une matrice, notée A^T ou A^t , est une simple réécriture de la matrice A où les colonnes deviennent des rangées et vice-versa, soit $A_{ij} = A^T_{ji}$ (on permute les indices i et j). Par ex. :

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

La matrice A est 3×2 , mais la matrice A^T est 2×3 . La transposée d'une matrice est une opération inversible, car la transposée de la transposée d'une matrice est la matrice elle-même : $A^{TT} = A$. **La transposée d'une matrice, A^T , est semblable à la matrice A car elle contient les mêmes valeurs propres, λ , ses vecteurs propres, bien que différents, étant également connectés à A .**

$A = A^T$ quand les colonnes de la matrice A sont indépendantes (les vecteurs colonnes se sont pas *colinéaires*, i.e. n'ont pas la même direction ; ils ne sont pas parallèles ; il s'agit d'une famille « libre »). Une matrice est symétrique si $A = A^T$ (ce qui est une propriété bienvenue), i.e. $a_{ij} = a_{ji}$. Les coefficients sont symétriques par rapport à la diagonale. Ex. :



La notion de transposée par rapport à des notions déjà rencontrées : sachant que la matrice (n,m) dont la colonne i est le gradient $f(x) \nabla$ est la matrice gradient de f en x , **la transposée de la matrice gradient est la matrice jacobienne** de f en x

iv On reprend le fil

c) Une moyenne des jugements sans distance rigide

i Les cercles concentriques de Ronald Dworkin en question

ii La dilation et la contraction de la jurisprudence

iii La convergence en principe vers une « harmonie » juridique

Dans le monde des scalaires (des nombres réels), $1 \cdot a = a$, et a multiplié par son inverse: $a \cdot 1/a = 1$. Dans le monde des matrices, $IA = A$ et $AA^{-1} = I$. Pour une approche pédagogique de la méthode de calcul d'une matrice inverse, voir KhanAcademyFrancophone sur internet.

¹ Gilbert Strang, *Diagonalizing a Matrix*, MIT, Fall 2015, <https://www.youtube.com/watch?v=U8R54zOTVLw>

² *Ibid.*

Annexe II

L'idée à bien voir dans l'algèbre linéaire ¹

La représentation en colonnes de la multiplication d'une matrice par un vecteur (*column picture*) révèle combien se joue en coulisses **une combinaison linéaire de vecteurs colonnes** même si, en grandes dimensions, on ne peut la visualiser.

Soit, par ex., le système de deux équations linéaires à deux inconnues x et y : $2x - y = 0$ et $-x + 2y = 3$

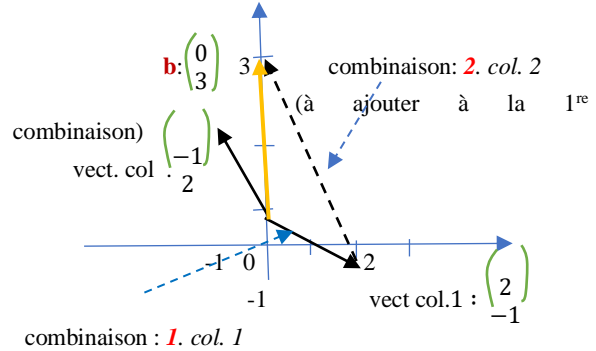
La matrice des coefficients $A: \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ permet de réécrire ce système sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

i.e. $A\mathbf{X} = \mathbf{b}$, les deux inconnues x et y formant le vecteur colonne \mathbf{X} (le vecteur des inconnues), et \mathbf{b} le vecteur dont les composantes en l'espèce $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ sont: $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$. Cette équation matricielle peut être réécrite en faisant ressortir **la combinaison linéaire des colonnes de la matrice** qui est en fait en jeu :

$$x \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Dans chaque colonne, les deux équations $2x - y = 0$ et $-x + 2y = 3$ **figurent en même temps**, au lieu de traiter chaque équation (chaque ligne) séparément pour résoudre le système (approche par les vecteurs lignes : *row picture*)



Sur la fig. ci-contre, nous retrouvons une solution particulière $x=1$ et $y=2$, donnée par la *row picture*, soit

$$1 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Quelles sont toutes les combinaisons de tous les x et y ? La réponse est n'importe quel vecteur \mathbf{b} , soit tout le plan.

NB. *The column of numbers represents a vector in a given coordinate system. Change the coordinate system and the numbers change, even though the the vector remains the same. So, as of which columns we assign to which vector (arrow with length and direction) depends on the choice of coordinate system.*²

Annexe III

Un ex. d'écriture matricielle aidant à résoudre un système d'équations différentielles

Soit le système d'équations différentielles suivant, étant rappelé que que l'équation différentielle $\mathbf{y}' = \mathbf{d}\mathbf{y}/\mathbf{d}t$ est convertie en écriture matricielle **afin que les valeurs propres et les vecteurs propres facilitent la résolution du système**.

$$\begin{cases} y_1' = 5y_1 + 1y_2 \\ y_2' = 3y_1 + 3y_2 \end{cases} \quad \text{avec la matrice } A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \text{ et les vecteurs } \mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \lambda \text{ et } \mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} \lambda$$

Nous voulons $A\mathbf{X} = \lambda\mathbf{X}$, soit $\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5+1 \\ 3+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix} \lambda_1$, d'où $\lambda_1 = 6$, et $\mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5-3 \\ 3-9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} \lambda_2$, d'où $\lambda_2 = 2$.

Comme $\mathbf{Y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$, nous obtenons deux solutions : $e^{6t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ et la solution résultant de leur combinaison, i.e. de leur addition, car il s'agit de deux équations linéaires, soit : $\mathbf{y}(t) = c_1 e^{6t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Les coefficients c_1 et c_2 peuvent être calculés en considérant la condition initiale à $t=0$. Sachant que $e^{0t} = e^0 = 1$, à $t=0$, $\mathbf{Y}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$, d'où la détermination des coefficients c_1 et c_2 .

¹ Gilbert Strang, Lect. 1: *The Geometry of Linear Algebra*, MIT, Spring 2005, <https://www.youtube.com/watch?v=ZK3O402wf1c>

² <https://www.quora.com/>

Annexe IV

Les sept ponts de Königsberg et la réponse d'Euler en termes de graphe

(On comprend ici pourquoi Euler passe pour le fondateur de la topologie par son étude des relations de position des sommets d'un graphe et les propriétés de connexité que ces sommets entretiennent en étant tous reliés en un tout)



*Pour répondre à l'énigme qui intriguait la population de Königsberg, Euler fait fi des distances en représentant par des points les quatre quartiers de la ville séparés par la rivière. Il relie ces points par des lignes comme on relie aujourd'hui les sommets d'un graphe par des arêtes. **Le problème devient alors équivalent à celui de parcourir un tel graphe à la main sans lever le crayon.** Euler cesse ainsi d'aborder la question en faisant appel aux notions de la géométrie classique que sont les longueurs, les angles et les courbures. Il ne s'intéresse qu'à l'analyse qualitative des figures, en prélude à la topologie future. Peu importe si on marche d'un point à l'autre en ligne droite, en oblique ou en courbe puisqu'on n'a plus affaire à des cercles ou des triangles mais à des types de parcours.*

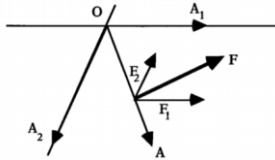
*Si Euler a mis de côté la géométrie traditionnelle pour résoudre ce problème, quelle est alors sa réponse ? **La réponse fut négative. Il n'y a pas moyen de parcourir la ville en traversant les 7 ponts sans traverser deux fois le même.** Le problème est celui d'un réseau à traverser : quand un habitant traverse un pont, il passe par deux de ses lignes sauf au point de départ et au point d'arrivée. Or le graphe montre que de chacun des quatre points restants (quatre sur six) partent 3 ou 5 lignes, soit **un nombre impair**, ce qui rend le problème impossible à résoudre. La preuve viendra plus tard.¹*

¹https://fr.wikipedia.org/wiki/Probl%C3%A8me_des_sept_ponts_de_K%C3%B6nigsberg:Topologie, <https://www.youtube.com/watch?v=L3HXZfLsuXU>

**La notion de produit scalaire, comme indice de divergence,
en relation avec celle de travail d'une force pour s'étirer d'un certain écart**

1/ La relation

Le travail d'une force le long d'un chemin est défini, en mécanique universelle, comme le produit de la valeur de cette force par la longueur du chemin parcouru.



Cet énoncé suppose que la direction de la force soit constamment parallèle à celle du chemin.

Ainsi, le travail, noté F_1A_1 , de la force F_1 le long du vecteur A_1 a pour valeur le nombre algébrique positif $|F_1|/|A_1|$, alors que le travail de la force F_2 le long du vecteur A_2 a pour valeur le nombre algébrique négatif $-|F_2|/|A_2|$. Le travail F_1A_2 de F_1 (respectivement F_2A_1 de F_2) le long de A_2 (respectivement de A_1) est nul.

Le travail noté $F.A$ de $F = F_1 + F_2$ le long de $A = A_1 + A_2$ s'obtient en additionnant le travail de chacune des composantes de F selon chacune des composantes de A : $F.A = (F_1 + F_2).(A_1 + A_2) = F_1A_1 + F_1.A_2 + F_2A_1 + F_2A_2 = F_1A_1 + F_2A_2$

On appelle produit scalaire sur l'espace vectoriel E la valeur d'une application $b \rightarrow K$ de l'ensemble $E \times E$ des couples (F, A) [avec F comme force, et A comme vecteur] des vecteurs de E sur l'ensemble K des nombres scalaires de E , telle que pour F fixée, b est une application linéaire de E sur E , pour A fixé, b est également une application linéaire de E sur K .

On résume ces deux propriétés en disant que b est une forme bilinéaire sur E . Quels que soient F et A , $b(F,A) = b(A,F)$, ce que signifie l'expression symétrique sur E , et b est non dégénéré (si quel que soit le vecteur A , $b(F,A)$ est nul, alors F est le vecteur nul). Un produit scalaire ou travail est une forme bilinéaire symétrique, non dégénérée. On appelle alors « espace vectoriel géométrique » un espace vectoriel à l'intérieur on peut travailler, c'est-à-dire un espace sur lequel on a défini un produit scalaire b .

Dans un tel espace, la notion de longueur est bien sûr définie. En voici une définition apparemment inhabituelle. Ce n'est qu'une interprétation physique de sa notion formelle, établie par les mathématiciens par observation et généralisation des propriétés de la notion ordinaire. On convient de définir le carré de la longueur d'un vecteur, relativement à un produit scalaire donné b , comme le travail accompli par la force A [ou A] pour parcourir le trajet A . On appelle également ce carré la valeur en A de la forme quadratique q associée à b . On note : $l^2(A) = |A|^2 = b(A,A) = q(A)$.

L'exemple de longueur auquel nous sommes habitués depuis notre jeune âge est celui de la longueur pythagoricienne, appelée encore euclidienne, établie à partir du produit scalaire euclidien. Si $F = (F_1, \dots, F_i, \dots, F_n)$ et si $A = (A_1, \dots, A_i, \dots, A_n)$ sont deux vecteurs de l'espace vectoriel E , par définition le produit scalaire euclidien des vecteurs F et A a pour valeur : $b(F,A) = (F_1A_1, \dots, F_iA_i, \dots, F_nA_n)$. Par suite, le carré de la longueur du vecteur A , par rapport à ce produit scalaire, vaut : $l^2(A) = q(A) = (A_1^2 + \dots + A_i^2 + \dots + A_n^2)$. Dans le cas où $n = 2$, on reconnaît le théorème de Pythagore dans le plan. On a ici le théorème de Pythagore dans un espace vectoriel multidimensionnel. La métrique euclidienne est celle de notre espace local usuel, mais elle ne convient pas pour décrire les propriétés de l'espace physique plus étendu.

2/ Petit lexique pour la compréhension :

espace vectoriel : espace des vecteurs, pour faire simple, mais on exposera les propriétés de cette notion dans notre Chap. II qui en proposera une illustration en droit constitutionnel ; $E \times E$: produit cartésien de E par E , comme par ex. le couple (x,y) dans le plan cartésien d'abscisse x et d'ordonnée y .

forme quadratique : un polynôme homogène de degré 2 avec un nombre quelconque de variables. Par ex. : la forme $x^2 + y^2 + z^2$ sur \mathbb{R}^3

(§27
b)i)

homogène : un polynôme en plusieurs indéterminées dont tous les monômes non nuls sont de même degré total. Par exemple le polynôme $x^5 + 2x^3y^2 + 9xy^4$ est homogène de degré 5 car la somme des exposants est 5 pour chacun des monômes ; les polynômes homogènes de degré 2 sont les formes quadratiques. Les polynômes homogènes sont omniprésents en mathématiques et en physique théorique.¹

¹ Claude Bruter, *Comprendre les mathématiques*, Odile Jacob, Paris, 1996, chap.5 : Prémisses de la géométrie : produits scalaires, longueurs ou formes quadratiques, pp.139-141. https://fr.wikipedia.org/wiki/Polynôme_homogène

4/ Le bord du laplacien en droit

Refaisons un peu le point sur le laplacien avant de continuer en science puis en droit.

L'équation de Laplace, $\Delta f = 0$, est une équation linéaire. Elle est par définition une somme de dérivées secondes. Chaque dérivée seconde, qui signale une courbure dans une direction donnée, est une solution (en 1D, il suffit d'avoir la dérivée seconde unique égale à 0), et la somme de ces solutions est aussi une solution (les dérivées secondes se compensent pour que la somme égale 0). C'est un des aspects de la linéarité.

Quel que soit le point ou l'input x dans la fonction f , l'équation de Laplace, $\Delta f = 0$ évoque une certaine stabilité (ou *steady state*) chaque fois qu'un point est influencé par ses voisins. En physique, la chaleur en un point d'une pièce, est reliée à la moyenne de la valeur de la chaleur de tous les points alentour. En économie, le taux de changement de la valeur d'une propriété correspond à la valeur moyenne d'accroissement de la valeur des propriétés dans le voisinage. En droit, une décision rendue par une cour de justice est reliée aux décisions proches de la même cour, voire des cours différentes au regard d'un même problème. Il ne s'agit pas d'une pure moyenne, mais d'un jugement médian, « entre ».

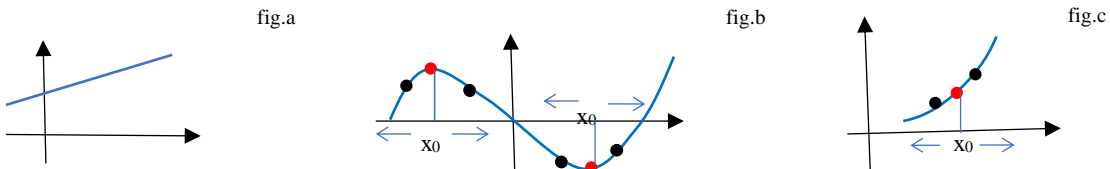
Approfondissons davantage l'intuition qu'emporte l'équation de Laplace, conçue à l'âge des Lumières.

a)

b) Le bord comme majorant ou minorant

i La comparaison avec un point originaire

En 1D, l'équation de Laplace, $\Delta f = 0$, se réduit à $f''(x) = 0$. Si on intègre cette dérivée seconde, l'intégrale est $f'(x) = \text{constante } c$, et si on intègre à nouveau, on obtient $f(x) = cx + \text{une autre constante } k$. La fonction $f(x) = cx + k$ est linéaire. Elle est décrite par une droite. (fig.a). Si, en revanche, comme il a été moult fois rappelé, on considère une fonction arbitraire qui présente des courbures, la dérivée seconde est < 0 lorsque la concavité est tournée vers le bas, et est > 0 lorsque la concavité regarde vers le haut. (fig.b) Si donc, la dérivée seconde doit toujours être égale à 0, la courbe ne peut être nulle part courbée. Ni vers le haut, ni vers le bas. *It is not allowed to curve. So it just sticks straight.*¹ Elle n'a pas le choix.



Si la courbe se recourbe en $f'' < 0$, tous les points, situés un peu à gauche ou à droite du sommet, sont plus bas que le maximum local. Ainsi, si vous considérez les « inputs » de vos voisins, les voisins de $f''(x_0) < 0$ sont moins élevés que ce point. Si la courbe se cambre en $f'' > 0$, tous les points, situés un peu à gauche ou à droite du sommet, sont plus élevés que le minimum local. Même si vous ne considérez pas un extremum local, mais une courbe par ex. croissante et courbée vers le haut, le voisin de gauche a une valeur moins élevée que le point x_0 , (fig.c) mais, en considérant la valeur moyenne des voisins, le voisin de droite contrebalance (*outbalances*) celui de gauche. Un équilibre est réalisé.²

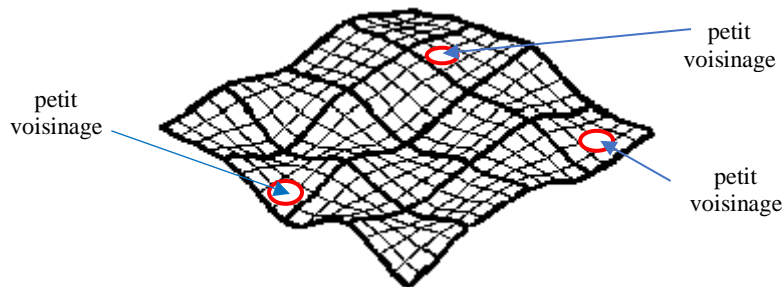
L'idée de comparer les voisins à un point originaire se retrouve dans le cas d'une fonction à plusieurs variables. La compensation ne conduit pas à une simple droite, mais opère dans le cadre d'un voisinage comme un petit cercle autour de ce point.

La même question alors se pose de savoir si les points voisins ont, en moyenne, une valeur plus grande ou moins grande que le point originaire. Si vous regardez un point où le laplacien de la

¹ *Harmonic functions*, <https://www.khanacademy.org/math/multivariable-calculus/multivariable-derivatives/laplacian/v/harmonic-functions>

² *Ibid.*

fonction f , décrite par une surface diversement courbée, s'avère plus grand que 0, i.e. $\Delta f > 0$, tous ses points voisins tendent à être plus grands que ce point situé au centre d'un petit cercle (en rouge) dessiné sur cette surface. Le centre s'avère être un minimum local. Si vous regardez un point où le laplacien de la fonction f , décrite par la même surface, s'avère moins grand que 0, i.e. $\Delta f < 0$, tous ses points voisins vont être



plus grands que ce point qui s'avère être un maximum local. Si la valeur du laplacien est égal à 0, i.e. $\Delta f = 0$, la hauteur de tous les points sur le cercle est la même que celle du centre.¹ Quel que soit le point localisé sur la surface, ses proches voisins tendent, en moyenne, à avoir la même valeur que lui.

Le laplacien de la fonction est une propriété invariante qui ne dépend pas des coordonnées à l'aide desquelles peut être écrite l'équation de la fonction. (On peut dessiner sur le papier une forme fermée ou un cercle sans avoir besoin de tracer un axe x et un axe y pour le faire ; si je trace des coordonnées et si je leur fais subir une rotation ou les étire, l'expression ne varie pas.) Pour décrire la surface considérée, la condition différentielle, $\Delta f = 0$, toutefois, ne suffit pas. Il faut adjoindre une autre condition, une condition aux limites (*boundary condition*) sans laquelle on ne peut espérer l'unicité de la solution.

C'est ici que le bord joue un rôle incontournable.

On sait calculer le laplacien d'une fonction connue en science, et on sait l'estimer, mais pas à un centimètre près, en droit. **Le laplacien du savant fait place au pseudo-laplacien du magistrat dont le jugement – qui fait figure de fonction mathématique - « harmonise » d'autres jugements plus ou moins comparables.** Il convient maintenant de résoudre le problème inverse en essayant de trouver des fonctions dont le laplacien est nul. Il faut trouver une fonction harmonique définie sur un domaine en imposant les valeurs de cette fonction sur la frontière du domaine. Ce problème est celui de Dirichlet.

En mathématiques, une condition aux limites de Dirichlet est imposée à une équation différentielle ou à une équation aux dérivées partielles lorsque l'on spécifie les valeurs que la solution doit vérifier sur les frontières ou les limites du domaine.²

- Un exemple concret ou typique ?

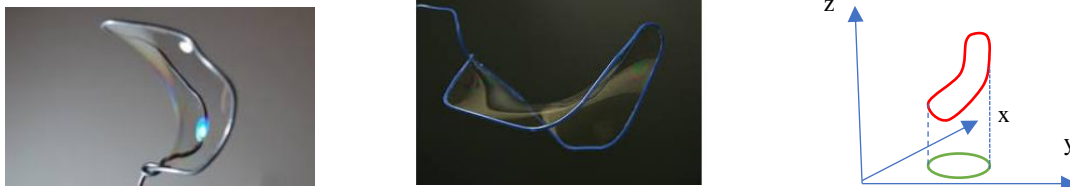
ii L surface d'une bulle de savon

Dans un graphe, le bord représente les valeurs aux sommets de ce graphe. Le bord constitue, sur tout le pourtour, un majorant ou un minorant, par rapport aux valeurs intérieures. Dans le cas discret comme dans le cas continu, une fonction harmonique satisfait l'équation de Laplace, $\Delta f = 0$, si elle n'a pas d'extremum local ailleurs qu'au bord de son domaine. Les valeurs au bord sont imposées (par ex., les valeurs de la température dans une pièce sur les murs, le plancher, le plafond), la valeur de la température de chaque autre partie de la pièce restant égale à la moyenne des valeurs environnantes.

¹ Dans le cas d'un tout petit cercle, la moyenne des voisins qu'est le laplacien serait égale à la somme des points du cercle, i.e. l'intégrale sur tout le cercle, $\int f ds$, divisée par le périmètre du cercle de rayon r , $1/2\pi r$, soit $1/2\pi$. $\int f ds$. Eloigné un peu de l'origine, sur le pourtour du petit cercle en question, le laplacien sera donné en recourant à nouveau au développement de Taylor d'une fonction de plusieurs variables. En paramétrant les coordonnées du point (x,y) en $x = r \cos \alpha$ et $y = r \sin \alpha$, et en écrivant $ds = r d\alpha$, on retrouve l'idée, sous forme algébrique, que la différence entre la moyenne de f (représentant par ex. la température) et la valeur au centre du petit cercle est proportionnelle au laplacien.

² https://fr.wikipedia.org/wiki/Condition_aux_limites_de_Dirichlet. Cette condition a été énoncée dans la première moitié du XIX^e siècle.

Le fait d'imposer des valeurs au bord rompt en cet endroit l'équation de Laplace, mais c'est le prix à payer pour avoir une solution, et non une infinité de solutions. La surface d'une bulle de savon en est un exemple. Les enfants se plaisent à la contempler en trempant au préalable un cercle en fer dans une eau savonneuse. C'est grâce à l'adjonction d'une condition aux bords que la bulle peut se former. Mieux : la bulle présente une surface optimale, tant elle s'aplanit et est tendue aux bords. Aucun pic, aucune bosse, n'apparaît. La surface est toute lisse. L'opérateur qui fabrique des moyennes entre des écarts, entre des directions différentes, a fait son travail. Tout est bien réparti (*averaged out*).



film de savon bordé par un contour tordu. Sur le dessin, la surface est projetée sur son domaine de définition

Que l'on comprenne comme il convient : contrairement à la moyenne des voisins qui se construit pas à pas, la condition aux limites, dite de Dirichlet, s'impose sur tous les points du bord **simultanément**. Que l'on soit à gauche, à droite, en haut ou en bas du bord, c'est la règle. Si on projette notre bulle de savon en 3D sur son domaine de définition, c'est pareil. La délimitation un tel domaine est déjà une condition.¹

(§20
- b)

Dans une équation différentielle, l'évolution se fait progressivement d'une condition initiale à une valeur finale. (On l'a vu avec la dégradation politique qui évolue dès « l'entrée en fonction » jusqu'à une fin de règne souvent fatale, surtout si au départ il y a eu une violente prise du pouvoir.) Les conditions au bord opèrent, par contre, **d'emblée en tout point du bord**. La condition de Dirichlet n'est pas un fait local, mais global. D'où cette rétroaction du global sur le local dès qu'une bulle de savon, la membrane d'un tambour, une toile couvrant un stade, est fixée à des bords. Tout est parfaitement tendu. Tout se tient.

- Avec votre bulle de savon ou votre tambour, vous nous préparez de façon ludique, je le vois, à retrouver le droit. Le bord s'impose **partout, sans attendre, en tout point d'un domaine du droit**. N'est-ce pas la loi, ou les premiers arrêts notoires de la *common law* si aucun acte du Parlement n'est intervenu jusque-là ? N'est-ce pas aussi les deux à la fois, sachant que le droit des décisions de justice est, dans les pays de *common law*, de plus en plus mis à jour, modifié et complété par la législation ?

c) L'écriture de la loi comme bord

- i L'espace circonscrit du droit. ii Des lois rétroactives au bord moins incertain*
- iii Don't trespass on « le bord » !*

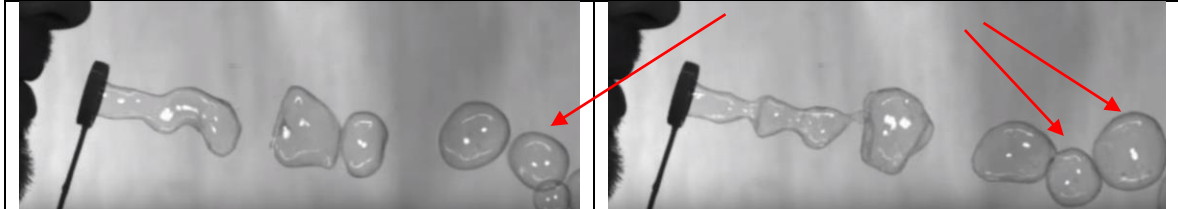
5/ L'évolution jurisprudentielle du laplacien

- i Observons à nouveau une bulle de savon*

Dans notre §45-2/b)-ii, nous avons vu comment la « loi commune » anglaise avait « égalisé » autant que possible les hauts et les bas de la conscience du juge lorsque celui-ci jugeait en équité. C'était déjà une façon de mettre en œuvre le laplacien juridique en harmonisant autant que possible les jugements d'équité et les jugements de *common law*. Cette laplacisation du droit est le fruit d'un développement historique à l'instar de celui qui opère au sein de la *common law* dans le temps autant que dans l'espace.

¹ Pavel Grinfeld, Drexel Univ., Lemma, Focused on mathematics, *Introduction to Laplace et Poisson Equations*, Philadelphia, 2018, <https://www.youtube.com/watch?v=lsY7zYaezto>

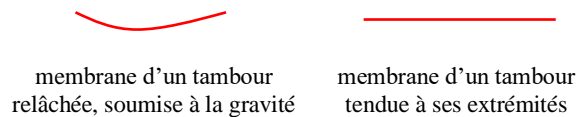
Vous avez admiré une bulle de savon, aussi ronde qu'une sphère. La surface est minimale, et l'équation de Laplace, $\Delta f = 0$, est bien en place. Il ne faudrait pas cependant oublier que la bulle de savon évolue progressivement vers cet état final. Il suffit de ralentir le film de son mouvement pour se rendre compte que celui-ci s'inscrit dans le temps. Notre œil s'étonne de cette évolution en voyant le passage de la première forme d'apparition à celle de l'état final. La bulle de savon atteint l'état optimal sphérique.¹



La bulle de savon qui se crée sur un contour en fil de fer est générée par une « fonction ». Minimiser cette fonction revient à dériver son intégrale et à effectuer un passage à la limite. La bulle de savon devient une sphère. Un modèle du genre.

Avant que le laplacien se dissolve éventuellement dans l'équation de Laplace, $\Delta f = 0$, il convient de rappeler que le laplacien d'une fonction, Δf , représente une différence (*discrepancy*) entre la valeur de la fonction à un point particulier et la moyenne des valeurs de ses voisins. Le laplacien combine par définition des dérivées partielles secondes. Il mesure leur écart. Ce n'est que dans l'équation de Laplace, $\Delta f = 0$, que les dérivées partielles secondes s'évanouissent en se neutralisant mutuellement.

S'il fallait imaginer un laplacien non nul et un laplacien nul en une dimension, il suffit de se représenter le premier comme une droite horizontale incurvée (une dérivée seconde signale toujours une courbure) et le second comme une ligne horizontale parfaitement droite.



En 1D, la courbe qui relie trois points alignés est une courbe concave si la valeur du point situé entre les deux points est plus petite que la moyenne ; elle est convexe si la valeur est plus grande. La courbe devient une droite quand la valeur est égale à la moyenne. A cette hauteur, la dérivée seconde est nulle (absence de courbure). En 2D, la figure est moins claire. La courbure peut aller dans un sens ou dans un autre !

L'état d'équilibre, si beau que soit celui d'une bulle de savon, est un état où il ne se passe plus rien (avant qu'elle n'éclate, au désespoir des enfants). Une jurisprudence qui satisfaisait l'équation de Laplace serait absolument statique face aux circonstances qui ne changent pas moins en permanence. **Un tel point de perfection, à le supposer possible, transformerait le droit en une matière aride, infructueuse, sans nouveauté ni utilité.** Il faut du temps pour parvenir à cet état, et il faut du temps également pour en sortir si cet état devient insatisfaisant. Un autre $\Delta f = 0$ doit être trouvé à la place.

Si l'ordre n'a pour finalité que lui-même, cela ne présente en droit, comme en toute chose, aucun intérêt. D'où vient que le droit s'avère utile ? La stabilité importe, comme Hobbes s'est efforcé de le montrer, mais la stabilité pour la stabilité présente des dangers. La nature du droit est aussi de bouger, de répondre aux besoins de la société, mais est-ce du devoir du seul droit constitutionnel de s'en acquitter ? Absolument pas, en droit des Lumières. En dehors de la loi du Parlement ou du Congrès, il incombe également à la « loi commune » (*common law*) de réaliser une telle fin au plus près des justiciables.

*ii Ode aux dérivées secondes. iii Un rabiboilage savant incessant
v Un laplacien en droit n'excluant point l'aléa*

¹ Soap bubbles in motion, 19 March 2014, <https://www.youtube.com/watch?v=-nINvGUCDII>. Soap bubbles made with a wand and recorded with a high speed camera at 4400 frames per second (Ibid.)

6/ Innovation et desserrement des bords

a) Faire place à l'irruption

i Une affaire de principes. ii Une affaire de « pli ». iii Une affaire de « fibré »

b) Laisser du jeu sur les bords

Annexe VII

L'approche de la moyenne des voisins par les suites	
	<p>Soit la suite $u_0 = (0 \text{ (valeur } i_1), 0 \text{ (valeur } i_2), 0 \text{ (valeur } i_3), 0 \text{ (valeur } i_4))$ allant de u_0 à u_n.</p> <p>$u_{n+1} = [(1 + u_n(2) + u_n(4))/3$ (nous avons entouré ces trois voisins), $[(2 + u_n(1) + u_n(3))/3, [(3 + u_n(2) + u_n(4))/3, [(4 + u_n(3) + u_n(1))/3]$.</p> <p>La suite (u_n) vérifie $u_{n+1} - u_n < k u_n - u_{n-1}$ (le majorant) avec $k \in \mathbb{N}$, donc elle converge</p>
<p>L'idée est de construire une suite de fonctions, semblable à une suite de nombres croissants qui serait majorée.</p> <p>Supposons que la valeur prescrite en les points rouges est positive en chacun des points rouges. À chaque instant n, on définit une fonction f_n qui prendra toujours les valeurs prescrites aux points rouges. A l'instant 0, on définit f_0 de sorte que f_0 vaut 0 en chaque point bleu. On définit f_1 en chaque point bleu, comme la moyenne de f_0 en les voisins de ce point bleu. La fonction f_2 sera obtenue en ce point en prenant la valeur moyenne prise par f_1 en ces voisins, etc. Clairement, f_1 est positive partout. Elle est partout supérieure à f_0. La fonction f_2 est obtenue en prenant la moyenne de f_1. On en déduit que f_2 est une fonction supérieure à f_1 (en chaque site, la valeur prise par f_2 en ce site est plus grande que celle prise par f_1).</p> <p>De cette manière, on montre par récurrence que f_n est une suite croissante de fonctions. En chaque point x, $f_n(x)$ est une suite croissante. Cette suite est majorée car elle ne peut jamais dépasser la plus grande valeur prise par f_0 sur les points rouges (on peut aussi le voir par récurrence). On en conclut qu'elle converge vers une valeur $f(x)$. Mais qu'advient-il à la limite ? Quid de la condition qu'en chaque site bleu, la valeur de f_{n+1} est la moyenne des valeurs de f_n lorsque n tend vers l'infini ? La fonction f vérifie la propriété de la moyenne en ce point bleu. Que vaut-elle sur les sites rouges ? Réponse : la valeur prescrite pour chaque f_n. La fonction limite f est la solution au problème. On a utilisé une idée de point fixe.¹</p>	

¹ A. Laraby, « La moyenne des voisins », op. cit., in Quadrature, magazine de mathématiques pures et épicées, pp.7-8.

7/ Le dévoiement du laplacien $\Delta f = 0$

a) La divergence du laplacien

*i Le conformisme des juges . ii Slave law et free law
iii L'érosion des bords selon Bentham. iv La common law aussi rechigne*

b) Non-linéarité et non-connexité de la jurisprudence

*i Un « suivi » jurisprudentiel non-linéaire
ii Des morceaux de voisinage jurisprudentiels*

c) Une jurisprudence reconfigurée étonnamment

*i Une reconnexion sous forme de « somme »
ii Une jurisprudence qui se mord la queue*

Annexe VIII

Quels sont les deux graphes isomorphes ?		
	<ul style="list-style-type: none"> ● A et K ● K et X ● F et X ● A et F 	<p><i>Bonne réponse :</i></p> <p>K et X</p>
		1

Annexe IX

Un être bidimensionnel se promenant dans l'espace d'un tore plat carré

Ce personnage, libre de son mouvement, reste néanmoins prisonnier de tout carré rose. S'il vient à disparaître par le haut, il réapparaît en bas. S'il sort par la droite, il revient par la gauche, etc. L'ensemble des carrés roses, sans espace blanc entre eux, « pavent » le plan.² En l'espèce, **le tore se construit en collant bord à bord les côtés opposés d'un carré.**

¹ Colin de la Higuera, *Réseaux sociaux et graphes*, op. cit., <http://www.comin-ocw.org/contents/inf011/20131010/#t=2001.467>

² Damien Gaboriau, *Gnash, un tore plat !* 10 juin 2012, <http://images.math.cnrs.fr/Gnash-un-tore-plat.html>

Cinquième leçon des Lumières:

La souveraineté individuelle et la volonté générale au cœur l'une de l'autre

§ 48. – L'extension non archimédienne de la science et du droit des Lumières

§ 49. – La conservation de la partie autant que du tout par le contrôle des lois

§ 48. – L'EXTENSION NON ARCHIMEDIENNE DE LA SCIENCE ET DU DROIT DES LUMIERES

1/ Les formulations modernes de l'axiome d'Archimède

a) L'extension non archimédienne de la science nouvelle

i Un axiome de continuité

ii Leibniz, ou le dialogue entre des grandeurs qui ne se parlaient pas

b) L'extension non archimédienne du droit nouveau

i Des Lumières humaines non archimédiennes

ii Hobbes, Locke et Montesquieu

iii Les deux faces de Rousseau

2/ Non-linéarité, réorganisation et plasticité

i Des caractéristiques principales du vivant

ii La capacité institutionnelle de se « réviser »

iii Réviser est moins se séparer que se remodeler

3/ Dualité du moi et du moi commun

a) La dualité rousseauiste

i Condition nécessaire et suffisante au plan social

ii S'abstraire de soi au plan individuel

iii Les roues concentriques du moi et du moi commun

iv Rousseau, Kant et Rawls

b) La dualité madisonienne

i L'accent sur les particularités

ii La confrontation entre particuliers

iii Le nouement des fonctions étatiques

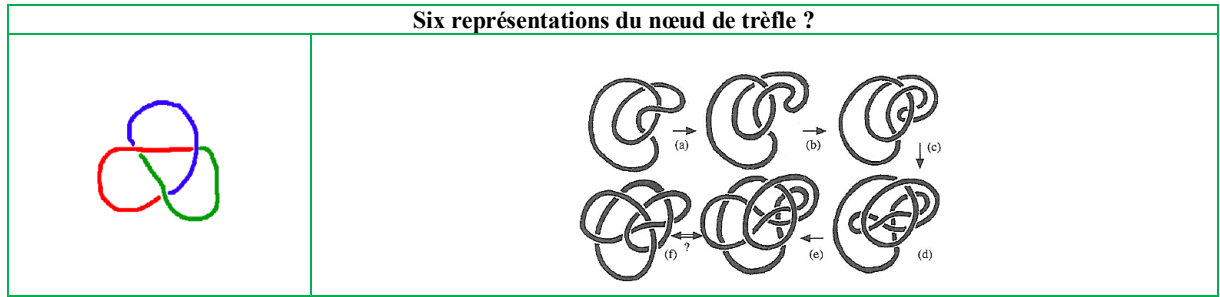
iv La déformation du nouement borroméen

v Comment sortir du sac de nœuds des factions

vi Madison, Rousseau et Rawls à nouveau

Annexes II et II, 319

Annexe II



Les croquis (a) et (e) représentent le même nœud - le trèfle. En effet, on peut voir comment la représentation (a) peut être ramenée à la représentation (e). Par contre, tous nos efforts pour transformer le croquis (f) en une représentation du trèfle sont voués à l'échec, **mais comment le prouver ?** Le fait que nous n'ayons pas réussi à passer d'un croquis à un autre ne démontre rien : quelqu'un de plus astucieux ou de plus chanceux pourrait fort bien y parvenir facilement.

Supposons maintenant que nous ayons à notre disposition un invariant des nœuds, i.e. **un moyen permettant d'associer à chaque représentation plane d'un nœud un certain objet algébrique (un nombre, un polynôme) de sorte que cet objet ne varie pas lorsqu'on manipule le nœud comme dans les cinq premiers croquis de (a) à (e).** Lorsque deux représentations planes (par ex. (f) et (e)) sont données, on peut alors calculer leurs invariants. Si les valeurs de l'invariant obtenues sont différentes, **on peut conclure que les deux représentations ne peuvent certainement pas définir le même nœud (sinon elles auraient le même invariant !).**¹

Annexe III

Où se trouve l'entrelacs de Borromée qui ne peut se disjoindre sauf à le couper ?²

Les 3 anneaux sont libres (rouge sur jaune et bleu, jaune sur bleu). L'entrelacs reste trivial .	Un seul couple d'anneaux enlacés : jaune (entre rouge et bleu) est en fait libre (le tirer dans la direction vers nord-est)	Deux couples d'anneaux enlacés (rouge et bleu ; rouge et jaune)	Les trois anneaux sont enlacés deux à deux : on obtient enfin l'entrelacs désiré indénouable

¹ A. Sossinsky, *Nœuds*, op. cit., pp.91-92. Le calcul des « polynômes de Conway » des représentations (a) et (f) donnent respectivement $x^2 - 3x - 1$ et $x^4 - x^2$. On peut donc conclure que les diagrammes en question représentent deux nœuds différents (ibid.)

² <https://www.mathcurve.com/courbes3d/borromee/borromee.shtml>

§ 49. – LA CONSERVATION DE LA PARTIE AUTANT QUE DU TOUT PAR LE CONTROLE DES LOIS

1/ L'approche en science

a) L'ABC de la notion de groupe, 213

- i Retour à notre cher triangle équilatéral, 213*
- ii Le groupe symétrique des permutations, 213*

b) La notion de groupe dans l'histoire, 325

- i Les Grecs n'en avaient qu'une vue partielle, 325*
- ii La notion de groupe depuis les Lumières, 326*
- iii Les groupes continus, 328*

c) Ce qui convient de retenir pour le droit

- i Les idées de transformations et d'invariance.*
- ii L'idée de groupe-quotient*
- iii L'idée de sous-groupe*
- iv L'idée de générateur*
- v Les idées de stabilité, d'objectivité et de généralité*
Annexes I, II et III, 330

2/ Les premières traces de « groupe » en philosophie politique

- i L'individu, sans épaisseur, mais unifié comme tout, est le résultat d'un groupe*
- ii Accélération et principe d'inertie ; self-preservation en politique*
- iii Contrat social, volonté générale*

3/ De l'idée de groupe en droit positif

- i Pourquoi pas un groupe cyclique ?*
- ii « Le groupe cyclique d'ordre 2 » de Rousseau*
- iii Ne pas oublier l'élément « propriété »*
- iv La propriété, condition de la liberté*
- v Et la fraternité ?*

4/ La composition des lois sous contrôle

a) Le rôle des nombres premiers en droit

b) Le modèle du groupe de Klein en droit

- i Quid d'un tel groupe en mathématiques ?*
- ii La séparation des pouvoirs, « groupe algébrique »*
- iii Pourquoi ne pas envisager d'autres structures algébriques ?*
- iv L'idée de « groupe » de lois positives*
- vi Le droit positif comme « groupe-quotient »*
- vii Un clin d'œil à Claude Lévi-Strauss*

5/ Des groupes de Lie dormant en droit

a) Une première idée en économie

- i La notion de courbe d'indifférence comme classe d'équivalence*
- iii L'impact du progrès technique sur la combinaison des facteurs de production*

b) L'effet de l'intelligence artificielle en droit

- i On en revient encore à l'isocompétence collective*
- ii Le progrès technique insufflé par l'IA*

c) A la recherche d'autres groupes continus en droit

- i Les notions d'égalité et de direction comme relations d'équivalence*
- ii Le groupe comme invariance du devenir*
- iii La signification juridique de la valeur propre $\lambda = 1$*
- iv La conservation de l'ellipsoïde constitutionnel*

d) Un aspect volontairement auto-contradictoire du droit

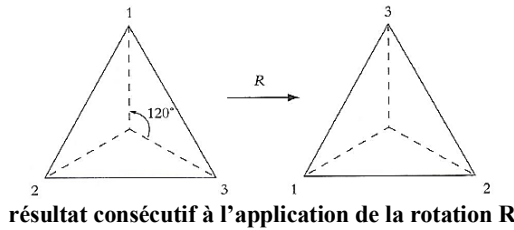
Annexes V et VI, 333

1/ L'approche en science

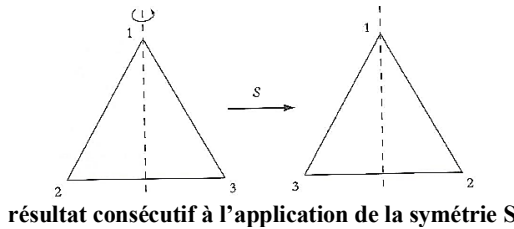
a) L'ABC de la notion de groupe

i Retour à notre cher triangle équilatéral

Numérotons les sommets d'un tel triangle en commençant par celui d'en haut et en continuant dans le sens contraire à celui d'une montre. Nous pouvons agir sur ce triangle en le pivotant d'un angle de 120° (ou $2\pi/3$) par rapport au centre du triangle.¹ La rotation R transforme le sommet n°1 en sommet n°3, le sommet n°2 en sommet n°1, et le sommet n°3 en sommet n°2 :

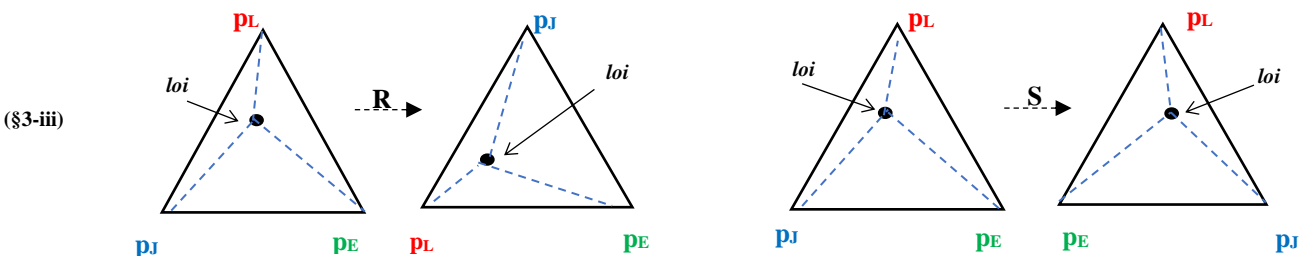


Le triangle n'a pas changé, mais la numération 1-2-3 s'est transformée en 3-1-2. **La rotation R a laissé la figure invariante.** L'opération n'est pas la seule cependant à produire cet effet. Si nous traçons un axe de symétrie passant par le centre et l'un des sommets (n°1 par ex.), la transformation S (symétrie) laisse le 1^{er} sommet, situé sur l'axe, fixe alors que les deux autres sont intervertis : le n° 2 devient le n°3, et le n°3 devient le n°2. L'ordre est passé de 1-2-3 à 1-3-2 :



La symétrie laisse également le triangle invariant.²

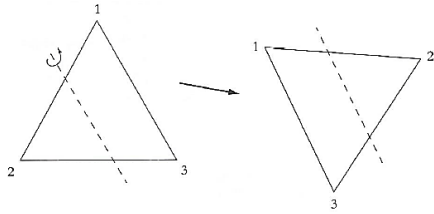
Traduisons en droit : quelle que soit la permutation des sommets du triangle équilatéral dans lequel la loi est « tissée » par les trois pouvoirs, leur contribution respective ne change pas à un moment donné (par ex. : **p_L** : 70 % ; **p_E** : 20 % ; **p_J** : 10 %). La conclusion s'impose à l'évidence, à condition



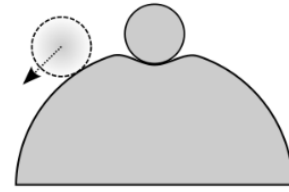
de ne pas effectuer les symétries n'importe comment. Il y a en mathématiques des symétries qui ne laissent pas la figure invariante (*cf. infra* le triangle la tête en bas). La position du triangle au départ affecte aussi la perception en droit, car ce n'est pas par hasard que le triangle, que nous avons tracé pour la confection des lois, repose sur un côté plutôt que sur une pointe. Nous parlons de barycentre, donc de « poids », en politique comme en physique. Certes, le barycentre n'en existe pas moins, au niveau du calcul, dans le système solaire flottant dans « le vide », mais l'impression de stabilité implique, sur terre, psychologiquement l'apex vers le haut (nous retrouvons cette sensation dans la représentation de l'équilibre physique métastable qui tient à peu de chose).

¹ Javier Fresián, *Jusqu'à ce que l'algèbre nous sépare. La théorie des groupes et ses applications*, in Le monde est mathématique, Coll. présentée par Cédric Villani, 2013, pp.44-45.

² *Ibid.*

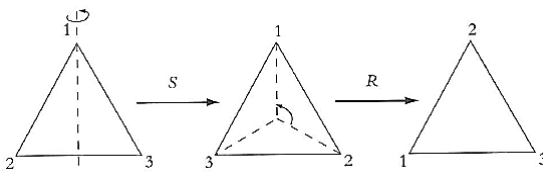


symétries ne laissant pas le triangle invariant

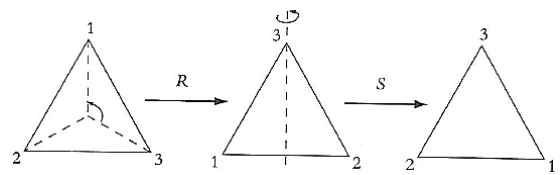


bille en équilibre métastable au sommet d'un hémisphère¹

Ça se transforme (localement) sans que cela change (globalement)..., mais est-ce toujours le cas lorsque les opérations de rotation et de symétrie entrent en composition ? Appelons SR la combinaison des opérations R (en 1^{er}) et de symétrie S (en 2nd). Je vois que leur composition perturbe l'ordre 1-2-3 en 3-2-1. De même, si je modifie l'ordre des facteurs en composant d'abord S puis R, soit RS, l'ordre final devient 2-1-3 et non 3-2-1 contrairement à l'opération SR. La figure n'en reste pas moins chaque fois la même.

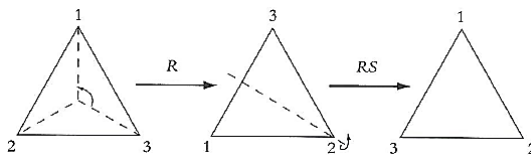


composition des opérations S et R, notée SR

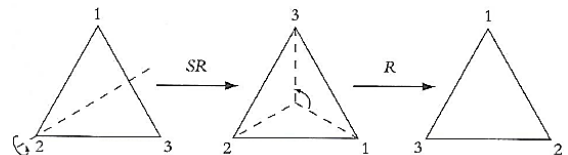


composition des opérations R et S, notée RS

Continuons. Si je compose R deux fois de suite, soit R², l'ordre se révèle 2-3-1. Si je compose (RS)R, soit R d'abord, puis RS, ou R(SR), soit SR d'abord puis R, j'obtiens indifféremment le résultat, 1-3-2.



transformations (RS)R
(R d'abord puis RS)



Les transformations R(SR) et (RS)R
produisent le même résultat

Pas moyen donc de déstabiliser la configuration donnée (triangle équilatéral avec pointe en haut) à partir des opérations décrites de rotation et de symétrie ou de leur combinaison. En droit constitutionnel, le schéma de la séparation des pouvoirs ne varie pas davantage sous l'apparence de ces transformations, toutes choses étant égales par ailleurs (nous ne prenons pas en compte ici les perceptions des trois pouvoirs les uns vis-à-vis des autres, ni le jeu des alliances possibles entre deux pouvoirs contre un troisième).

(§37-1/
§46-4/)

L'ensemble des transformations qui permettent de revenir à la configuration initiale forme un « groupe » au sens mathématique si cet ensemble G est doté des quatre propriétés suivantes :

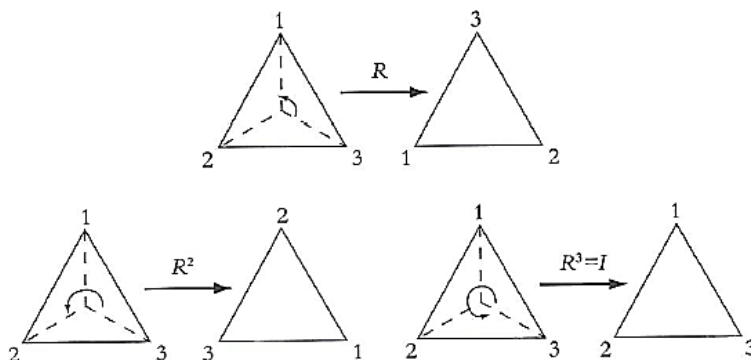
1/ l'ensemble G est muni d'une **loi de composition interne**, \cdot , soit (G, \cdot) . En composant deux éléments a et b appartenant à G, on obtient un 3^e élément, c, toujours contenu dans G. Autrement dit, $c \in G$ autant que $a \in G$ et $b \in G$. On ne sort pas de l'ensemble. Celui-ci reste stable. Nous avons vu que les transformations SR et RS restituent le même type de triangle, l'ordre des sommets variant seulement ;

2/ la loi (\cdot) est **associative**. On peut composer plus de deux éléments à la suite sans être obligé de mettre des parenthèses algébriquement : $\forall a, b, c \in G, (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) = a \cdot b \cdot c$. Dans notre exemple, (RS)R et R(SR) produisent le même résultat ;

3/ il existe dans G **un élément neutre e** tel que tout élément de G, composé avec e, ne change pas cet élément : $\forall a \in G, \text{ et } e \in G : a \cdot e = e \cdot a = a$. Dans tout groupe, il n'y a qu'un seul élément e.

¹ Ibid.; <https://fr.wikipedia.org/wiki/Métastabilité>

La transformation RRR (on applique la rotation trois fois de suite) donne une nouvelle rotation R^3 , soit $120^\circ \times 3$, qui redonne la forme initiale. R^3 n'a aucun effet sur le triangle : l'ordre 1-2-3 entre les sommets est maintenu. R^3 et la transformation identité, $R^3 = I$, jouant le rôle d'élément neutre. La « table de transformation » du triangle permet de vérifier que I est la transformation qui consiste à



ne rien faire (chaque case indique la composition des transformations se trouvant dans la ligne et la colonne correspondante (on commence par celle de la colonne, suivant la flèche noire) :

\curvearrowright	I	R	R^2	S	RS	SR
I	I	R	R^2	S	RS	SR
R	R	R^2	I	RS	SR	S
R^2	R^2	I	R	SR	S	RS
S	S	SR	RS	I	R^2	R
RS	RS	S	SR	R	I	R^2
SR	SR	RS	S	R^2	R	I

ex. : $RR^2 =$
I
 (I désigne la rotation identité)

4/ tout élément de G possède **un symétrique**. Quand on compose un élément a de G et son symétrique, b de G, ils se neutralisent. On retombe sur l'élément neutre : $\forall a \in G$, il existe b dans G tel que $a \cdot b = b \cdot a = e$. Les inverses sont uniques aussi. Appliquons la rotation R, puis R^2 . On obtient $R^2R = R^3 = I$ de telle sorte que R^2 est la transformation inverse R, jouant le rôle d'élément symétrique. La table de transformations du triangle supra confirme cette transformation réversible.¹

Quand on abordera le droit à la lumière de la théorie des groupes, on devra se soucier de voir respecter ces quatre propriétés. En attendant, on observera que le groupe de transformations du triangle est isomorphe au *groupe symétrique des permutations* mélangeant un même ensemble de nombres.

ii Le groupe symétrique des permutations

Sans entrer dans la preuve de cette isomorphie incontestable, donnons-en au moins une idée.

Soit un ensemble composé de 5 éléments, les entiers naturels de 1 à 5. Une permutation σ est une façon de réarranger ces éléments comme par ex :

$$\sigma_1 = \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 1 & 4 \end{matrix} \quad \text{et} \quad \sigma_2 = \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \end{matrix}$$

L'ensemble {1,2,3,4,5} devient, via la permutation σ_1 , l'ensemble {2,5,3,1,4}, dont chaque élément est une image de l'élément correspondant du 1^{er} ensemble (ex. en rouge). Idem pour la permutation σ_2 .

¹ Ibid., pp.43-53 : Nathan Greimer, Structures algébriques : groupes, anneaux, corps, 16 décembre 2015, <https://www.youtube.com/watch?v=baLCGbGHHhw>

Pour donner à ces opérations une structure de « groupe », il est nécessaire de définir une loi de composition interne, soit $\sigma_1 * \sigma_2$ que l'on obtient en rappelant qu'il faut commencer par σ_2 :

$$\sigma_1 = \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 1 & 4 \end{array} \quad \text{et} \quad \sigma_2 = \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \end{array} \quad \sigma_1 * \sigma_2 = \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 4 & 2 & 5 \end{array}$$

L'image de 1 dans σ_2 est 3 ; ce 3 dans σ_1 devient 3, donc $\sigma_1 * \sigma_2 = 3$. Autre ex. : l'image de 2 dans σ_2 est 4 ; ce 4 dans σ_1 devient 1, donc $\sigma_1 * \sigma_2 = 1$. Cette façon de composer vérifie toutes les propriétés du groupe, comme le lecteur peut le vérifier lui-même. Quel que soit le nombre d'éléments n , on obtient le groupe symétrique S_n . Ce groupe est important, sachant qu'un petit théorème établit que tout groupe fini d'éléments peut se retrouver dans un tel groupe symétrique. Le groupe des transformations du triangle est un groupe symétrique. Dans notre exemple portant sur le triangle équilatéral, une transformation n'était rien d'autre qu'une manière de permuter les chiffres 1, 2, 3. *Pour associer une permutation à chaque transformation, il suffit d'observer quel chiffre correspond à quel sommet après l'application. Voilà pourquoi une transformation laissant le triangle invariant est uniquement déterminée par son action sur les sommets.*¹

La table de correspondances des permutations pour chaque transformation est la suivante :

$$\begin{array}{l} I \leftrightarrow \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{array} \quad R \leftrightarrow \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{array} \quad R^2 \leftrightarrow \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{array} \\ S \leftrightarrow \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{array} \quad SR \leftrightarrow \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{array} \quad RS \leftrightarrow \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{array} \end{array}$$

Veut-on, réciproquement, composer les permutations, on retrouve les transformations respectives comme celle, par exemple qui correspond à la transformation RS :

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{array} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{array} = \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{array}$$

La correspondance est parfaite. Du point de vue de la structure, le groupe des transformations qui laissent le triangle invariant est identique au groupe symétrique S_3 . ²Les deux groupes sont isomorphes. Il n'y a rien ici de « pseudo-» ou d'à peu près comme entre la science et le droit !

On notera qu'une permutation qui n'échange que deux éléments s'appelle une *transposition*. Dans le cas de S_3 , ou du groupe d'ordre trois (l'ordre d'un groupe est le nombre d'éléments qui le composent), on compte $3! = 3 \times 2 = 6$ permutations simples dont trois transpositions ; t_1 (2,3) (qui échange 2 et 3), t_2 (1,3) (qui échange 1 et 3) et t_3 (qui échange 1 et 2). Les autres permutations sont l'identique id. (qui échange 1 avec 1, 2 avec 1, 3 avec 3) et les deux permutations c_1 (1,2,3) qui échange 1 et 2, puis 2 et 3 et c_2 (2,1,3) qui échange 2 avec 1 et 1 avec 3).

Ce groupe est le groupe des « isométries » du plan qui conserve le polygone à 3 côtés (le triangle). Les transpositions t_1 , t_2 et t_3 préservent les distances et les permutations préservent les angles ($2\pi/3$). Les transpositions correspondent à l'échange des sommets du triangle équilatéral. Les permutations c_1 et c_2 correspondent aux rotations. L'id. renvoie à la rotation identique qui ne modifie rien. L'isomorphisme réapparaît entre le groupe symétrique S_3 et celui des transformations.³

- Mais pourquoi dit-on que le groupe est « symétrique » ?

- Les mathématiques recourent à l'adjectif « symétrique » pour dire par ex. que la fonction $f(x,y) = x^2 + 5xy + y^3$ est symétrique car $f(x,y) = f(y,x)$. Quand j'inverse les variables x , et y , j'obtiens la même chose, i.e. la même surface, la fonction comportant deux variables. Le groupe est symétrique en ce sens.

¹ J. Fresián, *La théorie des groupes et ses applications*, p. cit., p.56

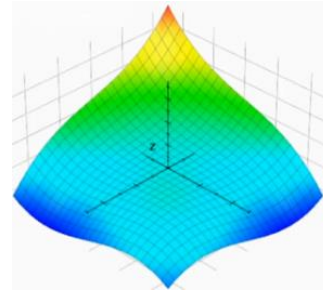
² *Ibid.*, pp.56-57.

³ Gilles Bailly Maître, *Transpositions et cycles*, Univ. de La Rochelle, 15 avril 2016, <https://www.youtube.com/watch?v=Xi0IvDRD8ms>

La fonction $f(x,y) = x^2 + 5xy + y^3$ ci-contre est symétrique par rapport à un axe, et même par rapport à un plan.

La fonction $g(x,y,z) = xy + yz + 3xyz$ est également symétrique car, si je change x en y , rien ne change, y en z , idem, x en z , aussi.

L'aspect « symétrique » dénote une contrainte plus forte que le simple fait d'inverser $f(x)$ en $f(y)$. **Quand a une formule avec n variables, rien ne change quand on mélange comme on veut les variables.**¹



b) La notion de groupe dans l'histoire

i Les Grecs n'en avaient qu'une vue partielle

Le premier mathématicien à employer le terme de « groupe » fut Evariste Galois qui s'intéressa précisément aux groupes de permutation. Le terme apparut formellement au début du XX^e siècle, mais en profondeur, corrige Elie Cartan au XX^e siècle, *la notion a joué un rôle dans la fondation même de la géométrie, et Henri Poincaré a pu dire qu'elle préexistait nécessairement dans l'esprit des géomètres qui ont codifié la géométrie élémentaire.* Une telle géométrie n'est-elle pas l'étude du groupe dit des déplacements ? On a défini quelquefois ce groupe comme l'ensemble des transformations qui, appliquées aux différents points de l'espace, conservent la forme et la grandeur des figures.²

Le groupe des transformations du triangle en donne une illustration. On peut également considérer le groupe des déplacements qui pavent le plan par des triangles équilatéraux de côté α , pour en rester à cette figure. Ici encore, la composition d'une translation de longueur α (déplacement a) et d'une rotation de 120° (déplacement b) n'aboutit pas au même résultat selon que l'on fait agir a avant ou après b , mais ces déplacements ne laissent pas moins invariante la figure donnée. (fig.a)

<p>Ensemble des déplacements qui laissent invariant le pavage du plan par des triangles équilatéraux de côté α (rotation de 120° autour du centre T_0). Appartiennent à cet ensemble le déplacement identique e et le déplacement a^{-1} en sens inverse. La composition ab transforme T_0 en T_1, et la composition ba transforme T_0 en T_2.</p>	<p>Ensemble des déplacements et des retournements (déplacements suivis d'une symétrie par rapport à un plan) qui laissent invariante la configuration du tétraèdre régulier $abcd$. Il existe 6 symétries par rapport à des plans. Quand on les compose autour de droites telles que s, on obtient des rotations de 180°. Quand on les compose autour des hauteurs (t), on obtient des rotations de 120°. Les quatre sommets du tétraèdre $abcd$ permutent de 24 ! manières</p>

Il se trouve, remarque Jean Dieudonné, que ce groupe qui laisse invariant le pavage du plan a une infinité d'éléments, mais nous en connaissons d'autres qui sont finis. Pensons par ex. au tétraèdre régulier que nous avons également envisagé en droit. On peut en chercher les déplacements et les retournements (déplacements suivis d'une symétrie par rapport à un plan) qui laissent invariant le

(§4-i)

¹ Gilles Bailly Maitre, Permutations, Univ. de La Rochelle, 15 avril 2016, <https://www.youtube.com/watch?v=fAqIGVvGpTU>

² E. Cartan, « La théorie des groupes », op. cit., p.15 et 18.

tétraèdre. On en recense 24 et pas un de plus. Le groupe G permute entre eux les quatre sommets et il n'y a que $4! = 24$ manières différentes de ranger ces quatre points. (fig.b) ¹

La géométrie élémentaire renvoie à la géométrie grecque ancienne, notamment à Euclide qui avait introduit la notion de *figures égales* en formulant, poursuit Elie Cartan, les axiomes suivants : (axiome 1:) si la figure F est égale à la figure F' , la figure F' est égale à la figure F ; (axiome 2:) si la figure F est égale à la figure F' , et la figure F' est égale à la figure F'' , la figure F est égale à F'' . Cela posé, un *déplacement* apparaît être une transformation ponctuelle de l'espace qui transforme une figure F quelconque en une figure égale. Tous ces déplacements forment un groupe.

En effet, 1/ la transformation résultant de deux déplacements successifs transforme respectivement la figure F dans la figure F' , puis la figure F' dans la figure F'' qui est bien égale à F d'après le second axiome d'Euclide ; l'inverse d'un déplacement transformant F dans la figure F' transforme F' dans la figure F (axiome 1). C'est donc aussi un déplacement.

On voit que la propriété des déplacements de former un groupe est liée essentiellement au seul axiome formulé par Euclide d'après lequel deux figures égales à une troisième sont égales entre elles. Mais la substitution de la notion de groupe des déplacements à celle de l'égalité des figures a l'avantage de mettre en évidence deux autres axiomes admis implicitement par Euclide sans être formulés explicitement par lui :

(axiome 3:) Etant données deux figures égales F et F' , il existe entre ces deux figures une correspondance point par point telle que toute portion de F soit égale à la portion correspondante (ou homologue) de F' ;

(axiome 4:) Etant données deux figures égales F et F' , si l'on adjoint à F une figure Φ , il est possible de trouver une figure Φ' égale à Φ telle que la figure composée (F, Φ) soit égale à la figure composée (F', Φ') .²

Il faut comprendre pourquoi les Grecs n'ont pas su formuler explicitement les axiomes 3 et 4, et formuler ainsi clairement la notion de groupe.

Il est un fait, remarque à nouveau Dieudonné, que les Grecs, qui ignoraient les nombres négatifs, ne pouvaient pas connaître les groupes additifs des entiers ou des nombres réels. Ils ne pouvaient symétriser de tels nombres par leur opposé (par ex. : $2 - 2 = 0$ qui est l'élément neutre de l'addition). Par contre, ils avaient tout ce qu'il fallait dans leur mathématique pour parler des groupes multiplicatifs des nombres rationnels positifs (ex., des fractions, et même des nombres réels positifs. L'inverse d'une fraction est encore une fraction. Par ex. $1/(2/3) = 3/2$, et $2/3 \times 3/2 = 1$ qui est l'élément neutre pour la multiplication. De même, l'inverse d'un nombre strictement positif est encore un nombre strictement positif comme l'inverse de 5 est $1/5$, car $5 \times 1/5 = 1$, soit l'élément neutre pour x , ou, pour les Modernes qui écriront les nombres avec une virgule : $5 \times 0,2 = 1$.

Il est donc naturel qu'ils n'aient guère eu l'idée d'y chercher une notion générale. Sans épuiser la question, il convient d'ajouter aussi que les Grecs n'étudiaient que les propriétés des figures sonnées statiques. Or lorsque nous parlons de groupes de déplacements, il s'agit d'opérations qui transforment une figure en une autre, c'est-à-dire d'une notion abstraite qui ne peut être représentée graphiquement. Les Grecs n'ignoraient pas la notion de déplacement, mais ni eux ni leurs successeurs jusqu'en 1800 n'ont songé à considérer un déplacement comme un objet susceptible d'entrer dans un calcul.³

- Vous avez pourtant introduit vous-même la notion de groupe par une telle représentation graphique.

ii La notion de groupe depuis les Lumières

- Oui, par pédagogie, en recourant à l'imagination et pas au seul raisonnement, mais historiquement, c'est l'idée de permutation qui est venue avant celle des transformations des figures. Comme pour les nombres, les mathématiciens se sont aperçus qu'ils pouvaient permuter les variables d'une fonction. A la fin du XVIII^e siècle, Lagrange eut cette idée pour résoudre des équations algébriques « par

¹ Jean Dieudonné, « La genèse de la théorie des groupes », in La Recherche, n°103, sept. 1979, p.866 ; Alain Connes, « Symétries », in Pour la science, n° 292, févr. 2001, p.39.

² E.Cartan, « La théorie des groupes », pp.18-19.

³ J. Dieudonné, « La genèse de la théorie des groupes », pp.767-768.

radicaux ». Ses prédécesseurs savaient résoudre l'équation du second degré $ax^2 + bx + c$ en calculant ses racines au moyen des coefficients a, b, c , et du « radical » $\sqrt{b^2-4c}$, appelé le discriminant de l'équation. Ils savaient également résoudre l'équation du 3^e degré $x^3 + px + q$ en utilisant les formules de Cardan dans lesquelles interviennent aussi des racines (cubiques), mais Lagrange voulait obtenir, de façon a priori, une méthode générale, basée sur les permutations, capable d'expliquer les formules de résolution des équations jusqu'au 4^e degré.¹

Lagrange cherche à résoudre une équation dont les racines sont r_1, r_2, \dots, r_n . Soit une quantité t en fonction de ces racines $t = f(r_1, r_2, \dots, r_n)$. L'expression $t = f(r_1, r_2, \dots, r_n)$ s'avère plus facile à calculer en fonction des coefficients de l'équation si f est symétrique (f garde une valeur constante en permutant les racines). (cf. son *Mémoire* de 1770).²

Dans cette entreprise, Lagrange ne fut pas le seul. Il revint, peu de temps après, à Galois de proposer une méthode, basée sur la même idée de permutation des variables (ou racines) d'une équation. Galois parla de *substitution*. Même si les mathématiciens peuvent résoudre une équation du 5^e degré, ou plus, dans des cas particuliers, Galois prouva qu'il est impossible de résoudre une telle équation par une méthode générale dans l'esprit de Lagrange. Grâce à la notion de « groupe de permutations » des racines d'une équation, il fut le premier à énoncer un critère nécessaire et suffisant de résolubilité par radicaux ($\sqrt{\quad}$) d'une équation algébrique donnée, mais son théorème d'impossibilité ne permet pas cependant de calculer effectivement les racines d'une telle équation.³

Résoudre par des radicaux revient à ramener n'importe quelle équation algébrique à une équation $x^n = a$ en extrayant une racine n -^{ième}. Le problème est resté posé jusqu'à la fin du XVIII^e siècle où le problème s'est enfin révélé insoluble. Abel avait commencé à montrer au début du XIX^e siècle qu'il n'existe pas de formule générale pour résoudre les équations du 5^e degré. Galois démontra que les solutions résidaient dans les « symétries » des racines de l'équation.⁴

La composition des permutations fut la première source de la théorie des groupes. La seconde fut celle portant sur des ensembles eux-mêmes. Pour Euclide, observe toujours Dieudonné,

un angle ne pouvait être compris qu'entre 0 et 2 droits et quand il parlait de somme de deux angles, il devait donc toujours se restreindre au cas où cette somme elle-même est au plus 2 droits. [...] Il était difficile de dissocier l'idée intuitive d'angle de celle de rotation plane : la somme de deux angles correspond à la « composition » de deux angles correspondants. Or, depuis les premières observations astronomiques (ou l'invention de la roue), on était familier avec l'idée d'un mobile faisant un nombre quelconque de tours autour d'un point.

Un angle de 360° n'avait, dans ces conditions, aucun sens, puisqu'il signifiait un « déplacement identique » pour lequel l'« angle » de la rotation est de 0°. La limitation de la géométrie élémentaire ne put être surmontée que

*lorsque la trigonométrie proposa de mesurer un angle non seulement par un nombre θ compris entre $^\circ$ et 360° mis par tous les nombres $\theta + k \times 360^\circ$, où k est un nombre entier quelconque. Ainsi, ajouter des « mesures » $\alpha + m.360^\circ$ et $\beta + n.360^\circ$ de deux angles fournit une des mesures $\alpha + \beta + (m+n).360^\circ$ de leur somme. Nous reconnaissons là un des exemples les plus simples de groupe où les « objets » que l'on compose sont des ensembles, **plus précisément sur des classes d'équivalence**. Tous les éléments de la classe sont de la forme $x + n.360^\circ$.*

*Euler a rencontré en théorie des nombres une situation tout à fait analogue. En étudiant la divisibilité des entiers par un entier donné n , il a été amené à composer non pas des entiers isolés, mais des « **classes d'entiers modulo n** », **c'est-à-dire des entiers de la forme $r + k$** . Euler a-t-il été conscient de l'analogie avec la somme des « mesures » d'angles ? Toujours est-il qu'il n'en a rien dit et c'est dans un contexte très différent et inattendu que va surgir la première définition précise d'un calcul sur les classes d'équivalence avec la théorie des formes quadratiques binaires développée par Gauss dans ses *Disquisitiones arithmetica* (1800). [Une forme quadratique binaire est un polynôme du 2^e degré $Q(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$ où a, b, c sont des entiers. Par ex., $4x^2 + 1y^2 = 17$]⁵*

¹ Jeanne Rochaud, « Lagrange et les équations algébriques », in Inter-Irem, *La rigueur et le calcul*, CEDIC, Paris, 1982, p.254-255.

² Amine Marrakchi, *Résolution des équations de degré 3 et 4*, 30 janvier 2014, http://images.math.cnrs.fr/resolution-des-equations-de-degre.html?id_forum=11509. L'article a l'avantage de faire un parallèle avec les permutations des sommets d'un triangle équilatéral.

³ E.Cartan, « La théorie des groupes », pp.26-27 ; Tangente Sup, *Evariste Galois. Un génie romantique*, n°60, passim

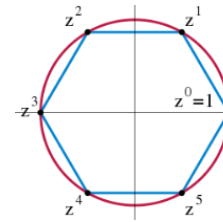
⁴ *Le concept de symétrie va bien au-delà des simples symétries géométriques.* (Alain Connes, *Symétries*, in Pour la science, n°292, 2001, p.36).

⁵ J. Dieudonné, « La genèse de la théorie des groupes », p.872. Nous soulignons.

Dans cette théorie, Gauss utilise un procédé de composition associant à certaines formes (les discriminants $b^2 - 4ac$) une 3^e forme (de même discriminant). Gauss détermine également d'autres groupes dans des domaines que nous avons déjà entrevus dans notre travail : les racines $n^{i\grave{e}me}$ de l'unité et les classes d'entiers modulo n . Pourquoi donc les racines $n^{i\grave{e}me}$ de l'unité forme-t-elles un groupe autant que les entiers modulo n de la forme $r + kn$ (un reste + des multiples de n) ?

(§27-2/)

Réponse : les racines $n^{i\grave{e}me}$ de l'unité sont les nombres complexes z tels que $z^n = 1$, avec n désignant un nombre entier strictement positif. Cet ensemble, muni de la multiplication forme **un groupe cyclique** attendu que tous les éléments sont des puissances (ce n'est que quand le groupe est noté additivement que le terme *multiple* et non puissance est utilisé).



En notation multiplicative, les éléments d'un groupe cyclique sont : ..., $a^{-3}, a^{-2}, a^{-1}, a^0 = e, a, a^2, a^3, \dots$ où a^2 signifie $a \cdot a$, a^{-3} désigne $a^{-1} \cdot a^{-1} \cdot a^{-1} = (a \cdot a \cdot a)^{-1}$, etc. L'élément a est un **générateur**, ou élément primitif du groupe.

Les racines sixièmes complexes de l'unité forment un tel groupe dont z est *le générateur* (mais pas z^2 , car les puissances impaires de z ne sont pas engendrés par z^2 ; autrement dit, ces puissances ne sont pas des puissances de z^2).¹

Le groupe des racines $n^{i\grave{e}me}$ de l'unité respecte les quatre propriétés attachées à la notion de groupe. Ce groupe est aussi **stable** pour la composition que celui par ex. des permutations dans lequel on ne sort pas de l'ensemble même si l'arrangement d'arrivée diffère de celui de départ.

iii Les groupes continus

La notion de groupe a définitivement été dégagée au cours du XIX^e siècle, avec notamment Arthur Cayley (notion de groupe fini, indépendant des objets auxquels elle s'applique) et *le très original Sophus Lie* qui a étudié les groupes continus. Cette dernière théorie *s'appuie* sur l'étude des éléments infinitésimaux du groupe. *Ces éléments forment un certain type d'algèbre – appelée « algèbre de Lie » - qui contient toutes les informations nécessaires concernant la structure locale du groupe.*² En relation avec l'étude des équations différentielles et non plus algébriques, Sophus Lie a appréhendé ces groupes portant aujourd'hui son nom. Ces groupes contiennent une infinité d'éléments que l'on peut étiqueter par un ou plusieurs paramètres variant de façon continue.³

Le groupe de rotations $R(a)$ d'angle a est un groupe de Lie à un paramètre, le groupe $SO(2)$. C'est un groupe dit *abélien* puisque, outre les quatre propriétés classiques, ce groupe a la propriété d'être commutatif : $R(a) \circ R(b) = R(b) \circ R(a)$, le signe \circ signalant, comme \cdot , une composition, de rotations en l'espèce. Dans l'espace à trois dimensions, le groupe $SO(3)$ n'est plus commutatif. Par ex., si R_x et R_z désignent des rotations d'angle 90° autour des axes Ox et Oz respectivement, la transformation $R_x \circ R_z$ transforme le point (x,y,z) de coordonnées $(1,0,0)$ en le point $(0,0,1)$, tandis que $R_z \circ R_x$ le transforme en le point $(0,1,0)$. Autrement dit, $R_x \circ R_z$ n'est pas égal à $R_z \circ R_x$.

Tant pour le groupe $SO(2)$ (groupe des rotations planes) que pour le groupe $SO(3)$ (groupe des rotations en 3D), il s'agit bien, malgré leurs différences, d'un groupe au voisinage de l'identité (la rotation $R(0)$ d'angle nul), c'est-à-dire pour des angles de rotation infinitésimaux. Pour saisir ce caractère très local, que suggère l'infinitésimal, revenons au cas simple des rotations dans le plan.

Dans une rotation d'angle a autour de l'origine, tout point (x,y) du plan est transformé en un point (x',y') , avec $x' = \cos a \cdot x - (\sin a) y$ et $y' = (\sin a) x + (\cos a) y$. Cette rotation peut s'écrire sous la forme d'une matrice 2x2 décrivant le mouvement des axes et sa traduction trigonométrique avec $a = \theta$:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$\vec{i}' = \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}$

$\vec{j}' = \begin{cases} \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) \vec{i} + \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) \vec{j} \\ -\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j} \end{cases}$

La matrice de passage P est :

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

¹ [https://fr.wikipedia.org/wiki/Groupe_\(mathématiques\)](https://fr.wikipedia.org/wiki/Groupe_(mathématiques))
² R. Penrose, *A la découverte des lois de l'univers*, op. cit., p.260.
³ Arid Stubhaug, « L'audacieux Sophus Lie », in *Pour la science*, n°336, sept. 2005, p.73.

SO(2) est le groupe des matrices de rotation plane. Si l'angle a est très petit (et exprimé en radians), $\sin a$ est à peu près égal à a et $\cos a$ à 1 ; dans ce cas, la rotation d'angle infinitésimal a correspond à la transformation $x' = x - ay$ et $y' = ax + y$. Sous la même forme matricielle, la rotation se réécrit :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -a \\ a & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{I}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{L}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

où \mathbf{I} est la transformation identique (rotation d'angle nul) et \mathbf{L} « le générateur infinitésimal » des rotations dans le plan. Une rotation plane d'angle a quelconque s'exprime alors de façon simple en termes de a et du générateur infinitésimal $R(a) = \exp(a\mathbf{L})$. (rappel : formule d'Euler : $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$).¹

Dans le cas de SO(3), les rotations dans l'espace, la formulation est analogue en plus compliquée. Il y a trois paramètres pour décrire le groupe, car une rotation quelconque peut être décomposée en trois rotations successives d'angle a , b et c autour, respectivement, des axes Ox , Oy et Oz . Il y a trois générateurs infinitésimaux des rotations autour de chacun des trois axes. Le groupe n'est pas commutatif. La structure constituée par ces générateurs (et leur combinaison) vérifie des propriétés générales, indépendantes du groupe considéré. Elles définissent une *algèbre de Lie*.²

Telle est, en raccourci, la page ouverte à l'âge des Lumières sur la notion de groupe, fini et continu :

*Cette longue histoire n'aurait qu'un intérêt mineur si la notion de groupe était restée confinée aux parties assez restreintes des mathématiques où elle fut forgée. Mais depuis 100 ans, les groupes ont progressivement envahi presque toutes les disciplines, et une bonne partie de la physique par surcroît. On a pu dire sans exagérer qu'aucune idée plus fondamentale n'était apparue en mathématiques depuis l'invention du calcul infinitésimal ; la raison essentielle est sans doute que c'est la relation qui exprime, sous une forme précise et immédiatement utilisable, les idées vagues et universelles de « régularité » et de « symétrie ».*³

c) Ce qui convient de retenir pour le droit

- i Les idées de transformations et d'invariance.
- ii L'idée de groupe-quotient
- iii L'idée de sous-groupe.
- iv L'idée de générateur
- v Les idées de stabilité, d'objectivité et de généralité

¹ http://uel.unisciel.fr/physique/outils_nancy/outils_nancy_ch11/co/apprendre_ch11_19.html ; A. Stubhaug, « L'audacieux Sophus Lie », p.73.

² A. Stubhaug, « L'audacieux Sophus Lie », p.73 ; Alain Laraby, « Sophus Lie », in *Quadrature*, Magazine de mathématiques pures et épicées, janv.-mars 2006, n° 59, pp.2-3.

³ J. Dieudonné, « La genèse de la théorie des groupes », p.874. Nous soulignons.

Annexe I

Traduction algébrique des rotations du carré

Il vaut d'observer algébriquement que les quatre coins du carré sont les quatre nombres complexes sont les solutions de l'équation $x^4 = 2$. On sait déjà que $x^2 = 2$ a deux solutions : $\sqrt{2} = 1,414\dots$, et on négatif, $-\sqrt{2} = -1,414\dots$ On sait aussi que plus l'exposant est élevé, plus il y a de solutions (une équation comportant x^3 a trois, racines, x^4 quatre racines, x^5 cinq racines, etc.). L'équation comportant x^3 débouchait sur une solution réelle et deux imaginaires. L'équation en x^4 idem : deux solutions réelles (1,18921... et -1,18921... et deux imaginaires : (1,18921)i et -(1,18921)i. Etc. Sur le schéma précédent, les sommets A et C sont les deux solutions réelles et B et D les deux solutions imaginaires (les nombres « imaginaires » ne le sont en fait pas plus que d'autres nombres).¹ (fig.1)

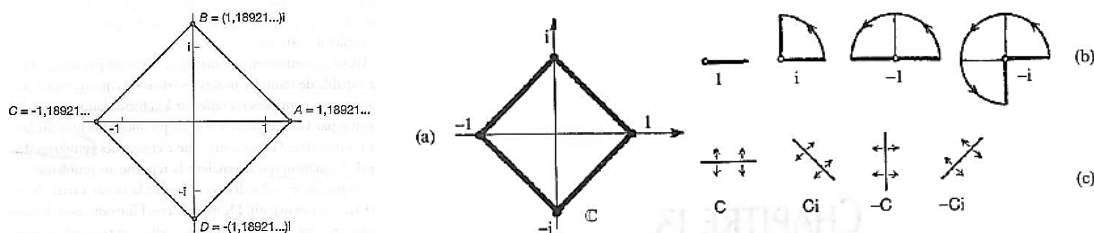


fig.1: les symétries des quatre solutions de l'équation $x^4 = 2$ correspondent aux symétries du carré. De façon algébrique,² les quatre sommets sont $A = \alpha$, avec $\alpha = \sqrt[4]{2}$ (racine quatrième de 2) ; $B = i\alpha$; $C = -\alpha$; $D = -i\alpha$.

fig.2 : Dans l'ensemble des complexes \mathbf{C} , le groupe des symétries *non réflexives* est représenté par la multiplication par $i = i^0$, $i = i^1$, $-1 = i^2$, $-i = i^3$, les diverses puissances de i représentant toutes les rotations possibles. Les symétries *réflexives* sont données dans \mathbf{C} par la conjugaison complexe C qui revient à retourner le carré autour d'un axe horizontal : autour de l'axe réel, on passe de $z = x+ib$ à son conjugué $\bar{z} = x-ib$. Les symétries, dont C , sont imagées sur la **fig.2c**. Ce sont : C , Ci , $-C$ et $-Ci$.

Les nombres réels transformés en coins du carré sont les quatre nombres complexes de ce carré.³ Par ex., l'addition de A et de C donne 0, de même que l'addition de B et D selon le calcul portant sur les nombres complexes. Donc, $A+C = 0$ et $B+D = 0$ peuvent être donc considérés **comme des lois de composition interne qu'il convient de respecter pour en pas sortir de l'ensemble considéré**. Si on intervertit C et A par ex., on obtient $C+A=0$, mais cette nouvelle équation est fausse. Cette permutation n'est pas une loi respectée par les nombres A et B.

Annexe II

Sous-groupes et nombre d'invariants

Par ex., considérons **les déplacements qui laissent invariante une sphère**.

Les points seront transformés entre eux, mais la sphère dans son ensemble se superposera à elle-même. Comme dans tout groupe, si deux déplacements laissent chacun la sphère invariante, leur produit fera de même. **Ce groupe des rotations autour d'un point fixe est en fait un sous-groupe du groupe des déplacements euclidiens (mouvements rigides) qui agissent sur un objet fixe comme le tétraèdre**. Le groupe des déplacements laisse invariante les figures géométriques ; le sous-groupe des rotations qui affectent la sphère laisse, **en outre**, invariante, les distances de ces objets à nous.

De même, le groupe métrique est **un sous-groupe du groupe projectif** (un groupe qui ne détruit pas les propriétés des figures dans l'espace par des transformations projectives). **Ce sous-groupe a davantage d'invariants**. *Les structures qu'il conserve (et définit) sont plus riches, plus détaillées que celles définies par le groupe projectif. Pour celui-ci, le triangle le plus général sera une structure ; pour celui-là, un triangle de forme et grandeur déterminées.*⁴ Les propriétés invariantes pour le groupe projectif sont a fortiori invariantes pour le groupe métrique, mais la structure de celui-ci est plus précise.

¹ Le nom de « complexe » vient de Gauss pour qui les mathématiques étaient ancrées dans la réalité physique et qui n'appréciait donc pas le terme d'imaginaire utilisé jusque-là. (H. Lehning, *Toutes les mathématiques du monde*, op. cit., p.140).

² M. du Sautoy, *La Symétrie ou les maths au clair de lune*, pp.263-234 ; Michel Broué, *Des lois du mariage à Bourbaki*, passim.

³ R. Penrose, *A la découverte des lois de l'univers*, op. cit., pp.241-242.

⁴ *Ibid.*, p. 259, 262 et 271.

Sous-groupe et sous-sous-groupes

Soit à nouveau, en mathématiques, **le groupe de rotations de la sphère.**

C'est un groupe continu, et non fini comme celui des symétries du carré. Il s'agit d'un **groupe de Lie**, doté d'une structure de « variété » différentielle, pour laquelle les opérations de groupe - multiplication et inversion - sont « différentiables » (la notion de *fonction différentiable* généralise aux fonctions de plusieurs variables celle de fonction dérivable d'une variable réelle). Ce groupe décrit la symétrie continue ou infinitésimale. **(Les éléments de ce groupe de symétries sont en nombre infini car nous pouvons tourner la sphère de n'importe quel angle autour de n'importe quel axe de l'espace tridimensionnel.)**

On rappellera la *caractéristique d'une « variété » au sens mathématique* : **en chaque point, il y a un plan tangent.** Il existe un groupe de Lie encore plus simple que la sphère : la droite, qui est variété munie d'une structure de groupe continu pour la loi d'addition: $(\mathbf{R}, +)$, ce qui n'est pas le cas de l'ensemble \mathbf{Z} pour la même loi, car $(\mathbf{Z}, +)$ est un groupe discret (le plus simple).

Le groupe des symétries de rotation de la sphère, $O(3)$ est lui-même un sous-groupe de celui des déplacements. Le groupe $O(3)$ est une « 3-variété non connexe » (3-variété = variété de dimension 3), composée de deux parties distinctes, dont le sous-groupe normal des symétries non réflexives, $SO(3)$, groupe des rotations en 3D. Ce sous-groupe contient l'élément identité¹. L'autre composante est la 3-variété contient des symétries réflexives de la sphère qui inversent son orientation.

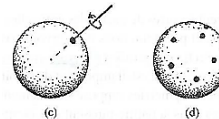
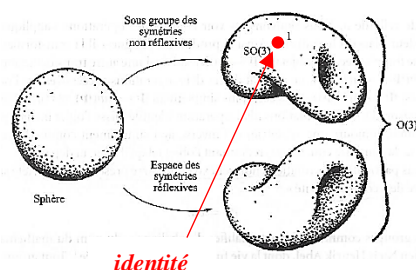


fig.c : un seul point sur la sphère réduit sa symétrie aux seules rotations autour de l'axe joignant ce point au centre de la sphère. Il s'agit du sous-groupe (non normal) $O(2)$.

fig.d : si nous dessinons sur la sphère les points correspondants aux sommets d'un polyèdre régulier (ici, un dodécaèdre, [i.e un polyèdre à 12 faces], son groupe de symétries est réduit à un sous-groupe (non normal) de $O(3)$.¹

2/ Les premières traces de « groupe » en philosophie politique

- i L'individu, sans épaisseur, mais unifié comme tout, est le résultat d'un groupe
- ii Accélération et principe d'inertie ; self-preservation en politique
- iii Contrat social, volonté générale

3/ De l'idée de groupe en droit positif

- i Pourquoi pas un groupe cyclique ?
- ii « Le groupe cyclique d'ordre 2 » de Rousseau
- iii Ne pas oublier l'élément « propriété ».
- iv La propriété, condition de la liberté
- v Et la fraternité ?

4/ La composition des lois sous contrôle

a) Le rôle des nombres premiers en droit

¹ R. Penrose, *A la découverte des lois de l'univers*, p.244 et 246.

b) Le modèle du groupe de Klein en droit

- i Quid d'un tel groupe en mathématiques . ii La séparation des pouvoirs, « groupe algébrique »*
- iii Pourquoi ne pas envisager d'autres structures algébriques ?*
- iv L'idée de « groupe » de lois positives. vi Le droit positif comme « groupe-quotient »*
- vii Un clin d'œil à Claude Lévi-Strauss*

5/ Des groupes de Lie dormant en droit

a) Une première idée en économie

- i La notion de courbe d'indifférence comme classe d'équivalence*
- iii L'impact du progrès technique sur la combinaison des facteurs de production*

b) L'effet de l'intelligence artificielle en droit

- i On en revient encore à l'isocompétence collective*
- ii Le progrès technique insufflé par l'IA*

c) A la recherche d'autres groupes continus en droit

- i Les notions d'égalité et de direction comme relations d'équivalence*
- ii Le groupe comme invariance du devenir. iii La signification juridique de la valeur propre $\lambda = 1$*
- iv La conservation de l'ellipsoïde constitutionnel*

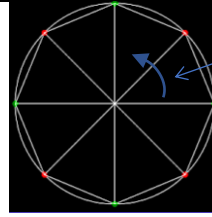
d) La nature à dessein auto-contradictoire du droit

Annexe V

Le groupe des racines complexes huitièmes de l'unité dans C

Les éléments $\alpha, \alpha^3, \alpha^5, \alpha^7$, représentés en rouge sont **des générateurs**. Ce sont les **racines primitives de l'unité**.

Il s'agit d'un groupe cyclique comme peut l'être le groupe quotient $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$, mais ce groupe est multiplicatif (ses éléments sont le générateur a et ses multiples en puissance $a^0, a^1, a^2, a^4, \dots$ (une de ses puissances entières est égale à 1)¹



le nombre d'opérations d'élévation à une puissance pour un groupe multiplicatif dans le plan complexe

Une racine primitive n -ième de l'unité est un **générateur du groupe cyclique** d'ordre n des racines n -ième de l'unité.

Les racines de l'unité sont : $\alpha_k = e^{2\pi i k/n} = \cos 2k\pi/n + i \sin 2k\pi/n = (\cos 2\pi/n + i \sin 2\pi/n)^k$, avec $1 \leq k \leq n$ ou $k = 0, \dots, n-1$, soit l'ensemble $\{1, e^{2\pi i/n}, e^{4\pi i/n}, \dots, e^{2(n-1)\pi i/n}\}$. Pour tout entier $1 \leq t < n$, **certaines de ces racines sont primitives** si t et n sont premiers entre eux. Autrement dit, α^t est un générateur d'un groupe G si et seulement si le plus grand diviseur commun, $\text{pgcd}(t, n) = 1$. Si $n = 8$, $\text{pgcd}(t, 8) = 1$, avec $t = 1, 2, \dots, 7$. Ainsi, $\alpha, \alpha^3, \alpha^5, \alpha^7$ sont générateurs de ce groupe.²

Revenons à l'exemple d'une 5^e racine de l'unité, $e^{6\pi i/5}$ qui est aussi une 10^e racine de l'unité, une 15^e racine de l'unité, une 100^e racine de l'unité. Ce nombre est une racine **primitive** cinquième de l'unité, mais elle n'est pas une racine primitive 10^e ou 15^e, etc. de l'unité. En effet, $n=5$ et $t=6$ n'ont pas de commun diviseur, $\text{pgcd} : 5$ et 6 sont coprimiers ; la fraction t/n est irréductible) mais pas la 10^e racine ou la 15^e racine, etc., car $\text{pgcd}(10, 6) = 2$ et $\text{pgcd}(15, 6) = 3$. Les nombres ne sont pas premiers entre eux. (Le pgcd de deux nombres entiers non nuls est, par définition, est le plus grand entier qui les divise simultanément. Par ex., le pgcd de 20 et de 30 est 10, puisque leurs diviseurs communs sont 1, 2, 5 et 10.)

Annexe VI

Le taux marginal de substitution technique (TMST)

Attention : le *TMST* est une notion ponctuelle. Il se calcule pour un point bien précis de l'isoquante sur laquelle il change en tout point. (*fig.a infra*). Il correspond à la pente de la tangente à l'isoquante en valeur absolue, mais **ce qui ne subit pas l'impact du progrès technique est la forme convexe de l'isoquante** bien que le progrès technique se transforme en rendement d'échelle. (*fig.b*).

The technical progress is completely transformed into a scale effect of production without changing the shape of the isoquant map. The marginal rates of substitution between K and L [tous les TMST le long des isoquantes], before and after technical progress, are exactly the same.³

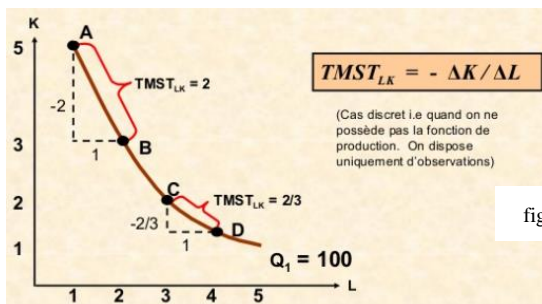


fig.a

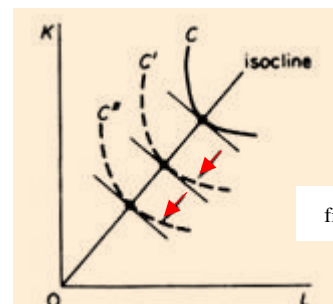


fig.b

¹https://fr.wikipedia.org/wiki/Racine_de_l'unité; *Groupes cycliques*, <http://gilles.dubois9.free.fr/cycle-def.html>. Se souvenir qu'en algèbre, **une puissance d'un nombre est le résultat de la multiplication répétée de ce nombre avec lui-même**.

² MK Sen, Shamik Ghosh, Pathasarathi Mukhopadhyay, *Topics in Abstract Algebra*, Universities Press, India, 2nd edit, p.165.

³ Ryuzo Sato, *Theory of Technical Change and Economic Invariance. Application of Lie Groups*, Academic Press, NY, 1981, p.23.

⁴ <https://www.slideshare.net/ecofolie/cours-microeconomie-s2>. On ne dit pas que ce taux est -2 ou -3; aussi, par convention, on définit le *TMST* avec un signe « - » placé devant, de sorte que le taux ainsi exprimé soit toujours positif : $TMST = (-) dK/dL$. (J. Généreux, *Microéconomie*, op. cit., p.75).

§ 50.- L'EFFET DE POUVOIR D'UN EXCES DE CONTROLE

1/ L'excès de pouvoir d'un excès de contrôle parlementaire

- a) L'épreuve des faits
- b) Les écarts entre les intensités des pouvoirs
- c) L'aggravation des écarts suivant les circonstances

2/ L'excès de pouvoir d'un excès de contrôle du pouvoir judiciaire

a) Des stratégies de raisonnement et d'écriture

i Le cas anglais

Un agrandissement politique et social. - L'aura du juge anglais

ii Le cas américain

L'*empowerment* du pouvoir judiciaire. – Une *disputatio* outre-Atlantique. - Le regard partiellement incisif de Tocqueville. - Par-delà le bien et le mal. - Les stratégies du pivot et de l'*obiter dictum*. - Un effet heureux des coalitions bloquantes. - Sortir parfois de l'ambiguïté à l'avantage du système constitutionnel. - Le refus du Sénat d'exercer sa fonction de juge contre le Président Andrew Johnson (1868)

iii Le cas français

L'ancien régime. - La Révolution française. - Le masque du pouvoir judiciaire. - Juger en droit et en opportunité

b) La mesure de l'excès et l'angle mort du défaut contraire

i La mesure de l'excès de pouvoir par ses effets

ii L'angle mort de l'inaction collective au sommet

iii Réintroduire de l'horizontalité dans la vie politique

Annexes IV, V, VI et VII, 334

o

Annexe IV

Qui est pivot ?

Soient les droits de vote dans un comité quelconque :

A	B	C	D
28	28	22	22

La majorité qualifiée est fixée à 55 %. Quelles sont les majorités de vote qui permettent à chacun de **bloquer** ? Quels sont **les pouvoirs réels** qui se révèlent en fait dans le vote ?

Une rapide analyse aboutit au constat suivant :

Pour	éventuels bloquants
A,B	A et B
A,B,C	A et B
A,B,D	A et B
A,C,D	A, C et D
B,C,D	B, C et D
A,B,C,D	

A et B peuvent bloquer 4 fois sur 6.

C et D : 2 fois sur 6.

Conclusion : les droits de vote de chaque membre ne sont pas une bonne « mesure » de son pouvoir de décision.¹

¹ Alain Laraby & Benjamin Carton, *Négociation à la lumière de la théorie des jeux*, formation continue à l'adresse des entreprises, Sciences Po Paris, 2008-2015

symétriques. La situation d'équilibre, correspondant au système de valeurs ox, oy , est donc stable : si l'une ou l'autre des [entreprises], trompée sur ses vrais intérêts, vient à s'en écarter momentanément, elle y sera ramenée par une suite de réactions, toujours diminuant d'amplitude, et dont les lignes ponctuées de la figure, par leurs dispositions en gradins, offrent l'image. (Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses, chap.7 : De la concurrence entre producteurs, pp.90-91)

Annexes VI

La surface de Riemann comme « variété complexe »

Petit rappel : Alors que la position d'un point sur une droite est repérée par un nombre réel dont l'ensemble définit les translations (ou glissements) sur cette droite, la position d'un point dans un plan est repérée par un nombre complexe (ou une paire de nombres réels). **L'ensemble des nombres complexes de module un définit les rotations dans ce plan.**

Une surface de Riemann est une variété analytique complexe de dimension 1. Cette surface s'identifie à une variété différentielle de dimension 2 si l'on identifie \mathbb{C} à \mathbb{R}^2 . **Il s'agit d'une surface qui a localement les mêmes propriétés qu'un disque du plan complexe.**

La surface de Riemann a été imaginée par Riemann afin de pallier le caractère multivoque de certaines fonctions dans le domaine complexe (logarithmes, racines, **un point pouvant posséder plusieurs images**). **Les surfaces de Riemann sont souvent vues comme des revêtements (ramifiés) du plan complexe, c'est-à-dire comme un collage particulier de plusieurs « feuillets ».** Elles admettent souvent de multiples interconnexions délicates à représenter en trois dimensions.¹

exemples de surface de Riemann ²

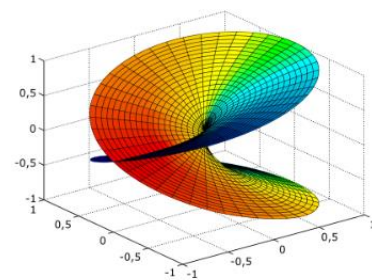
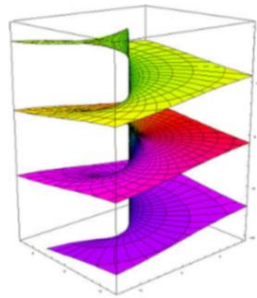


fig.a : **surface de Riemann pour le logarithme complexe** : $z = x + iy$ en coordonnées polaires : $z = \log r + i\theta$, où $\log r$ est le logarithme naturel ordinaire (décimal) d'un nombre réel positif – l'inverse de l'exponentielle réelle. La partie imaginaire du logarithme est son argument, i.e. l'angle que forme, avec l'axe des réels, la droite tournant autour de l'origine dans le sens contraire des aiguilles d'une montre avant de revenir à sa position initiale. Cet argument s'accroît exactement de la valeur de $2\pi i$ sur un chemin qui s'enroule une fois autour de l'origine. Ainsi,

on construit un espace géométrique qui se projette dans le plan complexe, dans lequel le logarithme est bien défini, et tel que deux points de cet espace dont les logarithmes diffèrent de $2ik\pi$, pour un certain entier k , se projettent sur le même point du plan complexe.

On découvre géométriquement que **le logarithme complexe peut donner plusieurs réponses ou solutions différentes.**

fig.b : **surface de Riemann pour la fonction $f(z) = \sqrt{z}$** . Les deux axes horizontaux représentent les parties réelle et imaginaire de z , tandis que l'axe vertical représente la partie réelle de \sqrt{z} . Pour visualiser la partie imaginaire de \sqrt{z} , il faut tourner le graphe de 180° autour de l'axe vertical.

A Riemann surface is a surface-like configuration that covers the complex plane with several, and in general infinitely many "sheets." Riemann surfaces are one way of representing multiple-valued functions.

¹ V. notamment : <https://www.futura-sciences.com/sciences/definitions/mathematiques-surface-riemann-4663/>

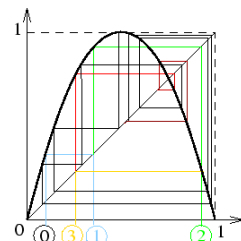
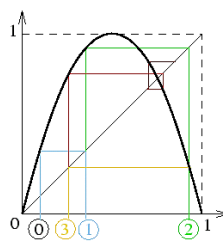
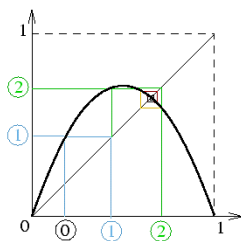
² https://fr.wikipedia.org/wiki/Logarithme_complexe ; R. Penrose, *A la découverte des lois de l'univers*, op. cité, chap.7 : l'analyse complexe p.118 ; https://en.wikipedia.org/wiki/Riemann_surface ; <http://mathworld.wolfram.com/RiemannSurface.html>

Autre exemple de surface de Riemann : le tore complexe

Un tore de dimension 1 est une variété qui peut se définir de multiples manières. On peut par exemple le voir comme un produit de cercles $S^1 \times S^1$ ou faire le quotient $\mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$. Un tore complexe est une variété qui a la propriété d'être « holomorphe », i.e. \mathbf{C} -différentiable et non plus seulement \mathbf{R} -différentiable. Cette structure de variété est plus riche.

Annexe VII

Un système chaotique simple, modélisé par la fonction $f(x)=rx(1-x)$



Le graphe de la fonction est celui d'une parabole. Les chiffres entourés désignent les étapes entre les valeurs de x , allant de 0 à 1. De l'étape 0 (entouré de noir) sur l'abscisse, je rencontre la courbe en 1 (entouré de bleu) sur l'ordonnée. De ce point, je trace une droite rencontrant la bissectrice $y = x$, d'où je reviens sur l'abscisse au point 1 (entouré de bleu) sur l'abscisse. De ce nouveau point, je rencontre à nouveau la courbe en 2 (entouré de vert) sur l'ordonnée, et ainsi de suite. **There is a feedback in the system, mais au bout d'un grand nombre d'itérations, les différentes valeurs se répartissent un peu partout au lieu de converger vers un point précis.**¹

Ex : soit $r = 4$. La fonction $4x(1-x) = x$ a deux points fixes : $x = 3/4$ (en résolvant l'équation $x(-4x+3) = 0$ et $x = 0$, mais le point fixe $x = 3/4$ est instable. (En appliquant la règle de Leibniz : $(uv)' = u'v + uv'$, la dérivée de la fonction $y = 4x(1-x)$ est : $y' = 4(1-x) + 4x = 4 - 8x$. Au point d'abscisse $x = 3/4$, $y' = 4 - 8(3/4) = 2$. Après $x = 3/4$, i.e. $x > 3/4$, on entre dans des eaux troubles, car, avec une condition initiale x_0 , située entre 0 et 1, par ex. 0,3, soit $3/4 + 0,3$, le calcul devient complètement faux car la tangente est supérieure à 1 : la suite des itérations ne converge pas vers le point qui était supposé fixe $3/4$. Nous n'observons pas les cas de figure suivants quand la tangente est inférieure à 1 :



Illustration par l'évolution d'une population :

Si à un moment donné la population vaut x , à la génération suivante elle vaut $f(x)$ (où $x=1$ représente la population maximale). Ce système, modélisé par la fonction $f(x) = rx(1-x)$, permet de modéliser le fait que si la population est faible alors elle va augmenter, mais si la population est trop importante, elle va manquer de ressources alimentaires et donc diminuer. Si le paramètre r est faible, la population se stabilise autour d'une valeur donnée (fig.a), mais si le paramètre r est assez élevé (par ex. $r=4$) le système est chaotique (fig. b et c).

¹ <https://plus.maths.org/content/extracting-beauty-chaos> ; <https://www.math.u-psud.fr/~ruette/vulgarisation/vulgarisation.html>

CHAPITRE II : LA PLACE DE LA SCIENCE ET LA PORTEE DE SA CONTRIBUTION

SECTION 1

DES SAVANTS SUR UN PIEDESTAL

A/ Une révolution submergeant la planète entière

§51.- De la diabolisation à la reconnaissance

L'entrée en magie et en athéisme. - L'accusation de sorcellerie. - La sortie de l'ombre

§52.- De la reconnaissance au retour à la crainte

Donner à la science ses lettres de noblesse. - La peur de voir son repos et sa sûreté perturbés.
- La machine constitutionnelle à la rescousse. - L'imitation de la physique est-elle si problématique ?

o

B/ Une révolution dans les méthodes de penser

- §53. Partir du « tout » vers la partie, 339. - §54. « Raisonner en hauteur », 352. - §55. Modéliser en termes d'attracteur, 383. - §56 : « Réduire » l'indécision en décision, 393 - §57.- Dresser un mur à la Maxwell, 418 - §58. Disolâtrer à la Bentham, 424. - § 59 Repenser la volonté générale en termes de nœuds et en termes vectoriels, 424

Appendice à la demande : le droit constitutionnel comme « espace vectoriel topologique »
(des points de ressemblance plutôt qu'une rigoureuse analogie)

- §60. Raisonner en utilitariste et en inférence bayésienne, 430. - §61. Elargir la logique en transformant le carré des oppositions en hexagone, 437. - §62. Ouvrir aussi la logique à d'autres formes périphériques, 437 - §62^{bis}. Le « très » et le « flou », 438. - 62^{ter}. Quid encore de la logique bivalente ? 456.- 62^{quater}. Quid de l'indécidable ? 459 - § 63. Déceler le nombre d'or en droit constitutionnel ? 477

§53.- PARTIR DU « TOUT » VERS LA PARTIE

a) La perpétuité en question

b) Le premier principe de la thermodynamique et son corrélat en droit, 208

i Son apparition en sciences, 208

ii Ses manifestations en droit

Travail et dégagement « chaleur » à l'Assemblée. - La comptabilité constitutionnelle. - Les députés sous pression

c) Le second principe de la thermodynamique et son corrélat en droit

i Le théorème de Carnot et la notion d'entropie

Retour au prétendu mouvement perpétuel, 342

- Le cycle de Carnot, 343. - L'entropie, 345

ii La dégradation du droit et de la liberté

Une nouvelle visite de Claude Lévi-Strauss. - L'instabilité publique perpétuelle. - L'usure des deux modes de séparation des pouvoirs. - La lutte de Sisyphe en droit. - Pas si simple ! - *L'épistémè en mouvance perpétuelle.*

Annexes I, II, III, IV et V, 348

o

a) La perpétuité en question

b) Le premier principe de la thermodynamique et son corrélat en droit

i Son apparition en sciences

Sans savoir encore si la thermodynamique entretient un lien avec droit constitutionnel, il est un fait que la politique s'est trouvé au berceau de la thermodynamique, particulièrement de son premier principe.

Dans les années qui précèdent la Révolution française, les esprits commençaient déjà à échafauder divers plans sur la comète. L'un d'eux, le capitaine du corps royal du génie, Lazare Carnot, bouillonna plus que d'autres en rédigeant en 1783 un *Essai sur les machines en général*. Devenu membre du Comité du Salut public sous la Révolution, Lazare Carnot fut délégué aux armées qu'il réorganisa si bien que l'on surnomma *l'organisateur de la victoire*. Ce n'est qu'à la fin de la Révolution qu'il publia en 1797 sa *Métaphysique du calcul infinitésimal* que nous avons brièvement commentée dans le Chap. I.

(§32
1/-iii)

Lazare Carnot a écrit d'autres ouvrages scientifiques, dont l'un portant sur les *Principes de l'équilibre et du mouvement* en 1803, mais celui qui nous intéresse ici est son essai sur les machines où il question d'équilibre et de mouvement sous l'angle des lois du choc et de la conservation du travail. Dans cet essai, Lazare Carnot clarifie la notion d'énergie mécanique. L'énergie caractérise un système matériel capable de produire du travail. Un corps contient de l'énergie lorsqu'il est susceptible de fournir un travail par ex. mécanique comme le fait d'élever une masse à une certaine hauteur (une pierre ou une quantité d'eau) ou de tendre un ressort. La masse ou le ressort deviennent alors des réservoirs d'énergie.

*Une pierre située à une certaine hauteur est capable de fournir du travail mécanique, c'est-à-dire de l'énergie qui est comme emmagasinée en elle, à proportion de sa masse et de sa hauteur. Où elle a été placée ; on dit qu'elle a une « **énergie potentielle** ». Lorsqu'elle tombe en acquérant de la vitesse, elle consomme de l'énergie qui dépend notamment de cette vitesse, on parle alors de sn **énergie cinétique**.*

L'exemple le plus simple est offert par un pendule qui, en se balançant, ne cesse de voir son énergie potentielle diminuer lorsqu'il descend et s'accroître lorsqu'il remonte ; inversement, son énergie cinétique s'accroît (avec sa vitesse) lorsqu'il descend et diminue à la remontée.

Dans le langage de Carnot, cet échange s'exprime ainsi : *On perd toujours en temps ou en vitesse ce qu'on gagne en force.* » Il montre ainsi que **l'énergie d'un système mécanique est la somme de son énergie potentielle et de son énergie cinétique ; cette somme est constante.** Avec Lazare Carnot, la notion d'énergie mécanique s'impose comme une des plus importantes de la physique moderne.¹

Il était bien établi à l'époque qu'un système mécanique comme la machine à vapeur est capable de fournir du travail en transformant l'évaporation d'un liquide comme l'eau en mouvement mécanique. Le « feu », i.e. la chaleur, serait donc une autre « forme » d'énergie, à côté de la mécanique. *D'ailleurs, la transformation inverse est possible puisque, par ex., une balle de plomb lancée très rapidement contre un obstacle peut, lors du choc, s'échauffer au point de fondre. De façon générale, tous les frottements des pièces d'un système mécanique provoquent des échauffements.* Il appartiendra à Sadi Carnot, le fils de Lazare, d'établir l'équivalence entre ces deux formes d'énergie : la mécanique et la calorifique.

(§39
4/a) Dans un court traité, rédigé en 1824, *Réflexions sur la puissance motrice du feu*, le jeune Carnot entrevoit ce qui allait devenir le premier principe de la thermodynamique, cette nouvelle branche de la physique qui étudie le comportement thermique des corps, plus exactement les mouvements de chaleur. Selon ce principe, un système isolé transforme l'énergie d'une forme à l'autre, sans que l'énergie totale augmente ou diminue :

Ce fut un des traits de génie de Sadi Carnot, et peut-être le plus grand, de proclamer que le mouvement perpétuel, déjà reconnu comme impossible par les seules actions mécaniques, l'est encore lorsqu'on emploie l'influence soit de la chaleur, soit de l'électricité, et de fonder sur cette affirmation la théorie de la production du travail par la chaleur.²

L'équivalence entre le travail et la chaleur fut précisé au cours du XIX^e siècle par l'allemand Mayer et le Britannique Joule.

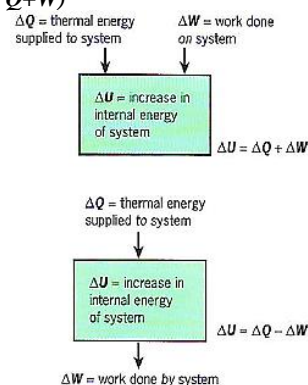
Robert von Mayer confirma en 1842 que chaleur et énergie mécanique ne sont que deux aspects d'une même énergie, qualifiée par lui d'*interne*. Le 1^{er} principe de la thermodynamique s'énonça ainsi : *quand un système change avec l'extérieur du travail mécanique W et de la chaleur Q , puis revient à son état initial, il y a aussi conservation de son énergie interne $U = Q - W$. C'est une généralisation du principe de conservation de l'énergie mécanique, qui n'est pas applicable en cas de frottements.³* Si l'on considère une petite variation de l'énergie interne, i.e. ΔU , le 1^{er} principe s'écrira pareillement : $\Delta U = \Delta Q - \Delta W$ ou $\Delta U = \Delta Q + \Delta W$ selon que l'on envisage le travail effectué *par* le système (signe -) ou *sur* le système (+).

Sur l'expression $U = Q - W$ (ou $U = Q + W$)

Beware !

We are considering work done **on** the system [sur de l'eau contenue dans un récipient par ex.] so we use a "plus" sign in the equation. Some books refer to work done [by the water] so the relationship is written with a "minus" sign: $\Delta U = \Delta Q - \Delta W$.

Si l'on écrit $\Delta U = \Delta Q + W$, l'expression de la loi, quant à la variation de l'énergie interne, serait: *The increase in internal energy of a system is the sum of the work done on the system and the energy supplied thermally to the system.⁴*



Le travail et la chaleur sont deux aspects d'un même phénomène qui fait varier l'énergie d'un système. Nous parlons d'eau. James Joule confirma en 1845 le 1^{er} principe de la thermodynamique

¹ https://fr.wikipedia.org/wiki/Lazare_Carnot; Vincent Jullien, *L'Histoire des sciences pour les nuls*, First éditions, Paris, 2009, p.366.

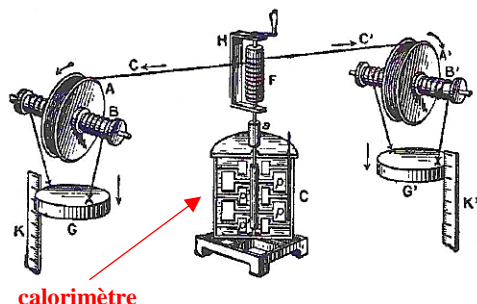
² P. Duhem, *L'év. de la mécanique*, chap.12 : L'impossibilité du mouvement perpétuel, p.150 ; V. Jullien, *L'Histoire des sciences ...*, p.367. Comment l'énergie mécanique se transforme-t-elle en électricité ? Soit un moteur qui entraîne une génératrice qui fournit une tension continue. Cette tension alimente une lampe, qui transforme l'énergie mécanique en électricité. La génératrice joue le rôle d'un générateur de vapeur.

³ J. Perdijon, *La nature a-t-elle des principes ?* op. cit, p.80.

⁴ K. Dobson, D. Grace, D. Lovett, *Physics*, op. cit., ch. 15: The laws of thermodynamics, p.319.

en échauffant une cuve d'eau grâce à des pales d'hélice tournant dans le liquide. Cette expérience lui permit d'établir l'existence d'un rapport constant entre le travail et la quantité d'eau échangés dans un système fermé. Pour connaître un tel facteur de conversion, le travail mécanique était fourni par la chute de deux poids qui actionnait, par l'intermédiaire d'un treuil, les deux pales dans le calorimètre en question. (*fig. infra*)

Expérience de Joule



Les résultats furent si probants que l'on a baptisé « joule » l'unité physique qui mesure aussi bien le travail, l'énergie, la quantité de chaleur. Comment mieux enregistrer l'équivalence de ces grandeurs physiques ?¹

La chaleur peut être créée ou détruite en même temps qu'une quantité proportionnelle de travail est consommée ou produite. Cette proportionnalité a conduit de nos jours le Bureau International de Poids et Mesures à choisir comme unité de chaleur le joule.² [Le joule est aujourd'hui plus généralement l'unité de mesure de l'énergie.]

Le 1^{er} principe de la thermodynamique peut ainsi se résumer comme suit : *l'énergie totale d'un système qui n'échange ni chaleur ni travail avec l'extérieur (système isolé par définition) est constante.* La frontière d'un tel système qui interdit tout échange d'énergie sous forme de travail ou de chaleur est dite *adiabatique*. Si une des parties du système cède une quantité Q_1 de chaleur et une quantité W_1 de travail, le reste du système reçoit une quantité Q_2 et une quantité W_2 de travail tels que $W_1 + Q_1 = W_2 + Q_2$.

Bien qu'un système thermodynamique puisse échanger de l'énergie avec son environnement sous forme de travail ou de chaleur, il convient de distinguer ces deux « formes » d'énergie qui sont, rigoureusement, moins des formes proprement dites que **deux modes de transfert de l'énergie**.

Le travail est un transfert d'énergie qui provient du déploiement du point d'application d'une force exercée par le milieu extérieur sur le système thermodynamique. Cette force peut être par ex. la pression exercée par un piston sur un gaz enfermé dans une enceinte. La chaleur est un transfert d'énergie qui ne met en jeu aucune force, ce qui revient à dire que *la chaleur est une forme d'énergie qui n'est pas du travail*. Soit par ex. une casserole pleine d'eau sur un réchaud à gaz. Le système thermodynamique constitué par l'eau reçoit de l'énergie de son environnement (dont l'origine est la combustion d'un gaz). L'énergie est transférée sous forme de chaleur sans qu'il y eut lieu un travail.³

Quant à la convention de signes, il convient enfin de rappeler que Q est positif quand le système reçoit de la chaleur, et que W est aussi positif quand le système fournit, dans l'autre sens, du travail... Cette convention est dite du banquier. En clair : **l'énergie, sous forme de travail ou de chaleur, est comptée positivement quand le système en reçoit et négativement dans le cas contraire.**



Sous réserve que le système en cause soit fermé, l'énergie totale du système U est constante. L'énergie change de forme, mais ne peut apparaître *ex nihilo* ou disparaître dans le néant sans laisser de trace.

¹ J. Perdijon, *La nature a-t-elle des principes ?* p.81 ; V. Jullien, *L'Histoire des sciences pour les nuls*, p.367.

² Roger Balian, *La longue élaboration du concept d'énergie*, Académie de sciences, Paris, mars 2013, p.8.

³ Benjamin Carton, *La théorie de la chaleur*, manuscrit sans date, Paris, p.21 ; Frédéric Doumène, *Éléments de thermodynamique*, Polycopié, Univ. Paris VI, 2008-2009. pp.7-8.

⁴ <https://fr.khanacademy.org/science/physics/thermodynamics/laws-of-thermodynamics/a/what-is-the-first-law-of-thermodynamics>

$\Delta U = W + Q$. **Rien ne se perd, rien ne se crée, tout se transforme**, disait déjà Lavoisier en mettant en lumière la conservation de la masse en chimie.

La conservation de la matière (selon Lavoisier)

Rien ne se crée, ni dans les opérations de l'art, ni dans celles de la nature, et l'on peut poser en principe que dans toute opération, il y a une égale quantité de matière avant et après l'opération ; que la qualité et la quantité des principes sont les mêmes et qu'il n'y a que des changements, que des modifications.

C'est sur ce principe qu'est fondé tout l'art de faire des expériences en chimie, on est obligé de supposer dans toutes une véritable égalité ou équation entre les principes des corps qu'on examine et ceux qu'on en retire par l'analyse.¹

Il convient de rapprocher le principe de la conservation de l'énergie du principe de la conservation de la matière ainsi que du principe de la conservation de l'électricité, plus complexe en raison de l'existence de deux fluides électriques de signes contraires qui peuvent se neutraliser.² Il est donc possible de définir quelque chose qui reste constant. **L'adverbe toujours, qui était, pensait-on, applicable au prétendu mouvement perpétuel, n'est en fait applicable qu'à la conservation de l'énergie.**

On a pu, il est vrai, objecter au 1^{er} principe de la thermodynamique sa très grande généralité. Il ne pourrait exister de système fermé, car les parties les plus éloignées de l'univers ne sont pas sans action les unes des autres. Le rayonnement des étoiles nous apporte une certaine quantité d'énergie, assurément faible, mais cependant mesurable et même utilisable. [...] Nous devrions donc, pour être sûrs d'avoir un système fermé, annexer l'univers entier, mais la question se pose alors de savoir s'il est fini, s'il est infini, l'énergie totale est également infinie et sa constance n'a plus aucun sens.³

La question demeure d'actualité, et peut-être, elle aussi, pour « toujours », mais comme écrira Henri Poincaré, dans l'esprit de Lavoisier, il est bon de supposer vraie une telle idée pour avancer dans la recherche :

En présence de l'univers, le principe de la conservation de l'énergie peut nous rendre le même service. C'est aussi une machine beaucoup plus compliquée que toutes celles de l'industrie, et dont presque toutes les parties nous sont profondément cachées, mais en observant le mouvement de celles que nous pouvons voir, nous pouvons, en nous aidant de ce principe, tirer des conclusions qui resteront vraies quelque soient les détails du mécanisme invisible qui les anime.⁴

En droit, l'application du 1^{er} principe de la thermodynamique serait plus hasardeuse si on tentait de considérer la société comme un grand système fermé. Le principe de conservation de l'énergie peut, en revanche, être utile si l'on s'en tient à des systèmes institutionnels locaux qui sembleraient plus stables qu'un système global qui ne le serait qu'en principe tant il y a de contre-exemples qui attestent le contraire. Nous ne cherchons pas à nous mettre une balle dans le pied, mais à éclairer le lecteur.

ii Ses manifestations en droit

Travail et dégagement « chaleur » à l'Assemblée. - La comptabilité constitutionnelle. - Les députés sous pression

c) Le second principe de la thermodynamique et son corrélat en droit

i Le théorème de Carnot et la notion d'entropie

Retour au prétendu mouvement perpétuel. - Le cycle de Carnot
- L'entropie. - Le retour au prétendu mouvement perpétuel

Retour au prétendu mouvement perpétuel

¹ Antoine Laurent Lavoisier, *Traité élémentaire de chimie*, 1789, in Lavoisier, *Pages choisies*, éditions sociales, Paris, 1974, p.207.

² E. Borel, *L'évolution de la mécanique*, Flammarion, Paris, 1943, p.125.

³ *Ibid.*, p.124

⁴ H. Poincaré, *La valeur de la science* [1905], Flammarion, Paris, 1970, chap.7 : L'histoire de la physique mathématique, p.126.

Autant le 1^{er} principe interdit de croire qu'un système peut produire plus d'énergie qu'il n'en consomme, autant le second rend impossible l'idée qu'un système revienne périodiquement au même état avec la même énergie au départ. S'il n'y a pas d'énergie accrue selon le 1^{er} principe, il y a en revanche une perte d'énergie selon le second principe si on entend transformer intégralement la chaleur en travail.

On dira que cette affirmation est bien particulière, puisque, dans le cas d'un pendule oscillant par exemple, il y a conversion intégrale de l'énergie potentielle de pesanteur (lorsque le pendule est en hauteur) en énergie cinétique (quand le pendule chute et augmente sa vitesse), et vice-versa. (Nous analyserons plus en détail les notions d'énergie potentielle et d'énergie cinétique dans le § suivant.)

Lorsque le pendule est abandonné à lui-même, il revient d'abord en descendant vers la position verticale. Il passe devant et la dépasse pour atteindre de l'autre côté une position symétrique à l'initiale. Le pendule retombe à nouveau pour parcourir le chemin inverse, et ainsi de suite. Or, il s'avère qu'au cours de ses oscillations successives, celles-ci décroissent peu à peu en amplitude. Elles finissent par ramener le fil, auquel est suspendue une masselotte, à sa position d'équilibre stable.

*Cet exemple montre que les mouvements naturels ne sont pas réversibles.*¹

Les mouvements du pendule éprouvent une résistance, celle de l'air ambiant, qui explique l'amortissement des oscillations.

*Ce fut un des traits de génie de Sadi Carnot, et peut-être le plus grand, de proclamer que le mouvement perpétuel, déjà reconnu impossible par les seules actions mécaniques, l'est encore lorsqu'on emploie l'influence soit de la chaleur, soit de l'électricité, et de fonder cette affirmation la théorie de la production du travail sur la chaleur.*²

L'énergie obéit à un principe de conservation général, mais l'évolution des systèmes isolés obéit à un principe tout différent. On a vu que les premières machines à vapeur d'application pratique étaient apparues au début du XVIII^e siècle. Beaucoup d'efforts furent entrepris pour en accroître le rendement.

Sadi Carnot ne chercha pas lui-même à agir en ce sens, mais il chercha à en comprendre le fonctionnement en s'efforçant d'en donner une expression algébrique correcte.

A la lumière de son étude, l'on fut amené à penser qu'une machine qui transformerait complètement la chaleur en travail serait aussi *surnaturelle* que le mouvement perpétuel.³

Le cycle de Carnot

Jusqu'où pouvait-on espérer augmenter le rendement des machines à vapeur ? Pour répondre à cette question d'ingénieur, *Carnot imagina un moteur cyclique idéal qui fonctionne sur le modèle de la machine de Watt, mais avec des détentes et des compressions parfaitement réversibles.*⁴ Il s'agit d'une expérience de pensée dans laquelle Carnot entreprend une sorte de raisonnement par l'absurde. Supposons que les mouvements de la machine soient renversables, et voyons.

Le moteur de Carnot (ou cycle de Carnot) consiste en une suite de quatre processus réversibles d'un fluide que l'on peut illustrer dans le cas d'un gaz parfait (on retourne toujours à ce cas idéal pour l'étude).

Le corps gazeux devrait subir une suite de modifications (compression, dilatation, réchauffement, refroidissement) au cours d'un cycle. A la fin du cycle, le corps revient à son état initial. Au départ, le fluide est en contact avec une source chaude. Il est relativement comprimé. La source chaude va ensuite transférer une certaine quantité de chaleur (Q_2) au corps. Le corps va lui-même transférer une certaine quantité de chaleur (Q_1) à la source froide. Les modifications de volume sont récupérées sous forme de travail comme le montre le schéma infra :

¹ P.Duhem, *L'évolution de la mécanique*, op. cit., p.142.

² *Ibid.*, p.150.

³ B. Carton, *La théorie de la chaleur*, op. cit, p28.

⁴ J. Perdijon, *La nature a-t-elle des principes ?* op. cit, p.82.

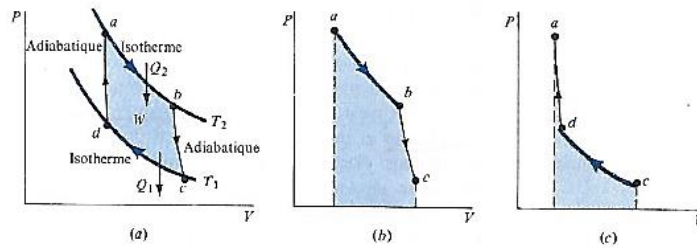
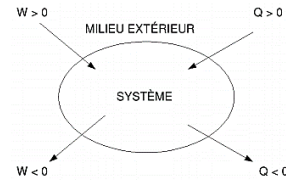


Fig.a : le cycle de Carnot pour un gaz parfait. Fig.b : Le travail libéré pendant la détente est égal à l'aire colorée. Fig.c : Le travail reçu par le gaz pendant la compression est égal à l'aire colorée.

Deux couples de transformation apparaissent : les *dilatations* isotherme et adiabatique et les *compressions* également isotherme et adiabatique. Etudions-les de plus près avec en mémoire la convention de signes pour Q et W :



- La *dilatation isotherme* (chemin allant de a vers b) : le gaz se détend en restant en contact avec la source chaude. Le gaz reçoit de la chaleur ($Q > 0$) de la source chaude. Il absorbe de la chaleur Q_2 , cédée par un réservoir de chaleur qui se trouve à la température fixe T_2 (d'où le qualificatif d'*isotherme*). Le gaz est porté à la température de cette source et fournit du travail ($W < 0$).
- La *détente adiabatique* (chemin bc) : Le gaz n'est plus en contact avec la source chaude. Il se dilate et refroidit. Il n'échange plus de chaleur mais continue de fournir du travail ($W < 0$).
- La *compression isotherme* (chemin cd) : Le gaz est comprimé en étant à nouveau en contact avec la source chaude. Il est donc à la température de cette source. Le processus est une compression isotherme à température $T_1 < T_2$ pendant laquelle une quantité de chaleur Q_1 quitte le système. Le gaz donne de la chaleur ($Q < 0$) à la source froide et reçoit du travail ($W > 0$).
- La *compression adiabatique* (entre d et a) : le gaz n'est en contact avec aucune source et est comprimé. Il se réchauffe. Il reçoit du travail ($W > 0$) mais n'échange pas de chaleur.¹

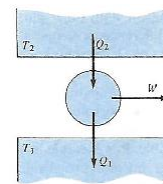
Pendant la détente, le gaz effectue un travail qui est égal à l'aire au-dessous de la courbe ab. (fig.b)

Pendant la phase de compression, le travail fourni au gaz par le milieu extérieur est égal à l'aire plus petite sous la courbe cda. (fig.c)

Le travail net fourni par le gaz pendant un cycle complet est égale à l'aire délimitée par le chemin abcda. (fig.a)

Comme le gaz a retrouvé son état initial à la fin du cycle, le changement net de l'énergie interne est nul, et on a alors d'après le 1^{er} principe : $W = Q_2 - Q_1$.

Voir la fig. ci-contre qui représente le résultat symboliquement.²



Le travail fourni pendant un cycle complet est égal à la différence entre la chaleur reçue du réservoir à la température T_2 et la chaleur cédée au réservoir à la température T_1 .

Carnot découvre ce que l'on appelle *le théorème de Carnot* que formule le petit encart supra à droite.

Certes, le travail mécanique peut fournir de la chaleur et réciproquement, mais cet échange n'est pas aussi aisé dans un sens que dans l'autre.

Toute production de travail mécanique (« la puissance motrice », écrit Carnot) s'accompagne d'un abaissement de température, et il ne peut y avoir de production de travail si l'on ne dispose de deux sources : une chaude et une froide.

¹ Kane/Sternheim, *Physique*, op. cit., p.252 ; B. Carton, *La théorie de la chaleur*, op. cit, p29.

² Kane/Sternheim, *Physique*, pp.252-253.

Autrement dit, la source d'eau chaude fournit bien du travail mécanique, mais une partie de son énergie est absorbée par la source d'eau froide. La conséquence en est que **seule** la différence entre les quantités de chaleur des deux sources est transformée en travail mécanique.¹

Deux leçons donc à retenir :

1/ un cycle « monotherme » ne peut fournir du travail. Un système, n'échangeant de la chaleur qu'avec une seule source thermique, ne peut que recevoir du travail *du milieu extérieur* ($W > 0$), comme dans un compresseur mécanique qui produit de l'air comprimé en augmentant sa pression, et donc son énergie. En d'autres termes, **un tel système ne peut se comporter comme un moteur, puisque la conversion de chaleur en travail ne peut se faire que si l'on dispose d'au moins deux sources thermiques à des températures différentes.**² La conversion n'opère de façon cyclique qu'à cette condition.

2/ un cycle « bitherme » peut fournir du travail ($W < 0$) et recevoir de la chaleur ($Q > 0$), mais le rendement ne peut excéder une certaine valeur, e , défini par le travail divisé par la chaleur absorbée, i.e. $e = W/Q_2$. En utilisant $W = Q_2 - Q_1$, nous trouvons une expression de e :

$$e = \frac{W}{Q_2} = 1 - \frac{Q_1}{Q_2} = 1 - \frac{T_1}{T_2}$$

e représente le rendement du cycle de Carnot. D'après cette équation, **le rendement est toujours inférieur à 1**, à moins que le réservoir ne se trouve au zéro absolu, ce qui est impossible en pratique.

*Le travail total W fourni est égal à la chaleur Q_c cédée par le corps chaud moins celle Q_f cédée au corps froid, d'où un rendement au mieux égal à $W/Q_c = 1 - Q_f/Q_c$.*³

Le zéro absolu, qui vaut -273 degrés Celsius, correspond à la température de la source froide pour laquelle le rendement serait égal à 1.

(Voir Annexe III)

- Quel serait, j'y pense, l'équivalent du zéro absolu en droit ?

- Pour l'instant, nous restons en physique. Mais pour vous répondre à la volée, s'il y a un équivalent, ce qui n'est pas certain, ce serait l'arrêt total, l'immobilisme complet des institutions. Tout serait bloqué. Ni le Parlement, ni le gouvernement ne bougerait, laissant libre de circuler les individus en pur état d'anarchie, comme des électrons ne rencontrant aucune résistance en supraconductivité, mais il faudrait, pour approfondir cette comparaison, que le système soit refroidi en permanence ! On connaîtrait un nouvel état de nature, non pas dans une sombre forêt, mais au cœur même de la cité.

L'entropie

- Il est plus facile d'aborder cette notion en droit qui fait davantage sens à beaucoup. On la murmure déjà en sociologie. Rafraichissez-nous toutefois l'esprit sans nous en fournir trop de détails techniques. Ce qui compte vient après : quel crédit peut-on accorder à cette conception en droit constitutionnel ?

- Soyez sans crainte : je n'ai, ni la prétention de jouer au physicien, ni d'oublier que je suis un juriste. Je vais m'efforcer de préciser ce que la plupart des gens un peu instruits en connaissent vaguement.

Repartons du rapport précédent : $e = 1 - (T_f / T_c)$. Cette expression résume un rapport : celui du travail, fourni par la machine à vapeur au cours d'un cycle, à la chaleur qu'elle reçoit de la source chaude.

Un tel cycle comporte des processus réversibles comme des systèmes mécaniques sans frottement (cf. le pendule simple de la théorie). On peut revenir à l'état initial sans qu'il y n'ait au total de modification, ni dans le système ni dans le milieu extérieur. Dans le cycle de Carnot, la détente adiabatique d'un gaz parfait est réversible parce qu'une compression adiabatique peut faire retourner

¹ V. Jullien, *L'Histoire des sciences pour les nuls*, pp.367-368. Nous soulignons.

² B. Carton, *La théorie de la chaleur*, p.31 ; F. Doumène, *Éléments de thermodynamique*, op. cit., pp.43-44.

³ B. Carton, *La théorie de la chaleur*, p.31 ; Kane/Sternheim, *Physique*, p.253 ; J. Perdijon, *La nature a-t-elle des principes ?* p.82.

le système à son état initial. Il y a absence de tout *effet dissipatif* tel que frottement et turbulence (écoulement en tourbillon).

Il existe un autre rapport $S = Q/T$, qui définit la dégradation de l'énergie, mise en lumière par Sadi Carnot en appréhendant le rendement qui atteste la déperdition de l'énergie. Ce rapport, appelé *entropie*, fut défini à la suite de Carnot qui ne s'était pas soucié de la chaleur cédée à la source froide. La notion d'entropie requiert d'en écrire le bilan global.

Comme l'énergie interne d'un système, l'entropie d'un système est une fonction qui ne dépend que de l'état du système et nullement de la manière dont cet état est atteint. *On est donc libre, pour calculer une variation d'entropie $[\Delta S]$, d'imaginer n'importe quelle transformation [réversible autant qu'irréversible] entre un état initial et un état final donnés.*¹ Supposons que l'on apporte, lors d'un processus réversible, une petite quantité de chaleur ΔQ à un système se trouvant à la température absolue. La variation de l'entropie qui se produit pendant cette opération est $\Delta S = \Delta Q/T$.

S'il y a transfert d'une grande quantité de chaleur, on peut la diviser en de nombreuses quantités ΔQ_i infinitésimales telles que la température T_i soit à peu près constante pendant le transfert de Q_i . De même que ΔQ est négatif lorsque la chaleur quitte un système, la variation d'entropie qui en résulte est aussi négative. L'entropie totale du système et du milieu ambiant ne peut jamais décroître : ΔS (total) ≥ 0 . La variation globale de l'entropie est nulle pour une transformation réversible et positive pour un processus irréversible. On retrouve, autrement formulé, le second principe de la thermodynamique.

*$S_f - S_i = 0$ pour une transformation réversible. En effet, si la transformation peut se dérouler en sens inverse, depuis l'état final (f) jusqu'à l'état initial (i), elle vérifiera aussi l'inégalité dans le sens correspondant : $S_i - S_f \geq 0$. La seule façon de concilier cette condition avec la précédente – qui paraît contradictoire – consiste à ce que l'une et l'autre se réduisent à des égalités.*²

L'entropie se caractérise ainsi par une *inégalité qui va toujours dans le même sens*. Alors que dans un système complètement isolé, la valeur de la transformation est égale à 0, l'augmentation de l'entropie traduit une *transformation non compensée*. On observe une dissymétrie.

Enfin, dans un système isolé (aucun échange avec l'extérieur), *seul le relâchement d'une contrainte interne préexistante peut provoquer une transformation. D'après la condition d'entropie maximale – proposition centrale du postulat, -l'état final de cette transformation doit correspondre au maximum de l'entropie permis par les contraintes restantes.*³ **L'entropie d'un système isolé a donc tendance à s'accroître jusqu'à ce qu'aucune énergie ne puisse plus être échangée.**

La signification de l'entropie comme « action »

L'entropie est liée en quelque sorte à la capacité de résistance des objets aux luttes, aux chocs.

En introduisant une finalité locale, on peut admettre que les objets tendent vers un état qui leur assure la capacité de résistance la plus grande, en même temps qu'il leur permet de persévérer dans cet état avec le minimum de dépense d'énergie.

*Cette description, à fondement anthropocentrique, a l'avantage d'être compatible avec les grandes lois de la thermodynamique, selon lesquelles un système d'objets tend vers un état où son entropie est maximale, et où le taux de production d'entropie interne est minimal.*⁴

Dernière précision, pour dissiper une erreur commune : celle de croire que l'entropie, créée par l'irréversibilité des phénomènes naturels, résulterait de la transformation de l'énergie en chaleur. Or la chaleur n'a pas le rôle exclusif qu'on lui prête.

¹ R. Balian, *La longue élaboration du concept d'énergie*, p.7 ; F. Doumène, *Éléments de thermodynamique*, p.45.

² B. Diu, B. Leclercq, *La physique mot à mot*, op. cit., p.670.

³ P. Duhem, *L'évolution de la mécanique*, op. cit., op. cit., pp.151-152 ; B. Diu, B. Leclercq, *La physique mot à mot*, op. cit., p.670.

⁴ Claude P. Bruter, *Les architectes du feu*, op. cit., p.144.

On n'oubliera pas d'abord l'énergie cinétique d'un corps qui se déplace. Cette énergie, due au mouvement, a à vaincre la résistance de l'air et d'innombrables résistances passives. On revient à cette notion de résistance, mise en lumière dans l'encadré précédent. En conséquence, elle se convertit et se dissémine dans l'ambiance sous forme d'ondes élastiques centrifuges (ondes sonores, remous de l'air), sous forme aussi de tourbillons de lubrifiant [des paliers lisses], de trépidations, de changement de texture des métaux, d'électrisation, etc.

L'utilisation de paliers, dans leur forme la plus simple, remonte au moins à l'époque de l'Égypte antique et a probablement précédé l'invention de la roue. De nos jours, les paliers se retrouvent dans tout système où se produit un mouvement relatif entre deux surfaces, soit pratiquement partout : cela va des appareils électroménagers aux machines industrielles.

On n'oubliera pas non plus la captation d'un courant d'eau, où l'énergie utilisable perdue n'est pas seulement convertie en chaleur du fait des frottements et de la viscosité, mais l'érosion des berges, l'ensablement du lit, les remous, les tourbillons, les vagues, les ondes de choc, les ondes sonores donnent lieu à de la dissipation d'énergie non thermique.

On n'oubliera pas enfin que les pertes les plus importantes en électrostatique proviennent, non pas d'une conversion de l'énergie électrique en chaleur, mais bien de fuite d'électricité hors des systèmes dans lesquels nous nous efforçons de la capter : les conducteurs tendent à se décharger.¹

Cette citation rappelle opportunément que l'entropie affecte d'autres formes d'énergie que l'énergie mécanique. Non seulement l'énergie électrique, mais aussi l'énergie chimique, l'énergie nucléaire et de rayonnement que l'on a découvert depuis le début du XIX^e siècle. Faut-il insister qu'un système ne contient ni chaleur ni travail, la seule chose qu'il contient est de l'énergie. Ces deux termes ne sont pas des objets, mais deux façons, deux modes de transfert de l'énergie.² Ils n'entrent pas dans ces formes.

La notion de rendement, plus ou moins inférieur à 1, est aussi applicable à la conversion de ces énergies en d'autres énergies. Celle par ex. de l'énergie chimique en énergie électrique (cf. la pile à combustible où l'hydrogène et l'oxygène se combinent pour produire un courant électrique). Celle également du processus inverse. Celle enfin qui concerne notre corps même dans lequel l'énergie chimique de nos aliments se convertit en énergie mécanique. Etc.

- Vous voulez nous faire croire qu'il existerait également une « énergie constitutionnelle » susceptible de se convertir en une énergie quelconque ou d'être elle-même le produit d'une autre forme d'énergie?

- Je refuse de prêter trop mon imagination à une expression qui n'a que l'apparence d'une transcription fine et rapide. Je ne cherche pas à vous faire accroire que je suis magicien. Je tente seulement de voir si le second principe de la thermodynamique et l'entropie ont réellement un sens en droit constitutionnel.

ii La dégradation du droit et de la liberté

Une nouvelle visite de Claude Lévi-Strauss. - L'instabilité publique perpétuelle. - L'usure des deux modes de séparation des pouvoirs. - La lutte de Sisyphe en droit. - Pas si simple ! - *L'épistémè en mouvance perpétuelle.*

¹ Louis Rougier, *En marge de Curie, de Carnot et d'Einstein*, Etienne Chiron éditeurs, Paris, 1920, pp.134-135.

² A. Deiber, D. Husson, J.-L. Izbicki, R. Dehoucq, *La Physique pour les nuls*, op. cit., p.144.

Annexe I

Quelle différence entre la quantité de chaleur Q et la température T ?

Il faut faire attention à ne pas les confondre, car ce sont deux grandeurs différentes. **La quantité Q représente un transfert d'énergie sous forme de chaleur.** Ce transfert thermique peut avoir lieu par exemple par conduction thermique à travers les parois du récipient. **La température T , quant à elle, est une grandeur qui est proportionnelle à l'énergie interne totale du gaz.** Donc, Q est l'énergie reçue par le gaz par conduction thermique, tandis que T est proportionnelle à l'énergie que le gaz possède à un moment donné. La quantité de chaleur reçue par le gaz peut éventuellement être nulle ($Q = 0$) si le récipient est isotherme [si le processus s'effectue à température constante], mais sa température peut ne pas être égale à zéro (parce que le gaz possède probablement une énergie interne non-nulle).

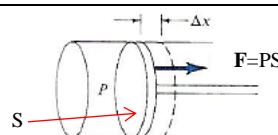
Pour bien comprendre, il faut garder à l'esprit que **la température T d'un gaz peut très bien augmenter même si le gaz fournit de la chaleur Q au milieu extérieur.** Ce fait peut paraître contre-intuitif, mais comme l'énergie interne d'un gaz varie aussi bien par transfert thermique que par travail, le travail autant que la chaleur peut modifier la température du gaz. Par exemple, si on place le piston dans un bac de glace, le transfert thermique a lieu du gaz vers la glace, mais si, simultanément, on appuie sur le piston pour comprimer le gaz de telle sorte que le travail reçu par le gaz soit supérieur à la quantité de chaleur perdue par le gaz, alors l'énergie interne totale du gaz (et donc sa température) augmente.¹

Annexe II

Représentation du travail fourni par un gaz ou par un piston

On ne peut à ce stade s'épargner un peu d'algèbre, mais la figure ci-contre aide à y voir clair...

Un gaz est soumis à une pression P dans un cylindre fermé. Le gaz exerce une force $F = PS$ sur le piston de surface S pendant un petit déplacement Δx parallèle à la force. Le travail accompli par le gaz vaut $\Delta W = F\Delta x = PS\Delta x$. Comme $\Delta V = S\Delta x$, le travail effectué par le gaz vaut $\Delta W = P\Delta V$.



La surface S délimite un système sur lequel est fixé un piston mobile

Un déplacement plus important peut être considéré comme étant composé d'une suite de très petits déplacements successifs Δx_j de sorte que la force $F_j = P_j S$ puisse être considérée constante pendant chaque déplacement infinitésimal. Le travail total effectué par le système est alors égal à la somme de tous les termes $P_j \Delta V_j$, soit $W = P_1 \Delta V_1 + P_2 \Delta V_2 + \dots$

Le travail effectué par le système est égal à l'aire de la surface au-dessous du graphe de P en fonction de V . Ce résultat est valable en général, que ce soit pour un gaz se trouvant dans une enceinte de forme quelconque ou pour des transformations impliquant des changements de volume dans les liquides et les solides.²

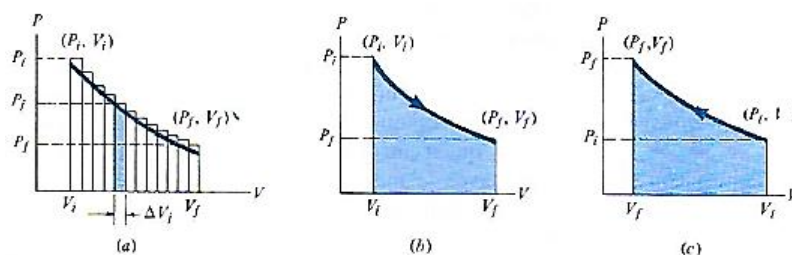


Fig.a : Le travail effectué par le système est égal à la somme des aires des petits rectangles. Dans chaque intervalle, P_j est supposée constante. Pour le rectangle coloré, on a $\Delta W_j = P_j \Delta V_j$.

Fig.b : Le travail total est exactement égal à la surface colorée au-dessous du graphe de P en fonction de V . Cas d'un fluide **en dilatation** : que W est < 0 (le travail est fourni par le système). En effet, **si $\Delta V > 0$, le volume augmente : le gaz se détend et fournit du travail à l'extérieur.**

Fig.c : Cas d'un fluide **en compression** : W est > 0 (le travail est reçu par le système). En effet, **si $\Delta V < 0$, le volume diminue : le gaz reçoit de l'énergie sous forme de travail des forces extérieures sur le piston.**³

Rem.: 1/ Si le volume est constant, le travail des forces de pression qui s'exercent sur la surface S du piston est naturellement nul. 2/ Comme il a été dit, ces résultats se généralisent à un volume quelconque (gaz, liquide, solide).

¹ <https://fr.khanacademy.org/science/physics/thermodynamics/laws-of-thermodynamics/a/what-is-the-first-law-of-thermodynamics>

² Kane/Sternheim, *Physique*, op. cit., p.244 ; <http://olivier.granier.free.fr/Seq07/co/rappels-de-cours-thermo-W-Q.html>

³ *Ibid.* ; <http://chemphys.u-strasbg.fr/mpb/teach/thermo1/thermo1.pdf>

L'échelle thermodynamique

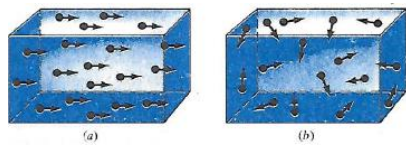
Dans cette échelle, et pour n'importe quel cycle réversible, on peut écrire $Q_2/T_2 - Q_1/T_1 = 0$ [le zéro absolu, soit 273 degrés Celsius]. En définissant la fonction entropie $S = Q/T$, on obtient $\Delta S = 0$. **Rudolph Clausius** [au XIX^e siècle] montré que l'entropie d'un système isolé augmente toujours au cours d'un phénomène irréversible, ce qui est une autre expression du second principe. Sa traduction mécaniste fut réalisée en 1876 par **Boltzmann**, qui introduisit à cette fin la notion de « probabilité d'état Ω ».

Ω est le nombre d'états microscopiques qui permettent de réaliser l'état observé à l'échelle microscopique : $S = k \ln \Omega$, où k désigne la constante de Boltzmann.

Précisions :

1/ La thermodynamique statistique de Boltzmann fournit un nouvel éclairage à la grandeur abstraite qu'est l'entropie en l'interprétant comme la mesure du degré de désordre d'un système au niveau microscopique. **Plus l'entropie du système est élevée, moins ses éléments sont ordonnés, liés entre eux, capables de produire des effets mécaniques, et plus grande est la part de l'énergie inutilisée pour l'obtention d'un travail, c'est-à-dire gaspillée de façon cohérente.** [...] Cette nouvelle définition de l'entropie n'est pas contradictoire avec celle de Clausius. Les deux expressions de l'entropie résultent simplement de deux points de vue différents, selon que l'on considère, le système thermodynamique au niveau macroscopique ou un niveau microscopique.¹

Dans sa version microscopique donc, le 2^e principe de la thermodynamique fait des prédictions sur le comportement probable d'un système composé d'un grand nombre de particules. Il déclare notamment que les systèmes ont tendance à évoluer, à partir de configurations très ordonnées et relativement improbables, vers des configurations plus désordonnées et statistiquement plus probables. En d'autres termes, les systèmes tendent vers des états de désordre moléculaire maximum, vers le chaos. (fig.1)



Mouvement moléculaire dans un gaz.

(a) : très ordonné. (b) : beaucoup moins ordonné ou plus chaotique

fig.1

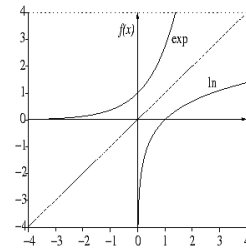


fig.2

2/ L'utilisation du logarithme s'explique par la croissance exponentielle d'états possibles en fonction du nombre de particules, sachant que les fonctions logarithme \ln et exponentielle \exp sont réciproques : $\exp(\ln x) = \ln(\exp x) = x$. (fig2). Par états possibles, il faut entendre les façons différentes dont sont réparties les particules dans le volume d'un gaz par ex. Lorsque la température tend vers zéro, la mécanique statistique enseigne que le système s'établit dans son état fondamental – son état d'énergie la plus faible possible, qui est unique et qui correspond à $\Omega = 1$, ce qui annule l'entropie $S (= k \ln \Omega)$, car $\log 1 = 0$ (en effet : soit $\log_a 1$ de base a . Comme $a^x = 1$ ou $a^x = a^0$, on a $x = 0$. Idem pour le log népérien : $\ln 1 = 0$).

3/ Une machine thermique qui fonctionne de façon idéale (réversible) reçoit de l'énergie (Q_{chaud}) d'un corps chaud à une température élevée T_c et en cède en un corps froid (Q_{froid}) à une température basse T_f . Mathématiquement, cela se traduit par : $Q_{chaud}/Q_{froid} = T_c/T_f$. L'échelle de température de Celsius [qui étalonne les températures entre celle de fusion de la glace à 0° et d'ébullition de l'eau à 100°] ne permet pas de définir un rapport. Il ne fait pas trois fois plus chaud à 3°C qu'à 1°C, mais dire qu'il fait trois fois plus chaud à 300 K qu'à 100 K garde un sens. [K comme (lord) Kelvin qui a défini, à la fin du XIX^e siècle, le 0 K comme le zéro absolu]. On pourrait penser à des températures négatives, mais une telle possibilité violerait le 1^{er} principe de la thermodynamique selon lequel on ne pas dépenser plus d'énergie que celle dont on dispose.²

¹ J. Perdijon, *La nature a-t-elle des principes ?* op. cit, p.82 ; J. Massicot, *Notions fondamentales de physique*, op. cit., pp.117-118.

² Kane/Sternheim, *Physique*, op. cit., p.247; A. Deiber, D. Husson, J.-L. Izbicki, R. Dehoucq, *La Physique pour les nuls*, op. cit., p.143 et 147.

Annexe IV

Masse inertielle et masse gravitationnelle

La deuxième loi de Newton s'écrit $F = m_i \gamma$, la lettre γ désignant l'accélération.

L'expérience quotidienne montre que tous les corps n'ont pas la même accélération pour la même force nette appliquée. En effet, il est beaucoup moins difficile de déplacer un stylo que de pousser une voiture. Il est évident que stylo et voiture présentent une inertie différente. La deuxième loi de Newton fait donc intervenir la masse de l'objet. Elle établit que la force nette agissant sur une particule de masse m produit une accélération de même direction que la force nette.

Newton établit par ailleurs, dans sa loi de gravitation universelle, que la force d'attraction entre deux corps est fonction de leurs masses et de la distance qui les sépare : $F = Gm_g M_g / r^2$.

Si on transforme la formule de la loi de la gravitation universelle en isolant les valeurs constantes, on retrouve une formule semblable à celle de la deuxième loi de Newton.

$$F_1 = (GM_g / r^2)m_g \quad \text{loi de la gravitation universelle}$$

$$F_2 = \gamma m_i \quad \text{deuxième loi de Newton}$$

$$\text{Si } F_1 = F_2, \text{ alors } \gamma m_g = \gamma m_i, \text{ donc } \gamma = (m_g / m_i)g$$

L'accélération de chute libre d'un corps dépend donc du rapport m_g / m_i . Puisque des expériences ont déjà prouvé que tous les corps ont la même accélération en chute libre et que celle-ci correspond à g , le rapport m_g / m_i doit être 1. En effet, pour que $a = g$, m_g doit absolument égaler m_i . La masse inertielle et la masse gravitationnelle ont donc la même valeur. Pourtant, ces deux notions de masse sont de nature totalement différente et n'ont aucune raison, a priori, d'être identiques. Le principe d'équivalence énonce qu'elles sont égales.

Principe d'équivalence : $\text{masse}_{\text{inertielle}} = \text{masse}_{\text{gravitationnelle}}$

En résumé : les masses demeurent différenciées, mais sont équivalentes. La masse inertielle et la masse gravitationnelle sont deux concepts distincts, mais de même valeur.¹ Cependant,

on ne peut plus confondre la notion de masse avec celle de matière, comme le faisait Newton. Deux masses d'eau, d'égale inertie, prises l'une à 100° et l'autre à 0°, ne contiennent pas la même quantité de matière, le même nombre de molécules, puisqu'elles cessent d'être égales lorsqu'on les ramène à la même température.²

¹ Marie-Ève Boulanger, *Masse inertielle ou gravitationnelle ?* <https://babel.cegep-ste-foy.qc.ca/profs/rfoy/articles/masse/>

² L. Rougier, *En marge de Curie, de Carnot et d'Einstein*, op. cit., p.89. Nous soulignons.

La notion de circuit de rétroaction dans une matrice jacobienne ¹

Many systems can be described by ordinary differential equations:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f_x(x, y, z, \dots) \\ \dot{y} &= f_y(x, y, z, \dots) \\ \dot{z} &= f_z(x, y, z, \dots) \\ &\dots\end{aligned}$$

or, more generally,

$$x_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n), \\ (i, 1 \dots, n)$$

Système dynamique à n variables indépendantes x_1, \dots, x_n défini par un système d'équations différentielles ordinaires non linéaires. Les états stationnaires (*steady states*) sont ceux qui n'ont pas encore fait l'objet d'une petite perturbation de l'une ou l'autre des variables. (Une petite perturbation en droit peut être une interprétation d'un des pouvoirs constitutionnels).

The steady state equations are:

$$\begin{aligned}dx/dt = f_x(x, y, z \dots) &= 0 \\ dy/dt = f_y(x, y, z \dots) &= 0 \\ dz/dt = f_z(x, y, z \dots) &= 0 \\ &\dots\end{aligned}$$

Steady states are defined, as usual, as the **REAL** roots of the steady state equations

Jacobian matrix

• The matrix of the partial derivatives:

$$j_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$$

Les dérivées partielles sont les éléments de la matrice dite jacobienne J du système différentiel. Par ex., les coefficients $(\partial f_i / \partial x_k)^*$ sont les valeurs de es éléments jacobiens pour les valeurs stationnaires des deux variables x_1 et x_2 :

$$J = [j_{ik}] = \begin{bmatrix} j_{11} = \partial f_1 / \partial x_1 & j_{12} = \partial f_1 / \partial x_2 \\ j_{21} = \partial f_2 / \partial x_1 & j_{22} = \partial f_2 / \partial x_2 \end{bmatrix}$$

Les indices **i** sont les indices de lignes et **j** (ou **k**) les indices de colonnes. *This matrix shows whether and how variables i and j interact : if j_{ij} is non-zero, it means that j influences the evolution of I, and one can then draw the graph: $j \rightarrow i$*

Notion de circuit:

Soit la matrice dans laquelle les coefficients j_{12} , j_{23} et j_{31} ne sont pas des 0.

Puisque j_{12} implique la relation $x_2 \rightarrow x_1$
que j_{23} implique la relation $x_3 \rightarrow x_2$
et que j_{31} implique $x_1 \rightarrow x_3$

nous ne pouvons qu'avoir, en raison de la transitivité :

$x_1 \rightarrow x_3 \rightarrow x_2 \rightarrow x_1$, c'est-à-dire un circuit de rétroaction

$$\begin{pmatrix} \cdot & j_{12} & \cdot \\ \cdot & \cdot & j_{23} \\ j_{31} & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

Plus généralement : un circuit est défini, à partir d'un ensemble de coefficients non nuls de la matrice jacobienne dont la ligne (i) et la colonne (j) forment une permutation circulaire (**entre en droit des interprétations constitutionnelles**) :

$$\begin{pmatrix} \cdot & j_{12} & \cdot \\ \cdot & \cdot & j_{23} \\ j_{31} & \cdot & \cdot \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cdot & j_{12} & \cdot \\ j_{21} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} j_{11} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

a 3-circuit

a 2-circuit

an 1-circuit

¹ René Thomas, *Frontier diagrams: a global view of the structure of phase space*, Univ. de Bruxelles
http://www.verimag.imag.fr/~maler/TSB/slides/Rene_Thomas_TSB07.pdf

§54.- RAISONNER EN « HAUTEUR »

1/ Leibniz, en prolongement de Galilée

i Galilée, Huygens et Leibniz, 352

ii Le droit, sans pousser l'analogie trop avant

iii Une représentation à remoderniser au passage

Annexe I, 356

iv Existe-t-il des « points de Lagrange » en droit ?

2/ De l'énergie potentielle à l'énergie cinétique

i Ce que dit la science ouvertement

ii Ce que dit le droit sourdement

3/ La notion de fonction potentielle, 365

a) Son apparition en sciences, 365

i Pourquoi une telle fonction ? 365

Annexes II à V, 369

ii Le déploiement et les déformations du potentiel, 371

b) Ses manifestations en droit

i Vider le réservoir des tensions et des frictions

ii Substituer à la discontinuité des événements

la continuité du droit constitutionnel.

iii Amortir les décisions tombées du haut de l'autorité

c) Une queue d'aronde en politique

i Des compromis de circonstance

ii Des compromis fondateurs

Annexes VI, V^{bis}, VII, VIII, IX et X, 379

o

1/ Leibniz, en prolongement de Galilée

i Galilée, Huygens et Leibniz

L'approche thermodynamique est partie d'un mode de raisonnement en considérant la « hauteur », ce qui ne saurait surprendre tant la gravité est le référentiel spatial de base dans l'esprit de l'homme. On voit l'exercice d'un tel mode de raisonnement chez les deux Carnot. Le père raisonne en termes de chute d'eau, d'un écart entre un haut et un bas. Le fils raisonne sur des différences de température, passant d'une source chaude, à température élevée, à une source froide, à température plus basse.

(§32
1/-iii)

Lazare Carnot n'ignora nullement Leibniz. Au cours de notre travail, nous avons vu qu'il écrivit une *Métaphysique* du calcul infinitésimal pour mieux en comprendre le fonctionnement. Leibniz n'ignora nullement non plus Descartes. Son calcul en affina la méthode analytique mais Leibniz fut plus sensible en physique à l'apport de Galilée qu'à celui de Descartes. Rappelons que la loi de la chute des corps de Galilée introduit le carré de la vitesse dans l'équation de la forme $z = z_0 - \frac{1}{2} g t^2$, où z est la hauteur élevée, z_0 la hauteur basse, t le temps et g l'accélération due à la gravité. Cette innovation donna des idées à Leibniz qui considèrera dans sa physique le produit de la masse m par la vitesse au carré, v^2 , soit mv^2 , plutôt que le produit mv censé définir pour Descartes la quantité de mouvement.

(§31
i & ii)

Une telle filiation avec le créateur de la dynamique est manifeste chez Leibniz qui ira jusqu'à dédier son traité de dynamique, écrit en 1690, au grand-duc de Florence comme l'avait fait en son temps Galilée.¹

Pour comprendre cet héritage, admirons à nouveau, en compagnie du mathématicien du XX^e siècle, Emile Borel, qui se fit à l'occasion historien des sciences, les recherches profondes et ingénieuses de Galilée sur le mouvement des corps pesants grâce à l'utilisation d'un plan incliné et d'un pendule :

¹ François Duchesneau ; La dynamique de Leibniz, Vrin, Paris, 1994, p.173

Lorsqu'un corps pesant tombe, sa vitesse s'accroît avec la chute ; cette chute est plus lente lorsqu'elle se produit sur un plan incliné, et d'autant plus lente que le plan est moins incliné ; Galilée ajoute l'hypothèse que la loi de la chute, c'est-à-dire la forme de la relation entre les espaces et les temps, est la même pour la chute le long d'un plan incliné que dans le cas de la chute libre.

*Son intuition le conduit en outre à une autre hypothèse, et c'est là sans doute que son génie le guide et lui fournit la clef du problème : **lorsqu'un corps est tombé d'une certaine hauteur, le long d'un plan incliné, il a acquis une certaine vitesse ; l'hypothèse fondamentale de Galilée est que cette vitesse lui permettrait de remonter d'une hauteur égale le long d'un plan incliné symétrique du premier.***

Emile Borel suggère que cette hypothèse, née au cours d'expérimentations sur le plan incliné, fut confortée chez Galilée par l'observation du pendule simple.

Si ce pendule est écarté de sa position verticale, le fil restant tendu, il la regagne et arrive au bas de sa chute avec une vitesse qui lui permet de remonter à une hauteur égale à celle d'où il est parti.¹

L'observation, il est vrai, montre qu'après un grand nombre d'oscillations, l'amplitude des va-et-vient diminue. En conséquence, la hauteur diminue aussi, mais cette faible différence doit être attribuée à la présence de l'air qui oppose une résistance passive. Intuitivement, Galilée conçoit dans l'abstrait qu'un pendule parfait, non soumis à pareille résistance, permet de reproduire un mouvement rigoureusement symétrique à la montée et à la descente. Galilée en conclut que la vitesse acquise par le pendule est indépendante de la pente du plan incliné. **Sa vitesse ne dépend que de la hauteur de chute.**

Si certaines pentes du plan incliné permettaient d'obtenir une vitesse plus grande pour la même hauteur de chute, on pourrait l'élever à une hauteur plus grande que celle dont elle est descendue. On arriverait ainsi à créer gratuitement du travail, ce qui est depuis longtemps reconnu comme impossible.²

Comme Stevin qui avait déjà travaillé auparavant sur le plan incliné, Galilée est plus que sceptique sur l'idée d'un mouvement perpétuel. Comme on sait, Galilée parvint à formuler la loi fondamentale de la chute d'un corps pesant abandonné sans vitesse initiale. Les espaces parcourus sont proportionnels aux carrés des temps écoulés pour les parcourir. Pendant les temps 1, 2, 3, 4, ..., les espaces parcourus sont égaux à 1, 4, 9, 13, ... La vitesse étant la distance divisée par le temps, Galilée arriva à penser que les vitesses croissent proportionnellement au temps. La vitesse acquise au bout de dix secondes est dix fois plus grande que la vitesse acquise au bout d'une seconde.

Ces raisonnements arithmétiques de Galilée sont entièrement équivalents aux formules par lesquelles nous exprimons les lois du mouvement uniformément accéléré $v = gt$ et e (comme espace) $= 1/2gt^2$. De ces équations, on obtient facilement la relation entre e et v : $e = v^2/2g$. Cette relation ne paraît pas avoir été donnée par Galilée.

[...]

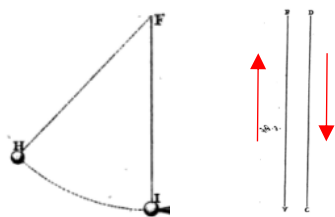
C'est Huygens qui eut l'idée d'éliminer t entre les deux équations $v = gt$ et $h = 1/2 gt^2$. On obtient ainsi l'importante équation $v^2 = 2gh$ qui fait connaître la vitesse v d'un corps pesant qui, partant du repos, tombe d'une hauteur h . Envisagé à un autre point de vue, la même équation fait connaître la hauteur vertical h qu'atteindra un corps pesant lancé vers le haut avec une vitesse verticale v . On voit que cette hauteur est proportionnelle au carré de la vitesse initiale.³

Le rapport de Galilée à Leibniz ne fut pas effectivement immédiat. Leibniz a lu Huygens qui avait approfondi, depuis Galilée, l'étude du pendule. Leibniz reprit de Huygens l'idée d'une vitesse élevée au carré. A la même époque, il a lu également Mariotte dont il reprit non moins l'idée d'un dispositif expérimental composé de deux pendules dont l'un est au repos et l'autre hissé **en hauteur** avant de venir, une fois lâché, heurter le premier. Il est inutile de préciser que ce ne sont pas les pendules qui se rencontrent mais les boules fixées à leur extrémité. **La boule du pendule en repos remonte sous le choc de la boule du pendule en mouvement :**

¹ E. Borel, *L'évolution de la mécanique*, op. cit., p.60.

² *Ibid.*, p.61.

³ *Ibid.*, pp.62-63. Nous soulignons. Leibniz reprit de Huygens l'idée d'une vitesse élevée au carré que celui-ci avait exprimé pour la 1^{re} fois en 1652 dans *De Motu corporum ex percussione*, publié à titre posthume en 1783. V. Claude Bruter, *Energie et stabilité. Eléments de philosophie naturelle et d'histoire des sciences*, Semiotics Institute on Line, 2007, <http://arpam.free.fr/ESC.pdf>



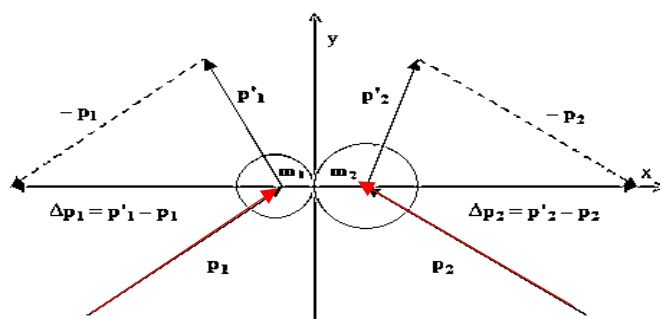
Soit AB une perpendiculaire, qu'un poids ait passé dans un certain tems tombant du point de repos A; & que ce poids, étant arrivé au point B, change de direction & remonte vers le point A, commençant son mouvement de bas en haut selon la vitesse acquise au point B: je dis qu'il remontera jusques au point A, & que le tems de sa montée sera égal à celui de sa descente.

(Edmé Mariotte, *Du mouvement des pendules* (éd. posth.), Proposition I)¹

Dans cette expérience apparut à Leibniz un schème de pensée nouveau expliquant le choc entre deux corps. Il importe de raisonner en hauteur pour établir les lois du choc, et non de partir comme Descartes qui considérerait l'ensemble des vitesses des corps, acquise et redistribuée à l'instant du choc. *Basing himself on Galileo's investigation of falling bodies* [mais pas de façon aussi immédiate comme on vient de le voir] *Leibniz shows that the proper measure of « force » is the distance through which which a body can lift itself upwards by the power acquired in its preceding free fall; and that consequently « force » must be equated with the product of the body, i.e., its mass, and the square of its velocity (mv^2).*²

Quel reproche précis Leibniz opposa-t-il donc à Descartes ? La quantité de mouvement est le produit de la quantité de matière (sa masse, m) par sa quantité de vitesse v . Jusqu'ici, il n'y a rien à dire, mais dans sa théorie du choc des corps, Descartes calcule les vitesses résultantes en ne considérant que leur quantité de mouvement (mv), indépendamment de leur valeur d'orientation par rapport à un axe. La quantité de mouvement n'est qu'une quantité scalaire, et non un vecteur (mv) comme on l'admet aujourd'hui depuis Leibniz. Ce n'est pas la valeur absolue de la quantité de mouvement qui se conserve dans le choc, autrement dit sa norme, mais la quantité de mouvement entendue comme vecteur.

En clair, chez Descartes, pour Leibniz, on n'ajoute que du positif à du positif. Il n'y a point de soustraction. Deux corps se déplacent sur une ligne droite sans que l'on s'assure des vitesses en + ou - comme sur la *fig.* où les deux corps (deux billes) se rencontrent obliquement de façon plus générale :



m_1 et m_2 Masses des deux billes
 $p_1 = m_1 V_1$ Quantité de mouvement de m_1 avant le choc
 $p'_1 = m_1 V'_1$ Quantité de mouvement de m_1 après le choc
 $p_2 = m_2 V_2$ Quantité de mouvement de m_2 avant le choc
 $p'_2 = m_2 V'_2$ Quantité de mouvement de m_2 après le choc
 Δp_1 Variation de la qté de mvt de m_1
 Δp_2 Variation de la qté de mvt de m_2
 $p = p_1 + p_2$
 $p' = p'_1 + p'_2$ (p, p', p_1, p_2, p'_1 et p'_2 sont des vecteurs)³

Une « quantité de mouvement » au sens post-cartésien est un mouvement dont on connaît la trajectoire et la direction.

Dans ses *Principes philosophiques*, publiés en 1644, Descartes avait pourtant bien formulé le problème pour procéder au calcul.⁴Le choc direct de deux corps indéformables (condition restrictive) donne lieu à une redistribution des vitesses qui s'opère de façon instantanée. Mieux : quelque chose se conserve dans l'opération. Seulement, la solution est fautive : ce qui demeure invariant avant et après la rencontre n'est pas la valeur absolue de la quantité de mouvement, mais la valeur algébrique de cette quantité.

Huygens avait pressenti la difficulté, car il n'admettait pas déjà que la quantité de mouvement reste invariante dans le choc direct de deux corps élastiques i.e. indéformables. Il soustrayait la quantité de mouvement contraire, consécutive à l'inversion de sens de l'une des vitesses. De plus, si les corps se heurtent obliquement ou frontalement, le centre commun de gravité de tous les corps se déplace sur

¹ Œuvres de M. Mariotte, de l'Académie des sciences, La Haye, 1740, google e-book, p.561.

² J. Klein, *Lectures and Essays* [1985], op. cit., ch.12 : Leibniz, an Introduction, p.2007. Nous soulignons.

³ http://gilbert.gastebois.pagesperso-orange.fr/java/chocs/choc_anim/theorie_chocs.pdf

⁴ Descartes, *Principes de philosophie* [1644], II : Des choses matérielles, art. 44-52, O.C. Pléiade, pp.638-643.

un même trajet rectiligne uniforme. Voilà le fil conducteur : la prise en considération des vitesses relatives d'approche et de séparation des corps, ainsi que la conservation de la translation de leur centre de gravité apparaissent incompatibles avec la thèse de la conservation de la quantité de mouvement.

(§43
a)-i)

(Il vaut de relever que Huygens porta son attention au mouvement relatif de deux corps qui se rencontrent en imaginant le déplacement d'un navire entraîné par un mouvement égal. Il étudia les effets du choc vis-à-vis de l'opérateur sur le bateau et vis-à-vis de l'observateur sur la rive. *Le mouvement commun est représenté de façon figurée par un bateau qui glisse sur une eau calme avec une vitesse uniforme. [...] La conservation du centre de gravité exprime la direction totale et la vitesse relative.*¹ Pour comprendre et visualiser un tel mouvement, nous conseillons au lecteur d'attendre les schémas un peu plus bas d'Henri Poincaré qui illustrent ce mouvement en considérant la direction C.)

(§33
2/)

De même que Leibniz s'était réapproprié le triangle caractéristique de Pascal pour établir les bases du calcul infinitésimal, ainsi Leibniz se réapproprie l'approche de Huygens pour établir les lois du choc en qualifiant de *force* la quantité mv^2 . Dans le triangle caractéristique de Pascal, Leibniz avait repéré une invariance : il avait saisi dans une courbe la permanence du quotient dy/dx dont la relation est autonome par rapport à x et y . Le rapport se maintient quel que soit le point situé sur la courbe (si on la suppose lisse). Dans l'étude de Huygens, Leibniz repère, avec le même flair, une autre invariance, non plus en mv , mais en mv . Les vitesses des corps ne sont plus constantes, mais peuvent varier et se compenser en étant élevées au carré. Voici le résumé synthétique qu'en donnera Henri Poincaré :

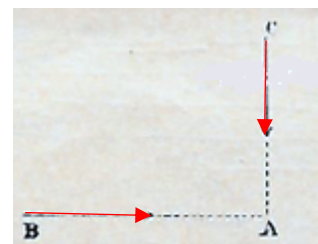
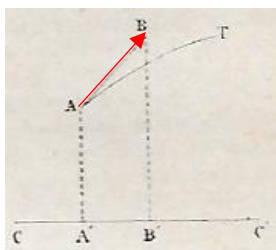
Il est aisé de voir quelle est la différence essentiellement entre la loi de Descartes et celles de Leibniz.

[Henri Poincaré emploie le pluriel pour Leibniz car ce dernier considère la quantité de mouvement mv , la force qu'il appelle vive en mv^2 , et la « quantité de progrès » qui n'est autre que la quantité de mouvement suivant une certaine direction, soit le vecteur quantité de mouvement mv de nos jours.]

Si l'on considère un système quelconque d'atomes, la vitesse de l'un d'entre eux peut, selon Descartes, être altérée en direction, pourvu qu'elle reste constante en grandeur, sans que la quantité du mouvement du système ait varié. Dans l'hypothèse cartésienne, une molécule quelconque peut éprouver dans son mouvement une perturbation, sans exercer aucune influence sur les molécules voisines.

Avec les lois de Leibniz, au contraire, dès que la vitesse d'un point quelconque varie, soit en grandeur [Leibniz prend donc en considération les accélérations ou décélérations], soit en direction, la « quantité de progrès » serait augmentée ou diminuée s'il n'y avait aucune autre modification dans le système. Pour que cette quantité ne soit pas altérée, ainsi que l'exige la loi leibnizienne [la quantité de progrès mv du système par ex. de deux corps = constante], il faut que tout changement dans le mouvement d'un atome soit accompagné d'un changement contraire dans le mouvement d'un ou plusieurs autres atomes.²

Poincaré illustre son propos par les trois figures suivantes :



Dans la *fig.a*, Poincaré considère deux points matériels A et B. La vitesse du point A est représentée par la droite AB (la tangente à la courbe T) dont la longueur est proportionnelle à cette vitesse. La grandeur, la direction et le sens sont complètement définis par la droite AB.

¹ Michel Fichant, Introduction à G. W. Leibniz, in Leibniz, *La réforme de la dynamique. Textes inédits*, Vrin, Paris, 1994, pp.27-30. *Le principe de relativité de Huygens implique la parfaite réversibilité des référentiels en mouvement rectiligne uniforme les uns par rapport aux autres.* (p.32, n.2).

² Henri Poincaré, *Note sur les principes de la mécanique dans Descartes et dans Leibniz*, en annexe de l'édition de Leibniz, *La monadologie* [édit. posth., 1840], Delagrave, Paris, 1966, p.231.

Cela étant, Poincaré imagine une direction quelconque CC sur laquelle il abaisse les deux perpendiculaires AA' et BB'. Le segment A'B' est la projection de la vitesse du point A sur la direction C, i.e. la composante de la vitesse suivant la direction C. *Dans cette composante, il faut considérer deux choses : sa grandeur absolue, mesurée par la longueur du segment A'B', et son signe. La composante sera, par exemple, regardée comme positive si le point B' est à droite de A', et comme négative si ce point est à gauche de A'.*¹ Idem pour le point B.

La « quantité de progrès », mv , suivant la direction C sera la somme algébrique des quantités de progrès des deux points matériels du système. **C'est cette quantité qui se révèle constante et qui traduit la conservation de la translation du centre commun de gravité des points A et B suivant la direction CC.**

Si les points matériels A et B de masse égale à 1 s'avancent l'un vers l'autre (*fig. b*) suivant la direction AB, le premier avec une vitesse 2, le second avec une vitesse 1, la « quantité de progrès » mv du système sera égale à $2-1=1$. Si les points matériels de masse toujours égale à l'unité se dirigent l'un et l'autre vers A avec une vitesse 1, la composante suivant la direction perpendiculaire à AB sera nulle (le produit scalaire des vecteurs **AB** et **AC** = 0) et la « quantité de progrès » mv du système sera $1+0=1$.²

ii Le droit, sans pousser l'analogie trop avant

iii Une représentation à remoderniser au passage

Einstein encore. - L'analyse de Ricardo et sa pertinence actuelle. – Einstein bis

iv Existe-t-il des « points de Lagrange » en droit ?

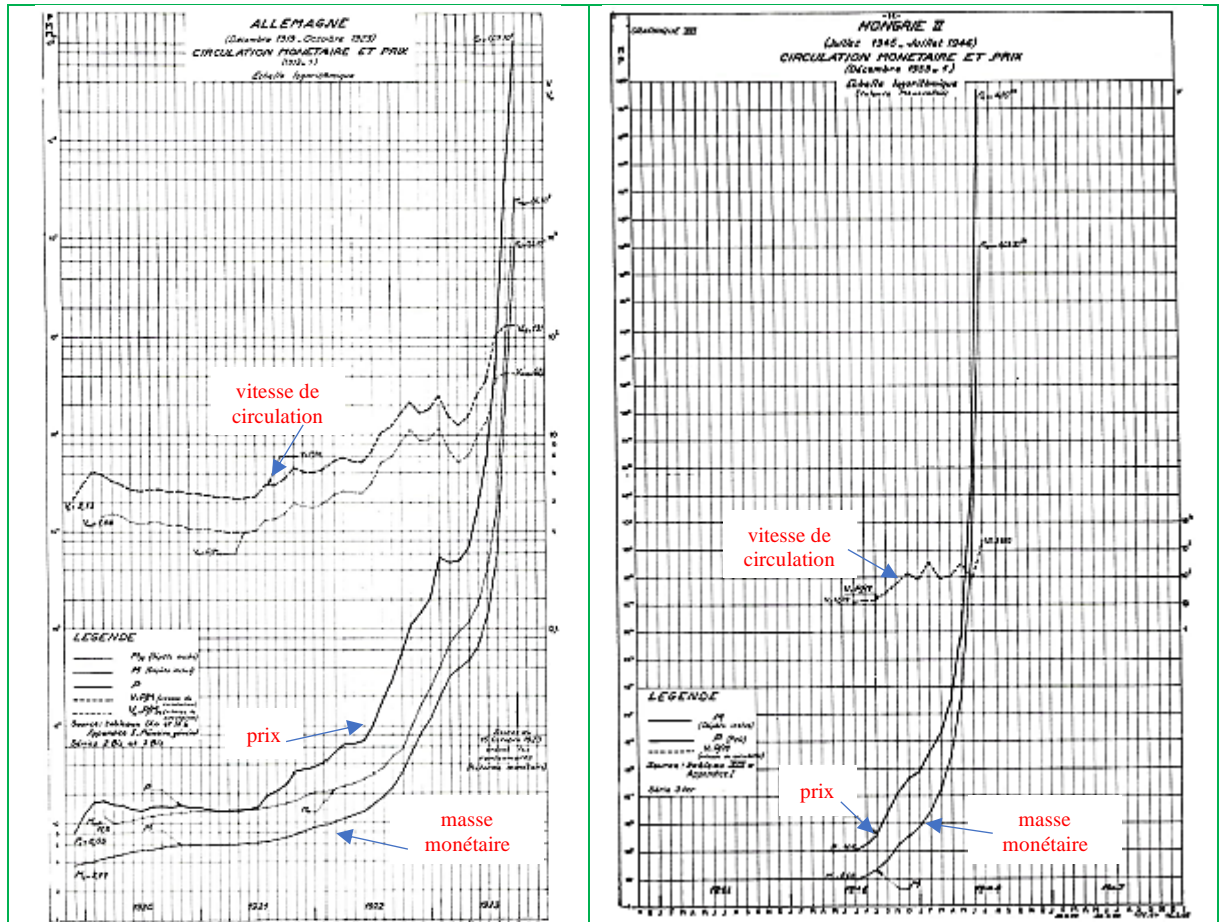
Annexe I

Hyperinflation : prix (P), masse monétaire (M) et vitesse de circulation de la monnaie ($V = M/P$) en Allemagne (déc.1919-oct.1923) et en Hongrie (juil.1945-juil.1946)³

¹ *Ibid.*, p.227.

² *Ibid.*, pp.227-229.

³ M. Allain, *Analyse économique : Monnaie et développement*, Ecole nationale supérieure des Mines de Paris, sept.1968, Fasc.2, pp.51-52.



2/ De l'énergie potentielle à l'énergie cinétique

i Ce que dit la science ouvertement

L'énergie cinétique, 357. - L'énergie potentielle, 358

- La coexistence des deux formes d'énergie, 360.- Le principe de conservation de l'énergie mécanique, 361

Dans son étude sur Leibniz, Henri Poincaré rappelle que l'énergie totale d'un système se compose de trois parties :

- l'énergie cinétique, ce que Leibniz appelait la *force vive*, autrement dit l'énergie associée au mouvement (avec l'idée derrière d'être capable de pouvoir élever un corps en hauteur) ;
- l'énergie potentielle, *par exemple la puissance mécanique qui est emmagasinée dans un poids maintenu à une certaine hauteur, ou dans un ressort tendu* ;
- l'énergie moléculaire, i.e. la chaleur, l'énergie électrique, l'énergie chimique, etc.

Et de rappeler encore que *c'est l'énergie totale, et non telle ou telle de ses parties, qui est constante ; il peut y avoir transformation d'une certaine quantité d'énergie cinétique en énergie potentielle ou en énergie moléculaire, mais il ne peut y avoir ni création ni destruction d'énergie*. Poincaré donne un exemple :

La poudre contient, par suite des affinités mutuelles des corps oxydants et combustibles qui la composent, une certaine quantité d'énergie chimique ; quand elle brûle, il se développe des gaz à une pression considérable où est emmagasinée une puissance mécanique énorme : l'énergie chimique est transformée en énergie potentielle ; les gaz se détendent et lancent le projectile :

L'énergie potentielle est devenue cinétique ; la balle est arrêtée par le but et s'échauffe au point de devenir brûlante ; la force vive ou énergie cinétique est transformée en chaleur.¹

Poincaré n'ignore pas que Leibniz ne soupçonnait pas la dernière transformation. La thermodynamique n'était pas encore née, mais Leibniz, reconnaît-il, n'en avait pas moins une idée du principe de conservation de l'énergie.

Arrêtons-nous, comme à l'époque de Leibniz, aux seules notions d'énergies cinétique et potentielle.

L'énergie cinétique

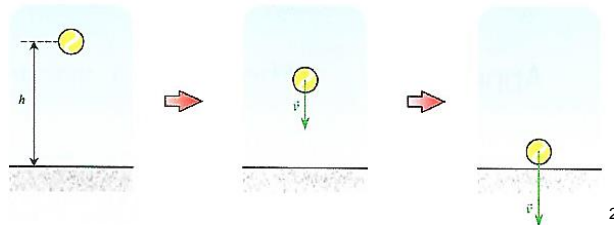
L'énergie cinétique, ou énergie de mouvement, prend deux formes suivant que l'on a affaire à un mouvement de translation ou à un mouvement de rotation. L'énergie de translation est l'énergie qui est capable de produire le mouvement d'un corps d'un point à un autre en ligne droite. Pour pousser une charrette, il faut la pousser ou la tirer. L'énergie de rotation est capable, elle, de produire un mouvement circulaire comme celui d'une roue d'un moulin sous la force d'un torrent ou du vent.

(§32
3/c)-i)
(§39
-1/)

Ces deux formes d'énergie cinétique ne s'ignorent nullement. Du moins, les hommes, par leur ingéniosité, les ont mis en relation en inventant les premières machines simples, comme les procédés de levage (leviers, poulies, treuils), qui transforment l'énergie de rotation en énergie de translation, ou les procédés d'engrenage (horloges, montres) qui obéissent aux mêmes mécanismes de conversion.

Reprenons l'exemple d'une balle, non plus de fusil, mais d'une balle à jouer. C'est moins dangereux, car on ne connaît que trop les accidents que s'infligent involontairement – et parfois volontairement en cas de dépression - les nombreux porteurs d'armes à feu aux Etats-Unis (nous ne parlons même pas des tueries de masse qui font « périodiquement » la une des media avec regret affiché des dirigeants).

Assimilons une telle balle à un point matériel de masse m . Nous la tenons immobile, à une hauteur h au-dessus du sol. Lorsque nous la lâchons, la balle acquiert progressivement de la vitesse sous l'effet de la force de pesanteur. Le physicien attribue à la balle une grandeur, proportionnelle à sa masse et au carré de sa vitesse. C'est l'énergie cinétique par définition. L'énergie cinétique est une grandeur scalaire qui ne donne aucune information sur la direction du mouvement. Elle s'exprime en joule (J).



- Quelle est son expression algébrique finale ?

- Je réponds, mais rapidement, en considérant le mouvement uniformément accéléré déjà étudié.

Soit un objet soumis à une force constante et subissant en conséquence une accélération constante, a . Puisque sa vitesse varie d'une quantité Δv , sa valeur devient : $v = v_0 + a\Delta t$. La vitesse moyenne v_{moy} dans l'intervalle de temps Δt est donnée par $v_{moy} = v_0 + \Delta v/2 = v_0 + (v-v_0)/2$ ou $v_{moy} = 1/2 (v_0+v)$. Le déplacement, i.e. le changement de position intervenant pendant l'intervalle de temps Δt , est lié à la vitesse moyenne par la définition $v_{moy} = \Delta x/\Delta t$ ou encore $\Delta x = 1/2 (v_0+v)\Delta t$. En substituant $v = v_0 + a\Delta t$ dans cette équation, il vient : $\Delta x = v_0\Delta t + 1/2 a (\Delta t)^2$. Or $v = v_0 + a\Delta t$ ou $\Delta t = (v-v_0)/a$. En substituant cette valeur de Δt dans $\Delta x = 1/2 (v_0+v)\Delta t$, on obtient : $\Delta x = 1/2 (v_0+v) [(v-v_0)/a] = (v^2-v_0^2)/2a$, soit $v^2 = v_0^2 + 2a\Delta x$. (fig.a)

¹ H. Poincaré, *Note sur les principes de la mécanique dans Descartes et dans Leibniz*, art. cit., pp.229-230.

² Jérôme Majou, *Physique !* Bréal, Paris, 2004, p.13

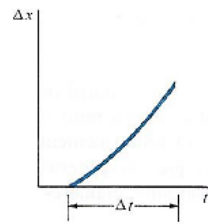


fig.a

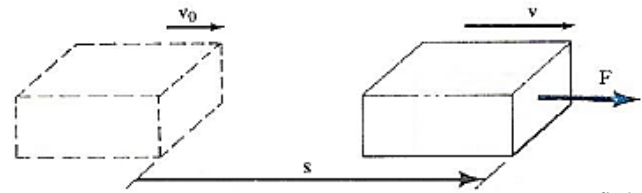


fig.b

Nous respirons après ce petit jeu de substitutions.

L'objet de masse m , avons-nous dit, soumis à une force constante \mathbf{F} (un vecteur) subit un déplacement s parallèle à \mathbf{F} . (fig.b) L'accélération considérée $a = \mathbf{F}/m$ est toujours constante et nous savons en conséquence que $v^2 = v_0^2 + 2as$ en remplaçant Δx par s . En multipliant chaque membre de part et d'autre de l'équation par $m/2$, on a : $\frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} mv_0^2 + mas$. Comme $\mathbf{F} = ma$ (2^e loi de Newton), le travail effectué par la force \mathbf{F} a pour expression : $W = Fs = mas$. Or, les énergies cinétiques finale K et initiale K_0 sont définies par $K = \frac{1}{2} mv^2$ et $K_0 = \frac{1}{2} mv_0^2$. Dès lors, nous pouvons réécrire l'équation $\frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} mv_0^2 + mas$ sous la forme $K = K_0 + W$.

Ainsi, l'énergie cinétique finale de l'objet est égale à son énergie initiale augmentée du travail effectué sur cet objet. [Il ressort de la dernière équation $K = K_0 + W$] que lorsqu'un travail est effectué sur un objet, son énergie cinétique augmente. Inversement, si un objet effectue un travail sur un autre objet, son énergie cinétique augmente. C'est ce qui se passe lorsqu'une personne ralentit ou arrête un objet en mouvement.¹

L'épreuve de l'algèbre est passée. C'est peut-être un mauvais souvenir pour certains, mais on table sur du sûr ! La visualisation ne suffit pas. Il faut connaître la langue du monde qui n'est pas que la géométrie.

L'énergie potentielle

C'est ici que le raisonnement en hauteur trouve toute son ampleur. L'énergie potentielle est une énergie tenue en réserve du fait de sa hauteur. Il en est ainsi du réservoir d'une masse d'eau situé au sommet d'une pente sur laquelle l'eau, une fois lâchée, peut s'écouler et exécuter à l'occasion un travail positif (l'eau fait tourner non seulement les roues d'un moulin, mais aussi, aujourd'hui, les pales d'une turbine).

Toute masse d'eau située au-dessus du niveau de la mer a ainsi une certaine énergie potentielle, car il est relativement aisé de l'abaisser en utilisant au besoin des canalisations de pente très faible qui l'amènent en un point convenablement choisi, dominant une région d'altitude plus faible. Au contraire, l'eau des mers ne possède pas d'énergie potentielle, ou du moins d'énergie potentielle utilisable, car on ne voit pas comment elle pourrait descendre au-dessous de son niveau actuel.²

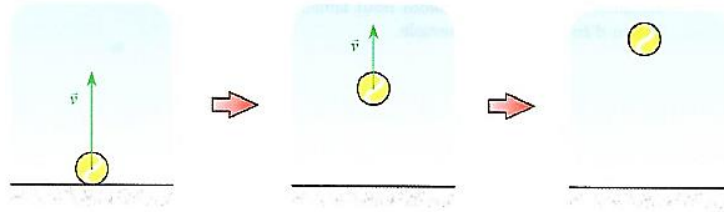
Lequel d'entre nous, qui s'est promené dans la campagne romaine, n'a pas admiré les aqueducs qui acheminent encore l'eau des montagnes voisines. N'est-ce pas grâce à une légère pente étirée sur des kilomètres ! La contemplation du paysage répond au calcul de l'ingénieur. L'art n'exclut pas la science. Mais reprenons notre balle à jouer.

Après un rebond, la balle peut remonter presque à sa hauteur initiale. Pendant ce déplacement, l'énergie (cinétique) associée au mouvement diminue, puis s'annule au sommet de la trajectoire. Cependant, l'énergie de la balle n'a pas disparu, parce qu'une nouvelle chute succède à la première phase. *Nous devons donc admettre que la balle possède aussi de l'énergie quand elle est immobile en position haute. Cette forme d'énergie, qui n'est pas directement perceptible, est liée à l'action du champ de pesanteur. Elle correspond à l'énergie cinétique (E_c) que la balle est susceptible d'acquérir sous l'effet de son poids, c'est-à-dire à une énergie potentielle de pesanteur.³*

¹ Kane/Sternheim, *Physique*, op. cit., chap.1 : Le mouvement rectiligne, pp.12-13 et chap.6 : Travail, énergie et puissance, p.132.

² E. Borel, *L'évolution de la mécanique*, op. cit., p.36.

³ J. Majou, *Physique !* op. cit., p.412.



La mesure de la grandeur E_p peut être obtenue expérimentalement en lâchant la balle de différentes hauteurs h : $E_p = mgh$, avec m désignant la masse et g l'accélération de la pesanteur. Au cours de l'évolution de la balle, la somme des énergies cinétique et potentielle est sensiblement constante : $E_c + E_p = \frac{1}{2} mv^2 + mgh = \text{cste}$. La somme de ces deux énergies constitue l'énergie mécanique de la balle.

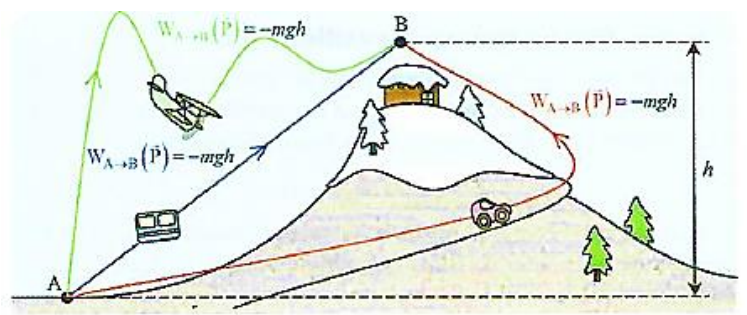
Le poids est donc associé à une énergie potentielle, mais d'autres forces sont susceptibles de l'être également. Par ex., il suffit d'examiner le rebond de la balle sur le sol. En première approximation, le vecteur vitesse de la balle change instantanément de direction au moment du choc, mais, en regardant de plus près, nous observons que la balle perd sa vitesse et se déforme au contact du sol. *A cet instant,*



*la balle ne possède plus d'énergie cinétique puisque sa vitesse est nulle ; elle ne possède pas non plus d'énergie potentielle de pesanteur car sa hauteur est également nulle. La déformation de la balle permet d'expliquer qu'elle puisse encore remonter. Pour reprendre sa forme initiale, la balle exerce une force sur le sol et acquiert progressivement de la vitesse. Une énergie potentielle élastique explique le phénomène.*¹ Cette énergie potentielle, autre que celle de la pesanteur, entre dans le bilan énergétique.

On avance. (pause)

Intéressons-nous à nouveau au poids pour remarquer que le travail accompli par le poids, qui est une force (donc un vecteur écrit en gras), entre une hauteur basse A et une hauteur haute B ne dépend pas du dénivelé entre A et B. Le travail du poids prend une même valeur pour tous les déplacements qui mènent de A à B. Ainsi, lorsque nous montons un objet sur une hauteur h , le travail résistant (W) opposé par l'objet est le même **quel que soit le trajet emprunté**. $W_{A \rightarrow B}(\mathbf{P}) = -mg(z_B - z_A)$. Une force, qui possède cette propriété remarquable, est dite **conservative** et peut être associée à une énergie potentielle.



A contrario d'une force conservative, une *force dissipative* dépend du trajet emprunté et donc des frottements rencontrés

¹ Ibid.

² Ibid., p.420.

La connaissance de l'énergie potentielle est particulièrement importante, non seulement en science, mais aussi dans ses applications.

Songez à nouveau au poids d'une horloge que l'on remonte. Cette opération consiste à lui communiquer une énergie potentielle qui permettra au balancier d'osciller à nouveau et d'entraîner les aiguilles sur un cadran. Au moyen âge même, voire dans l'antiquité, les ressorts des catapultes obéissaient au même principe. La combustion de la poudre a fini, à l'âge moderne, par les supplanter, mais l'idée demeure, sous la technique : le boulet de canon, poussée par une force explosive, atteint une énergie potentielle maximale avant de retomber avec une énergie cinétique également maximale.

Songez encore aux barrages qui utilisent l'énergie potentielle des chutes d'eau pour produire de l'électricité (c'est l'énergie cinétique, répétons-le, qui actionne les turbines). Le renouvellement des réserves est assuré par le cycle de l'eau.

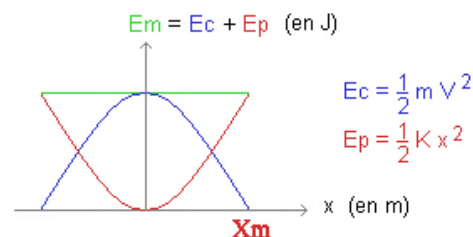
Songez enfin au lancement des satellites. L'énergie chimique, transportée par une fusée, lui permet d'exercer une poussée sur le sol, ce qui accroît son énergie potentielle au profit d'une énergie cinétique. Les ingénieurs doivent calculer cette dernière pour que le lanceur gagne une altitude où la pesanteur influera moins. Sans cette condition qui s'impose au lancement, la mise en orbite s'avère impossible.

La coexistence des deux formes d'énergie

Retrouvons le pendule pesant qui revient, fidèle à lui-même, au cours de notre réflexion, son schéma étant si présent en science (chez Galilée, Huygens et Leibniz) et, de façon semi-consciente, en droit.

Si on l'écarte de sa position stable, on observe des oscillations. Interprétons ce mouvement de va-et-vient en termes d'énergies cinétique et potentielle. Le fait d'écarter le pendule d'une certaine amplitude lui communique une énergie potentielle qui permet à son centre de gravité d'atteindre une attitude z , supérieure à celle de son point d'équilibre. Lâchons le pendule. Aussitôt, le pendule effectue un mouvement circulaire en sens inverse jusqu'à sa position d'équilibre. Le pendule « consomme » ou « dépense » en quelque sorte l'énergie potentielle antérieurement communiquée. Comme il arrive à la position d'équilibre à une certaine vitesse, l'énergie cinétique acquise lui permet d'effectuer un mouvement de l'autre côté du point d'équilibre jusqu'à atteindre de nouveau l'altitude z , et ainsi de suite.

Si on imagine la situation idéale d'un pendule **sans frottement**, il y a échange d'énergie entre l'énergie potentielle et l'énergie cinétique. Le mouvement est oscillatoire, périodique et indéfini. L'énergie potentielle se transforme en énergie cinétique, et réciproquement, à chaque passage du point d'équilibre, puis aux deux points d'amplitude maximale. La transformation se réduit exclusivement à un changement de vitesse et de position relatives des diverses parties du système observé :



Une bille qui tombe sur une surface parfaitement dure, polie et indéformable, rebondit toujours jusqu'à la même hauteur et acquiert un mouvement qui se répète indéfiniment. Naturellement, à cause de la résistance de l'air et du frottement de la bille sur le sol, le mouvement du système non isolé finit par se ralentir. (Nous avons eu déjà l'occasion de le signaler en montrant, sur un autre schéma, la différence entre l'énergie mécanique au départ et l'énergie mécanique à un autre instant qui a été dissipée sous forme d'**agitation thermique comme dans l'exemple d'une main frottant, et glissant, sur une rampe d'escalier, ou celui d'une perceuse produisant fumée et étincelles au contact du métal.**)¹

(§53
c)-ii)

¹ L'énergie mécanique, http://www.memo.fr/article.asp?ID=THE_ENE-005.

Nous ne reviendrons pas sur cette partie de l'énergie dégradée en chaleur, non directement utilisable. En revanche, il vaut de revenir sur la notion de frottement dès qu'il y a contact entre deux matières différentes, celle de la bille sur le sol ou plus simplement celle du pendule et celle de son axe. Une surface rugueuse doit être opposée à une surface lisse. Même dans l'espace, un satellite rencontre insensiblement, à chaque orbite, des poussières. Sa trajectoire est modifiée jusqu'à ce qu'il subisse l'attraction terrestre. Lors de sa rentrée dans l'atmosphère, il peut, comme les météorites, s'enflammer à cause des frottements de l'air et se consumer. C'est une chance pour les terriens.

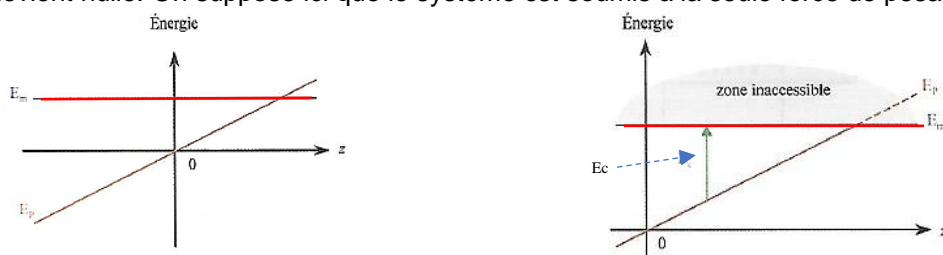
Sans doute faut-il réduire de plus possible les frottements pour que le patineur puisse glisser sur une patinoire, mais les frottements peuvent aussi s'avérer utiles : pour se déplacer, par exemple, sur la même patinoire sans tomber. *Sans frottements, la roue n'existerait pas ; le verglas sur la chaussée permet d'imaginer les inconvénients d'un monde sans frottements.*¹ Qu'aurions-nous fait également en horlogerie sans de bons frottements ? On imagine mal enfin, en droit constitutionnel, le mode de séparation des pouvoirs qu'est la séparation des organes du XVIII^e siècle sans de tels expédients !

Le principe de conservation de l'énergie mécanique

Dans un système conservatif évoluant sans forces de frottement, le bilan énergétique se traduit par l'équation de l'énergie mécanique : $E_m = E_c + E_p$, ou en termes variationnels : $\Delta E_m = \Delta E_c + \Delta E_p$. L'étude du profil énergétique d'un tel système permet de prévoir son évolution dans le temps.

Voyons ceci de plus près.

Soit le système de coordonnées (t, z) , t désignant le temps et z la hauteur (ou l'altitude). L'énergie mécanique, E_m , qui somme les deux formes d'énergie, E_c et E_p , peut être représentée par une droite horizontale. L'énergie potentielle, elle, peut l'être par une droite oblique passant par $z = 0$ où cette énergie devient nulle. On suppose ici que le système est soumis à la seule force de pesanteur. (fig.a)

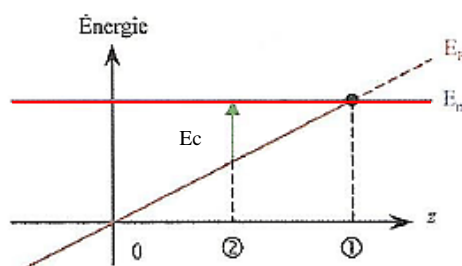


Par définition, l'énergie cinétique est la différence entre l'énergie mécanique et l'énergie potentielle ($E_c = E_m - E_p$). Comme l'énergie cinétique est positive (un carré apparaît dans son expression : $E_c = \frac{1}{2} mv^2$, ou en dérivant par rapport au temps : $E_c = \frac{1}{2} m(dz/dt)^2$), le système ne peut se trouver dans la zone où E_p serait supérieure à E_m . (fig.b)²

Comment évolue donc le système conservatif ? Nous raisonnons, à cette fin, en « point matériel » :

Au point d'intersection ① des courbes E_m et E_p , l'énergie cinétique est nulle et le point matériel est immobile. Or un point matériel soumis exclusivement à son point ne reste pas immobile : il amorce un mouvement de chute au cours duquel son altitude décroît et son énergie cinétique augmente.

Nous retrouvons le point matériel en ②, l'augmentation de l'énergie cinétique compensant la diminution d'énergie potentielle. Dans le cas d'un objet en chute libre, ce mouvement se poursuit indéfiniment (en pratique, jusqu'au contact avec le sol). Le point matériel est dit dans un état libre.³

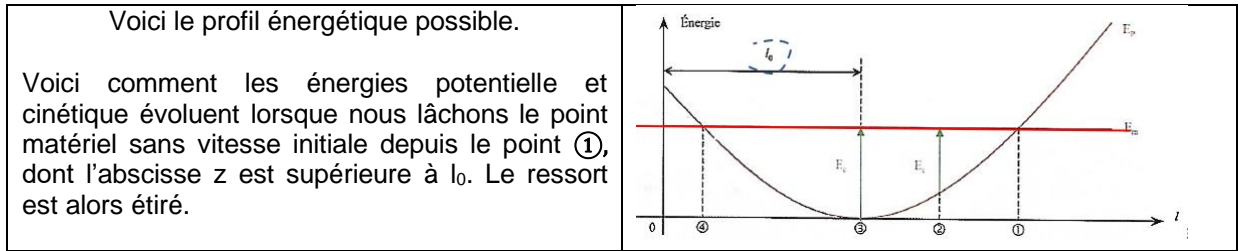


¹ Ibid.

² J. Majou, *Physique !* op. cit., p.428.

³ Ibid., pp.428-429. L'usage en mécanique est de représenter la dérivée en surmontant la variable (z , en l'occurrence) d'un point. Le programme word ne permet d'écrire que maladroitement ce symbole, d'où notre notation en termes de dz/dt avec $dt \rightarrow 0$.

Si nous considérons un autre système unidimensionnel comme la masse d'un ressort dont une extrémité est fixe, la masse, réduite à un point matériel, sera soumise à une force de rappel élastique.



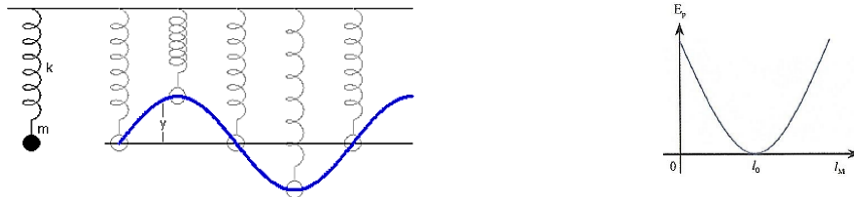
Sous l'effet de la force de rappel, le point est ramené vers l'abscisse l_0 et se retrouve en ②, son énergie cinétique ayant augmenté aux dépens de son énergie potentielle.

Au niveau de ③, l'énergie potentielle est minimale. Le point cependant a acquis une vitesse dz/dt négative correspondant à un déplacement dans le sens des z décroissants.

Il poursuit ainsi son mouvement jusqu'à l'arrivée en ④, où il s'immobilise à nouveau. Le mouvement reprend alors en sens inverse, le point effectuant des oscillations entre ① et ④.

Lorsque le mouvement se poursuit indéfiniment entre deux positions extrêmes, le point matériel est dit dans un état lié.¹

Pour bien comprendre ce dont derrière il s'agit, il vaut de rappeler comment se présente ordinairement le mouvement d'un ressort qui entre dans la catégorie des oscillateurs harmoniques au nombre desquels appartient le pendule simple. La fig. a restitue l'évolution schématisée dans le temps de l'élongation de la masse d'un ressort. La fig. b traduit cette approche en énergie en termes d'énergie potentielle. L'énergie potentielle élastique possède un profil parabolique. Elle est minimale pour l_0 , i.e. à l'origine de l'énergie potentielle au point O, et tend vers l'infini de part et d'autre de cette position.²



l_M et l_0 sont des longueurs (m). L'énergie potentielle, exprimée en Joules (J), est minimale pour $l = l_0$

Ces deux schémas peuvent être complétés en y introduisant aussi l'évolution de l'énergie cinétique :

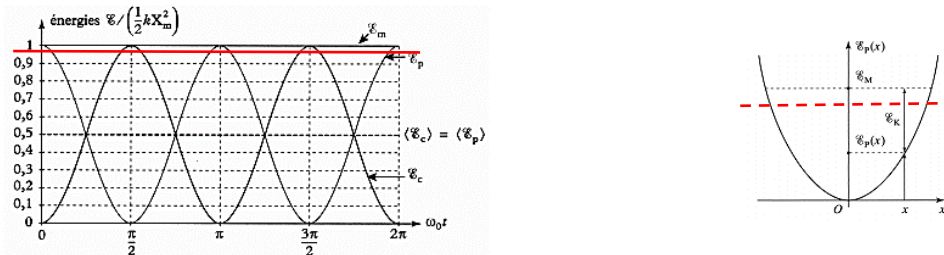


fig a : énergie cinétique (E_k), potentielle (E_p) et mécanique (E_m) de l'oscillateur harmonique ($\varphi = 0$, φ étant la phase à l'origine des temps) ; fig.b : aspect spatial de l'échange mutuel des formes cinétique (E_k) et potentielle (E_p) de l'énergie mécanique (E_m)

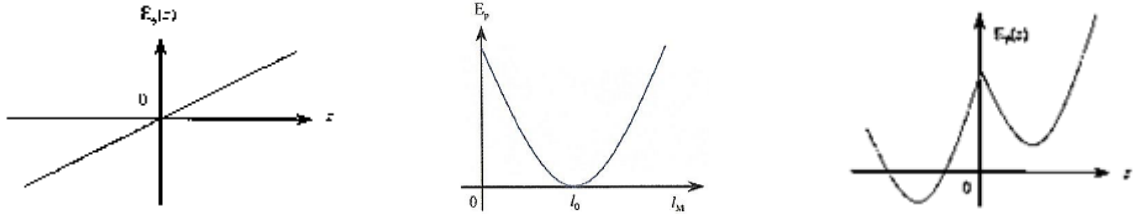
En pratique, un système mécanique met généralement en œuvre plusieurs forces conservatives. S l'on s'en tient à nouveau à la représentation de la seule énergie potentielle, l'énergie potentielle totale du système est la somme des énergies potentielles, par exemple d'un poids et de la force de rappel d'un ressort. La combinaison de leurs effets est synthétisée dans la dernière figure de droite :

E_p

E_p

¹ Ibid., p.429.

² http://webetab.ac-bordeaux.fr/Etablissement/BDBorn/sections/postbac/prepasciences/physique/telech/docs20089/M4_2008-2009b.pdf; https://fr.wikipedia.org/wiki/Oscillateur_harmonique



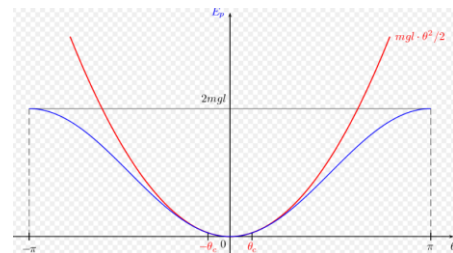
La physique ne se prive pas de généraliser ces résultats particuliers à un profil énergétique quelconque.

Il en est ainsi de la quantité de mouvement d'une particule par exemple. La quantité de mouvement scalaire cartésienne n'est plus applicable puisqu'elle n'est plus constante. Il y a variation de la quantité de mouvement. *S'il existe plusieurs forces qui s'exercent sur elle, il suffira d'en prendre la résultante puisque les forces sont représentées par des vecteurs que l'on sait composer. La principale difficulté, cependant, reste souvent de bien mettre en évidence toutes les forces en présence.*¹

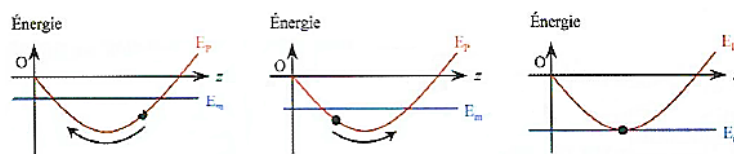
- Je pense qu'un système avec frottements intéressera le lecteur pour son réalisme en droit, ce dont chacun d'entre nous est aussi préoccupé.

- Un système idéal est un système dont l'énergie totale est conservée. L'énergie mécanique demeure constante à travers le temps. Est-ce pour autant un simple état d'ébauche, un état dans lequel les particularités du réel seraient totalement escamotées ? Non, ce modèle est utile pour commencer par approximer le réel, car, pour tout système d'un seul degré de liberté, il est possible de définir une énergie potentielle minimale qui se comporte au voisinage comme un oscillateur harmonique. Le degré en question peut être assimilé par ex. à l'angle entre la verticale et le fil d'un pendule simple.

**potentiel d'un pendule simple (E_p)
et son approximation parabolique ($mgl-\theta^2/2$)**



Ainsi, **pour un système dissipatif** (système avec frottement), l'interprétation précédente du profil énergétique est toujours correcte. Seulement, *l'énergie mécanique diminue progressivement au cours de l'évolution. Un point matériel lié finit par s'immobiliser sur le profil du potentiel. Lorsque le point matériel est immobile et qu'il le reste, il est en équilibre.*²



Le point matériel est *lié*, car le mouvement périodique du point évolue dans une zone limitée de part et d'autre.

- Bon, bon, si le cas idéal est le cas central à partir duquel s'organise notre vision scientifique du monde, voyons comment un tel cas est capable d'approcher le réel en droit si riche en variétés et en contrastes.

- Bien que l'objet des lois soit déjà un objet fabriqué, il concrétise pourtant le sentiment de la liberté. Rien n'est désormais impossible, ni rien ne peut à jamais être déclaré forfait, faute de vouloir essayer.

ii Ce que dit le droit sourdement

¹ J. Majou, *Physique !* op. cit., p.427 ; fr.wikipedia.org/wiki/Oscillateur_harmonique

² J. Majou, *Physique !* op. cit., p.430.

3/ La notion de fonction potentielle

Il est une fonction mathématique, de laquelle on ne peut se passer lorsque l'on raisonne en hauteur.

Commençons par résumer les points précédents en physique. L'énergie potentielle est nulle en un point origine O choisi arbitrairement : $E_p(O) = 0$. L'énergie en un point quelconque M de l'espace est égale à l'opposé du travail menant de O à M : $E_p(M) = E_p(O) - W_{O \rightarrow M}(\mathbf{P})$, avec $E_p(O) = 0$ et \mathbf{P} désignant le vecteur poids. Nous n'avons pas parlé de « travail » en droit. Que l'on imagine que le travail dans ce domaine est un travail mental et une série d'actions que l'on peut résumer par l'effort que doit accomplir un groupement politique pour regrouper la confiance de ses électeurs et élargir sa base électorale. Il lui faut remonter la pente, aller à contre-courant de l'effacement peut-être à jamais de la scène politique...

Dans le cadre du poids, nous pouvons fixer l'origine au niveau du sol : $E_p(h) - E_p(\text{sol}) = -W_{\text{sol} \rightarrow h}$, soit $E_p(h) = mgh$, avec m la masse, g l'accélération de la pesanteur et h la hauteur. En droit, l'origine au niveau du sol a été jusqu'ici le degré 0 de la confiance publique en un candidat ou parti politique, mais on peut concevoir d'autres degrés 0 comme on tentera de les apercevoir. Le capital de confiance s'est réduit en une peau de chagrin, au chagrin du candidat ou des militants qui en soutenaient la cause.

Dans l'équation $E_p(h) = mgh$, m peut être une masse d'eau, h son élévation par rapport au niveau de la mer et g l'accélération de la pesanteur terrestre. Si on transposait cette équation en droit, m serait la confiance, h la hauteur à laquelle la confiance est placée et g une accélération constante, propre au droit. Ce « g » n'est pas sans rappeler le « g » de la corruption du pouvoir si rien n'en arrête le cours dans la Constitution, ou celui (sans doute le même) qui donne du poids au droit de propriété consacré par la loi civile. Ce n'est pas le g de la chute des corps, mais le g de la chute du détenteur du pouvoir en place en raison de son mauvais vouloir et de son abus de pouvoir. Les effets sont analogues. Une idée analogue n'est pas une idée identique. On ne cherche pas à rendre, à tout prix, semblables les deux chutes. Ce qui relie ces effets est l'analogie, non une copie sans la moindre variation, ni une pure relation de cause à effet d'un effet à l'autre. **La physique n'explique pas le droit, mais elle l'éclaire.**

(§20-b)
(§28
4/d)-iii)

La notion de *fonction potentielle* participe à cette lecture du juridique via l'étude de la nature. Le principe des pensées qui ne cesse de guider notre réflexion est le souci d'éveiller le lecteur aux divers modes d'appréhender le réel qui, d'un niveau à l'autre, se répondent à travers nos faibles lunettes.

Repartons avec la « fonction potentielle », le plus important objet de notre examen au sein du §54.

a) Son apparition en sciences

i Pourquoi une telle fonction ?

Restons en physique et examinons mieux l'équation $E_p(h) = mgh$. L'énergie potentielle ne dépend que de la variable h , car m , la masse, et g , l'accélération de la pesanteur, sont des constantes. Ainsi écrite, l'énergie potentielle de pesanteur est donc formellement une *fonction* de la seule coordonnée h . L'énergie potentielle de pesanteur augmente avec l'altitude. Elle est une fonction mathématique définie en chaque point de l'espace. Tous ces points définissent un champ scalaire (*fig.a*) sur lequel est superposé un champ de forces dû à la variation du poids en fonction de l'altitude (*fig.b*).



Chaque point est un scalaire auquel est associé un vecteur, colorié avec une intensité proportionnelle à la valeur de la fonction potentielle. Les multiples vecteurs force sont dirigés vers la zone où l'énergie potentielle E_p est minimale.

Une fois l'énergie potentielle d'une force conservative connue, le travail de cette force entre deux points A et B s'identifie au signe près à la variation d'énergie potentielle : $W_{O \rightarrow M}(P) = -E_p(B) + E_p(A) = -\Delta_{A \rightarrow B} E_p$.¹

(§18
ann.I)

On dira qu'il n'est nul besoin a priori d'une telle fonction si on se réfère à l'équation fondamentale de la dynamique : $\mathbf{F} = m\gamma$, ou $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$ en remplaçant le produit de la masse m par la vitesse (et non l'accélération γ) par la quantité de mouvement \mathbf{p} (p ne désigne plus ici le poids). Pour décrire le mouvement d'un point matériel, il suffirait de résoudre une équation du second ordre en l'intégrant une première fois pour avoir la vitesse, et une seconde fois pour avoir la position. Reprenons l'étude du ressort auquel est suspendue une bille de masse m. Si on le tire, on écarte la bille de sa position d'équilibre. Il se produit une force de rappel F opposée au déplacement et nulle au point d'équilibre. Pour un petit déplacement x, selon la loi de Hooke (contemporain de Newton) : $\mathbf{F} = -kx$, en désignant par k la raideur du ressort. L'équation de la dynamique devient alors : $md^2x/dt^2 + kx = 0$. C'est fait !²

Malheureusement, ce type de résolution n'est possible que dans les cas simples. En effet, la dérivée de la quantité de mouvement est prise par rapport au temps, alors que la force écrite à gauche est généralement connue en fonction, non pas du temps, mais de la position du point matériel. Il faudrait donc connaître déjà x, y et z en fonction du temps, alors que c'est justement le but de la résolution !

Cela ressemble fort à un cercle vicieux qui va nécessiter d'autres moyens d'intégration. On sait par ailleurs que le travail effectué sur un point matériel [une particule par ex.] – produit de la force par son déplacement – est égal à la variation de la quantité d'énergie cinétique [ou à la variation, avec un signe moins, de l'énergie potentielle]. Voilà une quantité, l'énergie cinétique, qui est intégrale [comme l'énergie potentielle] sur une variable d'espace, et non du temps.³

La notion de fonction potentielle répond à une fonction (au sens de rôle) comme celle d'énergie potentielle répondait aussi à un manque. Comment comprendre autrement qu'une masse d'eau par exemple puisse tomber d'un niveau disons 10 au niveau 0 avec un si grand effet à l'arrivée ? D'où peut provenir l'énergie cinétique constatée au sol ? L'énergie potentielle est ce qu'il faut ajouter à la cinétique, car rien ne marche tout seul comme dans le prétendu mouvement universel. Il faut ajouter quelque chose pour maintenir la quantité d'énergie constante. **La fonction potentielle a la même fonction.** Sans elle, on ne comprendrait pas d'où vient l'énergie et comment elle finit par se conserver sans perte.

(§47
2/-i)

Techniquement, la « fonction » de la fonction différentielle répond au fait que la divergence d'un champ de forces est nulle. *La divergence d'un champ de vecteurs est un opérateur différentiel mesurant le défaut de conservation du volume sous l'action du flot de ce champ. D'une manière générale, la divergence est reliée en physique à l'expression locale de la propriété de conservation d'une grandeur. En considérant une surface fermée quelconque, la variation d'une grandeur conservative dans le volume fermé par cette surface est, par définition d'une grandeur conservative, due aux échanges avec l'extérieur (il n'existe pas de sources de création ou d'annihilation d'une grandeur conservative).*⁴

- Peu clair, car jusqu'à maintenant vous n'avez envisagé qu'une force...

(Intr. gle,
2/b)-iii

(§43
1/b)-ii)

- Nous avons déjà signalé qu'en physique la notion de force a été remplacée par celle de lignes de forces, de *champ*, comme celui d'un aimant, d'un champ électrique, d'un champ de vitesses ou de vecteurs modélisant la vitesse d'un fluide en mouvement (le vent, un cours d'eau, etc.). Les noms de Faraday et de Maxwell étaient apparus à ce propos. Cette substitution du champ de forces en tout point à une force opère autant avec la fonction de potentiel qui remplace aussi la notion de force :

*A la notion de physique de force, notion déduite de notre expérience de l'effort musculaire, se trouve ainsi substituée une notion purement abstraite et mathématique : la connaissance en chaque point de l'espace de la valeur de la **fonction dite potentielle, ou fonction de forces**, suffit à définir la valeur de la force en tous les points; cette fonction peut donc être prise comme définition de la force qui devient alors une pure abstraction mathématique ; elle se trouve en fait définie au moyen des dérivées de la fonction potentielle.⁵*

¹ J. Majou, *Physique !* op. cit., pp.428-249.

² J. Perdijon, *La nature a-t-elle des principes ?* op. cit, p.95. En posant $\omega = \sqrt{k/m}$, elle s'écrit : $d^2x/dt^2 + \omega^2x = 0$. Compte tenu des conditions initiales, la solution de cette équation différentielle est de la forme $x = A \cos(\omega t)$. C'est un mouvement périodique, de période $\tau = 2\pi/\omega$ (ou, si l'on préfère $\nu = 1/\tau$) et d'amplitude A. (Ibid.)

³ *Ibid.*, p.96. Les crochets sont nôtres.

⁴ [https://fr.wikipedia.org/wiki/Divergence_\(analyse_vectorielle\)](https://fr.wikipedia.org/wiki/Divergence_(analyse_vectorielle)). Nous soulignons.

⁵ E. Borel, *L'évolution de la mécanique*, op. cit., p.102.

La fonction potentielle consista en fait à substituer une action plus réfléchie à une action spontanée, liée à la notion intuitive mais moins complète de force. Non que toutes les forces considérées dérivent d'une fonction potentielle ou, comme on dit plus brièvement, d'un **potentiel**, mais la plupart en dérivent. Emile Borel fait état de ses *dérivées*, de ses variations instantanées d'un point à l'autre de la hauteur. En 3 D, sans entrer dans les détails, le formalisme peut s'écrire ainsi en considérant un potentiel $U(x)$ défini en chaque point x de l'espace. Sa valeur ne dépend que de x , mais x possède 3 composantes, x_1, x_2, x_3 . Les composantes de la force $f(x)$, selon chacun des 3 axes, sont infra :

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) = -\frac{\partial U(x)}{\partial x_1} \\ f_2(x) = -\frac{\partial U(x)}{\partial x_2} \\ f_3(x) = -\frac{\partial U(x)}{\partial x_3} \end{cases}$$

$\partial U(x)/\partial (x_1)$, $\partial U(x)/\partial (x_2)$, $\partial U(x)/\partial (x_3)$ sont les dérivées partielles de la fonction potentielle qui peut s'écrire plus simplement : $f(x) = -\text{gradient } U(x) = -\text{grad } U(x)$, étant rappelé que le gradient est un vecteur, composé des dérivées partielles d'une fonction de plusieurs variables qui caractérise la variabilité de la fonction au voisinage d'un certain point. On parlera à ce sujet d'une *dynamique de champ de vecteurs gradients*. Une *dynamique gradient* est une *dynamique définie par $dx/dt = f(x)$* , où le vecteur $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ est formé de dérivées partielles par rapport aux coordonnées de positions (x_1, x_2, \dots, x_n) d'une fonction d'énergie potentielle $U(x_1, x_2, \dots, x_n)$ avec $f_i = \partial U/\partial x_i$.¹

Que les lumières, après cette leçon, s'allument, et sur le papier vont apparaître tout à coup quelques exemples concrets.

On reconnaîtra le premier. *En mécanique classique, une bille de masse m tombe d'une hauteur x à une hauteur 0. Elle subit un accroissement algébrique d'énergie potentielle « gravifique » égal à $-mg(x-0)$. Elle est donc soumise dans sa chute à une force $f(x) = -\text{grad}(-mgx) = mg$.*

Puisque l'on ne cesse d'évoquer la notion d'énergie, on pensera aussi à la thermodynamique. *En passant du milieu de température élevée θ_1 , l'élément subit un accroissement algébrique de potentiel « thermique » égal $= -k \text{Log} \theta_1 - \text{Log} \theta_2$, où k est une constante dépendant en principe du milieu et de l'élément considérés. (Log est une autre notation pour désigner le logarithme népérien \ln .) Cet élément est alors soumis à une « force thermique » :*

$$f(x) = -k \text{grad } \text{Log } \theta(x) = \left(\frac{-k\theta(x)}{\theta(x)x_1}, \frac{-k\theta(x)}{\theta(x)x_2}, \frac{-k\theta(x)}{\theta(x)x_3} \right),$$

où $\theta(x)$ désigne la température au point $x = (x_1, x_2, x_3)$ du système étudié.²

D'autres explications du même genre ont été proposées dans d'autres domaines de la physique. On pensera d'abord à la théorie de la gravitation universelle de Newton, autrement formulée. Dans le sillage de cette théorie, on a été conduit à admettre un potentiel défini par l'attraction universelle. **La présence dans l'espace de masses attirantes définit une fonction potentielle dont la valeur se trouve déterminée en chaque point.** La fonction devient nulle lorsque le point s'en éloigne indéfiniment.

Le lieu des points de l'espace où le potentiel a une valeur déterminée est une surface.

De telles surfaces sont dites équipotentiels. La force due aux attractions est, en chaque point, normale à la surface équipotentielle qui passe par ce point. Elle est dirigée dans le sens des potentiels croissants et son intensité est égale à la dérivée du potentiel suivant la normale, c'est-à-dire au rapport de l'accroissement, pour un petit déplacement suivant cette normale, à la longueur de ce déplacement.³

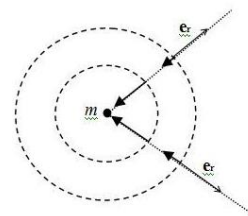


Figure de vecteurs champs gravitationnels associés à des points de l'espace. Le potentiel gravitationnel dû à l'ensemble de deux corps célestes par ex. serait le même en tout point de chaque surface.

¹ C. Bruter, *Les architectes du feu. Considérations sur les modèles*, op. cit., p.140 et 188.

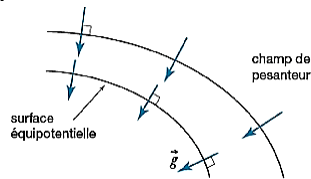
² *Ibid.*, p.140.

³ E. Borel, *L'évolution de la mécanique*, op. cit., p.100.

L'idée d'attraction nous ramène sans effort à celle de pesanteur, phénomène expérimenté par chacun depuis la nuit des temps. La pesanteur, évoquée à propos de l'énergie potentielle, est aussi un champ de forces qui dérive d'un potentiel, d'une fonction potentielle, i.e. d'une fonction de forces (quoique *le potentiel* V soit non pas la fonction de force elle-même U mais la fonction de force changée de signe) :

La pesanteur est une force existant virtuellement en tous les points de la surface terrestre, à toute altitude dans l'atmosphère. Cette force ne se manifeste pas en un point où on ne trouve aucun corps pesant, par exemple dans les régions de la haute atmosphère. Mais si, en l'un de ces points, nous plaçons un corps pesant, un projectile, nous constatons que la force virtuelle définie par le potentiel devient **une force réelle qui agit sur toute masse proportionnellement à cette masse.¹**

Comme pour toute attraction, la pesanteur est normale en chaque point à la surface équipotentielle. Les surfaces équipotentielles ne sont équidistantes que dans le cas où la pesanteur est supposée constante en première approximation (on néglige les variations de la pesanteur à la surface du globe tenant à la non-sphéricité de la terre, – sachant que la pesanteur diminue avec l'altitude, - et à la force centrifuge).



Schématiquement, on utilise une surface fictive en tout point perpendiculaire à la direction locale de la pesanteur g , donnée simplement par la direction du fil à plomb. Sur la fig. ci-contre, l'intensité g représentée n'est pas constante.

Mais que de choses ne sont-elles venues encore à la pensée des savants ! La fonction potentielle s'est dégagée peu à peu, non seulement en mécanique et en thermodynamique, mais aussi en électricité...

L'étude des attractions exercées les unes sur les autres par des des corps électrisés fait appel autant à la notion de potentiel. Une surface potentielle d'une charge électrique est pareillement le lieu des points où le potentiel a une valeur donnée. Les surfaces équipotentielles ne sont autres que les surfaces de niveau du champ en question. Ce sont les sphères qui ont pour centre la position de la charge.

(Annexes II et III)

Les phénomènes de magnétisme comme l'attraction du fer par les aimants, donnent lieu à une théorie analogue, bien que différente en des points essentiels en raison du fait que tout aimant a deux pôles. L'Annexe III donne une idée imagée d'une telle surface.² Qui dit magnétisme invoque, à plus grande échelle, un autre champ naturel du même genre connu depuis l'invention de la boussole : le magnétisme terrestre qui oriente, suivant une direction, toute aiguille aimantée convenablement suspendue.

Pour compléter cette présentation sommaire, il vaut de connaître l'origine et une des applications au XX^e siècle de la théorie du potentiel. Suite aux travaux de Laplace en électrostatique, c'est avec Poisson que la théorie mathématique du potentiel prend véritablement sa place dans son traité *Sur la distribution de l'électricité à la surface des corps conducteurs*, publié en 1811. Poisson a introduit cette notion pour les besoins de la mécanique newtonienne. L'existence d'une relation entre les variations spatiales d'un champ gravitationnel et la masse d'un corps facilitera la tâche d'Einstein pour comprendre l'association de la géométrie de l'univers et de la matière et comment, comme on vient de l'entrevoir, la masse déforme l'espace-temps.³

(§37
1/iv)

Attention de ne pas confondre l'équation de Poisson avec la loi de Poisson en théorie des probabilités (nous avons abordée cette loi pour contester la symétrie de la loi normale lors de certains événements).

(Annexes IV et V)

¹ *Ibid.*, p.102. Nous soulignons ; Léon Lecornu, *Dynamique appliquée*, Doin, Paris, 1908, p.25.

² E. Borel, *L'évolution de la mécanique*, p.100 et 102.

³ <http://serge.mehl.free.fr/chrono/Poisson.html>; G. Louis-Gavet, *Comprendre Einstein*, p. cit., p.87

(§47
2/)

L'équation de Poisson $\Delta U = f$ ne diffère guère à première vue de l'équation de Laplace $\Delta U = 0$, étant rappelé que ΔU ou Δf est la somme de dérivées secondes ($\Delta f = \partial^2 f / \partial x^2 + \partial^2 f / \partial y^2 + \partial^2 f / \partial z^2$) et que ces dérivées manifestent le mouvement ou plutôt le changement de mouvement (déjà perçu chez Galilée).

(§47
3/b)

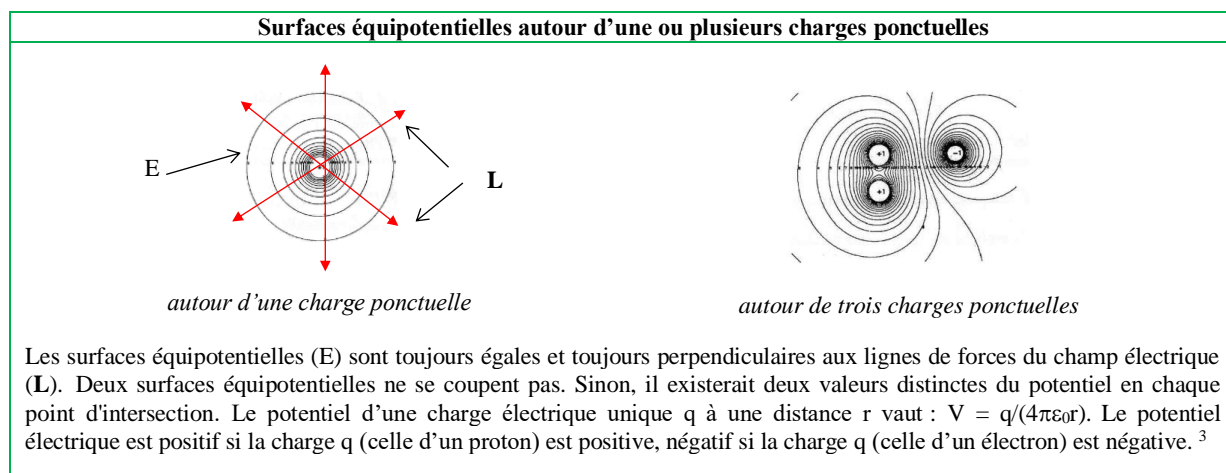
Ces deux équations sont linéaires. La somme des fonctions qui vérifient l'équation vérifie elle-même l'équation ; il en est de même de la multiplication d'une telle fonction par un multiple scalaire : la fonction multipliée un certain nombre de fois vérifie encore la même équation. La propriété d'être linéaire facilite la recherche de la solution de ce genre d'équation puisque le mathématicien, le physicien, voire le juriste (on l'a vu dans le traitement de la jurisprudence américaine en matière d'avortement) peuvent faire appel à l'algèbre linéaire, i.e. à l'algèbre des matrices, puisque $\Delta U = 0$ ressemble fort à $AX = 0$ et $\Delta U = f$ à $AX = B$. Autrement dit, la solution passe par la décomposition analytique des fonctions.

Il y a toutefois une grande différence entre les deux équations. Les fonctions qui vérifient l'équation de Laplace sont harmoniques ; celles qui vérifient l'équation de Poisson ne le sont pas. **L'équation de Laplace décrit un équilibre simultané**, comme celui de la température dans tous les endroits d'une pièce (il faut, toutefois, tenir compte, on l'a vu, des conditions aux limites que constituent les murs, le sol et le plafond, voire le taux de fuite de la chaleur si une fenêtre est ouverte). **L'équation de Poisson ne décrit nullement un équilibre mais un lent mouvement de convergence ... vers l'équilibre !**

Pour comprendre cette dernière équation, imaginez que vous allumiez une bougie dans la pièce. La distribution des températures va s'en trouver chambouler : près de la bougie, la température sera plus élevée et, à la périphérie, beaucoup moins. La température autour de la bougie représente un maximum qui va tendre progressivement vers l'équilibre avec le reste de la pièce. ¹ La fonction potentielle est du même ordre : le potentiel de pesanteur par exemple converge vers un minimum à mesure que la force (virtuelle) prend, si j'ose dire, de la force en se convertissant en force réelle pour parler comme Borel.

C'est ce mouvement continu, qui peut n'être pas sans accidents, qui intéresse au premier chef le droit constitutionnel. Les dessins géométriques sont là, non seulement pour évoquer les formes apparentes des objets, mais aussi pour retracer la courbe de leur évolution et de leur mouvement. Newton et Leibniz ont montré, chacun de leur côté, la voie en analyse. C'est dans cette vue que la fonction potentielle doit être étudiée en droit comme en sciences. *L'observation, et la théorie mathématique formée ad hoc, s'accordent pour dire qu'un objet est dans un état stable lorsque l'énergie potentielle de cet objet atteint un minimum.*² Ce constat, qui fait l'objet d'un théorème, est essentiel.

Annexe II



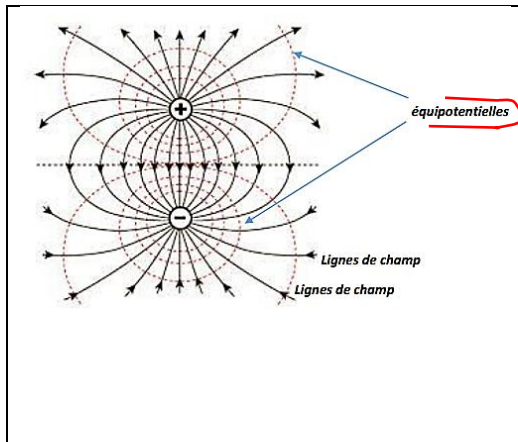
¹ Introduction to Laplace and Poisson equations; The Linear Property of the Fundamental PDEs, 15 & 25 feb. 2017, Lemma <http://lem.ma>

² Claude-Paul Bruter, *Topologie et perception*, Maloine, Paris, 1985, t.1, p.90 ; *Les architectes du feu*, op. cit., p.96.

³ https://ics.utc.fr/Electricite/Electricite_formats_web/Electrostatique_web_web/Latex/co/cours_24.html; Douglas C. Giancoli, *Physique générale 2*, Electricité et magnétique, De Boeck Université, Bruxelles, 1997, p.58.

Annexe III

Surfaces équipotentielles autour d'un aimant (lignes équipotentielles en 2D)



Les surfaces équipotentielles (en pointillé sur la figure en 2 D) sont des surfaces sur lesquelles le potentiel a une valeur constante.

En d'autres termes, **la différence de potentiel entre deux points quelconques de ces surfaces est nulle** et le déplacement d'une charge d'un point à l'autre ne requiert aucun travail. Une surface équipotentielle doit être nécessairement perpendiculaire au champ électrique E en n'importe quel point. Si tel n'était pas le cas, c'est-à-dire s'il y avait une composante du champ électrique E parallèle à cette surface, un travail serait nécessaire pour déplacer une charge contre la force exercée par cette composante, ce qui contredirait le concept de surface équipotentielle.¹

Annexe V

De l'équation de Poisson, reliant masse et potentiel gravitationnel, à Einstein

Voici comment un commentateur explique clairement la relation entre l'idée, repensée par Poisson, du potentiel gravitationnel, créé par une masse étendue, et un pan de la théorie de la relativité générale :

*Partant des travaux de Newton, Poisson avait élaboré une équation mathématique prouvant l'existence d'une relation entre les variations spatiales d'un champ gravitationnel (appelé df) et la masse d'un corps (appelée r) qui en était à l'origine. D'où la formule dite « de Poisson », $df = r$, qu'Einstein interprète ainsi : « **Plus la masse d'un corps est importante, plus le champ gravitationnel qui l'entoure est intense et plus elle déforme l'espace-temps environnant.** »*

Les travaux de Poisson correspondent parfaitement aux idées qu'Einstein s'est lui-même progressivement forgées et peuvent donc être un excellent point de départ. Aussi fait-il une analogie complète entre l'équation qu'il doit trouver et celle de Poisson.

*Dans un premier temps, elle peut s'écrire très simplement : **Courbure = Masse** (où Courbure remplace « df » et Masse remplace « r »). Elle concrétise parfaitement la pensée d'Einstein qui peut ainsi affirmer que, **d'une part, la déformation de l'espace-temps est due à la présence de la masse d'un corps (plus généralement, de la matière) et que, d'autre part, cette action est réciproque, puisque c'est la masse d'un corps qui déforme l'espace-temps qui l'environne, donnant naissance à la gravitation (ou plus exactement à un champ gravitationnel).** Pour Einstein, cette action déterminera de façon précise les trajectoires (c'est-à-dire les géodésiques) suivies par les différents corps présents dans cet espace-temps courbe quadridimensionnel.*

L'analogie, si féconde soit-elle, présente, toutefois, des limites puisque, pour un autre commentateur, l'équation de Poisson n'a pas de dérivée temporelle. Du point de vue de la théorie de la relativité restreinte qui mettra en cause la notion de simultanéité en associant indissolublement l'espace et le temps, *l'équation de Poisson prévoit en effet que toute perturbation des sources est transmise instantanément sur le champ partout où le champ est défini, donc dans tout l'espace.*²

¹ http://www.fresnel.fr/perso/stout/electromag/TP_Enonce_EM.pdf

² G. Louis-Gavet, *Comprendre Einstein*, pp.87-88. Nous soulignons ; <https://gargantua.polytechnique.fr/siatel-web/linkto/mICYYYTEsNY>

L'équation de Poisson

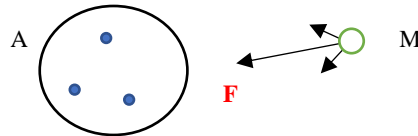
1/ Le lecteur reconnaîtra au passage dans la théorie du potentiel le **laplacien qui mesure l'écart entre un point et la moyenne des points dans son voisinage**.

Techniquement, il n'est pas inutile de rappeler que le laplacien est la somme des dérivées partielles secondes dans toutes les directions depuis le point de calcul. En 2 D, le laplacien s'écrit comme une somme de deux dérivées partielles secondes, l'une mesurant l'écart entre un point et la moyenne des points à son voisinage dans la direction x, l'autre dans la direction y; en 3D, comme une somme de trois dérivées partielles secondes, la dernière mesurant l'écart entre le point et la moyenne du voisinage dans la direction z, soit en coordonnées cartésiennes :

$$\Delta f(x, y, z) = \frac{\partial^2 f(x, y, z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(x, y, z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f(x, y, z)}{\partial z^2}$$

L'équation $\Delta f = 0$ signifie qu'il n'y a pas de source, ou de puits, d'un champ \mathbf{F} à proximité. Par ex., pas de charge dans un champ électrostatique, i.e. un champ de forces invisible créé par l'attraction ou la répulsion de charges électriques, cause du courant électrique. L'équation $\Delta V = 0$ indique l'absence de telles charges dans un volume proche.

2/ Le potentiel newtonien dit gravitationnel, est inversement proportionnel à la distance du point M, où est située une masse m' , à A où est située une masse m, la force \mathbf{F} étant dirigée de M vers A, **la force \mathbf{F} pouvant être la force, de composantes X, Y et Z, exercée par la Terre.**



En partant de la théorie de l'attraction universelle : $\|\mathbf{F}\| = k \frac{mm'}{d^2}$, k désignant la constante autrement appelée G, Poisson aboutit à une différentielle de plusieurs variables : $dU = X dx + Y dy + Z dz$, avec X remplaçant $\partial U / \partial x$, Y remplaçant $\partial U / \partial y$ et Z remplaçant $\partial U / \partial z$. Le gradient de U, de coordonnées $(\partial U / \partial x, \partial U / \partial y, \partial U / \partial z)$

définit donc la force à laquelle est soumis le point M attiré par A. Généralement, on oriente cette force en sens inverse que celle utilisée pour notre calcul. Ainsi, **un champ de forces $\mathbf{F}(X, Y, Z)$ agissant sur un domaine D, dérive d'un potentiel U si $dU = -X dx - Y dy - Z dz$ est une différentielle exacte. Le potentiel est alors défini par :**

$$dU = -X dx - Y dy - Z dz, \text{ et } U = - \int_D (X dx + Y dy + Z dz)$$

$$X = - \partial U / \partial x, Y = - \partial U / \partial y, Z = - \partial U / \partial z, \mathbf{F} = - \text{grad } U.^1$$

Dans un champ de forces de composantes X, Y, Z (système de coordonnées dans \mathbf{R}^3) agissant dans un domaine D, le potentiel en un point de l'espace est donné par l'intégrale : $U = - \int_D (X dx + Y dy + Z dz)$. **Le potentiel est la somme des petits potentiels de chaque élément de A, la Terre en l'occurrence.**

(Dans d'autres ouvrages, considérés comme des classiques, le potentiel est plutôt désigné par V, la lettre U désignant plutôt la fonction de forces. Sous cette appellation, \mathbf{F} est le gradient de la quantité scalaire U, soit $\mathbf{F} = \text{grad } U = - \text{grad } V$.)²

L'ensemble des points du champ d'égal potentiel est la surface qualifiée de surface équipotentielle. *En théorie du potentiel (électrostatique, gravitationnel), les équations de Poisson sont nombreuses. Dans le cas particulier d'un domaine sphérique D constitué de couches homogènes, en tout point extérieur à D, on peut démontrer que :*

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0$$

C'est dire que le potentiel vérifie l'équation de Laplace : son laplacien ΔU est nul. **En tout point intérieur à D, $\rho(x, y, z)$ désignant la densité, l'équation de Poisson s'écrit :**

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = -4\pi\rho(x, y, z) \quad 3$$

Dans l'équation $\Delta U = f$ figurent donc le laplacien Δ et une distribution f de masse donnée. ρ est la masse volumique.

¹ <http://serge.mehl.free.fr/chrono/Poisson.html>. Nous soulignons.

² Georges Bruhat, *Mécanique*, Masson & Cie, Paris, 1967, 6^e édit. revue et complétée, p.87. Pendant la Seconde guerre mondiale, l'auteur a été arrêté par la Gestapo et déporté pour avoir refusé de donner les coordonnées d'un élève résistant de l'élève de l'École Normale supérieure (UNS) dont Georges Bruhat était professeur titulaire de la chaire de physique. Il est mort en camp de concentration.

³ <http://serge.mehl.free.fr/anx/potentiel.html>

ii Le déploiement et les déformations du potentiel

Nous employons indifféremment les mots *potentiel* et *fonction potentielle* (ou, comme certains écrivent : *fonction potentiel*) bien que rigoureusement le potentiel se déduise de la fonction potentielle par l'intégration. (*Annexe IV supra*) Ce qu'il faut surtout retenir jusqu'à maintenant est le fait qu'avec cette notion, la force en jeu qui s'exerce sur un objet ne dépend que de la position de cet objet. L'espace compte, comme il compte avec le travail. Le travail entre deux points A et B se définit par le produit de la force par le déplacement que permet l'application de cette dernière ($W_{A \rightarrow B} = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x}$, l'intégrale du vecteur \mathbf{F} le long du chemin suivi). **L'attention principale à l'espace relie le potentiel et le travail.**

(§18
ann.I)

Nous parlons de force. Dans la théorie du potentiel, il serait plus juste, nous l'avons vu également, de parler de champ de forces qui en dérive. Le champ est le gradient d'un certain potentiel, par ex. $(\partial T/\partial x, \partial T/\partial y, \partial T/\partial z)$ si l'on mesure les variations de la température T entre un certain point et un voisin. $(\partial T/\partial x, \partial T/\partial y, \partial T/\partial z)$ est un vecteur, mais il n'est non plus ici question d'envisager un vecteur mais un champ de vecteurs susceptible d'être retracé par une équation différentielle (une équation qui a des dérivées).

Toutes ces indications amènent à dire au mathématicien physicien Herman Weyl au XX^e siècle que la notion de potentiel est **a dynamical concept** plus pertinent que la simple notion d'altitude, sachant que *the vertical direction is not an intrinsic geometry property of space but the direction of gravity*.

Certes, *in a region so small that one can consider the force of gravity as constant throughout this region, we have a fixed vertical direction, and potential differences are proportional to differences of altitude measured in that direction*, mais l'altitude, la hauteur, ne garde un sens clair que si je cherche la hauteur entre le plafond d'une pièce et le sol. Ces notions perdent leur intérêt avec des régions beaucoup plus vastes. *Potential is more concrete than altitude because it is generated by and dependent on the mass distribution of the earth* tenant compte notamment des différentes hauteurs de montagne sur le globe.¹

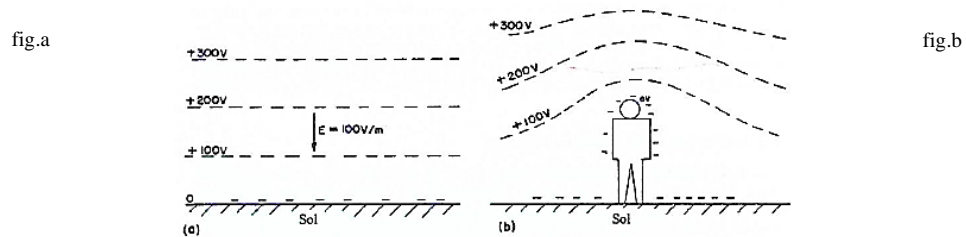
Il vaut mieux parler de potentiel que de hauteur même si l'on continue de raisonner dans cet esprit plutôt qu'à la lettre. Richard Feynman, à la même époque, évoque le gradient de potentiel électrique de l'atmosphère si l'on entend toujours prendre l'exemple de la Terre. Le lecteur non spécialisé, mais curieux, sera intéressé d'apprendre que *par temps normal au-dessus d'un endroit désert et plat, ou au-dessus de la mer, quand on s'élève à partir de la surface du sol, le potentiel électrique augmente d'environ 100 volts par mètre. Il y a ainsi un champ électrique vertical \mathbf{E} de 100 volts/mètre dans l'air. Le signe du champ correspond à une charge négative à la surface de la terre. Cela signifie que dehors, le potentiel à la hauteur de votre nez est supérieur à 200 volts au potentiel à vos pieds. - Waouh !*

Feymann parle encore de hauteur. Oui et non, comme on peut le voir si vous lui posez la question qu'exprime peut-être votre Waouh ! « *Pourquoi ne pas placer tout simplement une paire d'électrodes dehors, à un mètre l'un de l'autre, et utiliser ces 100 volts pour alimenter nos ampoules électriques ?* ». Ou cette question plus inquiète : « *S'il y a vraiment une différence de potentiel de 200 volts entre mon nez et mes pieds, comment se fait-il que je ne reçoive pas une décharge quand je sors dans la rue ?* »

La réponse à la 2^e question suggère déjà que la notion de potentiel est plus fondamentale que celle de hauteur. *Votre corps est relativement bon conducteur. Si vous êtes en contact avec le sol, vous et le sol tendez à former une surface équipotentielle. Ordinairement, les équipotentielles sont parallèles au sol comme le montre la fig.a, mais quand vous y êtes, les équipotentielles sont déformées, et le champ ressemble à ce qui est représenté sur la fig.b.*² **La hauteur varie, mais le potentiel demeure le même.**

¹ Hermann Weyl, «The mathematical way of thinking », in *The World of Mathematics*, Tempus, 1988, vol.9, p.1808.

² Richard Feymann, *Electromagnétisme 1*, op. cit., p.146.



Vous pouvez encore être plus rassuré à la lecture du commentaire :

Vous avez encore une différence de potentiel pratiquement nulle entre la tête et les pieds. Il y a des charges qui vont de la terre vers notre tête, changeant ainsi le champ. Certaines d'entre elles peuvent être neutralisés par des ions [des atomes ayant perdu ou gagné un ou plusieurs électrons] provenant de l'air, mais le courant dû à ces ions est très faible parce que l'air est mauvais conducteur.

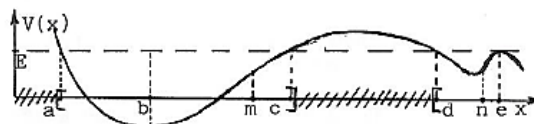
A l'occasion, il vaut de savoir que le champ électrique dans l'atmosphère continue à exister, mais devient plus faible, quand on s'élève vers de hautes altitudes. A environ 50 km, le champ est très petit. La plus grande partie de la variation de potentiel (l'intégrale de E) a lieu aux basses altitudes. La différence de potentiel totale de la surface de la terre au sommet de l'atmosphère est d'environ 400.000 volts.¹

Si nous raisonnons plus en hauteur proprement dit, mais en potentiel, **nous raisonnons toujours à partir du tout, car le concept d'énergie est un concept global**. Nous raisonnons du tout vers la partie, car nous continuons de reconstituer le tout à partir des différences comme en analyse (le potentiel résulte d'une intégration, souvenez-vous). Parce qu'aussi, *comme tous les instruments de mesure, nous ne réagissons qu'aux différences : différences entre états énergétiques, différences de tensions*. Même l'entropie n'est perçue par le second principe de la thermodynamique qu'en termes de différences.²

Soit. Le concept de force est remplacé par celui de potentiel, la force pouvant être souvent conçue comme le gradient d'une énergie (potentielle). Soit. Le concept de potentiel est un concept dynamique, mais en quoi pour le juriste, et même l'homme de la rue, ce concept pourrait-il être encore plus utile ?

Il nous faut à nouveau peiner en revenant en arrière un moment. Deux pas en avant, et un pas à reculons : voilà le cheminement de la pensée comme peut être celui de la nature à l'image de l'avancement des saisons. (*Conjecture grossière, qui a un certain bon sens à l'expérience.*) Dans la présentation de l'étude d'un système conservatif (i.e. sans frottement), nous avons dessiné une zone inaccessible dans un système soumis à la seule force de pesanteur. L'énergie potentielle ne pouvait s'avérer supérieure à l'énergie mécanique totale additionnant l'énergie potentielle et la cinétique. L'énergie mécanique totale était représentée par une droite horizontale sur le profil énergétique alors que la potentielle l'était par une droite oblique croissante coupant, sur le papier du moins, l'horizontale.

Nous pouvons reprendre cette figuration en un « diagramme de potentiel » dans un cas plus général. La fonction potentielle $V(x)$ (et non plus seulement l'énergie potentielle de pesanteur), exprimée en fonction de la position x , présente le profil suivant :



$V(x)$ est représentée par une courbe, à évolution variable, coupant aussi la droite horizontale (en pointillé) d'énergie mécanique totale. L'horizontale représentant la *barrière de potentiel* au-delà de laquelle sont situés l'ensemble des points inaccessibles.³

Ce qu'il importe d'observer est moins le franchissement de la barrière de potentiel que l'existence éventuelle d'extrema, le creux et la bosse en l'espèce. On m'interpellera en disant que ce profil ne reflète pas exactement la réalité.

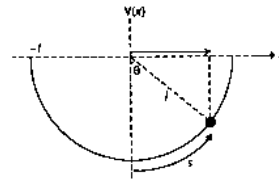
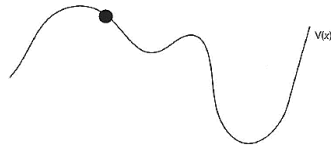
¹ *Ibid.*, pp.146-147.

² C. Bruter, *Les architectes du feu*, op. cit, p.141 et 194.

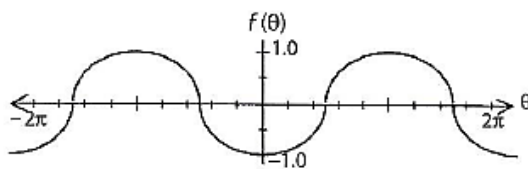
³ Y. Talpaert, *Mécanique générale et analytique. Dynamique du point statique*, Cepaduès-éditions, Toulouse, 1991, p.214

- Vous ne croyez pas ? insistera-t-on ?
- Cela se peut.

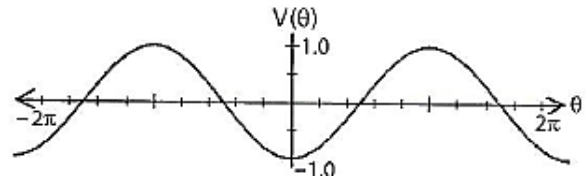
- Comment cela se peut ? On peut attendre mieux comme réponse. Sans doute une boule roulant sur un graphe de V sous l'action de la pesanteur peut être significatif du déploiement du potentiel (fig. c), mais si vous comparez le déploiement énergétique de la même bille roulant sur un rail semi-circulaire, vous constaterez que le mouvement de la bille n'est pas exactement le même que celui d'un pendule roulant sur le même type de rail. (fig.d) Le profil des courbes diffère un peu. Les équations ne sont pas



exactement les mêmes. Si on prolonge le rail par d'autres demi-cercles identiques (en imaginant que la bille fasse plusieurs tours), on voit que les mouvements ne sont pas tout à fait identiques. Votre potentiel ne donne de l'image du pendule qu'une image approximative !



Modèle exact d'une bille sur le sol



Modèle approché d'une bille sur le sol

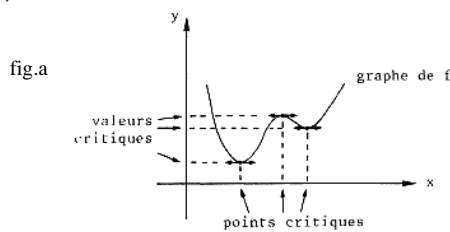
- Oui, mais les situations restent assez voisines, dans ce cas comme dans celui d'un potentiel quelconque. Il est un fait ici que *le graphe de V ressemble au mouvement du pendule en ce sens que les points critiques sont les mêmes ; ils sont de même nature.*¹ La description qualitative le révèle. On retrouve l'idée (et le schéma) d'approximation parabolique d'un pendule simple par son potentiel.

(§47
6/a)-iii)

- Les points critiques..., je m'en souviens ; vous en avez déjà parlé ailleurs, je les vois bien sur vos figures supra, mais plus techniquement, c'est quoi ?

- Comme vous le constatez, les *points critiques* sont les points à tangente horizontale, i.e. ceux pour lesquels la dérivée $f'(x)$, par rapport à x , d'une fonction $f(x)$, définie sur la droite réelle, s'annule.

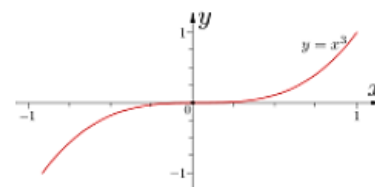
Un point critique est soit un maximum, soit un minimum, soit une inflexion. A un point critique x de f , correspond une *valeur critique* $f(x)$. Les points maximum ou minimum ont la propriété que la courbure de la courbe, décrite par la dérivée seconde, ne changent pas de signe lorsqu'on les traverse. (fig.a) Lorsque la dérivée seconde est positive sur un intervalle, la pente augmente : la courbure est vers le haut ; lorsqu'elle est négative, la pente diminue : la courbure est vers le bas. Si la dérivée seconde est nulle, la courbure de la courbe s'inverse : on a un point d'inflexion. (fig.b)



Deux minima et un maximum.

La fonction f admet un **minimum local** en un point x_0 s'il existe un intervalle contenant le point en question tel que $f(x) > f(x_0)$. La même fonction f admet un **maximum local** au même point x_0 s'il existe un intervalle contenant ce point tel que $f(x) < f(x_0)$

fig.b

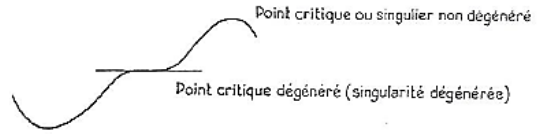


Un point d'inflexion comme dans $y = x^3$ est un point où s'opère un changement de concavité d'une courbe plane (ici, de forme concave à forme convexe). En $x = 0$, la tangente est horizontale, f' s'annule sans changer de signe et f'' s'annule en changeant de

¹ John Hubbard, Beverly West, *Equations différentielles et systèmes dynamiques*, Cassini, Paris, 1999, pp.267-275. Le lecteur intéressé par les équations en jeu et leurs solutions se reportera à ces pages. Nous soulignons.

signe.

D'une façon générale, on dit qu'un point critique est *non dégénéré* si $f''(x) \neq 0$. Si au contraire, $f''(x) = 0$, le point critique est *dégénéré*. $f''(x) = 0$ signifie que la tangente horizontale en $(x, f(x))$ au graphe le coupe en deux points confondus (en trois pour les points d'inflexion simple). Un point dégénéré indique **un faux changement dans la morphologie de la « variété »**.



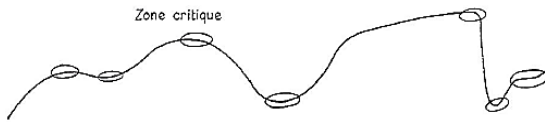
[Une courbe est une variété de dimension 1, une surface une variété de dimension 2, ..., etc., ... jusqu'à la dimension n.]

- Et en cas d'une fonction à plusieurs variables ?

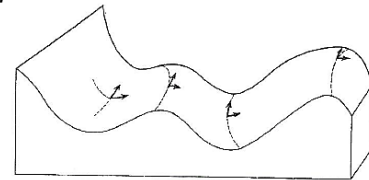
- Un point critique d'une fonction réelle de plusieurs variables, à valeurs numériques, est un point d'annulation de son gradient, i.e. un point tel que $\nabla f(x) = 0$, en d'autres termes :

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) = \dots = \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) = 0.$$

étant rappelé, une fois encore, que le gradient d'une fonction en un point est le vecteur dont les composantes sont les dérivées partielles de la fonction au point considéré. La valeur prise par la fonction en un point critique s'appelle aussi une *valeur critique*.



Points critiques en dimension 1 (courbe)



Points critiques en dimension 2 (surface)

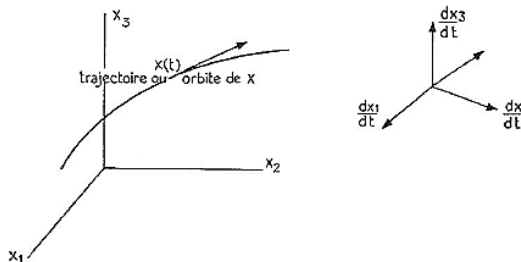
La courbe et la surface dessinées suppose que les fonctions représentées soient non seulement continues mais indéfiniment différentiables ou « lisses » puisque quel que soit n , la dérivée n -ième existe. Ce sont deux « variétés » différentiables.

(§47
6/a)-iii)

Je profite de cette précision pour rappeler aussi que **les points critiques** pointent des **singularités** qui sont vécus par le mathématicien comme des points de résistance, des points où « ça crie », disait René Thom qui aimait à les projeter verticalement sur l'axe de valeurs critiques après une rotation de 90°.¹

- Le potentiel possède-t-il d'autres « singularités » ?

La fonction potentielle est de la forme : $V(x) = k/d(x)$, où dx est la distance du point à l'origine, source de l'énergie répandue dans l'espace et k une constante. Une masse (ou une charge) est attirée ou repoussée avec une force dirigée selon un vecteur dirigé défini, comme indiqué ci-dessus, à l'aide de ces dérivées partielles – $\partial V/\partial x_i$ (x_1, x_2, x_3) ($i = 1,2,3$) dont l'ensemble constitue **le gradient du potentiel**. On est donc en présence d'un champ de vecteurs-forces dans l'espace tridimensionnel qui guident le mouvement des objets sensibles à ce champ.



Lorsque t varie, la courbe que décrit $x(t)$ s'appelle une trajectoire ou une orbite du mouvement

¹ J. Petitot, « Théorie des catastrophes », op. cit., pp.47-48 ; C.P. Bruter, *Topologie et perception*, op. cit., t.1, pp.107-108 ; A. Chenciner, Lexique, in R. Thom, *Prédire n'est pas expliquer*, op. cit, pp.147.

Pour répondre à votre question, il faut se placer à l'origine du potentiel. En ce point, le potentiel est nul, ainsi que sa dérivée. *Ce postulat est raisonnable puisque le potentiel change peu au voisinage de cette zone de naissance dans laquelle est rassemblée au départ toute l'énergie, et qu'il faut un certain temps d'attente avant que l'évolution ne prenne vraiment son envol. Le potentiel est donc supposé posséder une singularité à l'origine.* Cette singularité serait, elle aussi, un point critique encore plus dégénéré.¹

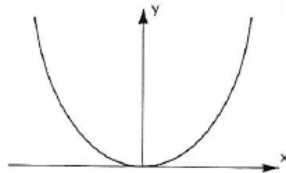
- Pourquoi tant parler des points critiques de la fonction potentielle ?

- Parce que se pose **le problème de la stabilité de ces minima ou maxima**. Ces points sont-ils stables ou instables ? C'est la question centrale qu'évoque le déploiement du potentiel. Sont-ils stables, véritablement stables ou, comme on dit, *structurellement stables* ? Thom n'a pas conçu lui-même cette expression, mais sa grande originalité est *d'avoir compris que la stabilité structurelle est une contrainte telle qu'elle est en soi un principe de raison suffisante. La stabilité structurelle « cause » les morphologies dans la mesure où celles-ci ne sont que les « solutions » au problème qu'elle pose.*²

Notion de stabilité structurelle (ou stabilité à la Andronov)

Un objet O est structurellement stable relativement à l'action de la force f si cette force ne l'annihile pas en tant qu'objet O. Ex : Un verre est structurellement stable par rapport à une très « faible » pression exercée sur ses parois ; il ne l'est plus dès que la valeur de cette position franchit un certain seuil.

Un objet existe en fait, non pas seulement parce qu'il est stable, localement stable (stabilité de position à la Liapounov) mais parce qu'il est structurellement stable. Il bénéficie d'une stabilité globale. *Parmi tous les objets, on peut distinguer ceux dont l'énergie est une fonction potentielle. On s'accorde pour dire qu'un objet est dans un état stable lorsque l'énergie potentielle atteint un minimum.*³ Ce minimum par ex. peut être structurellement stable lorsque l'on est en présence d'un **puits de potentiel** (un potentiel à l'image d'un puits) comme dans l'étude de l'énergie potentielle élastique. Ce potentiel a une forme parabolique (en ax^2).



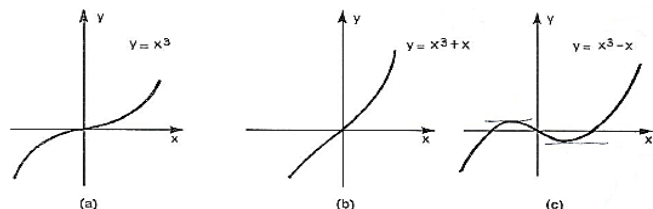
Puits de potentiel parabolique

Le point se meut dans ce puits de potentiel, et il y a régulation parce que le système ne peut sortir de ce puits de potentiel. Cette singularité est structurellement stable.

Si je perturbe légèrement cette fonction parabolique, j'obtiens encore une fonction de type parabolique. On peut démontrer que, par un changement de variables, on peut toujours ramener la fonction déformée à la fonction initiale.

L'idée de stabilité structurelle suggère, par contrecoup, celle de perturbation contre laquelle la stabilité tient bon. Des accidents extérieurs peuvent advenir et déranger le profil du potentiel qui subira, en conséquence, des déformations. Prenons l'exemple précisément des potentiels de Thom, sachant que la théorie des catastrophes dites élémentaires ne fait appel qu'à des dynamiques gradients. Dans ce cadre, la fonction potentielle présente des propriétés de stabilité ... et d'instabilité.

*Le premier exemple de minimum en situation instable est donné par la singularité $S(x) = x^3$. (fig.a) On peut déformer une fonction de ce type de deux manières : ou bien en $x^3 + x$, et vous avez une fonction qui n'a plus aucune singularité. (fig.b), ou bien en $x^3 - x$, et c'est une fonction qui a une bosse, un minimum et un maximum. (fig.c)*⁴



La perturbation s'introduit dans le débat en associant à la fonction $y = x^3$ (parabole cubique) un « paramètre de contrôle » ux (en l'espèce, respectivement : $-x$ et $+x$) qui modifie la forme initiale en y

(§47
6/-ii)

¹ C.P. Bruter, *Topologie et perception*, pp.102-103 et 219 ; Petitot, « Théorie des catastrophes », p.48

² J. Petitot, « Théorie des catastrophes », p.11.

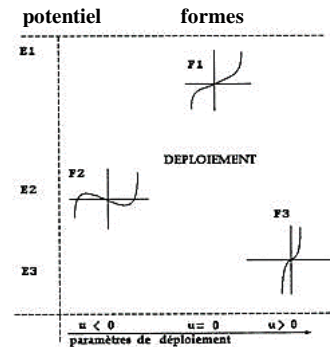
³ C.P. Bruter, *Topologie et perception*, p.20 ; Les architectes du feu, p.96

⁴ René Thom, « Stabilité structurelle et catastrophes », in *Recherches interdisciplinaires*, Collège de France, sous la dir. d'A. Lichnerowicz, F. Perroux et G. Gadoffre, Maloine, Paris, 1976, pp.68-70.

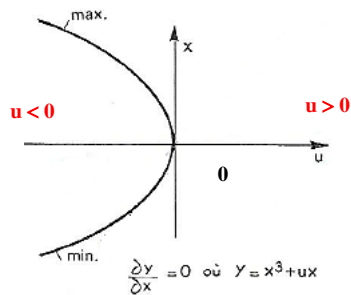
= $x+ux$, u étant un paramètre externe. Le système dynamique qu'est le potentiel **bifurque**. Un « pli » se forme comme il a été vu et qu'il n'est pas mauvais de revoir et d'approfondir sous le rapport du potentiel.

En résolvant l'équation, on met en évidence deux solutions correspondant aux deux singularités selon les valeurs de $u < \text{ou} > 0$. Au voisinage de $u=0$ une petite modification de u entraînera une modification qualitative de $F1$, la forme de la fonction. On appelle alors points réguliers les valeurs de u différentes de 0, correspondantes aux formes stables de la courbe et points singuliers ou catastrophiques les points correspondants à la valeur de $u=0$. [Les points de catastrophe sont simplement les points irréguliers du processus. L'expression est plus dramatique pour désigner des variations discontinues et abruptes.]

Si on modifie légèrement la valeur catastrophique K correspondant à $u = 0$, on déstabilise la forme $F1$ en la forçant à prendre l'une des deux formes possibles $F2$ ou $F3$.¹



$x^3/3 + ux$ représente une famille de fonctions qui paramétrise, à l'équivalence près, toutes les déformations possibles de la fonction x^3 . La variable u , variant dans l'ensemble \mathbf{R} des réels, définit le **paramètre de déploiement de la singularité** que l'on peut spatialiser dans un système de coordonnées (u, x) de la façon suivante :



à gauche [dans la figure ci-contre], où u est négatif, on a la présence d'un maximum ou d'un minimum, donc un régime stable ; à droite, pour u positif, aucun régime stable.

Cette singularité [pli] offre donc le modèle du bord d'un domaine d'existence d'un régime. Un régime avait une existence stable et, tout à coup, est détruit par collision avec un régime instable. C'est la singularité génératrice du bord du régime stable.²

On peut complexifier le nombre de solutions en ajoutant à la fonction d'autres paramètres externes ou de contrôle. Dans $S(x) = x^4$, la fonction x^4 a elle aussi un minimum dégénéré comme la fonction x^3 .

C'est une fonction de 4^e degré et, si on la perturbe un peu, on peut faire apparaître une fonction à deux minima et un maximum parce que la dérivée est du 3^e degré ; une perturbation peut donc faire apparaître une fonction avec une dérivée qui s'annule trois fois. Si on fait la théorie de cette situation, on est amené à considérer toutes les déformations possibles de ce germe de fonction. La famille universelle qui paramétrise toutes les déformations possibles s'écrit avec les deux paramètres u et v , soit $S = x^4/4 + ux^2/2 + vx$.³

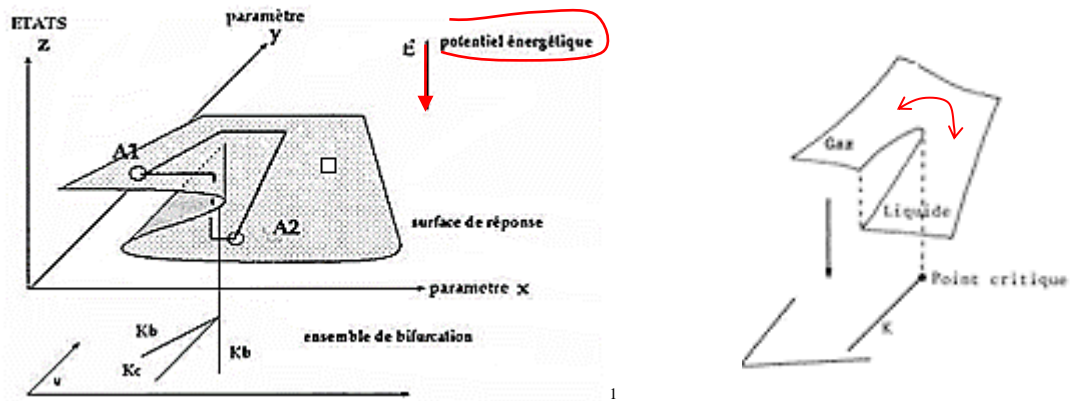
(§43
3/d)-i)

Ce potentiel est **la frouce**, que nous avons déjà étudiée et utilisée en droit comme le pli de la fig, précédente. Nous pouvons à nouveau la représenter en précisant l'espace de commande ou de contrôle, dit **espace-substrat**, et l'espace interne, celui de la variable d'état ou des états ou des transformations d'états, par ex. A1 en A2, et réciproquement, sur la surface de réponse de la fig. infra. (S'il était question de l'eau, les transformations des états de l'eau sous l'action notamment de la chaleur seraient A1 la vaporisation et A2 la condensation, avec des sauts « catastrophiques » de l'un à l'autre. S'il s'agissait d'un gaz, les variables de contrôle seraient également la température et la pression.)

¹ Benoît Virole, *Sciences cognitives et psychanalyse*, Presses univ. de Nancy, 1993, pp.135-136.

² R. Thom, « Stabilité structurelle et catastrophes », p.71. Cela définit un champ morphogénétique, celui de l'hypersurface de codimension 1. (ibid). Une hypersurface d'une variété différentielle de dimension N est une sous-variété de codimension 1, i.e. de dimension $N-1$. La notion d'hypersurface généralise en dimension supérieure celle de surface en 2D. La codimension désigne le nombre de paramètres du déploiement.

³ Ibid., p.71.



Considérons par exemple les états thermodynamiques que sont les phases d'un corps pur. On sait que dans l'espace de contrôle de la température et de la pression, la courbe K liquide/gaz se termine au point critique et qu'il est possible, en contournant ce point, de passer « continûment » (sans transition de phase) d'une phase à l'autre.²

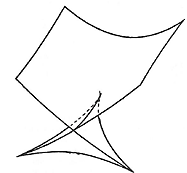
Si le lecteur veut avoir une idée de la répartition possible des minima de la fonction, il consultera avec profit la méthode que Thom préconise en la décrivant lui-même.

(Annexes VI et VI bis)

On a compris que **le déploiement du potentiel est en fait celui d'une singularité d'une fonction potentielle dans un certain espace**, en dimension 2 (avec un minimum simple en x^2), en dimension 3 (avec le pli en x^3), en dimension 4 (avec la fronce, en x^4), en dimension 5 (avec la queue d'aronde, en x^5), dimension 6 (avec le papillon, en x^6), sans parler des trois autres catastrophes pour en rester à la liste des « élémentaires ».

On ne présentera pas ici naturellement tous ces potentiels de Thom dont le déploiement exige notamment l'adjonction de paramètres supplémentaires. Nous avons déjà exploré le pli et la fronce dans certaines circonstances du droit.

Sous le même rapport, on se demandera seulement si le mode de raisonnement de la queue d'aronde, dont le potentiel est $x^5/5 + ux^3/3 + vx^2/2 + wx$, a une chance de trouver un écho dans le domaine politico-juridique. Ce modèle met en œuvre trois paramètres u , v et w pour comprendre la phénoménologie du processus. Le potentiel est de codimension 3. En voici l'image :



- Ce nouvel objet mérite-t-il à nouveau une attention soutenue ? Ne va-t-on pas regretter tant de sueur pour rien ? Pourquoi y consacrer tant de soins qui vont nous écarter davantage du droit constitutionnel qui demeure notre véritable objet ?

- Non, je ne crois pas. Cet objet est digne d'analyse comme notre réflexion va s'efforcer de le montrer.

b) Ses manifestations en droit

i Vider le réservoir des tensions et des frictions. ii Substituer à la discontinuité des événements la continuité du droit constitutionnel. La continuité et ses sœurs de lait institutionnelles.

- L'usure du continu. - La relativité des durées et de la simultanéité.

iii Amortir les décisions tombées du haut de l'autorité

c) Une queue d'aronde en politique

i Des compromis de circonstance. ii Des compromis fondateurs

¹ B. Virole, *Sciences cognitives et psychanalyse*, op. cit., p.139.

² J. Petitot, « Théorie des catastrophes », p.41.

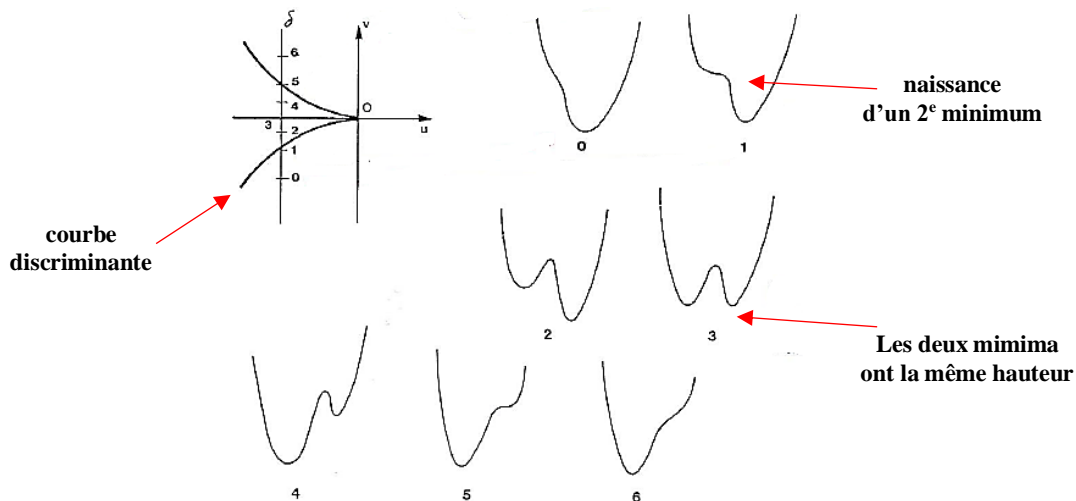
Annexe VI

Déploiement de potentiel : la répartition des minima de la fonce ($S = x^4/4 + ux^2/2 + vx$)

(§24 4(c)-i) On est amené à écrire la dérivée $x^3 + ux + vu$, puis à étudier la répartition des zéros de cette dérivée. Si je fais appel à quelques notions d'algèbre élémentaire, peut-être certains d'entre vous se souviennent-ils que cette équation du 3^e degré admet un discriminant donné par la formule : $4u^3 + 27v^2$, i.e. par une courbe dite parabole semi-cubique.

A l'intérieur de la parabole semi-cubique, il y a trois racines et à l'extérieur une seule racine. Si vous êtes à l'intérieur, dans le plan uv [celui des paramètres de contrôle], vous avez une courbe dans le plan (x, S) [où figure le potentiel] qui a deux minima, donc deux états d'équilibre possibles en compétition (cas 2 et 4 infra). A l'extérieur de la parabole, vous avez une courbe qui n'a qu'un minimum quadratique ordinaire [en x^2] (cas 0 et 6). C'est un exemple typique parce qu'il montre **comment une singularité algébrique peut engendrer une morphologie**.

Si vous êtes en O sur la droite δ , vous avez un seul minimum, puis vous montez le long de cette ordonnée jusqu'à ce que vous rencontriez la courbe discriminante [$4u^3 + 27v^2$] qui attrape un point d'inflexion à tangente horizontale. Supposons que ce soit à gauche (configuration 1). En remontant, nous avons la courbe 2 (avec deux minima, le minimum nouvellement créé et le minimum ancien). Quand on arrive sur l'axe de symétrie, dans le plan (u,v) au point 3, les deux minima ont même hauteur, puis nous continuons et nous arrivons au point 4 où, cette fois, c'est le minimum nouvellement créé qui est le plus profond, et le minimum ancien qui commence à s'aplatir. Quand on arrive au point 5, sur la branche supérieure de la parabole, l'ancien minimum est détruit par collision avec un maximum et puis, au-delà, il n'y a plus qu'un seul minimum.

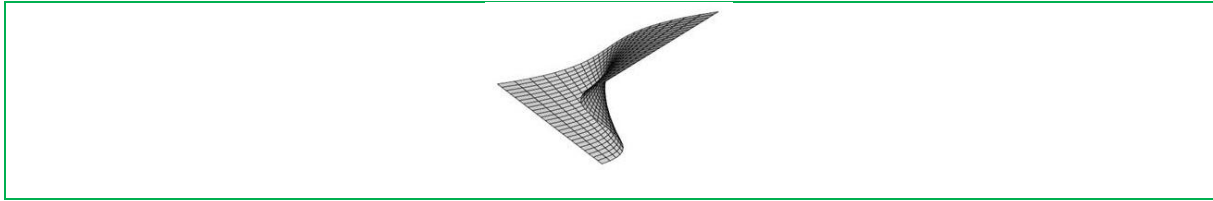


Quelles conclusions peut-on en tirer ?

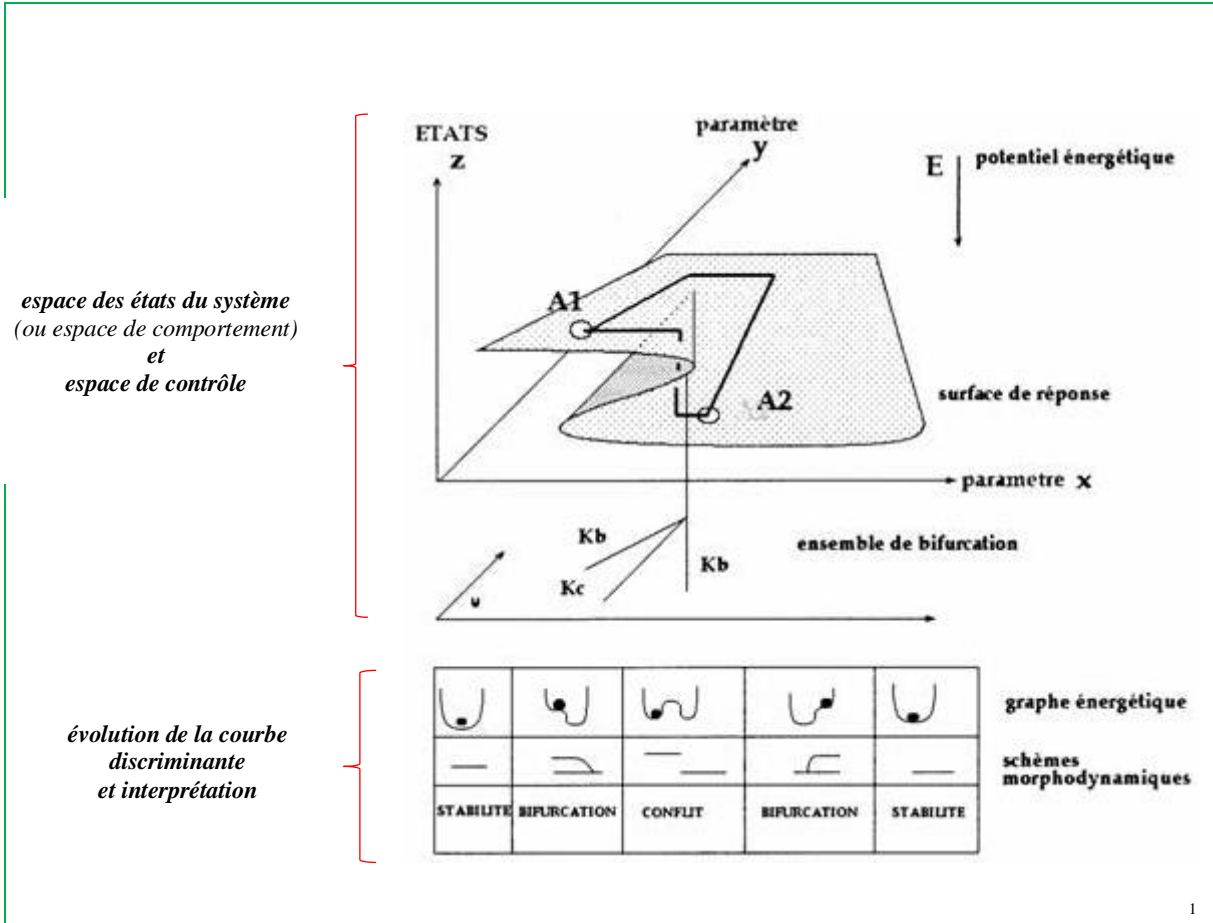
On peut dire que si deux individus marchent à la rencontre l'un de l'autre sur δ , en suivant par continuité l'état d'équilibre correspondant, ils doivent quelque part, entre les points 1 et 5, sauter d'un des minima vers l'autre. Parce que le minimum, qui est stable en bas, devient instable en haut, et réciproquement. Entre les points 1 et 5, il y a certainement quelque part un point où, **abruptement**, on a sauté d'un minimum vers l'autre. On a donc **une discontinuité des propriétés qualitatives du milieu**. On a ici, quelque part, une onde de choc séparant les domaines des différents régimes qui vous explique pourquoi, à partir de cette simple situation algébrique, une fonction du 4^e degré à une variable, vous pouvez faire apparaître une discontinuité dans les propriétés du milieu, une onde de choc à bord libre.¹

Pour saisir pleinement la correspondance entre le périple de la courbe discriminante et « la morphologie » de cet objet qu'est le déploiement de la fonce, on conseillera le lecteur de se reporter à l'annexe VI bis.

¹ R. Thom, « Stabilité structurelle et catastrophes », pp.71-72. Thom s'intéresse à **la fonction dérivée qui représente les variations de la fonction. Par ce biais, il obtient des informations supplémentaires sur la fonction principale**. L'étude seule d'un paramètre (ex. : la vitesse) peut en effet être moins « intéressante » que celle de sa variation (ex. : l'accélération). Le discriminant, rappelons-le, est une notion algébrique qui sert à résoudre des équations jusqu'à un certain degré (au degré 5 ou plus, il n'y a plus de formule générale selon le théorème de Galois). Le discriminant d'un polynôme de degré 3, soit $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ est donné par la formule : $\Delta_3 = b^2c^2 + 18abcd - 27a^2d^2 - 4ac^3 - 4b^3d$.



Annexe VI bis



Annexe VII

Le taux d'actualisation ²

Pour calculer la valeur actuelle d'une somme à percevoir, on effectue l'opération inverse de la capitalisation, dite d'actualisation :

100 € ————— **CAPITALISATION** —————> **?**
Aujourd'hui Dans le futur

? ← **ACTUALISATION** ————— **100 €**

Le taux d'actualisation est utilisé pour déprécier des flux futurs et déterminer leur valeur à la date d'aujourd'hui

Valeur capitalisée: $V(t) = V(n) \cdot (1 + i)^{(t-n)}$ où
 - $V(n)$ est la valeur du flux à l'année n
 - $V(t)$ est la valeur du flux en dernière année (année t)
 - i est le taux d'intérêt annuel des placements sans risque
 - $(t-n)$ est le nombre d'années entre le versement du flux (année n) et la dernière année (année t)

Combien obtient-on en investissant 5000 euros à 5% par an, pendant cinq ans? Réponse: $5000 \text{ €} (1+5\%) = 6381 \text{ €}$

Valeur actualisée: $V(0) = V(n) / (1 + i)^n$

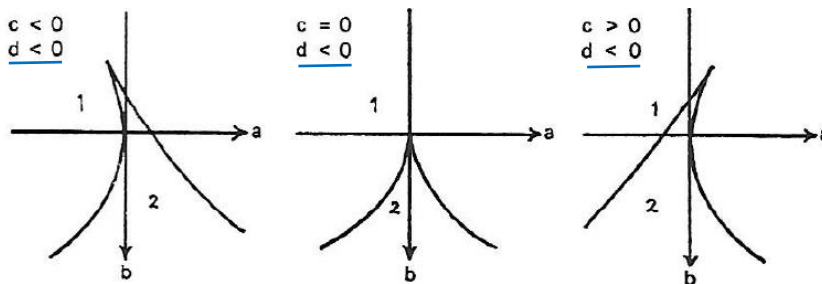
¹ B. Virole, *Sciences cognitives et psychanalyse*, op. cit., p.139.
² Actualisation et capitalisation, 27 juin 2013, <https://www.sicavonline.fr/>

Annexe VIII

Le jeu des quatre facteurs ou paramètres dans la catastrophe papillon (*butterfly catastrophe*)

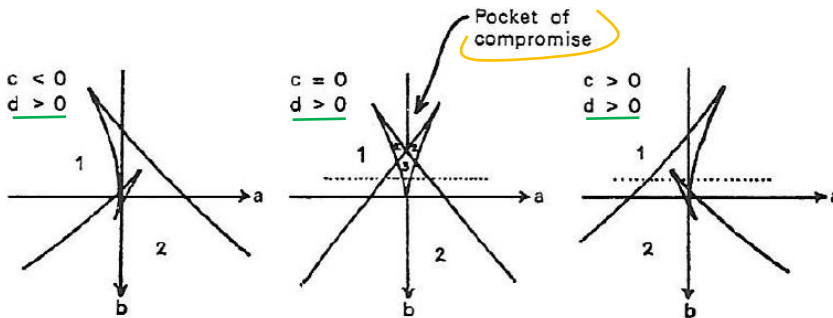
Soit le potentiel de Thom, le papillon, dont le déploiement est : $x^6/6 + t x^4/4 + ux^3/3 + vx^2/2 + wx$. Les quatre paramètres du déploiement dans cette équation sont t, u, v et w . Sa fonction dérivée par rapport à x est : $x^5 + tx^3 + ux^2 + vx + w$.¹

Remplaçons ces paramètres par ceux de Zeeman qui influencent l'opinion publique: a la menace, b le coût, c l'invulnérabilité et d le temps. *The behaviour space* est $X = R$, with $x = behaviour mode$ (dans le cas d'espace, x décrit l'action militaire dont on étudie la variation- via la dérivée supra - en fonction des paramètres). Comme *the control space* C est R^4 (4 comme 4 control factors), et M , l'espace de réponse, la « variété » abstraite de dimension 4, M est situé dans l'espace $C \times X = R^5$ donnée par l'équation $x^5 = a + bx + cx^2 + dx^3$. Enfin, G est la sous-variété de M (la fonction dérivée de M) donnée par l'équation $5x^4 \geq b + 2cx + 3dx^2$. Le jeu des quatre paramètres se présente ainsi dans une section 2D de l'espace de commande (plan (a,b) pour (c,d) constant) :



Note **the effect of the bias factor c** [le sentiment d'invulnérabilité].

When $d < 0$ [quand le temps n'intervient pas], the effect is **to bias** the position of the cusp [la fronce]. When the bias is positive [$c > 0$] the cusp is biased in the positive direction of the normal factor. and vice versa.



Note **the effect of the butterfly factor d** [l'intervention du temps].

When this comes into play, $d < 0$, the effect is **to bifurcate** [fiburquer = en diviser en fourche] the cusp into three cusps. The number in each region indicates the number of peaks [sommets] in the corresponding probability distribution, and hence the number of sheets of G [la « surface » de réponse, qui n'en est plus une, car nous sommes en 4 dimensions] over that region. As the control point crosses the bifurcation-set the number changes because the distribution

¹ C. Bruter, *Topologie et perception*, op. cit., t.1, p.221.

Annexe IX

Trouver l'ensemble K des valeurs u, v, w pour les extrema locaux du potentiel de la queue d'aronde venant à se confondre

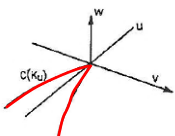
Soit F le potentiel de la forme $x^5/5 + u x^3/3 + v x^2/2 + wx$ et $\partial F/\partial x = x^4 + ux^2 + vx + w$.

Le lieu des points en lesquels sont atteints les minima et maxima de F sont donnés par $\partial F/\partial x = 0$, soit $-w = x^4 + ux^2 + vx$. On connaît toutes les formes possibles quand u, v, x, varient. [...] Cherchons d'abord l'ensemble des points pour lesquels **3 extrema sont confondus**. On a alors :

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 4x^3 + 2ux + v = 0$$

$$\frac{\partial^3 F}{\partial x^3} = 12x^2 + 2u = 0.$$

De la dernière équation, on déduit $u = -6x^2$. Si on porte cette valeur de u dans l'équation précédente, on obtient $v = 8x^3$; on remplace u et v par ces valeurs dans $\partial F/\partial x = 0$, et on trouve $w = -3x^4$. Pour deux valeurs symétriques de x, soient x et -x, on obtient deux valeurs symétriques de v, et la même valeur pour u et w. Voici, quand x varie, la courbe représentative C du lieu des points triples (en rouge) :



Examinons maintenant le cas où deux racines seulement sont confondues : $\partial^2 F/\partial x^2 = \partial F/\partial x = 0$. Si $u=0$, $\partial^2 F/\partial x^2$ donne $v = -4x^3$, et on déduit de $\partial F/\partial x = 0$, $w = -x^4 + 4x^4 = 3x^4$. Le rapport w/v est égal à $-3/4x$, la courbe a donc la forme de la fig.a :

fig.a

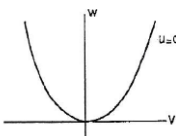
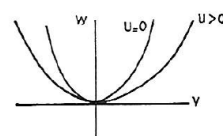


fig.b



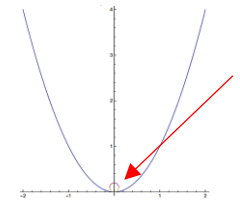
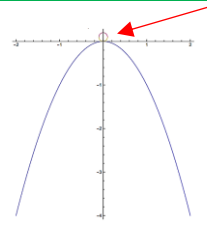
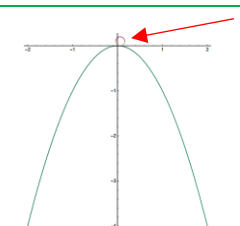
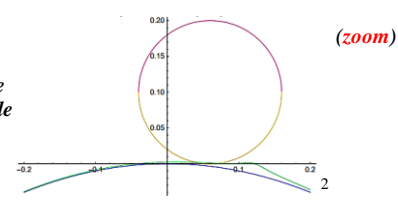
Dans tous les cas, $\partial^2 F/\partial x^2 = 0$ donne $v = -(4x^3 + 2ux)$ et l'on déduit de $\partial F/\partial x = 0$: $w = -(x^4 + ux^2 - (4x^3 + 2ux)x) = 3x^4 + ux^2$.

Si u est positif ou nul, v ne peut s'annuler que si x=0, w est toujours positif, et le rapport w/v est de l'ordre de x. La courbe de variation de w en fonction de v a la forme de la fig.b supra.

Si u est négatif, ... (le lecteur peut poursuivre la lecture en consultant directement l'ouvrage de Claude Bruter en référence).¹

Annexe X

Equilibres stable, instable, métastable

<p>équilibre stable</p> 	<p>équilibre instable</p> 
<p>Équilibre métastable</p> 	<p>équilibre métastable</p> 

¹ C. Bruter, *Topologie et perception*, op. cit., t.1, pp.236-237.

² Courbes tracées, via *Mathematica*, par mon ami Raymond Aschheim qui précise que dans l'équilibre métastable, la courbe verte est égale à la courbe bleue de l'équilibre instable, augmentée de la correction non linéaire générée par les bobines lors d'un écart à la position d'équilibre.

§55.- MODELISER EN TERMES D'ATTRACTEUR

1/ La notion d'attracteur en mathématiques, 383

- i De la boîte noire des cybernéticiens à celle des catastrophes, 383
- ii De la boîte noire au concept d'attracteur, 385

2/ La Constitution comme attracteur majeur

- i Un bassin d'attraction majeur
autour d'un centre organisateur
- ii Un bassin partagé entre attracteurs mineurs
Annexes I et II, 391

o

1/ La notion d'attracteur en mathématiques

- i De la boîte noire des cybernéticiens à celle des catastrophes, 383 - ii De la boîte noire au concept d'attracteur, 385

i De la boîte noire des cybernéticiens à celle des catastrophes

La *boîte noire* désigne un système dont l'étude fait fi de son fonctionnement interne. Il ne considère que ses entrées et ses sorties. La boîte a une fonction paradoxale : elle masque le contenu du système pour mieux saisir les liens entre les entrées (*inputs*) et les sorties (*outputs*).



Le noir de la boîte indique son caractère opaque au regard. Noir ne s'oppose pas, cependant, à transparent mais à blanc. Une *boîte blanche* est un système dont les mécanismes sont visibles et permettent d'en comprendre le fonctionnement. Une bicyclette en une boîte blanche. Ses mécanismes de propulsion, de guidage, d'adhérence et de freinage apparaissent au premier coup d'œil, même si le cycliste, qui peut être un bon coureur, n'est pas un bon mécanicien !

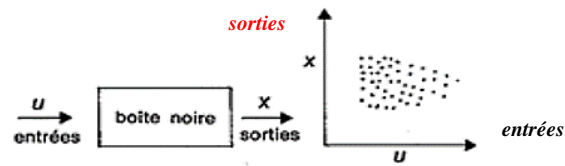
Il faut comprendre l'origine de cette expression. Elle remonte à l'époque de la deuxième guerre mondiale. Elle est liée aux techniques des télécommunications militaires, reprenant l'expression utilisée pour désigner « des appareils ennemis capturés qui ne pouvaient pas être ouverts » car ils pouvaient être piégés. Ils devaient donc être examinés, sans que leur structure interne soit révélée. Cette approche fut théorisée par la suite, en 1948, par le mathématicien Norbert Wiener dans son ouvrage intitulé *Cybernétique et société*. Le cybernéticien y avance l'idée de boîte noire, mais aussi celles, corrélatives, d'information, de contrôle, de boucle de rétroaction. Ces notions seront reprises dans la Théorie générale des systèmes.¹

Le mot *cybernétique* n'est plus aujourd'hui en vogue, mais les intuitions de Wiener perdurent pour analyser de l'extérieur un système trop complexe, que ce soit un objet mécanique ou électronique, un organisme, une personne, un mode d'organisation sociale, ou n'importe quel autre système comme une entreprise comme la perçoit la théorie économique néo-classique.

Il vaut de remarquer que, dans son livre sur la théorie des catastrophes, publié en 1972, René Thom avait complété le titre *Stabilité structurelle et morphogenèse* par l'adjonction : *Essai sur la théorie générale des modèles*. La boîte noire était donc dans l'air. Zeeman la formalisera dans la théorie des catastrophes avant que Thom la reprenne formellement en 1977 dans *Paraboles et catastrophes*. Le système considéré communique avec le monde extérieur avec ses entrées et ses sorties. L'entrée est assimilable à l'action d'un expérimentateur. Si celui-ci perturbe le système comme une cause externe, celui-ci émet des sorties. Il produit des effets. Voici comment Thom représente cet enchaînement :

¹ [https://fr.wikipedia.org/wiki/Boîte_noire_\(système\)](https://fr.wikipedia.org/wiki/Boîte_noire_(système)); Ludwig von Bertalanffy, *Théorie générale des systèmes* [1968], Dunod, Paris, 1973.

On peut supposer que l'espace des entrées est un espace euclidien R^r de dimension r et que l'espace des sorties est un espace euclidien de dimension n . Alors, dans l'espace $R^r \times R^n$, la correspondance entrées-sorties sera représentée par un point, et une série d'expérimentations faites sur le système amène à la donnée d'un nuage de points.¹ [fig. infra]

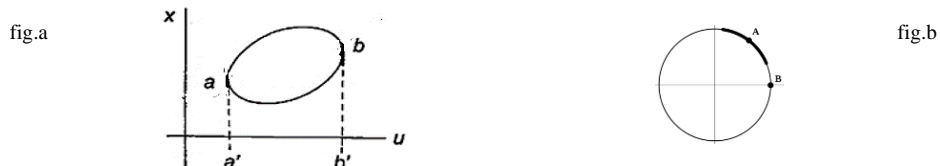


Comment ce nuage de points évolue-t-il ? En général, et non dans des situations exceptionnelles, poursuit Thom, *le nuage de points tend vers une situation asymptotique, indépendante de la stratégie suivie dans le choix des entrées*. Le système satisfait la condition d'« ergodicité » comme on dit dans le jargon. Nous y reviendrons. Thom donne deux exemples.

Le premier envisage le cas simple où, à une entrée point de u , correspond uniquement un nombre fini de sorties, élément de X . *Le graphe est constitué pour chaque u de U par les couples (u, x) tels que x est élément d'un ensemble fini I_u , de points de X où chaque I_u correspond à u . Ce graphe C représente, en un certain sens, la « caractéristique » du système. Il s'agit d'une courbe fermée, lisse et convexe qui admet deux points critiques (à tangente verticale) a et b . (fig. infra) Thom suppose, pour fixer les idées, que $n = r = 1$ (n est le nombre de sorties). Soient, sur la même figure, a' et b' les projections de a et de b sur l'espace de contrôle (l'axe u). Considérons*

les valeurs de u comprises entre a' et b' auxquelles correspondent deux sorties possibles $x(u)$ et $x'(u)$. Supposons que le système se trouve en $x(u)$ qui appartient à la portion supérieure de C . Si l'on fait croître u , $x(u)$ varie de façon continue (par application du théorème connu des fonctions implicites), au moins jusqu'à $u < b'$; pour $u = b$, $x(u)$ coïncide avec b .

[Ce théorème de géométrie différentielle signifie que, si une fonction f est suffisamment régulière autour d'un point de sa courbe représentative, il existe une fonction ϕ de \mathbf{R} aussi régulière telle que localement la courbe de f et le graphe de ϕ sont confondus. Voir sur la fig.b le point A autour duquel il existe un voisinage tel que la fig.b (en noir appuyé) soit le graphe d'une fonction. Ce graphe contient le point A. Il ne contient pas par contre le point B qui possède deux ordonnées.]²



- Mais pour $u > b'$?

- Réponse :

Si l'expérimentateur persiste et donne à u des valeurs plus grandes que b' , il n'y a d'autre issue que la destruction du système. Il s'agit de la catastrophe au sens usuel du terme, comme, par exemple, l'explosion d'une chaudière si l'on pousse la pression de la vapeur au-delà du seuil maximal de résistance.³

Le deuxième exemple montre que la *catastrophe*, au sens de la théorie des catastrophes, est loin de revêtir en fait cette connotation désastreuse. Catastrophe signifie littéralement *renversement*, mais ce renversement **peut être une forme de régulation**. Soit toujours $n = r = 1$, mais cette fois, la caractéristique C a l'allure de la courbe en S majuscule que nous avons déjà rencontrée à plusieurs reprises. (fig. c) On a encore deux points critiques a et b et deux valeurs critiques a' et b' en U . Le système a un choix à faire en ces points, mais en sautant de b à b_1 ou de a à a_1 , il parvient à maintenir son existence. Le bouleversement n'est donc pas proprement catastrophique.

¹ R. Thom, *Paraboles et catastrophes*, op. cit., p.61 ; *Prédire n'est pas expliquer*, op. cit., p.39.

² *Ibid.*, p.62 ; https://fr.wikipedia.org/wiki/Théorème_des_fonctions_implicités

³ *Ibid.*, p.63.

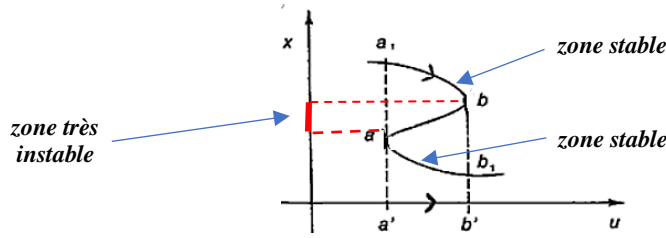


fig.c

Supposons, comme précédemment, qu'à la valeur u , dans l'intervalle entre a' et b' , correspond, sur la portion supérieure de C , l'état $x(u)$. Faisons maintenant croître u jusqu'à atteindre la valeur b' ; $x(u)$ décrit par continuité la branche supérieure de C et finit par arriver au point b . Si u est poussé au-delà de la valeur b' , le système échappe à la destruction dans la mesure où il permet à l'état $x(u)$ de « sauter » très rapidement sur la branche inférieure de C , en b_1 . Si, enfin, on fait redescendre u vers a' , $x_1(u)$ se déplace par continuité sur la branche inférieure de C jusqu'au point critique b . Et là, si u continue à décroître, l'état $x(u)$ « saute » à nouveau sur la branche supérieure de C en a_1 d'où il pourra recommencer le cycle précédent (c'est ce qu'en physique on appelle cycle d'hystérésis).¹

(§27
7/a)
(§43
3/b)-iv

Sur la fig.a supra, qui représente une courbe fermée, la dynamique paraît périodique. Elle se présente sur la forme d'un cycle, mais ce cycle s'avère illusoire, car le système finit par exploser. Le système n'est stable que pour des valeurs de u comprises entre a' et b' , et très instable au voisinage de ces valeurs. (Le cycle aurait pu finir par s'ouvrir en spirale, comme nous l'avons vu avec le cycle consommation-épargne, mais ce n'est pas ici le cas.) En revanche, la fig. b présente un système en cycle d'hystérésis. Le système tarde à « sauter » en a et b .

En physique, le cycle d'hystérésis est défini par une substance ferromagnétique qui n'a jamais été aimantée. Si on procède à son aimantation en approchant un aimant, on observe que l'aimantation est en retard par rapport à la diminution du champ magnétique. Il y a un décalage dans l'évolution du phénomène par rapport à sa cause.

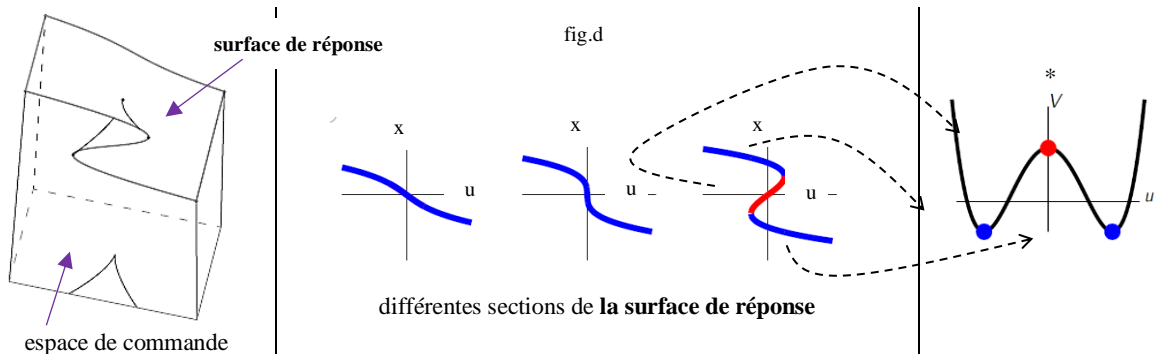
Dernière remarque sur ce début de réflexion de Thom : Le 2^e exemple considère comme le premier qu'une fois l'entrée u choisie, on a une unique sortie $x(u)$. L'application, autrement dit, en l'espèce est une fonction. Dans un cas plus général, on a naturellement affaire à un « paquet » de fonctions plutôt qu'à une seule, i.e. à un ensemble fini I_u de sorties. Dans un cadre pareil, la sortie ne dépend pas seulement de l'entrée $u \in U$, mais aussi de toute l'histoire passée du système. C'est l'effet de cette histoire qu'on symbolise par la notion d'état du système.² Le système a une mémoire, une hystérésis.

La machine à catastrophes obéit à la règle du retard. Celle-ci consiste en ce que le système reste sur un équilibre stable jusqu'à l'ultime moment où celui-ci disparaît.³

ii De la boîte noire au concept d'attracteur

(§54
3/a)-i

Le lecteur reconnaîtra infra au centre le schéma de la fronce que l'on peut visualiser autrement dans la configuration d'un potentiel V . La dynamique est définie par une dynamique de type gradient (fig.d), où figurent les trois équilibres, deux stables et un instable, du potentiel $V = x^4/4 + ux^2/2 + vx$ où x désigne un facteur variant du système et le paramètre u un autre facteur influençant le premier. Dans une dynamique de gradients $S(x,u)$, le gradient de x dépend de u . (u perturbe le potentiel en question.)



¹ Ibid., p.64. Nous soulignons.
² R. Thom, Apologie du logos, op. cit., p.399.
³ Ivar Ekeland, « La théorie des catastrophes », in La Recherche, n°81, sept. 1987, pp.745-754. Accessible sur internet.

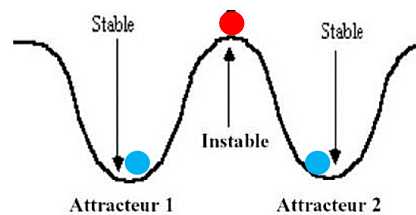
- Où est l'attracteur annoncé sur l'une de ces figures ? Je ne suis pas sûr de m'y retrouver ?

- Vous vous en doutez sans doute où, puisque l'attracteur est quelque chose qui, par définition, attire. On tend vers lui. Mais avant de choisir la figure idoine, revenons à notre boîte noire initiale.

On peut déjà interpréter le nuage de points, dans le système de coordonnées entrées/sorties, comme **un attracteur**, c'est-à-dire une sorte d'état limite des trajectoires du système, l'ensemble des états limites du système. Dans le nuage même, il y a peut-être plus de points dans un endroit que dans d'autres. Si l'on a, par exemple, un équilibre chimique, et si l'on étudie la variation des concentrations des substances en réaction, l'équilibre étant ponctuel, il y aura un point unique comme attracteur du système. Un tel attracteur existe également dans les systèmes de gradients sur un desquels vous m'interrogez. Je laisse Thom continuer d'en parler :

*Une chute de corps dans laquelle il n'y aurait pas d'énergie cinétique, chute de masse nulle, avec une certaine dissipation d'énergie, donne une dynamique de gradients. [« gradients » est au pluriel, car il est sous-entendu un champ de vecteurs gradients, le champ associant un vecteur en chacun de ses points.] Les corps tombent vers le point le plus bas qu'ils puissent atteindre. **Le minimum de potentiel donne l'attracteur.**¹*

La réponse est claire. Elle permet de comprendre que les deux équilibres stables, dans lesquels sont situées les **boules bleues**. Voilà un exemple d'attracteurs qui sont, en l'occurrence, des puits de potentiel. Dans ce paysage, le fond des vallées ou « **bassins** » constitue un endroit stable pour les boules en contraste avec le mont sur la crête duquel **la boule rouge** est posée. Pour déplacer une de ces boules, il faut **beaucoup plus d'énergie** pour déloger **une bleue** qu'**une rouge** de sa position. Dans le cas d'espèce, nous sommes donc en présence deux attracteurs, l'attracteur 1 et l'attracteur 2.



On corrigera un peu le schéma précédent, recueilli sur internet : les attracteurs 1 et 2 sont bien des attracteurs. Ce sont des attracteurs *stables*, mais ce qui est qualifié d'*instable* est aussi ... un attracteur même s'il n'a pas, en principe, une réalité physique assurée. Disons : on n'observe guère sa présence.²

- Vous n'envisagez qu'une dynamique de type gradient. En dehors d'un potentiel et de son gradient qui tend vers un minimum, peut-on aussi parler d'attracteur dans une dynamique plus générale où se produiraient par exemple des trajectoires récurrentes ?

- Réponse de Thom encore : oui, si l'on suit une trajectoire g d'un système dynamique, cette trajectoire g a un ensemble limite dans D , qui lui-même a toutes chances d'être un « attracteur », c'est-à-dire un ensemble fermé invariant $A \subset S$ qui « attire » toutes les trajectoires voisines. [Nous verrons, dans un autre §, que cette dynamique est observable pareillement en droit quand on décrira les « trajectoires récurrentes » de la jurisprudence constitutionnelle.] Et Thom de reprendre la parole pour mieux définir à l'occasion l'*ergodicité* trop rapidement évoquée :

Pour peu que l'espace S puisse être partagé en un nombre fini de bassins d'attracteurs, chacun de ces attracteurs définit pratiquement un « régime stationnaire » : l'attracteur est parcouru par toute trajectoire ergodiquement (avec une mesure invariante). Au lieu de prendre la sortie $y = G(u; s)$, on lui substitue sa moyenne temporelle $\bar{y} = 1/T \int_0^T f(G(s(t), u)) dt$ sur un temps T assez long pour que l'attracteur puisse être parcouru « ergodiquement », et donc qu'on puisse confondre moyenne temporelle et moyenne « spatiale » sur A , soit $\bar{y} = 1/m(A) \int_A G(s; u) dm$.³

¹ R. Thom, *Prédire n'est pas expliquer*, op. cit., pp.37-38. Nous soulignons. Les crochets sont nôtres.

² C. Bruter, *Les architectes du feu*, op. cit., p.212.

³ R. Thom, *Apologie du logos*, p.402.

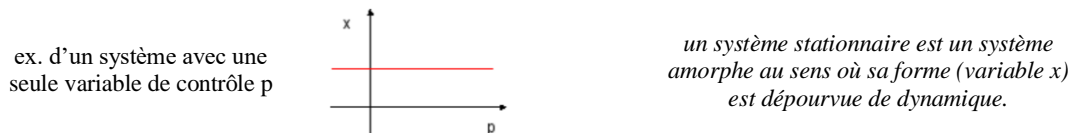
approche intuitive de l'hypothèse ergodique

D'une façon intuitive, pour prendre l'exemple d'un gaz, les milliards de particules qui le constituent peuvent être considérées comme des copies les unes des autres ayant toutes le même comportement aléatoire. Elles prennent chacune des valeurs aléatoires, probablement différentes, de position et de vitesse à un instant donné. La vitesse moyenne des particules peut se calculer en sommant les vitesses de toutes les particules à un instant donné. **Cependant, on peut calculer également une moyenne en considérant une seule particule mais en mesurant ses vitesses à différents instants.** L'hypothèse d'ergodicité revient à dire que les deux méthodes sont équivalentes.

On peut également penser à une forêt d'une seule espèce et s'intéresser à la croissance d'un arbre en fonction du temps : **l'hypothèse ergodique revient à considérer qu'il est similaire d'observer la forêt à un instant donné, ou un arbre tout au long de sa vie pour en connaître l'évolution** (par exemple relever le diamètre du tronc en fonction du temps ou mesurer tous les diamètres de la forêt et le reporter en fonction de l'âge de l'arbre).¹

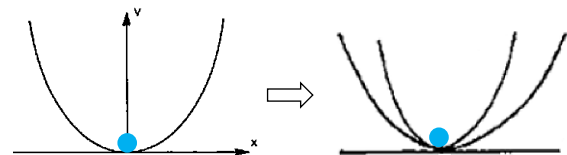
Nous reviendrons sur l'ergodicité en droit.

En attendant, précisons également qu'un système devient *stationnaire* lorsque la dynamique cesse ; le mouvement s'arrête. Cependant, pour qu'un système présente un attracteur, il faut qu'il soit stable et pas simplement figé comme dans un système où le paramètre de contrôle serait inopérant sur la surface de réponse qui représente la « morphologie » du système. Un système stationnaire serait plus que stable.²



La différence entre système stationnaire et attracteur explique l'adverbe *pratiquement* dans le texte de Thom. Une dynamique *stable* possède néanmoins des caractéristiques qui n'évoluent pas dans le temps. Ces caractéristiques résistent à de petites perturbations du ou des paramètre(s) de contrôle.

Dans une dynamique de gradients, il y a stabilité lorsque le système (la **boule bleue**) ne peut sortir du puits de potentiel (par ex. parabolique en ax^2 avec $a > 0$). Le système est sujet, dans ce cas, à **régulation** (si je perturbe légèrement la fonction que la courbe représente, j'obtiens encore une fonction de type parabolique en ax^2).



Ces approches visuelles donnent une première idée de ce qu'est un attracteur. Pour passer de la notion au concept, on se référera à la définition mathématique qui n'est pas trop éloignée de celle qui est assez claire pour le non spécialiste qui n'est pas dépourvu d'intuition et d'imagination.

Par attracteur, il faut entendre *un ensemble d'états formant un tout A globalement invariant au cours du temps, de sorte que si l'on considère un état initial n'appartenant pas à A, mais voisin de A [comme une fonction parabolique légèrement différente], l'état final dérivé de l'appartient, lui, à A.* Globalement invariant signifie être capable de résister aux perturbations. Être, autrement dit, **structurellement stable**.³

- C'est toujours clair, mais si être *structurellement stable* implique de perdurer nonobstant des vicissitudes mineures, un tel équilibre ne risque-t-il pas d'être sapé ou détruit un jour ou l'autre ?

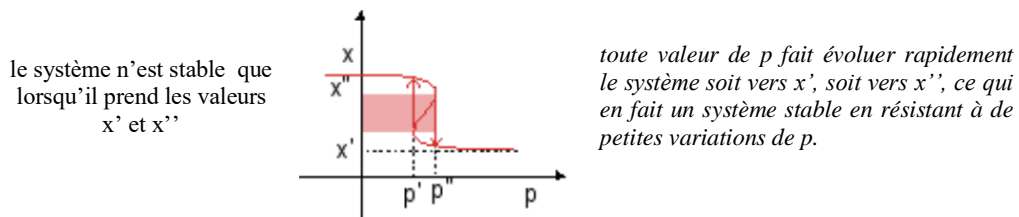
- Comme il a été entrevu dans des § précédents, Thom voit précisément dans la catastrophe la disparition d'un tel équilibre qui peut aboutir, dans la fronce par ex., à un autre équilibre, suite à une modification continue des forces agissantes sur le système. En pareil cas, l'idée de forme stable

¹ https://fr.wikipedia.org/wiki/Hypothèse_ergodique. Nous soulignons.

² <http://pst.chez-alice.fr/CT/continud.htm>

³ C. Bruter, *Les architectes du feu*, op. cit., p.124, 186 et 92.

renvoie davantage encore à celle de régulation interne qu'à un équilibre statique ou à un statu quo qui serait à l'abri de toute tempête. On passe d'un équilibre à l'autre, et inversement.¹



Le système oscille entre deux positions stables, les **attracteurs** du système qui sont « en conflit ». Les points d'instabilité p' et p'' correspondent à des *bifurcations*. Le système peut hésiter, avec \pm de retard, à les emprunter.

- Dans cette nouvelle représentation de la catastrophe *fronce*, je vois deux bifurcations suivant le sens croissant ou décroissant de p . Chacune forme un *pli*. Je suppose que dans cette catastrophe élémentaire plus simple, la bifurcation signale aussi le passage d'un équilibre stable à un autre.

- Oui, la bifurcation signale toujours un tel virage. **Le pli**, dont le déploiement est $x^3/3 + ux$, **détruit un attracteur et en capture un autre**. (fig.a) Le second attracteur est de potentiel moindre. (fig.b)

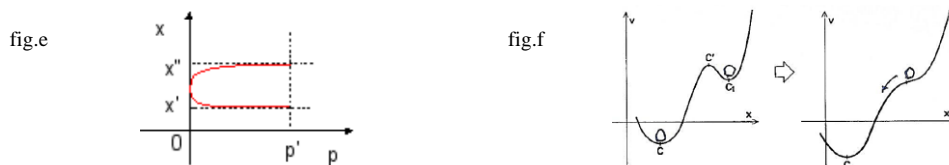


fig.e : le système n'est défini que pour des valeurs inférieures à p' . La morphologie présente deux états stables ou attracteurs en x' et x'' . Au point de bifurcation O , le système devient instable. **Il bifurque vers l'un ou vers l'autre**.

fig.f : Saut du minimum d'un potentiel V lors de la variation d'un paramètre dans le système de coordonnées (V,x) . L'attracteur c_1 correspond à un potentiel supérieur au minimum du potentiel c , mais il peut être détruit par un *pli* en c' et basculer en c . Le remplacement de l'attracteur initial par l'attracteur à forme finale décrit une morphogenèse.²

- Pourquoi avoir ignoré, dans votre définition, l'aspect statistique dans cette forme de stabilité ? Vous aviez pourtant parlé d'ergodicité, de trajectoire probable dans un intervalle de temps donné.

- Thom a parlé d'ergodicité pour éviter de considérer comme, par ex. en économie, un trend de croissance équilibrée et présumée stable. L'hypothèse ergodique, en physique, affirme qu'à l'équilibre la valeur moyenne calculée sur un très grand nombre de particules est égale à la moyenne d'un très grand nombre de mesures prises dans le temps. Cette hypothèse permet de rapprocher la théorie et l'expérience par la possibilité qu'elle offre de faire des prévisions en situation instable. Cependant, la théorie des catastrophes ne s'y réduit nullement. Comme l'écrit Claude Bruter,

*Si le phénomène n'est pas très stable, la statistique permet d'obtenir des valeurs moyennes ; celles-ci caractérisent globalement et grossièrement le phénomène. Mais la statistique ignore les raisons fines et parfois très importantes qui engendrent les petites instabilités. Elle ne peut les expliquer. Derrière le masque statistique restent cachées la structure exacte et les raisons explicatives du phénomène. La statistique établit un écran à l'essentiel, la compréhension, le pourquoi du phénomène.*³

Si utile qu'elle soit par ailleurs (on l'a vu pour l'établissement des chroniques), la statistique n'éclaire pas pourquoi, au bout d'un certain temps, une trajectoire vient se stabiliser autour d'un **attracteur dont la forme peut être un point, un cercle, un tore, etc**. La stabilité, fût-elle structurée à souhait, peut être par exemple sujette à des variations cycliques d'origine exogène.

La statistique ne dit rien non plus sur la différence entre un **attracteur local** et un **attracteur global** alors que la mathématique s'y emploie très bien sur un exemple simple. Nous redonnons la parole à Claude Bruter, puisée dans un autre de ses ouvrages :

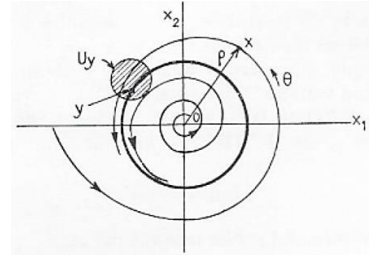
¹ <http://pst.chez-alice.fr/CT/continud.htm>

² *Ibid* ; R. Thom, *Stabilité structurelle et morphogenèse*, op. cit., p.63.

³ C. Bruter, *Les architectes du feu*, p.118.

Soit un système dynamique défini sur le plan V . Un point x du plan est défini par la longueur ρ de l'origine à ce point, et par l'angle θ que fait Ox avec l'axe des x_1 . On suppose que ce système dynamique est défini [par le système de deux équations différentielles] :

$$\begin{cases} \frac{d\rho}{dt} = \rho(1 - \rho) \\ \frac{d\theta}{dt} = 1. \end{cases}$$



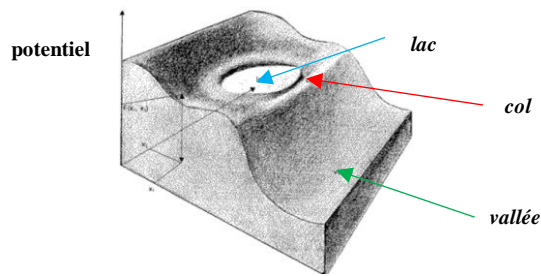
Le cercle unité S^1 , en trait renforcé, est l'ensemble $\Lambda(x)$ des points limites des trajectoires qui passent par x , quel que soit $x \neq 0$ dans V .

A partir de ces équations, voici ci-contre le réseau de ces trajectoires :

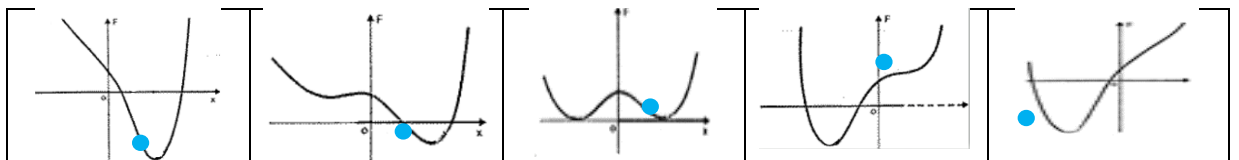
Dans cet exemple,

Tout point du cercle unité est un attracteur local, alors que le cercle lui-même est un attracteur global vers lequel se dirigent toutes les trajectoires, l'origine mise à part. Le bassin d'attraction est constitué du plan moins l'origine. L'attracteur est ici une rivière circulaire ; cette rivière entasse une montagne, et reçoit de l'extérieur également un afflux de trajectoires.¹

La relation local-global est autant visualisable dans le déploiement d'un potentiel. Soit le modèle hydraulique présenté par Ivar Ekeland pour présenter la théorie des catastrophes. Le graphe de la fig.f supra représente le potentiel $F(\rho_1, \dots, \rho_n)$. Les minimums locaux correspondent aux bassins et les maximums aux sommets d'un relief facile à imaginer : un lac retenu par un col. L'érosion sera catastrophique : lorsque le col s'effacera, l'eau se déversera dans la vallée inférieure.²



Traduisons ce processus en nous intéressant au déploiement du potentiel $F_p(x) = px + (x^2-3)^2$ sans indiquer les valeurs précises du paramètre p en jeu. Ses déformations sont les suivantes :



Quand p prend de grandes valeurs négatives, le potentiel F_p présente **un seul minimum local, qui est aussi global**.

Au départ, il y a **un seul bassin, dont l'influence s'étend sur toute la droite des x** . Par suite de l'érosion, on voit apparaître un col délimitant un nouveau bassin, appelé à se développer aux dépens du premier. Un minimum local se forme. Les deux bassins coexistent jusqu'à ce que le nouveau se creuse et prenne de l'importance aux dépens de l'autre. Deux minima locaux se font face. Le col, qui les sépare, finit par s'effacer et l'ancien bassin se vide dans le nouveau, qui subsiste seul. **On retombe dans un minimum local qui devient global**.

- On passe au droit ?
- On passe au droit.

¹ C. Bruter, *Topologie et perception*, op. cit., t.1, pp.186-187. Nous soulignons.
² I. Ekeland, « La théorie des catastrophes », op. cit., accessible sur internet, pp.3-4.

2/ La Constitution comme attracteur majeur

i Un bassin d'attraction rassembleur autour d'un centre organisateur

- Un bassin d'attraction rassembleur. - Forme source, formes satellites.
- La prégnance comme puits de potentiel. - Qu'entendez-vous par *centre organisateur* ?

Annexe I

Strate de conflit

1/ La stratification est, en statistique, un processus consistant à diviser une population en sous-groupes homogènes avant l'échantillonnage.

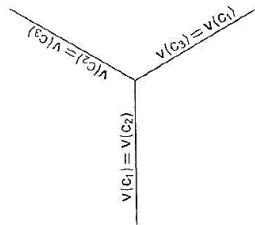
Ce premier aperçu permet de comprendre ce qu'est une strate en mathématiques. On considère une union finie d'ensembles disjoints. Ces ensembles sont des strates, définies comme des *variétés différentiables connexes*.¹ (Elles sont différentiables parce nous raisonnons en continu, et connexes parce qu'elles sont accolées les unes autres.)

2/ Selon Thom,

lorsque trois régimes [ou attracteurs] c_1, c_2, c_3 sont en compétition, l'ensemble des points tels que le potentiel V a trois minima absolus égaux (et distincts) non dégénéré, forme (localement) une strate de codimension deux [i.e. une strate gouvernée par deux paramètres de contrôle]. Cette strate apparaît comme une arête triple, bord commun à trois strates de conflit de codimension un, définie S [S comme strate de conflit] par

$$V(c_1) = V(c_2) < V(c_3); V(c_2) = V(c_3) < V(c_1); V(c_3) = V(c_1) < V(c_2)$$

La contre-image par s de cette strate définit une arête triple, bord commun à trois strates de conflit [fig. infra] :



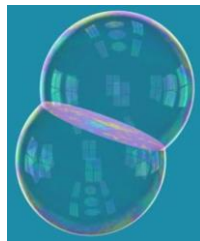
Cette singularité [topologique] est connue en dynamique des gaz (elle apparaît notamment dans la réflexion de Mach). On peut la réaliser par un film d'eau savonneuse dans le problème de Plateau ; en biologie, elle a été décrite avec une grande précision par d'Arcy Thompson dans la disposition relative des chemins cellulaires.²

3/ Aperçu sur le problème de Plateau :

Le problème de Plateau consiste à minimiser l'aire d'une surface s'appuyant sur un bord. Cet énoncé assez ancien (XVIII^e siècle) est inspiré par les films de savon. Il fait l'objet de différentes formulations mathématiques qui correspondent à autant de façons de définir la classe des surfaces « bordées par une frontière » et « l'aire » à minimiser.

Ainsi, le problème de Plateau est une classe de problèmes et il a motivé plusieurs théories [...]. Toutefois, les solutions connues manquent de généralité pour retrouver certaines singularités des films de savons.³

4/ Images de bulles de savon (entrevues déjà en §47 4/a-ii) à double voire triple bulles : ⁴



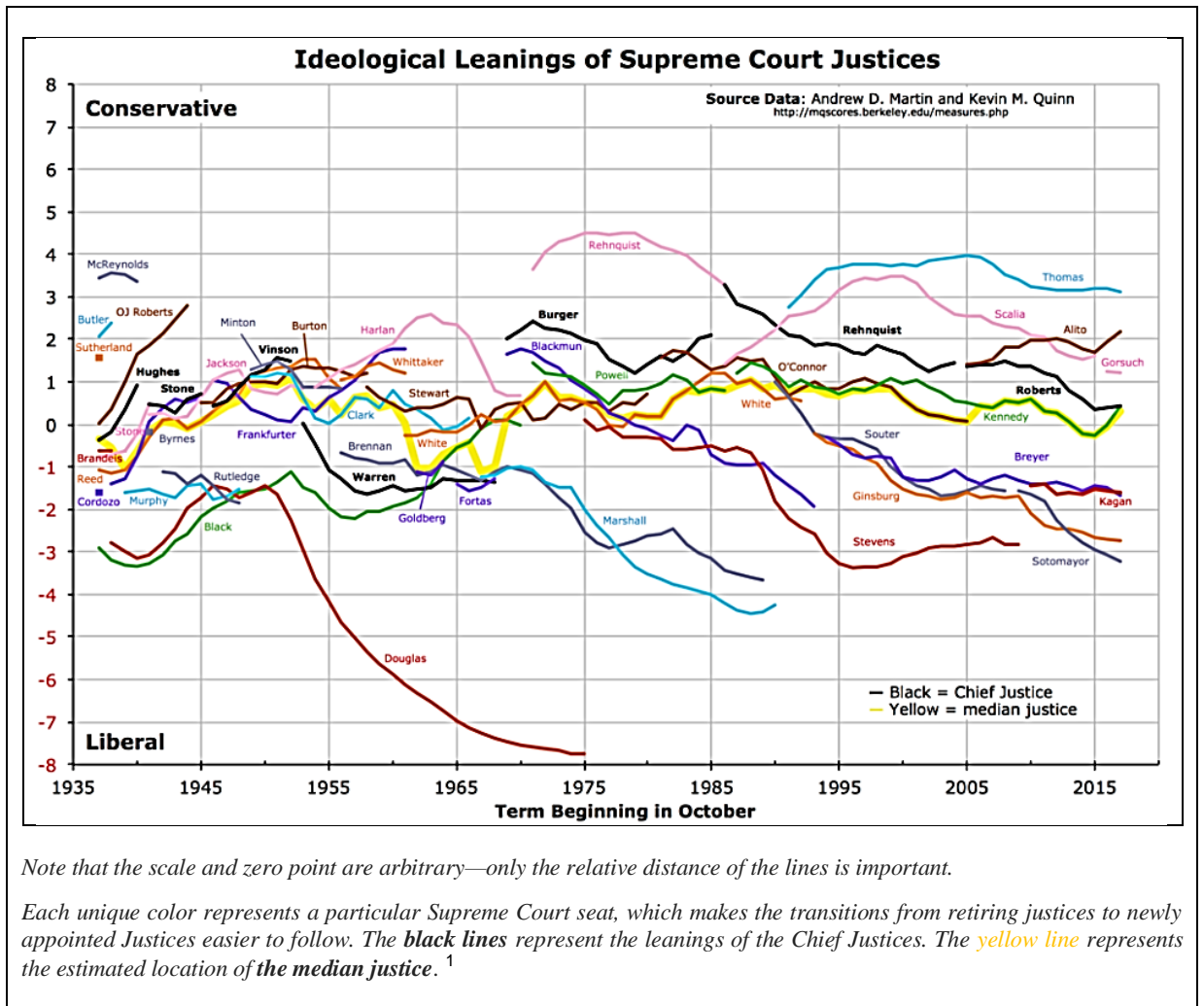
¹ C. Bruter, *Topologie et perception*, op. cit. , t.1, p.230.

² R. Thom, *Stabilité structurelle et morphogénèse*, op. cit., p.65. les crochets sont nôtres.

³ <https://www.math.u-psud.fr/Theorie-geometrique-de-la-mesure-et-probleme-de-Plateau>

⁴ <http://mathworld.wolfram.com/DoubleBubble.html>; mathoverflow.net

Annexe II



¹ https://en.wikipedia.org/wiki/Ideological_leanings_of_United_States_Supreme_Court_justices

§56.- « REDUIRE » L'INDECISION EN DECISION

1/ La découverte de l'embarras du choix en science, 393

- a) L'expérience de Young revisitée, 393
- b) Le principe de superposition, 386
- c) La réduction du paquet d'onde ou du vecteur d'état, 404
Annexes I à VII, 408

2/ Après le temps des mots, voici en droit celui de l'action

- a) S'engager ou ne pas s'engager
i Le moment de bascule
ii Des stratégies pures aux stratégies mixtes

- b) L'acte de décider et ses effets
i Des exercices pratiques qui font penser
ii Entreprise et fournisseur : un avant-goût du droit
iii Des stratégies mixtes au sommet de l'Etat

3/ L'orientation préalable du choix de l'action

- a) Un projet de loi à état multiple
i Un projet de retraite peu préparé
ii Des options à la satisfaction

i

- b) Un cas « dégénéré » : le vote
i Les fentes de Young (bis)
ii Des petits modèles quantiques instructifs
iii Une déception occasionnelle sur l'intelligence artificielle

- 4/ Le recours à des filtres polarisants, 413
i Une nouvelle histoire de flambage, 413
ii La polarisation du photon-onde en droit constitutionnel
iii Les primaires dans le collimateur de la physique quantique
iv Questions subsidiaires non traitées

Annexe VIII, 417

o

1/ La découverte de l'embarras en science

a) L'expérience de Young revisitée

Décider ..., mais quoi décider ? La question n'est pas tranchée, ballotés que nous sommes entre des idées qui tiraillent l'esprit. Et pour qui décider quand le moment fatidique presse d'agir vite ?

Quel parti prendre au moment de voter ? Quelle interprétation choisir au moment de juger un cas ? Quelle option inédite, parmi toutes celles possibles, insérer comme clause dans un contrat ?

Ces interrogations ne taraudent pas ceux qui sont d'avance convaincus. Leur pensée demeure enracinée dans leurs idées préconçues. Mais ceux qui ont des « états d'âme » ? ceux qui, après avoir apprécié, - pesé - tous les arguments et circonstances, ne savent pas décider tant les solutions abondent. Vers où, se demandent-ils, devons-nous porter notre action ?

Ils appartiennent au « centre » de l'opinion dont le tripartisme n'est pas à confondre avec celui éventuel des partis politiques, quand même ces deux tendances pourraient se confondre.

Chacun est chahuté par des opinions adverses et variées qui ont fait valoir leurs raisons. Ces opinions ne proposent, pour se rassurer que des *foregone conclusions* (des opinions prédéterminées, que leurs porte-paroles tiennent pour acquises). Chacun, au centre, qu'il penche un peu à droite ou à

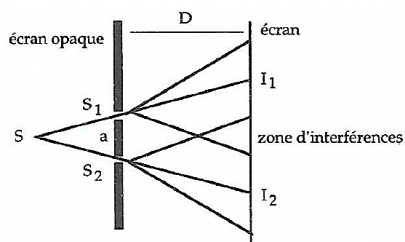
gauche, est déséparé. Le modéré, ou celui qui a bien balancé les points de vue, refuse de se trouver devant un avenir trop prévu, mais il doit choisir à son tour la voie à suivre pour réaliser un des possibles. La confrontation des premières opinions a permis au futur votant de se détacher du réel pour contempler le virtuel. Il lui incombe *now !*, après ce voyage dans l'irréel, de dessiner un autre réel, ou du moins de s'inscrire, dans le présent, différemment.

C'est entendu : le monde du droit n'est pas la simple copie ou continuation de la nature. Il est, nous en sommes assez d'accord, artificiel, tant il exige un travail des individus pour se constituer. Cependant, l'on ne peut nier également qu'un lien de parenté relie le monde naturel et l'humain. La levée de l'indétermination de situations où tout se présente **en même temps**, en fournit un témoignage. La théorie de la relativité n'a plus son mot à dire ici, mais la physique quantique si.

(§16.2/)
(§41 a)

Le problème de Pappus a été revisité par Descartes au XVII^e siècle. Le créateur de la méthode analytique en mathématiques l'avait éclairé d'une toute autre façon pour résoudre des cas plus généraux. L'expérience de Young, datant du début du XIX^e siècle, a, elle aussi, été revisitée par la physique quantique qui l'a pareillement éclairée mais d'une façon encore plus inhabituelle.

Le lecteur se souvient peut-être des travaux d'optique de Thomas Young. Ce savant fut le premier à réhabiliter l'hypothèse ondulatoire de la lumière de Huyghens et à critiquer l'hypothèse newtonienne de sa nature corpusculaire. Le lecteur se souvient peut-être aussi des travaux de Young sur la différence de longueur des chemins de la lumière entre les deux fentes (*double slit*) d'un écran opaque. Cette différence est à l'origine des franges d'interférence. L'écart entre les chemins trouve un écho en droit constitutionnel qui emprunte, à son niveau, plusieurs chemins.



Young observe sur l'écran, non pas deux taches lumineuses en I_1 et I_2 , mais des franges brillantes alternant avec des franges sombres sur tout la zone où les deux faisceaux se rencontrent.

Les franges sombres de la figure d'interférence correspondent au lieu où les deux ondes qui se superposent sont en opposition de phase (l'amplitude de la première est opposée à celle de la seconde).¹

Les deux faisceaux de lumières peuvent s'annuler en se superposant. Seule la théorie ondulatoire permettrait de l'expliquer, car les interférences ne seraient dues qu'à des ondes et nullement à l'envoi de corpuscules.

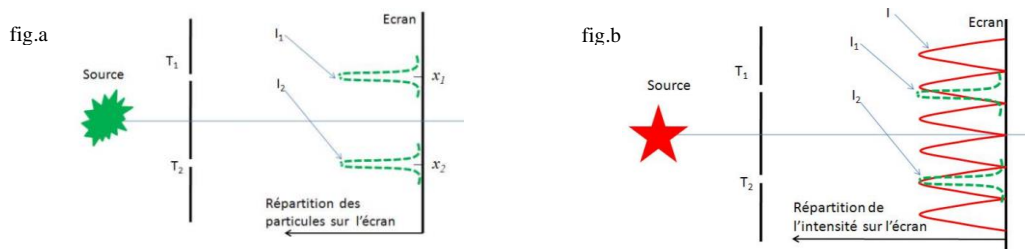


fig.a : Dans le cas où la source S émet des particules classiques (des billes), la répartition sur l'écran est formée par deux tâches I_1 et I_2 autour de x_1 et x_2 . Si on ferme l'un des trous la tâche correspondante disparaît. Si I_1 et I_2 sont les fonctions de répartition des billes si T_1 et T_2 est seul ouvert respectivement, la fonction de répartition lorsque les deux trous sont ouverts est $I = I_1 + I_2$ [ou, plus simplement $P = P_1 + P_2$, P étant la probabilité d'arrivée des billes].

fig.b : Si la source émet maintenant des ondes [par exemple, des vagues à la surface de l'eau], on sait que lorsque seul T_1 est ouvert, on obtient l'intensité I_1 , lorsque T_2 est ouvert on obtient I_2 . Par contre, lorsque T_1 et T_2 sont ouverts, on obtient $I \neq I_1 + I_2$ et on dit qu'il y a un phénomène d'interférences. [Ce phénomène d'interférence est la signature d'un comportement ondulatoire [les billes de l'expérience précédente n'interfèrent pas.]²

Jusqu'ici, le phénomène d'interférences, dues à la diffraction d'une onde à travers deux ouvertures, ne concernait que les ondes. Des ondes aussi bien élastiques, qui ont un support matériel, qu'électromagnétiques, telle la lumière, sans support. En un point de l'écran opaque, les vibrations par

¹ Isabelle Desit-Ricard, *Une petite histoire de la physique*, Ellipses, Paris, 2001, p.90.

² Kamel Khirouni Noureddine Bouguila, *Mécanique quantique I*, Faculté des sciences de Gabès, Tunisie, Cours 2015-2016, <http://www.fsg.rnu.tn/imgsite/cours/MQ1-part1.pdf>; Etienne Klein, *La physique quantique*, Flammarion, Paris, 1996, pp.16-19.

ex. lumineuses sont en « opposition de phase ». Leur composition s'annule : la lumière ajoutée à la lumière donne de l'obscurité. En d'autres points, les vibrations sont en phase ; elle s'ajoutent pour donner une amplitude double, c'est-à-dire un éclaircissement maximal.

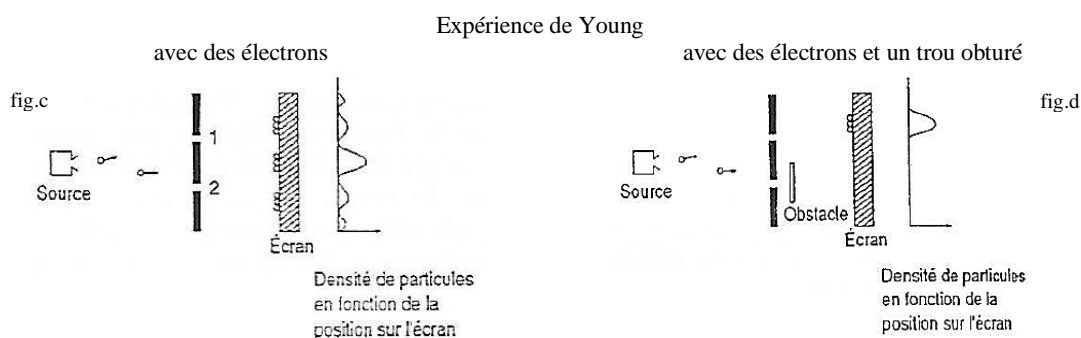
Mais que se passe-t-il si l'on remplace aujourd'hui la lumière par des « particules quantiques » ?

Deux enseignements peuvent être retenus à partir de l'expérience de Young avec des électrons.

Première expérience (fig.c). Un faisceau d'électrons est projeté un à un en direction d'un écran.

Dans une telle expérience, ceux qui s'imaginent que les particules sont des corpuscules s'attendent à retrouver le même résultat qu'avec des billes. Mais, ô surprise, on observe sur l'écran des interférences, signe d'un comportement ondulatoire ! Cependant, les franges d'interférences, caractéristiques des ondes, s'avèrent être le résultat d'une accumulation d'impacts successifs. Les électrons ne sont donc pas de purs corpuscules puisqu'ils forment des interférences lorsqu'ils arrivent en grand nombre. Ils ne sont pas non plus de pures ondes, puisqu'ils sont individuellement détectés comme de petites taches (qui finissent par tracer, en s'accumulant, une figure d'interférence. Le corpuscule est à la fois un corpuscule et une onde.

La seule façon d'expliquer le phénomène est de dire, comme le fait la physique quantique, que chaque électron a un comportement d'onde, ce qui le conduit à passer à travers les deux trous en même temps et à interférer avec lui-même. C'est cela la fameuse dualité onde-corpuscule du monde de l'infiniment petit.¹



Deuxième expérience. C'est une variante de la précédente. Elle consiste simplement à **interposer un obstacle derrière l'un des deux trous.** (fig.d)

Le résultat obtenu est cette fois-ci en accord avec le bon sens puisqu'il prend la forme d'une simple bosse derrière le trou resté ouvert. Il s'agit d'une figure de diffraction, mais l'onde, qui diffuse par le trou de l'ouverture, n'est pas une onde au sens classique, car on peut compter les impacts localisés sur l'écran. D'où le premier enseignement suivant :

Si la particule ne rencontre pas d'obstacle, elle conserve un comportement d'onde jusqu'à l'écran où elle interfère avec elle-même. En revanche, si elle se heurte à l'obstacle, elle redevient une particule et peut passer, comme telle, par le trou parce que, d'une manière ou d'une autre, elle « sait » que l'autre trou est obturé. [...] La matière qui nous constitue ressemble plus, par certains côtés, à de la pensée, qu'à de l'étendue.²

Le second enseignement qu'il importe de retenir est suggéré par une variante de l'expérience de Young. On insère **un détecteur d'électrons** derrière la plaque où sont percées les deux fentes (ou trous). Par ce dispositif d'éclairage, on peut marquer les électrons. Fermons l'une des deux fentes, celle du bas. On observe que les électrons se répartissent comme l'auraient fait des billes. Ouvrons-la à nouveau et fermons celle du haut. Les électrons se répartissent symétriquement par rapport aux électrons ayant passé par la fente du bas. Ouvrons maintenant les deux fentes. On n'observe plus d'interférences ... Etrange, non ? Dans quel pétrin ne nous sommes pas mis !

¹ E. Klein, *La physique quantique*, pp.19-22 ; M.-E. Berthon, *Les grands concepts scientifiques et leur évolution*, op. cit., pp.336-337.

² M.-E. Berthon, *Les grands concepts scientifiques et leur évolution*, p.337.

Si l'on cherche à savoir par quelle fente chaque électron est passé, on retrouve un comportement identique à celui des billes. [...] La question « par quel trou » est passé l'électron devient indécidable. Il n'est pas permis de supposer que l'on puisse simultanément observer les interférences et identifier la fente empruntée par chaque électron.¹

Le détecteur, qui mesure, est assimilable à un obstacle, à une interaction qui change la donne. C'est seulement lorsque l'on ne cherche pas à savoir, par quelle fente la ou les particules sont passées, qu'elles interfèrent. Si l'on effectue cette mesure, la figure d'interférence s'évanouit.

- Attendez. Juste une remarque. Votre dernier commentateur est bien mystérieux quand il dit que l'électron « savait » que l'autre trou était obturé avant que l'expérience ne soit concrètement activée. L'électron explore simultanément les deux chemins. L'électron, ou tout autre particule quantique comme par exemple le photon, aurait-il donc une conscience jusqu'à la prémonition ?

(Réponse de Roger Penrose)

Les rouages de la théorie quantique ne consistent pas à doter les particules d'un tel « don de voyance », mais simplement à rendre légitime la nature holistique et non locale de la fonction d'onde.

- La fonction d'onde ? Kesako ?

- On va y venir, mais laissons poursuivre avant ce grand savant : *Le fait de mesurer la « fonction d'onde » met en évidence sa nature holistique en ce sens que la particule ne se montre qu'en un seul endroit, son apparition en un point interdisant toute autre apparition simultanée ailleurs.²*

b) Le principe de superposition

A « cause » de la mesure, je m'y perds : où sont mes franges d'interférence ? Je suis comme Orphée qui a perdu son Eurydice en cherchant à voir ce qu'il était venu quérir. Mais, pourquoi se lamenter si, par ailleurs, je m'y retrouve. N'avais-je pas avant la tête embrouillée en tous sens ?

Celui qui peut le plus (passer par les deux fentes) ne peut pas toujours le moins (passer par telle ou telle fente). Un obstacle, un appareil de mesure s'interpose. Il s'y oppose comme le dieu des Enfers, Hadès, qui interdisait quiconque, qui a pénétré son royaume, d'en sortir vivant. Orphée a quand même su adoucir le monstre. Il a pu passer la porte sans souci. Il a pu voir sa bien-aimée (les franges d'interférence), mais c'est un fait : en perdant son Eurydice, il retrouve, lui, la lumière du jour. Il est désespéré. Il chante sa peine. Nulle autre jeune fille ne pourra jamais le consoler, mais voyons, sans la mesure, il n'est point, en dehors du rêve, de salut. Il n'est point de trajectoire, définie au cours du temps, comme un chemin continu et différentiable, qui autrement s'effondrait. Comment pourrai-je être capable de préciser le parcours de l'électron entre la source et l'écran ?

On imagine la même tragédie lyrique en droit en l'absence d'une décision à prendre dans un temps imparti. Il faut décider de descendre aux Enfers sans illusion. On y perdra quelque chose au retour. Quoi de plus précieux en effet que le rêve où la vie et la mort coexistent simultanément ? On y trouve un chat, celui de Schrödinger, que l'on ne peut pas plus caresser que ramener Eurydice. C'est le prix du dehors, de notre séjour sur terre, mais n'anticipons pas.



3



4

¹ E. Klein, *La physique quantique*, pp.23-24.

² R. Penrose, *A la découverte des lois de l'univers*, op. cit. chap.21 : La particule quantique, p.500.

³ *Orphée et Eurydice*, par Federico Cervelli, peintre italien du XVII^e siècle, installé à Venice. <https://fr.wikipedia.org/wiki/Eurydice>

⁴ Christos Gougoussis et Nicolas Poilvert, *Mes premiers pas en physique quantique*, Ellipses, Paris, 2007, p.149.

L'étrange onde qui traverse les deux fentes dans l'expérience de Young est la *fonction d'onde* ψ . C'est elle qui crée des franges d'interférence. Je ne peux combiner les concepts d'onde et de corpuscule en une seule image, mais je peux dessiner, en une dimension, cette fonction, représentant l'ensemble de ses valeurs en tout point x (fig.a). Je peux aussi la représenter, dans un **espace vectoriel** doté de ses propriétés habituelles : l'additivité de deux ondes et la multiplication de ces entités par un nombre (un scalaire). **Les ondes peuvent se superposer** et leur amplitude peut être double ou triple d'une onde donnée. (fig.b, où la fonction d'onde est autrement appelée, *vecteur d'état*, représentant comme vecteur un ensemble de nombres).¹

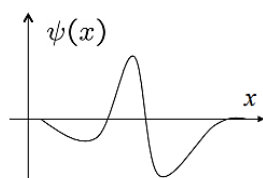


fig.a

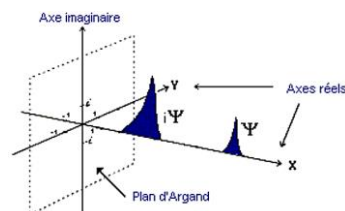


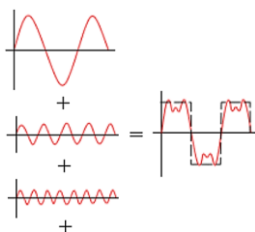
fig.b

fig.a : Cas de l'espace à une dimension paramétrée par la position $x \in \mathbb{R}$, ce qui veut dire que **la fonction d'onde ψ est représentée dans une direction particulière**. La fonction ψ est une fonction à valeurs complexes, continue et bornée : $\psi : x \in \mathbb{R} \rightarrow \psi(x) \in \mathbb{C}$ (le corps des complexes). Les valeurs de $\psi(x)$ sont prises en une infinité non dénombrable de valeurs de x .

fig.b : Le plan d'Argand (ou de Gauss) est le plan complexe (en raison des sinus et cosinus qui caractérisent une onde, les nombres complexes étant utilisés pour faciliter grandement les calculs, notamment celui de la superposition (addition) de deux ondes (se rappeler la formule d'Euler, reliant les fonctions trigonométriques, - sinus et cosinus - qui caractérisent une onde, et l'exponentielle complexe ; on verra toutefois plus loin que les nombres complexes ne sont pas ici qu'un outil de calcul). Le vecteur d'état complexe $i\psi$ est *le vecteur d'état ψ multiplié par le nombre i* .

- Avant de continuer, je veux comprendre par rapport à ce que je connais, ou appris à connaître. La superposition d'ondes me rappelle l'analyse harmonique qui étudie les fonctions périodiques. L'analyse de Fourier parvient à les décomposer en série de Fourier. Ne peut-on pas aussi les recomposer en une synthèse additionnelle ? N'est-ce point là une bonne analogie ?

- Dans un 1^{er} temps, oui. Cette analogie a été avancée, à des fins pédagogiques, par un auteur.² Le *vecteur d'état* peut être comparé à une onde composée de plusieurs ondes (revoir le schéma infra). Les ondes, qui entrent dans une telle addition, sont les *vecteurs propres (eigen values)*.



Les vecteurs propres indiquent, répétons-le, les directions possibles, celles qui sont **privilegiées** (i.e. celles dont **la direction demeure inchangée** par l'application $f : f(\mathbf{x}) = \lambda \mathbf{x}$ pour tout vecteur \mathbf{x} nul, λ étant la *valeur propre* associée au vecteur \mathbf{x}). Autrement dit, un vecteur propre peut être défini par un autre qui lui est proportionnel : par exemple, le vecteur propre $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ par rapport au vecteur proportionnel $\begin{pmatrix} 12 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$, sachant que $3 \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$

- Mais comment représenter le principe de superposition des ondes en mécanique quantique ?

- Le même auteur suggère la représentation suivante : un *état quantique*, ou un *paquet d'ondes*, comme *a superposition state, ψ_s , expressed as a sum of components of other states*, i.e. une superposition linéaire d'états propres et apte à se propager comme tel dans l'espace et le temps.

¹ *La physique quantique*, <http://www.astrosurf.com/luxorion/quantique-champ.htm>; *Au-delà de la physique ondulatoire : les principes généraux de la physique quantique*. http://www.phys.ens.fr/~dalibard/PHY311/2013/cours5_PHY311.pdf ; https://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~faure/enseignement/meca_q/cours.pdf

²http://www.faculty.umb.edu/gary_zabel/Courses/Parallel%20Universes/Texts/Quantum%20Indeterminism%20and%20the%20Wavefunction.htm

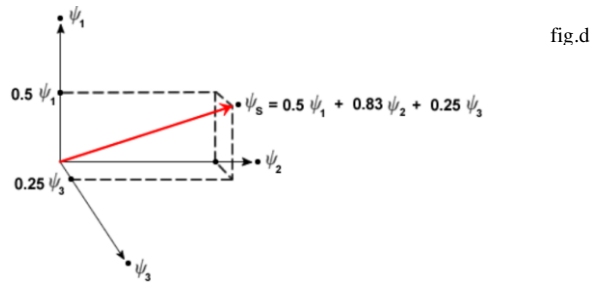
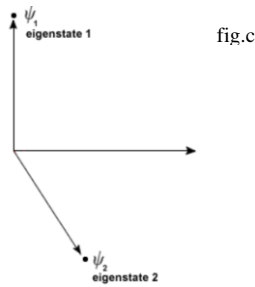


fig.a : les états possibles (*eigenstates*, états propres) sont représentés par des vecteurs orthogonaux (*eigenvectors*). La notion de vecteur est au fondement de l'algèbre linéaire qui traite des matrices. Les vecteurs propres sont orthogonaux dans le cas d'une matrice symétrique (matrice égale à sa transposée $A^T = A$: les lignes et les colonnes de même indice sont échangées). L'écriture matricielle de la mécanique quantique est due à Walter Heisenberg.

(§47
3/b)-iv)

fig.b : l'état quantique est représenté par la flèche rouge. Chaque état possible, comme composant, contribue *to the overall sum*. Les montants ne sont que des exemples. En normalisant : $0.5^2 + 0.83^2 + 0.25^2 = 1$. (Annexe I)

- Qu'est-ce qu'un *état*, un état possible ?

- L'*état quantique* d'un électron regroupe toutes les quantités qui peuvent caractériser ou quantifier un électron. Des quantités qui sont les mêmes pour tous les électrons comme la masse et la charge électrique, et des quantités qui peuvent varier d'un électron à un autre comme la position, vitesse, et le spin ou rotation sur soi-même qui ne peut prendre que deux valeurs.

Un *état quantique* peut faire l'objet de diverses représentations mathématiques, notamment la *fonction d'onde* $\psi(x)$, ou un *vecteur d'état*, dans un espace dit de Hilbert sous la forme $|\psi\rangle$. Un état $|\psi\rangle$ pourrait représenter par ex. l'état dans lequel se trouve l'électron d'un atome d'hydrogène à un moment donné.

*Le vecteur d'état [l'eigenvector, ci-dessus] est l'entité mathématique qui représente l'état physique d'un système quantique. Comme il vient d'être indiqué, en vertu du principe de superposition, les vecteurs d'état ont la propriété de pouvoir s'ajouter entre eux : la somme de deux vecteurs d'état possibles d'un système est aussi un vecteur d'état possible du système.*¹

- Fonction d'onde ou paquet d'ondes, vecteur d'état. Je ne comprends plus rien. Mon esprit est comme l'électron dans un nuage. Je n'arrive pas à me fixer sur un point précis. Vous passez d'une notion à l'autre sans explication. Vous annonciez un désembrouillage, mais jusqu'ici on n'y est plus. Cet échange de notions donne le tournis. Ce n'est pas une bonne préparation pour le droit !

- Je comprends. En fait, ce sont deux visions équivalentes, qui ont été développées par des physiciens différents, Schrödinger d'abord pour la fonction d'onde, et Dirac pour le vecteur d'état.

En *Annexe II*, vous verrez un tableau de correspondance entre ces deux types de représentation.

Avant de mieux préciser ces notions, sachez d'abord que ce n'est que *lorsque le système étudié se réduit à une particule – sans spin – unique que la donnée du vecteur d'état est équivalente à celle de la fonction d'onde*. Cette fonction caractérise l'état du plus simple des systèmes quantiques : une particule ponctuelle sans spin, i.e. sans moment cinétique ou angulaire intrinsèque. (Le moment cinétique joue, dans le cas d'un mouvement de rotation, un rôle analogue à celui de la quantité de mouvement (masse x vitesse) pour un mouvement rectiligne ou translation.)²

La vision de la fonction d'onde. Une fonction d'onde permet de décrire l'état d'une particule en fonction des coordonnées d'espace et de temps, $\psi(x, y, z, t)$, mais, pour ce qu'il en est de l'espace, il faut imaginer, comme dans votre esprit avant qu'il ne voit clair, **un objet étendu et non ponctuel**. Vous étiez comme dans un nuage, n'est-ce pas ? Et, pour ce qu'il en est du temps, il ne faut pas non plus s'attendre à y trouver un mouvement habituel : un qui représente un ensemble de positions successives, occupées par cet objet, sous la forme d'une droite ou d'une courbe.

¹ E. Klein, *La physique quantique*, op. cit., pp.48-49.

² B. Diu, *La physique mot à mot*, op. cit., « état quantique », p.226 ; « fonction d'onde », p.261 ; « spin », p.631.

(§47
2/-ii)

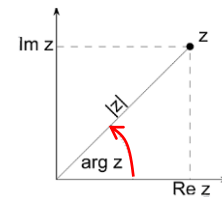
La fonction d'onde est solution de l'équation d'onde ou **équation de Schrödinger**. Nous n'en donnerons pas ici l'expression par son caractère trop long et technique à expliquer. On dira seulement que cette équation est une intégrale \int qui peut être réécrite sous la forme d'une équation aux dérivées partielles faisant intervenir un laplacien, $\Delta = \nabla^2$, et la constante de Planck réduite, $h/2\pi$, pour satisfaire aux contraintes dimensionnelles ignorées jusqu'alors en physique.¹

L'intégration \int indique une sommation, conformément au principe de superposition des ondes, mais il s'agit ici d'une somme continue, car on effectue la somme d'une infinité de termes infiniment petits. Les intégrales sont, par définition, des sommes continues.

La fonction d'onde est à valeurs intrinsèquement complexes (leur caractère est aussi intrinsèque que celui du spin qui tourne sur lui-même). L'intervention d'une fonction à variables complexes n'est pas qu'un intermédiaire de calcul. Le caractère ondulatoire de la fonction d'onde n'est pas

Il est rappelé que l'**argument** d'un nombre complexe désigne un angle appelé aussi **phase** (on peut ainsi considérer la différence de phase entre deux nombres complexes),

alors que le **module** d'un nombre complexe est le nombre réel positif qui mesure sa grandeur, sa distance à l'origine dans le plan complexe (Le module généralise la notion de **valeur absolue** d'un nombre réel).²



nécessairement à comprendre comme une oscillation de son amplitude ou intensité (ou puissance lumineuse s'il s'agit d'un photon), mesurée par le module du nombre complexe. *C'est l'argument de la fonction d'onde, mesuré autour d'un cercle unité du plan complexe, qui possède une nature ondulatoire. En théorie quantique, il est d'usage de désigner l'argument de la fonction d'onde comme sa « phase ».* La phase n'a d'ondulatoire que le fait qu'elle « tourne encore et encore ». Cette indication permet de mieux comprendre la fig.b supra qui représente la fonction d'onde oscillant dans une direction particulière avec un plan perpendiculaire à cette direction.

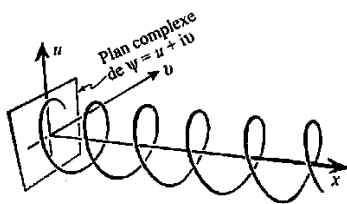


fig.e

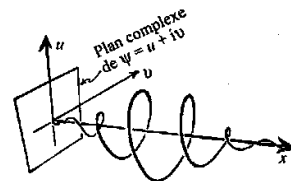


fig.f

fig.e et f : la fonction d'onde ψ d'une particule comme une fonction complexe de la position x ; fig. e : fonction d'onde en tire-bouchon ; fig.f : paquet d'onde.

Sur la fig. e, seule la direction x correspond à une véritable direction, ce qui n'est pas le cas des u et v qui ont été ajoutés pour représenter le plan complexe des valeurs que peut prendre la fonction ψ (si bien que la fig. représente $\psi = u + iv$ sur ce plan).³

L'expérience des deux fentes de Young montre que la fonction d'onde possède deux composantes correspondant au passage de l'électron par chacune des deux fentes. **La fonction d'onde totale est la somme des deux composantes, au sens de l'addition des nombres complexes.** Les ondes s'additionnent si elles sont en phase, ou s'annulent si elles sont en déphasage (ou différence de phase). De façon plus générale, les franges d'interférence et leurs relations de phase sont la conséquence de leur superposition. En vertu de ce principe, toutes les combinaisons linéaires des ondes sont aussi des états possibles.

*L'équation de Schrödinger admet un principe de superposition : si $\psi_1(x,y,z;t)$ et $\psi_2(x,y,z;t)$ en sont séparément des solutions, alors $\psi(x,y,z;t) = c_1\psi_1(x,y,z;t) + c_2\psi_2(x,y,z;t)$ en est aussi une solution, quels que soient les coefficients complexes c_1 et c_2 .*⁴

¹ J. Massicot, *Notions fondamentales de physique*, op. cit., pp.306-308. La constante de Planck relie notamment l'énergie d'un photon E à sa fréquence ν , soit $E = h\nu$. Elle est, depuis le 20 mai 2019, à la base de la définition du kilogramme. https://fr.wikipedia.org/wiki/Constante_de_Planck

² https://fr.wikipedia.org/wiki/Argument_d'un_nombre_complexe; https://fr.wikipedia.org/wiki/Module_d'un_nombre_complexe

³ R. Penrose, *A la découverte des lois de l'univers*, p.494.

⁴ Serge Haroche, « Une exploration au cœur du monde quantique », in Qu'est-ce que l'univers ? sous la dir. d'Yves Michaud, op. cit., vol.4,

- L'image de la fonction d'onde que vous donnez ne regarde qu'une certaine direction spatiale. Et dans les trois dimensions ?

- La visualiser en 3D est a priori imaginable, mais, comme l'observe Penrose, c'est plus difficile que cela en a l'air, *car il nous faut ajouter les deux dimensions du plan complexe en plus des trois dimensions spatiales – ce qui nous en donne cinq en tout !* La fonction d'onde est *une fonction invisible que nous imaginons tapie dans l'ombre de nos équations*. C'est Eurydice aux Enfers, invisible aux yeux d'Orphée. Une fonction fantôme qui a des effets d'interférence et dont l'évolution dépend principalement des variations de la phase (de l'angle) d'un endroit à un autre.¹ L'équation de Schrödinger décrit l'évolution dans le temps d'une particule massive non relativiste à partir de son énergie potentielle, par ex. celle d'un électron, chargé négativement, à une certaine distance d'un proton, chargé positivement, d'un atome d'hydrogène. Une différence de potentiel se traduit par une augmentation de vitesse (et donc d'énergie cinétique) de l'électron.

(Pour continuer les analogies qui synthétisent les choses, il vaut de savoir que l'équation de Schrödinger remplit le même rôle en mécanique quantique que la relation fondamentale de la dynamique en mécanique classique, $F = m\gamma$, qui décrit l'évolution de la position d'un objet en considérant, elle, par contre, sa trajectoire. L'équation de Schrödinger est postulée comme celle de Newton. Sa validité est prouvée par les connaissances consécutives que l'on peut en tirer.)

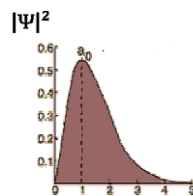
(§27
4/c)

Si la fonction d'onde ne semble pas avoir en elle-même de signification physique, on considère cependant que *le module au carré de la fonction représente la densité de probabilité de trouver le système dans un volume dv de l'espace au temps t lorsqu'il se trouve dans l'état décrit par ψ* .² Nous sommes dans le cadre d'une variable X continue, et non plus d'une variable X discrète, comme un tirage de dés ou la date de la désintégration d'une particule où la probabilité est définie comme la fréquence d'apparition d'une ou plusieurs issues ou éventualités possibles.

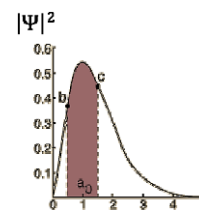
Le lecteur se souvient de ce qu'est une *densité de probabilité* : une fonction qui permet de représenter une loi de probabilité sous forme d'*intégrale*, tenant précisément au fait que la variable considérée est *continue*. Pensez à la densité de la loi normale qui est connue. La courbe de cette densité est la courbe de Gauss, ou courbe en cloche ; l'aire sous la courbe vaut 1. Intuitivement, si une loi de probabilité a pour densité f , alors l'intervalle infinitésimal $[x, x+dx]$ a pour probabilité $f(x) dx$, c'est-à-dire le rectangle infiniment émacié ayant pour base l'intervalle dx .

(C'est la $n^{\text{ième}}$ incise ou () : je me calme après, mais je voudrais être sûr d'être bien compris)

Voici la densité radiale, ou densité de probabilité de présence sur une sphère de rayon (notre nuage, si vous voulez). **La densité indique la présence de l'électron dans un certain intervalle**, car la probabilité de trouver l'électron à un rayon précis, est nulle...³. (Pour qui remobiliser encore sa mémoire, cette probabilité élémentaire est définie comme la dérivée, par rapport à x , de la probabilité d'avoir X plus petit que x , i.e. $P(x) = d/dx \text{ Prob}(X \leq x)$.)



Densité de probabilité radiale d'un électron. ψ^2 ne dépend pas du temps (\Leftrightarrow état stationnaire: stable vis-à-vis du temps)



Probabilité de trouver l'électron entre le rayon b et le rayon c en intégrant la densité ψ^2 entre b et c

La *densité de probabilité* est, sous la courbe d'une fonction de probabilité, une *aire* qui impose les propriétés suivantes à la fonction d'onde :

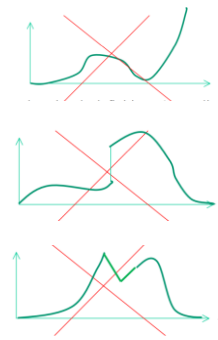
p.574 ; B. Diu, *La physique mot à mot*, op. cit., p.261.

¹ R. Penrose, *A la découverte des lois de l'univers*, p.495, 492 et 503.

² http://alpha.univ-mlv.fr/meca/chap2_2014.pdf

³ *Ibid.*

- être de carré sommable, c'est-à-dire ne doit pas tendre vers l'infini [\Leftrightarrow l'intégrale de la probabilité dans tout l'espace existe \Leftrightarrow la probabilité intégrée sur tout l'espace de trouver la particule doit être égale à 1]
- être continue dans son domaine de définition, c'est-à-dire ne prendre qu'une seule valeur en un point :
- la dérivée 1^{ère} doit être continue dans son domaine de définition [cette dérivée, qui décrit la variation instantanée, représente la probabilité élémentaire] :



Exemples de fonction d'onde : voir l'Annexe III,

étant rappelé que la fonction d'onde est un nombre complexe dont le carré du module donne la probabilité de trouver la particule dans un volume dv de l'espace au temps t ; le volume de l'espace de la particule est appelé son *orbitale* (toutes les positions à l'intérieur de la sphère).

- Suivant cette interprétation probabiliste, la fonction d'onde apparaît n'être au fond qu'une onde probabilité ?

- Ce n'est pas l'avis de Penrose qui estime que cette appellation n'est pas satisfaisante. Nous reprenons ses arguments essentiels qui permettent comprendre en profondeur une telle fonction

Pour commencer, ψ est complexe et ne peut donc en aucun cas être une probabilité. De plus, la phase de ψ (à un facteur global près) est un ingrédient essentiel à l'évolution de Schrödinger. Même $|\psi|^2$ (ou $|\psi|^2/|\psi|$) ne me paraît pas être envisageable comme une « onde probabilité ». [...] Il n'y a dans $|\psi|$ aucune information qui nous indiquerait la direction du mouvement de l'onde ! Seule la phase confère donc à cette onde son caractère ondulatoire. →

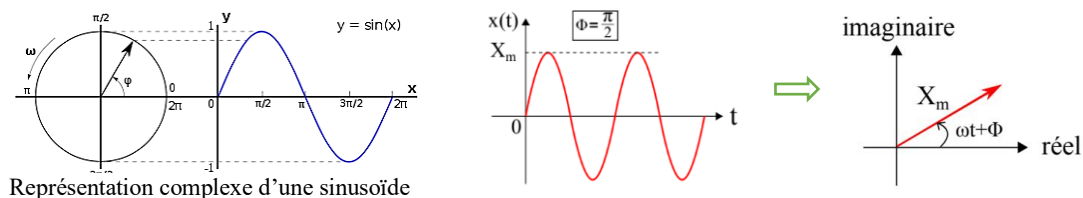
En outre, les probabilités ne sont jamais négatives, et encore moins complexes. Si la fonction d'onde n'était qu'une onde de probabilités, alors les interférences destructives n'auraient jamais lieu. Or ces annulations sont justement un aspect caractéristique de la mécanique quantique, illustré de manière flagrante par l'expérience des deux fentes !²

Roger Penrose conclut sur l'importance capitale en physique de la manière dont varie la phase. L'interprétation probabiliste de la fonction d'onde, celle des coefficients linéaires du principe de superposition, initiée par Niels Bohr, ne saurait donc épuiser le sujet, même s'il demeure vrai que la position d'une particule de l'onde qui travers les fentes de l'expérience de Young est régie par une loi de probabilité, ce qui ne lui permet toujours pas de lui attribuer une quelconque trajectoire.³

Le vecteur d'état.

(§44
3/b)-iv)

Il convient de remarquer, au préalable, que la notion de vecteur n'est pas une surprise dans l'étude des ondes ordinaires. Que l'on se souvienne de la représentation par Fresnel, au début du XIX^e siècle, des grandeurs sinusoïdales. Une telle représentation est allée jusqu'à faire correspondre un mouvement ondulatoire, comme peut l'être un signal, par un nombre complexe avec ses deux coordonnées comme suit :



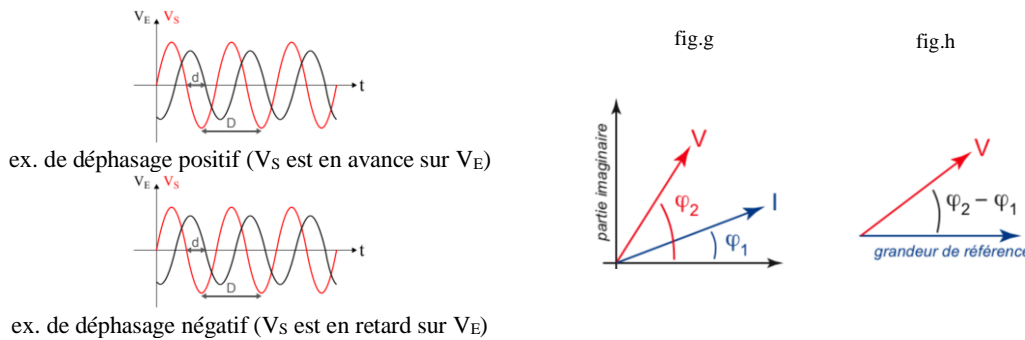
¹ Ibid.
² R. Penrose, *A la découverte des lois de l'univers*, p.503. Nous soulignons.
³ François Lurçat, *Niels Bohr et la physique quantique*, Seuil, Paris, 2001, p.148.

$x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi)$ où X_m est l'amplitude, ω la pulsation (la vitesse angulaire) et φ la phase à l'origine de la grandeur, sachant que $\omega = 2\pi/T$ (avec T la période) ou $\omega = 2\pi$ et $f = 1/T$.

Le lien entre le signal sinusoïdal et sa forme complexe renvoie au lien entre les cosinus ou sinus et la fonction exponentielle : $x(t) = X_m e^{i(\omega t + \varphi)} = X_m e^{i\omega t} e^{i\varphi}$. L'expression $\mathbf{X} = X_m e^{i\varphi}$ définit précisément ce que l'on appelle une **amplitude complexe**. D'où $x(t) = X e^{i\omega t}$. Ainsi, toutes les informations dont nous avons besoin pour reconstituer le signal réel sont contenues dans l'amplitude complexe $\mathbf{X} = X_m e^{i\varphi}$. Son module (X_m) est égal à l'amplitude de la fonction sinusoïdale (A) et son argument à la phase initiale de la fonction (φ_0).¹

C'est en ce sens que l'on peut dire, à propos de l'expérience de Young, même s'il s'agit d'ondes non ordinaires, que ce sont *les amplitudes complexes qui interfèrent*, la phase autant que le module.² Ce que l'on nomme **amplitude de probabilité** est ce vecteur composé d'un module et d'une phase, représenté par un nombre complexe. Le module au carré de la fonction que représente la probabilité (ou la densité de probabilité) est le carré du module de cette amplitude, assimilable grosso modo à une probabilité de détection de la particule en un endroit donné.

Le recours aux vecteurs permet de représenter l'interférence des amplitudes complexes et leurs relations de phase :



Lorsque l'on s'intéresse aux phases des grandeurs, on peut choisir de reporter les grandeurs de manière absolue dans le plan complexe (fig.g).

Lorsque l'on s'intéresse aux déphasages entre les grandeurs, on peut choisir de reporter les grandeurs de manière relative (fig.h). L'une des grandeurs est choisie en référence : ce choix peut être totalement arbitraire mais est en général dicté par le problème.³

Le principe de superposition ne signifie pas autre chose que la sommation des amplitudes complexes de probabilité, autant dans la vision de la fonction d'onde ou que dans celle du vecteur d'état. *Onde* et *état* sont quasi synonymes, la fonction d'onde pouvant être appelée aussi fonction d'état, mais il y a des fonctions d'état (avec des spins) qui ne sont pas des fonctions d'onde. C'est là que la notation de Dirac intervient. Elle serait plus générale et légère.

Un élément quelconque de l'espace des états, ε , est appelé vecteur-ket ou plus simplement ket. On le note par le symbole $| \rangle$, en mettant à l'intérieur un signe distinctif permettant de le différencier des autres états. Par exemple, si le ket est associé à un état décrit par une fonction $\psi(r)$, on pourra le noter : $|\psi\rangle$: ket psi. [r désigne la position de la particule dans l'espace.]

Il n'est ici question que de vecteur. Le vecteur *ket* ou *ket* est un vecteur de l'espace (infini) de Hilbert des états ε . Ce sont ces vecteurs qui sont les états propres, dont nous avons préalablement parlé, qui forment un espace vectoriel complexe. Ainsi, si λ_1 et λ_2 sont des nombres complexes quelconques et $|u_1\rangle$ et $|u_2\rangle$ sont deux kets, alors la combinaison linéaire $|v\rangle = \lambda_1 \cdot |u_1\rangle + \lambda_2 \cdot |u_2\rangle$ est aussi un ket qui appartient au même espace des états que les kets $|u_1\rangle$ et $|u_2\rangle$. Dans cette combinaison, les kets $|u_1\rangle$ et $|u_2\rangle$ forment une base.⁴ Nous reverrons ce point.

¹ <http://www.physagreg.fr/electrocinétique/ec4/EC4-essentiel.pdf>; https://fr.wikibooks.org/wiki/électricité/Le_régime_sinusoïdal

² S. Haroche, « Une exploration au cœur du monde quantique », p.376.

³ https://fr.wikibooks.org/wiki/électricité/Le_régime_sinusoïdal

⁴ http://alpha.univ-mlv.fr/meca/chap2_2014.pdf

Une telle combinaison traduit le principe de superposition, autant que le traduit la sommation des amplitudes de probabilité. Dans la superposition $w\psi+z\phi$ de deux états quantiques orthogonaux, ψ et ϕ , les coefficients complexes de pondération w et z représentent de telles les amplitudes.

(§47
3/a)-iii)

Le vecteur *ket* est un vecteur colonne en algèbre linéaire, étant rappelé au lecteur qu'un vecteur colonne non nul W d'une matrice $[A]$ est un vecteur propre de cette matrice tel que $[A]W = \lambda W$, où λ est un nombre (réel ou complexe) que l'on appelle valeur propre. λ est ici un complexe. **Le propre d'un vecteur propre indique une direction privilégiée** comme on ne cesse de le dire.

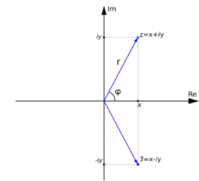
Le ket décrit l'état : « la particule est à la position r ». On peut faire ici aussi la correspondance avec la fonction d'onde. L'ensemble des kets $|r\rangle$, obtenus en faisant varier r dans \mathbb{R}^3 , forme l'espace vectoriel ε des états quantiques de la particule en théorie de Schrödinger : $\varepsilon = \{|r\rangle\}$ avec $r \in \mathbb{R}^3$. Dans cet espace de dimension infinie, on passe continûment d'un vecteur *ket* de base à l'autre (autrement dit, la base de l'espace vectoriel qui le représente est une base continue).¹

Les *kets* décrivent des états quantiques, mais ils ne sont pas seuls dans l'histoire. Pour chaque *ket*, ou vecteur colonne, correspond un vecteur ligne, appelé *bra* et noté $\langle \psi | : \text{bra psi}$. Le *bra* est le nombre complexe conjugué du vecteur *ket*.

(§27
4/c)

Le conjugué d'un nombre complexe z est le nombre complexe formé de la même partie réelle que z mais de partie imaginaire opposée, soit $\bar{z} = a - ib$ par rapport à $a + ib$; on écrit \bar{z} ou z^* . Dans le plan, le point \bar{z} est symétrique du point z par rapport à l'axe des abscisses. Le module du conjugué reste inchangé.

Si $z \in \mathbb{C}$ (le corps des complexes), son conjugué est tel que l'on a $z \cdot \bar{z} = |z|^2 = a^2 + b^2$. En effet : $(a + ib)(a - ib) = a^2 - a \cdot b \cdot i + a \cdot b \cdot i + b^2(-i^2) = a^2 + b^2$, sachant que $i^2 = -1$



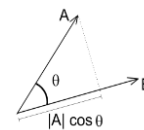
Arrêtons-nous, à l'occasion de ce rappel, sur $z \cdot \bar{z} = |z|^2 = a^2 + b^2$ qui aide à mieux saisir pourquoi on parle du « carré des amplitudes » comme si cette idée sortait d'où on ne sait d'où. Comme le précise Penrose :

une expérience ayant pour but de distinguer deux états quantiques orthogonaux, ψ et ϕ , trouverait ψ avec une probabilité $\bar{w}w = |w|^2$, et ϕ avec une probabilité $\bar{z}z = |z|^2$. Nous prenons donc le carré des modules des amplitudes pour obtenir les probabilités. Cela vaut également pour la superposition d'un plus grand nombre d'états.²

La mécanique traduit la propriété de conjugaison des nombres complexes en disant que le vecteur *bra* est le vecteur dual du vecteur *ket* dans l'espace dual ε^* de l'espace des états. Les *bras* forment aussi un espace vectoriel complexe : une combinaison linéaire à coefficients complexes de *bras* est un autre *bra*. Ce que Dirac nomme *bracket* est le produit scalaire entre le vecteur *ket* et le vecteur *bra*. Le produit scalaire *bra* \times *ket* produit ou égal un nombre complexe.³

(§4
Ann.I)

Le produit scalaire est l'opération qui associe à deux vecteurs un nombre, réel ou complexe. Le produit scalaire $|A| \cos \theta$, où $|A|$ désigne la norme du vecteur OA , représente la projection orthogonale du vecteur OA sur le vecteur OB . Si l'un des deux vecteurs est nul, le produit scalaire est nul. **Le produit scalaire est également nul lorsque les deux vecteurs sont orthogonaux.**



Le produit scalaire de deux kets $|\psi\rangle$ et $|\phi\rangle$ est noté $\langle \psi | \phi \rangle$. Le vecteur *bra*, $\langle \psi |$, écrit à gauche est le vecteur conjugué ou l'élément de l'espace dual de l'espace des états ket, $|\phi\rangle$. *On voit la force de la notation de Dirac qui traduit par une fusion des barres du bra et du ket le produit scalaire. L'origine des noms bra et ket provient de l'anglais bracket qui signifie crochet.⁴*

Cette notion de produit scalaire, rassemblant *bra* et *ket*, est incontournable. Elle permet d'abord de définir cette expression mystérieuse pour le profane qu'est *un espace de Hilbert* comme un espace vectoriel complexe possédant une opération de produit scalaire $\langle | \rangle$ dont la valeur est un nombre complexe qui satisfait un certain nombre de propriétés dont on fera grâce le lecteur.⁵

¹ https://quantique.u-strasbg.fr/lib/exe/fetch.php?media=fr:pageperso:ef:cours_outils_mathematiques_e_fromager.pdf

² R. Penrose, *A la découverte des lois de l'univers*, p.524.

³ http://www.phys.ens.fr/~dalibard/PHY311/2013/cours5_PHY311.pdf

⁴ <http://lptms.u-psud.fr/membres/groux/enseignements/MecaQNotationDirac.pdf>

⁵ R. Penrose, *A la découverte des lois de l'univers*, pp.517-518.

(§46
3/c)ii)

Nous retrouvons la notion d'espace vectoriel réel (ici, complexe avec l'espace de Hilbert), qui permet de mesurer des longueurs et des angles et de définir une orthogonalité. Cette notion de produit scalaire permet aussi de saisir l'évolution unitaire de la fonction d'onde de Schrödinger.

La fonction d'onde d'une particule (sans spin) est, avons-nous dit, une intégrale, une intégrale sur tout l'espace de la densité de probabilité $|\psi(x)|^2$ de trouver, par une mesure, la particule en x . Cette évolution est linéaire (cf. l'additivité et de multiplication par un scalaire), mais elle préserve aussi le produit scalaire $\langle\phi|\psi\rangle$ entre deux éléments de l'espace de Hilbert. Dit autrement, elle laisse $\langle\phi|\psi\rangle$ constant dans le temps : $d\langle\phi|\psi\rangle=0$. [...] Le taux de variation d'un produit scalaire $\langle\phi|\psi\rangle$ vaut zéro. Il en découle que $\langle\phi|\psi\rangle$ reste invariant dans le temps même si $|\phi\rangle$ et $|\psi\rangle$ subissent individuellement l'évolution de Schrödinger pour un même Hamiltonien [l'opérateur mathématique qui permet de décrire l'évolution d'un système physique au cours du temps].

Une des propriétés de l'espace d'Hilbert est $\langle\phi|\psi\rangle = \langle\psi|\phi\rangle^*$, l'étoile signifiant le produit scalaire conjugué. Quant à l'Hamiltonien, dont la notion n'a pas encore été définie, notons à ce stade que l'équation de Schrödinger lui fait jouer le rôle de générateur infinitésimal des translations dans le temps, ce qui garantit le respect de la causalité.¹

Le produit scalaire est constant comme l'est autant le module $|\psi|$ dans tout l'espace-temps (d'où l'importance de la phase, elle, variable, comme le rappelait Penrose). L'état quantique peut être vu ainsi comme « immuable » alors que le système subit de véritables transformations physiques. Nous devons donc voir la fonction d'onde ou le vecteur d'état dans son ensemble. Les différentes parties du système n'ont pas d'état quantique individuel. Ils ne sont que des éléments d'un seul et même « tout ».² Quelle que soit sa représentation en onde ou en vecteur d'état, on est en présence d'une entité « holistique » due à la superposition d'états ou de vecteurs dont chacun représente une position dans l'espace, le carré de son module donnant la probabilité de présence.

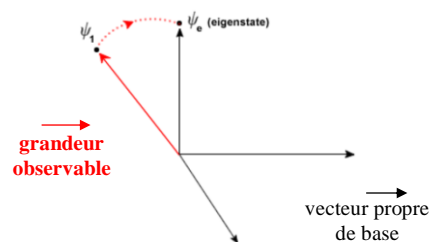
c) La réduction du paquet d'onde ou du vecteur d'état

Suivant l'expérience des deux fentes de Young, l'onde de l'électron (ou du photon) se propage en explorant deux chemins en même temps. La particule explore les deux chemins possibles à la fois. Mais gare, comme Orphée, si on s'aventure à savoir lequel. Dame nature ne se laisse pas faire. La mesure dissout la forme ondulatoire de la particule qui diffuse en principe dans tout l'espace.

On observe un « effondrement » (*collapse*) de la fonction d'onde ou de « réduction du paquet d'onde » à un seul état, mais comment décrire, avec l'outil mathématique, un tel phénomène ?

Cet effondrement a l'allure d'un « saut », entendant par là qu'à l'occasion de la mesure d'une grandeur (par ex. la position ou l'impulsion) d'une particule, l'état du système a changé brutalement. Il a sauté de $|\psi\rangle$ à un vecteur propre de base $|a_i\rangle$. On dit que l'état du système a été réduit. Eurydice, morte et vivante, a rendu l'âme. La fig. infra en donne une idée abstraite :

Il y a en définitive deux modes d'évolution de l'état des systèmes :
l'un, qui prévaut entre deux mesures, est continu, déterministe [au niveau du moins des probabilités de présence], continu, et conforme à l'équation de Schrödinger [qui décrit, selon sa propre métaphore pour faire comprendre la fonction d'onde, un chat mort et vivant] ;
l'autre, qui prévaut au moment d'une mesure, est stochastique [aléatoire] et discontinu.³



Sur la fig. illustrant *the quantum jump to an eigenstate*: le système apparaît to "jump" to a particular eigenstate, équivalent, selon le dessinateur, to the ball coming to rest in the roulette wheel dans un casino (a quantum casino...). Il s'agit d'une suggestion de saut plutôt que d'un saut réel : *this apparent "jumping" might well be just an illusion.*⁴

¹ Ibid., p.519 ; Etienne Klein, *L'évanescence de la notion de cause en physique*, sans date, <https://hps.master.univ-paris-diderot.fr/sites/hps.master.univ-paris-diderot.fr/files/Causalite.pdf>

² R. Penrose, *A la découverte des lois de l'univers*, p.497, 515 et 520.

³ Michel Bibol, *Mécanique quantique. Une introduction philosophique*, Flammarion, Paris, 2008, p.205. Les crochets sont nôtres.

⁴ http://www.faculty.umb.edu/gary_zabel/Courses/Parallel%20Universes/Texts/Quantum%20Indeterminism%20and%20the%20Wavefunction

Entrons dans l' « enfer » de la physique pour saisir sur le vif le saut autant que le raisonnement.

Evacuons d'abord le parallèle entre le principe de superposition quantique et l'analyse et la synthèse d'une onde récurrente ordinaire en une somme de sinusoides (fondamentale et harmoniques). L'analogie n'avait qu'une vertu éclairante qui ne doit pas nous faire oublier ses limites. Ou plutôt non : gardons la même image en disant que la réduction du paquet d'onde est équivalente au fait de ne pouvoir conserver qu'une simple harmonique de l'onde composite.¹

Revenons ensuite sur le produit scalaire qui permet de saisir l'évolution de la fonction d'onde. Cette fonction représente un vecteur d'état, un ket. Nous savons que, pour chaque ket, ou vecteur colonne, correspond un vecteur ligne, appelé bra. Le bra est le nombre complexe conjugué du vecteur ket. En pratique, on se sert, disent les spécialistes, des bras, associés aux kets, quasi uniquement pour calculer le produit scalaire de deux kets, $|a\rangle$ et $|b\rangle$. **On passe par ce que l'on appelle le produit hermitien $\langle a | b \rangle$ en raison de la présence de vecteurs complexes (un vecteur dual ou conjugué sert à effectuer le produit scalaire avec un autre vecteur), mais ce sont bien deux kets, ou deux vecteurs d'état, dont on fait le produit scalaire.**

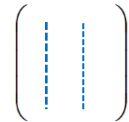
Autrement dit, le produit scalaire de deux kets se traduit sous forme du produit d'un bra et d'un ket de la façon simple suivante :

$$\left(\text{Bra } \langle a | \right) \left(\text{Ket } | b \rangle \right) = \lambda \quad \langle a | b \rangle = \text{scalaire}$$

Le vecteur colonne ket est composé de coefficients complexes c_i qui sont les composantes ket du vecteur dans une base donnée. Dans l'espace dual, le vecteur ligne bra est composé de coefficients complexes c_i^* qui sont ses composantes bra dans sa propre base.²

Au vu de cette présentation (que je n'oserai comparer à un tableau de peinture), le produit scalaire de deux kets peut s'interpréter comme l'application d'un bra sur un ket. **C'est un produit matriciel d'un vecteur ligne (en prenant le bra d'un 1^{er} vecteur) et d'un vecteur colonne (en gardant le ket de l'autre vecteur). Quelle pourrait être alors la matrice ?** Dans l'espace des états en dimension 3 par ex., rapporté à une base comprenant trois vecteurs kets de base et qui permet de décomposer un vecteur ket quelconque, la matrice sera une matrice carrée (3,3).

Chaque colonne de la matrice A correspond à l'image d'un vecteur de base, $|u_i\rangle$. La première colonne est donc $A|u_1\rangle$, la seconde $A|u_2\rangle$ et la troisième : $A|u_3\rangle$. Chaque colonne représente donc ces vecteurs dans une même base donnée : $|u_1\rangle, |u_2\rangle, |u_3\rangle$.



Les vecteurs colonnes sont les vecteurs propres de la matrice exprimées en fonction des trois vecteurs de base $|u_1\rangle, |u_2\rangle, |u_3\rangle$. Ces vecteurs ne changent pas si on change de base, par ex. $|u'_1\rangle, |u'_2\rangle, |u'_3\rangle$. Il suffit de connaître les règles de changement de base. Par ex., dans une base de deux vecteurs, $|u'_1\rangle = |u_1\rangle + |u_2\rangle, |u'_2\rangle = |u_1\rangle - |u_2\rangle$. A partir de ces règles, on change, dans la matrice, la représentation des vecteurs colonnes, i.e. les vecteurs propres, dans la nouvelle base.

(§16
2/-ii)

Importance d'une base

Un ket, représentant l'état d'un système quantique, a une existence propre. Cependant, pour faire des calculs, il est nécessaire de le représenter dans une base. Autrement dit, on doit définir ses coordonnées c'est-à-dire ses composantes. La décomposition d'un vecteur suggère implicitement l'existence de cette notion. On le voit ici encore, la donnée d'une base est un préalable à toute analyse d'un système physique. On opère, comme en maths, à partir d'un système de coordonnées. Descartes en avait démontré la fécondité dans sa méthode analytique qui supposait connue la solution en remontant, grâce à ce système, à ses conditions de réalisation.

(§46
3/a-iv)

Faut-il rappeler à nouveau (- s'il vous plaît, oui !) qu'un vecteur propre est un vecteur qui redonne le vecteur de départ à une constante près. Le vecteur propre conserve, par définition, la direction. La constante de proportionnalité, qui est ici un nombre complexe, s'appelle, si on ne l'a pas oublié, la valeur propre. Nous sommes bien en terrain d'algèbre linéaire ou proportionnelle. Pour trouver les

n.htm
¹ Ibid.

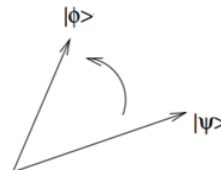
² http://www.phys.ens.fr/~dalibard/PHY311/2013/cours5_PHY311.pdf; <http://alpha.univ-mlv.fr/meca/chap7.pdf>

valeurs propres, il faut résoudre l'équation caractéristique : $\det(A - \lambda I) = 0$. Une telle équation prendra, en mécanique quantique, la forme similaire suivante : $\det(\hat{A}|\psi\rangle = \lambda|\psi\rangle$, la lettre λ définissant la ou les valeurs propres sous forme de nombres réels ou complexes.

(Annexe IV)

La matrice définit un opérateur de mesure \hat{A} (avec un chapeau pour le distinguer des nombres complexes du vecteur colonne) applicable à des observables, i.e. à des quantités qui vont décrire les résultats des mesures effectuées sur le système physique. En mécanique quantique, les observables en général, outre la position, la quantité de mouvement (ou l'impulsion), le spin et l'énergie. On dit *une observable* pour ne pas dire toujours grandeur observable ou mesurable.

Nous avons déjà rencontré de nombreux opérateurs au cours de notre travail (de sommation Σ , de multiplication Π , de dérivation d/dx ou ∂_x , d'intégration \int , ... Ici, l'opérateur \hat{A} agit sur les éléments de l'espace de Hilbert (l'espace des états possibles) en transformant un vecteur (un *ket*) en un autre vecteur (un autre *ket*). Cf. le schéma ci-contre qui les transforme. Ce ne sont que des exemples de vecteurs kets.



$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} -3i \\ 2+i \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$|\varphi\rangle = \begin{pmatrix} 2 \\ -i \\ 2-3i \end{pmatrix}$$

Sur la *fig. supra*, on voit comment la projection se présente pour le produit scalaire $\langle \varphi | \psi \rangle$ entre les deux kets $|\varphi\rangle$ et $|\psi\rangle$. Le vecteur $|\psi\rangle$ est « projeté » suivant la direction du vecteur $|\varphi\rangle$ produisant un vecteur colinéaire à $|\varphi\rangle$ avec un facteur de proportionnalité qui n'est autre que le produit scalaire qui multiplie le vecteur $|\varphi\rangle$.¹ La projection de $|\psi\rangle$ sur $|\varphi\rangle$ détermine le coefficient a_i de la décomposition de $|\psi\rangle$ sur la base de $|\varphi\rangle$: $|\psi\rangle = a_1|\varphi_1\rangle + a_2|\varphi_2\rangle + \dots + a_n|\varphi_n\rangle$. La projection du vecteur $|\psi\rangle$ sur la base de $|\varphi\rangle$ permet ainsi de préciser son action sur $|\varphi\rangle$.

C'est cette projection qui représente un « saut » occasionné lors d'une mesure de la position d'une particule. Celle-ci « saute » vers un état (généralement différent) localisé à une position donnée – c'est-à-dire vers un état qui est un vecteur propre de l'opérateur de position.²

Le saut est provoqué par la mesure, l'appareil de mesure, mais une telle mesure requiert que les vecteurs propres soient orthogonaux entre eux. Les vecteurs propres d'une observable doivent pouvoir former **une base orthonormée possible de l'espace des états \mathcal{E}** . (Base orthonormée : base formée de vecteurs normalisés formant entre eux un angle de 90°). Ce sont eux qui permettent de décomposer un état quantique quelconque, représenté par un vecteur de l'espace de Hilbert, en une combinaison d'états propres. Chacun de ces états est un état possible résultant de la mesure. Ces valeurs possibles, qui définissent les paramètres physiquement observables, sont les valeurs propres de la matrice, mais ces valeurs propres deviennent **des nombres réels**.

Jusqu'à preuve du contraire, on n'a jamais obtenu de nombres complexes dans une mesure d'une expérience physique. Imaginez qu'un appareil radar vous dise que la vitesse de la voiture qui vient d'être « flashée » était de $23i$ mètres par seconde ! Alors là vous dites 1) soit il faut que j'arrête de fumer n'importe quoi, soit 2) l'appareil de mesure a un sérieux problème.³

Pour des vecteurs soient orthogonaux, il faut que leur produit scalaire soit nul : $\langle \varphi | \psi \rangle = 0$. Mais, observe Penrose plus que d'autres, une telle égalité *implique tout bonnement que la probabilité d'un tel saut est nulle. Nous voyons donc que lors d'une mesure, l'état du système ne passe jamais directement vers un état orthogonal. Seuls les états finaux possibles sont orthogonaux.*⁴

Avant la mesure, les vecteurs propres n'étaient pas orthogonaux, i.e. indépendants ; ils ne le sont qu'à la mesure.

(Annexe V, pour qui veut savoir un peu plus sur la mesure qui exige un opérateur, représenté par une matrice diagonalisable ayant la *propriété d'hermiticité* allusivement évoquée. Cette diagonalisation spécifique garantit que les valeurs propres de la matrice sont des nombres réels)

¹ D. Angel, M. Magro, P. Pujol, *Physique et outils mathématiques : méthodes et exemples*, EDP sciences., Paris, 2008, p.314.

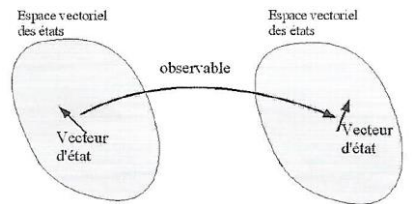
² R. Penrose, *A la découverte des lois de l'univers*, op. cit., p.512.

³ C. Gougoussis et N. Poilvert, *Mes premiers pas en physique quantique*, op. cit, p.45.

⁴ R. Penrose, *A la découverte des lois de l'univers*, op. cit., pp.523-524.

- Vous pourriez donner des exemples de mesure pour qu'une telle opération soit enfin concrète !

- Vous en avez en *Annexe VI* où vous verrez des exemples de produit scalaires dans le cadre d'une base orthonormée (et un contre-exemple qui ne satisfait pas la condition d'orthogonalité). Avant de conclure ce point en physique, contentons-nous du schéma suivant qui montre comment une observable associée à chaque vecteur d'état (dans sa base ou repère vectoriel) un autre vecteur d'état, orienté différemment (dans sa propre base ou repère vectoriel) :



Dernier mot : tout vecteur peut se décomposer en une base orthonormée (comme toute fonction d'onde peut se décomposer sur une base de fonctions orthonormées). Cependant, une base, fût-elle orthonormée, n'est, comme toute base, nullement exclusive. Elle peut tourner, autour d'une même origine, en subissant elle-même une rotation. (*fig.a*) Elle peut aussi changer à chaque mesure lors de l'évolution de l'onde tant *cette évolution dépend de manière cruciale des variations de la phase [l'angle] d'un endroit à l'autre.*² (*fig.b*).

fig.a

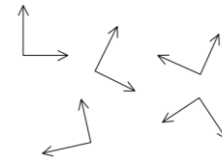
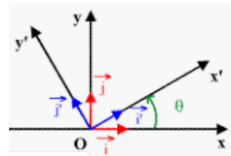


fig.b

Le changement de base s'opère via une matrice de passage, une matrice n'étant qu'une représentation qui dépend du choix des bases au départ et à l'arrivée

Lorsque la dimension de l'espace est > 1 , il y a une infinité de bases orthonormées possibles dans lesquelles un vecteur se projettera différemment.³

L'Annexe VII éclaire le commentaire sous la *fig.a*.

Avant la mesure, le vecteur d'état permet de connaître a priori les différents résultats de mesure possibles (et aussi la probabilité de chacun d'eux). Il renferme toutes les potentialités du système.⁴ Plus techniquement, une particule agit comme si elle se présentait comme **un mixte ou une superposition de valeurs propres possibles**.

Après la mesure, seule une potentialité s'actualise. La particule, qui était décrite par un vecteur d'état emplissant tout le volume de l'expérience, apparaît soudainement localisée, avec un état interne bien défini. La mesure l'a en quelque sorte obligée à prendre position, au sens propre comme au figuré : tous les possibles qui s'offraient à elle se sont brutalement anéantis, sauf un.⁵

Plus techniquement, **la détermination d'une valeur propre apparaît être le fait d'une sélection purement aléatoire**. Les prédictions se révèlent avoir un caractère statistique. Le résultat d'une simple mesure ne peut être entrevu rigoureusement. Seules les probabilités des résultats peuvent l'être quand on procède à une série de mesures.

Tel est un des modes de raisonnement fondamentaux de la physique quantique. Il est peu imaginable que ce mode, né au contact de la confrontation avec la nature, n'ait pas trouvé des échos ou des harmoniques dans d'autres structures du réel, notamment en droit constitutionnel moderne. Le droit des Lumières s'est construit à partir de la nature en conservant toutefois des marges de manœuvre (des « degrés de liberté » à son niveau) qui en fait un droit mi- artificiel.

(Léviathan n'est *artificiel* qu'au regard du droit naturel théologique censé se conformer à l'ordre du Ciel. Il n'en est pas moins ancré dans l'univers et ses lois comme celle de la conservation.)

¹ C. Gougoussis et N. Poilvert, *Mes premiers pas en physique quantique*, op. cit., p.44.

² R. Penrose, *A la découverte des lois de l'univers*, p.504.

³ http://alpha.univ-mlv.fr/meca/chap2_2014.pdf

⁴ E. Klein, *La physique quantique*, op. cit., p.55.

⁵ *Ibid.*

Normalisation d'un vecteur (en mécanique quantique)

1/ *Définition* : Un vecteur unitaire de \mathbb{R}^n est dit unitaire si sa norme est égale à 1 : $\|\mathbf{v}\| = 1$. Normaliser un vecteur, c'est créer un vecteur unitaire de même direction en divisant chaque composante du vecteur par la norme ou le module de ce vecteur. On dit vecteur unitaire ou vecteur normalisé.

Un vecteur peut comporter plusieurs composantes. C'est autant de dimensions dans l'espace dans lequel il est situé. Si l'on prend un vecteur bidimensionnel, exprimé dans les axes X et Y, il aura une valeur pour chacun d'eux, comme il est (4,3). On parvient à la normalisation de ce vecteur en procédant aux deux étapes simples suivantes :

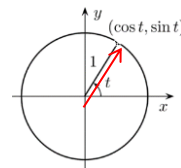
. Calcul de son module sur la base du théorème de Pythagore en considérant le segment du vecteur comme l'hypoténuse d'un triangle dont les autres côtés sont 4 et 3. Le module est la racine carrée de la somme des carrés 4^2 et 3^2 ce qui donne 5.

. Pour arriver au vecteur unitaire, il faut multiplier chaque composante par $1/5$ de sorte que d'un côté on obtient 1 (la longueur du vecteur unitaire) et de l'autre $1/5$, soit $4/5$ et $3/5$

3/ *Représentation* :

Soit 1 le rayon de ce cercle.

Vecteur unitaire : tout vecteur partant du point (0; 0), ayant une longueur de 1 et touchant un endroit quelconque de la courbe du cercle.

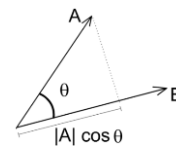


4/ *Intérêt* : On utilise souvent les vecteurs unitaires **pour indiquer seulement une direction, car la direction d'un vecteur ne change pas si l'on ne modifie que sa longueur.**

La normalisation facilite les calculs. Par ex., celui du produit scalaire entre deux vecteurs en prenant en compte l'angle entre ces deux vecteurs. **Le produit scalaire ne fonctionne qu'entre des vecteurs normalisés.**

Il est possible d'obtenir le produit scalaire à partir de deux vecteurs unitaires **en vérifiant le cosinus de l'angle formé entre eux.** Le produit d'un vecteur unitaire par un vecteur unitaire est, de cette façon, la projection scalaire d'un des vecteurs sur la direction établie par l'autre vecteur

Sur la fig. ci-contre, le produit scalaire est le nombre défini par $OA \cdot OB \cdot \cos(\theta)$.



5/ *Normalisation en mécanique quantique.* Cette question est plus délicate que dans des espaces vectoriels de dimension finie du fait que x , dans $\psi(x)$, est une variable continue.

La condition de normalisation de ψ est $\|\psi\| = 1$ (et lorsque cette condition est imposée, $|\psi|^2$ est la densité de probabilité qu'une mesure de position trouve la particule en x). **La normalisation de la fonction d'onde est alors équivalente à la normalisation de la probabilité.** Nous pouvons, mathématiquement parlant, envisager la norme comme pourvoyeuse d'une notion de longueur au carré, laquelle doit nécessairement être finie pour que les « vecteurs » de l'espace des états soient dignes de ce nom.¹ La norme doit être un nombre réel positif, quel que soit l'état quantique.

Autrement dit, au regard de ce que le lecteur découvrira par la suite, un vecteur est normalisé en mécanique quantique si $\|\psi\| = 1$, i.e., dans la notation de Dirac, $\langle \psi | \psi \rangle = 1$. Le vecteur est de longueur 1. En termes de fonction, **cette normalisation signifie que la surface sous la courbe $|\psi(x)|^2$, interprétée comme une densité de probabilité de présence lors de la particule, est égale à 1**

6/ *Exemple de normalisation avec les vecteurs kets* : $|\psi\rangle = \begin{pmatrix} -3i \\ 2+i \\ 4 \end{pmatrix}$ $|\varphi\rangle = \begin{pmatrix} 2 \\ -i \\ 2-3i \end{pmatrix}$

$\langle \psi | \psi \rangle = (-3i)*(-3i) + (2+i)*(2+i) + 4(4) = -9i^2 + (4-i^2) + 16 = 30$ avec $i^2 = -1$

$\langle \varphi | \varphi \rangle = 2(2) + (-i)*(-i) + (2-3i)*(2-3i) = 4 - i^2 + 4 - 9i^2 = 18$

Comme $\langle \psi | \psi \rangle \neq 1$, il convient de normaliser le produit scalaire $\langle \psi | \psi \rangle$ par $1/\sqrt{30}$. Idem pour $\langle \varphi | \varphi \rangle \neq 1$ par $1/\sqrt{18}$.

D'où $\langle \psi | \psi \rangle = 1$ et $\langle \varphi | \varphi \rangle = 1$ avec les vecteurs normalisés :

$$|\psi\rangle = 1/\sqrt{30} \begin{pmatrix} -3i \\ 2+i \\ 4 \end{pmatrix} \quad |\varphi\rangle = 1/\sqrt{18} \begin{pmatrix} 2 \\ -i \\ 2-3i \end{pmatrix}$$

¹ R. Penrose, *A la découverte des lois de l'univers*, op. cit., p.517 ; Frédéric Faure, *Mécanique quantique*, https://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~faure/enseignement/meca_q/cours.pdf

Annexe II

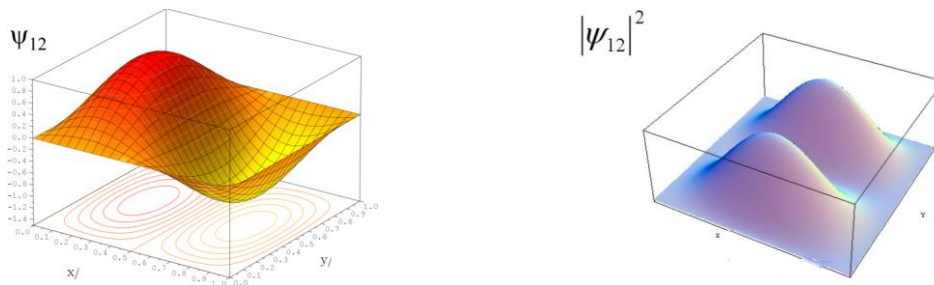
Fonction d'onde et espace des états (comme espace vectoriel l'un et l'autre)

Vision fonction d'ondes	Vision vectorielle (Dirac)
<p><i>L'ensemble des fonctions d'ondes noté \mathcal{H} forme un espace vectoriel complexe car, si $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{H}$ alors la somme et le produit par une constante complexe appartiennent aussi à cet ensemble : si $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{H}$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ alors : $\phi = (\psi_1 + \psi_2) \in \mathcal{H}$ et $\phi = \lambda\psi_1 \in \mathcal{H}$. Mais il s'agit d'un espace vectoriel de dimension infinie. Dans la notation de Dirac, on convient de représenter une fonction d'onde ψ par le symbole $\psi\rangle$ et appelé ket. Ainsi on écrira : $\phi\rangle = \psi_1\rangle + \psi_2\rangle$ et $\phi\rangle = \lambda \psi_1\rangle$.</i></p> <p><i>Il n'y a rien de nouveau dans cette notation, sauf peut-être l'image que l'on se fait d'une fonction d'onde. L'image traditionnelle est une fonction $x \rightarrow \psi(x)$ représentée par son graphe. Dans la notation de Dirac, on imagine plutôt un point de l'espace vectoriel \mathcal{H}, (qui est l'extrémité d'une flèche). Cette image vectorielle suggérée par Dirac (et les mathématiciens) a des avantages certains, mais notre imagination ne permet pas de dépasser la dimension trois, alors que H est de dimension infinie !¹</i></p>	

Annexe III

Exemple de fonction d'onde

(fonction bidimensionnelle, en procédant à des coupes de la fonction d'onde suivant ce degré de liberté)



la fonction bidimensionnelle peut se représenter en 3D, ou par des courbes d'isovaleur sur une surface 2D (avec éventuellement des couleurs différentes en fonction du signe)²

¹ Frédéric Faure, 2015, https://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~faure/enseignement/meca_q/cours.pdf
² http://alpha.univ-mlv.fr/meca/chap2_2014.pdf

Annexe IV

Un rafraîchissement : trouver les valeurs propres d'une matrice A

Le polynôme caractéristique d'une matrice carrée A est $\det(A - \lambda I)$. C'est un polynôme en λ .

Soit la matrice A, 2x2, suivante : $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$. On suppose que λ est une valeur propre de A et que le déterminant $\det(A - \lambda I)$ ou $(\lambda I - A) = 0$ pour connaître la valeur de λ qui vérifie cette équation : $\det \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = 0$, ou

$\det \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = 0$, soit $\det \begin{bmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ -4 & \lambda - 3 \end{bmatrix} = 0$, d'où : $(\lambda - 1)(\lambda) - 8 = 0$ ou $\lambda^2 - 3\lambda - \lambda + 3 - 8 = \lambda^2 - 4\lambda - 5$, ce

qui définit le polynôme caractéristique de A. Pour résoudre $\lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0$, on voit qu'il faut trouver deux valeurs de λ telles que leur somme vaille 4 et leur produit 5. Si on prend comme valeurs propres 5 et -1. En factorisant le polynôme, $(\lambda - 5)(\lambda + 1) = 0$. Si on développe, on a bien ce qu'il faut. Les solutions sont donc $\lambda = 5$ ou $\lambda = -1$. Ce sont les valeurs propres de la matrice.¹

Annexe V

La mesure, via une matrice diagonale ayant la propriété d'hermiticité

1/ On définit une *matrice diagonale* d'ordre m par la matrice carrée d'ordre m qui ne possède des éléments non nuls que sur sa diagonale. Les coefficients de la diagonale peuvent, en revanche, être ou ne pas être nuls. Ce sont des nombres, des *scalaires* (par opposition à des vecteurs), qui peuvent être réels ou complexes. Ex. :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, (1)$$

On remarquera que toute matrice diagonale est symétrique, ce qui n'est pas le cas des matrices non diagonales :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2/ Les matrices diagonales apparaissent dans presque tous les domaines de l'algèbre linéaire. Comme une matrice diagonale est entièrement déterminée par la liste de ses éléments diagonaux, le déterminant d'une matrice diagonale est égal au produit de ses éléments diagonaux.

En outre, *la multiplication de matrices diagonales [ou la recherche de puissances d'une matrice diagonale] est très simple ; aussi, si une matrice intéressante peut d'une certaine façon être remplacée par une matrice diagonale, alors les calculs qui l'impliquent seront plus rapides et la matrice plus facile à stocker en mémoire. Un procédé permettant de rendre certaines matrices diagonales est la diagonalisation.*²

La diagonalisation d'une matrice est possible **si les vecteurs propres, représentés par les vecteurs colonnes de la matrice, sont linéairement indépendants**. Dans ce cas, le déterminant de la matrice est nul. Les vecteurs propres forment une base de l'espace vectoriel considéré.

3/ En mécanique quantique, un opérateur, associé à une observable, doit avoir *la propriété d'hermiticité*, ce qui signifie qu'au niveau de la matrice qui représente l'opérateur, les éléments symétriques par rapport à la diagonale principale sont complexes conjugués, et les éléments sur la diagonale principale sont réels. Ex. d'observable :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1+2i & i & 0 \\ 1-2i & 8 & 0 & 6 \\ -i & 0 & 3 & 2-i \\ 0 & 6 & 2+i & 2 \end{pmatrix}$$

Propriétés d'un *opérateur hermitien* :

1° les valeurs propres d'un opérateur hermitien \hat{A} sont réelles. 2° Il existe toujours une base orthonormée de l'espace des états constituée uniquement de vecteurs propres.

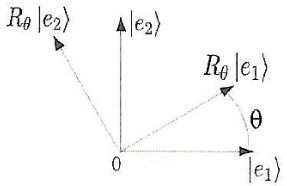
Autrement dit, lorsque l'opérateur est hermitien, il est « diagonalisable », ce qui permet de trouver une base de l'espace des états considéré [ou l'espace complexe des fonctions d'onde] qui sont tous des vecteurs propres $|a_k\rangle$ de \hat{A} associés aux valeurs propres a_k . L'opérateur est alors représenté dans cette base par une matrice diagonale dont tous les éléments sont nuls, sauf les éléments diagonaux qui sont les a_k .³

¹ <https://fr.khanacademy>

² https://fr.wikipedia.org/wiki/Matrice_diagonale

³ <http://alpha.univ-mlv.fr/meca/chap7.pdf>; Franck Laloe, *Comprenons-nous vraiment la mécanique quantique ?* EDP sciences, Paris, 2011, p.5.

Annexe VI

Produit matriciel entre la matrice d'une (grandeur) observable et un vecteur ket, représentant une fonction d'onde
<p>1/ Exemple très simple en considérant l'observable $\alpha = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Pour obtenir les valeurs propres d'une telle matrice, on doit résoudre l'équation caractéristique (<i>the eigenvalue equation</i>) via le déterminant de cette matrice : $\det \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$, d'où $\lambda = \pm 1$.</p> <p>Soit cet observable opérant sur le vecteur ket : $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ en agissant ainsi :</p> $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = -\mathbf{1} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ <p>Les valeurs propres sont réelles. Les vecteurs propres orthogonaux sont respectivement $1/\sqrt{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ et $1/\sqrt{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, Sachant que, dans un triangle rectangle isocèle dont l'hypoténuse est 1, on a $(\sqrt{2}/2)^2 + (\sqrt{2}/2)^2 = 1/2 + 1/2 = 1$ suivant le théorème de Pythagore. Ils sont orthogonaux parce que leur produit scalaire = 0 et sont au surplus normalisés.</p> <p>2/ L'observable peut naturellement comporter des nombres complexes comme par ex. : $\begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}$. Le déterminant de la matrice $\lambda^2 = 1$ n'en donne pas moins des valeurs propres réelles Les valeurs propres sont $\bar{\lambda} = \pm 1$.</p> <p>3/ En revanche, dans le produit matriciel : $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, il n'y a pas de valeurs propres car le vecteur $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, qui est l'image du vecteur $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ n'est pas un multiple du vecteur de départ. ¹</p> <p>4/ <i>Autres exemples de matrices opérateurs</i>² : une rotation d'angle et un opérateur symétrie, le second opérateur pouvant servir pour composer les deux opérateurs. On munit dans les deux cas l'espace vectoriel du plan d'une base orthogonale de vecteurs kets $e_1\rangle$ et $e_2\rangle$.</p> <p>La rotation R_θ agit de la manière suivante sur la base :</p> $\begin{aligned} R_\theta e_1\rangle &= \cos(\theta) e_1\rangle + \sin(\theta) e_2\rangle \\ R_\theta e_2\rangle &= -\sin(\theta) e_1\rangle + \cos(\theta) e_2\rangle \end{aligned}$ <p>La matrice de R_θ est donc : $\begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$</p>  <p>(voir la rem. finale s'il y a lieu de comprendre cette écriture matricielle)</p> <p>L'action de la rotation sur un vecteur $v\rangle = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$ de coordonnées v_1 et v_2 dans la base $\{ e_1\rangle, e_2\rangle\}$ s'écrit :</p> $\begin{aligned} R_\theta^{(v)} &= \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \\ R_\theta^{(v)} &= \begin{bmatrix} v_1 \cos(\theta) & -v_2 \sin(\theta) \\ v_1 \sin(\theta) & +v_2 \cos(\theta) \end{bmatrix} \end{aligned}$ <p>Considérons maintenant l'autre opérateur de symétrie S selon l'axe de vecteur directeur $e_1\rangle$. S agit comme suit : $S e_1\rangle = e_1\rangle$ et $S e_2\rangle = - e_2\rangle$. La matrice de l'opérateur est donc :</p> $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ <p>(Nous retrouvons une observable de notre corps du texte qui renvoyait à cette Annexe VI. Nous voyons ce que peuvent signifier, en termes de mouvement dans un plan, les chiffres 0, 1 et -1, placés comme il sont dans la matrice.)</p>

¹ Ajoy Ghatak, *Basic quantum mechanics : Dirac's bra and ket algebra*, Department of Physics, IIT Delhi, 2 April 2012, <https://www.youtube.com/watch?v=zy9aLwWtGDU>

² C. Gougoussis et N. Poilvert, *Mes premiers pas en physique quantique*, op. cit., p.p.92-93.

Annexe VI (suite)

Et on a : $S|v\rangle = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v1 \\ v2 \end{bmatrix}$ ou $S|v\rangle = \begin{bmatrix} v1 \\ -v2 \end{bmatrix}$

On peut alors écrire la matrice M de R_0S , composant les deux opérateurs :

$$M = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{bmatrix}$$

L'action de M sur $|v\rangle$ s'écrit :

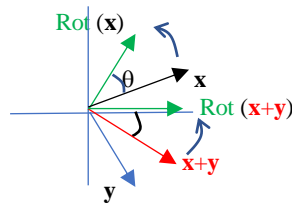
$$\begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v1 \\ v2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v1 \cos(\theta) + v2 \sin(\theta) \\ v1 \sin(\theta) - v2 \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

*

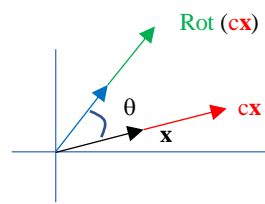
Rem : rappel sur les rotations dans R^2 pour ceux ou celles qui ne sont pas habitués à l'écriture matricielle

Soit une rotation antihoraire d'angle θ du vecteur x de R^2 dans R^2 , notée $Rot_\theta(x)$. Une rotation est une transformation linéaire qui possède, comme telle deux propriétés applicables aux rotations :

$Rot_\theta(x+y) = Rot_\theta(x) + Rot_\theta(y)$.



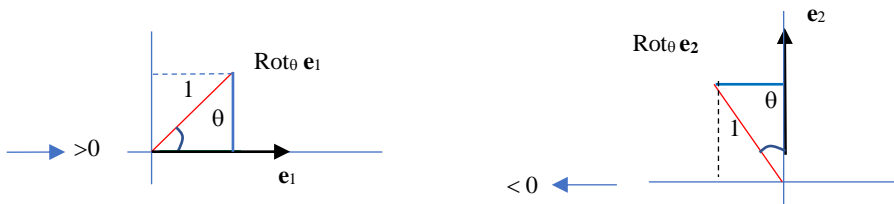
$Rot_\theta(cx) = c Rot_\theta(x)$, avec c scalaire



Comme la rotation est une transformation linéaire, la rotation peut s'écrire sous forme de matrice, i.e. $Rot_\theta(x) = Ax$

Pour trouver la matrice A, il faut partir de l'identité du domaine de définition, ici R^2 , donc $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ dont les vecteurs colonnes sont les vecteurs $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ et $e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, les vecteurs de base de R^2 . Les colonnes de la matrice A vont être les transformations linéaires de ces vecteurs de base : $A = [Rot_\theta e_1 \quad Rot_\theta e_2]$.

Pour calculer les colonnes $Rot_\theta e_1$ et $Rot_\theta e_2$, retraçons un repère et repérons dans ce dernier un triangle rectangle

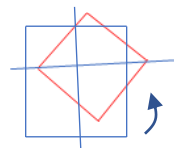


pour faire usage de la trigonométrie en supposant que l'hypoténuse soit de longueur 1. On sait, dans ce cas, que $\cos \theta = \text{côté adjacent/hypoténuse}$ et $\sin \theta = \text{côté opposé/hypoténuse}$ comme on peut s'en assurer sur les figures :

D'où : $A = [Rot_\theta e_1 \quad Rot_\theta e_2] = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$, cette matrice pouvant être appliquée pour n'importe quel angle θ pour la rotation.

Et $Ax = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$. Si $\theta = 45^\circ$, alors $\begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, sachant que

La rotation de 45° (ou $\pi/4$) fait tourner chaque sommet d'un carré d'un angle de 45° en créant un carré rouge...¹



¹ KhanAcademy.org/math

2/ Après le temps des mots, voici en droit celui de l'action

a) S'engager ou ne pas s'engager

i Le moment de bascule. ii Des stratégies pures aux stratégies mixtes

b) L'acte de décider et ses effets

*i Des exercices pratiques qui font penser. ii Entreprise et fournisseur : un avant-gout du droit
iii Des stratégies mixtes au sommet de l'Etat*

3/ L'orientation préalable du choix de l'action

a) Un projet de loi à état multiple

i Une réforme des retraites peu préparée. ii Des options à la satisfaction

b) Un cas « dégénéré » : le vote

*i Les fentes de Young (bis). ii Des petits modèles quantiques instructifs
iii Une déception occasionnelle sur l'intelligence artificielle*

4/ Le recours à des filtres polarisants

i Une histoire de flambage à nouveau

Ah, je ne sais ce que je veux, mais je sais que je ne veux pas retomber dans les ornières des partis pris opposés. N'ai-je donc que la liberté de choisir *oui* ou *non* sans nuance ? L'interrogation hante l'acte même du vote, que ce soit dans le cadre d'une fin de campagne électorale ou dans l'enceinte d'un tribunal au terme d'une délibération en soi ou entre plusieurs magistrats.

J'entends la complainte. Cette voix qui parle est aussi la mienne. Elle me trouble autant que l'autre qui se tourmente de ne pas régler le dilemme sans fêlure ou déchirure interne.

(§20
c)-i)

Le risque rappelle celui du *flambage* en physique. Son effet survient quand une poutre ou une barre verticale défaille sous le poids excessif d'une structure. La poutre est incapable de la supporter plus longtemps. Il arrive un moment où ça craque. Nous sommes dans une autre partie de la physique, celle qui traite de la résistance des matériaux. Quelle est leur élasticité lors par exemple du flambage d'une simple lame métallique ? Le phénomène, étudié au XVIII^e siècle par Euler, a été assimilée au XX^e siècle par Zeeman à un phénomène « catastrophiste » en raison de sa rupture brutale après une lente déformation continue. Au-delà d'un seuil, tout s'écroule !¹

Nous avons déjà rencontré cet auteur. Jean Petitot introduit en français son article comme suit :

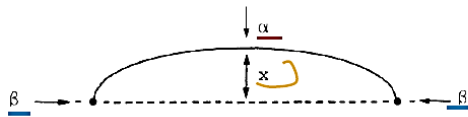
Chacun sait que, si l'on maintient une lame métallique (ou une carte à jouer) entre le pouce et l'index, en exerçant une pression latérale assez forte pour qu'elle soit par ex. dans un état convexe, une pression verticale croissante exercée sur elle la fait à un certain moment passer catastrophiquement à un état concave.²



Zeeman voit dans cet événement de flambage (*buckling*) la présence d'une surface fronce (*cusp catastroph*) qu'il représente et présente lui-même ainsi :

¹ E. C. Zeeman, *Catastrophe Theory, Selected papers, 1972-1977*, op. cit., pp.58-60.

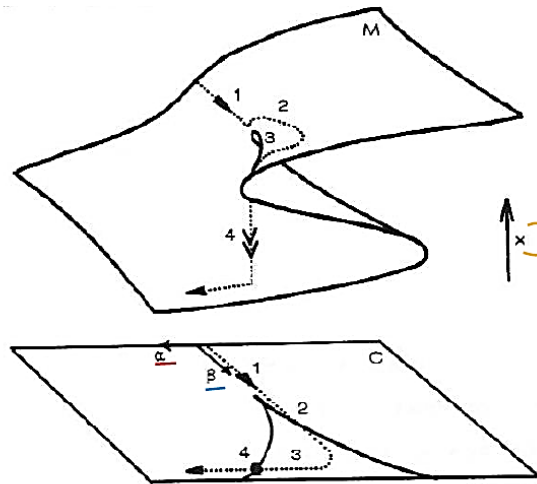
² J. Petitot, « Théorie des catastrophes », art. cit., pp.41-42.



A free elastic strut [était, support, traverse] under load α , and compression β . The result vertical displacement is x .

In the free strut the load α is the normal factor, and the compression β the splitting factor, controlling the first harmonic, x . [Christopher Zeeman parle d'« harmonique » car la lame se déplace comme une onde qui vibre et se décompose en série de Fourier. $f(x)$ représenterait la forme de la courbe et ses changements suivant les diverses harmoniques.]

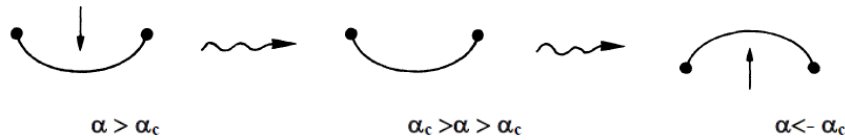
The dotted path shows the strut (1) compressed (2) buckling (3) loaded and (4) snapping [casser, rompre].¹



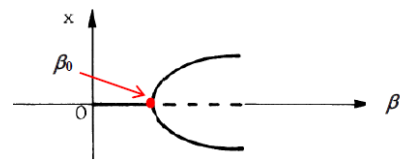
Le commentateur français décrit la « phénoménologie » du processus, modélisé par la fronce :

Le contrôle est constitué par les deux forces α et β (contrôle de dimension 2) ; l'état est caractérisé par la valeur algébrique de x comptée à partir de l'état horizontal (non courbé) de la lame.

- Pour une faible valeur de β , une variation continue de α transforme l'état de façon continue (**chemin 1**) :
- Pour une valeur de β supérieure à une valeur critique β_0 , si l'on part d'un état convexe, pour une valeur de α inférieure à une valeur critique α_c , l'état varie continûment, mais il subit un saut catastrophique convexe \rightarrow à la traversée de α_c (**chemin 2**).
- Si l'on repart de cet état concave en faisant décroître α , il ne se passe rien à la traversée de α_c . Ce n'est que pour la valeur $-\alpha_c$ (force appliquée en sens inverse) que l'état bifurque (**chemin 3**). Ce phénomène est dit d'**hystérésis** [on revient sur la forme initiale comme par effet de mémoire.]



- Si, la force α étant nulle, on fait croître β , à la traversée de la valeur critique β_0 , l'état horizontal ($x=0$) devient instable, et la lame bifurque vers un état convexe ou concave de façon imprévisible (**chemin 4**). Ce phénomène est dit de **divergence**.¹



Catastrophe !

N'y a-t-il pas moyen de l'éviter ou de l'amortir, le flambage risquant de se reproduire chaque fois ?

(§20 c)-i)

La physique suggère à nouveau des voies possibles pour échapper à un tel saut ou réduire son atterrissage. Nous avons vu en droit quels peuvent être les dégâts que l'Etat occasionne lorsque lui-même *breaks the law* et *the trust* que les individus placent en lui. Locke avait sonné l'alarme.

Ce qui est en cause est la stabilité même du droit constitutionnel. Or, parmi **les phénomènes de changement de stabilité** figurent, observe Claude Bruter, **ceux de « décohérence »**. Ces phénomènes sont provoqués par l'interaction des objets quantiques avec leur « environnement ». Cette interaction expliquerait le passage entre *le formel et le réel, le virtuel et l'actuel, entre le possible et l'effectif, entre le hasard et le déterminé* lors de l'effondrement de la fonction d'onde ou de la réduction du vecteur d'état.² Claude Bruter est mathématicien, et non physicien, mais il est intéressant de voir comment il réfléchit à ce sujet en se penchant sur l'expérience de Young.

¹ J. Petitot, « Théorie des catastrophes, art. cit, pp.42-43.

² Etienne Klein, « La physique quantique et ses interprétations », in Etudes, 2001, t.34, pp. 629-639. Accessible sur internet.

Décohérence, dit le physicien. *Le mathématicien dit la même chose en parlant de phénomènes de bifurcation en des valeurs singulières des paramètres.* Certes, ce n'est pas sous cet angle que l'expérience des deux fentes a été décrite, mais, *il conviendrait peut-être de le faire, et obtenir ainsi une unité de compréhension et de description de divers comportements dans le monde physique.* Bruter se réfère au livre de Richard Feynman sur la mécanique quantique. Dans cet ouvrage, Feynman relate l'envoi d'électrons sur un écran percé de deux trous ou deux fentes. L'écran est par derrière éclairé par une source lumineuse.

Nous n'y reviendrons pas, mais voici, en revanche, ce qui retient l'attention du mathématicien :

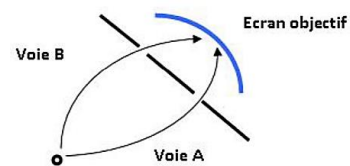
Lorsque la longueur d'onde de la lumière est plus petite que la distance séparant les deux trous, on sait en partie où passent les électrons. Lorsque la longueur d'onde μ est plus grande que la distance, on ne parvient pas à savoir par lequel d'entre ces trous passent les électrons.

D'où ce constat :

La longueur d'onde de la lumière joue le rôle de paramètre de bifurcation. La valeur de bifurcation est δ_{μ} . Lorsque la longueur d'onde lui est supérieure, on est dans une situation analogue à la cohérence [la superposition d'états], lorsque la longueur d'onde lui est inférieure, on est dans une situation analogue à celle de décohérence, c'est-à-dire d'affaiblissement de la stabilité de certaines propriétés par rapport à des fluctuations particulières de l'environnement, autorisant la particule à adopter d'autres comportements.

Par environnement, il faut entendre *un jeu d'influences très locales et inconnues de nous qui s'exercent probablement sur l'électron et guident son mouvement.* Avant l'interaction avec le rayonnement lumineux, l'électron semble posséder une vision floue des voies A et B à emprunter.

il ne sait trop laquelle choisir spontanément ; les deux voies semblent posséder les mêmes avantages, présenter les mêmes difficultés : elles sont dans un état de cohérence l'une vis-à-vis de l'autre. Alors notre « électron « libre » effectue dans sa tête des sortes de simulations de parcours virtuels selon chacun des voies, évaluant à chaque fois une probabilité d'arriver à ses fins.¹



On reconnaît à nouveau, mutatis mutandis, les affres de notre « électron »-votant, placé dans une ubiquité étrange, avant de déclarer sa « voix » en droit. L'électron-onde de la physique n'a sans doute qu'une vision holiste infra-consciente, mais l'électeur comme l'électron nagent dans une suite d'états simultanément présents. Ni l'indécision de l'électeur ni celle de l'électron ne sont des ondes radio, mais, à supposer qu'ils le fussent, *un simple appareil de radio, constituant un dispositif d'observation, nous révélerait qu'en chaque point de notre espace sont superposées une infinité d'ondes dont les fréquences semblent former un continuum numérique.²*

Ce qui importe ici n'est pas tant l'acte de brancher la radio sur n'importe quelle onde, mais de choisir sa longueur d'onde préférée. Allumer la radio revient à l'actualiser, parmi toutes les longueurs d'onde possibles. En tournant le bouton, on en stabilise une et on élimine les autres. On peut donc agir moins aveuglément si on sait jouer sur le paramètre de bifurcation. Dans l'expérience de Young, on voit l'électron répondre différemment suivant le rapport longueur d'onde de la lumière/distance entre les trous de l'écran. Le contrôle n'est pas total. L'actualisation demeurera discontinue et quasi-immédiate, mais on saura s'y préparer, voire l'orienter au besoin.

Voici qu'au fil du temps, les connaissances sur l'une des voies, puis sur les deux peut-être, s'enrichissent. Elles suggèrent petit à petit [à l'électron comme au futur votant] de privilégier l'une d'entre elles. Ces connaissances, assimilées aux conditions environnementales, ont [toujours] des effets de décohérence,³ mais ces effets paraîtront moins dans la brume ou arbitraires.

Revoyons la situation : les personnes situées au centre (au centre droit ou gauche ou au centre du centre si jamais c'est possible) sont censées, par définition, ne pas avoir d'opinions très arrêtées, ou

¹ Claude P. Bruter, « Causalité, conscience, et mécanique quantique », Eikasias. Revista de Filosofía, año VI, 35, noviembre 2010, pp.60-61. <http://www.revistadefilosofia.com>

² *Ibid.* p.59, note 1.

³ *Ibid.*, p.61.

inédites, sur la plupart des sujets qui intéressent le droit, la politique et l'économie. Leur appréciation aléatoire des risques et des chances, des avantages et des inconvénients, ne les incline pas à pencher résolument vers une option plutôt que vers une autre. Cet état d'esprit, équilibré s'il en fût, ne fait cependant l'affaire, ni de la société qui a besoin d'agir, ni celle des partis politiques qui entendent insuffler en celle-ci une pensée directrice et une ligne de conduite.

Il faut que les individus se décident, mais il ne faut pas qu'ils décident n'importe quoi sans avoir au préalable reçu des informations qui puissent « éclairer » leur choix.

(§43
3/c)-i)

A cette idée, le lecteur n'a peut-être pas manqué de se remémorer que nous avons comparé (**il s'agissait d'une analogie et non d'une similitude**), le « champ » politique à un champ magnétique. L'analogie ne portait que sur le mode de raisonnement et non sur une application chiffrée, au micron près, des notions de physique au droit. Dans le constitutionnalisme moderne, avons-nous dit, un parti politique, qui regroupe de multiples « particules », joue le rôle d'un champ uniforme orientant des électeurs, des députés et des militants dans une même direction.

Cet alignement des positions dans un sens ou un autre revient à une polarisation de la vie politique. La tendance au bipartisme n'est pas autre chose que celle d'une bipolarisation. Cette tendance paraît inévitable, puisque, quand il est question de prendre une décision ou de voter une loi, on doit être en définitive pour ou contre, nonobstant ses variations ou amendements si, tout au moins, leur démultiplication n'est pas destinée à être une source massive de blocage.

Cet alignement sur les positions des partis se veut exclusif. Il doit absorber les autres directions possibles qui ne conviennent pas aux partis. Nous avons évoqué, à ce propos, la polarisation de la lumière à travers un filtrage optique qui n'en laisse passer qu'une partie, par exemple sa direction verticale. La polarisation progressive des directions d'un parti politique est comparable à celle de la lumière via une solution contenant des molécules qui interagissent avec la lumière et en induisent une rotation. Il n'est pas difficile d'accepter que le parti politique agit aussi comme un filtre à la manière d'un cristal qui rassemble et réduit les directions de la lumière à une seule.

Nous retrouvons l'idée de paramétrage qui contrôle plus ou moins les changements de direction possibles. Le filtre des partis oriente les cogitations des électeurs vers une éventuelle bifurcation. Vers quoi ? Vers une position partisane, sans brusquer toutefois leur propre jugement (nous restons dans le cadre du pluralisme politique qui n'altère pas gravement leur consentement, contrairement au régime d'un parti unique qui se passe de l'avis des gens ou impose un seul bulletin de vote avec pour « choix » : dire oui ou subir l'exclusion, ou simplement la rééducation).

- Holà mon ami, vous allez vite en besogne. Votre compréhension de la polarisation de la lumière demeure pré-quantique. La lumière est bien une onde électromagnétique comme les ondes radio auxquelles vous faisiez allusion, mais, avec la mécanique quantique, on glisse du déterminisme à l'indéterminisme. Le résultat n'est pas prévisible. Seules les probabilités sont déterminées.

- Vous croyez ? Voyons. Bien sûr que le sais. C'est l'objet de mon propos suivant. Ne prenez pas les gens plus bêtes qu'ils ne sont.

- Pas plus bêtes, mais plus ignorants.

ii La polarisation du photon-onde en droit constitutionnel

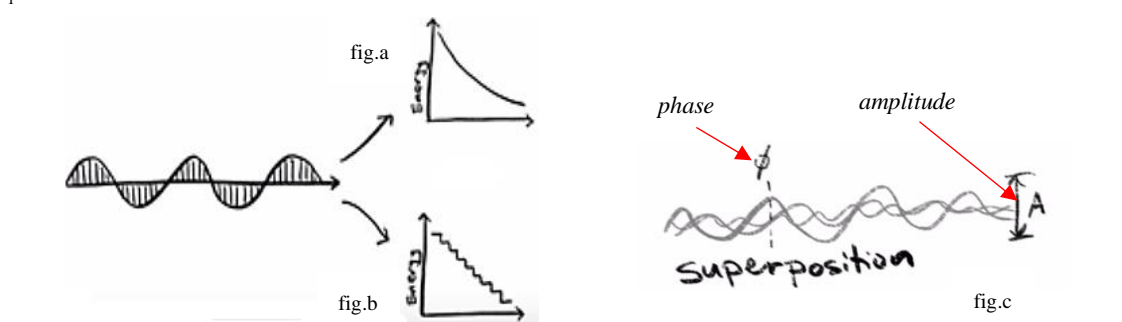
iii Les primaires dans le collimateur de la physique quantique

iv Questions subsidiaires non traitées

Annexe VII

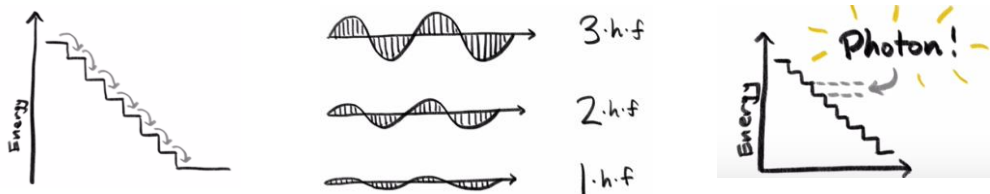
La lumière en mécanique quantique

On rejoint à nouveau les idées d'Einstein, non pas celle portant sur la relativité restreinte et générale, mais celle qui considèrerait, au début de sa carrière de physicien, la lumière comme un objet *actually quantized*, consistant en millions de quanta de lumière que sont précisément les photons. Dans un faisceau lumineux d'une seule fréquence tous les photons emportent la même énergie $E = h\nu$ *in discrete amounts*. La lumière demeure une onde électromagnétique, mais au lieu que son énergie soit représentée par une courbe continue (fig.a), elle l'est par une courbe en escalier (fig.b) bien l'onde fût d'abord conçue comme *a nice continuously oscillating vector field*. (fig.c)



Plus précisément, l'énergie $E = h\nu$ (ou hf , les lettres ν et f désignant la fréquence) d'une onde lumineuse quelconque semble être un multiple entier, $E = n \cdot h \cdot f$, h étant la constante de Planck multipliée par la fréquence de l'onde. En physique, cela signifie que chaque fois que l'onde échange son énergie avec quelque chose d'autre comme un électron, la valeur de son énergie est toujours un multiple entier de h multiplié par la fréquence. Cela signifie aussi qu'il y a une énergie minimale non égale à 0 pour des ondes d'une fréquence donnée hf . On ne peut avoir une énergie inférieure à $1 \cdot hf$ (autrement dit, $\frac{1}{2} hf$ par ex. n'existe pas).

Une onde électromagnétique avec une énergie minimale est justement un photon. ²



¹ 3Blue1Brown, *Quantum mechanics of light*, 13 Sept.2017, <https://www.youtube.com/watch?v=MzRCDLre1b4>

² *Ibid.*

§57.- DRESSER UN MUR A LA MAXWELL

1/ Le jeu trouble du démon de Maxwell, 418

a) Le démon mécanique chez Maxwell, 418

b) Retour sur le « mur » de Jefferson

i Le démon non mécanique de Jefferson

ii Le tir de barrage contre la religion

iii Des tirs croisés et des cessez-le-feu

2/ L'imprégnation religieuse du droit malgré soi

i Jurisdiction et faillibility

ii standing et justiciability

iii Le théorème des fonctions implicites, inattendu en droit

Annexe IV, 423

o

1/ Le jeu trouble du démon de Maxwell

a) Le démon mécanique chez Maxwell

Je suis presque à la campagne en cette fin de mois de mars. Je décide de quitter ma table de travail et de me promener pour rafraîchir ma pensée. Je commençais trop à somnoler. Ah, le grand air ! J'hume l'odeur de parfum émanant du champ voisin. Mille fleurs concourent à ce sentiment de bien-être. Il n'y a pas de vent, même la plus légère brise printanière. Et pourtant, l'odeur se répand d'elle-même, lentement, dans tout l'espace environnant. Je suis l'heureuse victime du phénomène de « diffusion ».

La physique visualise ce processus. Elle considère une faible quantité d'hélium diffusant dans l'air contenu dans un récipient. Elle imagine une surface hémisphérique à l'intérieur de laquelle se trouvent la majorité des atomes d'hélium. Quelques-uns émigrent à l'extérieur. Les atomes sont agités. Leur mouvement est aléatoire. Ils rebondissent sur les molécules d'air ainsi que sur les parois de l'enceinte

Certains en sortent, d'autres y entrent, mais comme le gros de l'hélium est à l'intérieur, il s'avère que le nombre de sortants est supérieur au nombre d'entrants. Les atomes ont dérivé lentement vers des zones de l'enceinte à concentration d'hélium plus faible. Il n'est nul besoin pour le physicien de les pousser...¹



Imaginons maintenant une paroi séparant une boîte composée de deux parties, A et B. La partie A correspond à une zone où se trouve le gaz avant qu'il ne diffuse alentour. Un petit trou est percé dans cette paroi avec une porte qu'un petit démon, nouveau venu jusqu'à présent, ferme ou ouvre à volonté.

C'est exactement l'expérience de pensée proposée par James Maxwell en 1871 dans son livre *Theory of Heat*. Le « démon de Maxwell » apparaît furtivement dans cet ouvrage pour jouer un tour au sacrosaint second principe de la thermodynamique. Selon ce principe, vous ne pouvez forcer une répartition uniforme de la température et de la pression dans un système fermé à devenir inégale. Vous pourriez, il est vrai, le faire en fournissant un travail, mais notre petit démon n'entend déployer aucune énergie.

Quel défi ! et quelle outrecuidance de ce minus, parmi les minus. N'ignore-t-il pas qu'en thermodynamique, le retour à un avant de deux gaz mélangés

est beaucoup moins naturel et ne peut être obtenu que par des méthodes compliquées, nécessitant une dépense d'énergie souvent considérable [?] Il en est de même d'un phénomène fort important en thermodynamique, celui de l'équilibre de température qui se produit spontanément, après un temps plus ou moins long, lorsqu'on met en présence deux ou plusieurs corps de températures

¹ Kate /Sternheim, *Physique*, op. cit., p.234.

différentes. Ce phénomène est irréversible, car on ne peut revenir à l'état initial qu'en dépendant du travail. C'est là un cas particulier du second principe de la thermodynamique, dû à Clausius et qui exprime que l'entropie d'un système va constamment en croissant.¹

On mesure le *challenge*. La variation de l'entropie d'un système fermé U est toujours positive ou nulle, $\Delta S_u \geq 0$. L'entropie tend à augmenter ou à rester égale, mais ne peut diminuer. Mais, soulignera malicieusement notre petit démon, il y a deux manières de considérer l'entropie : le changement d'entropie ΔS peut être vu comme une chaleur ajoutée Q à une température donnée T, soit $\Delta S = Q/T$. Du point de vue statistique, il est proportionnel au logarithme népérien ln du nombre d'états Ω possibles du système, $S = k \ln \Omega$. Cette deuxième manière opposerait un contre-exemple au second principe.

Il faut comprendre pourquoi. Maxwell s'est intéressé à la théorie cinétique des gaz.

Cette théorie les étudie en prenant en compte leur très grand nombre de molécules. La chaleur y est ramenée à une forme d'agitation désordonnée des molécules. Plus l'agitation est importante, c'est-à-dire plus leur énergie cinétique est élevée, plus la température du gaz l'est également, étant rappelé que la température est une mesure macroscopique de la moyenne de l'énergie cinétique, l'énergie associée à son mouvement.

L'équilibre des températures dans un gaz s'établit grâce aux chocs très fréquents des molécules entre elles. La notion de moyenne sous-tend celle de distribution. Tout n'est pas exactement égal à E_c . Il y a des particules qui ont plus d'énergie cinétique, et donc plus de vitesse à masse égale, et d'autres moins à masse toujours égale (l'énergie cinétique dépend de la masse et de la vitesse d'un corps en mouvement suivant $E_c = \frac{1}{2} mv^2$). C'est en faisant la moyenne sur toutes les particules que l'on trouve E_c . La distribution des vitesses est une loi statistique. Son énoncé fait appel à la notion de probabilité.

*C'est le premier exemple de l'introduction des probabilités dans une loi physique. [...] Cette loi fait connaître, en chaque région de l'espace qui entoure un point O, la densité moyenne des points V dans cette région.*²

La loi de distribution des vitesses évolue conformément aux prédictions de Maxwell. Elle décrit une courbe de Gauss. Les vecteurs vitesse des particules suivent une loi normale. Pour modéliser en 3D le mouvement désordonné observé dans un gaz parfait (*idealized gaz*), Maxwell fut amené à représenter

*la vitesse d'une particule par un vecteur aléatoire $X = (X_1, X_2, X_3)$, dont les composantes X_1, X_2, X_3 sont des variables aléatoires indépendantes admettant toutes la même loi normale $N(0, 1)$. La loi du vecteur X est la loi normale (à trois dimensions). La longueur $|X| = \sqrt{X_1^2 + X_2^2 + X_3^2}$, c'est-à-dire le module de la vitesse d'une particule, est une variable aléatoire à valeurs positives dont la loi est connue sous le nom de loi de Maxwell ; elle admet pour densité $f(x) = \sqrt{2/\pi} x^2 \exp -x^2/2$ avec $x \geq 0$.*³

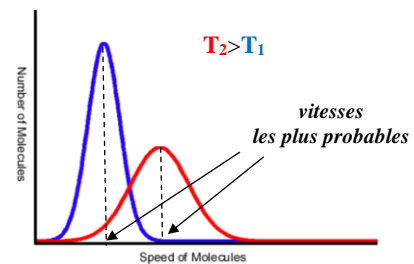
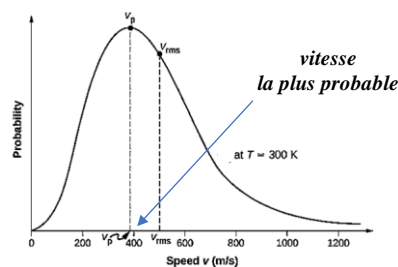


fig.a : La distribution est une fonction des vitesses moléculaires. Le nombre de molécules étant fini, la probabilité qu'une molécule ait exactement une vitesse donnée est 0. La vitesse la plus probable v_p est inférieure à la vitesse v_{rms} . Bien que de très grandes vitesses soient possibles, seule une très petite fraction de molécules a des vitesses d'un ordre de grandeur supérieur à v_{rms} . T désigne la température en Kelvins.

fig.b : La loi de distribution des vitesses est décalée vers la droite pour des vitesses plus élevées et élargie à de plus hautes

¹ E. Borel, *L'évolution de la mécanique*, op. cit., pp.151-152.

² *Ibid.*, p.148 ; https://fr.wikipedia.org/wiki/Loi_de_distribution_des_vitesses_de_Maxwell En théorie cinétique des gaz, la loi de distribution des vitesses quantifie la répartition statistique des vitesses des particules dans un gaz homogène à l'équilibre thermodynamique [état où l'énergie est minimum ou l'entropie maximum]. (*Ibid.*)

³ Aimé Fuchs, Plaidoyer pour la loi normale, sans date, <http://irma.math.unistra.fr/~foata/fuchs/FuchsNormale.pdf>

températures ($T_2 > T_1$). La vitesse la plus probable, pour le gaz à température T_1 , est plus faible que la vitesse la plus probable pour le gaz à température (T_2). Une température plus faible signifie une énergie cinétique moyenne plus faible. La courbe en **bleue** correspondante est moins étalée que la **rouge**. Le nombre total des molécules est l'intégrale de chaque courbe.¹

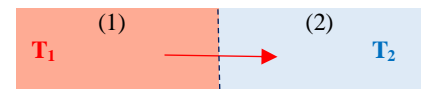
Compte tenu de ces circonstances, Maxwell fut tenté de réduire la thermodynamique à la mécanique statistique, car l'équation du mouvement des particules dans un gaz ne fait pas de différence entre un mouvement dans un sens du temps donné et un mouvement dans le sens inverse. Cette équation incite à croire qu'il pourrait y avoir autant de chance de voir un vase se briser que de le voir se recoller spontanément. Une goutte d'encre diffusant dans un verre pourrait aussi revenir à son état de concentration initiale. Le second principe ne serait donc vrai qu'approximativement. Il pourrait être violé.

La loi de distribution des vitesses est une moyenne, mais ce fait n'empêche nullement que les conséquences de cette loi *soient expérimentalement vérifiées avec une rigoureuse exactitude*. Ce fait n'empêche pas non plus, insistons-le, que *les vitesses des molécules d'un même gaz, à une température donnée, soient très différentes entre elles si l'on convient d'appeler température d'une molécule un nombre proportionnel à son énergie cinétique*. Si le gaz contient un grand nombre de molécules rapides, il est « chaud ». S'il contient principalement des molécules lentes, il est « froid ».

C'est parce que Maxwell a pris conscience de ces grandes différences de vitesse (et de température) qu'il a eu l'idée d'imaginer un récipient séparé en deux par une cloison percée d'une petite ouverture. L'être minuscule qu'est le petit démon du chercheur *a les yeux assez perçants pour voir venir les molécules et apprécier leurs vitesses ; il peut donc manoeuvrer l'obturateur mobile de manière que les molécules les plus rapides s'accumulent à droite et les plus lentes à gauche.*²

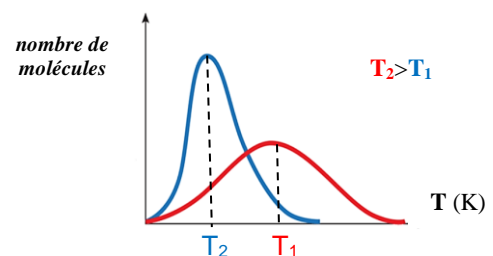
Pourquoi à droite et à gauche ?

Il faut se rappeler que le transfert thermique, en thermodynamique, **va du chaud vers le froid** de part et d'autre d'une frontière où, d'un côté, en (1), la température T_1 est plus élevée que la température T_2 , située de l'autre côté, en (2).



Traduisons l'expérience de pensée de Maxwell en traçant, de façon équivalente, les distributions des vitesses lentes et rapides.

Du fait du lien entre la température et l'énergie cinétique, il est permis de considérer la distribution des molécules en fonction de la température. Globalement, les moyennes T_1 et T_2 sont atteintes. Toutes les molécules ne peuvent être exactement à la même température. Notre petit démon connaît la vitesse des molécules ainsi que leur changement.³

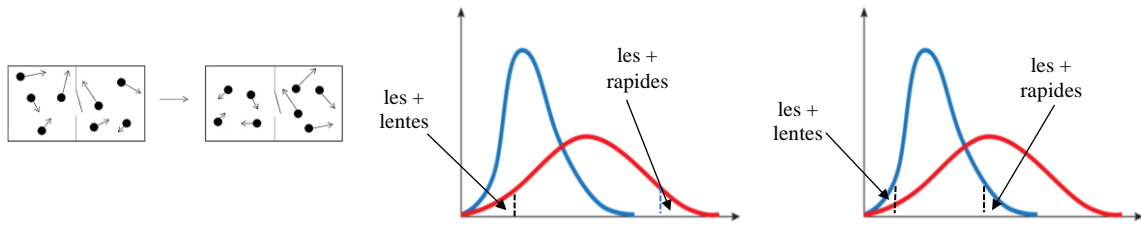


Du point de vue statistique, être à T_1 signifie que des molécules, parmi les lentes, sont dotées d'une grande vitesse ou énergie cinétique. Elles sont représentées par des grandes flèches. Les molécules, parmi les lentes, dotées d'une plus petite vitesse ou énergie cinétique, sont représentées par une plus petite flèche et les molécules, dotées d'une vitesse moyenne, en plus grand nombre, sont représentées par une flèche de longueur moyenne. Id. pour T_2 : les flèches sont aussi de longueur variable mais en moyenne plus longues que celles à T_1 (elles sont en moyenne plus rapides que les flèches à T_1).

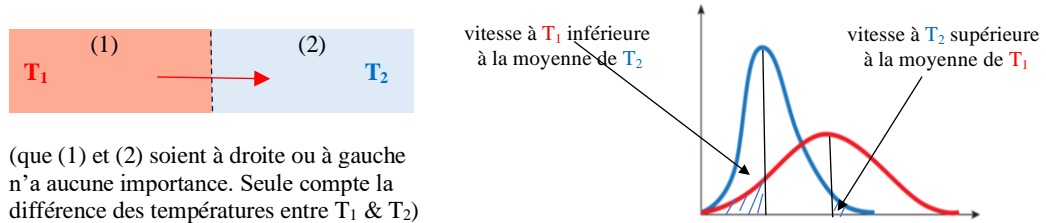
¹ <https://openstax.org/books/university-physics-volume-2/pages/2-4-distribution-of-molecular-speeds>;

² E. Borel, *L'évolution de la mécanique*, p.148 et 152.

³ <https://fr.khanacademy.org/science/physics/thermodynamics/laws-of-thermodynamics/v/maxwell-s-demon>; Andrew Rex, *Maxwell's Demon – A Historical Review*, Univ. of Puget Sound, Department of Physics, Tacoma, 23 May 2017, <https://www.mdpi.com/1099-4300/19/6/240/htm>

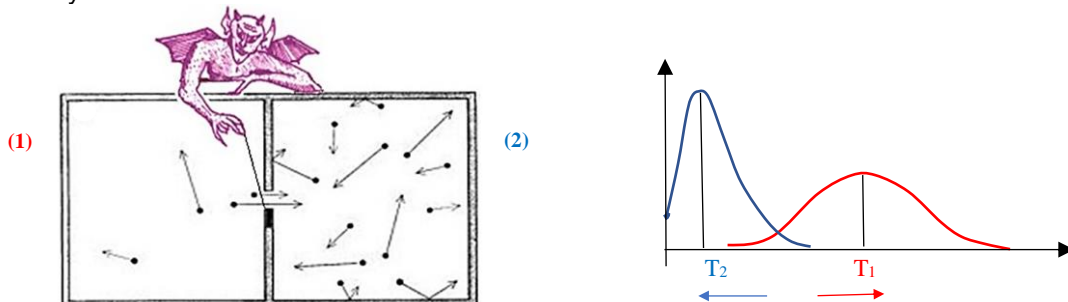


Reprenons notre récipient composé des deux compartiments, (1), à T_1 , et (2), à T_2 . On voit, sur les deux schémas de courbes précédents, que certaines molécules du compartiment (2) ont une vitesse supérieure à la moyenne de certaines particules du compartiment (1). De la même façon, une partie des molécules



du compartiment 1 ont une vitesse inférieure à la moyenne des molécules du compartiment 2. Autrement dit, bien que T_2 soit plus froid que T_1 , on peut trouver des molécules dans T_2 qui vont plus vite que la moyenne des molécules de T_1 , et inversement.

C'est en partant de cette observation que Maxwell a imaginé un petit démon qui ouvre la porte entre les deux compartiments (1) et (2). Attentif, son lutin laisse passer de (1) à (2) les molécules dont la vitesse à T_1 est inférieure à la moyenne de T_2 , et de (2) à (1) les molécules vitesse à T_2 est supérieure à la moyenne de T_1 .



Tels sont les critères de notre elfe savant, obéissant comme Ariel à son maître le magicien Prospero. Mais nous ne sommes pas dans Shakespeare mais dans Maxwell, même s'ils ont hanté la même île.

Si l'elfe de la physique perdure dans son tri, il ne peut y avoir, à la longue, qu'une accumulation de molécules rapides dans le compartiment (1), et une accumulation de molécules lentes dans le compartiment (2). La distribution, dont la courbe est rouge, se décalera vers la droite, et celle, dont la courbe est bleue, vers la gauche. Cette double évolution fait disparaître la zone de chevauchement où certaines molécules d'un compartiment avaient une vitesse supérieure ou inférieure à la moyenne de l'autre.¹

Le compartiment T_1 s'est réchauffé, le T_2 s'est refroidit. Cette expérience d'esprit de Maxwell irait donc complètement à l'encontre du second principe de la thermodynamique. On a l'impression que le transfert thermique va dans le sens contraire du froid au chaud. Il n'y aurait donc pas de gain d'entropie, mais une diminution !

Depuis, d'autres esprits, taraudés par leur propre *daimon*, se sont aperçus que l'expérience dépassait en fait les capacités de détection du petit démon. Suivre chacune des molécules de deux gaz, qui sont en outre en mouvement, et les comparer à une valeur seuil ou plafond, réclame un travail d'Hercule. Il faudrait un laser des plus compliqués pour éclairer toutes les molécules et enregistrer leur réflexion.

¹ KhanAcademyFrancophone, <https://www.youtube.com/watch?v=cTfdaEEPZ2I>; <https://www.matierevolution.fr/spip.php?article4821>

Même un ordinateur fort puissant ne pourrait accomplir cette tâche, sans parler de la nécessité de le faire tourner très longtemps, générant de la chaleur et requérant de l'électricité pour qu'il produise du travail.

Et l'ordinateur quantique ? On s'y est essayé. On a voulu cartographier la mémoire du démon qui en a tant besoin pour stocker l'information sur les propriétés de particules subatomiques encore plus fines que des molécules. *Cette information nécessite un coût énergétique qui réduit le gain d'énergie à zéro, ce qui résout le paradoxe.* Ce que l'on peut dire malgré tout d'intéressant est le fait révélé suivant : *le système possède un comportement quantique signifie que la particule peut avoir une énergie élevée et faible en même temps. Ce n'est donc pas un choix exclusif comme cela a été proposé par Maxwell.*¹

Maxwell aurait été enchanté de voir son expérience de pensée transformer en expérience de laboratoire, lui qui avait introduit les probabilités en physique avant que Boltzmann confirme sa loi de distribution des vitesses. Maxwell avait déjà préparé, à sa façon, le terrain de l'interprétation probabiliste de la mécanique quantique, mais la limitation de la thermodynamique n'est toujours pas d'actualité.

(§39
4/a)

On ne peut remonter d'une source froide à une source chaude sans travailler, c'est-à-dire sans fournir de l'énergie. *Si nous pouvions exploiter la puissance de la chaleur sans en utiliser d'abord l'énergie, cela signifierait de l'énergie gratuite. Nous n'aurions pas besoin de pétrole, de panneaux solaires ou d'énergie nucléaire. Une technologie aussi primitive que les moteurs à vapeur pourrait fonctionner pour toujours sans carburant.*² On réaliserait sur terre le mouvement perpétuel, contrairement à l'expérience de pensée de Stevin au XVI^e siècle qui suggérait, avec son idée de collier de perles, son impossibilité.

*Il n'est pas besoin de dire que l'expérience idéale imaginée par Maxwell est irréalisable ; avec les hypothèses les plus favorables, le travail dépensé serait énorme par rapport au résultat obtenu : c'est bien d'ailleurs ce que n'ignorait pas Maxwell.*³

Le problème est clair, mais la solution insoluble. Un démon, moins mécanique, rencontrera en droit constitutionnel un problème analogue et une solution, sinon introuvable, du moins presque irréalisable.

b) Retour sur le « mur » de Jefferson

- i Le démon non mécanique de Jefferson.*
- ii Le tir de barrage contre la religion*
- iii Des tirs croisés et des cessez-le-feu*

2/ L'imprégnation religieuse du droit malgré soi

- i Jurisdiction et faillibility.*
- ii standing et justiciability*
- iii Le théorème des fonctions implicites, inattendu en droit*

¹ Jacqueline Charpentier, *Une recherche tente de démontrer l'expérience de pensée du Démon de Maxwell qui concernait un paradoxe avec la seconde loi de la thermodynamique*, 6 juillet 2017, <https://actualite.housseniawriting.com/science/2017/07/06/dans-lesprit-du-demon-de-maxwell/22593/>

² <https://www.anguillesousroche.com/technologie/le-demon-de-maxwell-pretend-qu'il-y-a-un-moyen-de-contourner-cette-loi-de-la-physique/>

³ E. Borel, *L'évolution de la mécanique*, p.153.

Annexe IV

La dérivation implicite ¹

1/ 1^{er} exemple : le cercle, de rayon 1, d'équation: $x^2 + y^2 = 1$.

Dans cette équation, il n'y a pas de variable isolée : on a des x et des y du même côté de l'équation. Supposons donc que y soit une fonction de x : $y = u(x)$. **A l'intérieur de y, il y a des x, i.e. $y = y(x)$.** En utilisant l'outil différentiel qu'est la dérivation en chaîne, je peux dériver la fonction par rapport à x en faisant intervenir la variable intermédiaire, u, qui est comme cachée. On dérive f par rapport à u, puis on dérive u par rapport à x suivant l'expression :

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

où df/du représente la dérivée extérieure et du/dx la dérivée intérieure.

Dérivons donc : $d/dx(x^2 + y^2) = d/dx(1)$. En dérivant des deux côtés pour conserver l'égalité, on obtient, d'un côté : $d/dx(x^2 + y^2) = d/dx(x^2) + d/dx(y^2)$, car la dérivée d'une somme est la somme des dérivées, et de l'autre : $d/dx(1) = 0$, car 1 est une constante.

$d/dx(x^2) = 2x$, mais pour effectuer $d/dx(y^2)$, il faut se rappeler que, dans y, il y a à l'intérieur x ; on doit ne pas négliger la dérivée intérieure dy/dx en écrivant : $d/dx(y^2) = 2y \cdot dy/dx$, soit au total $2x + 2y \cdot dy/dx = 0$.

En isolant dy/dx que l'on ne connaît pas, il vient : $2y \cdot dy/dx = -2x$, ou $dy/dx = -2x/2y = -x/y$, soit $dy/dx = -x/y$ ou, suivant une notation plus concise : $y' = -x/y$. Dans cette dérivée, il y a des x et des y comme dans l'expression de départ : $x^2 + y^2$, ce qui est donc normal.

On avait une courbe implicite, sans variable isolée, et on a dérivé de façon implicite pour obtenir $y' = -x/y$.

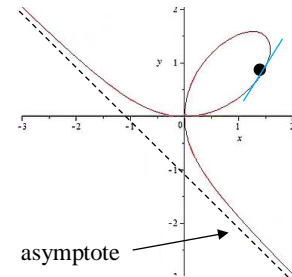
2/ Autre exemple : le folium de Descartes, d'équation $x^3 + y^3 - 3xy = 0$.

Supposons que 'on veuille trouver la pente de la droite tangente au point indiqué sur la courbe représentative. On a donc besoin de déterminer la dérivée, de façon implicite, l'équation de la courbe implicite (c'est un peu redondant, mais c'est clair).

On dérive par rapport à x, soit : $3x^2 + 3y^2 \cdot dy/dx - 3(1 \cdot y + x \cdot dy/dx) = 0$, sachant que la dérivée d'un produit comme $(3xy)$ doit suivre la règle : $(u \cdot v)'(x) = u(x) \cdot v'(x) + u'(x) \cdot v(x)$.

En simplifiant : $3x^2 + 3y^2 \cdot y' - 3y - 3x \cdot y' = 0$ (le 0 est la dérivée de 0 par rapport à x). On va alors s'efforcer d'isoler les y' , soit $3y^2 y' - 3xy' = 3y - 3x^2$ ou $y'(3y^2 - 3x) = 3y - 3x^2$,

soit $y' = (3y - 3x^2)/(3y^2 - 3x)$ ou $y' = (y - x^2)/(y^2 - x)$ i.e. la dérivée de la courbe implicite.



(Nous avons tracé l'asymptote en pointillé pour $a = 1$ dans l'équation cartésienne générale : $x^3 + y^3 = 3axy$.)

L'aire de la boucle est égale à celle du domaine situé entre la courbe et son asymptote (d'équation $x + y = -a$) de valeur $3a^2/2$ et cette courbe admet l'origine comme point double.²

¹ Samuel Bernard, Dérivation implicite, 11 avril 2013, Cégep Terrebonne, <https://www.youtube.com/watch?v=BfxOcwJvMDC>

² https://fr.wikipedia.org/wiki/Folium_de_Descartes

§58.- DISOLATRER A LA BENTHAM

1/ Le malin génie de Bentham

- i Des idoles d'après Bacon aux fictions d'après Bentham*
- ii La séparation de l'Etat et du marché en question*

2/ Les erreurs d'interprétation de Bentham

- i Le principe de souveraineté populaire et le bonheur*
- ii Les suites : Rendre les gens heureux malgré eux*

**§59.- REPENSER LA VOLONTE GENERALE
EN TERMES DE NŒUDS ET EN TERMES VECTORIELS**

1/ Les deux natures de la volonté générale

a) Le faux trèfle comme porte malheur

b) Matière et forme en politique

- i Le peuple comme matière indéterminée*
- ii La volonté générale comme forme ouverte*

c) Un entrelacs de perfectibilité

- i Liberté et perfectibilité*
- ii La perfectibilité du sujet et celle de l'objet*

2/ Un objet-sujet comme horizon de réalité

- i Le profil épistémologique d'une notion en renouvellement*
- ii Quid du silence, de l'exil, de la ruse et de la désobéissance ?*
- iii Les deux natures ou niveaux de la volonté*

**3/ Matrice unitaire et transformation linéaire,
ou la compression de la volonté générale obscure en volonté générale clairvoyante**

Annexes I, III, III^{bis} et IV, 425

Annexe I

La diagonale de Cantor

Dans un bref article, paru en 1874, Georg Cantor fonde la théorie des ensembles en considérant pour la première fois l'infini comme objet d'étude mathématique. C'est fini : désormais, des théorèmes le cernent !

Avant cette date, on parlait d'infini, mais de façon vague. Aux XVII^e et XVIII^e siècles, l'idée d'infini n'était plus rejetée comme dans l'antiquité (dans son théorème sur l'infinité des nombres premiers, Euclide ne concluait qu'à l'existence d'une quantité de nombres premiers supérieure à toute quantité donnée). L'accueil fut timide. John Wallis commença par baptiser l'infini ∞ . Sous ce logo, il fut utilisé dans le nouveau calcul décomposant une surface en une infinité de parallélogrammes de même taille, égale à $1/\infty$ de la surface totale. On demanda aussi au ∞ de servir à décrire le passage à la limite, notamment des séries infinies...

Il s'agissait d'un infini en puissance, assimilable à un processus indéfini. Un pas de plus est toujours possible, à la manière du successeur d'un entier naturel. Avec l'article de Cantor, la gloire arrive. L'infini change de nature et de dénomination avec la lettre hébraïque \aleph (*aleph*).

La note de Cantor fut courte pour le sujet (5 pages). Deux résultats tout simples, mais d'une portée sans prix : un résultat positif avec *la possibilité d'énumérer les éléments d'un ensemble infini*; un résultat négatif avec *l'impossibilité d'énumérer les réels*.

Théorème 1

[...]

Théorème 2

Quand on aborde les nombres réels, les choses empirent : il n'y a pas moyen de les numéroter, mais, pris comme tout, ils n'en existent pas moins comme infini. La démonstration consiste à pouvoir exhiber un réel α dans une suite quelconque de réels a_0, a_1, \dots , vérifiant $\alpha \neq a_n$ pour tout n . A cette fin, on essaie d'extraire une sous-suite $a_{n_0} < a_{n_2} < a_{n_4} < \dots < a_{n_5} < a_{n_3} < a_{n_1}$ à nouveau en zigzagant, les termes pairs allant en croissant, les impairs en décroissant, le tout convergeant vers le nombre α . Supposons $i \geq 1$ et n_i construit. Deux situations se présentent :

- il n'existe pas $n > n_i$ tel que a_n soit entre $a_{n_{i-1}}$ et a_{n_i} (strictement). La moyenne des deux termes, $\alpha = (a_{n_{i-1}} + a_{n_i})/2$, diffère de a_n . Coïncé entre les demi-suites paires et impaires, le réel α est différent de tous les a_n . CQFD ;

- il existe un n tel que $n > n_i$. Soit n_{i+1} le plus petit élément (propriété de la suite des nombres entiers). Or, comme $(\mathbb{R}, <)$ est complet (la limite de toute suite de Cauchy appartient à l'espace considéré), il existe toujours un réel α coïncé entre les deux demi-suites paires et impaires : $a_{n_0} < a_{n_2} < a_{n_4} < \dots < \alpha < \dots < a_{n_5} < a_{n_3} < a_n$. On en déduit facilement $\alpha \neq a_n$ pour tout n .

La démonstration procède par récurrence en supposant l'inégalité vraie pour n et en montrant qu'elle est vraie pour $n+1$. En 1891, Cantor donna une autre démonstration de cette propriété : *la méthode de la diagonale*, fondée sur un raisonnement par l'absurde en démasquant autrement, dans une suite de réels, un réel α qui n'est pas dedans.

L'argument part de l'idée que l'ensemble des réels compris entre 0 et 1 est dénombrable. Si tel est le cas, on considère, pour chaque n , les développements décimaux de a_0, a_1, \dots :

$$\begin{aligned} a_0 &= \dots, a_{0,0} a_{0,1} a_{0,2} \dots \\ a_1 &= \dots, a_{1,0} a_{1,1} a_{1,2} \dots \\ a_2 &= \dots, a_{2,0} a_{2,1} a_{2,2} \dots \\ &\dots \end{aligned}$$

Considérons le nombre 0, $a_{0,0} a_{1,1} a_{2,2} \dots$ dont les décimales sont les chiffres de la diagonale du tableau à double entrée (chiffres en rouge). Modifions chacune des décimales de ce nombre de façon à obtenir un réel $\alpha = 0, a_{0,0}^{\#} a_{1,1}^{\#} a_{2,2}^{\#} \dots$ tel que $\alpha \neq a_n$ pour tout n , car le n -ième chiffre du développement de a_n est $a_{n,n}$, et celui du développement de α est $a_{n,n}^{\#}$, qui n'est pas $a_{n,n}$. Contrairement à ce qui avait été annoncé, le nombre α n'a pas dans la liste précédente. On tombe sur une contradiction. L'ensemble des nombres réels n'est pas dénombrable.

Avec le recul, le résultat positif apparut mineur et résultat négatif majeur. On ne considère plus aujourd'hui l'infini comme une entité unique. Il y a au moins deux infinis différents ! Tous pourraient faire l'objet de démonstration. Cantor s'imposa comme le Christophe Colomb du monde qui passait pour une *terra incognita*. Son article permit de surmonter l'idée qu'on ne pouvait faire de mathématiques sur l'infini. La voie était ouverte pour d'autres découvertes (les ordinaux infinis) et des surprises défiant la logique (le problème du continu).¹

¹ Alain Laraby, *Cantor ou l'étude infinie... de l'infini actuel*, in Temps marranes. Revue d'idées et d'opinion, n°17, 10 févr. 2012, pp.1-8.

Annexe III

Matrice unité et matrice unitaire¹

1/ Matrice identité

On sait que $1 \cdot x = x$ sans que x change. Cette propriété du scalaire 1 dans la multiplication est l'identité. **Par analogie**, il existe une matrice identité **I** telle que, si on multiplie cette matrice par une seconde matrice **A**, on obtient toujours la seconde matrice **A**, i.e. $\mathbf{I} \times \mathbf{A} = \mathbf{A}$. Ex. : Soit la matrice dont on cherche la matrice **I**

$$\begin{bmatrix} ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

Pour que cette multiplication matricielle soit définie, il faut que la matrice identité **I** ait les mêmes dimensions que la matrice **A**, soit (3,3), i.e. 3 lignes, 3 colonnes.

Voyons dans la matrice résultat, le chiffre **1**. Pour aboutir à ce résultat, il faut multiplier, selon les règles habituelles en la matière, la 1^{re} ligne de la matrice **I** par la 1^{re} colonne de la matrice **A**, soit $? \cdot 1 + ? \cdot 4 + ? \cdot 7 = 1$, donc la solution la plus simple sera la ligne (1,0,0) pour la matrice identité **I**, sachant que $1 \cdot 1 + 0 \cdot 4 + 0 \cdot 7 = 1$. Donne (1,0,0). En procédant de la même manière, pour les autres lignes de la matrice identité, celle-ci sera :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \text{ De même, pour une matrice (2,2), ce sera : } \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ etc.}$$

2/ Matrice unitaire

. Rappelons ce qu'est une matrice complexe en séparant une matrice en une matrice complexe **A** et une matrice imaginaire **iB**. Par ex. :

$$\begin{bmatrix} 2+3i & i & 6-4i \\ 7 & 2-3i & -i \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 & 6 \\ 7 & 2 & 0 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 0 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

Par ailleurs, nous savons que le conjugué du nombre complexe $a + bi$ est $a - bi$. De la même manière, la matrice conjuguée de $A + iB$ est $A - iB$. En reprenant donc l'ex. précédent, la matrice conjuguée sera située à gauche du tableau et **la matrice transposée** (que nous avons déjà rencontrée au §47 3/b)-iii) sera située à droite

$$\begin{bmatrix} 2-3i & -i & 6+4i \\ 7 & 2+3i & i \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 2-3i & 7 \\ -i & 2+3i \\ 6+4i & i \end{bmatrix}$$

. Pour la dernière opération, il suffit de changer les lignes en colonnes et les colonnes en lignes. Nous pouvons maintenant multiplier la matrice et sa matrice conjuguée (appelée aussi la transposée hermitienne), si du moins l'une et l'autre sont carrées. Autre ex : la matrice **M**, la matrice conjuguée et la matrice transposée :

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 2 & 1-i \\ 1+i & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1+i \\ 1-i & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1-i \\ 1+i & 3 \end{bmatrix}$$

¹ Khan Academy, *La matrice identité*, <https://fr.khanacademy.org/math/>: Professor Dave, *Complex, hermitian and unitary matrices*, 7 août 2019, <https://www.youtube.com/watch?v=DUuTx2nbizM>; <https://mathworld.wolfram.com/UnitaryMatrix.html>;

Matrice unité et matrice unitaire (suite)

Par ailleurs, les matrices réelles sont considérées orthogonales si leurs colonnes forment une base orthogonale. L'inverse d'une matrice orthogonale, A^{-1} , est la même que sa transposée, A^T , soit $A^T = A^{-1}$.

. Matrice inverse (matrice carrée « inversible » ou régulière ou non singulière)

Soit $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Si le déterminant $ad-bc \neq 0$, alors A possède un inverse : $A^{-1} = 1/(ad-bc) \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.

La matrice inverse d'une matrice inversible A est elle-même inversible, i.e. $(A^{-1})^{-1} = A$

Le produit d'une matrice avec son inverse donne **la matrice identité** : $A^{-1} A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$,

. Pour les matrices complexes, si les vecteurs colonnes sont orthonormés, **la matrice est dite unitaire**, et la matrice conjuguée transposée, U^h , est la même que l'inverse de la matrice, U^{-1} , soit $U^h = U^{-1}$. Une matrice réelle unitaire est juste une matrice orthogonale. Vérifions $U^h U$, avec $U^h = U^{-1}$, redonne la matrice identité I . Si c'est bien le cas, la matrice U est effectivement une matrice unitaire :

$$U = \begin{bmatrix} i/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -i/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -i/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & i/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -i/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & i/\sqrt{2} \end{bmatrix} \quad U^h U = \begin{bmatrix} -i/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & i/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -i/\sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

. L'intérêt d'une matrice unitaire est d'être un opérateur œuvrant dans un espace de dimension finie et ayant les propriétés suivantes :

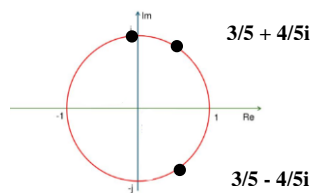
- toutes les valeurs propres λ sont situées sur le cercle unité et sont égales à $|\lambda| = 1$, avec $\lambda = e^{i\theta}$ (θ est une valeur réelle représentant un angle sur le cercle unité) ;
- la matrice est toujours diagonalisable (il n'y a pas de vecteur puissance) (voir notre *Annexe III bis* suivante)
- on peut toujours trouver une base orthonormée pour l'espace vectoriel considéré.

Ces propriétés sont presque celle des matrices hermitiennes (que nous avons évoquées en abordant la mécanique quantique dans le §55), état rappelé que dans ce dernier cas les valeurs propres sont réelles, alors qu'ici elles sont complexes.

. Soit la matrice unitaire U . Donnons un exemple permettant de voir des valeurs propres sur le cercle unité.

$$U = \begin{bmatrix} 3/5 & -4/5 & 0 \\ 4/5 & 3/5 & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{bmatrix}$$

Les vecteurs colonnes sont deux à deux orthogonaux. Les valeurs propres sont les suivantes : $3/5, \pm 4/5i$ et i .



Les vecteurs propres respectif sont :

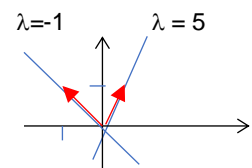
$$1/\sqrt{2} \begin{bmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, 1/\sqrt{2} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, 1/\sqrt{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ces trois vecteurs sont normalisés par $1/\sqrt{2}$

. Rappelons que les valeurs propres sont les solutions du **polynôme caractéristique** (ou intrinsèque, car indépendant de toute base) de l'équation aux valeurs propres : $p(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0$. L'ensemble des solutions est le *spectre* de A . Pour trouver les vecteurs propres correspondants, il faut résoudre l'autre équation $\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$, où \mathbf{v} est un vecteur propre et λ une valeur propre. $\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ désigne une transformation matricielle. $\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ ou $0 = \lambda\mathbf{v} - \mathbf{A}\mathbf{v}$ ou encore $0 = \lambda\mathbf{I}\mathbf{v} - \mathbf{A}\mathbf{v} = (\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{v}$ pour tout λ , \mathbf{I} étant la matrice identité et en supposant qu'il n'y a pas de vecteur propre nul. L'ensemble des vecteurs qui satisfont cette équation est l'*espace nul*.

Soit par ex. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$, les valeurs propres sont $\lambda = 5, -1$

Après calcul, les **vecteurs propres** sont : $\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, formant la matrice de vecteurs $\begin{bmatrix} \text{propres} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Les vecteurs propres représentent une nouvelle base. Le système de coordonnées standard du début est changé



Annexe III bis

La diagonalisation d'une matrice

1/ Principe

En algèbre linéaire, la diagonalisation soit une opération fondamentale des matrices. La diagonalisation est une application linéaire qui s'effectue à l'intérieur d'un même espace vectoriel E de dimension finie n (cette transformation s'appelle un *endomorphisme* parce qu'on va de E vers E ; *endo-* signifie « en dedans »). On associe à l'espace vectoriel E une matrice carrée (n,n) , la matrice A . L'idée est de transformer cette dernière en une matrice d'emploi plus simple qu'est une *matrice diagonale*, avec des scalaires sur la diagonale et des zéros partout ailleurs, moyennant l'intervention d'une *matrice de passage* P qui permet de se trouver dans une nouvelle base. A doit être semblable à la matrice diagonale.

Autrement dit, diagonaliser la matrice A revient à lui trouver une base pour laquelle A est diagonale. En termes plus savants et précis, on dira qu'une application est diagonalisable dans le corps des réels ou des complexes si l'on peut trouver une base de E dans laquelle sa matrice est diagonalisable.¹

2/Matrice de passage

Une matrice de passage est une application qui permet de **passer de la représentation d'un vecteur dans une base donnée à la représentation du même vecteur dans une autre base**. Trouver la matrice de passage implique de **chercher une matrice inversible P telle que $P^{-1}AP$ est diagonale**.

La matrice de passage fait le pont d'une base à l'autre. Son entremise facilite la diagonalisation de la matrice A consistant à **écrire une matrice donnée dans une base où ses éléments hors de la diagonale sont nuls**.

3/ Matrice diagonale

On dit que A est diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale. Pour qu'elle le soit, il faut, répétons-le, vérifier s'il existe une matrice P inversible telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale comme suit :

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = D \quad \text{ex. : } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

D est une matrice dont la *trace* est la somme des éléments de la diagonale ($\text{tr } D = (\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n)$) et *le déterminant de A* une expression des valeurs propres $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$. Des éléments spécifiques associés à A comme le déterminant sont inchangés en passant à D . Ils deviennent faciles à calculer sur D .

4/ Exemple :

La matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ a pour valeurs propres 3 et -1 avec pour vecteurs propres respectivement $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Chaque vecteur propre engendre une droite vectorielle (la droite est dirigée par ce vecteur) et les deux vecteurs propres, étant coplanaires, engendrent un sous-espace vectoriel qui est, en l'occurrence, un plan.

La matrice diagonale D est composée des vecteurs propres 3 et -1 : $D = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. La matrice inversible P doit être composée des vecteurs propres dans le même ordre que les valeurs propres associées, et P doit être normalisée. Ex : $P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ en $P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. La diagonalisation doit vérifier : $PDP^{-1} = A$

5/ Rem. : Il existe d'autres façons de « réduire » la matrice A quand on ne peut pas la diagonaliser. Par ex. **la triangulation**. Par ex., il existe une matrice P inversible, mais à coefficients complexes, telle que $P^{-1}AP = T$

$$T = \begin{bmatrix} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & 0 \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \end{bmatrix}$$

On peut donc toujours triangulariser. L'intérêt, est, entre autres, est de voir dans T le spectre de A (i.e. l'ensemble des valeurs propres de A), puisqu'il s'agit des éléments diagonaux de T (les valeurs propres de T = les valeurs propres de A)



¹ <http://www.jybaudot.fr/Vecteursmatrices/diagonalisation.html>; <https://fr.wikipedia.org/wiki/Diagonalisation>; poly, <http://www.math.univ-toulouse.fr/~barthe/L2-SPIEEA/PolyJBHU-ch8.pdf>; <https://www.dcode.fr/diagonalisation-matrice>

Annexe IV

Passager clandestin et bien public ¹**1/ Règle du jeu :**

Quatre joueurs, qui ne se connaissent pas, sont isolés dans des box individuels. Ils ne peuvent donc communiquer. Chacun reçoit dix jetons. Une cagnotte commune permet de réunir les ressources nécessaires pour atteindre un objectif.

Chaque joueur décide, soit de conserver pour lui l'ensemble des jetons, soit de contribuer à la cagnotte commune. Pour décider entre ces deux options, chaque joueur prend en compte les gains qui leur correspondent :

<ul style="list-style-type: none"> • 2 € x le nombre de jetons conservés 	
<ul style="list-style-type: none"> • 1 € x le nombre de jetons jetés dans la cagnotte 	

Supposons qu'un joueur conserve 5 jetons et que l'ensemble des participants placent 17 jetons dans la cagnotte. Dans ce cas, son gain de fin de partie sera :

$$\begin{array}{l} 5 \text{ jetons} \times 2 \text{ €} \\ + 17 \text{ jetons} \times 1 \text{ €} \end{array} \Bigg\} = 27 \text{ €}$$

2/ Allocation optimale ? Non, équilibre sous-optimal. Voici pourquoi :

La solution la plus rationnelle est, a priori, de ne pas contribuer au pot commun en conservant par devers soi tous ses jetons (10 jetons x 2 € = 20 €) (**équilibre de Nash**)

Or, si les 4 joueurs investissent 10 € dans la cagnotte, **chaque joueur gagnerait 40 € et non 20 €**, car placer 1 € dans le pot commun rapporte 1 € à chacun des joueurs. La stratégie réellement gagnante aurait été de mettre tous ses jetons dans le pot commun. Les joueurs préfèrent l'issue optimale mais n'y parviennent pas.

3/ Et si on jouait au malin ?

Un des joueurs laisse les autres contribuer à la cagnotte et **leur laisse croire** qu'il en fera autant en espérant que les autres ne feront pas comme lui et qu'ils contribueront à l'argent de la cagnotte. Son gain espéré sera : **(30 jetons x 1€) + (10 jetons x 2 €) = 50 €**.

Cette stratégie, apparemment gagnante, est celle du **passager clandestin**

Ce passager profiteur ou tricheur gagnera **50 €** et chacun des 3 joueurs restants 30 €, mais l'ensemble des joueurs ne gagnera que : **50 € + (30 € x 3) = 140 €** alors qu'en l'absence d'un tel passager, l'ensemble des joueurs aurait gagné : **40 € x 4 = 160 €**. Même dans ce cas, il vaut encore mieux de jouer collectif, étant rappelé qu'il convient de réaliser ensemble un objectif

4/ Pareto suboptimal

En jouant au passager clandestin, on court aussi le risque que tous les autres joueurs jouent eux-mêmes au passager clandestin. Dans ce cas, on revient au cas initial du jeu perso. Gain total : **20€ x 4 = 80 €** au lieu de **40 € x 4 = 160 €** en jouant collectif

5/ Exemple de passager clandestin en matière de négociations sur le climat

Problème, sinon de stabilité du climat, du moins de la qualité de l'atmosphère affectée par la pollution

Tentation du passager clandestin (un Etat en l'occurrence) qui refuserait de faire les efforts nécessaires pour diminuer les émissions de gaz à effet de serre (GES), ou qui signerait un protocole pour la forme mais ne l'appliquerait pas ou peu de retour au pays

Il peut bénéficier du « service » que constitue la lutte contre le changement climatique des autres pays sans en payer le coût, et il y a un risque que certains pays émettent même plus de GES sachant que les autres diminuent leurs émissions.

Il est difficile, en pareille situation, de voir si la conduite du passager clandestin peut s'avérer utile, car, même s'il conteste la thèse du changement climatique, la lutte contre la pollution demeure une impérieuse nécessité.

¹ Alain Laraby, *Introduction à la théorie des jeux à l'adresse des médiateurs*, atelier, Institut catholique de Paris. Ifomène, 2006-2019.

§60.- RAISONNER EN UTILITARISTE ET EN INFERENCE BAYESIENNE

1/ La question de l'utilité et de la vérité de l'utilitarisme

a) Les raisons pour et contre

- i « Viva ! » et « à bas ! »*
- ii Maximisation et marchandage, et quid du raisonnement bayésien ?*
- iii Le Batna ou la meilleure mesure de repli*

b) Le paradoxe de Condorcet

- i Un utilitariste et un bayésien à sa manière*
- ii Du paradoxe de Borda à l'effet Condorcet*

c) Le théorème d'impossibilité d'Arrow et sa référence à Rousseau

Un exemple d'effet Condorcet. - La levée de l'indétermination du choix collectif
Annexes II et IV, 431

2/ L'action des coalitions passée sous silence

- i L'arbre qui cache la forêt des coalitions*
- ii Leur bénéfice ignoré*
- iv La crédibilité en appui des revendications*

3/ Un pré-bilan

Annexes VII, VIII et IX, 435

◦

Annexe II

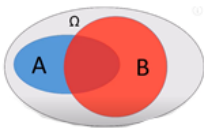
La formule de Bayes

Deux exemples, l'un issu cours de statistique épidémiologique (I), l'autre issu d'une erreur judiciaire célèbre d'un destin tragique (II).

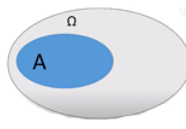
I

1/ En une période de pandémie (par ex. covid-19 entre mars et juin 2020 en France), la problématique est celle du test qui diagnostique la présence d'un virus. En d'autres termes, quelle est la probabilité d'être malade si le test est positif ? Si A : être malade, et B : présenter un résultat au test positif, quelle est la probabilité conditionnelle de A si B est présent, $P(A|B)$?

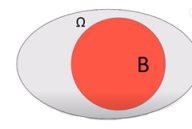
On peut formaliser le problème grâce aux diagrammes de John Venn qui élargira au 19^e siècle les travaux d'Euler qui avait choisi, le siècle précédent, d'attribuer des cercles aux attributs en étudiant les syllogismes)



Soient A et B deux probabilités d'événements indépendants dont la valeur peut être représentée par les deux surfaces colorées¹

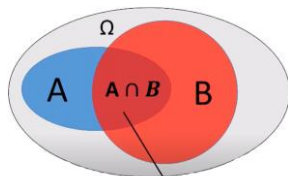


La probabilité de A peut être imagée par le rapport de la surface en bleu de A divisée par l'ensemble gris de l'univers des possibles Ω



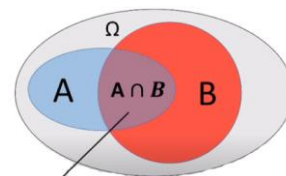
De même, la probabilité de A peut être imagée par le rapport de la surface en rouge de A divisée par l'ensemble de l'univers des possibles Ω

De là, les intersections suivantes :



$$P(A \text{ si } B) = P(A \cap B) / P(B)$$

La probabilité de A si B est $A \cap B$ en rouge foncé, représentée par l'intersection des deux surfaces. Cette surface est une partie de la probabilité de B. Donc la part de A dans B est égale à la surface de $A \cap B$ divisée par la surface de B, soit à peu près le 1/4 de B sur cette image



$$P(B \text{ si } A) = P(A \cap B) / P(A)$$

La probabilité de B si A est $A \cap B$ en violet, représentée par l'intersection des deux surfaces A et B. Cette surface est une partie de la surface de A. Donc la part de A dans B est égale à la surface de $A \cap B$ divisée par la surface de A, soit à peu près la 1/2 de A sur cette image

¹ Pour l'ensemble des figures et tous les commentaires qui suivent, v. Thierry Ancelle, *Théorème de Bayes*, op. cit.. Accessible sur internet.

La formule de Bayes (suite)

Soient donc les deux formules dans lesquelles on fait une petite inversion dans chaque formule

$$\begin{aligned} P(A \text{ si } B) &= P(A \cap B) / P(B) & \Rightarrow & P(A \cap B) = P(A \text{ si } B) P(B) \\ P(B \text{ si } A) &= P(A \cap B) / P(A) & \Rightarrow & P(A \cap B) = P(B \text{ si } A) P(A) \end{aligned}$$

En égalisant les deux expressions pour la même valeur $P(A \cap B)$, on obtient l'égalité, et de là **le théorème de Bayes** :

$$P(A \text{ si } B) P(B) = P(B \text{ si } A) P(A) \quad \Rightarrow \quad P(A \text{ si } B) = P(A) \frac{P(B \text{ si } A)}{P(B)}$$

$P(A \text{ si } B)$ est une probabilité conditionnelle (**si** B, i.e. connaissant B), donc **une probabilité a posteriori**. $P(A)$ est la probabilité globale de A, indépendamment de B, avant de connaître B, donc une **probabilité a priori**.

Le théorème de Bayes nous dit, dans son essence qu'une probabilité a posteriori peut être calculée à partir d'une probabilité a priori, connaissant certains paramètres : **probabilité a posteriori = probabilité a priori x k**.

Un exemple concret, Soient des données épidémiologiques suivantes :

		Malades (A)	Sains	Total
test biologique	positif (B)	21	8	29
	négatif	4	87	
Total		25	95	120

La probabilité d'être malade (**probabilité a priori**) : $P(A) = 25/120 = 0,208$ (avant de connaître B, i.e. passer des tests)

La probabilité du test positif : $P(B) = 29/120 = 0,242$

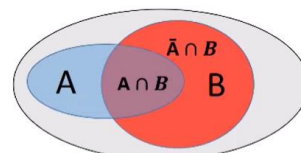
La probabilité de la sensibilité du test, i.e. de la capacité du test à détecter les malades ; c'est une probabilité conditionnelle (**probabilité a posteriori**) : la probabilité de A (d'être malade) connaissant B (test +) : $P(B \text{ si } A) = 21/25 = 0,840$

La probabilité d'être malade si le test est positif : $P(A \text{ si } B) = 21/29 = 0,724$

$$\text{D'où la vérification de l'égalité : } P(A \text{ si } B) P(B) = P(B \text{ si } A) P(A) = 0,724 \times 0,242 = 0,840 \times 0,208$$

2/ Malgré son apparence assez simple, la formule de Bayes : $P(A) = P(B \text{ si } A)/P(B)$ présente quelques difficultés.¹ On a trois types de données, mais l'une des données est plus délicate à connaître. $P(A)$ est la probabilité d'être malade. C'est la probabilité de la prévalence de la maladie. On peut la connaître a priori. $P(B \text{ si } A)$ est la sensibilité au test, mais comment connaître $P(B)$, la probabilité de présenter un résultat de test + ?

Revenons à Venn dont les diagrammes sont si suggestifs en considérant le complémentaire de A, soit \bar{A} :



$$P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B)$$

$$P(A \cap B) = P(B \text{ si } A) P(A) \quad P(\bar{A} \cap B) = P(B \text{ si } \bar{A}) P(\bar{A})$$

On peut donc écrire :

$$P(B) = P(B \text{ si } A) P(A) + P(B \text{ si } \bar{A}) P(\bar{A})$$

Et donc :

$$P(A \text{ si } B) = P(A) \frac{P(B \text{ si } A)}{P(B)} \quad \Leftrightarrow \quad P(A \text{ si } B) = P(A) \frac{P(B \text{ si } A)}{P(B \text{ si } A) P(A) + P(B \text{ si } \bar{A}) P(\bar{A})}$$

¹ Ibid.

La formule de Bayes (suite)

On connaît maintenant toutes les valeurs des termes de droite de l'équation. Comme $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ et $p(\bar{B}) = 1 - P(B)$, on a, pour reprendre l'exemple précédent :

$$P(A \text{ si } B) = \frac{\text{prévalence} \times \text{sensibilité}}{\text{prévalence} \times \text{sensibilité} + (1 - \text{prévalence}) \times (1 - \text{spécificité})}$$

$P(A \text{ si } B) = \frac{P(A) \times P(B \text{ si } A)}{P(B \text{ si } A)P(A) + P(B \text{ si } \bar{A})P(\bar{A})}$

probabilités a priori (prévalence, 1 - prévalence)
 qualités intrinsèques du test biologique (sensibilité, 1 - spécificité)
 (que l'on connaît car affichées par le fabricant)

On connaît la prévalence et son inverse (1-prévalence de la maladie), on connaît la sensibilité (la probabilité de personnes malades et positives au test, les *vrais positifs*) et on connaît l'inverse de la sensibilité, i.e. (1 - la spécificité de la technique) soit la probabilité des *faux positifs*, i.e. celle du résultat négatif de test chez les patients non malades, les *vrais négatifs*).

Dans cet exemple,

Prévalence = 0,208	1- prévalence= 0,792
Sensibilité = 0,840	
Spécificité = 0,916	1-spécificité = 0,084

$$P(A \text{ si } B) = 0,208 \frac{0,84}{0,208 \times 0,84 + 0,084 \times 0,792} = 0,724$$

La probabilité d'être malade si le test est positif est de 0,724, soit 72,4 % (« valeur prédictive positive du test »)¹

II

La place manque pour parler du procès de Sally Clark en 1998 au Royaume-Uni. Cette jeune femme a été accusée à tort, d'avoir tué ses deux bébés à quelques semaines d'intervalle. Sur la base d'un mauvais traitement des statistiques, Sally Clarke fut condamnée pour meurtre et jetée en prison. En 2003, on reconnut l'erreur judiciaire grâce à la formule de Bayes. La prison causa chez elle de nombreux troubles psychiatriques et l'alcoolisme. Elle mourut en 2007. Pour la relation de cette histoire et son analyse, v. l'ouvrage déjà cité : Leila Schneps, Coralie Golmez, *Les maths au Tribunal. Quand les erreurs de calcul font les erreurs judiciaires*, Seuil, Paris, 2013.

III

A la place, nous aimerions davantage insister sur **la signification profonde du dénominateur de la formule de Bayes**.

A entendre Lê Ngyeng Hoang, **le dénominateur est une manière de prendre en compte les théories concurrentes, les hypothèses alternatives (A)**. Autrement dit, le dénominateur de l'équation suggère qu'une théorie ne peut pas être analysée de façon indépendante. Elle doit être analysée de façon alternative, et une théorie est crédible si les alternatives n'arrivent pas à être aussi bonnes.²

Le dénominateur exprime l'idée que la probabilité d'un événement est la somme des probabilités des scénarios (**les données D**) qui conduisent à cet événement (**la théorie T**) selon la formule de Bayes réécrite de façon plus générale de la probabilité de la théorie **T** sachant les données **D** :

$$P[T|D] = \frac{P[D|T]P[T]}{P[D|T]P[T] + \sum_{A \neq T} P[D|A]P[A]}$$

Faut-il penser à toutes les théories concurrentes ? Lê Ngyeng Hoang impose une contrainte : non, seulement les théories calculables, celles qui débouchent sur un nombre qui permet de prédire. En droit, on sera moins exigeant. Qu'on patiente !

¹ *Ibd.*

² Lê Nguyen Hoang, ScienceAll, *Les lois de probabilités. Bayes 2*, 18 févr. 2019 ; <https://www.youtube.com/watch?v=X0gYOzxua64>; *Une philosophie bayésienne des sciences*, Liberté académique, 14 avril 2019, <https://www.youtube.com/watch?v=eo-nNCuqHwI>

Options des enchères (ou mises) du jeu de poker simplifié

1/ Règles de base :

Je relance (“raise”):*je remets de l’argent au pot*

(je mise plus que la mise de départ et j’emporte le pot si personne ne veut “suivre” ma relance)

Je passe (“parole”) / je me couche (“fold”):*le pot est pour toi* (je jette les cartes sur la table, faces cachées;

je ne puis plus miser, ni récupérer les jetons, ni gagner le pot en fin de partie)

} *je sors
du jeu*

je passe pour voir (je veux arrêter les enchères et voir les mains en ajoutant au pot)- si l’autre joueur a une main *faible (f)*, **je gagne**Si l’autre joueur a une main *forte (F)*, **je perds**

2/ Les motifs pour voir (ou suivre) :

*Limiter les risques**Décourager un jeu agressif**S’informer sur le style de jeu adverse**Inciter à participer**Cacher sa force**Conserver une chance d’améliorer sa main*

3/ Les motifs pour « relancer »

Bluffer : Relancer conduit les adversaires à croire à une main forte, et peut les inciter à passer malgré une main correcte*Sonder l’adversaire*

4/ En réponse à une « relance »

Les joueurs encore dans le coup doivent tenir compte

- non seulement de la force de leur jeu

- mais aussi de **la probabilité que le relanceur soit en train de bluffer**

Cette évaluation est au poker évidemment subjective et intuitive

5/ L’intérêt du « bluff » (selon les professionnels) :

*Pour un joueur rationnel, le bluff sur une main faible n’est nullement une tentative de tromperie, ou un passage en force contre les statistiques, mais simplement un investissement à faire, judicieusement calculé pour augmenter ses gains sur l’ensemble de la partie**L’intérêt d’une stratégie de bluff optimal est de valoriser statistiquement ses mains gagnantes, en obligeant l’adversaire à venir les voir plus souvent**L’effet du bluff n’est pas sur les mains faibles (où le résultat est statistiquement indifférent), mais bien sur les mains fortes**Pour qu’un joueur puisse rentabiliser ses mains fortes, il est souhaitable que ses adversaires suivent ses relances**Cette stratégie de bluff rationnel permettra de rentabiliser un jeu agressif*

2/ L’action des coalitions passée sous silence

*i L’arbre qui cache la forêt des coalitions**ii Le bénéfice ignoré de l’action des coalitions**iii La crédibilité en appui des revendications*

3/ Un pré-bilan

Annexe VII

La valeur de Shapley en économie (comment répartir des coûts entre des coalitions de la vie civile ?)

Rem. préalable : Pour une exposition plus détaillée de la méthode de calcul : voir notre §46 -5/b)i. L'idée est de prendre la moyenne pondérée des contributions marginales ($v(SU\{i\}) - v(S)$) du joueur i dans toutes les coalitions $S \subset N - \{i\}$.

Trois villes voisines (A, B et C) sont en contrat avec une société pour réaliser des adductions d'eau. Le projet revient à 10 (millions d'euros) pour chaque municipalité prise séparément. Pour des raisons géographiques, le constructeur propose des coûts (réduits) de respectivement 16, 17 et 18 pour des contrats communs entre A et B , A et C , et B et C . Le contrat impliquant les trois villes a un coût de 24. Comment les coûts devraient-ils être répartis entre les trois villes ?

Ce jeu de coalition peut être décrit par un jeu à trois joueurs, $N = \{A, B, C\}$ où la valeur d'une coalition S est définie par l'économie de coût qu'un contrat commun entre ses membres permet de réaliser (comparé à la situation où chaque ville de S signerait un contrat individuel). On obtient ainsi les fonctions caractéristiques $v(A) = v(B) = v(C) = 0$, $v(\{A, B\}) = 4$, $v(\{A, C\}) = 3$, $v(\{B, C\}) = 2$ et $v(N) = 6$. La fonction caractéristique donne la valeur maximum à chaque coalition.

Dans ce jeu, il a 6 ordres d'arrivée (ou d'entrée) possibles D dans une coalition (3!). Ils sont répertoriés dans le tableau suivant qui donne les contributions marginales selon chacun d'eaux. Par ex., $D_A(ABC) = v(\{A\}) - v(\emptyset) = 0 - 0 = 0$, $D_B(ABC) = v(\{AB\}) - v(\{A\}) = 4 - 0 = 4$, etc.

La répartition des 6 millions de réduction de coûts selon la valeur de Shapley est donc donnée par $\phi(v) = (2.5, 2, 1.5)$. En termes de partage de coûts, cela signifie que, sur les 24 millions d'euros, les villes A, B et C auront à payer 7.5, 8, et 8.5 respectivement.

Ordre d'entrée	Contributions marginales		
	A	B	C
ABC	0	4	2
ACB	0	3	3
BAC	4	0	2
BCA	4	0	2
CAB	3	3	0
CBA	4	2	0
Total	14	12	9
Valeur de Shapley	$\frac{15}{6}$	$\frac{12}{6}$	$\frac{9}{6}$

Pour les problèmes de partage de coûts, la valeur de Shapley a été utilisée avec succès dans de nombreuses applications. Citons la répartition des frais entre les divisions du constructeur aéronautique McDonnell-Douglas, le partage des coûts de location des lignes téléphoniques d'une université américaine, le financement du développement de projets d'irrigation en eau dans le Tennessee, ou la fixation des frais d'atterrissage à l'aéroport de Birmingham.¹

Annexe VIII

La valeur de Shapley (suite) : La mesure du pouvoir de décision dans les organisations internationales

a) Rem. préalable : Nous sommes dans le cadre d'un « jeu simple » où une coalition ne peut que gagner ou perdre sans qu'un partage de gain soit envisageable. Appliquée aux jeux simples, la valeur de Shapley est connue sous le nom d'**indice de Shapley-Shubik**. Sur la présentation de cet indice : voir notre §46 -5/b)ii. Cet indice est devenu un instrument très utile pour la mesure du pouvoir de vote dans les processus de décision collective comme ceux des organisations internationales.

Un votant peut appartenir à un grand nombre de coalitions. Le **pivot** est le dernier votant dont le soutien est nécessaire au projet collectif en vue. Son pouvoir est lié à la procédure qui rend sa participation plus ou moins indispensable au succès d'une thèse ou d'un candidat.

b) Le Conseil de sécurité des Nations Unies est composé de 5 membres permanents (la Chine, la France, les Etats-Unis, le Royaume-Uni et la Russie) et de 10 membres non permanents (élus pour deux ans et renouvelés pour moitié chaque année). Chaque membre dispose d'une voix et la règle de décision est la suivante : « Les décisions [...] du Conseil de sécurité sont prises par un vote affirmatif de neuf de ses membres dans lequel sont comprises les voix de tous les membres permanents ». (art. 27, al. 3). La situation peut être représentée par un jeu (N, v) avec $N = M_1 \cup M_2$ (M_1 l'ensemble des membres permanents, M_2 celui des non-permanents), $v(S) = 1$ si $S \geq 9$ et $M_1 \subset S$, et $v(S) = 0$ sinon. On montre, en utilisant la notion de joueur pivot et l'indice de Shapley-Shubik, que $\phi_i = 0,19627$ pour i dans M_1 et $0,001865$ pour i dans M_2 . **La différence entre les indices signifie que le droit de veto détenu par un membre permanent lui confère un pouvoir de décision plus de 100 fois plus important que celui d'un membre non permanent !**

Un autre contexte où l'indice de Shapley-Shubik a été largement utilisé concerne l'analyse du pouvoir de vote des différents pays au sein du Conseil de l'Union européenne. En 1958, l'Allemagne, la France et l'Italie disposaient du même nombre de voix (quatre), les Pays-Bas comme la Belgique de deux voix et le Luxembourg d'une seule voix ; pour qu'une décision soit prise, douze voix étaient nécessaires. Il est facile de vérifier que le Luxembourg n'était jamais en mesure de rendre une coalition gagnante et constituait en conséquence un joueur nul (ou dummy). Paradoxalement, l'élargissement de l'Europe en 1973 s'est accompagné d'une augmentation du pouvoir de décision du Luxembourg.²

¹ D. Lepelley, M. Paul et H. Smaoui, *Les jeux coopératifs*, art. cit, <https://cemoi.univ-reunion.fr/> Nous avons contracté le texte.

² *Ibid.* Nous soulignons. De 1958 à 1973 la majorité qualifiée était de 17 voix. Or, le Luxembourg avait une voix et aucun pouvoir car aucune coalition ne pouvait devenir gagnante avec sa voix. Avec l'entrée de nouveaux pays, son pouvoir passe à 0,95 % en 1973 et à 3,02 % en 1981 (comme le Danemark qui a une population dix fois plus grande). (https://fr.wikipedia.org/wiki/Valeur_de_Shapley)

Annexe IX

La valeur de Shapley comme indice de pouvoir d'une coalition dans la vie publique interne ¹
--

a) *Rem.1* : Le jeu est encore à information parfaite, et l'idée est toujours de se partager un surplus ou un coût. Pour réaliser ce partage, les joueurs peuvent se regrouper pour former des coalitions, i.e. des sous-ensembles S de N. Les forces de chaque coalition s'exprime sous la forme d'une fonction caractéristique v . Pour une coalition quelconque S, $v(S)$ mesure la part de surplus que S peut obtenir sans recourir à un accord avec les joueurs membres des autres coalitions. La question à résoudre est la suivante : comment doit-on partager le surplus entre les n joueurs ? La valeur de Shapley suggère une voie de solution

b) *Rem.2* : Dans une assemblée législative, il y a plusieurs possibilités de coalition entre les partis. **Si l'on attribue une valeur de 1 aux coalitions gagnantes et 0 aux autres, alors la valeur de Shapley est une mesure du pouvoir des partis.** Autrement dit, **l'indice de pouvoir est normalisé entre 0 et 1.** Une puissance de 0 signifie que la coalition n'a pas d'effet sur le résultat du jeu, et une puissance de 1 signifie que la coalition détermine le résultat par son vote. Aussi la somme des pouvoirs de tous les joueurs est toujours égale à 1.

Considérons la façon dont peuvent se former les coalitions. La probabilité pour qu'un joueur i s'intègre à une coalition donnée (S - {i}) est égale au nombre de façons de former la coalition (S-i) [(s-1)! (n-s)!] rapporté au nombre de façons d'ordonner l'ensemble des joueurs (n!), soit ((s-1)! (n-s)!)/n!.

La façon d'ordonner est aléatoire. Le nombre de façons d'ordonner de cette façon correspond **au nombre de permutations aléatoires.** Soit S_n l'ensemble des permutations de n objets. Quel est son cardinal ? Pour définir une permutation, nous disposons d'abord de n choix possibles, puis seulement n-1 choix (puisque un nombre a déjà été utilisé), etc., jusqu'à n'avoir plus que deux choix pour n-1 et un seul choix pour n. Le cardinal de S_n est donc $n \times (n-1) \times \dots \times 2 \times 1 = n \times (n-1) \times \dots \times 2 \times 1 = n!$

Le poids de la coalition S sera mesuré par la probabilité que les s premiers éléments soient tous éléments de S. Cette probabilité est obtenue en divisant le nombre de façons d'ordonner les s premiers éléments de S par le nombre total de façons d'ordonner possibles, lequel correspond au nombre de permutations de n joueurs n à n, soit n!

Si cette coalition se forme, le joueur i peut gagner ce qu'il y a apporté, i.e. $v(S) - v(S-i)$. Il ne peut gagner plus car les autres ne l'accepteraient pas, ni moins car il aurait intérêt alors à s'associer aux (N-S) autres. L'espérance de gain du joueur id est la valeur moyenne de ses gains en fonction de la probabilité de son appartenance à chaque coalition donnée :

$$\varphi_i = \sum_{(S \subset N)} \frac{(s-1)! (n-s)!}{n!} [v(S) - v(S-i)], \text{ avec } S \subset N \text{ et } i \in S.$$

Telle est la valeur de l'indice pour le joueur i, où S est une coalition, s est la taille de la coalition gagnante (c'est-à-dire le nombre d'individus dans la coalition), n le nombre de joueurs total du jeu et un joueur i a du pouvoir si $v(S)=1$ et $v(S-\{i\})=0$.

La contribution de i est $v(S) - v(S-i)$ advient exactement pour les ordres d'arrivée dans lesquels i est précédé par les s-i autres joueurs dans S et suivi par les n-s joueurs qui ne sont pas dans S. Le nombre de permutations dans lesquelles cette contribution intervient est (s-1)! (n-s)!. L'indice rend compte du rôle que le joueur peut jouer dans les coalitions gagnantes.

c) exemples : https://fr.wikipedia.org/wiki/Valeur_de_Shapley; https://fr.wikipedia.org/wiki/Indice_de_pouvoir_de_Shapley-Shubik

¹ J. Attali, *Les modèles politiques*, p.120, et v. à nouveau, P. D Straffin, *Game theory and strategy*, op. cit, ch.27 : Application to politics : The Shapley-Shubik index, pp.177-184.

**§61.- ELARGIR LA LOGIQUE
EN TRANSFORMANT LE CARRE DES OPPOSITIONS EN HEXAGONE**

1/ L'utilité de certaines fictions

a) Les degrés de fiction

b) L'exclusion partielle de la logique du tiers exclu

- i Le carré logique*
- ii L'hexagone des oppositions*
- iii Le tiers inclus au centre des diagonales*

c) Rule of people et rule of law

- i Aux Etats-Unis*
- ii En Angleterre et en France*

2/ L'utilitarisme : un bilan favorable mitigé

a) Ses mérites et ses avantages

- i Un critère du bien et du mal à la porte de tous*
- ii Un effort de mesure, à l'instar de la science*

b) Ses inconvénients et ses manques

- i Dans le sillage de Bentham, d'autres surprises de taille*
- ii L'absence de « sentiment de société » qui en résulte*

o

§62.- OUVRIR AUSSI LA LOGIQUE A D'AUTRES FORMES PERIPHERIQUES

1/ L'illogisme dans le langage juridique

a) Je ne dis pas non, je ne dis pas oui

- i Politesse, adresse ou lâcheté ?*
- ii L'arrêt Bush. v. Al Gore (2000)*

b) Va, je ne te hais point

- i Une affirmation renforcée*
- ii Une résistance inaperçue : la réactance*

c) Je vous mens, donc tu me suis

- i Un tsunami de mensonges*
- ii Un Américain menteur autocrate à la Maison Blanche*

2/ Autres formes de logique en œuvre

a) Le carré modal

- i Aristote, Théophraste et Diodore*
- ii Adverbes et propositions complétives*

b) Le rôle de la logique modale dans l'interprétation du droit

- i Le figinage du droit par les modalités du langage*
- ii La spécificité de la logique juridique, particulièrement en droit constitutionnel*

c) Trump et la logique juridique et politique

- i Le cogito trumpien*
- ii Utiliser jusqu'à la corde la logique juridique*
- iii La logique politique qui revient en boomerang*
- iv Un schéma inspiré de Grothendieck*

o

§62. bis - OUVRIR AUSSI LA LOGIQUE A D'AUTRES FORMES PERIPHERIQUES

3/ Autres formes de logique en œuvre (suite)

a) Le « très » et le « presque »

- i Le « très » et le « presque » en théorie des catégories, 438
- ii Le « très » et le « presque » dans la réflexion constitutionnelle
- iii Les notions de foncteur et de transformation naturelle en droit

b) Le « flexible » et le « flou »

- i Le « peu » et le « trop », 442
 - ii Le faiblement déterminé, le provisoire et le potentiel
 - iii Le flou du droit et la théorie des matroïdes
 - iv Le flou du droit et la théorie des ensembles flous, 448
- Annexes III, IV et V, 454

a) Le « très » et le « presque »

i Le « très » et le « presque » en théorie des catégories

(Intr. gle
2/b)i)
(§10-ii)

Comme beaucoup d'autres théories scientifiques, la théorie des ensembles repose sur la simple alternative « vrai-faux ». Cette théorie est en œuvre dans différents domaines. On l'a vu en droit constitutionnel avec la notion d'ensemble vide, \emptyset , ainsi qu'avec les applications injective, bijective et subjective entre les notions de pouvoir et de fonction. Malgré ses aperçus multiples, la théorie des ensembles s'avèrerait incapable d'appréhender une pensée telle que « à deux pas de la vérité ». En revanche, la théorie des catégories, formulée au milieu du XX^e siècle, permettrait, elle, de *formaliser l'expression par ex. « à trois pas de la vérité » et d'exprimer avec précision toutes sortes de subtilités.*¹

La figure *infra* en illustre une, celle qui fait dépendre la notion d'identité du contexte. Par ex., deux billets de 10€ revêtus d'un graphisme légèrement différent sont égaux pour un vendeur ou un acheteur, mais ces deux billets ne le sont pas pour un collectionneur.² Il apparaît plus compliqué de prouver l'égalité ou l'équivalence sans situer la question : est-ce égal ou pas ? dans un environnement donné.

Lorsqu'on ne peut plus affirmer que, ou bien la proposition p est vraie, ou bien la proposition non p est vraie, on n'a plus la règle du tiers-exclu. La notion de vérité devient plus subtile que le simple vrai ou faux que nous utilisons familièrement.

[..]

*En fait l'on est souvent, même dans la vie courante, confronté à des situations comme des discussions qui impliquent un jugement, "x est-il meilleur mathématicien que y ?", ou quand on assiste à une discussion politique, et pour lesquelles la simple alternative : "x a raison ou tort ?" est bien trop simpliste. On n'a pas l'outil conceptuel qu'il faut pour juger en tenant compte des subtilités du contexte.*³



La notion de *topos*, due à Grothendieck, tâche de répondre à cette difficulté en formalisant la notion de vérité autrement. Un *topos* est littéralement un lieu, à l'instar, à première vue, d'un espace topologique X , défini comme *un ensemble de points muni d'une notion de proximité qui est donnée par la classe des sous-ensembles ouverts (i.e. les sous-ensembles V pour lesquels il suffit d'être assez proche d'un des points de V pour être dans V).* [...] Les acteurs sur la scène sont les mêmes que dans les mathématiques ordinaires, ce sont les ensembles, munis de leurs structures familières, groupes, anneaux etc, **mais le topos est plus qu'un ensemble, c'est une « catégorie », un type de catégorie.**

- pourriez-vous nous donner un exemple d'espace topologique ? pour nous remettre en mémoire cette notion que vous avez déjà employée ?

- Vos désirs sont des ordres, bien que cette expression, que l'on retrouve en anglais (*your wish is our command*) soit anti-constitutionnelle ! Eh bien, l'exemple de base est la *droite réelle \mathbb{R} munie de la*

¹ Alain Connes, *Un topos sur les topos*, May 2018, 2019, <https://www.alainconnes.org/docs/topotopos.pdf>

² Emilien Pecoul, *Théorie de des catégories : vous la connaissez déjà*. 14 janv. 2019, <https://www.youtube.com/watch?v=83e3TWdecqQ>

³ A. Connes, *Un topos sur les topos*, p.12 et 15.

topologie dont les ouverts sont les réunions (éventuellement infinies) d'intervalles privés de leurs extrémités ; et plus généralement, l'espace \mathbb{R}^n à n dimensions muni de la topologie dont les ouverts sont les réunions de boules.¹ [Une boule ouverte est l'intérieur de la sphère sous sa surface, i.e. c'est l'ensemble des points de centre x et de rayon r à distance strictement inférieure à r de x]. Et le voisinage d'un point $x \in X$, qui dérive de la notion d'ouvert, est une partie de X contenant un ouvert contenant x .

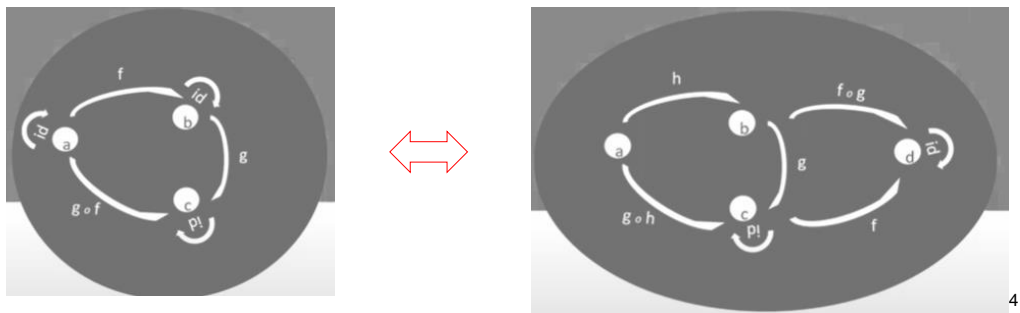
Un *topos* est un cas particulier de la notion de catégorie où il existe des limites et des produits finis. Le topos a un élément initial et un élément final. Il est donc sous-tendu par deux pôles que constituent ces éléments extrémaux. Il s'y ajoute aussi une notion d'isomorphisme, c'est-à-dire d'idée d'application bijective entre deux ensembles qui préserve la structure du premier. La réciproque la préserve autant. (L'application bijective équivaut à l'union de l'injective et de la subjective.)² On peut donner une définition plus complète - et plus compliquée - de la notion de topos, mais restons-en là pour le moment.

Qu'est-ce donc la vérité dans un *topos* ? Quand on travaille dedans, précise de nouveau Alain Connes,

tout se passe comme si on manipulait des ensembles ordinaires, sauf que l'on ne peut plus appliquer la règle du tiers exclu. Comme la situation dépend d'un aléa, on ne peut plus raisonner par l'absurde : il se peut qu'une propriété soit vraie pour certaines valeurs de l'aléa sans être vraie pour toutes. Heureusement, ceci n'empêche nullement d'appliquer tout raisonnement constructif qui n'utilise pas la règle du tiers exclu.³

Une catégorie n'est pas autre chose que des relations entre des objets. Ces relations sont **des flèches**, avec un début et une fin. Les objets ne servent que de point de départ et de point d'arrivée. Nous retrouvons cette idée de points extrémaux.

Ces relations, que l'on appelle aussi **morphismes**, créent une structure, caractérisée par deux lois : la loi d'identité (id .) et la loi de composition. Il faut un morphisme sur chaque objet de la catégorie ($a \rightarrow a$) et il faut que les morphismes soient composables : si je prends le chemin f puis g , j'arrive logiquement au même point d'arrivée que si je prends le chemin de g puis f . J'arrive au même point en passant par des chemins différents. Autrement dit : $(a \rightarrow b) \rightarrow (b \rightarrow c) = (a \rightarrow c)$. Ces deux lois s'écrivent formellement comme suit : celle de l'identité : $(\text{id} \circ f) = (f \circ \text{id}) = f$ (la règle du tiers exclu reste vraie pour l'idée d'un objet) et celle de l'associativité : $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$ (on peut enlever, en clair, les parenthèses).



L'isomorphisme entre deux objets est, soit dit en passant, un morphisme inverse.

En considérant le « très » et le « presque », présents dans le langage, Jean Bénabou envisage d'utiliser les termes usuels de la théorie des ensembles pour raisonner dans un *topos* donné. Il utilise ces termes, mais son propos n'est pas, avertit-il, de nature ensembliste. La théorie des catégories est plus générale que la théorie des ensembles, car elle prend en compte, dit-il comme Connes, *la complexité empirique*.

¹ http://repmus.ircam.fr/_media/mamux/ecole-mathematique/yves-andre/ch1topos.pdf

² Franck Jedrzejewski, *Diagrammes et catégories*, op. cit., Prologue, p.9.

³ A. Connes, *Un topo sur les topos*, p.12.

⁴ E. Pecoud, *Théorie de des catégories : vous la connaissez déjà*, ibid.

(Nous suivons la conférence qu'il a donnée à l'Ecole normale supérieure d'Ulm le 9 nov. 1987, dans le cadre du Séminaire de philosophie et mathématiques. Nous y avons assisté. Il ne nous reste, hélas, que quelques notes éparses, échappées de l'oubli. Nous les compléterons par la conférence Bénabou sur le même thème sur site web déjà mentionné. Nous n'en retiendrons que quelques éléments.)

Il y a, disait-il, une logique du *très* dans les langues élaborées. Par ex., dans *grand* et *très grand*, *très grand* implique *grand*. Il existe une fonction de raisonnement du *très*. Si on peut inférer de *très grand* l'idée de *grand*, le *très* répété deux fois n'est pas équivalent à une fois. : *très très grand* diffère de *très grand*. Ce n'est pas idempotent : cela ne se ramène pas à soi comme un élément mathématique pour lequel on préciserait $p \cdot p = p$. L'opération n'a pas le même effet si on l'applique une ou plusieurs fois.

Soient q et q' . Si $q \leq q'$, je peux inférer de q , le qualificatif q' , et si $q' \leq q''$, je peux inférer de q' , le qualificatif q'' , alors $q \leq q''$. La relation est transitive. Par conséquent, pour le *très* (tr), de q , je peux inférer $tr(q)$, ou $tr(q) \leq q$, mais qu'en est-il de *très très très très grand*... ? A partir d'un certain rang, un nouveau *très* n'ajoute rien, i.e. il existe un entier n tel que tr^{n+1} (*très* répété $n+1$ fois) = tr^n . Il arrive un moment où ça sature. Même si un jeune enfant dit, ou écrit sur une page, à sa maman : *très très très très très très...* *chère maman* (Bénabou évoquait à sa petite-fille), on comprend l'intensité du sentiment de l'enfant, mais le *très*, à un certain rang, ne rajoute rien. La maman a compris *très* vite le fort attachement de l'enfant.

Le constat n'est pas différent pour : *très très très ...souvent*.

Comment formaliser ce phénomène langagier ? Peut-on écrire comme en théorie des ensembles : $X \rightarrow X$ où un élément appartenant à X correspond $tr(x)$ appartenant à X via la fonction t ? Formellement, on écrirait, dans ce cadre : $\forall x \exists n$, un nombre n tel que $(t^{n+1}(x)) = t^n(x)$. Cette idée ensembliste est très inadaptée, car le langage est plus subtil que cette écriture qui implique l'ensemble des entiers \mathbb{N} . Cet ensemble implique l'idée que s'il existe n , il en existera toujours un plus petit. Autrement dit, il n'y aurait pas de 1^{re} fois. L'ensemble \mathbb{N} est un ensemble ordonné : dès qu'un entier vérifie une certaine propriété, il y en a un autre qui le vérifie aussi.

Pour coller à la réalité du langage, Bénabou conserve le rôle de l'ensemble des entiers qui permet de compter ce qui est dénombrable, mais sans en garder la propriété d'être bien ordonné. Bénabou ne retient qu'un des axiomes de l'arithmétique de Peano, à la base de la théorie des ensembles, la récurrence. Ce raisonnement est construit partir de 0 en itérant le passage au successeur sans avoir besoin de n de l'ensemble infini des entiers. Le cadre n'est plus celui des ensembles, mais des topos, ou du moins d'un topos finitif.

Ainsi, je peux écrire $x \quad tx \quad ttx \text{ etc.}$ Au moment t où j'arrête le *très très très...*, je peux dire : il est *vraiment grand*, ce qui veut dire que j'arrive au bout. Le *etc.* est une fonction logique du langage. Le topos est ce qu'il faut pour formaliser le *etc.*

Soit donc un objet X , un « ensemble » si on veut, muni d'un morphisme de X dans X , i.e. X . Ce morphisme est un *endomorphisme*, puisque j'envoie une flèche dans lui-même (se rappeler qu'un morphisme permet de comparer, et de relier, deux objets entre eux). Pour un x donné de X , je me donne un ensemble $\{x, tx, ttx, \text{ etc.}\}$. C'est un exemple très simple du *etc.* Il y en a d'autres plus compliqués. On observera que X est un *monoïde*, i. e. un ensemble muni d'une loi associative et d'un élément neutre, soit un magma unifié (un magma M comprenant un élément neutre) tel que $\forall x \in M, e \cdot x = x \cdot e = x$.

(§49
4/b)iii)

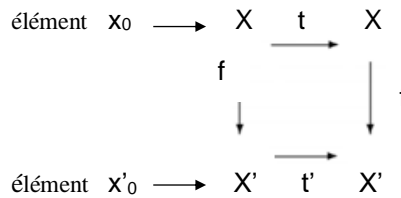
La catégorie en l'espèce est celle qui ne contient qu'un seul objet, X . **Tous les morphismes de cette catégorie partent de cet objet et reviennent vers cet objet.** Cet objet a donc une certaine structure.

L'ensemble $\{x, tx, ttx, \text{ etc.}\}$ est celui des puissances n de x de X , mais sans \mathbb{N} . Je peux dire que S de X est une partie stable (sous-entendu par t) si $(tS) \subset S$. Parce que je suis dans un topos, si je prends un élément x de X , je peux garder l'intersection de toutes les parties stables auxquelles x appartient, i.e. $\bigcap \{S \mid x \in S\}$. Cette intersection est appelée par Bénabou l'orbite de x , $O(x)$. L'orbite de x regroupe tous les $x \quad tx \quad ttx \dots$ Il n'y a rien d'autre dedans. L'orbite apparaît être une suite (*a sequence*)

particulière (dans un système dynamique, où le discret fait place au continu, les orbites sont, on sait, des courbes).¹

Etc. : c'est simplement l'orbite de X . C'est un objet fini, qui est stable par adjonction d'un élément répété. Il en est ainsi du *très* qui s'arrête, parce que le fait d'ajouter un autre *très* ne renforce en rien le *très*, mais il existe aussi des orbites périodiques comme x, tx, ttx, \dots, x quand je retombe sur x . Pensez comme à une comptine d'enfant. La ritournelle n'empêche pas l'orbite cyclique d'être finie. Il n'y a pas d'imprévu. On s'y attend. Voilà une autre forme d'*etc.*, et il y en a aussi d'autres, comme la combinaison des deux orbites précédentes. J'y retrouve, non pas le 1^{er} élément, mais quelque chose que j'avais auparavant.

X est une orbite si j'ai $x_0 \in X$ tel que X_0 tout entier soit l'orbite de x_0 , i.e. $X_0(x_0)$, en faisant x_0, tx_0, ttx_0, \dots . Cette orbite peut boucler ou non. X' peut être une autre orbite si j'ai aussi $x'_0 \in X'$ tel que X'_0 tout entier soit l'orbite de x'_0 , i.e. $X'_0(x'_0)$, en faisant $x'_0, tx'_0, ttx'_0, \dots$. Entre les deux orbites, je peux établir un morphisme (une flèche f) qui préserve la transformation $f(t(x)) = t'f(x)$. L'image est stable : elle contient tous les x_0 . Le lecteur peut imaginer le *très* accolé à tel adjectif, par ex. *grand*, et le *très* accolé à un autre adjectif, par ex. *légitime*. Ce morphisme, fait de flèches, donne lieu au diagramme suivant :



Le diagramme est commutatif : ce nouveau carré « commute » (nous disons *nouveau* au regard, des carrés logique du § 61 et modale du § 62, mais Bénabou naturellement n'en parlait pas). Il commute, i.e. $t'f = f \circ t$. L'ensemble des points qui coïncident est stable. La commutation a été évoquée au §49 1/c à propos de la notion de groupe algébrique. Ces orbites peuvent être identifiées, à isomorphisme près.

L'orbite de X domine l'orbite de X' s'il y a un morphisme de X vers X' . Cette domination est une relation de pré-ordre, i.e. une relation \mathcal{R} binaire réflexive et transitive (i.e. dans un ensemble E , $\forall x \in E, x \mathcal{R} x$ et $\forall (x, y, z) \in E^3, (x \mathcal{R} y) \wedge (y \mathcal{R} z) \Rightarrow x \mathcal{R} z$). L'intérêt de cette propriété réside dans le fait que si j'ai deux orbites, je peux toujours en trouver une autre qui les domine. **La catégorie devient « fibrée », car je ne considère plus seulement des directions, mais des projections**, par ex. de X vers X' . Il est entendu que, dans ce fibré, toutes les fibres, que sont les différentes orbites, sont finies et stables. Le morphisme est une projection. Je peux ainsi fabriquer l'orbite « directrice » de toutes les orbites de X .

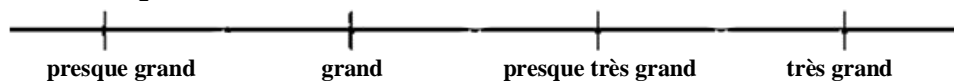
(§47
6/a)
-iii)

Si cette orbite directrice a un point fixe, i.e. si $\exists k$ tel que $t^{k+1}(x) = t^k(x)$, toutes les autres ont un point fixe. C'est exactement la situation du *très* dans le langage : $\forall x \exists n$ tel que $t^{n+1}(x) = t^n(x)$.

Nous n'avons pas reproduit les démonstrations de Bénabou. Nous n'avons retenu de son analyse du *très* que ce qu'il en est dans la langue de la philosophie politique et constitutionnelle des Lumières et post-Lumières.

- Et le *presque* ? Qu'en est-il de cet autre adjectif ?

- Comme articulation du langage, le *presque* serait adjoint du *très*. La fonction du *presque* est suggérée sur cette ligne droite :



¹ Soit un group G qui agit sur un ensemble E . L « orbite » d'un élément x de E est l'ensemble des valeurs $g.x$ où g est un élément de G . Par ex. si G est l'ensemble des rotations du plan de centre O (un point du plan), alors l'orbite d'un point M du plan est l'ensemble de toutes les images possibles de M par une rotation de centre O . Si le groupe est l'ensemble des translations du plan, l'orbite d'un point M est l'ensemble de tous les translatés possibles du point M . L'orbite est ici le plan tout entier. <http://www.les-mathematiques.net/phorum/>

Le *très très grand* n'existe pas dans les langues, mais le *presque*, i.e. étymologiquement le *près de*, existe. *Je suis très près d'avoir fini* \Leftrightarrow *j'ai presque fini*. De *presque très grand*, je peux inférer *grand* (par $\text{tr}(q) \leq q$), mais de *Pierre est presque aussi grand que Jean*, je ne peux rien inférer.

D'autre part, $\text{tr}^{n+1}(q) = \text{tr}^n(q)$, c'est-à-dire je m'arrête après avoir répété le *très* $n+1$ fois (le *très* est un opérateur stationnaire), mais cette propriété n'existe pas pour *presque*. Le *presque* est seulement adjoint au *très* sans être, comme le *très*, stationnaire. Le *presque presque* ne s'arrête pas, même si, dans le langage courant, ça s'arrête. On est dans l'infini potentiel. On s'en approche infiniment.

- Et *beaucoup* ?

- Le *beaucoup* est beaucoup porteur de logique. On peut faire des arguments avec *beaucoup*, *pas beaucoup*. Je peux utiliser les raisonnements appliqués au *très*. Je peux déduire. En revanche, il y a plusieurs façons de dire *peu*.

Il était dire encore, à entendre Bénabou, que ... mais nous arrêterons nous-mêmes ici son exposé. Pour le droit, cela suffira. On voit déjà la capacité d'un mathématicien à déceler dans le langage des mathématiques qui peuvent être profondes. Il n'y a pas que la physique qui inspire cette discipline. René Thom montra également un intérêt pour le langage pour y découvrir des structures morphologiques.¹

Les modes de raisonnement à partir du « très » et du « presque » jouent possiblement en droit constitutionnel. Sans se substituer à la logique juridique proprement dit, l'emploi et l'effet de tels adverbes dans le langage du droit ne sauraient être passés sous silence. Quel serait donc leur rôle ?

ii i Le « très » et le « presque » dans la réflexion constitutionnelle

iii Les notions de foncteur et de transformation naturelle en droit

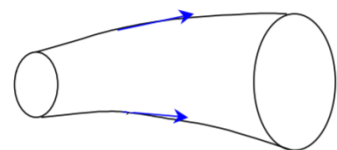
b) Le « flexible » et le « flou »

i Le « peu » et le « trop »

Il y a deux possibilités de comprendre un fluide comme une rivière qui coule : en suivre le courant en s'y laissant porter ou ne pas bouger. On peut rester sur la rive pour mesurer la vitesse de la rivière qui passe en cet endroit. Ce dernier point de vue permet de connaître le champ de vitesses \mathbf{u} du courant par rapport à la position et au temps. \mathbf{u} est une fonction de \mathbf{x} (un vecteur comprend les coordonnées x_1, x_2, x_3) et de t . Le champ de vitesses \mathbf{u} est lui-même un vecteur. \mathbf{u} indique la vitesse en tous les points de l'espace occupé par le courant. Le champ \mathbf{u} peut rendre compte du fait que les vitesses sont plus grandes au milieu du lit qu'au voisinage des rives. C'est une fonction de plusieurs variables, soit $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$.

Ce point de vue est surtout intéressant lorsqu'il s'agit d'un régime permanent, c'est-à-dire indépendant du temps comme c'est le cas pour un fleuve en régime normal, lorsque son débit est constant. On peut alors considérer un point fixe par rapport aux rives du fleuve ; la vitesse du liquide qui passe en ce point est constante, bien que ce ne soit jamais le même liquide, puisqu'il se renouvelle sans cesse. On peut étendre ce point de vue au cas où le régime n'est pas constant, mais, en ce cas, la vitesse en un point ne dépendra pas seulement de la position de ce point, mais du temps ; de plus, il y aura des points qui, suivant l'époque, seront occupés par le liquide ou seront vides.²

Un liquide est un milieu continu en chaque point duquel la vitesse a en général une vitesse différente. Se situer à deux endroits éloignés l'un de l'autre permet de calculer le flux (le flot) qui entre à travers une première surface et qui sort à travers la suivante suivant le sens du courant.



¹ R. Thom, *Stabilité structurelle et morphogénèse*, [2^e édit., 1977], op cit., chap.13.3 : l'Homo loquens, pp.309-317.

² E. Borel, *L'évolution de la mécanique*, op. cit., p.106.

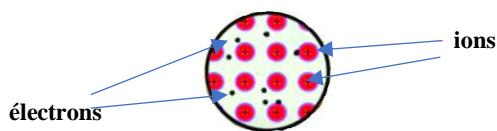
Or il existe un outil mathématique qui permet de relier un volume et la surface qui le borde : c'est le théorème d'Ostrogradski, énoncé au début du XIX^e siècle, qui calcule un tel volume par une intégrale sur la surface qui le borde.

(Concl.
Chap.I,
5/-iii)

Le théorème d'Ostrogradski, applicable à la dynamique d'un fleuve, est un écho du théorème de Gauss portant sur un autre courant qu'est l'électricité. A tout seigneur, tout honneur. Commençons donc par Gauss qui fut le premier à en pressentir la formule. Notre volet a déjà évoqué le théorème de Gauss qui permet d'évaluer le flux d'un champ électrostatique sortant d'une surface fermée en fonction des charges qui y sont contenues à l'intérieur. Cette loi modélise un phénomène électrostatique mettant en jeu une certaine quantité de charges électriques qui ne changent pas.

Revenons sur cette loi qui établit clairement un lien entre l'intérieur et l'extérieur d'une surface fermée enveloppant un volume.

Le flux du champ électrique $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$ au travers d'une surface fermée est donné par $1/\epsilon_0 q_n$ intérieur à cette surface. q_n est la charge responsable du champ électrique \mathbf{E} que l'on peut intégrer sur cette surface pour obtenir l'intégrale précitée, $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$. Supposons que cette surface fermée soit une boule. Qu'y voit-on à l'échelle microscopique ? Des électrons qui bougent de façon frénétique (ils ne suivent pas un mouvement ordonné comme dans un courant électrique) et des ions cristallins, caractéristiques de la boule, qui bougent beaucoup moins. (Pour être en condition électrostatique, il faut qu'en moyenne le nombre de charges soit constant, même si ces charges ne sont pas complètement immobiles.)



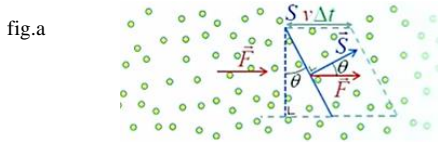
Cet ensemble de charges discrètes « statiques » est une image quelque peu naïve du second membre de la loi de Gauss $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 1/\epsilon_0 q_n$, étant donné le nombre considérable des particules en jeu (ions + **en rouge** et électrons **en noir**)

Considérons maintenant une forme quelconque qui se laisse traverser par un flux de particules, électriques, \mathbf{E} , ou plus généralement \mathbf{F} pour d'autres types de particules comme des photons. Supposons que ce flux soit uniforme (comme un faisceau laser par exemple). Le flux retenu est par définition le débit de particules, le débit de la source. La densité de particules η est le nombre de particules N par quantité de volume, V , soit $\eta = \Delta N/\Delta V$. Cette grandeur représente « l'intensité » du flux.

Dans l'expression de l'intégrale $\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$, \mathbf{F} et $d\mathbf{S}$ sont des vecteurs (ce qui explique leur écriture en gras, faute de pouvoir en word les surmonter d'une flèche). $d\mathbf{S}$ est le vecteur de surface orienté qui caractérise et l'aire et son orientation. **La nature vectorielle de cette surface est la clé de la compréhension de la loi de Gauss**, car le vecteur de surface \mathbf{S} forme un angle θ par rapport à la direction horizontale du flux, \mathbf{F} . (*fig.a infra*) (La surface peut prendre n'importe quelle inclinaison par rapport à cette direction si on généralise un peu le cas particulier d'une surface qui ne serait que perpendiculaire au flux, \mathbf{F} .)

\mathbf{F} et $d\mathbf{S}$ est donc le produit scalaire de deux vecteurs dans lequel est caché, comme dans tout produit scalaire, un cosinus de l'angle en question. Le volume ΔV peut ainsi se représenter ci-contre en considérant par exemple une surface carrée de côté L , sachant que $\Delta V = v \Delta t \times L \times h$ (la hauteur du parallélépipède). v est la vitesse et $v\Delta t$ la distance parcourue. Ce qui compte au fond n'est pas $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ mais $F \cdot S \cos \theta$. Dans ce produit scalaire, $F \cdot S \cos \theta$ représente la projection de \mathbf{F} sur le vecteur normal, \mathbf{S} . Le cosinus peut être interprété comme un facteur de correction de la surface S . La surface projective est la surface effective, celle qui est inclinée et traversée par le flux horizontal de particules. C'est la surface de prise au vent, la surface de « prise au flux » comme dit Marc Haelterman dans Clipedia.¹

¹ La loi de Gauss. Introduction, Clipedia, 15 déc. 2019, <https://www.youtube.com/watch?v=3wpgzP11qbo>: Loi de Gauss pour le champ électrique, Clipedia, 26 janv. 2020, <https://www.youtube.com/watch?v=vDNLW1Wkr0s> ; Loi de Gauss : distribution continue, Clipedia, 9 févr. 2020, <https://www.youtube.com/watch?v=L3qGB7hXfPc>



On attribue à une surface un vecteur, le vecteur \mathbf{S} . Avec l'angle θ entre \mathbf{F} (le flux) et \mathbf{S} (le vecteur perpendiculaire à la surface) (fig.a), on comprend que la surface fait un angle θ par rapport à la direction perpendiculaire au flux. (fig.b) La longueur de \mathbf{S} est l'aire de cette surface. Dans le cas particulier d'une surface carrée de côté L , la longueur de \mathbf{S} vaut L^2 .

Il est possible de généraliser encore ce résultat en considérant une surface de forme quelconque que l'on peut décomposer en un réseau de petites surfaces carrées.

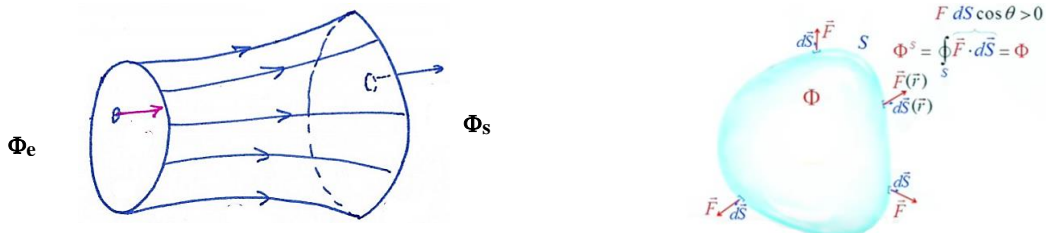
Sur une surface plane, je pouvais déjà additionner tous les vecteurs de surface qui sont colinéaires pour obtenir le grand vecteur de surface, $\mathbf{S} = \sum \Delta \mathbf{S}_n$, avec n allant de 1 à N . Le débit du flux Φ à travers une petite surface ΔS était égale à $\Phi^{\Delta S} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{S}_n$. La somme de tous ces débits donne le débit total $\Phi^S = \sum \Phi^{\Delta S} = \sum \mathbf{F} \cdot \Delta \mathbf{S}_n = \mathbf{F} \cdot \mathbf{S}$, avec \mathbf{S} la surface totale pour en fait n'importe quelle forme, et pour un flux également non uniforme où la densité de flux \mathbf{F}_n est différente d'une petite surface à l'autre. Si je choisis des $\Delta \mathbf{S}_n$ arbitrairement petites, je peux mieux définir la surface revêtant une forme quelconque, soit $\sum \Delta \mathbf{S}_n = \oint_S \mathbf{F}_n \cdot d\mathbf{S}$, avec n infiniment non dénombrable (on ne peut plus compter les $d\mathbf{S}$).



Le flux \mathbf{F} passe par toutes les petites surfaces représentées par des petits vecteurs de surface. La position de \mathbf{F} est donnée par \mathbf{r} défini dans un système de coordonnées cartésiennes. En ce point, on obtiendra la valeur du champ vectoriel \mathbf{F} qui dépend de \mathbf{r} . Sur d'autres points de la surface, \mathbf{F} prend une autre valeur en longueur et en direction (voir les autres flèches \mathbf{r} en pointillé). Il en est de même des $d\mathbf{S}$ qui sont différents à chaque point.

Nous retrouvons l'écriture très minimaliste de la loi de Gauss : $\Phi^S = \oint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$, avec \mathbf{F} la densité de flux d'un champ vectoriel, i.e. $\mathbf{F} = \eta \mathbf{S}$, et \mathbf{S} le vecteur de surface. Le débit est bien exprimé par le produit scalaire $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$. Le flux \mathbf{F} doit être considéré pour chaque $d\mathbf{S}$. Le flux \mathbf{F} va dépendre du point considéré sur la surface. Le \int signifie que l'on somme sur la surface, avec le petit, l'infiniment petit en réalité, $d\mathbf{S}$ perpendiculaire à la surface. **Le débit qui traverse la surface est le même dans la surface elle-même.**

Dernière précision : par convention, les $d\mathbf{S}$ d'une surface fermée sont toujours sortants (et non dirigés perpendiculairement vers l'intérieur de la surface). Dans ces conditions, le produit scalaire $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ est toujours plus petit que $\pi/2$. Un flux qui sort de la surface est donc toujours positif sachant que $\cos(\pi/2) > 0$. (fig.c) Enfin, les particules d'un champ qui traversent une surface fermée et en ressortent sans avoir le temps d'y rester n'altèrent pas le bilan total du flux. Le flux entrant, Φ_e , et le flux sortant, Φ_s , s'équilibrent $\Phi_e = \Phi_s$ et $\Phi^S = \Phi_e + \Phi_s = 0$, d'où $\Phi_e = -\Phi_s$ (le flux Φ_e est positif et le flux Φ_s négatif).

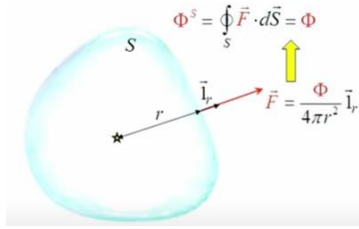


Rem. : la notation : $\Phi^S = \oint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ s'écrit rigoureusement $\Phi^S = \oint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$, car on intègre sur la surface S les $d\mathbf{S}$ et les \mathbf{F}_n .

Tel est le lien entre l'intégrale de surface et le volume que cette surface enveloppe. Gauss a appliqué son théorème au champ électrique en partant de $\mathbf{F} = \oint_S \Phi / 4\pi r^2$ (\mathbf{F} est une fonction à valeur

vectorielle qui évolue en $1/r^2$ par rapport à un point précis de l'espace puisque r est la distance entre le point de calcul de la fonction et un point particulier de l'espace. Gauss considère que les fonctions de cette forme répondent à la loi de $\Phi^S = \oint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$, $d\mathbf{S}$. Autrement dit, l'intégrale de flux d'une surface fermée, qui entoure le point par rapport auquel on se réfère, est égale à Φ , le coefficient qui apparaît dans l'expression du champ $\mathbf{F} = \Phi/4\pi r^2$ que l'on intègre.

(Concl. Chap.I, 5/-iii)



Dans $1/r^2$, le lecteur aura reconnu la loi expérimentale, observée de façon rigoureuse au XVIII^e siècle par Coulomb. Le champ électrique $\mathbf{E} = k_c q/r^2$, avec q la charge électrique intérieure et k_c la constante de Coulomb. En introduisant $\epsilon_0 = 1/4\pi r^2$ Oliver Heaviside simplifiera au XIX^e siècle l'écriture de la loi de Gauss pour le champ électrique en $\oint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = q/\epsilon_0$, en appelant ϵ_0 la permittivité du vide (son élasticité si l'on veut). La loi de Gauss devient en discret : $\oint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = 1/\epsilon_0 \sum q_n$

Le lien entre surface et volume enfermé dans cette surface est donc attesté, considèrerait-on aussi la loi de Gauss pour une distribution de charges continues : $\oint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = 1/\epsilon_0 \int_{V_S} \rho(\mathbf{x}) dV$, avec $\rho = \Delta Q/\Delta V$ le nombre de charges Q par unité de volume V et \mathbf{x} le vecteur position (x_m, y_m, z_m) d'un petit cube parmi tant d'autres. Non seulement un tel lien est établi par l'équation, mais l'on voit que l'on a une fonction d'un vecteur position $\rho(\mathbf{x})$. Si l'on connaît la valeur de ρ , l'on est capable de connaître la distribution de charges de l'objet. Il est donc possible de caractériser la façon dont les charges se répartissent dans cet objet grâce à cette fonction $\rho(\mathbf{x}) = \Delta Q/\Delta V$. Il suffit ensuite de passer au continu en sommant tous les $\rho(\mathbf{x})dV$, les charges infinitésimales à l'intérieur de chaque petit cube dont les six faces tendent vers 0.

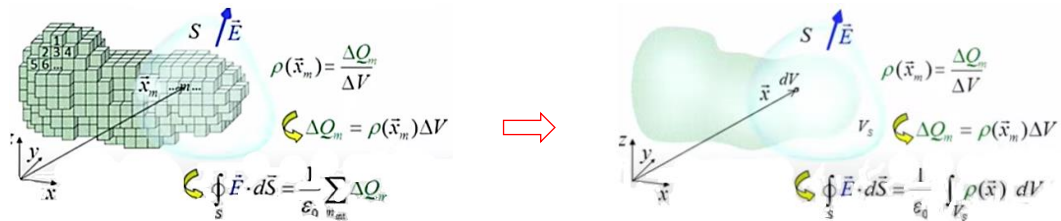


fig.b : l'on peut dire par exemple qu'il y a plus de densité de charges dans la sphère que dans d'autres endroits de l'objet¹

- On arrive au théorème d'Ostrogradski ?

- Presque. Il faut dire encore un mot sur la forme locale de la loi de Gauss avant d'entrer dans ce théorème.

La forme intégrale de la loi de Gauss implique des grandeurs physiques comme le champ électrique \mathbf{E} , considéré sur toute une surface, et la densité volumique de charges ρ en différents points du volume.

Dans $\oint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = 1/\epsilon_0 \int_{V_S} \rho(\mathbf{x}) dV$, l'intégrale \int_{V_S} du second membre de l'équation est la somme de toutes les charges électriques sur le volume V_S intérieur à la surface de Gauss. **Le résultat de l'intégration est le volume sous la surface.** Cette forme intégrale de la loi de Gauss permet d'en obtenir la forme locale sous la forme $\text{div}(\mathbf{E}) = \rho(\mathbf{x})/\epsilon_0$. **Cette forme locale montre le lien entre le champ électrique \mathbf{E} en un point \mathbf{x} précis donné** (avec $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$).

Le lecteur aura reconnu la notion de *divergence* qui n'est autre que la somme des dérivées sur les composantes du champ considéré, soit ici la somme des dérivées partielles : $\partial E_x/\partial x + \partial E_y/\partial y + \partial E_z/\partial z$. La composante $\partial E_x/\partial x$ peut être entendue comme la dérivation du champ électrique \mathbf{E} par rapport à x , i.e. dans la direction de x . En appliquant l'opérateur nabla, ∇ , à cette somme, on transforme $\text{div}(\mathbf{E}) = E_x/\partial x + \partial E_y/\partial y + \partial E_z/\partial z = \rho(\mathbf{x})/\epsilon_0$ en une écriture plus synthétique de la loi locale : $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho(\mathbf{x})/\epsilon_0$.

¹ Ibid.

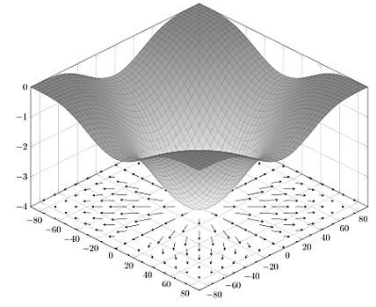
Rappelons que l'opérateur nabla, ∇ , appliqué, à une fonction f donne **le gradient** : $\nabla(f) = \text{grad}(f)$, i.e. les dérivées partielles par rapport aux coordonnées :

$$\nabla f = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Ex. ci-contre le gradient de la fonction $f(x,y) = -(\cos^2 x + \cos^2 y)^2$ représenté dans le plan du bas. →

La divergence de f s'écrit : $\partial f / \partial x_1 + \partial f / \partial x_2 + \partial f / \partial x_3$

*La divergence d'un champ de vecteurs est un opérateur différentiel mesurant le défaut de conservation du volume sous l'action du flot de ce champ.*¹



Nous renvoyons au site internet pour qui veut s'assurer que l'on obtient une telle expression en passant ainsi aux dérivées.² On retiendra simplement que la divergence du champ est nulle $\text{div}(\mathbf{E}) = 0$ quand il n'y a pas de charge (le champ est vide, dénué de ρ en l'absence de charge électrique), comme la divergence est aussi nulle dans le cas d'une surface fermée dont le flux sortant est égal au flux entrant.

La divergence est **nulle** quand les différentes directions **se compensent** entre elles en dilatation ou compression. Par ex., un flux sortant traversant un cube peut compenser l'entrant. Lorsque le flux entrant est plus important sur les six faces, le flux sortant peut être moins important. S'il n'est pas égal, le flux traversant d'autres faces peut compenser ce qui reste >0 ou <0 .

Il vaut enfin de noter qu'à l'époque de Gauss, le physicien Ampère raisonnait de façon similaire, non pas sur l'électricité proprement dite, mais relativement au champ magnétique créé par un courant électrique. Le lien allégué n'est pas entre une surface et un volume, mais un bord et une surface, mais le raisonnement ne diffère guère. Le savant affirme que *la circulation, le long d'un chemin fermé, du champ magnétique engendré par une distribution de courant, est égale à la somme algébrique des courants qui traversent la surface définie par le circuit orienté, multipliée par la perméabilité du vide.*³

Le courant électrique crée un champ magnétique et le théorème d'Ampère permet d'évaluer ce champ selon la formule

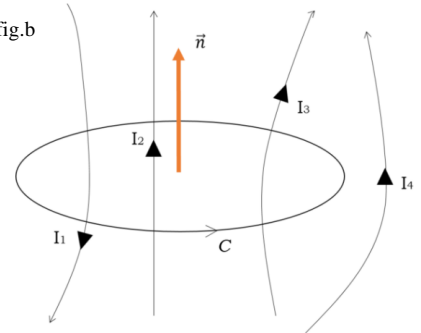
$$\oint_{\gamma} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{\text{enlacé}}$$

où \oint_{γ} représente, sur la *fig.a*, l'intégrale curviligne sur le contour fermé γ ; \mathbf{B} le champ magnétique, $d\mathbf{\ell}$ l'élément infinitésimal de déplacement le long du contour γ ; μ_0 la perméabilité du vide (la perméabilité magnétique dans un vide classique); $(\sum) I_{\text{enlacé}}$ la somme algébrique des intensités de courants enlacés ou entourés par le contour γ (ou C , sur la *fig.b*)⁴

fig.a



fig.b



- Qu'ajoute à ces résultats le théorème d'Ostrogradski ?

- Ce théorème prend en compte précisément la divergence des champs dont on vient de parler. Le champ est quelconque, \mathbf{F} , et pas seulement \mathbf{E} . Le lien tient en cette équation : $\oint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_{V_S} \text{div}(\mathbf{F}) dV$.

Traduisons :

l'intégrale de flux d'un champ vectoriel \mathbf{F} sur une surface fermée S , soit le 1^{er} membre de l'équation $\oint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$, est donnée par le 2nd membre de cette équation $\int_{V_S} \text{div}(\mathbf{F}) dV$, l'intégrale de la divergence de ce

¹ <https://fr.wikipedia.org/wiki/Gradient> ; [https://fr.wikipedia.org/wiki/Divergence_\(analyse_vectorielle\)](https://fr.wikipedia.org/wiki/Divergence_(analyse_vectorielle))

² *Loi de Gauss : forme locale*, Clipédia, 23 févr. 2020, <https://www.youtube.com/watch?v=1bJjCxcg9WuE&t=1847s>

³ Cité in Michèle Audin, *La formule de Stokes*, roman, Cassini, Paris, 2016, pp.75-76.

⁴ https://fr.wikipedia.org/wiki/Théorème_d'Ampère

champ sur le volume enfermé par cette surface (on somme pour tous les points à l'intérieur du volume).¹

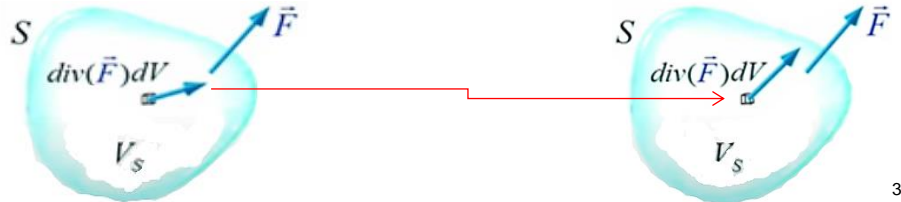
Le flux sortant à travers une surface est l'intégrale volumique de la divergence, voilà en résumé ce qui dit ce théorème, dans l'esprit du théorème de Gauss et de sa forme locale. L'égalité entre l'intégrale de la divergence d'un champ vectoriel sur un volume dans \mathbb{R}^3 et le flux de ce champ à la frontière du volume, qui est une intégrale de surface, s'écrit rigoureusement par une intégrale triple \iiint (il faut intégrer sur les trois dimensions du volume) et une intégrale double fermée \oint calculant l'aire en 2 D d'une surface :

$$\iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{F} \, dV = \oint_{\partial V} \vec{F} \cdot d\vec{S}_2$$

Avec V le volume dS le vecteur normal, dirigé vers l'extérieur et de norme égale à l'élément de surface qu'il représente, et F continûment dérivable en tout point de V .

A la différence de la forme locale de la loi de Gauss appliquée au champ électrique E qui a pour origine une densité de charge ρ , il n'y a plus lieu de s'inquiéter de ρ qui disparaît dans l'égalité reliant la surface et le volume d'une forme quelconque.

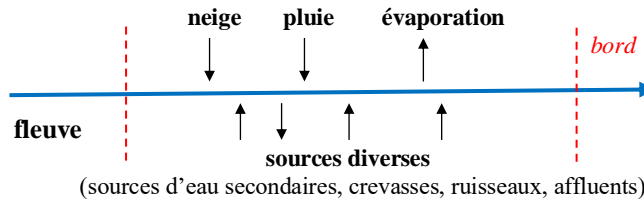
Ce qui est remarquable également dans ce théorème est le fait que si je change la manière dont le champ F évolue spatialement, la divergence du champ change mais l'intégrale de surface ne change pas. Une variation à l'intérieur du volume $\int_{V_s} \text{div}(\vec{F}) \, dV$ n'entraîne pas une variation dans la surface $\oint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$ qui enferme ou limite le volume. On a toujours : $\oint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_{V_s} \text{div}(\vec{F}) \, dV$.



Le théorème d'Ostrogradski permet de transformer l'intégrale de surface en intégrale de volume.

Retrouvons notre fleuve. Comment en effet calculer la quantité d'eau qui va sortir d'une région donnée ?

Il y a la pluie, la neige, et puis il y a des sources d'où l'eau jaillit et des gouffres dans lesquels elle se perd. Les unes s'ajoutent – il faut tenir compte de leur débit, bien sûr, certaines sources comptent plus que d'autres – les autres se soustraient ... et ce qui reste coule dans les fleuves et va finir par quitter la région. Mais ce calcul que nous avons fait, ajouter l'eau venue du ciel et les sources avec leurs plus ou moins grandes forces, soustraire les gouffres plus ou moins assoiffés, il est possible d'en retrouver le résultat en mesurant la quantité d'eau qui sort de la région.⁴



Dans notre histoire d'eau, la région est le volume, son bord est la surface.⁵ Le débit du fleuve se gonfle au fur et à mesure.

La loi de Gauss et ses transformations, pour décrire aussi bien les champs électrique et magnétique que le débit d'un fleuve, finira par aboutir à une formule plus sophistiquée prenant en compte la

¹ Théorème d'Ostrogradski, Clipedia, 1 mars 2020, https://www.youtube.com/watch?v=0w0kxDXq_dM

² https://fr.wikipedia.org/wiki/Théorème_de_la_divergence

³ Théorème d'Ostrogradski, Clipedia, 1 mars 2020, https://www.youtube.com/watch?v=0w0kxDXq_dM

⁴ M. Audin, *La formule de Stokes*, op. cit., p.11. Le schéma infra est nôtre.

⁵ Ibid.

viscosité du liquide et la conservation de sa masse. En deçà de ses versions différentes suivant le domaine considéré, cette formule restera fidèle à sa forme fondamentale que résume l'équation $\int_{\Sigma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \text{div}(\mathbf{F}) dx dy dz$.¹

La formule en question est celle de Navier-Stokes, établie au XIX^e siècle par le français Navier et le britannique Stokes. Elle permet de décrire le mouvement d'un fluide par une équation différentielle dont le champ de vitesse est l'inconnue (le champ de vitesses est la bonne variable pour décrire comment un fluide évolue). *Cette équation s'applique aussi au mouvement de l'huile d'olive dans une bouteille qu'à celui de l'air au passage d'un avion.* Elle est l'analogie pour un fluide de l'équation fondamentale de la dynamique pour les solides : $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, avec \mathbf{F} la somme ou le bilan des forces qui s'exercent sur un objet de masse m et provoquent son accélération \mathbf{a} .

$$\rho \left(\underbrace{\frac{\partial v}{\partial t} + v \cdot \nabla v}_{\mathbf{a}} \right) = - \underbrace{\nabla p}_{F_{\text{pression}}} + \underbrace{\mu \nabla^2 v}_{F_{\text{visqueuse}}}$$

où v est le champ de vitesse, p la pression, μ sa viscosité et ∇^2 l'opérateur laplacien : $\nabla^2 = \Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$ en coordonnées cartésiennes tridimensionnelles

Les forces de pression (F pression) sont celles qui viennent du fait qu'un petit morceau du fluide se fait pousser par tout le reste du fluide qui l'entoure.

Les forces visqueuses (F visqueuse) sont l'équivalent des forces de frottement pour un skieur. Quand un morceau de fluide glisse sur un autre, il y a un frottement qui le freine et qui est d'autant plus important que le fluide est visqueux.²

Nous n'allons pas accabler les lecteurs pour comprendre les coins et recoins d'une telle équation. Condamnés à la brièveté de la vie, ne prolongeons cette autre longueur qui est celle des infortunes, aurait écrit Voltaire, bien que la science, pour les Lumières, est censée procurer la joie de la pensée. Nous nous mettons à la place de ceux qui ont eu peu l'occasion de goûter la science. Nous les renvoyons à l'Annexe IV qui les éclairera, sans trop de peine, sur la genèse et le sens de cette équation.

ii Le faiblement déterminé, le provisoire et le potentiel. iii Le flou du droit et la théorie des matroïdes

iv Le flou du droit et la théorie des ensembles flous

Des sous-ensembles brouillant les frontières,⁴⁴⁸. Des sous-ensembles flous floutant la loi
De la commande floue au contrôle flou de l'interprétation

Des sous-ensembles brouillant les frontières

Commençons par les définitions de façon simple.

Un sous-ensemble flou A de X est défini par une fonction d'appartenance qui associe, à chaque élément x de X , le degré $f_A(x)$, compris entre 0 et 1, avec lequel x appartient à A : $f_A : X \rightarrow [0,1]$. La différence avec un sous-ensemble classique saute aux yeux, puisque celui-ci ne prend que des valeurs égales à 0 ou 1.³ On parle de sous-ensemble flou et non d'ensemble flou, car il est question d'appartenance éventuellement nulle, 0, à un ensemble, et non de non-appartenance assimilable à l'ensemble vide, \emptyset .

(Le sous-ensemble flou n'est considéré comme vide que si les degrés d'appartenance de ses éléments à un ensemble sont tous égaux à 0.)

On ne considère donc ici que l'**appartenance partielle** des objets qui ne sont, ni totalement à l'intérieur d'un ensemble, ni totalement à l'extérieur. Cet entre-deux chaises permet une adaptabilité du langage ordinaire qui permet au locuteur de décrire au moins l'ambiguïté d'une chose incertaine, susceptible de deux ou plusieurs interprétations différentes :

Prenons la classe des vieilles personnes. À l'âge de cinq ans, une personne n'est certainement pas vieille (degré d'appartenance 0), et à l'âge de 95 ans, la même personne est manifestement vieille (degré d'appartenance 1). Mais quelque part entre 5 et 95, il y a une zone grise, représentée numériquement par des degrés d'appartenance plus grands que 0 et moins grands que 1. Par ex., une personne de 40 ans peut se situer au degré 0,30 dans le sous-ensemble flou des vieilles personnes (intuitivement, la description d'une telle personne comme « vieille » est exacte à 30 %).

¹ Ibid., p.21.

² <https://scienceetonnante.com/2014/03/03/la-mysterieuse-equation-de-navier-stokes/>

³ B. Bouchon-Meunier, La logique floue, p.8.

À l'âge de 58 ans, le degré d'appartenance peut se situer à 0,70 ou 0,75 et atteindre 1 lorsque la personne parvient à l'âge de 85 ans.¹

Nous parlons d'ambiguïté, et non d'ambivalence qui renvoie à la présence simultanée de deux composantes de sens contraires comme on le rencontre dans le domaine des sentiments, des affects, des attitudes. Ce domaine relève de la psychanalyse et non de la théorie des sous-ensembles flous.² Les messages du Président Trump, durant son mandat, étaient beaucoup plus ambivalents qu'ambigus.

Même à l'égard de son entourage, son langage colportait à la fois des éléments affectueux et hostiles.

- Quelles sont les principales caractéristiques d'un sous-ensemble flou, A ?

- Enumérons-les rapidement :

le support, i.e. l'ensemble des éléments de X qui appartiennent, *au moins un peu*, à A, que l'on note $\text{supp}(A) = \{x \in X / f_A(x) \neq 0\}$;

sa hauteur, i.e. le plus fort degré avec lequel un élément de X appartient à A. C'est la plus grande valeur prise par sa fonction d'appartenance, notée $h(A) = \sup_{x \in X} f_A(x)$;

son noyau, lorsque tous les éléments de X appartiennent *de façon absolue* (avec un degré 1) à A, noté $\text{noy}(A) = \{x \in X / f_A(x) = 1\}$. On dit que A, dans ce cas, est normalisé.

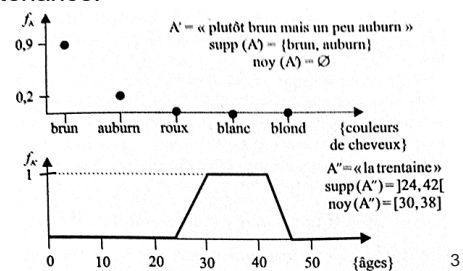
Une autre encore :

sa cardinalité, évaluant le degré total avec lequel les éléments de X appartiennent à A. La cardinalité d'un ensemble ordinaire est égale au nombre d'éléments qu'il contient. Dans un ensemble flou, les éléments ne peuvent avoir qu'une appartenance partielle, donc la cardinalité est la somme des degrés d'appartenance des éléments de l'ensemble de référence, ce qui revient à pondérer le nombre d'éléments appartenant à A par leur degré d'appartenance.

Voir, ci-contre, deux exemples de sous-ensembles flous d'univers discret (A') ou continus (A'') illustrant les notions de *support* (supp) et de *noyau* (noy).

La hauteur (h) dans A' est 0,9

La cardinalité |A| dans A' est $(1 \times 0,9) + (1 \times 0,2) = 1,1$.



- Quelles opérations peut-on espérer faire sur les sous-ensembles flous ?

- Les mêmes que celles sur les ensembles ordinaires, à savoir l'égalité, l'inclusion, l'intersection et l'union de sous-ensembles flous.⁴ Ainsi,

. deux sous-ensembles flous A et B sont *égaux* si leurs fonctions d'appartenance prennent la même valeur en tout point de X, i.e. formellement : $\forall x \in X \quad f_A(x) = f_B(x)$;

. un sous-ensemble flou A est *inclus* dans un sous-ensemble flou B si A appartient aussi à B **avec un degré au moins aussi grand**. Leurs fonctions d'appartenance sont telles que : $\forall x \in X \quad f_A(x) \leq f_B(x)$;

. l'*intersection* de deux sous-ensembles flous A et B de X est le sous-ensemble constitué des éléments de X affectés du plus petit de leurs deux degrés d'appartenance donnés par f_A et f_B. Elle est définie formellement comme $C = A \cap B$ tel que $\forall x \in X \quad f_C(x) = \min(f_A(x), f_B(x))$, min désignant l'opération de minimisation. **Intuitivement, un élément x ne peut appartenir à la fois à A et à B moins fortement qu'il n'appartient à chacun d'eux ;**

. l'*union* de deux sous-ensembles flous A et B de X est le sous-ensemble flou constitué des éléments de X affectés du plus grand de leurs deux degrés d'appartenance, donnés par f_A et f_B. Elle est définie formellement comme l'élément $D = A \cup B$ tel que $\forall x \in X \quad f_D(x) = \max(f_A(x), f_B(x))$, max désignant

¹ Arturo Sangalli, *Eloge du flou*, chap.1 : Les classes aux frontières incertaines, Presses de l'Univ. de Montréal, 2001, <https://books.openedition.org/pum/14186?lang=fr>

² Pierre Le Goffic, « Ambiguïté et ambivalence en linguistique », Documentation et recherche en linguistique allemande, Vincennes, 1982, n°27, pp.83-105.

³ B. Bouchon-Meunier, *La logique floue*, p.89-11.

⁴ *Ibid.*, pp.12-16.

l'opération de maximation. **Intuitivement, un élément x ne peut appartenir à la fois à A et à B plus qu'il appartient à l'un d'eux.**

Ces opérations héritent des mêmes propriétés que celles des ensembles ordinaires, à savoir l'associativité, la commutativité et la cardinalité. Il en est aussi de la notion de *complément* d'un sous-ensemble flou, A^c (ou \bar{A}). **Un élément x appartient d'autant plus à un tel complément qu'il appartient peu à A.** Il est défini ainsi : $x \in X \quad f_{A^c}(x) = 1 - f_A(x)$. Cependant, contrairement aux sous-ensembles classiques, $A^c \cap B \neq \emptyset$ et $A^c \cup A \neq X$.

- Autres précisions à connaître ?

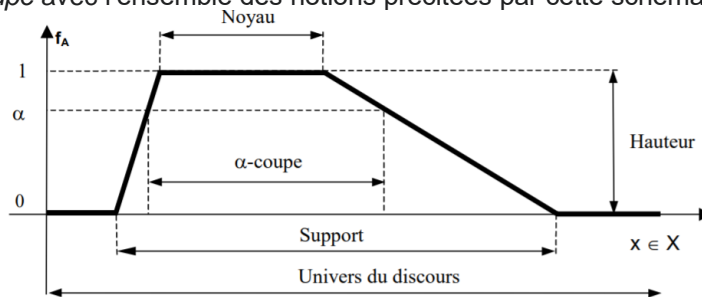
- Deux derrières d'importance relatives aux notions de *α-coupe* et de *produit cartésien*.

Les *α-coupe*, associées à un sous-ensemble flou, permettent de réaliser une approximation d'un tel ensemble en fixant **une limite inférieure**, notée α , aux degrés d'appartenance pris en considération. La fixation d'un tel **seuil**, à partir duquel l'appartenance est considérée comme suffisante, aide à servir de **critère de prise de décision**. A cette fin, on sélectionne tous les éléments de X qui appartiennent à A avec un degré au moins égal à α . La *α-coupe* est formellement définie par le sous-ensemble $A_\alpha = \{x \in X / f_A(x) \geq \alpha\}$.

Un exemple de seuil peut être celui, en économie, d'un « seuil de pauvreté » dans un sous-ensemble flou A de revenus annuels X. La fixation d'un tel seuil dépend, il va sans dire, des statisticiens des gouvernements qui doivent décider à partir de quel niveau de revenu un tel seuil est franchi. On ne peut en effet traiter le sous-ensemble A, la classe des personnes pauvres, comme un ensemble bien défini au risque sinon d'aboutir à une absurdité,

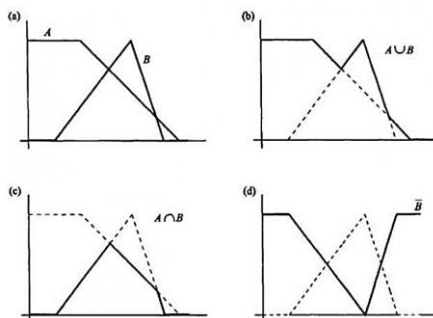
car, si quelqu'un qui a un revenu annuel de X (disons 10 000 €) est membre de A, alors quelqu'un dont le revenu annuel est de X+1 le sera tout autant (ce n'est pas un euro de plus qui empêchera l'indigence). Pour la même raison, ceux qui ont des revenus de X+2, X+3, et ainsi de suite, sont tout aussi pauvres. Mais, si on répète cet argument un assez grand nombre de fois, on en arrive à la conclusion qu'un individu qui gagne 100 000 € par année est pauvre !¹

On illustrera l'*α-coupe* avec l'ensemble des notions précitées par cette schématisation d'ensemble :



L'« univers du discours » définit l'ensemble donné X. On notera que **plus on est exigeant sur la notion d'appartenance, plus on augmente le seuil α , et moins il existe d'éléments de X satisfaisant cette notion d'appartenance.**²

Les opérations d'union, d'intersection et de complément des sous-ensembles flous A et B peuvent aussi être schématisées simplement :



Soient les sous-ensembles flous a et B et les fonctions d'appartenance résultant des opérations sur les sous-ensembles flous a, b, c et d :

- (a) les fonctions d'appartenance des sous-ensembles flous A et B ;
- (b) la fonction d'appartenance de leur union ;
- (c) la fonction d'appartenance de leur intersection ;
- (d) la fonction d'appartenance du complément de B, i.e. \bar{B}

¹ A. Sangalli, *Eloge du flou*, chap.1 : Les classes aux frontières incertaines, op. cit., point 16.

² <http://csidoc.insa-lyon.fr/these/2002/malhis/annexe1.pdf> ; B. Bouchon-Meunier, *La logique floue*, p.16.

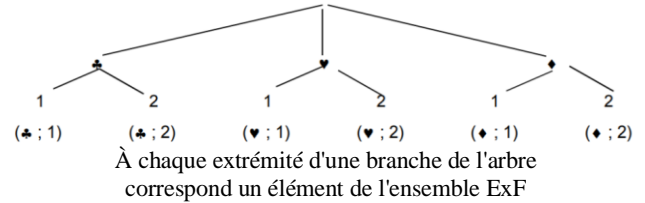
(§24
4/b)

- Et le produit cartésien ? Comment le réinterpréter dans la théorie des sous-ensembles flous ?

- Vous vous souvenez que le produit cartésien est l'ensemble des couples (x,y) avec $x \in E$ et $y \in F$, noté $E \times F$. Le produit cartésien entre deux ensembles n'est qu'un tableau à double entrée tel qu'il fut conçu à l'âge moderne. A la différence des tableaux du monde ancien, l'ordre des lignes et celui des colonnes importent. Par ex., soient $E = \{\clubsuit; \heartsuit; \diamond\}$ et $F = \{1; 2\}$ sous forme de tableau mais aussi de graphe :¹

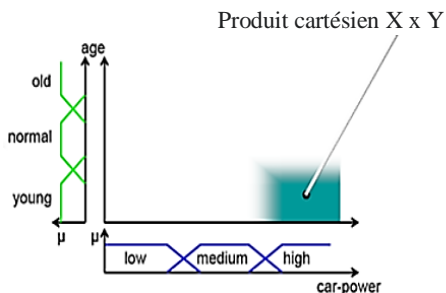
F \ E	\clubsuit	\heartsuit	\diamond
1	$(\clubsuit; 1)$	$(\heartsuit; 1)$	$(\diamond; 1)$
2	$(\clubsuit; 2)$	$(\heartsuit; 2)$	$(\diamond; 2)$

Le nombre d'éléments de $E \times F$ est :
 $\text{card}(E \times F) = 6 = \text{card}(E) \times \text{card}(F)$



L'intérêt du produit cartésien de sous-ensembles flous est de considérer *plusieurs critères pour prendre une décision, ou plusieurs caractéristiques pour décrire une famille d'objets*. On est conduit à traiter **simultanément des classes floues de chacun de ces ensembles**, autrement dit une classe floue globale $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_r$ (d'univers X_1, X_2, \dots, X_r , de produit cartésien $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_r$) dont les diverses composantes sont les sous-ensembles flous initiaux, A_1, A_2, \dots, A_n . Ainsi, la fonction d'appartenance d'une telle classe floue globale se présente comme : $\forall x = (x_1, \dots, x_r) \in X \quad f_A(x) = \min(f_{A_1}(x_1), \dots, f_{A_r}(x_r))$.² (Il s'agit d'une opération de minimisation, car on traite les A_i « à la fois » comme dans une intersection, \cap .)

Une *relation floue* entre X et Y est définie comme un sous-ensemble du produit cartésien $X \times Y$. Deux exemples, l'un portant sur la relation entre l'âge d'une voiture et sa puissance, l'autre entre des villes $X = \{\text{Paris, Ville de province, Bourgade}\}$, soit $X_1 = \{P, V, B\}$, constituant l'ensemble des lieux proposés pour une habitation, et $X_2 = \{M, A\}$, l'univers de choix entre une maison et un appartement.³



Les sous-ensembles flous, correspondant à des choix, peuvent être les suivants :

$$A_1 = 0,8/P + 0,6/V + 0,4/B \quad \text{et} \quad A_2 = 0,3/P + 0,7/V + 0,4/B.$$

Ces sous-ensembles flous représentent des préférences relatives à chacun des deux univers X_1 et X_2 pris individuellement.

Une préférence possible relative aux deux univers de façon globale est représentée par le produit cartésien $A = 0,3/(P,M) + 0,3/(V,M) + 0,3/(B,M) + 0,7/(P,A) + 0,6/(V,A) + 0,4/(B,A)$, ce qui correspond à une préférence pour un appartement à Paris, éventuellement dans une ville de province, toutes les autres hypothèses étant acceptables, mais très modérément.

- Vous avez fini ?

- Non, pas encore, mais on peut déjà travailler en droit avec ce léger bagage. Il vaut de noter qu'une observation comportant une erreur de mesure est comparable, comme chez William James, à *un halo dans une image*.⁴ Ce halo est la perception d'un sous-ensemble flou de X , auquel un élément x appartient plus ou moins fortement sans être très précis. On complètera les notions de base au fur et à mesure de l'étude du droit.

- Attendez. Une question me vient : n'a-t-on besoin que de simples probabilités entre 0 et 1 pour définir les divers degrés de la fonction d'appartenance ?

- Bonne question. Le raisonnement qui opère sur les sous-ensembles flous n'est pas probabiliste mais « possibiliste ».

- Ah, oui, mais quelle est la différence ?

- Le fondateur de la théorie des ensembles flous, L.A. Zadeh, qui fut professeur à Berkeley, en vint à considérer le degré d'appartenance à un ensemble flou comme un **degré de possibilité et non**

¹ <http://maths.ac-noumea.nc/IMG/pdf/DenombrementTS.pdf>

² B. Bouchon-Meunier, *La logique floue*, p.18.

³ <https://www.lri.fr/~antoine/Courses/AGRO/Cours-logique/Cours-IA-fuzzy-logic-2013x4.pdf>, B. Bouchon-Meunier, *La logique floue*, p.18.

⁴ B. Bouchon-Meunier, *La logique floue*, p.21.

comme une probabilité. Un tel degré est un moyen de dire dans quelle mesure on est certain sans pouvoir être capable d'évaluer la probabilité de l'appartenance en question. La raison est que l'on ne connaît pas d'événement analogue auquel on puisse se référer.

Si des informations de nature fréquentielle étaient disponibles, indiquant dans quelle proportion des cas une règle est valide (par exemple, dans 90% des cas, s'il y a raideur de la nuque, alors une méningite est à diagnostiquer) ou avec quelle proportion un fait est vrai (par exemple : la cible est atteinte avec une probabilité de 0,87), on pourrait effectuer un raisonnement de nature probabiliste.

*Mais on suppose ici que l'on ne dispose pas de telles informations et que l'on est seulement capable de dire dans quelle mesure il est possible et il est certain que les règles sont valides et que les faits sont vrais. **Des coefficients sont attribués subjectivement** par un expert, ou bien déduits de mesures de possibilité et de nécessité affectés aux propositions logiques classiques.¹*

- Quel genre d'expert ?

- Un expert de toute sorte, sans qu'il soit nécessairement pointu. Supposons que nous posions la question suivante :

*« M. Dupont sera-t-il dans son bureau le lundi 6 janvier ? » Pour y répondre, il est difficile de savoir si l'on doit considérer ce que M. Dupont a fait tous les lundis précédents, ou ce qu'il a fait chaque premier lundi du mois, ou encore de l'année, ce qu'il fait généralement pendant le mois de janvier... Sa secrétaire est néanmoins capable de dire **s'il est possible** de répondre positivement à la question, et avec quelle certitude, **par une approche subjective du problème.**²*

La secrétaire est aussi capable que n'importe quel « expert » de raisonner en termes de « si... alors ».

- A l'évidence, mais est-ce dans ce cas le *modus ponens* classique (si p \rightarrow q vrai et p vrai, alors q vrai) ?

- Pas tout à fait, elle use du *modus ponens* généralisé comme en théorie des sous-ensembles flous. Elle raisonne de façon approximative pour modifier le *modus ponens* et obtenir la souplesse souhaitée.

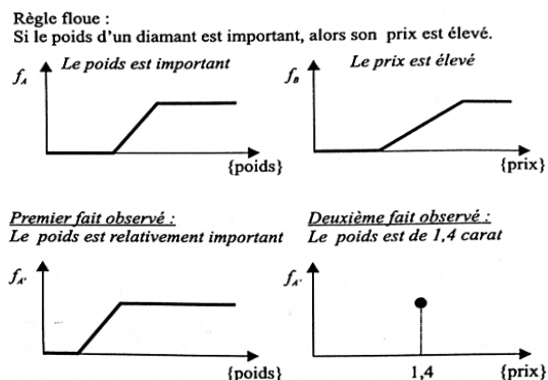
Par ex., la règle :

« si le poids d'un diamant est important, alors son prix est élevé »

doit pouvoir être utilisée pour un diamant donné malgré le qualificatif flou « important ».

En revanche, si le poids n'est que « relativement important » (expression encore plus floue), il y a lieu de fournir aussi une conclusion relative au prix

Voir ci-contre ces deux exemples d'utilisation d'un raisonnement approximatif.³



La règle de déduction du *modus ponens* peut être ainsi adaptée en présence de faits dont la connaissance est vague ou imprécise. Ce *modus ponens* est encore, littéralement, un mode qui affirme.

Le coefficient de possibilité permet de quantifier approximativement la certitude, i.e. la force de liaison entre la prémisse et la conclusion.

Sachant que la taille d'un individu est grande, peut-on dire qu'elle est entre 1,65 et 1,75m ? Le coefficient de possibilité y répond. Un degré de possibilité se situe entre un événement tout à fait possible (coefficient = 1) et un événement impossible (coefficient = 0). Pour évaluer à quel point la taille se situe entre 0 et 1, la mesure de possibilité Π indique la plus grande valeur dans le cas fini,

¹ *Ibid.*, p.97. Nous soulignons.

² *Ibid.*, p.42. Même remarque.

³ *Ibid.*, pp.80-81.

associée à l'intersection des parties de X , puisque l'on considère l'ensemble $P(X)$ des parties de X . Par exemple,

Soit X l'ensemble des jours d'une semaine. [Cet ensemble constitue l'ensemble fini $P(X)$ des parties de X , la semaine]. Supposons qu'il soit possible que la nomination lundi ou mardi, du Directeur soit annoncée, $\Pi(\{\text{lundi, mardi}\}) = 1$, et relativement possible qu'elle le soit mercredi, $\Pi(\{\text{mercredi}\}) = 0,8$. Il est alors tout à fait possible que cette nomination soit annoncée lundi, mardi ou mercredi, avec $\Pi(\{\text{lundi, mardi, mercredi}\}) = \max(1, 0,8) = 1$.¹

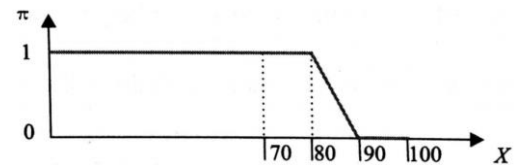
- Et dans le cas « infini » ?

- On considère alors une « distribution de possibilité », π , qui n'est pas sans rappeler une distribution de probabilité d'une fonction continue (comme la distribution normale en cloche). Cette distribution attribue des coefficients compris entre 0 et 1 à tout élément de X , et non plus à toute partie de X .

Considérons par ex. la possibilité qu'un certain nombre de personnes se trouvent dans un wagon de métro, l'ensemble de référence X étant celui des entiers inférieurs à 100. La mesure $\pi(x)$ exprime le degré avec lequel il est tout à fait possible que le nombre de personnes qui se trouvent dans un wagon soit compris entre 70 et 82.

Dans ce cas, en raisonnant en intervalles, $\Pi[90,100) = 0$, et plus généralement $\Pi([a,b]) = \pi(a)$ pour tout $0 \leq a \leq b$ en raison de la monotonie de π .

A la différence de la probabilité qu'un certain nombre de personnes se trouvent dans le wagon, on remarque que : $\Pi[0,70) = \Pi[71,100) = 1$, c'est-à-dire que les deux intervalles complémentaires sont tous deux absolument possibles.



L'adjectif complémentaire me fait penser d'ajouter qu'une mesure de possibilité, Π , doit être complétée par une mesure de nécessité, N , indiquant la certitude attachée à la réalisation d'un événement. La mesure de nécessité apparaît être **la grandeur duale** d'une mesure de possibilité. La mesure de nécessité est définie par l'intermédiaire du complémentaire A^C de toute partie A de X , i.e. formellement : $\forall A \in P(X)$ (l'ensemble des parties de X) $N(A) = 1 - \Pi(A^C)$.

<p>Plus un événement A est affecté d'une grande nécessité, moins l'événement complémentaire A^C est possible, donc plus on est certain de la réalisation de A.</p> <p>$\Pi(A)$ mesure le degré avec lequel l'événement A est susceptible de se réaliser, $N(A)$ indique le degré de certitude que l'on peut attribuer à cette réalisation. La réalisation de l'événement A est certaine ($N(A) = 1$) si et seulement si celle de son complémentaire A^C est impossible ($\Pi(A^C) = 0$ donc $\Pi(A) = 1$).</p>	<p>Ainsi, si $N(A) \neq \Pi(A) = 1$, ce qui veut dire que tout événement dont on est, au moins un peu, certain, est tout à fait possible. Reprenons l'exemple précédent :</p> <p>La certitude que le nombre de voyageurs dans un wagon est au plus égal à 80 vaut $N([0,80]) = 1 - \pi(81) = 0,1$</p> <p>[car $\forall A \in P(X) \quad \Pi(A) = \sup_{x \in X} \pi(x)$, étant rappelé que $\sup_{x \in X} \pi(x) = h(A)$, la hauteur de A, i.e. le plus fort degré avec lequel un élément x de X appartient à A, soit ici 0,9].²</p>
---	---

- Vraiment fini ?

- Cette fois oui, provisoirement, mais on voit déjà, à ce stade, combien des connaissances imprécises, représentées par des sous-ensembles flous, peuvent conduire, via la notion de fonction d'appartenance, à une mesure (ou distribution) de possibilité. Cette mesure est susceptible d'être complétée par une mesure de nécessité afin de disposer d'une information globale sur la classe floue considérée.

Et ce, ajouterions-nous, bien que la fonction d'appartenance soit assimilable à une fonction de croyance, quantifiant la crédibilité attribuée à un fait.³

Des sous-ensembles flous floutant la loi
De la commande floue au contrôle flou de l'interprétation

¹ Ibid., p.44.

² Ibid., pp.50-52.

³ Incertitude, imprécision, <https://www.hds.utc.fr/~massomar/publis/MemoireScientifiqueVF.pdf>,

Les équations de Navier-Stokes (petit historique et signification)

1/ Les équations d'Euler pour un fluide parfait (= qui conserve l'énergie) et incompressible (= qui conserve la masse)

$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ (équation fondamentale de la dynamique)

ou : $m \cdot a = F$

$$\rho_0 \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \right) \mathbf{u} = \rho_0 \mathbf{g} - \nabla p$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

Euler publie en 1755 un traité dans lequel apparaissent pour la première fois les équations aux dérivées partielles décrivant les **fluides parfaits incompressibles**.

Il revient néanmoins à d'Alembert d'avoir étudié le premier le mouvement des fluides en présence d'un corps solide en y introduisant les notions de dérivées partielles, de champ de vitesse et de pression interne d'un fluide, mais **Euler** parvient à dégager la notion de **gradient de pression** qui avait échappé à d'Alembert. Le terme *gradient* signifie simplement le vecteur, formé par l'ensemble des dérivées partielles d'une fonction f , par rapport à toutes ses variables, il se note ∇f (nabla f).¹

Il s'agit d'un système d'équations aux dérivées partielles qui conserve l'énergie

\mathbf{u} désigne le champ de vitesse (\mathbf{u} est moins un vecteur qu'un champ de vecteurs), ρ_0 la densité du fluide qui remplace la masse m (constante égale à 1) dans l'équation fondamentale de la dynamique : $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, et \mathbf{g} la gravité qui fait office d'accélération \mathbf{a} . Pour simplifier, on suppose qu'il n'y a pas d'autre force extérieure dans le bilan des forces \mathbf{F} agissant sur le fluide (comme par ex. le vent).

On dérive par rapport au temps de l'écoulement du fluide ($\partial/\partial t$) et par rapport aux trois directions de l'espace via le gradient ∇ , i.e. le vecteur de dérivation par rapport aux trois variables d'espace, avec $\nabla = (\partial/\partial x_1, \partial/\partial x_2, \partial/\partial x_3)$ appliqué à \mathbf{u} , soit $\nabla \cdot \mathbf{u} = (\partial u^1/\partial x_1 + \partial u^2/\partial x_2 + \partial u^3/\partial x_3) = \sum (\partial u^j/\partial x_j, j \text{ allant de } 1 \text{ à } 3)$.

Les inconnues sont la vitesse $\mathbf{u}(t,x)$ et la pression $p(t,x)$ du fluide au temps t au point $x = (x_1, x_2, x_3)$. Dans le second membre de l'équation, $-\nabla p$ correspond aux forces de pression, i.e. au gradient de la fonction qu'est la pression du fluide $p(t,x)$. La seconde équation $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ traduit, au niveau du champ de vitesses. **L'incompressibilité du fluide. Le fluide réagit pour garantir sa pression.** Le produit scalaire $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ signifie que la divergence est nulle, autrement dit le champ de vecteurs \mathbf{u} est orthogonal au gradient scalaire de \mathbf{u} par rapport aux variables d'espace (ce gradient est fonction du point (x_1, x_2, x_3)).

L'équation d'Euler est en fait un système de trois équations (car \mathbf{u} est un vecteur à trois composantes, u^1, u^2 et u^3) + l'équation $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$, ce qui fait un système de 4 équations à 3 inconnues. Or, nous avons vu que pour avoir une chance de résoudre un tel système, il faudrait rajouter une inconnue pour que le système ait autant d'inconnues que d'équations. L'inconnue en question est précisément le gradient de pression, $-\nabla p$ (le signe - traduit la contre-réaction du fluide. Ce n'est qu'à cette condition que l'on pourrait obtenir une divergence nulle. Il faut cette inconnue à cause de l'incompressibilité.

Le système d'équations aux dérivées partielles d'Euler, qui conserve l'énergie, est finalement **non linéaire**. Si vous multipliez par ex. le champ de vitesses \mathbf{u} par 2, la solution ne sera pas multipliée par 2 ; ce ne sera pas la somme de solutions.

2/ Les équations de Navier-Stokes pour un fluide parfait visqueux (\Rightarrow qui ne conserve pas l'énergie)

a) Pour comprendre pourquoi un solide plongé dans un liquide va subir en général une force de résistance, tendant à le freiner, il faut en fait prendre en compte des phénomènes de **frottement** au niveau moléculaire dans le fluide : lors de son évolution, un fluide va en effet avoir tendance à **dissiper de l'énergie**, sous forme de chaleur, et ce simplement par le frottement d'une couche de fluide sur l'autre. Inclure un tel phénomène dans les équations d'Euler semble difficile puisque les équations d'Euler formulent l'écoulement de la vitesse macroscopique du fluide, alors que cette dissipation d'énergie a lieu à un niveau microscopique.

D'où l'étude par Navier puis Stokes de l'évolution d'un fluide **visqueux** pour tenir compte précisément de cette dissipation d'énergie sous forme de chaleur. L'énergie n'est plus conservée. En remuant par ex. de l'eau dans un verre avec une cuillère, elle va s'agiter en revenant au repos après un temps. L'énergie du fluide, animée d'une vitesse \mathbf{u} , a pour expression u^2 , comme l'énergie cinétique ($1/2 mv^2$) en mécanique des solides. u^2 n'est pas conservé.

La viscosité d'un fluide ν correspond à sa résistance à la déformation. Elle ne remplace pas la dissipation $-\Delta \mathbf{u}$, mais la pondère en $-\nu \Delta \mathbf{u}$. Si ν est petit, le fluide est presque parfait ; si ν est grand, le fluide n'est pas parfait du tout. Par ex., le miel se déforme plus difficilement que l'eau, car il est plusieurs milliers de fois plus visqueux que l'eau.

¹ Isabelle Gallagher, *Résolution des équations de Navier-Stokes*, Math Park, 13 déc. 2014, Institut Henri Poincaré (IHP), déjà cit. ; <https://images.math.cnrs.fr/Autour-des-equations-de-Navier-Stokes.html>

Dans ce système non linéaire aux dérivées partielles, la masse est conservée mais l'énergie décroît.

$$\rho_0 \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \right) \mathbf{u} - \nu \Delta \mathbf{u} = \rho_0 \mathbf{g} - \nabla p$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

Δu est le laplacien Δ , appliqué au champ de vitesses, dans lequel on dérive deux fois :

$$\Delta u = (\partial^2 u / \partial x^2 + \partial^2 u / \partial y^2 + \partial^2 u / \partial z^2)$$

La vitesse \mathbf{u} et la pression p demeurent des variables, des inconnues à déterminer. $\partial/\partial t u$, i.e. $\partial \mathbf{u} / \partial t$, est la dérivée de la vitesse par rapport au temps (la vitesse, ou plutôt le champ de vecteurs vitesse pour prendre en compte toutes les directions possibles (en altitude, latitude et longitude)).¹

L'équation *supra* est simplifiée. Dans celle générale *infra*, la force extérieure \mathbf{f} comme la gravité apparaît de façon séparée. Elle s'ajoute à la somme des forces. Dans la même équation, on ne considère plus ρ_0 , la masse constante égale à 1, mais ρ , toute masse volumique constante qui représente la quantité de matière (la masse qui se trouve dans une unité de volume donné). En gardant la contrainte d'incompressibilité $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$, l'équation de la dynamique $m\mathbf{a} = \mathbf{F}$, qui énonce la conservation de la quantité de mouvement \mathbf{p} (un vecteur à ne pas confondre avec le p scalaire de la pression), devient :

masse volumique 2	ρ	accélération $(\partial \mathbf{u} / \partial t + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u})$	somme des forces $= -\nabla p + \nu \Delta \mathbf{u} = + \mathbf{f}$	De $F = ma$, il est possible d'écrire que la dérivée de la quantité de mouvement $m\mathbf{v}$ est égale à la force qui lui est appliquée $\sum \mathbf{F}_i = d\mathbf{p}/dt$, sachant ici que la masse ne varie pas au cours du temps.
-------------------------	--------	---	--	--

Dans la somme des forces, les deux autres termes représentent **les forces exercées sur le fluide lui-même**, celles induites par les variations de pression, le gradient ∇p , responsables par ex. des vents dans l'atmosphère, et celles dues à la nature visqueuse du fluide $\nu \Delta \mathbf{u}$, caractérisé par le coefficient de viscosité dynamique ν (dans l'expression simplifiée, ces variations apparaissent dans le 1^{er} membre de l'équation). La somme des forces provoque l'accélération, conformément à la loi de Newton (la loi fondamentale de la dynamique perçue en fait dès Galilée).

b) Dans l'équation simplifiée comme dans la suivante, figure le terme $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$, i.e. u scalaire gradient \mathbf{u} . Ce terme figurait déjà dans l'équation d'Euler. Il s'agit d'un **terme d'inertie**. Pourquoi est-il là ? Parce que l'accélération dont parle Newton est celle d'une particule le long de sa trajectoire alors que moi, observateur x , je me place en un point fixe de l'espace.



Soit par ex. le flot de voitures sur une autoroute.

Nous n'allons pas suivre individuellement chaque voiture, mais plutôt nous placer à un endroit donné du trajet et mesurer, à cet endroit et à chaque instant, la vitesse de la voiture en train de passer. Cela nous donnera un vecteur qui dépend de l'instant auquel on le calcule, mais aussi de la position où ce calcul est fait. Connaître ce vecteur en chaque point et à chaque instant, c'est avoir accès à l'ensemble de l'état de l'autoroute en question à chaque instant. Ce vecteur est précisément un champ de vecteurs. Nous touchons ici du doigt la différence fondamentale entre le point de vue dit **lagrangien** (consistant à suivre en permanence la trajectoire de chaque voiture, ou plus généralement chaque particule d'un fluide) et le point de vue dit **eulérien** (qui consiste à calculer le champ de vitesse instantanée à chaque instant en chaque point).³

La mécanique des fluides demeure une branche de la mécanique rationnelle. Dans ce cadre, les équations de Lagrange ont reformulé l'équation de Newton ($F = ma$) qui ne fait pas intervenir les forces de réaction. Ces équations permettent d'obtenir plus facilement les équations du mouvement d'un système complexe sans avoir à utiliser la notion de force. Mais alors que les équations de Lagrange étudient les mouvements d'un nombre quelconque de corps solides, c'est-à-dire d'un système de corps dont la position et les vitesses ne dépendent, en définitive, que d'un nombre limité de paramètres variables, un liquide est un milieu continu en chaque point duquel la vitesse aura, en générale, une vitesse différente.⁴

D'où l'intérêt du point de vue eulérien, repris dans les équations de la dynamique des fluides incompressibles de Navier-Stokes, en rappelant toutefois que celles d'Euler ne tiennent pas compte de la viscosité. Elles ne permettent pas d'expliquer par ex. la résistance à la progression d'un solide dans un fluide ni le vol des oiseaux dont nous pouvons admirer la portance.

¹ Ibid.

² Les équations clefs de la physique. Les équations de Navier-Stokes, CEA, 7 sept.2020, <https://www.youtube.com/watch?v=nRSWIndKiiA>

³ Isabelle Gallagher, 28 janv. 2010, <https://images.math.cnrs.fr/Autour-des-equations-de-Navier-Stokes.html>. Nous soulignons.

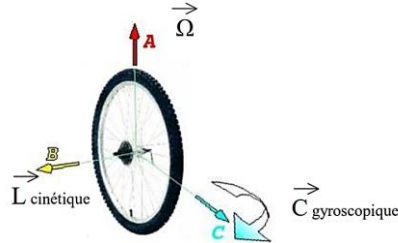
⁴ E. Borel, L'évolution de la mécanique, op. cit., p.105 ; https://fr.wikipedia.org/wiki/Equations_de_Lagrange

Annexe V

vélo : la réaction gyroscopique des roues

Le système vélo/cycliste est un solide déformable puisque le cycliste est susceptible de modifier l'état initial du système. En outre celui-ci peut exercer un couple de forces sur le guidon et ainsi modifier directement la direction du moment cinétique de la roue si l'on considère la liaison entre la fourche et le guidon comme parfaite.

Donc selon la théorie de conservation du moment cinétique d'un solide en rotation, il va résulter de ce couple de forces (dénommé couple gyroscopique) exercé sur le guidon un effet, l'effet gyroscopique qui tendra à redresser le système (si le guidon a été tourné dans le sens de la chute).



La roue est un solide indéformable avec une symétrie des actions parfaites puisqu'elle a une forme de révolution.¹

Rappel : Le principe de base du gyroscope est d'opposer une force qui agit comme une contre-force à une perturbation qui dérangerait une direction donnée. Gyroscope vient du grec signifiant étymologiquement « qui observe la direction ».

§62. ter - OUVRIR AUSSI LA LOGIQUE A D'AUTRES FORMES PERIPHERIQUES**3/ Autres formes de logique en œuvre (suite)****c) Quid encore de la logique bivalente ?**

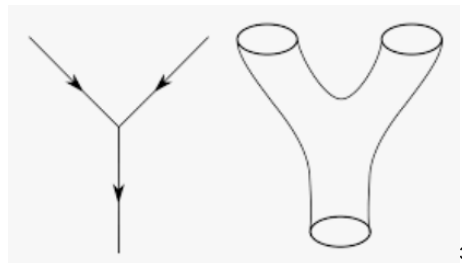
- i La logique de Boole à l'assaut du droit constitutionnel
- ii La logique bivalente, autre que la booléenne classique
- iii La logique binaire ni booléenne classique ni quantique

Annexes II et IV, 457

Annexe IV

La justice transitionnelle dans le monde entre 1993 à 2014 ²

(3 tableaux synoptiques, exposés dans un « bonus », en relation la notion de *cobordisme* en mathématiques dans le présent Volet II)



¹ Clémence Delon, Yoann Génolini, Manon Libert, *L'équilibre de la roue*, Olympiades de physique France, 2007-2008, https://odpf.org/images/archives_docs/15eme/memoires/gr-21/memoire.pdf

² Alain Laraby, addendum à la brochure *L'approche française de la justice transitionnelle* du Ministère français des affaires étrangères, Direction générale de la mondialisation, du développement et des partenariats, 2014. La brochure a été écrite par mes soins et ceux d'Arnaud Garcette. Cet addendum, dont je suis le seul auteur, n'a pu être ajoutée à la brochure pour ne pas la surcharger.

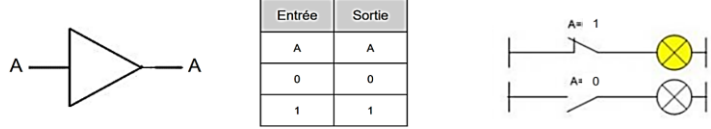
³ <https://tracingcurves.wordpress.com/2021/09/27/stringification-as-categorisation/>

Annexe II

Les portes logiques dans un ordinateur digital (ou les circuits combinatoires les plus simples)¹

On peut définir chaque porte logique par son symbole, sa table de vérité (faisant correspondre en sorties toutes les combinaisons de valeurs en entrées), et son équivalence en schéma électrique.

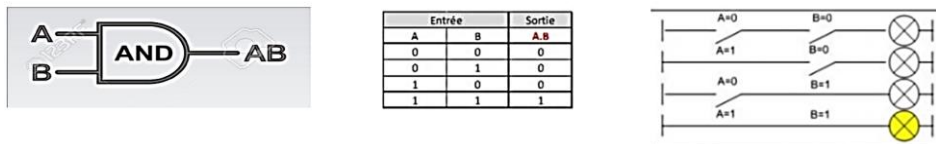
Porte OUI: fonction de base la plus simple puisque la logique de sortie est égale à la logique de l'entrée



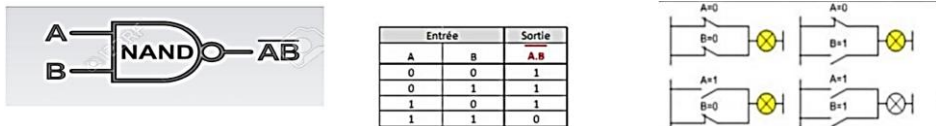
Porte NON complémentaire de la fonction OUI - la logique de sortie est égale à l'inverse de la logique de l'entrée



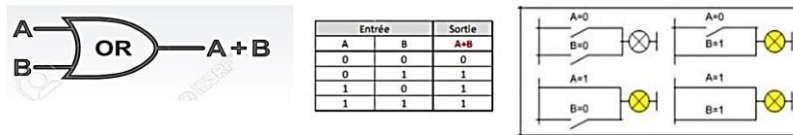
Porte logique ET avec deux entrées et une sortie. Pour que la sortie soit au niveau logique 1, il faut que les deux entrées soient à 1. Dans le cas contraire, la sortie est à 0.



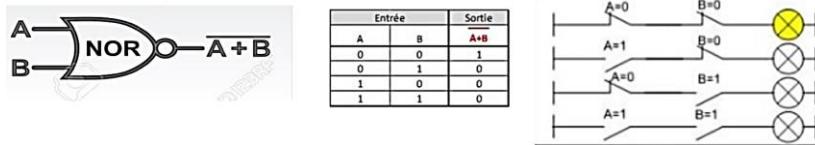
Porte logique Non ET, l'inverse de la porte logique ET. La sortie sera toujours au niveau logique 1 sauf dans le cas où elle présente deux entrées à 1.



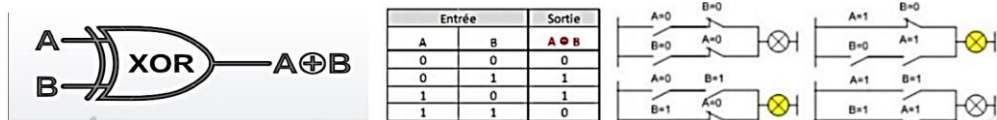
Porte logique OU: Pour que la sortie soit au niveau logique 1, il faut que au moins une des entrées soit à 1.



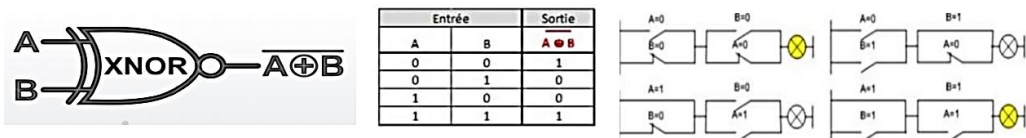
Porte logique Non OU: Pour que la sortie soit au niveau logique 1, il faut que les deux entrées soit à 0, dans les autres cas la sortie sera à 0



Porte logique OU exclusif : Pour que la sortie soit au niveau logique 1, il doit y avoir une seule des entrées qui soit à 1, dans les autres cas la sortie sera à 0



Porte logique Non OU exclusif : Pour que la sortie soit au niveau logique 1, il faut que les 2 entrées soit identiques.



¹ http://www.ac-grenoble.fr/lycee/triboulet.romans/IMG/pdf/Les_portes_logiques.pdf

§62.^{quater} - OUVRIR AUSSI LA LOGIQUE A D'AUTRES FORMES PERIPHERIQUES

3/ Autres formes de logique en œuvre (suite et fin))

d) Quid de l'indécidable ?

- i Chasser la confusion et la contradiction que je ne saurais voir*
- ii Les propriétés de consistance, de complétude et d'indécidabilité, 458*
- iii Propos et pratiques du métalangage, 468*
- iv Cohérence et complétude*

e) Que peuvent nous dire les théorèmes d'incomplétude en droit ?

- i Emboîtement*
- ii L'épistémè des logiques de situation*
- iii L'épistémè des logiques de structure*

f) Gödel et la Constitution américaine

Annexe I, 476

d) Quid de de l'indécidable ?

- i Chasser la confusion et la contradiction que je ne saurais voir*
- ii Les propriétés de consistance, de complétude et d'indécidabilité*

De Leibniz à Hilbert, 458. Gödel, 462

De Leibniz à Hilbert

Hobbes assimilait la pensée politique presque à un calcul. Bentham également, en l'appliquant aux besoins les plus élémentaires, touchant le plaisir et la peine, qu'éprouve tout un chacun. Leibniz est, en logique, plus hardi, voire téméraire. Il projette de redresser le discours mathématique même. Il veut le rendre aussi mécanique que le calcul proprement dit. Ce discours doit tenir davantage la route que la syllogistique d'Aristote. En élaguant les mauvaises herbes qui le parsèment, la science se donnerait le moyen de vérifier la cohérence de tout discours, dont celui de la philosophie naturelle et juridique :

S'il arrivait que deux philosophes ne soient pas du même avis, ils ne se disputeraient pas plus que deux comptables. Il leur suffirait de s'asseoir ensemble avec du papier et un crayon et de se mettre à calculer.¹

Le projet de Leibniz est novateur. En mettant l'accent sur la cohérence, son but n'est pas d'obtenir des énoncés qui sont vrais. Son apport est autre que celui de la logique de Port-Royal qui conseille l'esprit à bien se conduire dans le discernement du vrai et du faux. Le projet de Leibniz diffère aussi de celui de Descartes qui se préoccupe de la nature des objets mathématiques et non de leur existence. L'algèbre et la géométrie lui semblent séparées comme des étrangers. Il veut algébriser la géométrie.

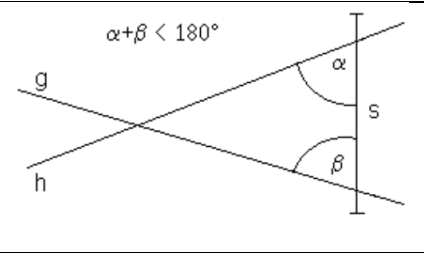
Dans le monde moderne, Leibniz entend axiomatiser la géométrie, comme Euclide, dans le monde ancien, entendait la géométrie en posant par exemple qu'entre deux points, on ne peut passer qu'une droite et qu'en dehors d'elle on peut passer par un point une autre sans qu'elle croise celle de départ (postulat des parallèles, que l'on reformule plus directement : par un point extérieur à une droite, il passe une parallèle et une seule).² Leibniz envisage la vérité du seul point de vue syntaxique et non du point de vue sémantique. Même la vérité axiomatique d'Euclide ne doit pas échapper à un tel examen formel.

¹ J. Fresán, *Le rêve de la raison. La logique mathématique et ses paradoxes*, op. cit., p.67.

² Nous suivons sur ces points le mathématicien Jean-Marc Deshouillers, *Les théorèmes de Gödel : fin d'un espoir ?* Université Victor Segalen Bordeaux 2, 2005-2006, <https://www.youtube.com/watch?v=xm7vx9NeoFw> ; Euclid, *Elts*, Bk I, Postulates 1 et 5, Dover, vol.1.

La formulation précédente de l'axiome des parallèles n'est pas exactement celle d'Euclide. L'énoncé original, exprimé dans le Livre I des *Eléments*, disait équivalamment (et en simplifiant) :

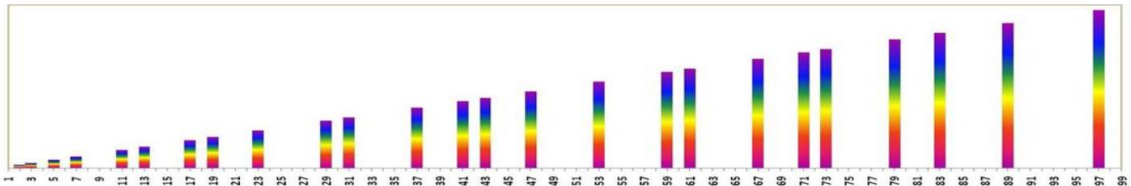
Si une droite (S), tombant sur deux droites (g et h) fait les angles intérieurs (α et β) du même côté plus petit que deux droits (i.e. $\alpha + \beta < 180^\circ$), ces droites, prolongées à l'infini se rencontreront (ou se couperont) du côté de ces deux angles.¹



Leibniz dit, *en plusieurs lieux, qu'il convient de démontrer les axiomes d'Euclide. Certes, faute d'avoir réussi, on peut, en attendant, construire des chaînes hypothétiques, qui nous feront sortir de la confusion. Ces résultats sont rigoureux, mais on se donne toujours la possibilité et s'assigne le devoir de revenir en arrière, pour établir des démonstrations concernant les suppositions et réquisits. Certes, ces démonstrations sur les termes premiers n'affectent pas la stabilité de la chaîne déjà découverte, mais il reste que la certitude ne sera acquise qu'au moment du contrôle en retour sur les éléments.*

Sans interrompre le travail du mathématicien, Leibniz plaide donc pour un retour sur ce qui est supposé tacitement. On ne sait jamais. Quoique les mathématiciens excellent à déceler les moindres erreurs, il peut s'en trouver d'autres cachées à leur attention. Les *Eléments d'Euclide* sont le paradigme de ce qu'il faut faire : réécrire la langue mathématique en manipulant des éléments primitifs. Leibniz veut aller plus en deçà en réduisant les éléments à des lettres, à des chiffres, avant d'établir, à partir d'eux, une combinatoire. L'on construirait ainsi une langue universelle de vérités primitives et de dérivatives.²

La langue universelle devrait mettre fin à la *confusio linguarum*, la confusion des langues, pour réunir toutes les pensées humaines, y compris le droit, indépendamment de la langue dans laquelle elles sont formulées. Ces nouveaux éléments constitueraient un catalogue d'idées premières. A chacune serait attribué un nombre premier, i.e. un nombre qui ne peut être divisé que par lui-même et par 1, comme 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19... Un tel nombre est premier ou « insécable », au sens où il n'admet pas de factorisation non triviale. Le nombre 1 est ce fait exclu de la liste des nombres premiers.



Les 25 nombres premiers jusqu'à 100. Gauss démontrera dans ses *Disquisitiones arithmeticae*, parus en 1801, le théorème fondamental de l'arithmétique qui dit que **les nombres premiers sont les briques de construction des nombres entiers**.³

A partir de l'inventaire qu'imagine Leibniz à la fin du XVII^e siècle, il serait possible de calculer les caractères des idées dérivées comme on forme des nombres composés à partir des nombres premiers.

*Si aux concepts d'eau et de calme correspondaient, par exemple, les nombres 3 et 5, alors la notion de lac pourrait être caractérisée par le produit 3×5 . Réciproquement, si l'on nous dit que le concept de lac présente le caractère 15, on décomposerait 15 en facteurs premiers et, en cherchant dans l'encyclopédie des idées primitives associées à 3 et 5, on conclurait qu'un lac n'est rien de plus que de l'eau calme. Ainsi, pour savoir si une expression du type « A et B » est vraie, il suffirait de vérifier que le caractère de B divise celui de A.*⁴

On est bien dans le rêve de la raison dans lequel des esprits comme Leibniz aiment à se pâmer. Malheureusement, *l'ambitieux projet de Leibniz, découvert deux siècles après la mort du philosophe,*

¹ https://fr.wikipedia.org/wiki/Axiome_des_parallèles

² Michel Serres, *Le système de Leibniz et ses modèles mathématiques*, Puf, Paris, 2007, 4^e édit., Introd., p.19, n.1 ; chap.1, p.138.

³ <http://villemin.gerard.free.fr/Wwwgvm/Premier/introduc.htm>

⁴ J. Fresán, *Le rêve de la raison. La logique mathématique et ses paradoxes*, op. cit., p.80.

ne se réalisa jamais. Il suggéra toutefois à Gödel le moyen de traduire le métalangage en arithmétique.¹

Avant Gödel, le métalangage commençait déjà à être traduit en arithmétique avec Hilbert. Le mathématicien allemand du début du XX^e siècle voudra axiomatiser, par ce biais, la géométrie élémentaire en exhibant des axiomes indépendants les uns des autres. Sa position est formaliste : les mathématiques ne traiteraient pas des objets, mais de leurs relations. La question ontologique de leur nature doit être mise de côté. Ce qui importe est que ce système de relations soit non contradictoire. Il ne peut contenir en même temps des énoncés et leur contraire. L'existence des objets en dépend.

Il faut comprendre l'époque où Hilbert professe cet acte de foi. Quand Hilbert fit une conférence sur ce thème, *les premiers paradoxes de la théorie des ensembles avaient déjà fait leur apparition, mais il manquait encore une année à Russell pour découvrir la contradiction qui déclencherait toutes les alarmes. La diffusion du paradoxe de l'ensemble de tous les ensembles ne s'appartenant pas serait rapide et mettrait en émoi les cercles des mathématiciens européens.* Le paradoxe naît si on admet l'idée d'ensembles qui se contiennent eux-mêmes. Le paradoxe du menteur naît également si j'affirme que ce que je dis est faux. La réflexivité du langage naturel joue au je un vilain tour s'il n'y prend garde.

Comme pour Leibniz, il ne suffisait à Hilbert que les mathématiques aient l'apparence de la cohérence ; il faut qu'elles le soient vraiment.

Pour le démontrer, Hilbert propose un ensemble de techniques qu'il appelle **la « métamathématique »**. Bien que les systèmes formels que recherche Hilbert pour l'arithmétique ressemblent aux axiomatiques antérieures comme celle de Peano, ils s'en distinguent par une caractéristique fondamentale : dans ces systèmes, *toute affirmation est traduite en une série de symboles d'un langage artificiel, qui semble dénué de sens. Hilbert explique par exemple que la géométrie ne change pas si, au lieu d'écrire « point », « droite » et « plan », on écrit « amour », « loi » et « ramoneur ».*

(Annexe I sur l'axiomatique de Peano, développant certains aspects de l'annexe qui lui a déjà été consacrée dans le volet 2 du §62^{bis})

La métamathématique introduit des niveaux linguistiques auxquels appartiennent les différents énoncés. *C'est ce qui se produit lorsque, dans un roman, l'un des personnages se met à écrire un autre roman. De la même manière que la littérature peut devenir métalittérature, les mathématiques peuvent se transformer en métamathématiques.*² Il en est aussi, selon nous, du droit et de la théorie du droit dans laquelle nous œuvrons pour décrire comment fonctionne réellement le droit constitutionnel hérité des Lumières. L'on met à jour **des modes de raisonnement scientifique qui opèrent tant dans les pensées, souvent de façon inconsciente, qu'à tout le moins dans les comportements apparents.**

En recourant au langage artificiel de la métamathématique, Hilbert espère éliminer les paradoxes nés de l'autoréférence dans les langues naturelles, comme celui identifié par Russell ou celui du menteur affirmant « cette phrase est fausse ». Hilbert espère aussi démontrer méta-mathématiquement la cohérence de l'arithmétique. *Cohérence, consistance et non contradiction* sont des expressions quasi-synonymes. *Un système est « simplement cohérent ou cohérent » au sens aristotélicien s'il ne se trouve pas, parmi ses théorèmes, deux formules dont l'une soit la négation de l'autre.* Un système est « cohérent » au sens d'Hilbert si, plus précisément encore,

*des axiomes arbitrairement posés ne se contredisent pas l'un l'autre ou bien avec une de ses conséquences, ils sont vrais [comme cohérence] et les choses ainsi définies existent [dans la pensée]. Voilà pour moi le critère de la vérité [-cohérence] et de l'existence.*³

A la différence également de celle d'Aristote, la cohérence hilbertienne ne fait référence ni au monde extérieur ni à la langue usuelle. Elle ne dépend que de propriétés d'un autre type de discours. Hilbert

¹ Ibid.

² Ibid., pp.56-58.et 63.

³ L. Vax, *Logique. Lexique*, op. cit., p.26 ; David Hilbert, cité in Jean-Louis Léonhardt, « Vérité-correspondance et vérité-cohérence », CNRS-MOM. Sur internet. Nous soulignons.

entend formaliser le fondement des mathématiques. Grâce à la métamathématique, l'autofondation ne se confond point avec l'autoréférence. Le préfixe « auto- » ne renvoie nullement à la réflexivité. Imaginons encore, pour faire simple, *un cours d'anglais où le professeur explique en français les nuances du sens d'un mot de vocabulaire. Il y a alors deux langues en jeu : l'anglais, la langue que les élèves veulent apprendre, et le français, qui leur sert d'outils.* Pour démontrer la non contradiction de l'arithmétique, Hilbert considère des « objets de pensée » ou « choses » désignés par des symboles.

Les deux premiers que l'on peut agréger à loisir sont 1 et =. En utilisant le même symbole pour distinguer la classe de ce qui est de la classe de ce qui n'est pas, et les énoncés corrects des énoncés incorrects, Hilbert peut édifier l'arithmétique.

[...]

Hilbert introduit ensuite l'implication, la conjonction, la disjonction et les fonctions prépositionnelles, où la variable ne prend que ses valeurs que dans le domaine des objets précédemment construits, ce qui évite les paradoxes liés à l'idée de totalité des choses. 1 et = sont définis par deux axiomes, cependant que trois nouveaux symboles, « pour ensemble infini », « successeur » et « opération successive », sont accompagnés de trois axiomes supplémentaires empruntés à Peano.

Cela suffit pour l'arithmétique élémentaire. Hilbert prétend par la suite prouver, ou du moins indiquer comment prouver qu'il est impossible de déduire de ces axiomes des énoncés contradictoires, comme $11=111$ (11 et 111 sont ici des assemblages et non les nombres onze et cent onze).¹

La métamathématique n'emploie que des propositions « finitistes » ne portant que sur des totalités finies. Ces méthodes finitaires étaient censées être les plus sûres. Sur ce point, Hilbert rejoignait les mathématiciens intuitionnistes de son époque comme Brouwer pour qui tous les objets mathématiques sont le produit de l'esprit humain.² Leur existence équivaut à la possibilité de les construire. Ces mathématiciens ne reconnaissaient que l'infini potentiel où l'on peut ajouter, autant qu'on veut, de nouveaux nombres. Ils tournaient le dos à *l'infini réel* exposé par Bolzano et surtout Cantor (dans l'infini réel, l'on parle de tous les entiers naturels *à la fois* ; on embrasse leur infinité d'un seul et même regard).

(§59
1/b)ii)

Pas plus que chez Leibniz, il n'y a chez Bolzano de nombres infinis – même au pluriel, - mais seulement des pluralités et des grandeurs infinies qui, par définition, ne sont pas déterminées par des nombres.

≠

Un intuitionniste rejette un abstrait qui reste en l'air, non accompagné d'un acte de pensée, ou bien qui ne s'explique ni par l'exhibition d'instances, ni par la production d'une méthode de calcul. Un tel abstrait demeure verbal.³

Ce que Hilbert visait en fin de compte est de **mécaniser le raisonnement** en prétendant le réduire, comme chez Leibniz, à un pur calcul sur des signes d'un système formel. Grâce à la métamathématique, on pourrait enfin avoir la certitude de plus jamais trouver à l'avenir de contradictions en mathématiques. Certains systèmes formels se prêtent à quelques-unes des exigences de ce programme formaliste, mais Hilbert n'était pas au bout de ses peines comme de ses surprises ...

Dans une série d'articles publiés entre 1904 et 1927, David Hilbert a continué à préciser les détails de sa stratégie, qui visait à remplacer toutes les démonstrations mathématiques par des preuves utilisant les méthodes finitaires, pour arriver finalement à démontrer la cohérence de l'arithmétique de la manière la plus rigoureuse et la plus sûre possible. →

*Le chef de file de l'école de Göttingen [Hilbert y professait] ne pouvait imaginer qu'un jeune Autrichien, ayant commencé des études de physique à l'université de Vienne mais se sentant plus attiré par les mathématiques, allait découvrir que le rêve de Hilbert était impossible, **alors qu'il travaillait à faire progresser le programme formaliste.** Le pire, c'est qu'il y parvint en utilisant les méthodes finitaires !⁴*

Le jeune étudiant en question fut Gödel. Son apport, de première grandeur, n'a ruiné qu'en partie le programme d'Hilbert. Il est toujours loin d'être inutile d'avoir en science un discours dépouillé de toute ambiguïté et d'être au surplus cohérent. Dans le monde du savoir, l'absence de contradiction est appréciable. La trouvaille de Gödel (si on peut appeler telle un théorème d'une si grande portée) *n'enlève rien à la fécondité des travaux de Hilbert : une démonstration d'impossibilité permet souvent*

¹ J. Fresán, *Le rêve de la raison. La logique mathématique et ses par...*, p.63 ; J-P. Belna, *Histoire de la logique*, Ellipses, Paris, 2014, p.137.

² J. Fresán, *Le rêve de la raison. La logique mathématique et ses par...*, p.6' ; J-P. Belna, *Histoire de la logique*, p.133.

³ Hourya Sinaceur, in Bernard Bolzano, *Les paradoxes de l'infini* [1851, édit. posth.], Seuil ; Paris, 1993, Introd., p.26. Jean Largeault, *L'intuitionnisme*, Puf, Paris, 1992. Kindle, p.5.

⁴ J. Fresán, *Le rêve de la raison. La logique mathématique et ses par...*, p.66. Nous soulignons.

de réorienter les recherches. C'est ce qui s'est passé dans le cas présent, notamment en incitant les logiciens à adopter une conception de la démonstration moins restrictive que celle de Hilbert.

Gödel

Le programme hilbertien ambitionnait de formaliser l'arithmétique, voire la totalité des mathématiques, mais, pour éviter une théorie comme celle des types de Russell et Whitehead qui paraissait encore du bricolage,¹ le système devait satisfaire trois propriétés. Sans elles, on ne saurait savoir si le but est atteint. Ces propriétés portent sur la consistance, la complétude et la décidabilité d'un système formel.

Que faut-il entendre par elles ?

Un système formel est **consistant** s'il est impossible de démontrer une formule du système et sa négation à partir des mêmes axiomes. Il est **complet** si toute formule du système, ou sa négation, est démontrable à partir des axiomes. Il est **décidable** s'il existe un algorithme, c'est-à-dire un procédé de calcul constitué d'une suite finie d'instructions, qui permette de déterminer, pour toute formule du système, si elle est démontrable ou non.²

Ces propriétés entretiennent entre elles des liens.

Si le système formel a une contradiction, alors tous les énoncés sont dérivables. Ce système n'aurait aucun intérêt, car la négation serait aussi un théorème... Une contradiction impliquerait que n'importe quoi serait un théorème. 0 ne peut être simultanément égal à 1 et distinct de 1. On ne peut trouver, à partir du même système d'axiomes, des démonstrations de P et de -P. Ce système serait inconséquent.

De plus, pour que le système soit complet, il ne suffit pas qu'il soit cohérent ou consistant. Il faut que *toutes* les affirmations vraies de ce système puissent être démontrées à partir de ses axiomes. La vérité dont il s'agit n'est pas encore une vérité-contenu, mais une vérité formelle : n'est vrai que ce que l'on peut déduire, c'est à-dire que ce l'on peut *dériver* des prémisses ou axiomes d'un système formel.

Si l'énoncé G n'est pas dérivable à partir d'une certaine axiomatique, et si l'énoncé -G n'est pas non plus dérivable à partir de la même axiomatique, alors le système est indécidable. La consistance du système S devient elle-même indécidable. L'existence d'une formule indécidable dans un système formel prouve que celui-ci n'est pas complet.

L'incomplétude de S signifie que sa consistance est indécidable.

L'incomplétude d'un système provient donc, soit de ce que tout n'a pas été démontré, ou dérivé, à partir des axiomes, soit de ce que la consistance même du système n'a pas été démontrée en raison de l'indécidabilité.

Pour éclairer ces deux situations, pensons au droit.

1^{ère} situation

*Imaginons qu'un crime se passe dans une pièce fermée et qu'à son arrivée sur les lieux, la police trouve deux suspects aux côtes du cadavre. Chacun d'entre eux connaît toute la vérité au sujet du meurtre, qui est coupable et qui ne l'est pas. Pourtant, si aucun des deux ne parle, les inspecteurs devront trouver des empreintes digitales, des traces d'ADN ou tout autre preuve qui permette de les faire comparaître devant le juge. Mais s'ils ne trouvent rien, les suspects resteront libres et la vérité de ce qui s'est produit en restera là. **La méthode est insuffisante pour atteindre la vérité, bien que celle-ci existe.***

2^e situation

Après une dure journée de travail, les policiers décident de sortir prendre un verre pour se détendre. L'un d'entre eux est nouveau au commissariat et les autres le connaissent à peine. D'après ce qu'il a raconté, il est né à Grenoble puis a déménagé à Paris, parce que ses parents aimaient les grandes villes. Mais avec les données dont ils disposent, ses collègues n'arrivent pas

¹ L'expression « bricolage » n'est pas de nous, mais du mathématicien J.-M. Deshouillers, in *Les théorèmes de Gödel*, conférence déjà citée,

² J.-P. Belna, *Histoire de la logique*, pp.139-140.

à se mettre d'accord sur le fait qu'il soit marié ou non. **Pourtant, il ne fait aucun doute qu'une seule réponse à ce sujet est possible.**¹

Chacune de ces situations montre que même dans la vie courante, ce qui est vrai n'est pas toujours démontrable. C'est ce que veulent dire les logiciens lorsqu'ils déclarent qu'un système formel ou un système d'axiomes au sens hilbertien (les deux expressions sont synonymes) n'est pas complet.

Gödel a démontré deux théorèmes faisant ressortir une incomplétude

1^{er} théorème d'incomplétude.

Nous venons de rappeler qu'un bon système formel doit être *cohérent* (sans contradiction), *complet* (ce qui est vrai doit être aussi démontrable) et *décidable* (l'on doit pouvoir distinguer les axiomes du reste des énoncés qu'il est possible de vérifier en un nombre fini d'étapes). Décidable ne veut pas dire autre chose que *récuratif* (il existe un algorithme qui permet de tester si un élément appartient au système).

Le 1^{er} théorème de Gödel énonce que ces trois conditions sont incompatibles dans le cas de l'arithmétique. *Aucune axiomatisation réursive et cohérente ne peut être complète : il existera toujours certaines propriétés des nombres qui sont vraies et que l'on ne pourra démontrer à partir des axiomes.*

Pour démontrer donc que, **dans une théorie, des énoncés, que l'on sait vrais, peuvent n'être ni démontrables ni réfutables, qu'ils sont autrement dit, dans cette théorie, indécidables**, Gödel modifia le paradoxe du menteur afin de le transformer en une phrase indécidable qui ne comporte aucune contradiction. Au lieu de considérer « cette phrase est fausse », il considère « cette phrase n'est pas démontrable ». Gödel mime le paradoxe du menteur mais sans s'y réduire.

Appelons G cette dernière phrase et supposons que le système soit cohérent.

*Si G est fausse, alors G est démontrable, mais, dans un système cohérent, aucun énoncé faux ne peut être démontrable, sinon il y aurait immédiatement contradiction. Si G n'est pas fausse, alors elle est vraie. Nous avons donc une proposition vraie qui dit « Je ne suis pas démontrable ». Par conséquent, dès que l'on suppose que le système est cohérent, on peut trouver une phrase vraie mais indémontrable. En d'autres termes, « cohérent » implique « incomplet ».*²

Le système dont Gödel suppose la cohérence appartient aussi à l'univers de la métamathématique qu'envisageait Hilbert. *Gödel ne se réfère pas aux objets d'étude d'une quelconque théorie, mais aux théories elles-mêmes. Le génie de Gödel consista à traduire quelques expressions du métalangage en langage de l'arithmétique au moyen d'un système de codage basé sur les nombres premiers.*³ La formule « Je ne suis pas démontrable » a été transformée par Gödel en une relation numérique. On a parlé par la suite, à ce sujet, d'une *gödélisation* de la métamathématique par les entiers naturels.

Illustrons le propos à partir d'un système formel de « la logique du 1^{er} ordre », i.e. d'un calcul des prédicats où les quantificateurs ne peuvent pas porter sur n'importe quoi. Dans ce calcul où les prédicats désignent les propriétés d'une entité (« individu »), le 1^{er} ordre signifie que l'on ne quantifie que les variables (d'objets) et non les relations (les variables de prédicats). Par ex., Platon (p) est un homme (H), variable d'objet, se traduit par H(p). On ne quantifie pas ici la variable prédicat, i.e. ce qui affirmé ou nié par un verbe et/ou un adjectif, à propos de Platon. La logique du 1^{er} ordre repose sur un alphabet qui utilise divers symboles comme des variables habituellement notées x, y, z ... , des constantes a, b, c ... , des prédicats P, Q, R ... , des connecteurs logiques \wedge , \vee , \Rightarrow , \neg , des quantificateurs \forall et \exists , ...

Par ex. : $P(a,x) \wedge Q(x,y), \neg Q(x,y), \forall x \exists y (Q(x,y) \vee P(a,x)), \forall x (R(x) \wedge Q(x,a) \Rightarrow P(b,f(x)))$.

¹ J. Fresán, *Le rêve de la raison. La logique mathématique et ses par...*, p.28. Nous soulignons.

² *Ibid.*, pp.72-73.

³ *Ibid.*

L'illustration est la suivante. Soit la formule $\alpha = (p_1 \Rightarrow \sim p_2) \vee \sim (p_2 \Rightarrow p_1)$. Cette formule est celle d'un système formel. La formule α peut être représenté par un nombre entier positif, son nombre de Gödel : $G(\alpha)$. La formule compte exactement 13 signes, distincts ou non.¹

Associons à chaque symbole **un entier positif**, par ex. : $\sim = 1$, $\Rightarrow = 2$, $\vee = 3$, $(= 4$, $) = 5$, $p_1 = 6$, $p_2 = 7$, $p_8 = n + 5$. Alignons les 13 premiers nombres premiers, et affectons à chacun, comme exposant, le nombre qui représente le signe correspondant. Effectuons leur produit :

$$G(\alpha) = 2^4 \times 3^6 \times 5^2 \times 7^1 \times 11^7 \times 13^5 \times 17^3 \times 19^1 \times 23^4 \times 29^8 \times 31^2 \times 37^6 \times 41^5.$$

Expliquons, si cela va trop vite (je vois dans le regard du lecteur plus qu'il ne me dit).

Dans $\alpha = (p_1 \Rightarrow \sim p_2) \vee \sim (p_2 \Rightarrow p_1)$, la parenthèse ouverte, (, est le 1^{er} symbole, p_1 est le 2^e symbole, l'implication \Rightarrow le 3^e symbole, la négation \sim le 4^e symbole, p_2 le 5^e symbole, la parenthèse fermée,), le 6^e symbole, le connecteur \vee le 7^e symbole, la négation \sim le 8^e symbole, la parenthèse ouverte, (, le 9^e symbole, p_2 le 9^e symbole, l'implication \Rightarrow le 11^e symbole, p_1 le 12^e symbole et la parenthèse fermée,), le 13^e symbole. On code ensuite la position des symboles en la convertissant en exposant des nombres premiers présentés par ordre croissant. Ex. : dans la formule α , je prends le 5^e caractère, soit p_2 . A ce 5^e caractère, je fais correspondre le 5^e nombre premier, soit **11**. Or $p_2 = 7$, donc l'exposant de 11 va encoder le 5^e caractère de α , soit **11⁷**. De la même façon, au 2^e caractère p_1 correspond le 2^e nombre premier, soit **3**. Or $p_1 = 6$, donc l'exposant de 3 va encoder le 2^e caractère de α , soit **3⁶**.

$$\begin{array}{ccccccccccc} \alpha & = & (& p_1 & \Rightarrow & \sim & p_2 &) & \vee & \sim & (& p_2 & \Rightarrow & p_1 &) \\ & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \dots & & & & & & & \\ & & 4 & 6 & 2 & 1 & 7 & \dots & & & & & & & \\ & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & & & & & & & \\ & & 2^4 & 3^6 & 5^2 & 7^1 & 11^7 & \times \dots & & & & & & & \end{array}$$

Le nombre α (dont nous n'avons pas à calculer la valeur décimale) représente la proposition « $(p_1 \Rightarrow \sim p_2) \vee \sim (p_2 \Rightarrow p_1)$ ».

- Je ne comprends pas le 2^4 ? (dit un lecteur en rougissant sans trop s'apercevoir qu'il rougit)

- Dans le 2^4 , l'exposant 4 est celui du 1^{er} nombre premier, soit **2**. Or, le 1^{er} nombre premier doit correspondre au 1^{er} caractère d' α , la parenthèse ouverte = 4, d'où 2^4 . Une fois cet encodage fait pour tous les caractères d' α , il suffit d'aligner les nombres premiers par ordre croissant pour obtenir une multiplication de facteurs premiers qui se suivent élevés à certaines puissances. Par la suite, il est fait application du théorème fondamental de l'arithmétique de décomposition en produit de facteurs premiers, de Gauss : les nombres ne peuvent être décomposés que d'une seule manière en leurs facteurs premiers. Ainsi, à deux formules distinctes, correspondent deux nombres gödeliens distincts.

Comme il y a une correspondance biunivoque entre toute proposition et son nombre de Gödel, il suffira de raisonner sur les nombres correspondants. Nous n'avons affaire jusqu'à maintenant qu'à la proposition « $(p_1 \Rightarrow \sim p_2) \vee \sim (p_2 \Rightarrow p_1)$ ». Un raisonnement exprimé, dans le cadre de l'axiomatique, devient une suite de propositions du même genre dans laquelle chacune a été transformée en un nombre. L'étape finale consiste à transformer également le raisonnement entier, c'est-à-dire toute la suite des propositions qui le compose dans l'ordre en un nombre unique produit de facteurs premiers.

L'intérêt de ce codage, qui comporte un nombre fini de symboles, est de pouvoir ainsi associer *des nombres à des expressions comme* : « formule », « formule démontrable », *ainsi qu'à des propositions comme* : « la formule α n'est pas démontrable », etc. Cette importante propriété permet donc de démontrer qu'une proposition du type « la formule α n'est pas démontrable » n'est pas démontrable à l'aide d'une transformation en nombre de Gödel. Si le nombre de Gödel n'est pas démontrable, la proposition correspondante ne l'est pas.

¹ L. Vax, *Logique*, op. cit., p.63.

Ce faisant, le procédé permet (on y arrive !) d'assigner un nombre à une proposition γ de l'arithmétique qui, portant sur elle-même, déclare : $\gamma =$ « la proposition γ n'est pas démontrable ». ¹ La proposition qui porte sur elle-même relève de la métamathématique (ou méta-axiomatique) alors que le nombre de Gödel associé est une proposition axiomatique.

Une proposition syntaxiquement correcte dans le cadre d'une axiomatique (appelée proposition axiomatique) n'a pas de signification particulière ; les règles syntaxiques de formation et de substitution, et les règles de déduction peuvent lui être appliquées sans se soucier de sémantique.

[...]

L'approche méta-axiomatique permet de faire des raisonnements sur des propriétés de propositions axiomatiques, ou même d'axiomatiques entières, en leur attribuant un sens et en s'affranchissant d'une liste limitative d'axiomes de départ rigoureux. Sur le plan de la rigueur déductive, elle est justifiée par le besoin de séparer clairement les cadres méta-axiomatiques où les affirmations ont un sens, des cadres axiomatiques où on ne leur en attribue pas. ²

Il suffit à Gödel de raisonner sur les propriétés des nombres de Gödel. Par ce détour, la question devient de savoir si l'on peut compléter l'ensemble des théorèmes de l'arithmétique par la formule $\gamma =$ « la proposition γ n'est pas démontrable » ? Hélas non, comme ce raisonnement a déjà été suggéré,

parce qu'il est aisé de montrer que, dans ce cas, $\sim \gamma$ est aussi un théorème. Il faut donc les exclure l'une et l'autre de la théorie. Et cependant, γ est une proposition vraie, parce qu'elle refuse d'accorder au nombre gödelien qui lui correspond une propriété qu'il ne possède pas. Une proposition vraie ne pouvant être comptée au nombre des théorèmes, l'arithmétique n'est pas saturée [i.e. complète]. ³

'r

Traduisons :

On ne peut représenter tous les entiers à partir de leur axiomatique. En ce sens, l'axiomatique de Peano n'est pas une théorie complète. Il en est de même d'autres plus riches comme celle de Zermelo-Frankel qui est une axiomatisation en logique du 1^{er} ordre de la théorie des ensembles, remontant également au début du XX^e siècle. (Cette axiomatisation échappe aux paradoxes d'une théorie trop naïve des ensembles comme celui de l'ensemble de tous les ensembles qui ne s'appartiennent pas). Toute tentative d'en donner une description complète serait vouée à l'échec. ⁴

2^e théorème d'incomplétude

Ce théorème démontre qu'**une théorie cohérente ne démontre pas sa propre cohérence**. Ainsi de l'arithmétique qui ne peut prouver sa cohérence. La non-contradiction de ce système, c'est-à-dire le fait qu'on ne pourra jamais en déduire deux propositions contradictoires, est elle-même **indécidable**.

Comprenons mieux d'abord le sens de la cohérence.

Dans un système incohérent, toute proposition est un théorème. C'est une autre façon de dire à nouveau si tout est inconsistant, tout est vrai, tout est faux, on ne sait pas où on va. *Donc l'existence d'au moins une formule qui ne soit pas un théorème est un critère caractéristique de la cohérence d'une théorie. Si nous sommes capables de trouver une proposition non démontrable, nous nous libérerons automatiquement des contradictions.*

<p><i>La phrase « je ne prends qu'un engagement, c'est celui de les tenir tous » équivaut exactement à ne prendre aucun engagement ». ⁵</i></p>
--

Prenons à nouveau la plus simple $0 = 1$. *Toute théorie sensée au sujet des nombres distinguera le 0 et le 1, même si nous choisissons d'autres axiomes que ceux de Peano. Pour faire court, **dire que l'arithmétique est cohérente revient à dire que la formule $0 = 1$ n'est pas démontrable.*** ⁶

¹ Ibid., p.64.

² <http://www.danielmartin.eu/Philo/Axiomatique.pdf>, mise à jour le 29 nov. 2009, pp.9-10.

³ Ibid., p.64. Nous soulignons.

⁴ J.-M. Deshouillers, *Les théorèmes de Gödel : fin d'un espoir ?* Jean-Louis Krivine, « Ensembles et preuves », Séminaire de logique à la Sorbonne, 18 févr. 1997, p.6, https://www.irif.fr/~krivine/articles/ens_prv.pdf.

⁵ Gilles Godefroy, *Les mathématiques, mode d'emploi*, Odile Jacob, Paris, p.123.

⁶ J. Fresán, *Le rêve de la raison. La logique mathématique et ses paradoxes*, p.75. Nous soulignons.

Gödélisons la proposition G_s « l'arithmétique n'est pas démontrable » du métalangage en une formule sur des nombres. Coh_s (Coh pour cohérence et S pour le système d'axiomes). Le 1^{er} théorème d'incomplétude affirme que Coh_s implique G_s , puisque, si l'arithmétique est cohérente, ou si Coh_s est vraie, alors G_s est vraie, en vertu du *modus ponens* « si A, alors B ».

Supposons donc un instant que la cohérence de l'arithmétique soit prouvable au sein de l'arithmétique.

*Alors Coh_s serait démontrable et, grâce à la démonstration du 1^{er} théorème d'incomplétude, $Coh_s \rightarrow G_s$, nous déduirons une démonstration de G_s par *modus ponens*. Mais cela est absurde puisque G_s est indémontrable ! L'unique conclusion possible est que pour prouver la cohérence de l'arithmétique, il faut sortir de l'arithmétique.*

Il en résulte, en clair, que **la cohérence de l'arithmétique ne peut être établie par un raisonnement représentable dans le calcul arithmétique**. Tout système formel contenant l'arithmétique, s'il est consistant, est incomplet et contient une proposition indécidable. Ce théorème vaut pour tout système contenant un minimum d'arithmétique : si P est consistant, la traduction arithmétique de cette consistance fournit précisément un exemple de proposition vraie non démontrable dans P.¹

Voilà l'énoncé et la portée du second théorème d'incomplétude. Qu'en est-il des conséquences en mathématiques ? Gödel et ses successeurs se sont efforcés de découvrir des propositions indécidables appartenant aux « vraies » mathématiques. Ils y sont parvenus, même si elles ne relèvent pas de l'arithmétique élémentaire. De plus, l'impossibilité de constituer l'arithmétique, et a fortiori la totalité des mathématiques en un système formel au sens de Hilbert, n'interdit pas de continuer de faire des maths. C'est un **théorème de limitation** qui ne signifie nullement qu'on ne sait rien, car

il y a une grande différence entre ne pas savoir démontrer quelque chose et savoir qu'on ne peut démontrer ce quelque chose. Gödel admet que son théorème n'entraîne pas la réfutation totale du point de vue formaliste de Hilbert. Il prouve seulement qu'on ne peut espérer formaliser les mathématiques qu'en utilisant des raisonnements non finitistes. Gödel a vu l'intérêt de telles recherches :

« Il reste, écrit-il en 1933, que dans le futur on puisse trouver des méthodes satisfaisantes dépassant les limites du système [finitistes de Hilbert] et permettant de fonder l'arithmétique classique et l'analyse. Cette question ouvre un champ de recherches fécond »²

- Vous parlez beaucoup d'indécidabilité, mais donnez-nous des exemples de théories mathématiques décidables !

- Il y en a parmi les théories mathématiques du premier ordre, i.e. parmi celles qui sont formalisées dans le calcul des prédicats du premier ordre. Une proposition d'une telle théorie est *décidable*, répétons-le, s'il est possible de décider par *algorithme* si elle en est ou non un théorème.

En d'autres termes, tant les non-théorèmes que les théorèmes sont repérables algorithmiquement. C'est le cas notamment de l'algèbre de Boole, de la théorie de l'ordre linéaire dense non bornée [cette théorie combine l'algèbre linéaire et la topologie ; par ex., un sous-espace vectoriel non nul n'est jamais borné] et de l'arithmétique des nombres entiers limitée à l'addition. A ces théories viennent s'ajouter certaines théories élémentaires de l'algèbre classique et de la géométrie traditionnelle dans lesquelles toute formule fermée ou sa négation est un théorème.³

- Avant de terminer votre panorama sur les systèmes formels, pourriez-vous dire un mot sur cette notion d'algorithme qui permet de déterminer si toute formule d'un tel système est démontrable ou non. Il me semble qu'il y a eu, à ce sujet, des développements importants depuis. Je pose cette question parce que, à entendre Hilbert, une preuve est une suite finie de formules, voire, pour Gödel, une suite finie de nombres.

¹ *Ibid.* ; L. Vax, *Logique*, op. cit., p.64 ; J-P. Belna, *Histoire de la logique*, p.144.

² J-P. Belna, *Histoire de la logique*, pp.144-145.

³ P. Gochet, P. Gribomont, *Logique. Méthodes pour l'informatique fondamentale*, op. cit., pp.42-43. Les crochets sont nôtres.

- Après les travaux de Gödel sur l'incomplétude de l'arithmétique, beaucoup de travaux ont porté sur le problème de la décision (*Entscheidungsproblem* en allemand). La notion d'algorithme a été plus rigoureusement définie par celle de fonction calculable et de nombre calculable.

Par fonction calculable, il faut entendre *une procédure utilisant des moyens finis qui permet de donner sa valeur pour tout argument possible*. L'addition précitée des entiers en est une. [Il en est de même de l'autre méthode enseignée à l'école primaire de multiplier deux entiers. Cette méthode est un algorithme qui répond à la question : quel est le produit de m et de n ?] Le logicien Church a œuvré dans cette direction en parlant d'effectivité. Pour qu'un théorème soit *effectif*, il faut qu'il existe un algorithme qui y conduise. Cependant, la notion d'effectivité a eu besoin, elle aussi d'être précisée par celle de fonction récursive. Une fonction calculable est récursive, quand toujours, par ex. pour des entiers, leur valeur pour un entier n peut être calculée si on connaît celle des $n-1$ entiers précédents.

Gödel a travaillé sur cette notion de récursivité en la généralisant à partir des fonctions constante, successeur et identité qui permettent de calculer une valeur donnée par une procédure finie. La notion de récursivité jouera un rôle essentiel en théorie de la preuve grâce à un calcul qui se fait pas à pas.¹

La « machine de papier » de Turing, qui ne sera jamais fabriquée mais qui en inspirera de réelles capables d'effectuer des calculs, donne corps au projet hilbertien de la décidabilité des systèmes formels. Ce qui est calculable devient *un nombre réel dont l'expression décimale est calculable avec des moyens finis*. Autrement dit, un tel nombre assure qu'il existe un algorithme permettant de calculer les décimales qui suivent la virgule, comme par ex. $\pi = 3,14159\dots$. On sait, en effet, calculer autant de décimales que l'on veut dans la suite, même infinie, de chiffres après la virgule.

Turing identifie donc « calculable » avec des moyens finis et « calculable par une machine. Chaque machine de Turing est une machine effective de calcul qui explore ainsi des possibilités logiques. A cette fin, Turing utilise, comme chez Gödel, un système de codage par un nombre fini de symboles pour montrer qu'il existe des nombres non calculables... de sorte que le problème de la décision, i.e. la question de décidabilité au sens algorithmique, ne peut, dit-il, avoir de solution. Il n'existe pas de machine capable de produire l'arrêt ou non de n'importe quelle machine dont le programme aurait été codé. Il n'existe pas d'algorithme capable de déterminer, de façon mécanique, si toute formule du calcul des prédicats du premier ordre est ou non démontrable. La formule demeure indécidable.²

Une machine de Turing comprend notamment un ruban, composé de cases, avec une extrémité à gauche et infini à droite, et un ensemble de symboles, par ex. 0 et 1 (pour la numération binaire), s (pour séparer deux expressions), d et f (pour le début et la fin de ce qui est à lire sur le ruban). Ces symboles, au plus un par case, sont inscrits sur le ruban.

Vue d'artiste
d'une machine de Turing :
un ruban infini muni d'une
tête de lecture/écriture →



Ainsi, à entendre plus simplement un commentateur d'Alan Turing, *il n'existe pas d'algorithme général permettant, au vu du texte d'un programme quelconque, de savoir s'il s'arrête ou s'il calcule indéfiniment sans jamais s'arrêter. [...] Le théorème de Turing entraîne donc l'incomplétude de Gödel.*³

Malgré cette nouvelle réponse négative en Europe à la question de la décidabilité, la machine de Turing contribuera, comme le projet de Hilbert, à améliorer la logique des systèmes formels, notamment le langage des ordinateurs. Von Neumann poursuivra, de son côté, aux Etats-Unis, ces affinements théoriques et le progrès technique qui en découlera. Ces développements sont un hommage rendu en fait à Leibniz qui fut le premier à aborder le problème de la décision en imaginant, au XVII^e siècle, la construction d'une machine qui pouvait manipuler des symboles afin de déterminer la valeur des énoncés mathématiques. Il comprit qu'il fallait pour y voir clair constituer un langage formel précis.⁴

¹ I-P. Belna, *Histoire de la logique*, p.146 ; P. Gochet, p. Gribomont, *Logique. Méthodes pour l'informatique fondamentale*, p.81.

² J-P. Belna, *Hist. de la log*, pp.147-148 ; https://fr.wikipedia.org/wiki/Machine_de_Turing, qui expose le fonctionnement de la machine.

³ <http://www.danielmartin.eu/Philo/Axiomatique.pdf>, art. cit., p.12. Nous soulignons.

⁴ https://fr.wikipedia.org/wiki/Problème_de_la_décision

iii *Propos et pratiques du métalangage*

Wittgenstein et Tarski, 468 - L'exigence de « pureté » bien comprise, 475

Wittgenstein et Tarski

(Intr. glé
2/a)-ii)

- Allons ! restez sérieux. Vous n'allez pas plaquer de tels théorèmes dans l'étude du droit constitutionnel. Dans votre Introduction générale, vous aviez la prudence de rappeler les garde-fous qu'avaient érigés Alan Sokal et Jean Bricmont contre le danger qu'il y a de parler de ce que l'on ignore au plus profond. Ne soyez pas happé comme d'autres par l'énorme séduction de certains théorèmes en mathématiques.

Vous aurez compris que les théorèmes de Gödel n'ont rien à voir avec la phrase suivante : Du jour où Gödel a démontré qu'il n'existe pas de démonstration de consistance de l'arithmétique de Peano formalisable dans le cadre de cette théorie (1933), les politologues avaient les moyens de comprendre pourquoi il fallait momifier Lénine et l'exposer aux camarades « accidentels » sous un mausolée au Centre de la Communauté nationale ».¹

C'est illisible et plutôt drôle tant c'est en dehors de la plaque...

- Peut-être l'auteur voulait-il dire qu'il manque, au fond de la société un socle de certitude du point de vue du raisonnement. La momification de Lénine aurait servi d'ersatz pour combler ce manque par sa fonction quasi-religieuse. Le fondateur mort du communisme russe jouerait le rôle d'un Dieu vivant qui aurait maintenu la société soviétique pour l'éternité. Si cette compréhension est correcte, l'idée rejoint la critique par Montesquieu du paradoxe de Bayle qui affirmait qu'une société est possible sans que l'on croie en Dieu (ou sans que l'on puisse « démontrer » si Dieu existe ou « démontrer » qu'il n'existe pas).

Nous reviendrons sur ce paradoxe en temps opportun quand on abordera la notion de « vide » en droit. En attendant, poursuivons la citation précédente qui oppose une fin de non-recevoir pleine d'ironie :

Il faut reconnaître que l'auteur de cette phrase, l'essayiste Régis Debray, est plus célèbre pour sa grande imagination que pour son ignorance. Né en 1940, il a suivi les cours de philosophie [marxiste] de Louis Althusser à l'Ecole normale supérieure de Paris. Fait prisonnier en Bolivie [où il avait rejoint le guérillero Che Guevara], il a été libéré grâce à une campagne internationale. [...]

Régis Debray n'est pas le seul intellectuel contemporain à se laisser entraîner par ce que le philosophe français Jacques Bouveresse a appelé « le prodige et le vertige des analogies » : Gilles Deleuze, Julia Kristeva, le psychanalyste Jacques Lacan ou l'architecte Paul Virilio sont également arrivés à de conclusions générales sans aucun lien avec les mathématiques, mais dont la formulation pseudo-scientifique n'a pas manqué d'impressionner leurs lecteurs.²

Le constat est aussi sévère que celui d'Alan Sokal et de Jean Bricmont. Il y a du vrai, et il y a de l'excès et une certaine incompréhension. Ce qui est « pseudo »-scientifique n'est pas nécessairement faux ou complètement faux. Nous l'espérons, surtout si les « pseudo-isomorphismes » sont étayés d'une étude attentive des idées et des démonstrations en science. Il n'y a pas que le diable qui se cache dans les détails. Il y a le bon si on sait le dénicher avec une imagination, non pas folle, mais quelque peu détachée des données. Sans cette distanciation, c'en serait fini des ponts jetés entre savoirs éloignés.

- Il y a quand même des gouffres entre certains savoirs. Entre l'étude du fonctionnement des systèmes formels au sens hilbertien et celui des systèmes constitutionnels.

- L'anecdote relative à la démarche administrative de Gödel aux Etats-Unis prouve qu'il ne semble pas avoir compris lui-même comment opère le droit constitutionnel hérité des Lumières. La pyramide des normes, on l'a vu sous toutes les coutures, n'est pas un simple échafaudage formel qui repose sur des « axiomes ». Ce n'est pas un système où, à chaque étage, toute norme serait assimilable à une affirmation démontrée, déduite à partir de ces axiomes, comme un théorème.

¹ J. Fresán, *Le rêve de la raison. La logique mathématique et ses paradoxes*, p.90

² *Ibid.*

Dans un système formel hilbertien, vous avez des démonstrations automatiques, dans un temps fini et d'une manière mécanique, alors que dans un texte juridique, toutes les dispositions sont comprises comme signifiant des normes, qui ne peuvent être ni vraies ni fausses, et qui ne peuvent donc être ni contradictoires ni indécidables au sens logique. Un arrêt de justice n'est pas comparable à l'arrêt d'une machine, repérable algorithmiquement. Einstein n'avait pas tort de modérer son goût exacerbé de Gödel pour la logique formelle devant le fonctionnaire qui l'interrogeait sur la Constitution américaine.

(Un lecteur anonyme)

- Expliquez-vous. Je n'entends point la distinction que vous faites.

(§8-iii)

- Le droit opère dans le devoir-être (*sollen*) et non dans l'être (*sein*). Nous ne sommes pas dans le vrai ou le faux mais dans le *ought*, irréductible selon Hume, au *is*. Aucun raisonnement à l'indicatif ne peut engendrer une conclusion à l'impératif, même si l'impératif juridique diffère de l'impératif moral. Être *valide* pour une norme ou une règle est le signe de son appartenance à un système juridique. Nous ne sommes pas dans l'éthique. *La norme tous les voleurs doivent être punis n'est ni vrai ni faux, parce que c'est un impératif,*¹ et non un énoncé de la logique susceptible d'être vrai ou faux au vu d'axiomes.

(Je me tourne à nouveau vers mon interlocuteur premier qui me fait à nouveau signe)

- Si vous vouliez à tout prix vous lancer dans une comparaison, choisissez l'amour plutôt que le droit pour vous confronter aux mathématiques ! C'est le rapprochement que fit Fontenelle à la fin du XVII^e siècle ... :

*Les raisonnements de mathématique sont faits comme l'amour. Vous ne sauriez accorder si peu de choses à un amant que bientôt il ne faille lui en accorder davantage, et à la fin cela va loin. De même accordez à un mathématicien le moindre principe, il va vous en tirer une conséquence qu'il faudra que vous lui accordiez aussi ; et de cette conséquence encore une autre ; et malgré vous-même, il vous mène si loin qu'à peine le pouvez-vous croire. Ces deux sortes de gens prennent toujours plus qu'on ne leur donne.*²

En mathématiques comme en galanterie amoureuse, aucune borne n'est a priori donnée au nombre de pas à faire avant que le « calcul » ne se termine, si jamais il s'arrête au moins en mathématiques...

- Je continue cependant moi-même de penser qu'il subsiste un certain lien entre le droit constitutionnel et l'approche de Hilbert et de Gödel.

Certes, les énoncés du droit ne sont pas des dispositions ne varietur gravées dans le marbre. Leur sens fait l'objet de multiples interprétations qui peuvent s'avérer contradictoires. Comme l'observait Wittgenstein, *il appartient à l'essence d'une phrase [Satz] qu'elle puisse nous communiquer un sens nouveau*. Dans le même esprit, tiré aussi de son *Tractatus logico-philosophicus*, il considérait qu'*une phrase (nouvelle) doit utiliser des expressions anciennes pour nous communiquer un nouveau sens*.³

Le *Tractatus* se signale par son logicisme antipsychologique qui postule que tous les concepts et théories sont réductibles à la logique. Le *Tractatus* porte sur les limites du sens. Il s'agissait pour Wittgenstein, résume-ton aujourd'hui,

*de séparer ce qui peut être dit et ce qui ne peut pas l'être. Tout ne peut être dit de façon sensée, il y a pour Wittgenstein une limite à l'expression des pensées. L'auteur ne soutient pas qu'il y a des pensées en elles-mêmes dépourvues de sens, mais plutôt que toutes les pensées ne sont pas exprimables. L'ouvrage vise donc à établir les critères qui font qu'un discours a un sens, à déterminer ce qu'on peut dire et ce qu'il faut taire. Le verdict de Wittgenstein est net : le domaine de ce qui peut être dit et celui du sens se recoupent, essayer d'exprimer l'indicible dans la langue n'amène qu'à un discours insensé. **Le Tractatus est donc un ouvrage de délimitation** : Wittgenstein y expose les critères du sens et dans quels cas ces critères ne sont pas remplis.*⁴

¹ Michel Troper, *La philosophie du droit*, Puf, Paris, 2003, p.113.

² Fontenelle, *Entretiens sur la pluralité des mondes* [1686], in Œuvres de Fontenelle, nouvelle édit., t.2, Amsterdam, 1764, 5^e Soir, pp.36-37.

³ Ludwig Wittgenstein, *Tractatus logico-philosophicus* [1921], 4.21 et 3.03, in P. Gochet, p. Gribomont, *Logique. Méthodes pour l'informatique fondamentale*, op. cit., p.294.

⁴ https://fr.wikipedia.org/wiki/Tractatus_logico-philosophicus. Nous soulignons.

Wittgenstein résume lui-même, le contenu de son ouvrage : *On pourra résumer en quelque sorte tout le sens du livre en ces termes : tout ce qui peut être dit clairement, et sur ce dont on ne peut parler, il faut garder le silence.*¹ Cet ouvrage de délimitation ne s'inscrit pas, cependant, totalement dans l'approche d'un Russell ou d'un Frege qui représentaient cette tendance en Angleterre et en Allemagne vis-à-vis des mathématiques. La démarcation n'implique ni une dévalorisation de l'indicible (Wittgenstein était plutôt mystique), ni celle de l'interprétation, bien que celle-ci ait pu encore être comprise, à ce stade de la pensée de Wittgenstein, comme un processus de dérivation qui pourrait s'apparenter à un processus formel de déduction.

(§29
b)

L'affirmation de Wittgenstein pose la question de savoir si clair signifie purement logique. La métaphysique de Leibniz est logique, mais pas toujours très claire, car, pour Kant, la raison pure qui l'anime est insensée. Elle ne tient pas compte des données de l'expérience et du fait surtout que l'existence des objets n'est pas un concept mais une position, irréductible à un prédicat ou une propriété.

*Gilbert Ryle and Co estimaient que le verbe « existe » a un sens ou un autre selon la catégorie de l'objet inféré : **concret ou abstrait**. Appliquer le verbe en commun à une chose abstraite et une chose concrète revenait à lui donner simultanément deux sens différents, donc à le priver de sens.*²

Un praticien du droit aura également une autre conception de la clarté qui fait sens. Un avocat, par ex., fera sienne une phrase voisine de celle du *Tractatus* en se référant à Boileau, un écrivain du XVII^e siècle que les professeurs de lettres se plaisent encore à répéter aux élèves sur les bancs de l'école française: *Ce qui se conçoit bien s'énonce clairement, et les mots pour le dire arrivent aisément*. Cette citation illustrerait l'idéal de l'avocat vers lequel il devrait tendre :

Une très grande part du travail d'avocat consiste à transformer la pile de documents et les quelques informations que lui donne son client en un récit cohérent qui emportera la conviction de celui qui le lit, à savoir le magistrat qui va trancher le litige.

*Il faut ainsi dans un premier temps s'attacher à comprendre la situation qui est exposée par le client pour ensuite la traduire en termes juridiques et en tirer les conséquences. Il s'agit d'un raisonnement consistant à énoncer la situation donnée, trouver la règle de droit que l'on veut appliquer, pour en conclure l'effet que produit cette règle sur la situation de fait.*³

Les conclusions écrites de l'avocat se doivent être cohérentes, même si la plaidoirie qui suit à l'audience s'efforcera plus de persuader, de faire passer deux ou trois impressions, que de convaincre par des arguments qui peuvent lasser l'attention. Mais son récit cohérent se heurtera au récit cohérent de son confrère adverse, sans parler du jugement du magistrat qui racontera à son tour une autre histoire. Le juge s'efforcera autant d'articuler l'ensemble en piochant, çà et là, dans l'un ou l'autre récit précédent.

Il y a là un usage du langage qui diffère d'autres usages du même langage. Sans se référer spécifiquement au droit, Wittgenstein a évolué et renoncé à son approche trop logiciste du langage, Comme le fait remarquer un des traducteurs français du *Tractatus*, la vision de Wittgenstein du langage est devenue moins « unilatérale ». il avoue s'être trompé en reconnaissant qu'il pensait réduire au *Tractatus* tout l'usage des propositions. Il n'était pas clair lui-même sur ce qu'il faut entendre par clarté :

1. Je n'étais pas clair sur le sens des mots : « dans une proposition un produit logique est caché » (et dans d'autres expressions du même genre).² Je pensais que l'analyse logique devait mettre au jour des choses cachées (comme le fait le chimiste ou le physicien).

Wittgenstein en viendra à examiner les conditions de la signification d'une proposition, rapportées à la diversité possible de ses applications. Il admettra l'idée d'une représentation multipliée d'un même énoncé. Nous ne sommes plus dans le cas particulier du calcul objectivant, seul envisagé dans le

¹ Ibid. *Like all great men he has his own weaknesses*. Parmi elles, *his mystic ardour*... (Bertrand Russell, *Autobiography* [1967] Unwin, London, 1989, p.332. Russell connut Wittgenstein quand *took up residence at Trinity college in Cambridge University*.

² WV. Quine, *Quiddités, Dictionnaire philosophique par intermittence*, art. « sens », op. cit, p.217. Nous soulignons. G. Ryle : philosophe anglais du XX^e siècle, influencé par Wittgenstein. https://fr.wikipedia.org/wiki/Gilbert_Ryle.

³ Marie-Élaire Fouché, 23 août 2007, <https://fouche-avocat.fr/>

Tractatus. La forme n'est plus une condition suffisante du sens. La forme devient *forme de vie* dans la mesure où parler fait partie d'une activité, une activité assimilable à un *jeu du langage*.¹

Sans que Wittgenstein le dise nommément, le droit est un jeu de langage, car il constitue un système autonome au sein de la langue. *Il fonctionne à sa propre manière, avec des termes et suivant des usages qui correspondent à la situation-type dans laquelle il se joue. Les règles d'un jeu constituent celui-ci : changer une règle, en ôter ou en rajouter une fait changer de jeu. Il n'est pas possible d'isoler une situation « pure » où seul un jeu unique serait à l'œuvre. Différents jeux, plus ou moins complexes, s'enchevêtrent dans la vie courante.* Ne donne-t-il pas comme exemple : *Donner des ordres, et agir d'après des ordres*,² même si les usages du droit ne se ramènent pas qu'à obéir et à ordonner.

Wittgenstein ne fut pas le 1^{er} à relier la signification d'un mot et son usage. Aux Etats, John Dewey avait déjà ouvert la voie en faisant valoir l'importance de l'action dans la genèse de la signification : *The acquisition of definiteness and of coherency (or constancy) of meanings is derived primarily from practical activities. By rolling an object, the child makes its roundness appreciable ; by bouncing it, he singles out its elasticity ; by throwing it, he makes weight its conspicuous distinctive factor. (...) Each has its own associated characteristic use and function.* Comme le résume à son tour aujourd'hui le logicien Quine, *John Dewey, et après lui Ludwig Wittgenstein, ont insisté sur le fait que la signification d'une expression n'était rien de plus que la manière dont on se sert effectivement de l'expression*.³

Nous approchons du droit, si du moins nous n'acceptons pas seulement l'idée que la signification d'une expression doit être cherchée dans son usage. *Deux expressions différentes peuvent avoir aussi la même signification. Car elles ne sauraient avoir exactement le même usage, puisque lorsque nous utilisons l'une, nous n'utilisons pas l'autre*.⁴ Wittgenstein l'avait laissé entendre avec l'idée de représentation multiple d'un énoncé. Les situations, dans lesquelles les acteurs juridiques interprètent les énoncés des règles, ne sont pas toujours identiques. Les usages qu'ils en font diffèrent souvent.

(Un autre lecteur anonyme s'insurge)

- Vous vous débarrassez trop vite de la logique formelle. Ignorez-vous qu'il existe une sémantique du calcul des prédicats qui n'est pas dépourvue de toute interprétation a priori ? La sémantique est une théorie de la signification qui montre comment le langage est ancré dans le monde. C'est un peu ce que vous disiez au sujet de l'usage, mais l'étude de cet usage n'exclut pas le respect de règles formelles !

- Pouvez-vous en dire plus ?

- L'orientation syntaxique de la logique a conduit à la théorie hilbertienne de la démontrabilité et à la notion de calculabilité de Gödel et de Turing. On ne peut, cependant, confondre, le concept de démontrabilité formelle, où le vrai et le faux n'ont pas lieu d'être, et celui de conséquence logique attachée au concept de vérité. Le concept de conséquence logique ne se coule pas facilement dans un système axiomatique formalisé. La notion de dérivation logique est trop étroite pour recouvrir celle de conséquence logique. La logique est toujours une affaire de conséquence, et tout raisonnement une chaîne de propositions, mais il y a une logique formelle sémantique qui est à distinguer de la syntaxique.

Alfred Tarski était membre avec Lukasiewicz de l'école polonaise de logique de l'entre-deux-guerres. C'est lui qui a donné l'impulsion fondamentale pour concevoir un langage formalisé de la signification. Cette approche peut apparaître comme une gageure, tant la signification donne lieu à d'innombrables interprétations, aussi diverses que contradictoires. Nous n'avons pas l'intention de présenter cette partie de son œuvre. Nous n'en retiendrons que deux aspects, dont le second nous semble particulièrement important au regard de l'étude à mener en droit.

¹ Gilles-Gaston Granger, *Pour la connaissance philosophique*, Odile Jacob, Paris, 1988, Wittgenstein : « Grammaire philosophique », I, § 81-82, pp.234-239.

² [https://fr.wikipedia.org/wiki/Jeu_de_langage_\(philosophie\)](https://fr.wikipedia.org/wiki/Jeu_de_langage_(philosophie))

³ John Dewey, *How we think* [1910], Prometheus Books, Buffalo, 1991, ch.9 : Meaning : or conceptions and understanding, pp.122-123.

⁴ W.V. Quine, *Quiddités*, art. « signification », pp.218-219. Nous soulignons.

Le 1^{er} est plus simple. Pour Aristote, rapporte Gilles-Gaston Granger, *le syllogisme est un discours dans lequel certaines choses étant posées, quelque chose d'autre que ces données en découle nécessairement par le seul fait des données*. Certes, *le syllogisme, en tant que tel, ne fonde que la nécessité conditionnelle de sa conclusion, la vérité de ses prémisses n'étant qu'assurée*, mais il n'en demeure pas moins que le raisonnement syllogistique possède un caractère formel capable de relier des propositions fausses.¹

(§62
c)-ii)

Ce qui compte est la cohérence interne, et non la valeur de vérité des prémisses. Nous en avons déjà donné des illustrations : si la terre est cubique (faux), alors la neige est rose (faux) : d'une prémisses fausse, l'imputation est vraie ; $0 \Rightarrow 1$: si la terre est cubique (faux), alors la neige est blanche (vrai) : l'imputation est vraie également. Voici un syllogisme correct qui peut tromper, tirée de Wikipédia :

*Si les rues sont mouillées, il a plu récemment.
Les rues sont mouillées.
Donc il a plu récemment.*

*Cet argument est logiquement valide mais tout à fait manifestement erroné car sa prémisses majeure est fausse - on peut avoir arrosé les rues, la rivière locale a pu déborder etc.*²

Une relation de conséquence peut lier des propositions vraies comme des propositions fausses. Par ex. encore : certaines propositions découlent nécessairement du géocentrisme, bien que celui-ci soit faux. Ce qui perturbe l'esprit est que la conclusion peut être vraie bien que l'argument soit fondé sur des prémisses fausses. Pour Tarski, le raisonnement logiquement valide fait appel, comme la définition aristotélicienne du syllogisme, aux termes « modaux » « nécessairement » ou « impossible ».

*Un raisonnement est logiquement valide s'il est impossible que ses prémisses soient vraies et sa conclusion fausse. Hélas, la notion d'impossibilité a plusieurs sens : il y a des impossibilités mathématiques – la quadrature du cercle –, des impossibilités physiques – le mouvement perpétuel –, des impossibilités juridiques – la bigamie en droit français. **Le progrès décisif réalisé par Tarski [et avant lui par Bolzano] est d'avoir formé une définition de la validité du raisonnement qui ne fait plus appel à de notions modales.***³

La source du caractère contraignant du raisonnement logique doit résider dans l'idée d'universalité (les occurrences de « tous », par opposition à celles de « quelques »), qui doit remplacer celle de nécessité. Dans le syllogisme :

Quelques mausolées sont des cubes
Quelques pyramides sont des mausolées
Donc quelques pyramides sont des cubes,

les deux prémisses, majeure et mineure, du raisonnement sont vraies, mais sa conclusion est fausse.⁴

A travers cet effort d'éliminer la notion modale de nécessité et de recourir au quantificateur « tous », « toutes », on sent le besoin de l'esprit de séparer le vocabulaire en deux parties : une partie composée de termes extralogiques et une partie composée de termes logiques. On veut être sûr que la vérité de la prémisses contraint la conclusion à être vraie.

Ce souci de séparer pour y voir clair se retrouve dans l'approche sémantique qui ne veut pas non plus se laisser abuser. Attentive aux notions de vrai et de faux, comme le fut l'approche syntaxique, indifférente au sens, à la dérivabilité, la logique sémantique s'efforce d'éviter l'incidence de la réflexivité du sujet parlant. On suppose ici, aussi, qu'il n'y ait pas de miroir permettant à se voir soi-même. Le paradoxe du menteur hante autant la logique sémantique. Un énoncé « la phrase A est fausse » est vraie si et seulement si « la phrase A est fausse ». On aboutit à une contradiction de la forme $p \equiv \neg p$.

Alors que dans la langue naturelle, nous pouvons affirmer des phrases qui affirment leur propre fausseté (que l'on se souvienne du Président Trump), la langue formelle se doit être une langue artificielle qui bannira de telles phrases comme mal formées. Ainsi, de même que la logique syntaxique formelle dissocie le langage et le métalangage « démontrable » ou « réfutable », de même

¹ Les citations sont de Gilles-Gaston Granger, *La théorie aristotélicienne la science* [1976], in P. Gochet, P. Gribomont, *Logique. Méthodes pour l'informatique fondamentale*, op. cit., p.328.

² https://fr.wikipedia.org/wiki/Prémisse_fausse

³ P. Gochet, P. Gribomont, *Logique. Méthodes pour l'informatique fondamentale*, p.328-332. Nous soulignons.

⁴ *Ibid.*,

la logique sémantique formelle dissociera le langage et le métalangage sémantique « vrai » et « faux ».

Cette distinction entre une discipline et une métadiscipline qui l'étudie était déjà en œuvre chez Leibniz pour qui *calculer, c'est raisonner, mais raisonner « in forma »*.¹

Les *Principia mathematica* de Russell et Whitehead, publiés en 1910, ne relèvent pas de la mathématique mais de la logique conçue comme une métamathématique. Le détachement de la métadiscipline par rapport à la discipline commence chez Russell par une théorie *de la donnée sensible qu'il nomme sensibilia pour la distinguer de la « sensation » réalité mentale*.² Cette méta-donnée sensible correspondrait dans le langage à la désignation par un nom. Le détachement devient plus patent avec la théorie des types des *Principia mathematica* qui permet de contourner la question de savoir si l'ensemble des ensembles qui ne s'appartiennent pas eux-mêmes appartient-il à lui-même.

(§62
Ann.V)

Le paradoxe fut soulevé par Russell et Whitehead contre une certaine conception des ensembles de Frege. Ce sont des méta-concepts qui introduisent une hiérarchie en assignant un type à chaque entité mathématique. Les objets d'un type ne peuvent être construits qu'à partir d'objets qui leur pré-existent situés plus bas dans la hiérarchie, empêchant ainsi des boucles réflexives de surgir.

*De même qu'un habitant d'une ville n'est pas un habitant de lui-même, qu'une ville appartient non à elle-même mais à une région, etc., Russell distingue les individus, de type 0 (l'habitant de Caen, de Rennes, de Marseille, etc.), les classes d'individus de type 1 (les villes de Caen, de Rennes, de Marseille, etc.), les classes de type 2 (les départements du Calvados, d'Ille-et-Vilaine, des Bouches-du-Rhône, etc.), les classes de classes, de type 3 (les régions Basse-Normandie, Bretagne, Provence-Côte-d'Azur, etc., et ainsi de suite.*³

Russell parle de classe pour dire ensemble. Cette théorie simple des types consiste à hiérarchiser des domaines de signification (*range of significance*). Les énoncés qui violent la théorie des types, qui interdit de regarder, dans une même formule, la classe et les individus qui la composent, sont dénués de sens. Cependant, cette théorie ne permet de résoudre que les paradoxes portant sur les classes, et non un paradoxe comme celui du menteur. D'où, chez le même Russell, la théorie ramifiée des types ne portant plus sur les objets mais sur les propositions. L'idée est de hiérarchiser leur signification suivant des ordres.

La proposition « Je mens » veut dire « Tout ce que j'affirme est faux », proposition qui condense les propositions « J'affirme une proposition fautive d'ordre 1 », « j'affirme une proposition fautive d'ordre 2 », etc., qui sont respectivement d'ordre 2, 3, etc. Comme aucune proposition d'ordre 1 n'est affirmée [celui qui dit « je mens » ne dit pas « j'affirme une proposition fautive »], la première proposition est fautive. Comme elle est d'ordre 2, la seconde proposition est vraie, et ainsi de suite. Comme on a affaire à des propositions qui sont vraies ou fautives selon leur ordre, la contradiction disparaît. (On ne discute pas ici de la difficulté d'affirmer une infinité de propositions.).⁴

Voilà le double intérêt de disjoindre chez Russell la mathématique et la métamathématique. L'intérêt fut aussi manifeste chez Hilbert et chez Gödel pour ce qui a trait aussi à la logique syntaxique formelle.

La conception d'une méta-théorie s'imposa autant en logique sémantique chez Tarski qui mit en avant la notion de « modèle » dans laquelle est transférée d'un énoncé la notion de vrai.

On appelle modèle une structure qui rend vrai la proposition d'un tel énoncé. La relation « rend vrai » unit un modèle à des propositions. Cette relation n'est pas à confondre avec la relation de conséquence logique qui unit des propositions à d'autres propositions. Une structure est une interprétation de l'énoncé considéré. Alors que la logique syntaxique formelle consiste à construire un monde d'énoncés en donnant un nom à certains objets particuliers, à certaines de leurs propriétés et à certaines de leurs relations, **l'interprétation consiste à faire le chemin inverse en passant des énoncés aux objets**. Un modèle est une formalisation de la notion intuitive de **situation**. Le vrai et le

¹ Gilles-Gaston Granger, *Sciences et réalité*, Odile Jacob, Paris, 2001, chap.2 : Calcul logique et réalité, p077.

² G.-G. Granger, *Pour la connaissance philosophique*, op. cit., p.32.

³ J.-P. Belna, *Hist. de la log*, pp.120-121. Les crochets sont nôtres pour éclaircissement.

⁴ *Ibid.* ; Y. Delms-Rigoutsos et R. Lalement, *La logique ou l'art de raisonner*, Le Pommier, Paris, 2002, p.13, 27 et 49.

faux ne sont plus que le vrai et le faux de tel point de vue ou dans telle situation.¹ Le vrai et le faux absolus n'ont aucun sens.

Voyons-le sur un exemple.

<p>Une relation d'ordre \geq sur un ensemble A est une relation réflexive (tout élément est en relation avec lui-même), antisymétrique (si a est supérieur ou égal à b et inversement, alors $a = b$) et transitive (si a est supérieur ou égal à b et b à c, alors est supérieur ou égal à c).</p> <p>Cela peut se traduire de manière équivalente en affirmant que la structure $A = (A, \geq)$ (c'est-à-dire la donnée de l'ensemble A, muni de la relation \geq) « satisfait » la théorie Ω ci-contre : \rightarrow</p>	$\left\{ \begin{array}{l} \forall x \ x \geq x \text{ (réflexivité)} \\ \forall x \forall y \ (x \geq y \wedge y \geq x) \Rightarrow x = y \text{ (antisymétrie)} \\ \forall x \forall y \forall z \ (x \geq y \wedge y \geq z \Rightarrow x \geq z) \text{ (transitivité)} \end{array} \right.$ <p>Ainsi, si \mathbb{N} est l'ensemble $\{0, 1, 2, \dots\}$ et \geq est interprété par la relation « plus grand ou égal » entre entiers, nous pouvons dire que la structure (\mathbb{N}, \geq) est un modèle de la théorie Ω, ce qui se note : $\omega \models \Omega$ (Le signe \models représente la conséquence logique, à ne pas confondre avec le signe \vdash qui représente la relation syntaxique de dérivabilité.)</p>
---	--

Un modèle (ou structure) est un ensemble de base, ou domaine, et une interprétation. Un énoncé, modélisé par une structure, ne porte pas que sur des objets, car une structure est plus qu'un ensemble. Il faut y ajouter toutes les relations, propriétés, fonctions et noms que l'on peut leur attribuer. Par ex.,

La structure arithmétique des entiers, $(\mathbb{N}; 0, 1, \text{ addition, multiplication})$, est une manière complètement différente de parler de ces nombres que la structure ω ci-dessus, alors qu'elles concernent les mêmes objets. D'un point de vue logique, « les entiers » n'existent pas en eux-mêmes : si l'on considère leur seul ensemble, celui-ci ne se distingue guère d'autres ensembles infinis. [...] **Les variables ont un environnement.**²

Ce sont les structures qui vont permettre de définir la valeur de vérité de tout énoncé.

Prenons un exemple plus concret. Soient les énoncés formés à partir du symbole de prédicat \geq et des constantes c et f . Interprétons ces énoncés dans la structure E qui rassemble les concepts « vapeur », « eau » et « glace », en déclarant que l'interprétation de la constante c est l'objet « vapeur » (chaud), l'interprétation de f est « glace » (froid) et l'interprétation du symbole de prédicat \geq est la relation « être au moins aussi chaud que », notée par une flèche sur la fig. a infra. « Vapeur » (chaud) et « glace » (froid) sont des méta-concepts par rapport aux concepts vapeur et glace.

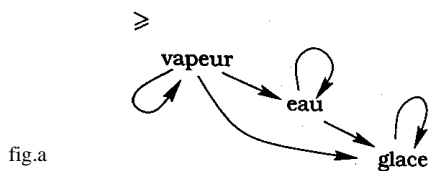


fig.a

g	vapeur	eau	glace
vapeur	1	1	1
eau	0	1	1
glace	0	0	1

fig.b

(§46
5/
d)-i)

Considérons maintenant une relation binaire entre éléments de l'ensemble E . Par commodité, cette relation est caractérisée par sa *fonction caractéristique (binaire)* qui associe à chaque couple d'objet (e_1, e_2) la valeur 1 quand e_1 et e_2 sont en relation. Dans cet ensemble, la fonction caractéristique g de la relation « être au moins aussi chaud que » est donnée par le tableau de la fig.b. La vapeur au moins aussi chaude que la glace se traduit par le fait que $g(\text{vapeur}, \text{glace}) = 1$. Interpréter le symbole \geq par la relation « être au moins aussi chaud que » s'écrit, de façon abrégée : $|\geq|_E = g$.

La *fonction caractéristique* se réduit à la donnée de 0 ou de 1. $|P|_E = 0$ ou $|P|_E = 1$ selon que, dans la structure considérée, le symbole P désigne un fait faux dans le modèle ou structure (E, \geq) et un fait faux dans le même modèle (E, \geq) .³

Ainsi, les modèles du métalangage répondent aux énoncés du langage via la relation de **satisfaction**, c'est-à-dire de réalisation. Une structure S satisfait un énoncé A si l'interprétation de A est vraie, ce que l'on note $S \models A$. La structure S satisfait une théorie T si elle satisfait toutes les formules de T , ce

¹ P. Gochet, P. Gribomont, *Logique. Méthodes pour l'informatique fondamentale*, p.301.

² Y. Delms-Rigoutsos et R. Lalement, *La logique ou l'art de raisonner*, p.42 et 48-49. Nous soulignons.

³ *Ibid.*, pp.35-38.

que l'on note $S \models T$. *Satisfaisable/satisfiable*, qualifie **une théorie ou une formule qui admet un modèle**.¹

La dissociation de l'énoncé et de sa vérité en termes de satisfaction dans le métalangage du modèle n'exclut pas ce qu'il y a de plus intuitif dans la sémantique formelle, à savoir *la dénotation qui unit le nom propre d'un individu existant [par ex. « Pégase »] à la chose dénotée [Pégase]*. Par individu, il faut entendre en logique un sujet singulier qui admet des prédicats. Un individu est un élément d'un domaine d'interprétation ou d'une structure d'interprétation. *C'est cette relation que l'on instaure quand on baptise un enfant, une rue ou un bateau et que l'on fait connaître à quelqu'un quand on décline son identité*.²

La sémantique tarskienne se veut calcul d'un sens, mais, observe-t-on, ce qu'elle obtient n'est pas une signification mais une valeur de vérité. Cette sémantique est purement extensionnelle. **Elle ne prend pas en compte l'intension, mais se borne à assigner aux symboles une extension**.

Or, si l'extension est respectivement l'objet dénoté [ex : père] et une classe n-uples [tous les pères imaginables], l'extension est précisément la valeur de vérité. Or encore, nous connaissons plus souvent l'intention (le sens) des termes généraux (noms communs, prédicats) que leur extension. Le théâtre de boulevard exploite abondamment le fait que nous connaissons le sens du mot « père », mais pas son extension.³

L'extension n'est autre que la dénotation du prédicat « vrai » appliquée à une langue formalisée. La définition de la vérité, en termes de satisfaction proposée par Tarski est celle qui capture l'extension de vrai. Ce qui importe est la propriété que la phrase par ex « la neige est blanche » possède dans tous les mondes où la neige est blanche, y compris dans ceux où cela signifie que la neige est verte. Mais comment, demandera-ton, une telle sémantique formelle pourrait-elle rendre compte

de la différence entre deux propositions qui ont même valeur de vérité, mais qui ont des sens différents comme c'est le cas pour « la terre attire la lune » et « la lune attire la terre » ?

La réponse, chez Tarski, est claire :

*On dira que ces deux propositions « disent » quelque chose de différent l'une de l'autre en cela qu'elles sont vraies dans des modèles différents, ce qui n'exclut pas qu'elles sont vraies aussi dans le même modèle (celui qui représente notre monde). Nous avons ici une manière purement extensionnelle de caractériser la signification d'une proposition : **la signification d'une proposition est la classe des modèles dans lesquels elle est vraie**.*

Un modèle, comme Tarski l'exprime lui-même, est la réalisation de la classe des propositions.⁴

Une sémantique formelle qui prétendrait que les formes d'une logique purement extensionnelle épuisent le sens n'est toujours pas cependant tout ce qu'on attend d'une sémantique. L'introduction de la notion de « modèle » a toutefois un mérite éminent. Elle élargit le rôle joué par l'axiomatique depuis Euclide de fournir un point de départ aux démonstrations pour répondre aux besoins de la preuve. *Avec l'avènement des modèles, ils permettent de décrire des structures et de définir des notions primitives d'une manière contextuelle*.⁵ Ils **décrivent** des variations d'interprétation, grâce à la dissociation entre langage et métalangage, mise en œuvre, en logique syntaxique formelle, par Russell, Hilbert et Gödel.

L'exigence de « pureté » bien comprise

iv Que peuvent nous dire les théorèmes d'incomplétude en droit ?

v Cohérence et complétude

¹ *Ibid.*, Glossaire, p.153.

² P. Gochet, P. Gribomont, *Logique. Méthodes pour l'informatique fondamentale*, p.295.

³ *Ibid.*, p.308. Les crochets sont nôtres.

⁴ *Ibid.*, pp.307-309, et 330. Nous soulignons.

⁵ *Ibid.*, p.310

e) Que peuvent nous dire les théorèmes d'incomplétude en droit ?

*i Emboîtement. ii Métalangage et épistémè
iii L'épistémè des logiques de situation. iv L'épistémè des logiques de structure.*

f) Gödel et la Constitution américaine

Annexe I

L'axiomatique de Peano des entiers naturels et la méthode des ensembles dite de von Neumann ¹

I/ Les axiomes.

Ces axiomes définissent l'ensemble des entiers naturels, soit \mathbb{N} . Ce sont les suivants :

1. L'élément appelé zéro, et noté 0, est un entier naturel
2. Tout entier naturel n a un unique successeur, noté $s(n)$ ou Sn , qui est un entier naturel.
3. Aucun entier naturel n'a 0 pour successeur.
4. Deux entiers naturels ayant le même successeur sont égaux.
5. Si un ensemble d'entiers naturels contient 0 et contient le successeur de chacun de ses éléments, alors cet ensemble est \mathbb{N}

Le 1^{er} axiome permet de poser que l'ensemble \mathbb{N} des entiers naturels n'est pas vide (\Leftrightarrow **0 est donc un entier naturel**) , le 3^e qu'il possède un premier élément (\Leftrightarrow **seul 0 n'est le successeur d'aucun élément**) et le cinquième qu'il vérifie le **principe de récurrence** (si une propriété est vérifiée pour 0, et si, pour tout entier naturel n qui la vérifie, le successeur la vérifie également, alors la propriété est vraie pour tous les entiers naturels).

Et le 4^e axiome ?

L'axiome dit qu'on ne peut avoir simultanément x et y différents et leurs successeurs égaux, donc qu'il n'existe pas de nombres x et y tels que x est distinct de y et le successeur de x soit égal au successeur de y . Autrement dit, **des nombres entiers distincts ont des successeurs distincts.**

2/ La méthode des ensembles dite de von Neumann

En 1889, Giuseppe Peano construit une arithmétique à partir de l'ensemble vide et la notion de successeur. L'axiomatique de Peano définit les nombres entiers naturels **sans dire comment construire leur ensemble**. La notion de cardinal le permet comme suit :

- l'ensemble vide \emptyset est un entier naturel, noté **0**;
- soit n un entier naturel, alors l'ensemble $n \cup \{n\}$ est aussi un entier naturel, appelé successeur (immédiat) de n .
- tout entier naturel est construit à partir de ces deux règles.

Exemples :

$$\begin{aligned} 0 \cup \{0\} &= \{0\} = 1 \\ \text{successeur de } 0 : 1 \cup \{1\} &= \{0\} \cup \{1\} = \{0,1\} = 2 \\ \text{successeur de } 1 : 2 \cup \{2\} &= \{0,1\} \cup \{2\} = \{0,1,2\} = 3 \\ \text{successeur de } 2 : &\dots \end{aligned}$$

Pour assurer l'existence d'un ensemble contenant tous les entiers naturels, il faut aussi introduire l'axiome de l'infini.

¹ https://fr.wikipedia.org/wiki/Axiomes_de_Peano ; J. Fresán, *Le rêve de la raison. La logique mathématique et ses paradoxes*, op. cit., p.62 ; <http://villemin.gerard.free.fr/aMaths/ThNb/Peano.htm>

§63.- DECELER LE NOMBRE D'OR EN DROIT CONSTITUTIONNEL ?

a) Le point de rencontre à trouver entre le pouvoir et la liberté

- i Retour sur la courbe d'indifférence combinant la liberté et la sécurité*
- ii Le nombre d'or approché par la suite de Fibonacci*

b) Le songe d'une mine d'or en droit constitutionnel

- i Un triangle d'or est-il pensable en droit constitutionnel ?*
- ii La spirale d'or de la liberté sécurisée*
- iii Triangle équilatéral, tétraèdre et nombre d'or en droit ?*

c) A défaut de convergence, le tétraèdre constitutionnel en mouvement

- i Boule, homéomorphe au tétraèdre, et fuseau*
- ii Illustrations d'un matroïde en évolution*
- iii Le droit de résistance*

d) Une impertinence : la caractéristique d'Euler en droit ?

- i L'approche topologique de Legendre à Poincaré, 477*
- ii Une transposition sérieuse en droit constitutionnel où réapparaît, en passant, le mirage du nombre d'or ?*

e) La volonté générale en aval du tétraèdre constitutionnel

- i Bruit de fond et lame de fond*
- ii Réponses aux demandes d'éclaircissement*
- La volonté générale comme bruit de fond et lame de fond.
- Comprendre à nouveau le mouvement des gilets jaunes :
- $y = (\sin x)/x$, surenchères inversées et treillis manquant.

f) Retour à l'analyse en composantes principales et volonté générale restante

- i La déclinaison des droits en axes de revendication*
- ii La parole est d'argent mais le silence est d'or*

Annexes I à IV et VI à XI, 482

o

a) Le point de rencontre à trouver entre le pouvoir et la liberté

- i Retour sur la courbe d'indifférence combinant la liberté et la sécurité*
- ii Le nombre d'or approché par la suite de Fibonacci*

b) Le songe d'une mine d'or en droit constitutionnel

- i Un triangle d'or est-il pensable en droit constitutionnel ?*
- ii La spirale de la liberté sécurisée*
- iii Triangle équilatéral, tétraèdre et nombre d'or en droit ?*

c) A défaut de convergence, le tétraèdre constitutionnel en mouvement

- i Boule, homéomorphe au tétraèdre, et fuseau.*
- ii Illustrations d'un matroïde en évolution*
- iii Le droit de résistance*

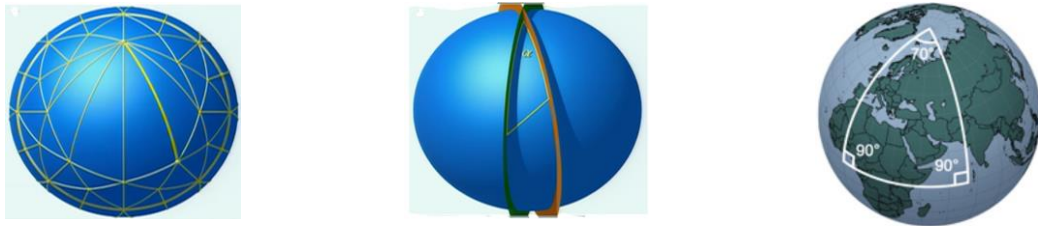
d) Une impertinence : la caractéristique d'Euler en droit ?

- i L'approche topologique de Legendre à Poincaré*

Descartes avait déjà subodoré une formule quasi-équivalente à celle d'Euler, avec, en outre, tous les outils pour la démontrer. Il reviendra à Legendre en 1794, sous la Révolution française, de donner la première preuve de la formule d'Euler. Cauchy en donnera une autre en 1811.

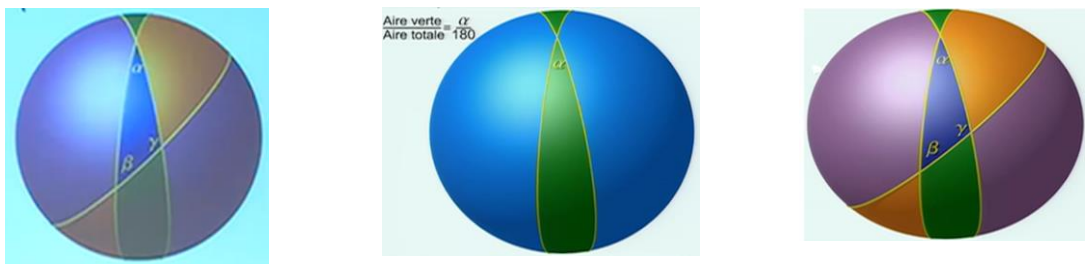
L'esprit de la démonstration de Legendre est d'ajouter, sur chaque face d'un polyèdre quelconque qui n'est pas un triangle, une arête. Ce faisant, la formule $S - A + F$ ne bouge pas. Ex. : $S - (A+1) + (F+1) = A + F$. On transforme ainsi toutes les faces en triangles. On a donc réduit la classe des polyèdres à étudier. L'idée suivante est de « gonfler » le polyèdre en une sphère comme s'il était un peu mou. On souffle dedans comme un ballon. Cela revient à prendre un point à l'intérieur, et à le projeter sur la sphère pour obtenir un polyèdre sphérique. La sphère est ainsi découpée en triangles sphériques. Il y a toujours autant de sommets, autant d'arêtes, et autant de faces. La relation $S - A + F = 2$ est vérifiée.¹

Les triangles sphériques ont des angles, sachant qu'un côté d'un triangle résulte d'une intersection d'un plan avec la sphère. Un angle est formé par deux de ces plans qui passent par la même origine (on peut faire varier arbitrairement cet angle de 0 à 180° : voir par ex. infra l'angle entre deux méridiens ; la somme des trois angles d'un triangle sphérique est supérieure à deux angles droits)



Le 6^e postulat d'Euclide demande que deux droites ne contiennent pas d'espace. Or, sur la surface d'une sphère, toutes les géodésiques, - la courbe de plus courte longueur entre deux points, - se coupent. Cette géométrie sphérique est un monde « sans parallèle ». Dans ce monde, le 6^e postulat n'est pas vérifié : le fuseau horaire est un exemple d'une telle configuration.²

(Suite de la démonstration :) On va relier la somme des angles d'un triangle sphérique à l'aire qu'ils délimitent en partant des angles α , β , γ . Si on considère un seul angle, l'aire verte est proportionnelle à cet angle α (si je multiplie α par 2, l'aire est double ; si je divise α par 2, l'aire est diminuée de moitié). On sait maintenant calculer l'aire d'un secteur angulaire en le voyant comme l'intersection de trois secteurs angulaires : le secteur α , dessiné en vert (de part et d'autre de la sphère), du secteur β , dessiné en orange (idem), et du secteur γ , dessiné en violet (idem). L'aire du secteur vert est $(\alpha/180 \times \text{aire totale})$ + l'aire du secteur orange, soit $(\beta/180 \times \text{aire totale})$ + l'aire du secteur violet soit $(\gamma/180 \times \text{aire totale})$, ce qui donne aire totale = $(\alpha/180 + \beta/180 + \gamma/180) \text{ aire totale} - 4 \text{ aire du triangle bleu}$ (pour ne pas compter le secteur angulaire bleu trop de fois, car il est déjà compté dans les secteurs vert, orange, violet ; je l'ai compté 2 fois trop de chaque côté de la sphère, donc 4 fois trop). Autrement dit : l'aire du triangle sphérique bleu = $\frac{1}{4} ((\alpha + \beta + \gamma)/180 - 1) \times \text{aire totale}$, ou $((\alpha + \beta + \gamma) - 180)/720 \times \text{aire totale}$



Un modèle de géométrie elliptique : la sphère. Sur une sphère, les points sont définis comme des couples de points (classiques) diamétralement opposés, et les droites comme les grands cercles, obtenus par une section plane passant par le centre de la sphère. Par deux points distincts, passe une et une seule droite. Deux droites se coupent toujours en un point, en rappelant qu'ici les points sont des couples de points diamétralement opposés.³

¹ Nous suivons pas à pas, la conférence de Nicolas Bergeron donnée à la Bibliothèque nationale, dans le cadre « Un texte, un mathématicien ».

² François Lavallou, « Promenons-nous dans le disque de Poincaré », in Tangente Sup, n°67-68, édit. Pôle, Paris, 2013, p.39.

³ Ibid., p.40.

L'aire totale/720 est une constante que l'on aurait pu normaliser. Par contre, ce qui varie est la somme des angles $(\alpha + \beta + \gamma) - 180$ varie en fonction des angles. On a donc démontré que l'aire d'un triangle sur la sphère mesure le défaut que la somme des angles soit égale à 180° , à une constante près. La mesure d'une telle aire par les angles est possible grâce à la sphère, ce qui n'est pas le cas d'un triangle plane dont la somme égale 180° (en augmentant ou diminuant l'aire dans un triangle semblable, les angles ne changent pas, mais l'aire est devenue plusieurs fois plus grande ou plusieurs fois plus petite).

A partir de cette formule, on revient à la démonstration de la formule d'Euler où on commençait à considérer un polyèdre sphérique, la sphère étant recouverte d'une multitude de triangles. Il y a en tout F triangles et S sommets. A chaque sommet, il y a un certain nombre de faces triangulaires dont la somme des angles autour de ce sommet fait 360° . Si on considère la somme des angles de tous les sommets S des triangles qui recouvrent la sphère, il y aura 360° autant de fois qu'il y a de sommets, soit $S \times 360^\circ$.

Or, pour chaque triangle, l'aire est égale $((\alpha + \beta + \gamma) - 180)/720 \times$ aire totale, i.e. $(\alpha + \beta + \gamma) - 180 = 720 \times$ aire totale. Comme dans le polyèdre, il y a F triangles et la somme de tous leurs angles est égal à $S \times 360$, la somme des aires des triangles, soit l'aire totale, est égale à $S \times 360 - (F \times 180) = 720$, autrement dit $2S - F = 4$. **Mais cette formule n'est vraie que dans un polyèdre dont toutes les faces sont des triangles. Pour avoir la formule générale, il faut utiliser une relation supplémentaire.**

En effet, à chaque triangle correspond trois arêtes. Donc, pour chaque face, il y a trois arêtes, mais une arête est associée à deux faces différentes. Aussi, si j'essaie de dénombrer le nombre d'arêtes, je prends 3 fois le nombre de faces, j'obtiens toutes les arêtes, en évitant de les compter deux fois. Donc, 3 fois le nombre de faces = 2 fois le nombre des arêtes, i.e. $3F = 2A$. Si on tient compte de cette égalité, on obtient $S - A + F = \frac{1}{2} (2S - 2A + 2F) = \frac{1}{2} (2S - F) = 2$, soit la formule d'Euler : **$S - A + F = 2$** .

Cette formule ne dépend pas du cas particulier où le polyèdre est composé de triangles. Legendre l'a démontrée par Legendre en toute généralité.

- Pourquoi la relation d'Euler intéresse tant Poincaré ?

- La formule d' Euler est valable pour plein de polyèdres non convexes. (voir *Annexe X*) $S - A + F$ reste égal à 2, mais pas pour tous les polyèdres. Pour ceux ci-après, $S - A + F = 0$ ou $S - A + F = -2$. Autrement dit, la



la formule d'Euler s'étend à tous les polyèdres **simplement connexes** (et non convexes) [objet connexe = objet d'un seul tenant, d'un seul morceau]. Dixit Poincaré, après démonstration. Un polyèdre n'est plus un objet qui se contente de vérifier la formule d'Euler. Nous retrouvons la thèse de Lakatos suivant laquelle les mathématiques sont faillibles comme toute science. En ce domaine comme dans tant d'autres du savoir, les vérités ne font pas que s'amonceler comme si la vérité s'ajoutait, à chaque étape, à la vérité, mais progresse *dans l'amélioration incessante des conjectures, de la spéculation et de la critique grâce à la logique des preuves et des réfutations*.¹ L'erreur n'est pas que contingente. Elle joue, à côté de la démonstration, un grand rôle comme le pressentait, dès le début, les lumières.

Aussi impressionnante que fut l'œuvre de Poincaré en mathématiques et en physique, son auteur n'en fut pas moins faillible lui-même. *Submergé par les idées, Poincaré écrivait sans arrêt, il avait des tonnes d'idées nouvelles, ne se relisait jamais, il allait vite, bien trop vite. Ses textes fourmillent d'idées*

¹ Lakatos, *Preuves et réfutations. Essai sur la logique de la découverte mathématique*, op. cit., Introduction de l'auteur, p.5.

... et d'erreurs. La lecture de ses textes est vivante. Aucun n'est figé. Il se trompe lui-même, et à la nouvelle ligne, il y a une nouvelle idée qui éclaire le lecteur. C'est le style de Poincaré et le sujet s'y prête bien, parce que, pour comprendre la formule d'Euler, il faut dépasser les polyèdres et s'attacher à la forme de l'objet.¹

Comme nous l'avions plus tôt signalé, le livre de Lakatos portait précisément sur les l'étude de polyèdres d'Euler à Poincaré.

Quel est le lien, pour ce dernier, avec la forme ?

La formule d'Euler est vérifiée exactement si le polyèdre évolue sans rupture vers la forme d'une sphère.



La formule d'Euler s'applique à tout polyèdre convexe dont la frontière est topologiquement équivalente à une sphère et dont les faces sont topologiquement équivalentes à des disques.

La notion qui importe, pour spécifier la forme, est l'ordre de connexion p_1 d'une surface. Celui d'une sphère est égal à 1, comme je m'en assure en prenant un couteau, en découpant la sphère en deux, et en revenant au point de départ. La sphère est la seule surface d'ordre 1, car il suffit de découper une seule fois la sphère pour avoir deux morceaux, et revenir pour avoir un seul morceau. Dans ce cas-là, la formule doit s'écrire : $S - A + F = 3 - p_1$. Cette formule nous redonne bien la formule d'Euler, car si $p_1=1$, nous retrouvons $S - A + F = 2$. En revanche, l'ordre de connexion d'une bouée, à déformation près,



est 3. En effet, si je découpe mon tore verticalement (le long d'un méridien), j'obtiens un cylindre, et si je le coupe horizontalement (suivant la longitude), j'obtiens un carré, donc un seul morceau, mais, en partant d'un point du carré et en revenant à mon origine, j'obtiens deux morceaux ... Si j'applique la formule : $3 - p_1 = 3 - 3 = 0$. La caractéristique d'Euler des polyèdres qui discrétisent un tore est égal à 0.



Ainsi, la clé pour comprendre la caractéristique d'Euler, est la forme sous-jacente aux polyèdres, et la science que crée Poincaré pour comprendre la forme d'un objet, est l'*analysis situ*, qu'on appelle aujourd'hui la topologie. Faire des dessins à déformation continue près. Il faut comprendre la topologie de l'espace, et pas sa structure géométrique. Ce qui est important n'est pas le polyèdre avec son nombre de faces, d'arêtes, de sommets etc., mais ce que recouvre la forme du polyèdre.

¹ N. Bergeron, Conférence donnée à la Bibliothèque nationale, dans le cadre « Un texte, un mathématicien », 17 janvier 2018. Nous avons contracté l'exposé. Ex de faillibilité mais aussi d'autocorrection de Poincaré, s'agissant de prouver la stabilité du problème à trois corps. Après avoir pensé l'avoir démontrée, Poincaré est revenu sur son idée pour en suggérer au contraire l'instabilité, annonçant ainsi la théorie du chaos. ... La pire fut l'apparente contradiction la réversibilité des équations de la mécanique de Newton et l'irréversibilité des équations de Maxwell et Boltzmann. V. Cédric Villani, « La meilleure et la pire des erreurs de Poincaré », in *Tangente Sup*, 67-68, janv. 2013, pp.18-22.

Une fois que nous avons la forme du polyèdre, le nombre $S - A + F$ devient fixé en étant uniquement lié à sa forme.

Et le conférencier Nicolas Bergeron de citer un mathématicien, sensible aux intuitions profondes de Poincaré, Solomon Lefschetz, qui disait :

Tant qu'on fait tourner une manivelle [une suite d'équations], c'est de l'algèbre, mais quand on a une idée, c'est de la topologie.

Legendre enfilait les équations, mais il ne faisait pas que de les combiner. En passant du polyèdre convexe à la sphère, il faisait déjà de la topologie sans le dire, même si le terme n'existait pas encore.

Poincaré alla beaucoup loin. Il poussa la recherche jusqu'à une algébrisation de la topologie, qui deviendra *la topologie algébrique*, sans lui enlever son caractère très imaginaire. Et le conférencier de se référer à un autre grand topologue, auquel nous-mêmes nous devons tant, René Thom, qui considérait, résume Nicolas Bergeron, que *les topologues sont les enfants de la nuit tandis que les algébristes manient le couteau de la rigueur dans une parfaite clarté*. Les Lumières sont d'autant plus lumineuses qu'elles permettent à la forme d'émerger de la nuit pour être ensuite cernée avec lucidité.

Poincaré généralisa son théorème à tout polytope convexe en considérant un espace à $n+1$ dimension dont le nombre de faces, d'arêtes, de sommets ne dépend que la forme de l'espace qui peut être capturée pour les ordres de connexion p_1, p_2, \dots, p_n par des nombres qu'on appelle les nombres de Betti (le nombre de trous dans une forme ; sans trou = genre 0). En sus d'une structure combinatoire (les faces, les arêtes et les sommets), Poincaré a montré l'importance primordiale de la forme de l'objet.

La Caractéristique d'Euler est devenue la Caractéristique d'Euler-Poincaré, associant à la combinatoire eulérienne la forme de l'objet grâce à laquelle on peut faire également des calculs.

*ii Une transposition sérieuse en droit
où réapparaît, en passant, le mirage du nombre d'or ?*

d) Volonté générale et tétraèdre constitutionnel

i De la boule ouverte à la boule qui se ferme

ii Réponses aux demandes d'éclaircissement

Annexe I

Le nombre d'or : un nombre irrationnel autrement approché par une fraction continue ¹

$$\frac{\text{blue bar} + \text{red bar}}{\text{red bar}} = \phi$$

Le petit est au grand ce que le grand est au tout

(§25 2/i) 1/ La fraction continue est une manière d'approcher un nombre réel comme π . Dans le cas du nombre d'or, elle est simple. On peut l'approcher par les valeurs 1 ou $1 + 1/1$. Une écriture en fraction continue **finie** représente un nombre **rationnel**

2/ Soit donc une autre version de l'équation qui doit vérifier le nombre d'or. A chaque étape (en allant de gauche à droite), il suffit de remplacer ϕ dans le deuxième membre de l'équation par $1 + 1/\phi$.

$$\phi = \frac{a}{b} = \frac{a+b}{a} \quad \phi^2 = \phi + 1 \quad \phi = 1 + \frac{1}{\phi} \quad \phi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\phi}}$$

$$\phi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\phi}}} \quad \phi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\phi}}}} \quad \Rightarrow \quad 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\phi}}}}$$

Si on arrête le développement à un certain moment [comme dans la dernière case], on obtient alors une fraction a/b qui approche efficacement ϕ , dans le sens où toute fraction qui approcherait mieux le nombre d'or ϕ aurait forcément un dénominateur plus grand que b .

Ce nombre par exemple vaut $13/8$, soit 1.625. Si l'on veut se rapprocher davantage du nombre d'or avec une fraction, il n'y a pas le choix, **il faut un dénominateur plus grand que 8**.

Non seulement la suite de Fibonacci permet d'approcher le nombre d'or, mais c'est en plus **la meilleure manière de le faire avec des fractions !**

3/ Sous une autre forme de série infinie :

$$\phi = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}}}$$

4/ **Remarque finale** : le membre de droite représente un irrationnel positif x qui vérifie, par construction, $x = x + 1/x$, c'est-à-dire $x^2 = x + 1$. Ce nombre x est donc égal à ϕ . On dit de lui qu'il est « **le plus irrationnel** » de nombres réels.

4/ En comparaison :

$$\sqrt{2} = 1,414\dots \quad e = 2,718\dots = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4 + \dots}}}}} \quad \pi = 3,14\dots = 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15 + \frac{1}{1 + \frac{1}{292 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + 2 + \dots}}}}}}}$$

¹ https://fr.wikipedia.org/wiki/Nombre_d'or/; <https://automaths.blog/2018/06/23/encore-du-nombre-dor/>; <https://webusers.imj-prg.fr/~michel.waldschmidt/articles/pdf/FractionsContinues.pdf>; <http://villemain.gerard.free.fr/Wwwgvmmm/Nombre/FCcalcul.htm>

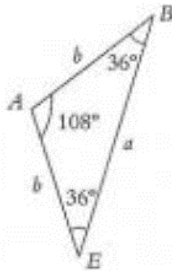
Annexe II

Le triangle d'or et la « magie » du nombre d'or

1/ Le rapport φ entre le grand côté et le petit côté d'un triangle ¹

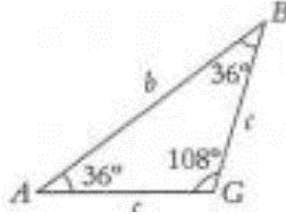
Dans chacun de ces triangles, appliquons le théorème du sinus qui établit que, dans un triangle quelconque, le quotient entre la longueur d'un côté et les sinus de son angle opposé est constant.

Dans le triangle ABE :



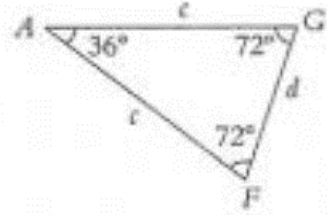
$$\frac{a}{\sin 108^\circ} = \frac{b}{\sin 36^\circ} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{\sin 108^\circ}{\sin 36^\circ}$$

Dans le triangle ABC :



$$\frac{b}{\sin 108^\circ} = \frac{c}{\sin 36^\circ} \Rightarrow \frac{b}{c} = \frac{\sin 108^\circ}{\sin 36^\circ}$$

Dans le triangle AFG :



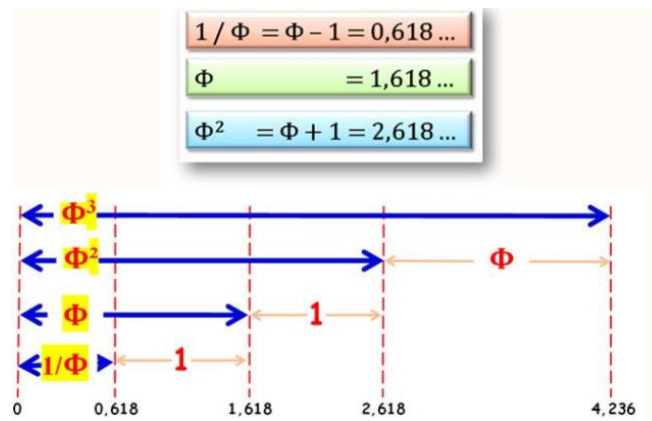
$$\frac{c}{\sin 72^\circ} = \frac{d}{\sin 36^\circ} \Rightarrow \frac{c}{d} = \frac{\sin 72^\circ}{\sin 36^\circ} = \frac{\sin 108^\circ}{\sin 36^\circ}$$

Comme $72^\circ = 180^\circ - 108^\circ$, et que les sinus de deux angles supplémentaires sont égaux, on a : $\sin 72^\circ = \sin 108^\circ$. Par ailleurs, nous pouvons établir les égalités suivantes :

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = \frac{\sin 108^\circ}{\sin 36^\circ} = 1,618033988...$$

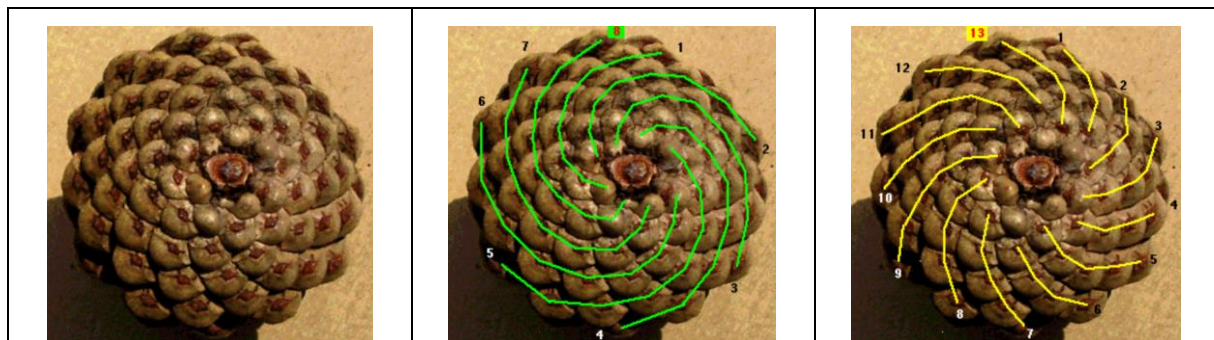
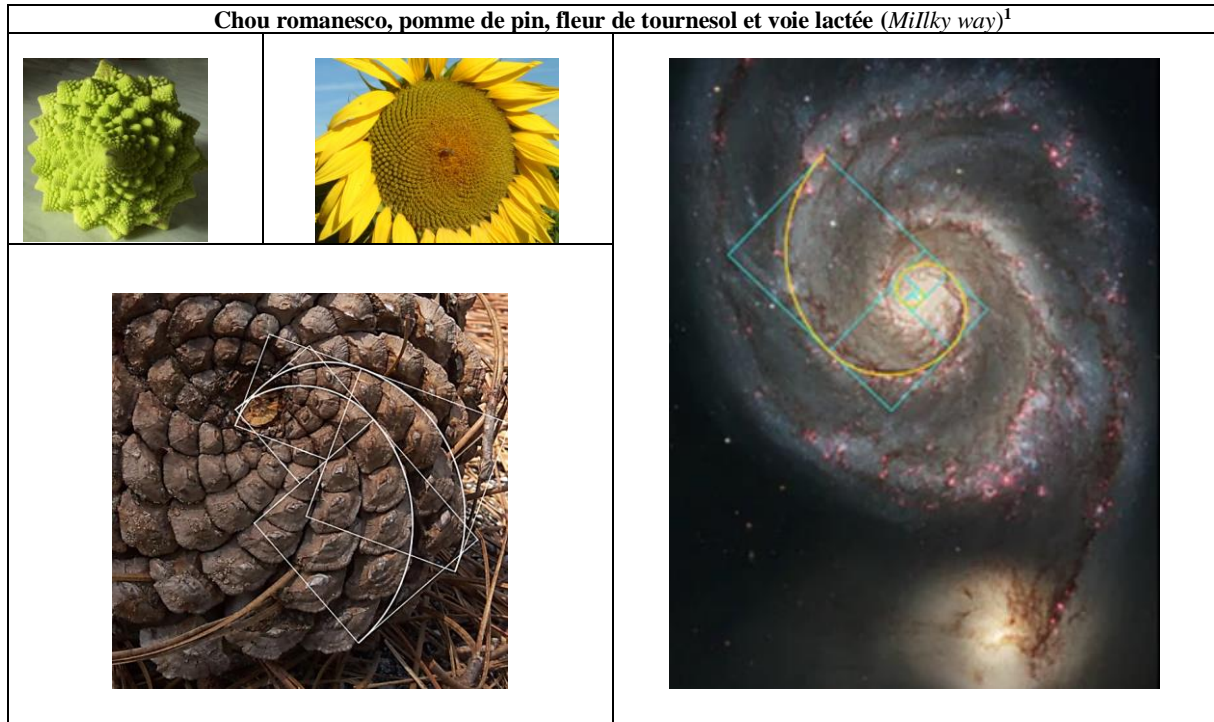
Dans les deux cas, la relation entre le grand côté et le petit côté est égale à φ .

2/ La « magie » du nombre d'or (sa propriété fondamentale) :



¹ <http://mathsdanslanaturetp.e-monsite.com/pages/le-nombre-d-or.html>

Annexes III



Les étamines de la fleur de tournesol sont alignées selon plusieurs spirales gauches et droites. Il en est de même pour la pomme de pin dont les spirales sont dessinées par l'emplacement des écailles. L'existence de spirales donne l'impression de mouvements, mais le fait qu'elle soient dans les deux sens leur confère globalement un aspect plus statique.

¹ <http://www.maths.surrey.ac.uk/hosted-sites/R.Knott/Fibonacci/fibnat.html> ; <https://www.mathnasium.com/examples-of-the-golden-ratio-in-nature>; <https://www.cnet.com/pictures/natures-patterns-golden-spirals-and-branching-fractals/4/>

Annexe IV

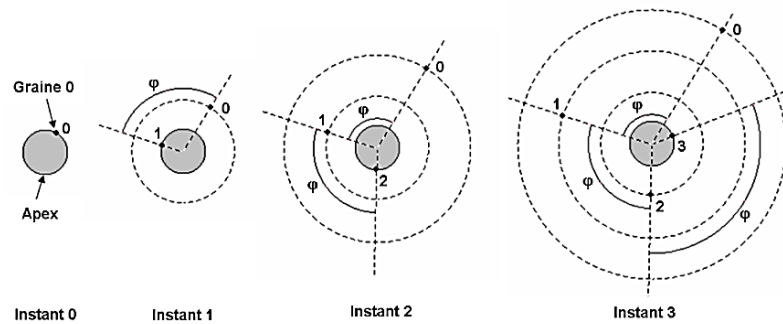
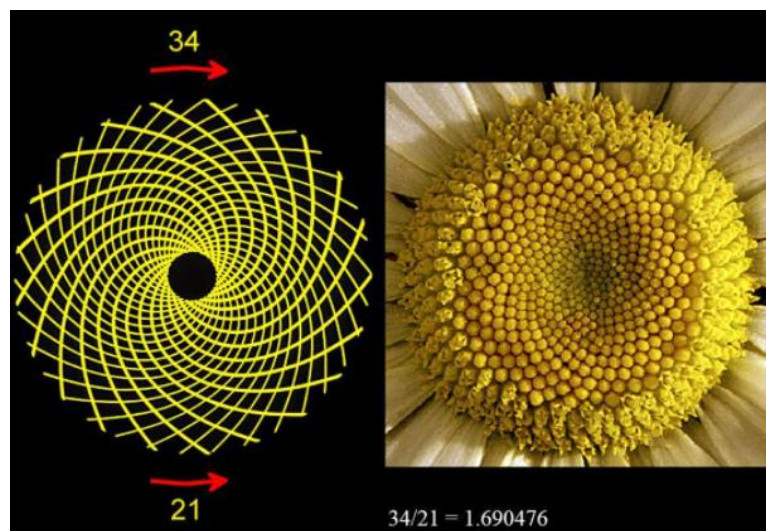
Le nombre φ comme meilleur angle entre deux graines, et le nombre de spirales comme nombre de Fibonacci


Schéma de la pousse des graines pour un angle φ .
La vitesse d'éloignement des graines du centre est supposée constante.

Les graines de tournesol (ou les écailles d'une pomme de pin) émergent selon un rythme régulier à partir d'une zone particulière au cœur du bourgeon, appelée *l'apex*. Elles grossissent en s'éloignant de l'*apex*, mais elles gardent toujours la même orientation radiale. Chaque graine garde donc le même angle par rapport à la précédente et la suivante.

Cet angle est qualifié d'**angle d'or**. Cet angle permet une division du cercle de 360° en deux arcs selon la proportion du nombre d'or. (On peut le vérifier de la façon suivante : $360^\circ \times 0,618 = 222,492^\circ$ pour l'angle rentrant ; son complément saillant est précisément $137^\circ 30' 28''$.)

Si chaque graine fait une fraction de tour égale au nombre d'or, on observe deux séries de spirales, dont les nombres sont deux termes successifs de la suite de Fibonacci. Regardez déjà une pomme de pin par en dessous et repérez les spirales : vous en trouverez, ou bien 3 dans un sens et 5 dans l'autre, ou 5 et 8 ou encore 8 et 13... Le cœur des tournesols compte souvent 21 spirales dans un sens et 34 dans l'autre :



¹ <https://webinet.cafe-sciences.org/articles/billet-classe-puissance-x/> ; <https://www.cnet.com/pictures/natures-patterns-golden-spirals-and-branching-fractals/5/>

Les « retracements de Fibonacci » en finance ¹



1/ Idée sous-jacente : *To retrace* : idée de revenir comme on revient sur ses pas (to retrace my steps/ my path par ex.; derrière, il y a l'idée de convergence par le haut et par le bas, comme précisément une suite de Fibonacci..). Utilisés par les traders adeptes de l'analyse technique, le retracement de Fibonacci permet, grâce à la détermination de zones de supports et de résistance, de déterminer ses objectifs de cours.

1/Leur objectif : *repérer les corrections des tendances haussières et les rebonds des tendances baissières*

Les niveaux identifiés permettent de définir ce que l'on appelle **des zones de retracements**, c'est-à-dire des zones de prises de bénéfices en tendance haussière et de rebond en tendance baissière.

Les ratios les plus utilisés sont : 0 %, 23.6 %, 38.2 %, 50 %, 61.8 %, 100 %, 161.8 %. Ce sont d'ailleurs ces ratios qui seront le plus souvent proposés par les plateformes de trading. Ainsi, les niveaux de retracement de Fibonacci seront les suivants : 0.236, 0.382, 0.500, 0.618, 0.764. Les niveaux d'extension de Fibonacci sont : 0, 0.382, 0.618, 1.000, 1.382, 1.618.

À noter : vous aurez tout intérêt à observer ces retracements sous différentes unités de temps. Lorsqu'il y a des convergences, les supports et résistances identifiés peuvent être encore plus significatifs.

2/ Leur mode d'emploi : *un investisseur particulier n'aura pas le réel besoin de savoir comment calculer les ratios de Fibonacci et comment tracer les retracements de Fibonacci. Les logiciels d'analyse graphique s'en chargeront pour vous.*

Il faut savoir tout de même que les retracements de Fibonacci relient le point haut et le point bas d'un mouvement de tendance en graduant le mouvement de 0 à 100% : ils descendent de 0 à 100 % dans une tendance haussière et montent de 0 % à 100 % dans une tendance baissière. En tous les cas, vous devrez relier les points avec la plus forte amplitude et ne pas tenir compte des phases de correction qui se sont formées au cours du mouvement.

3/ En résumé : *Les retracements de Fibonacci fonctionnent comme des résistances et supports et permettent ainsi d'affiner les prises de position. Même s'il est difficile de ne prendre position qu'en suivant ces niveaux, ils offrent, couplés à d'autres indicateurs, une aide précieuse pour savoir quand entrer ou sortir d'un marché.*

¹ <https://www.investopedia.com/articles/technical/04/033104.asp> ; <https://www.cafedelabourse.com/lexique/retracement-de-fibonacci>

Annexe VII

Nombre d'or et phyllotaxie, ou l'ésotérisme brisé par l'expérimentation (deux commentaires)¹

L'explication a été apportée par les physiciens Stéphane Douady et Yves Couder qui ont réalisé un système physique à l'aide de gouttes d'un fluide ferromagnétique placé dans un champ magnétique.

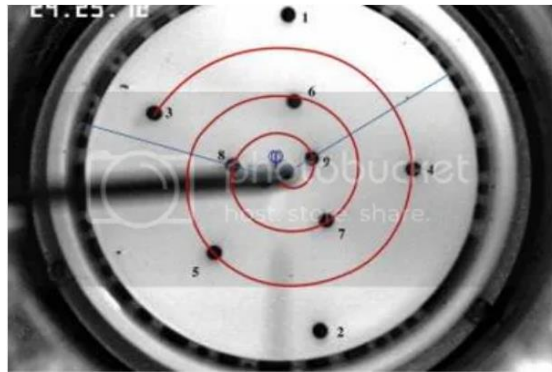
Les contraintes stériques (occupation de l'espace) de la naissance des massifs cellulaires responsables de la formation d'une feuille ont été reproduites, et la même organisation, liée à la suite de Fibonacci, a ainsi été reproduite en laboratoire. Des simulations numériques ont donné les mêmes résultats.

o

En 1993, deux chercheurs à Normale Sup [Paris], Douady et Couder, ont coupé court aux élucubrations mystiques, grâce à un ingénieux dispositif : au centre d'un récipient immobile on fait tomber goutte après goutte un ferro-fluide (sensible au magnétisme).

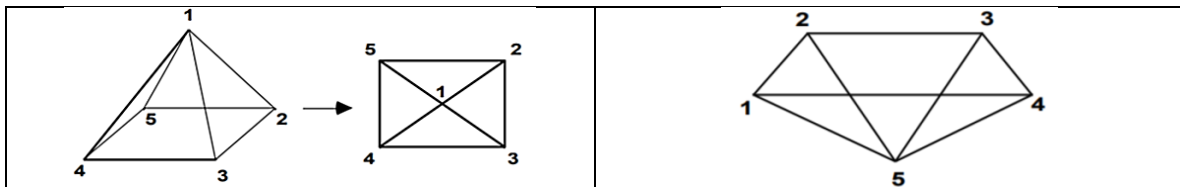
Sous l'effet d'un champ magnétique, les gouttes sont à la fois attirées vers l'extérieur du plateau et repoussées les unes par les autres. Dans ces conditions, les gouttes s'éloignent du centre en respectant un angle constant entre deux gouttes. La figure obtenue ne dépend que du rythme des gouttes : à partir d'une certaine fréquence, ô miracle, on retrouve très exactement les figures de spirales des cœurs de tournesol.

Autre bizarrerie : si l'on mesure l'angle entre deux gouttes consécutives on trouve très exactement le nombre d'or ! Ces jolies figures géométriques correspondent simplement à une occupation optimale de l'espace par les gouttes de fluides.



Annexe VIII

Autres perspectives de la pyramide à base carrée



On remarque effectivement que la pyramide à base carrée possède une face de quatre sommets et quatre faces de trois sommets. Les faces sont 1234, 125, 235, 345, 145. Les faces 135 et 245 sont impossibles.²

¹ Paul Krivine, *Le mythe du nombre d'or*, 30 nov. 2007, Association française pour l'information scientifique (Afis), <https://www.afis.org/Le-mythe-du-nombre-d-or> ; <https://webinet.cafe-sciences.org/articles/billet-classe-puissance-x/>

² <http://mathenjeans.free.fr/amej/edition/actes/actespdf/95063081.pdf>

Force, champ et potentiel ¹

1/ Force et champ (le caractère gras des symboles remplace leur nature vectorielle)

Le vecteur force et le vecteur champ sont deux vecteurs qui ont des significations physiques différentes. Le vecteur champ comme celui de la pesanteur (\mathbf{g}), le champ électrique (\mathbf{E}), et le champ magnétique (\mathbf{B}), décrit **une propriété de l'espace**, alors que le vecteur force (\mathbf{F}) décrit **une action mécanique à un point d'application précis**. Un champ est comme un champ de blé, dont les épis seraient des vecteurs-forces qui pointent vers le haut et soutiennent par ex. un corps en lévitation magnétique.

Soit un champ donné, comment trouver la force ? Considérons deux relations vectorielles (portant donc sur des grandeurs et des directions, le sens des vecteurs) : $\mathbf{P} = m\mathbf{g}$ et $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$, avec \mathbf{P} désignant le poids, m la masse, \mathbf{F} la force et q la charge, enfin \mathbf{g} la pesanteur et \mathbf{E} le champ électrique. \mathbf{g} et \mathbf{E} sont des champs uniformes (le vecteur est le même partout).

$\mathbf{P} = m\mathbf{g}$ et $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$. A chaque fois, le champ, \mathbf{g} et \mathbf{E} , est multiplié par une valeur physique, m et q .

Dans $\mathbf{P} = m\mathbf{g}$, m est toujours > 0 . Les vecteurs sont colinéaires et dans le même sens : $P = mg$ en valeur :

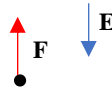


Dans $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$, si la charge q est > 0 , $F = qE$ en valeur ; si q est < 0 , $F = -qE$

Si $q > 0$, \mathbf{E} et \mathbf{F} pointent dans la même direction ; si $q < 0$, \mathbf{F} et \mathbf{E} pointent dans des directions opposées.

Une particule non chargée q continue sa trajectoire, sans être perturbée par le champ, \mathbf{E} :

Si $q \neq 0$, la particule interagit avec le champ : par ex. :



Si une autre charge se trouve dans ce champ, elle subira l'action de la force électrique exercée à distance par la particule : **le champ électrique est en quelque sorte le "médiateur" de cette action à distance.**

2/ Potentiel, champ, charge et force électrique

a) Potentiel électrique :

Une particule chargée va créer autour un potentiel V autour d'elle suivant la formule $V = k \cdot q/r$, avec k une constante, V le potentiel, q la charge et r la distance. Le potentiel et la distance sont inversement proportionnels. Plus on s'éloigne de la charge, plus le potentiel est faible. Le potentiel en tel point est différent du potentiel en un autre point.

Le potentiel électrique est en fait de l'énergie potentielle électrique par unité de charge, au même titre que le potentiel gravitationnel est de l'énergie potentielle gravitationnelle par unité de masse. $V_E = U_E/q$.

En gravitation encore, tout corps physique d'un espace est naturellement attiré par le point où le potentiel gravitationnel est le plus bas. Un corps mécanique se déplace dans le sens des potentiels décroissants.

En électricité, il en est toujours de même pour toute charge positive qui est naturellement attirée par le point où le potentiel électrique est le plus bas (le plus négatif, ou le moins positif). Autrement dit, $q > 0 \Leftrightarrow$ potentiel fort autour de la charge q , et moins fort plus loin. Une particule chargée positivement se déplace également dans le sens des potentiels décroissants.

En revanche, toute charge négative est naturellement attirée par le point où le potentiel électrique est le plus haut (le plus positif, ou le moins négatif). Autrement dit, $q < 0 \Leftrightarrow$ potentiel faible autour de q , et moins faible plus loin. Une particule chargée négativement se déplace dans le sens des potentiels croissants.

Dès qu'il existe une différence de potentiel électrique entre deux points, un déplacement de charges électriques se produit entre ces deux points. Répétons-le : les charges positives vont vers le point où le potentiel est le plus bas, les charges négatives vont vers le point où le potentiel est le plus haut.

b) Champ électrique :

Le champ électrique (un vecteur) dérive du potentiel, ou en d'autres termes, le champ de vecteurs qu'est le champ électrique est le gradient du potentiel, un scalaire. Le champ électrique est **un pouvoir d'action à distance dirigé vers le potentiel décroissant.**

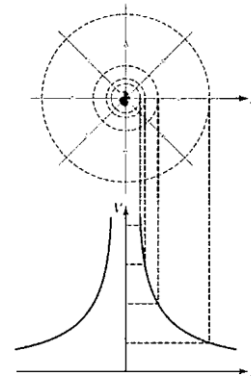
¹ Clipedia, *Le champ électrique*, 30 oct. 2014, <https://www.youtube.com/watch?v=Cai3AQd2LPs> ; *Champ et force*, 8 oct. 2014, Profcouderc, https://www.youtube.com/watch?v=_cGcKIQxHhA ; *Le potentiel électrique*, https://physique.cegepr.qc.ca/webnyb/module_5.pdf ; *Différence Potentiel, champ, force*, <https://www.youtube.com/watch?v=CVDdv04wUZo> ; http://phozagora.free.fr/?page=zoom_electricite

Force, champ et potentiel (suite)

Par nature, $\text{grad } E = - \text{grad } V$, étant rappelé que le gradient caractérise la variabilité d'une grandeur au voisinage d'un point. C'est la variation d'une grandeur physique progressivement décroissante à partir d'un point maximal.

Le gradient, en tant que variation d'une grandeur, est donc fonction de la distance, x . Le gradient, qui généralise la notion de dérivée pour une fonction à plusieurs variables, signale où la fonction croît le plus. Il indique la pente locale de la fonction, là où elle est la plus grande au champ électrique en question.

Comme $\text{grad } E = - \text{grad } V$, une ligne de champ ne peut visiter que des points de potentiel décroissant, V .



c) Charge électrique :

Le champ, créé par une particule, est constitué d'une infinité de vecteurs pouvant affecter toute autre charge qui y est présente en fonction inversement de la distance. Voici comment se présente **le champ d'une charge**, positive et négative :



Par convention, le champ électrique s'éloigne de la charge positive alors qu'il se dirige en direction de la charge négative. Ainsi, **le champ électrique se déplace toujours de la charge positive, +, vers la charge négative, -.**

La charge négative contient beaucoup d'électrons ; la charge positive, beaucoup moins. Quand on a une sorte de tension, une pile électrique ou une batterie par ex., la charge négative représente là où se sont accumulés des électrons, la charge positive représente là où il y en a beaucoup moins. Le courant va, considère-t-on, du + au -.

Le champ électrique E d'une charge électrique ponctuelle est radial : sa direction passe toujours par un point central qui est la charge ponctuelle. Le champ est perpendiculaire aux surfaces équipotentielles qui sont sphériques.

La formule du champ électrique, distribué dans l'espace : $\mathbf{E} = k \cdot \mathbf{q} / r^2$, et non q/r , car si le potentiel est représenté par un point, le champ électrique l'est par un vecteur. (Rappelons que les champs scalaires attribuent à chaque point de l'espace une valeur, alors que les champs vectoriels attribuent à chaque point de l'espace considéré un vecteur.)

La formule de la force électrique en fonction du champ électrique : $\mathbf{F} = q \cdot \mathbf{E}$. C'est la force que subit la charge q placée dans le champ électrique \mathbf{E} . Selon que q augmente ou diminue, on a les deux représentations suivantes :



c) Force électrique :

La notion de force implique en fait l'idée d'une interaction entre deux objets ou deux systèmes. Pour parler donc de force électrique, il faut considérer deux particules chargées (alors que le champ est créé par une seule particule). Si une particule est chargée + et l'autre -, les charges s'attirent ; si les deux particules ont des charges identiques, les charges se repoussent.

On sait que $V = k \cdot q/r$ et $\mathbf{E} = k \cdot \mathbf{q}/r^2$. Le vecteur champ électrique ne dépend pas que de la seule charge q et de la distance r . C'est la mesure du pouvoir d'attraction à distance de la charge q , indépendamment de ce qui advient dans l'environnement.

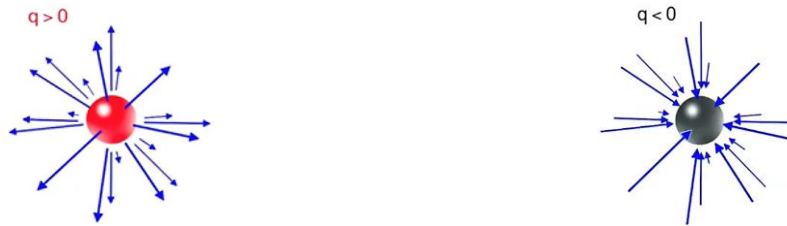
Calculons $F = q \cdot E = q_1 \cdot k \cdot q_2 / r^2 = k \cdot q_1 q_2 / r^2$ (loi de force électrique, dite loi de Coulomb, **en chaque point de l'espace**).

k est la constante de force électrique ou la constante de coulomb. q_1 et q_2 . La force F relie bien deux charges. La charge q_2 a clairement un pouvoir d'action à distance, mais plus on éloigne les charges, comme l'indique r^2 au dénominateur, moins la force entre elles est importante.

Au niveau des unités, une force est toujours en newton (en gravitation comme en électricité), q est en coulomb, donc F est en newton par coulomb.

Force, champ et potentiel (suite et fin)

3/ Visualisation du champ E d'une charge q en 3 D :



4/ **Calcul du champ en un point quelconque**, via un système de coordonnées cartésiennes pour repérer la position de la charge q ($\mathbf{r}_q = (x_q, y_q, z_q)$) et la position du point de calcul du champ E ($\mathbf{r} = (x, y, z)$), sans indices particuliers puisque r n'est pas forcément fixé : le champ, créé par une force électrique, est quelque chose de délocalisé ; il est représenté par des vecteurs en tout point de l'espace \Leftrightarrow le choix de x, y et z est arbitraire pour caractériser tout le champ E qui environne la charge q).

<p style="text-align: center;">$\mathbf{E} = k \cdot q / r^2$</p> <p style="text-align: center;">avec calcul de la valeur absolue de r :</p> <div style="text-align: center;"> </div>	<div style="text-align: center;"> </div> <p>$\mathbf{r} - \mathbf{r}_q = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$, d'où $r = \sqrt{((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2)}$</p>
--	--

Annexe X

Polyèdres convexes réguliers et non réguliers, et polyèdres non convexes¹

Polyèdres convexes réguliers	Polyèdres convexes non réguliers	Polyèdres non convexes

(Concl. Chap.I 4/-iii)

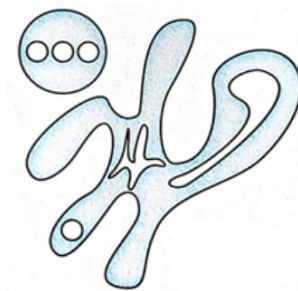
¹ Nicolas Bergeron, conférence donnée à la Bibliothèque nationale, dans le cadre « Un texte, un mathématicien », 17 janvier 2018. Les illustrations sont de Jos Leys.

Annexe XI

Le type de topologie selon le nombre de « trous »

Une fonction complexe f , qui associe un nombre complexe $f(z)$ à un nombre complexe z , a un domaine de définition qui est une partie du plan.

La question de savoir si ce domaine de définition d'une telle fonction d'une variable complexe f a des « trous » est une question purement topologique. Riemann explique que le nombre de trous caractérise même les domaines du plan du point de vue topologique : deux domaines à trois trous, quels qu'ils soient, ont un même type topologique alors qu'un domaine à trois trous et un autre à quatre trous ont forcément des types topologiques différents.¹



Ces deux domaines ont exactement la même topologie

¹ Marina Ville, « Les travaux de Poincaré en topologie algébrique », in Tangente Sup, n° 67-68, édit. Pôle, Paris, 2013, p.48.

§64. – L'EXPERIENCE GRECQUE ET ROMAINE ANCIENNE

i Le sens critique. ii La diagrammatisation de la pensée

Annexe II

◦

Le tétraèdre dans l'espace-temps

1/ Petit préalable amusant : devinette posée parfois aux enfants :

Comment construire 4 triangles équilatéraux avec 6 allumettes ? Les enfants ne trouvent généralement pas la réponse.

Parce qu'il n'y a pas de réponse, pas de réponse dans le plan... Mais ; il y a une réponse dans l'espace : le tétraèdre, la pyramide. Il faut « inventer » une dimension supplémentaire par rapport à ce que le raisonnement de base pouvait laisser entendre.¹

2/ Une idée de triangulation de l'espace-temps en tétraèdres :

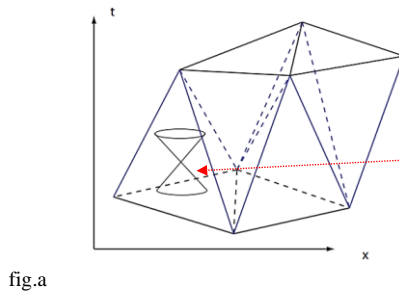


fig.a

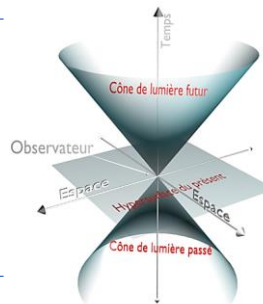


fig.b

fig.a : A local subset of a causal dynamical triangulation in three dimensions. Note that each building block tetrahedron has the inherent light-cone structure of a Minkowski space.

Cette représentation, cependant, n'a rien encore de physique. C'est le résultat pour l'instant d'un logiciel qui devrait être élargi en 4D, i.e. 3D + T. L'avenir dira si c'est une bonne piste.

fig.b : Représentation schématique de l'espace-temps de Minkowski, qui montre seulement deux des trois dimensions spatiales. L'espace de Minkowski est un espace mathématique « affine pseudo-euclidien » à quatre dimensions modélisant l'espace-temps de la relativité restreinte (trois dimensions spatiales et une dimension temporelle).²

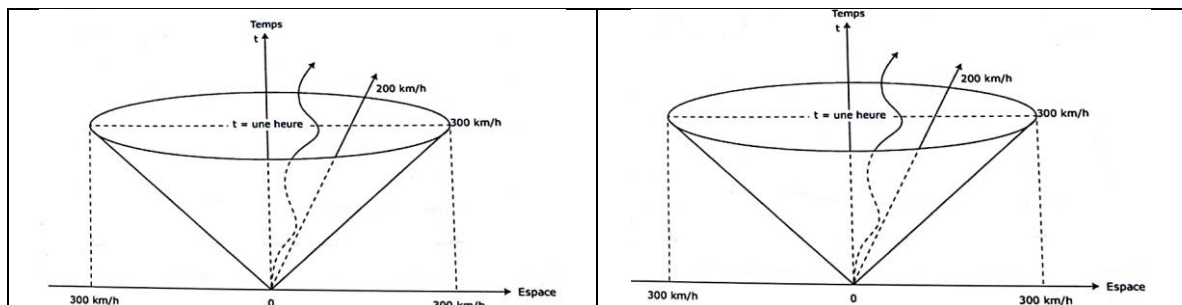
3/ Deux ou trois mots sur l'espace-temps de Minkowski :

a) Pourquoi d'abord la figuration d'un cône ?

Commençons par un exemple simple, avec l'espace en abscisse et le temps en ordonnée, dans le système de coordonnées desquelles les vitesses sont largement inférieures à celle de la lumière. Les vitesses sont représentées au croisement.

Si vous pilotez un hélicoptère dont la vitesse maximale est de 300 km/h, vous ne pourrez atteindre en une heure, d'où que vous partiez, que les endroits de l'espace-temps qui sont situés dans un rayon de 300km. Cette portion accessible pourra être représentée par le diagramme infra (fig.a) qui aura forcément la forme d'un cône dont l'enveloppe sera constituée par l'ensemble des trajectoires de l'espace-temps, dans le cas où vous volez constamment à 300 km/h.

Si vous volez en dessous de cette vitesse, votre hélicoptère suivra une trajectoire de l'espace-temps qui se situera à l'intérieur de ce cône (réflétant fidèlement vos changements de vitesse et de direction). Si nous prenons un cas particulier, par ex. le fait de voler constamment à 200 km/h, votre trajectoire sera une droite.³



¹ Aurélien Barreau, *Des univers multiples*, EKHD, Paris, 2020, p.100.

² https://en.wikipedia.org/wiki/Causal_dynamical_triangulation ; https://fr.wikipedia.org/wiki/Espace_de_Minkowski

³ Guy-Louis Clavet, *Comprendre Einstein, op. cit.*, Eyrolles, Paris, 2009, pp.80-81.

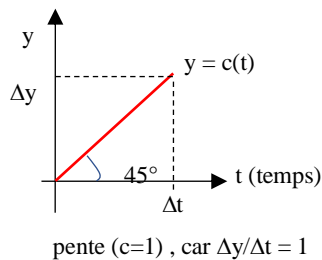
Le cône de lumière (suite)

Remplaçons la vitesse maximale de l'hélicoptère par celle de la lumière, $c = 300.000\text{km/s}$. On obtient, sur la *fig.b supra*, le même cône avec, comme base, un cercle doté d'un rayon fixe de 300.000 km , communément appelé « **cône de lumière** ». Cette dénomination provient du fait que même **les rayons lumineux ne peuvent aller au-delà de ce cône : cette partie sera physiquement inaccessible**.

Il faut souligner :

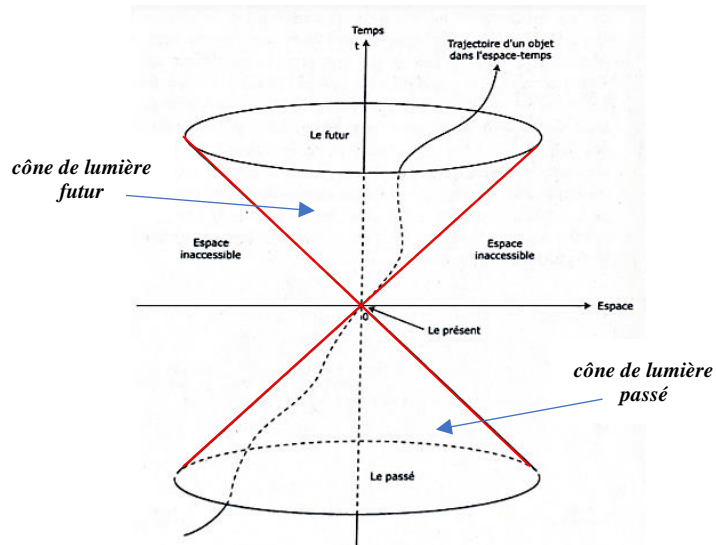
- qu'il existe également des trajectoires droites particulières de cet espace-temps, celles qui forment l'enveloppe de ce cône de lumière. Cette lumière sera formée par toutes les trajectoires possibles parcourues par les photons (quanta de lumière) qui sont les seules particules à atteindre la vitesse de la lumière (c), leur masse étant nulle. C'est pourquoi un faisceau de lumière n'est constitué que de photons ;

- qu'une trajectoire dans l'espace-temps aura forcément un présent et un futur (flèche du temps oblige.¹ Voir la *fig. infra de droite* qui donne une assez bonne réorientation d'un objet dans cet espace-temps courbe à quatre dimensions. Cet espace ressemble à un sablier. **Le temps unique n'existe plus, et le temps lui-même ne peut exister en dehors de ce sablier.**



Les pentes supérieures à 45° , i.e. au-dessus de la bissectrice, représentent les vitesses inférieures à la vitesse de la lumière, c .

En raison de l'imbrication de l'espace et du temps au niveau de chaque événement, le temps ne peut exister en dehors du « sablier » ci-contre →



Rem. : La structure physique d'un **espace-temps quadridimensionnel** diffère d'un univers à trois dimensions qui peut être représenté par une **sphère** où il est possible, en partant d'un point précis, d'atteindre tous les points situés géographiquement à une même distance. La vitesse de déplacement de tout objet y est toujours inférieure à la vitesse de la lumière. Si la trajectoire est rectiligne, la vitesse est constante, ce qui correspond au **mouvement inertiel**.

b) La métrique de l'espace-temps de Minkowski

Dans l'espace-temps de Minkowski, les génératrices du cône sont rectilignes (cf. supra), ce qui n'est plus le cas en relativité générale où elles deviennent des géodésiques. Le fait que les rayons lumineux soient des droites implique que **la courbure de cet espace est nulle**. L'espace-temps est **plat**, non soumis à l'interaction gravitationnel.

La métrique de Minkowski n'est pas exactement la métrique d'un espace euclidien quadridimensionnel. Elle a pour expression une généralisation du théorème de Pythagore $\Delta s^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2$ avec Δs mesurant l'hypoténuse d'un triangle rectangle. Cette généralisation prend en compte la vitesse de la lumière, c , le temps propre d'un objet, i.e. le temps qui s'est écoulé pour cet objet, et le temps « impropre » mesuré dans un référentiel différent de celui de cet objet (ce temps « impropre » peut être un temps propre s'il est mesuré dans son propre référentiel). L'expression se présente comme suit :

$$(c\Delta t)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta s)^2 \quad (\text{fig.a}).$$

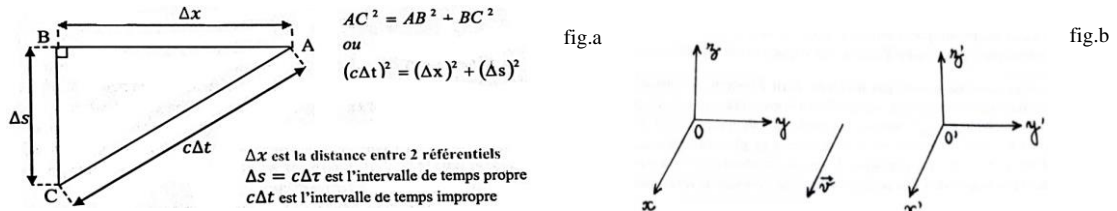
Pour comprendre le sens de chaque terme, on note $c\Delta t$ le temps propre de l'objet considéré, $c\Delta t$, le temps « impropre ». En ajoutant le facteur « c » devant Δt ou Δt , on considère **des distances temporelles** en mètres et non des temps en seconde.

Pour comprendre ce qui existe entre les variations spatiales et les variations temporelles, il faut garder à l'esprit le fait que la vitesse de la lumière ne varie pas. Cette vitesse permet donc la mesure du temps grâce à celle de la distance et inversement. Mesurer la distance qui nous sépare d'une étoile grâce à des kilomètres classiques ou à des années-lumière est équivalent. La mesure du temps se réduit donc, elle aussi, à une mesure d'espace.

¹ *Ibid.*, p.81.

Le cône de lumière (suite et fin)

Les référentiels en question sont, dans l'espace-temps de Minkowski, **en mouvement de translation uniforme** l'un par rapport à l'autre. On peut imaginer que le mouvement se fasse de façon que la vitesse v de translation soit parallèle à l'axe Ox . (fig.b).



Dans l'espace-temps, la partie « espace », seule, se comporte comme dans le théorème de Pythagore classique, mais la partie « globale » espace-temps se comporte différemment. Si l'on se place en 2 dimensions., l'une d'espace et l'autre de temps, l'idée générale reste la même, avec un signe opposé entre la partie temps (+) et la partie espace (-) :

$$(\Delta s)^2 = (c\Delta\tau)^2 = + (c\Delta t)^2 - (\Delta x)^2$$

Traduisons : **le carré de la « distance univers »**, i.e. l'intervalle de d'espace et de temps qui sépare deux événements, est égale à la différence entre les carrés des intervalles de temps et d'espace, et non pas de leur somme, étant rappelé qu'on ne prend pas le temps mais le chemin optique, produit de cet intervalle par la vitesse de la lumière.¹

Nous sommes en signature (+ -), ou (+ - -) si l'on considère 1 dimension de temps et 3 d'espace, soit, en développant :

$$(\Delta s)^2 = + c^2(t_2 - t_1)^2 - (x^2 - x_1)^2 - (y^2 - y_1)^2 - (z^2 - z_1)^2, \text{ ou plus simplement : } (\Delta s)^2 = + c^2\Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2.$$

Cet intervalle est un invariant relativiste : sa valeur ne dépend pas du référentiel galiléen (i.e. en translation uniforme) dans lequel on l'évalue. **Si l'espace et le temps ne sont plus absolus, l'intervalle d'univers se conserve, par contre, en passant d'un observateur à l'autre.**

Rem. : *Le carré d'une distance d'univers étant la différence entre les carrés de deux intervalles, de temps et d'espace, un événement peut se produire très loin d'un autre et très postérieurement à lui, tout en étant séparé de lui par une distance d'univers très petite, voire nulle.*²

La généralisation du théorème de Pythagore s'explique par liaison mutuelle de l'espace et du temps qui deviennent inséparables. L'espace-temps est une entité physique unique. En raison de la contraction des longueurs et de la dilation des temps en fonction des vitesses relatives (**le temps et les distances ne sont plus fixes, mais dépendent de la vitesse relative des repères**), il devient plus difficile, pour un observateur, de savoir qu'un autre observateur mesure, car l'espace et le temps de chacun sont imbriqués dans l'espace et le temps de l'autre, par des formules appelées **transformations de Lorentz**.

La transformation de Lorentz permet de passer d'un référentiel à un autre dans l'espace-temps à quatre dimensions. Les « équations de Lorentz » ont été inventées par ce dernier pour justifier les résultats négatifs de l'expérience de Michelson et Morley. Ce sont ces équations qui associent les coordonnées de temps et d'espace au lieu de les traiter séparément comme des entités indépendantes. Ces équations vérifient **l'invariance de l'intervalle d'espace temps**, dont il a été fait mention supra, entre deux événements situés sur une même trajectoire d'un espace-temps.³

4/ Le cône de lumière en relativité générale :

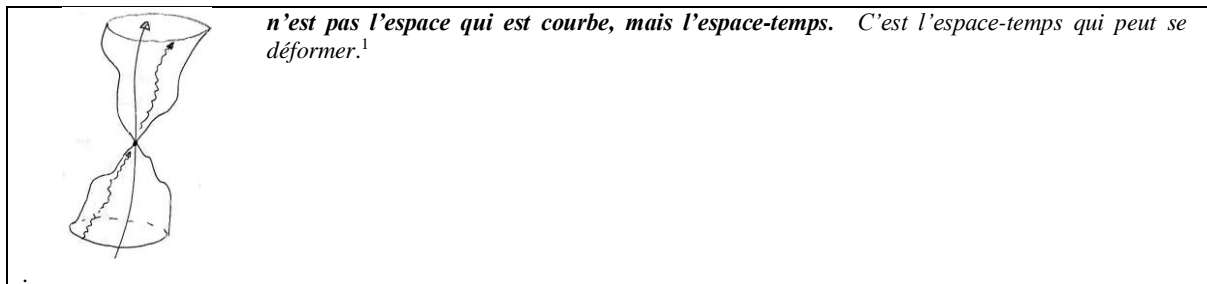
Les cônes sont déformés. Ce n'est plus un cône de génératrices rectilignes, i.e. des géodésiques qui sont les chemins les plus courts dans l'espace-temps. En relativité générale, les trajectoires d'univers représentent toujours à la fois la trajectoire spatiale d'un mobile, son temps de parcours et sa vitesse, égale à la pente de sa trajectoire. **Les déformations de l'espace-temps ne se produisent pas à l'extérieur du sablier, mais à l'intérieur.**

L'espace n'est pas figé et immuable, mais est susceptible de se déformer et se distendre. Il réagit à la présence de la matière. Il n'est plus un invariant, un donné pur, mais devient un matériau malléable. L'un et l'autre sont intimement et indéfectiblement liés. Mais attention : ce

¹ Claude-Alexandre Simonetti, *E = mc², vu sous un autre angle*, auteur et éditeur, 2017, pp.10-11 ; Maurice-Edouard Berthon, *Les grands concepts scientifiques et leur évolution*, op. cit., Publication universitaire, Paris, 2000, pp.149-151.

² Georges Lochak, *La géométrisation de la physique*, Flammarion, Paris, 1994, p94, n.1.

³ M.-E. Berthon, *Les grands concepts scientifiques et leur évolution*, pp.149-150.



*n'est pas l'espace qui est courbe, mais l'espace-temps. C'est l'espace-temps qui peut se déformer.*¹

§65. – L'EXPERIENCE DE PENSEE MODERNE

a) Une expérience de pensée nouvelle en droit et en science

- i La « table rase » d'où émerge la volonté individuelle.*
- ii Déliaison et reliaison en garantissant la liberté politique et individuelle*

b) L'épistémè des Lumières comme élargissement aux formes de pensée temporelles

- i Autres mobilités du barycentre.*
- ii La dialectique violence v. résistance, ou résistance v. violence.*
- iii La cycloïde comme modèle de référence*

c) Des figurations dynamiques pour traduire l'idée d'un remodelage de l'état de la société même

- i L'effet gyroscopique constitutionnel*
- ii Des classes d'homotopie interprétatives*
- iii De l'amour de soi à l'amour-propre, et de l'amour-propre à l'amour de soi*

d) Le modèle de l'espace fibré à nouveau à l'épreuve pour appréhender le droit constitutionnel

- i Par-delà l'échange des marchandises, la demande d'un regard (bis)*
- ii Retour sur les notions de transport parallèle et de connexion*
- iii Les aventures de l'espace fibré en droit*

e) Des anneaux borroméens prenant la forme de spires jointives dans un solénoïde

- i La bobine torique électorale américaine*
- ii L'entrelacement des productions borroméennes des 50 séparations des pouvoirs des Etats*

Annexes II, III, IV, VI, VII, VIII, IX, XI et XI bis, XIII, 497

o

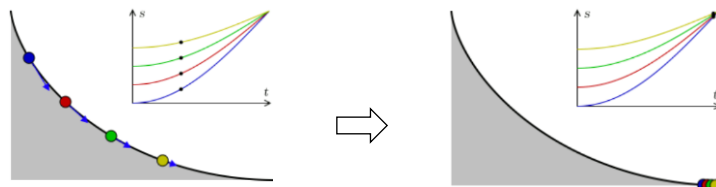
¹ A. Barreau, *Des univers multiples*, p.23

Annexe II

L'étude de la cycloïde par Christian Huygens (et Christopher Wren)

1/ La cycloïde est une courbe tautochrone

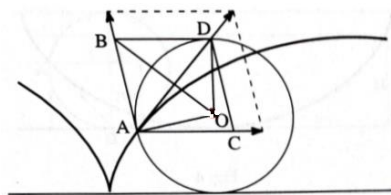
Une courbe tautochrone est une courbe, située dans un plan vertical, où **le temps pris par une particule**, glissant le long de la courbe sous l'influence uniforme de la gravité jusqu'à son point le plus bas **est indépendant de son point de départ**.¹



2/ La définition cinématique de la cycloïde

La découverte de Huygens se fondait sur les propriétés de la tangente à la cycloïde. Selon Torricelli et Roberval, on peut construire la tangente en se fondant sur le fait que la cycloïde est la trajectoire d'un mouvement obtenu par la composition d'un mouvement rectiligne et d'un mouvement de rotation.

La tangente indique la direction du vecteur vitesse du déplacement, qui est égal à la somme des vitesses constituant le mouvement. Ainsi, si A est la position d'un point donné à un mouvement donné, il faut faire la somme du vecteur horizontal et du vecteur tangent au cercle décrit par le point. Leurs tangentes doivent être égales pour que le mouvement s'opère sans glissement. Il faut donc construire un losange de sommet A dont un côté est horizontal et l'autre tangent au cercle B et mener la diagonale du losange.²



Nous retrouvons l'idée du **parallélogramme des forces**.

O est le centre du cercle.

Notez que la droite qui relie le point A de la cycloïde au point le plus bas du cercle E est normale à la cycloïde (perpendiculaire à la tangente).

3/ Le théorème de Christopher Wren

Le fil du pendule est entièrement enroulé lorsque son extrémité se trouve au point commun des deux cycloïdes. On peut donc dire que la longueur d'un arc de la cycloïde est égale au double de la longueur du fil, c'est-à-dire $8r$. Ce théorème qui, pour Huygens découle directement de la théorie du développement des courbes, a été démontré par le mathématicien anglais Christopher Wren en 1658 à l'occasion du concours de Pascal.

Pascal met au point une méthode originale, combinaison d'arithmétique et de géométrie, pour calculer le volume, la surface ou le centre de gravité des solides de révolution engendrés par une courbe. Pour la mettre à l'épreuve, il décide de l'appliquer à la cycloïde. Il institue donc un **concours public** sur cette courbe, défiant tous les géomètres d'Europe de résoudre les problèmes dont il a lui-même la solution.³

Le théorème de Wren fit beaucoup de bruit à l'époque. Les mathématiciens qui avaient découvert le calcul de l'aire des figures curvilignes ne savaient pas rectifier une courbe (c'est-à-dire, soit construire, à la règle et au compas, un segment de longueur égale à celle d'une courbe, soit, par calcul algébrique, calculer sa longueur).

Au début du XVIIe siècle, on pensait que la rectification était une chose infaisable. C'est ainsi que certains interprètent en tout cas ces mots de Descartes : « Il n'est pas donné à l'homme d'établir une relation entre la droite et la courbe. » Quelques années plus tard, Wren démontrait le contraire en découvrant comment rectifier une cycloïde.⁴

¹ https://fr.wikipedia.org/wiki/Courbe_tautochrone

² S. Gindikin, *Histoires de mathématiciens et de physiciens*, op. cit., pp.124-125.

³ La cycloïde ou roulette, <https://blaisepascal.bibliotheques-clermontmetropole.eu/>

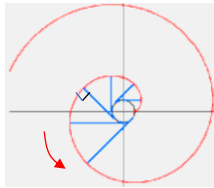
⁴ . Gindikin, *Histoires de mathématiciens et de physiciens*, p.133.

Annexe III

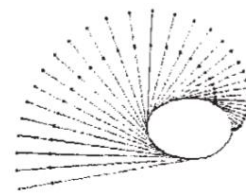
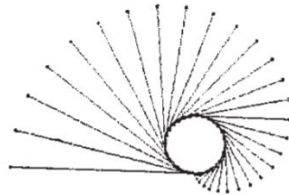
Développante et développée

1/ Notions de développante et de développée (ou enveloppe)

La **développante** par ex. du cercle est une courbe plane telle que ses normales sont les tangentes du cercle. Inversement, l'ensemble de ces normales donne naissance à une nouvelle « courbe, appelée **l'enveloppe**, qui est, en l'espèce, le cercle.¹



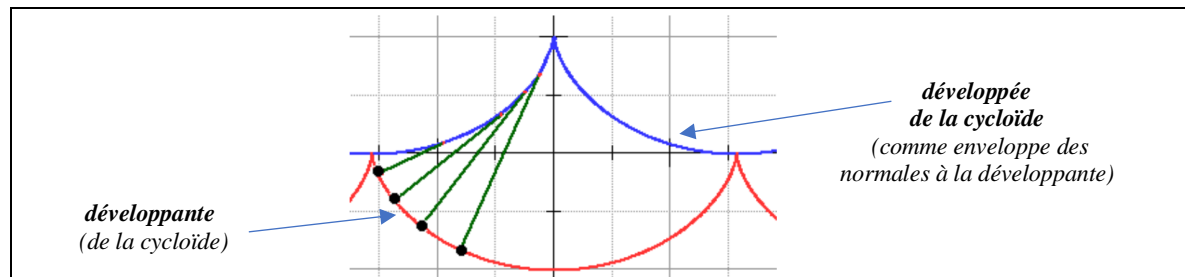
développante du cercle



développante d'une ellipse

On rappellera qu'une « bonne » courbe peut être reconstruite à partir de ses tangentes. En les multipliant, on se rapproche toujours mieux de la courbe. On dit que la courbe est **enveloppée par ses tangentes**, ou qu'elle est **l'enveloppée de ses tangentes**. Ainsi, en traçant les normales qui sont tangentes au cercle, on voit se former **la développée en tant qu'enveloppe**. La développée peut être un cercle, une ellipse, une cycloïde...

2/ Développante de la cycloïde :



Tout se passe comme si le point pesant du pendule décrivait la développante (en rouge) de la cycloïde (en bleu).²

4/ **Rem.** : La notion d'**enveloppe** est due à Christian Huygens. Dans l'espace, on définit similairement une surface comme l'enveloppe d'une famille de plans.

¹ <https://www.techno-science.net/definition/5371.html> ; <https://www.apmep.fr/IMG/pdf/AAA01060.pdf>

² http://serge.mehl.free.fr/anx/devppante_cyclo.html

Le recours aux fractions continues (dans l'automate planétaire de Huygens) ¹

1/ Rappel : des fractions continues via les nombres de Fibonacci :

Les nombres de Fibonacci vérifient $u_2 = u_1 + u_0$. Divisons les 2 membres de cette relation par u_1 :

$$\frac{u_2}{u_1} = 1 + \frac{u_0}{u_1} = 1 + \frac{1}{u_1/u_0}.$$

De même, on aura $u_3 = u_2 + u_1$ et, en divisant par u_2 , et en remplaçant u_2/u_1 par son expression, soit :

$$\frac{u_3}{u_2} = 1 + \frac{u_1}{u_2} = 1 + \frac{1}{u_2/u_1} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{u_1/u_0}}$$

Si nous continuons, nous obtiendrons :

$$\frac{u_4}{u_3} = 1 + \frac{1}{\frac{u_3}{u_2}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{u_1/u_0}}}, \quad \frac{u_5}{u_4} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{u_1/u_0}}}}$$

puis : →

et ainsi de suite. En continuant indéfiniment et en prenant $u_0 = u_1 = 1$, on voit que l'on obtient ainsi **des fractions qui s'étagent de plus en plus**. C'est cet étrange objet mathématique que l'on appelle une fraction continue (cf. infra à gauche). De façon plus générale, une fraction continue est une expression de la forme (cf. infra, à droite) :

$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}}}$$

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \frac{a_3}{b_3 + \dots}}}$$

où b_0, b_1, b_2, \dots et a_1, a_2, a_3, \dots sont des nombres

Pour gagner de la place, on convient d'écrire cette fraction continue :

$$b_0 + \left| \frac{a_1}{b_1} \right| + \left| \frac{a_2}{b_2} \right| + \left| \frac{a_3}{b_3} \right| + \dots$$

Quand on s'arrête avant la fin, i.e. quand on coupe la fraction continue, on obtient ce que l'on appelle **un convergent** :

$$C_k = b_0 + \left| \frac{a_1}{b_1} \right| + \left| \frac{a_2}{b_2} \right| + \dots + \left| \frac{a_k}{b_k} \right|.$$

En réduisant toutes ces fractions au même dénominateur $C_k = \frac{A_k}{B_k}$.

2/ Huygens : des fractions continues via son automate planétaire :

En un an, la Terre couvre un angle de $359^\circ 45' 40'' 30'''$ et Saturne $12^\circ 13' 34'' 18'''$. Le rapport entre ces angles est donc de $77708431/2640858$. Pour construire son automate planétaire, **Christiaan Huygens ne pouvait évidemment pas fabriquer des roues avec de tels nombres de dents** ... Il devait trouver une approximation de cette fraction avec des nombres plus petits. En recourant aux fractions continues, il obtint :

$$29 + \left| \frac{1}{2} \right| + \left| \frac{1}{2} \right| + \left| \frac{1}{1} \right| + \left| \frac{1}{5} \right| + \left| \frac{1}{1} \right| + \left| \frac{1}{4} \right| + \dots$$

dont le quatrième convergent est $206/7$.

Huygens obtient un rapport approché qui lui donnait le nombre de dents des roues; son erreur n'était que de $40''$ par siècle. La différence était si faible qu'il était impossible d'obtenir un meilleur accord avec des nombres plus petits.

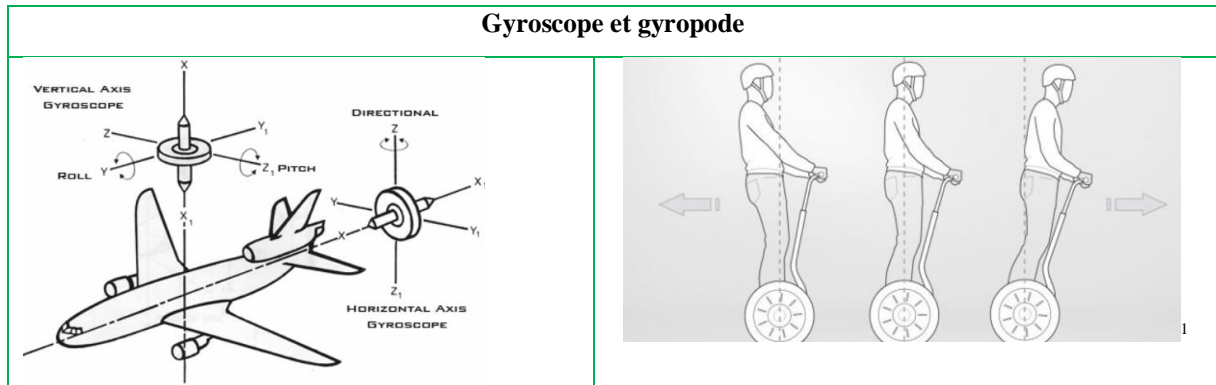
3/ Rem. : Sur le même genre d'approche pour modéliser la **théorie des épicycles** imaginée par Apollonius de Perge, au 3^e siècle avant notre ère, et développée par au 2^e siècle de notre ère par Ptolémée, voir le principe de la machine « le campylographe » du père Dechevrens à la fin du XIX^e siècle qui calcule les trajectoires des planètes vues dans le plan de l'écliptique avec la Terre comme origine.

Pour trouver la période du mouvement apparent, l'intéressé développe le quotient des périodes de Vénus et de la Terre en **fractions continues**.² Même si la théorie des épicycles a perdu son intérêt scientifique, le procédé vaut d'être connu.

¹ C. Brezinski, *Ces étranges fractions qui n'en finissent pas*, art. cit., passim.

² V. François Apéry, « Le campylographe », in *Quadrature*, 2006, n°100, pp.24-32.

Annexe VI



Annexe VII

Idée de groupe algébrique sur une fibre d'un espace fibré

1/ Rem. Préalable :
 Une fibre aligne différents points ou « repères » dont le changement constitue un élément d'un groupe. Un repère est donc « mobile », situé sur une *section* locale.

2/ Exemple : les entiers modulo 3

$3\mathbb{Z}$

6	•	7	•	8	•
3	•	4	•	5	•
0	•	1	•	2	•
-3	•	-2	•	-1	•
-6	•	-5	•	-4	•

\mathbb{Z}

↓ ↓ ↓

\cdot \cdot \cdot

$\overline{0}$ $\overline{1}$ $\overline{2}$

$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$

H G

$g \in H$

G/H

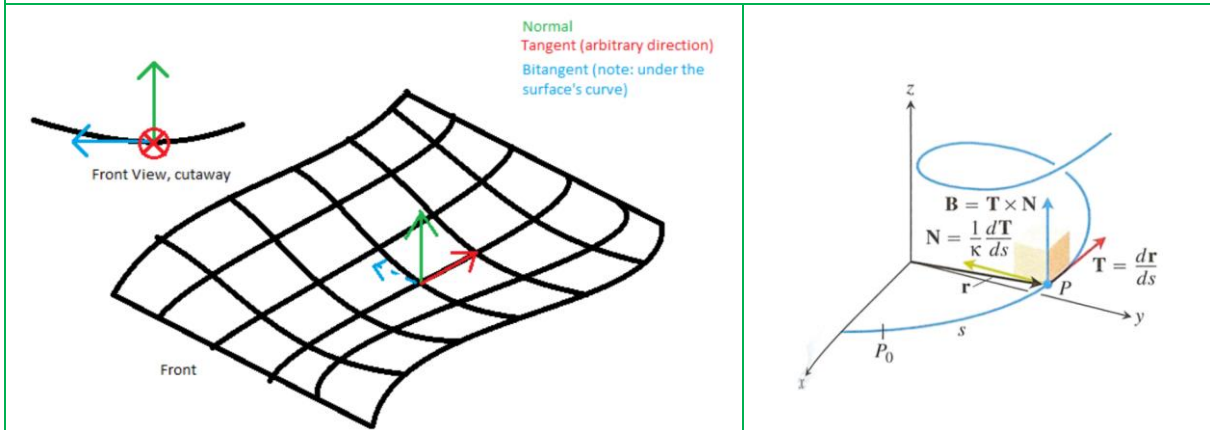
Fig. de droite : fibration principale d'un groupe au-dessus d'un espace homogène (ce n'est pas une variété quelconque). Le groupe g (**la fibre type**) est généralement désigné sous le nom de *groupe structural* du fibré considéré (groupe de changements de repères généralisés)

¹ <https://blog.mobilboard.com/fonctionnement-gyroscope-gyropode-segway/>; <https://blog.mobilboard.com/comment-fonctionne-un-gyropode/>

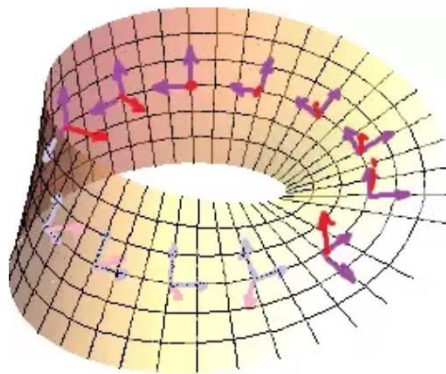
Annexe VIII

La notion de vecteur 'binormal' en matière de torsion ¹

Il s'agit généralement d'un vecteur bitangent qui est en réalité l'"autre" vecteur tangent de la surface. Le vecteur binormal est orthogonal au vecteur normal et au vecteur tangent choisi. En bleu, sur les deux figures :



Dans le cas d'une surface non orientable comme le ruban de Möbius :



¹ <https://cobalt.rocky.edu/~ulrich.hoensch/> ; <https://qstack.fr/gamedev/51399/> ; Ulrich Hoensch, *The Binormal Vector B and Torsion*, 26 Sept. 2012 ; <https://math.stackexchange.com/questions/3266689/do-all-non-orientable-have-to-close-in-some-direction>

Les transformations de Lorentz

1/ Observation préalable

Les transformations de Lorentz opèrent **en relativité restreinte où le temps n'est pas le même pour les différents observateurs**. Ces transformations agissent donc à la fois sur l'espace et le temps, mais *elles dépendent du rapport entre la vitesse du mobile et la vitesse de la lumière de telle sorte que, si ce rapport devient petit, elles redonnent la transformation de Galilée et le temps redevient le même pour tous les observateurs*.¹

2/ La relation avec la notion de « groupe »

a) Rappel du principe de relativité de Galilée

Si un observateur définit certaines lois de la mécanique, un autre, en mouvement uniforme par rapport à lui, trouvera les mêmes lois et un autre encore, en mouvement uniforme, par rapport au second, les mêmes lois que ce dernier, mais peut-on affirmer qu'il est aussi en mouvement uniforme par rapport au premier et qu'il observe les mêmes lois que lui ? Oui, car les vitesses des observateurs s'ajoutent ou se retranchent si elles ont parallèles et elles se composent comme des vecteurs, suivant la règle du parallélogramme si elles forment un angle non nul.

Autrement dit, les transformations entre observateurs en mouvement uniforme, ou transformations de Galilée, forment un groupe, le groupe de Galilée, qui définit l'équivalence entre observateurs.

Il va sans dire que les expressions transformations de Galilée et groupe de Galilée sont postérieures à l'époque de Galilée, même si ce dernier avait compris l'équivalence des faits de la mécanique pour les différents observateurs.

b) L'invariance relativiste

Les transformations de Lorentz, comme celles de Galilée, forment un groupe, le groupe de Lorentz, mais plus compliqué parce que les vitesses ne s'additionnent plus comme en mécanique classique. En particulier, on peut ajouter autant de vitesses qu'on le veut, la vitesse résultant restant inférieure à celle de la lumière. Si on ajoute à cette dernière une vitesse quelconque, on retrouve encore la vitesse de la lumière qui apparaît bien comme une vitesse limite.

Cette structure de groupe, établie par Poincaré, prit son sens quand Einstein substitua la transformation de Lorentz à celle de Galilée en électromagnétisme et en mécanique, faisant du groupe de Lorentz la nouvelle expression de l'équivalence entre observateurs galiléens [i.e. en mouvement uniforme les uns par rapport aux autres].²

Quand on applique une transformation de Lorentz, l'expression d'une loi ne change pas en passant d'un observateur galiléen à un autre. C'est ce qu'on appelle l'invariance relativiste, ou invariance de Lorentz, ou covariance relativiste.

Or, s'il est facile de vérifier qu'une loi donnée est covariante, il est difficile de la construire a priori. C'est là qu'intervient l'espace-temps, car on montre que les transformations de Lorentz sont des rotations de l'univers à quatre dimensions, et que les lois relativistes sont invariantes par le groupe des rotations de l'espace-temps, [mais] des rotations un peu particulières parce que l'espace-temps de Minkowski n'est pas proprement euclidien.

Dans l'espace-temps de Minkowski, l'espace et le temps figurent avec des signes opposés : le carré d'une longueur n'est pas une somme mais une différence de carrés. On peut pallier cette caractéristique par une astuce de calcul en définissant un temps « imaginaire » (au sens mathématique et non poétique) qui fait intervenir la racine de « -1 » et qui donne à l'espace de Minkowski l'apparence d'un espace euclidien à quatre dimensions. Une transformation de Lorentz correspond alors à une rotation d'angle imaginaire.

Ces rotations imaginaires diffèrent des rotations de l'espace ordinaire. *De même que si nous faisons tourner une droite tracée sur une table, celle-ci tourne tout entière, si nous voulons faire tourner le temps (avec des angles imaginaires), nous devons faire aussi tourner un axe d'espace. Ce n'est pas surprenant, puisqu'une transformation de Lorentz change à la fois l'espace et le temps.*

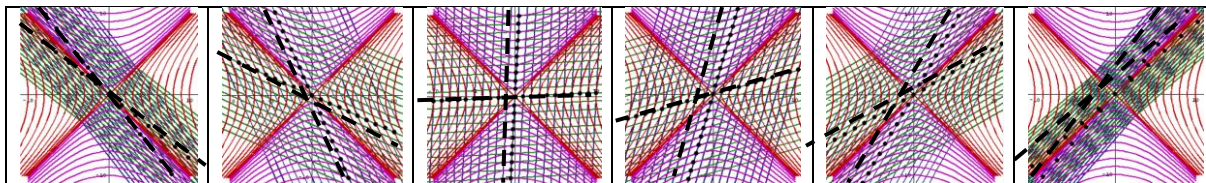
Les transformations de Lorentz permettent ainsi de conserver des grandeurs ou des objets géométriques lors d'une rotation de l'espace-temps. L'ensemble de ces rotations constituent le groupe de Lorentz qui comprend comme sous-groupe les rotations de l'espace ordinaire.

¹ G. Loschak, *La géométrisation de la physique*, op. cit., p.182.

² *Ibid.* Sur la notion de groupe dans l'esprit de Poincaré, et sa relation avec le principe de relativité restreinte, v. Alain Laraby, « Revivre l'apparis », in *Tangente*, n° hors-série n°1 sur Henri Poincaré, 2012, pp.103-111. Cet article a été partiellement repris dans la revue de l'Association des anciens élèves de l'École polytechnique, La Jaune et la Rouge, 2012, n°679 consacré à un dossier également sur H. Poincaré.

Les transformations de Lorentz (suite)

La rotation d'angle imaginaires de l'espace-temps (rotation du système d'axes en pointillé en noir avec un mouvement d'aller-retour). La suite d'images ci-dessous représente l'effet de cette « rotation hyperbolique » sur le plan (x,t). (*hyperbolique*, i.e. à l'aide des fonction sinus, cosinus et tangente hyperboliques entrant dans une écriture matricielle pour effectuer la rotation. ¹ Voir le point 3/c à la page suivante.



3/ Détermination de la transformation de Lorentz grâce à la structure de groupe

a) Rappel de la signification du principe de relativité restreinte d'Einstein :

Comme $t' = f(t,x)$, deux événements simultanés dans un référentiel peuvent ne pas l'être dans un autre. En particulier :

les transformations de Lorentz permettent de calculer une dilatation relative du temps et des contractions de longueurs, en vertu de la constance de vitesse de la lumière, $c = \text{longueur}/\text{vitesse}$, la dilatation du temps et la contraction des longueurs se compensent. (**La vitesse de la lumière dans le vide ne dépend pas ni de son orientation et du référentiel considéré**).

- plus je me déplace à une vitesse constante proche de celle de la lumière, **plus le temps s'écoule moins vite pour moi** relativement à un observateur se déplaçant à vitesse constante plus lentement qui serait par ex. sur Terre (en clair, *plus je cours vite, et moins je vieillis*, pour traduire, en termes familiers, *le paradoxe des jumeaux* de Paul Langevin, l'un restant sur terre, et l'autre voyageant dans l'univers à une vitesse comparable à celle de la lumière dans le vide).²

- **mais aussi plus mon corps se contracte** dans le sens du déplacement de mon système de coordonnées. Par rapport à un référentiel fixe comme la Terre, **ma longueur propre se contracte ($L = (1/\lambda) \cdot L'$) pendant que mon temps propre se dilate avec la vitesse ($\Delta t = \lambda \cdot \Delta t'$)**. Depuis la Terre, mon horloge avance plus lentement que celle qui est sur la Terre.

Ainsi, pour le voyageur que je suis et que je vis, les distances se contractent plus la vitesse est importante, et mon temps propre se dilate d'autant plus que ma vitesse est importante.

b) Le passage d'un référentiel à un autre

*Les distances se contractent uniquement le long de ou des axe(s) sur lesquels il y a un mouvement. C'est à dire que les proportions des tailles d'un objet ne sont plus respectées s'il se déplace le long d'un seul axe.*³ Voyons-le formellement :

Si on émet un rayon lumineux le long de l'axe des x d'un référentiel K', il se propage selon la relation : $x = ct$. Cette relation entre x et t, entraîne une autre relation entre x' et t' pour un référentiel K, soit $x' = ct'$.

$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ $y' = y$ $z' = z$ $t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$	<p>Mais comment assurer le passage de l'un à l'autre ?</p> <p>Via précisément les transformations de Lorentz ci-avant (←)</p> <p>En substituant dans la 1ère et 4ème équation des transformations de Lorentz x par ct nous avons : →</p>	$x' = \frac{(c - v)t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ $t' = \frac{t(1 - \frac{v}{c})}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ <p>on déduit que :</p> $c(t - \frac{vt}{c}) = ct - vt \implies \boxed{x' = ct'}$
---	--	--

C'est ainsi, que relativement à K', se propage un rayon de lumière avec vitesse constante c.

¹ Julien Harbulot, *La transformation de Lorentz ; courir plus vite pour vieillir moins ?* Notes et réflexions personnelles, 23 avril 2015, <https://julienharbulot.wordpress.com/2015/04/23/la-transformation-de-lorentz/>

² **En relativité restreinte**, les constations faites par des observateurs en mouvement pouvaient sembler contradictoires. Par ex., des règles identiques semblaient différentes à différents groupes d'observateurs en mouvement relatif. **Par une sorte de dialectique hégélienne, la relativité restreinte a levé ces contradictions en construisant une synthèse dans lequel chacun des faits, en apparence opposés, ne représente qu'un aspect de l'ensemble.** (P. Langevin, *La pensée et l'action*, op. cit., p.80. Nous soulignons).

³ J. Harbulot, *La transformation de Lorentz*, ibid.

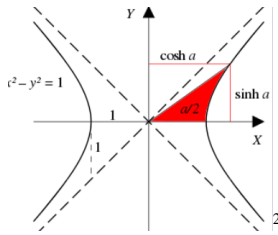
Les transformations de Lorentz (suite et fin)

c) La structure de groupe

La transformation entre deux référentiels galiléens (ou inertiels) revient à une rotation hyperbolique dans l'espace-temps de Minkowski . Sa présentation recourt à l'écriture matricielle. Ces transformations de Lorentz laissent invariantes les équations en jeu, ce qui signifie **que l'ensemble des transformations de coordonnées entre deux repères inertiels en translation uniforme forme un groupe**. Se reporter moins aux ouvrages spécialisés qu'à un article abordable pour s'en convaincre.¹

Sur les fonctions hyperboliques :

Le terme *hyperbolique* provient de la relation avec l'hyperbole d'équation $x^2 - y^2 = 1$.



Sur la notion de groupe :

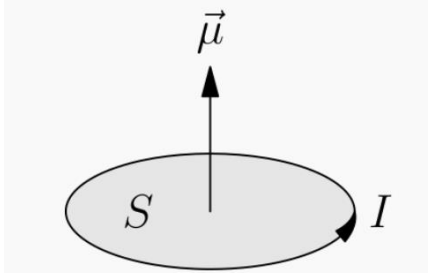
L'opération de groupe est la composition des transformations en effectuant une transformation après l'autre.

Un groupe est un couple dont le premier terme est un ensemble G et le second une opération (une loi de composition) sur cet ensemble « \cdot » qui, à deux éléments a et b de G , associe un autre élément $a \cdot b$. L'ensemble en question doit satisfaire les quatre axiomes que l'on connaît : à l'existence d'une loi de composition doivent être jointes les conditions d'associativité, de présence d'un élément neutre, et celle d'un symétrique pour tout élément.

¹ <http://maths-au-quotidien.fr/lycee/Lorentz.pdf>

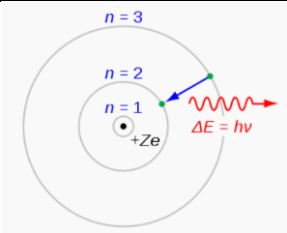
² https://fr.wikipedia.org/wiki/Fonction_hyperbolique

Annexe XI

Moment magnétique μ	
<p>En physique, le moment magnétique est une grandeur vectorielle qui permet de caractériser l'intensité d'une source magnétique. Cette source peut être un courant électrique, ou bien un objet aimanté. L'aimantation est la distribution spatiale du moment magnétique.</p> <p>Le moment magnétique d'un corps se manifeste par la tendance qu'a ce corps à s'aligner dans le sens d'un champ magnétique, c'est par ex. le cas de l'aiguille d'une boussole : le moment que subit l'objet est égal au produit vectoriel de son moment magnétique par le champ magnétique dans lequel il est placé. Par ailleurs, tout système possédant un moment magnétique produit également un champ magnétique autour de lui.¹</p>	 <p>Moment magnétique μ d'une boucle de courant d'intensité I et de surface S</p>

(L'Annexe bis est après pour éviter trop d'espace vide)

Annexe XIII

La constante de Planck	
<p>D'une petitesse extrême, la constante de Planck représente la plus petite quantité d'énergie existant dans le monde physique. La plus petite action mécanique concevable.</p> <p>La constante de Planck relie notamment l'énergie E d'un photon à sa fréquence, ν (lettre grecque nu), $E = h\nu$. La lumière, en tant que rayonnement électromagnétique, est aussi une forme d'énergie. Cette énergie est transportée par des « photons ». Chaque photon transporte un « quantum » d'énergie. La quantité d'énergie transportée par un photon de longueur d'onde λ est proportionnelle à cette longueur d'onde, comme l'indique $E = h\nu$.</p> <p>L'énergie d'un électron est ainsi quantifiée :</p>	
	
<p>Dans sa formulation initiale, la constante apparaît comme le rapport d'une énergie (en joules) par une fréquence f (en hertz). La constante de Planck possède donc les dimensions d'une énergie multipliée par le temps. Il est également possible d'écrire ces unités sous la forme d'une quantité de mouvement multipliée par une longueur.</p> <p>De son côté, la constante réduite apparaît comme le rapport d'une énergie (en joules) par une fréquence angulaire ω (en radians par seconde). Malgré l'identité des unités, ce n'est cependant pas physiquement un moment angulaire, qui a un caractère pseudo-vectoriel, et dont la multiplication par une vitesse de rotation donne une énergie cinétique de rotation. C'est la constante par laquelle l'énergie (un scalaire d'orientation) est divisée pour trouver la vitesse de rotation équivalente de la phase quantique.²</p>	

¹ https://fr.wikipedia.org/wiki/Moment_magn%C3%A9tique

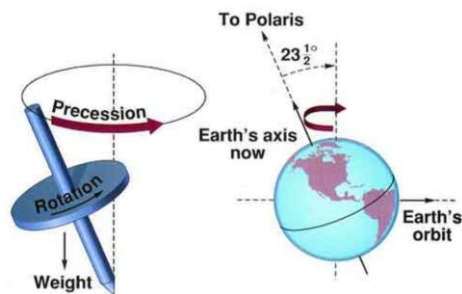
² <http://villemin.gerard.free.fr/Scienmod/Planck.htm> ; http://unf3s.cerimes.fr/media/paces/Nice_2014/co/chap1_u.html ; https://fr.wikipedia.org/wiki/Constante_de_Planck

Le mouvement de précession

1/ généralités

La précession est le nom donné au changement graduel d'orientation de l'axe de rotation d'un objet ou, de façon plus générale, d'un vecteur sous l'action de l'environnement, par exemple, quand un couple lui est appliqué. Ce phénomène est aisément observable avec une toupie, mais tous les objets en rotation peuvent subir la précession.

Lors de la précession, l'angle que fait l'axe de rotation ou le vecteur avec une direction donnée fixe est appelé angle de nutation et noté en général θ . C'est l'un des trois angles d'Euler. Le vecteur ou l'axe de rotation décrit ainsi au cours du temps un cône dont l'axe est la direction fixée. Ce cône est parcouru à une vitesse angulaire constante qui est déterminée par les données du problème. Le sens dans lequel se produit la précession dépend du problème considéré.



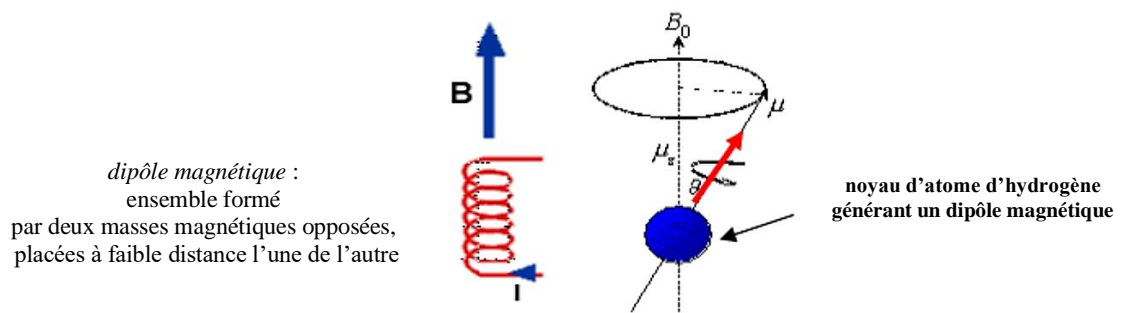
Polaris = étoile polaire. On notera en passant que la précession d'un gyroscope est semblable à celle de la toupie supra.

2/ Quelles ont les causes du phénomène de précession ?

Elles sont complexes.

La Terre n'est pas une sphère parfaite, elle est un peu aplatie, et donc le grand cercle de l'équateur est plus long que le grand cercle « méridional » qui passe par les pôles. De plus, la Lune et le Soleil se trouvent à l'extérieur du plan équatorial de la Terre. Il en résulte que l'attraction gravitationnelle de la Lune et du Soleil, agissant sur la Terre oblongue, cause un minuscule moment de torsion en plus d'une force linéaire. Cette force de torsion, agissant sur la Terre, cause le mouvement de précession.¹

3/ Mouvement de précession d'un spin d'une particule soumis à un champ magnétique externe B_0



¹ <https://astropassion-jc.pagesperso-orange.fr/precession.html>

(CHAPITRE II : La place de la science et la portée de sa contribution)**Section 2****Une contribution majeure en évolution****A/ L'épistémè des Lumières en mutation**

§66.- Les Lumières : un phénomène de « lumière » quasi-physique. - §67 Le rajeunissement de *l'épistémè des Lumières : le continuel apport des mathématiques et de la physique à l'étude du droit constitutionnel* - §67^{bis} (Suite de cet apport)

**§66.- Les Lumières :
Un phénomène néo-physique quasi-physique**

1/ Premier aperçu parallèle entre la philosophie des Lumières et la physique de la lumière

- i Les lumières de l'esprit*
- ii Le sentier lumineux d'une nouvelle méthode et des voyages*
- iii la folle ardeur dans l'erreur*

2/ L'électromagnétisme de Maxwell et son ignorance en dehors de la science

- i La réflexion d'un physicien américain sur l'étude de l'histoire*
- ii Un détour à la demande : l'idée d'intégrales de chemins en droit constitutionnel*
- iii Les quatre équations de Maxwell, 507*

3/ L'électromagnétisme de Maxwell et le droit constitutionnel moderne

- i Reprise de l'esquisse de réponse d'un juriste à Richard Feynman*
- ii Un détour à la demande : l'idée d'intégrales de chemins en droit constitutionnel*
- iii Les deux composantes indépendantes et indissociables des Lumières*
- iv Le dépassement du mouvement en couplage du droit des Lumières*

4/ Paradigme, analogie partielle et épistémè : ce qui les différencie et les relie

- i Paradigme en science et en droit*
- ii analogie partielle et épistémè*

Annexes I, II, III, VI, VII, IX, X, XI, 520

o

1/ Premier aperçu parallèle entre la philosophie des Lumières et la physique de la lumière

- i Les lumières de l'esprit. ii Le sentiers lumineux d'une nouvelle méthode et des voyages*
- iii La folle ardeur dans l'erreur*

2/ L'électromagnétisme de Maxwell et le droit constitutionnel moderne

- i La réflexion d'un physicien américain sur l'étude de l'histoire*

- ii Les quatre équations de Maxwell*

Vue générale, 508. Les quatre équations différentielles, 509
 - La 1^{ère} équation, 512 - La 2^e équation, 512 - La 3^e équation, 513. - La 4^e équation, 515
 - En résumé, et en revisitation à venir, 515

Vue générale

Ce sont ces équations qui ont permis aux physiciens de se rendre compte que les ondes lumineuses ne sont autres que des ondes électromagnétiques, et que leur vitesse est exactement identique à celles de toutes les autres ondes (3×10^8 m/s, un 10 multiplié 8 fois par lui-même). Seule leur fréquence de variation les distingue les unes des autres.

(§18
d)

Les quatre équations de Maxwell définissent à tout instant, et en tout point de l'espace, la valeur des champs électrique et magnétique à la base de l'électromagnétisme. Ce sont, autrement dit, des équations différentielles qui décrivent l'évolution spatio-temporelle de toute onde électromagnétique. Il arrive qu'elles suffisent pour appréhender l'intégralité de l'électromagnétisme.

It was a discovery that would lead far beyond the earth into the deepest reaches of space where a wave and the intensity of the electric field implies the existence of a changing magnetic flux. Les champs électrique et magnétique, qui composent une onde électromagnétique, create each other [when] both fields propagate throughout the universe.¹ L'un est à la base de l'autre, et c'est parce qu'ils sont indissociables qu'il est apparu naturel de les unifier dans un champ électromagnétique.

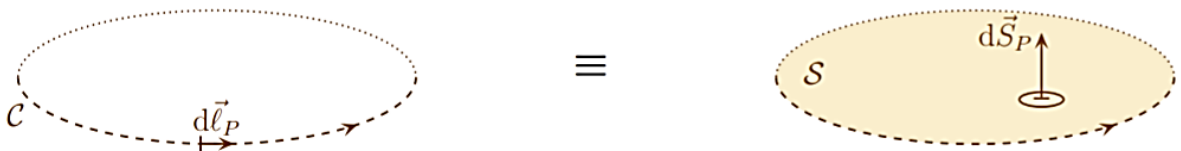
La notion de champ fut introduite par Faraday, comme lignes de champ ou de force plus ou moins proches les unes des autres (plus elles sont proches, plus le champ est intense). Cette notion ne saurait, à elle seule, saisir un tel phénomène. Il n'existe qu'une manière précise de présenter les lois, dans ce domaine comme dans tant d'autres, c'est en utilisant des équations différentielles. On revient au XVIII^e siècle, mais, là aussi, un tel outil peine lui-même à comprendre réellement les équations :

Les mathématiciens, ou les gens qui ont une tendance d'esprit très mathématique, s'égarent souvent quand ils « étudient » la physique parce qu'ils perdent de vue la physique. Ils disent : « Vous voyez, ces équations différentielles – les équations de Maxwell – c'est tout l'électrodynamique ; les physiciens reconnaissent qu'il n'y a rien qui ne soit contenu dans ces équations. Ces équations sont compliquées, mais après tout, ce ne sont que des équations mathématiques, et si je les comprends mathématiquement dans tous les coins, je comprendrais la physique dans tous les coins.

Seulement, ça ne marche pas comme cela. Les mathématiciens qui étudient la physique avec une telle conception – et il y en eu beaucoup – n'apportent généralement qu'une faible contribution à la physique et, en fait, peu de chose aux mathématiques. Ils échouent parce que les situations physiques réelles dans le monde réel sont si complexes qu'il est nécessaire d'avoir une compréhension beaucoup plus large des équations.²

(§62^{bis}
3/b)-i)

Du point de vue historique, les équations de Maxwell synthétisent sous forme différentielle, i.e. locale, différentes théories dues à Gauss, Ampère et Faraday. Maxwell les traduira, par la suite, sous forme d'équations intégrales en utilisant le théorème de Stokes (permettant de transformer une somme sur un contour en une somme sur une surface) ainsi que le théorème d'Ostrogradski, reliant une somme sur une surface à une somme sur un volume.³ Les formes différentielle et intégrale sont complémentaires.



Nous présenterons les quatre équations de Maxwell dans leur forme traditionnelle d'équations aux dérivées partielles du premier ordre. Leur version intégrale est présentée dans le volet 2 du §66. Il est naturellement possible de revenir à la forme différentielle à partir de la forme intégrale. L'on sait, grâce au théorème fondamental de l'analyse, que l'on peut transformer l'une en l'autre et vice-versa.

¹ D. L. Goodstein, *Maxwell's equations. The mechanical universe*, video cit.

² Feynman/Leighton/Sands, *Le cours de physique de Feynman, Electromagnétisme 1*, op. cit., pp.17-18.

³ Matthieu Rigaut, *Les équations de Maxwell*, 28 déc. 2013, http://www.matthieurigaut.net/public/vieux_spe/elmg/cours_elmg01_prof.pdf

Les 4 équations différentielles

$\left\{ \begin{array}{l} \text{div}(\vec{D}) = \rho \\ \text{div}(\vec{B}) = 0 \\ \text{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \text{rot}(\vec{H}) = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{array} \right.$	\vec{D} induction électrique
	\vec{B} induction magnétique
	\vec{E} excitation électrique
	\vec{H} excitation magnétique
	ρ densité de charge
	\vec{j} densité de courant

Tous les termes, surmontés d'une flèche, sont des vecteurs sur lesquels agissent des opérateurs spatiaux (divergence et rotationnel et temporel (une dérivée d'ordre 1, affectant autant le champ électrique (**D**) que magnétique (**B**)).¹ (Le caractère gras indique, au lieu des flèches, une grandeur vectorielle.)

Rappel et complément sur les opérateurs spatiaux divergence (div) et rotationnel (rot) :

Rappel 1. L'opérateur divergence est un opérateur scalaire ; il opère sur un vecteur, **A** par ex., pour le transformer en un nombre. On calcule, à cette fin, les dérivées des différentes composantes et on les somme par rapport aux composantes spatiales :

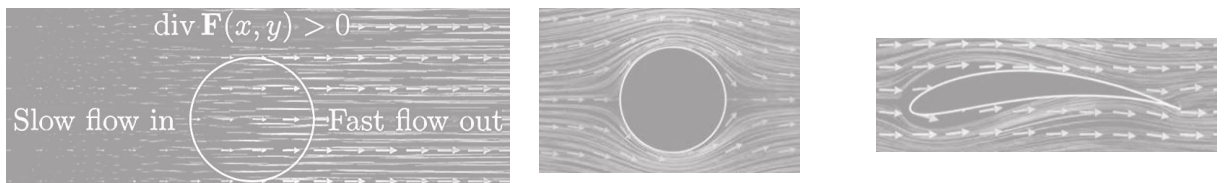
(§47 2/-1)

$$\text{div}(\vec{A}) = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

Divergence nulle ; divergence négative (vers un puits) ; divergence positive (à partir d'une source)

L'opérateur *divergence*, div, mesure, en un point particulier de l'espace (x,y,z), combien un fluide, comme de l'eau par ex., ou un fluide électrique, sort ou entre de la région environnant ce point. Le fluide ne peut, aussi, ni en sortir, ni n'y entrer. On mesure ainsi comment ce point génère le fluide en question. L'opérateur divergence peut s'appliquer pareillement à la force gravitationnelle.

L'opérateur div peut être plus ou moins > 0. Dans le plan, si on considère le vecteur fluide comme une fonction à deux variables (*vector field function*), $\text{div } \mathbf{F}(x,y) = +1,62$ ou $+2,26$ par ex.. Cette valeur dépend de l'emplacement dans le plan de la source d'où il surgit, ainsi que du comportement du fluide autour de cet emplacement. La source est repérée dans le système de coordonnées (x,y), et le comportement di fluide est signalé par les dérivées. Cependant, il n'est pas toujours nécessaire que le fluide s'éloigne de la source ; il suffit qu'il entre lentement autour et qu'il en sorte rapidement pour que $\text{div } \mathbf{F}(x,y)$ soit aussi > 0, ce signe suggérant qu'il existe encore une certaine génération de fluide sortant d'une source.

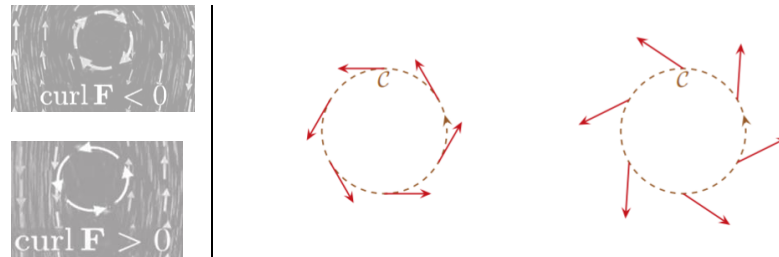


L'opérateur *divergence* produit un nombre qui peut être aussi plus ou moins < 0 comme $\text{div. } \mathbf{F}(x,y) = -0,44$. Le fluide disparaît dans une sorte de puits. $\text{Div } \mathbf{F}(x,y) = 0$ également, si un fluide, comme l'eau,

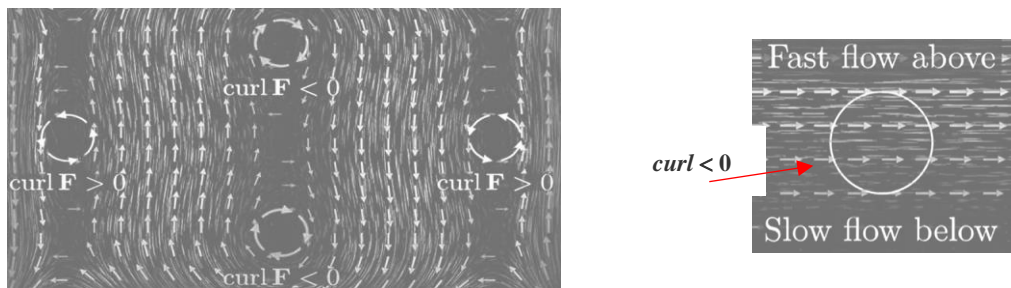
¹ Ibid. ; C. Finot, Les bases de l'électromagnétisme : les équations de Maxwell, cit. sur YouTube; M. Rigaut, Les équations de Maxwell, id.

est incompressible ; dans ce cas, le *velocity vector fluid* a une divergence nulle en tout point (voir supra les deux *fig. de droite*).¹

Rappel 2. Comme la divergence, l'opérateur rotationnel (*curl*), en un point donné, traduit la structure locale d'un champ de vecteurs, en l'espèce la rotation d'un fluide autour de ce point. Cet opérateur permet de savoir combien le fluide doit tourner, dans le sens des aiguilles d'une montre (*curl* > 0), ou dans le sens contraire (*curl* < 0). Ici encore, la valeur produit par le rotationnel est un nombre, qui peut être ± positif ou négatif (voir les deux *fig. à droite* où la circulation est positive un peu différemment).



On notera, à nouveau, que le *curl*, ou rotationnel, continuera de produire une valeur > 0 ou < 0 sans nécessairement aller dans le sens des aiguilles d'une montre ou dans le sens contraire. Le *curl* ≠ 0 si le fluide est rapide au sommet de la région circulaire infra par ex. et slow au bas. Il y aura un *net clockwise influence* dans ce cas. L'inverse produira un *net anticlockwise influence*. On notera enfin que le rotationnel est en fait une idée proprement 3-dimensionnelle. La région ressemble à une sphère.²



Le rotationnel fait ressortir un vecteur qui est aussi le résultat de différentes opérations de dérivation sur les composantes du vecteur **A** par ex. Derrière le rotationnel, 3 équations se cachent en coordonnées également cartésiennes :

(§47 2/-i)	$\overline{rot(A)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \end{pmatrix}$	L'opérateur rotationnel est un opérateur différentiel aux dérivées partielles, qui, à un champ vectoriel tridimensionnel, A , fait correspondre un autre champ vectoriel tridimensionnel, noté $\nabla \times \mathbf{A}$, sachant que ∇ , appelé « nabla » n'est ni un vecteur ni un opérateur vectoriel, mais un opérateur différentiel qui permet notamment de définir le vecteur gradient d'une fonction (qui indique là où une fonction croît le plus)	$\begin{matrix} \text{Gradient} \\ \overrightarrow{\text{grad } f} \\ \text{ou } \overrightarrow{\nabla f} \end{matrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}$
---------------	---	--	--

Telles sont les quantités électromagnétiques qui sont impliquées dans les 4 équations de Maxwell. Il reste à préciser le sens et le contenu du produit vectoriel $\nabla \times \mathbf{A}$, qu'il ne faut pas confondre avec le produit scalaire qui est une autre manière de multiplier des vecteurs.

Rappel et complément sur les notions de produit scalaire et de produit vectoriel

¹ 3Blue1Brown, *Divergence and curl : The language of Maxwell's equations, fluid flow, and more*, 21 juin 2018, sur YouTube.

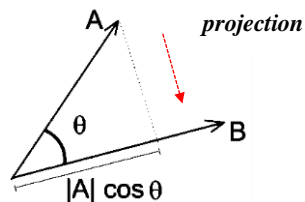
² *Ibid.* ; C. Finot, Les bases de l'électromagnétisme, : les équations de Maxwell

Rappel et complément 3. L'opérateur divergence s'écrit sous forme d'un **produit scalaire** (*scalar product* ou *dot product*) : $\text{div } \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F}$ avec \mathbf{F} comme fonction d'un champ vectoriel (*vector field function*), alors que l'opérateur rotationnel (*curl*) s'écrit sous la forme d'un **produit vectoriel** (*cross product*) : $\text{curl } \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F}$. L'opérateur **nabla** « opère » dans les deux produits. En deux dimensions, ces deux produits ont pour expression :

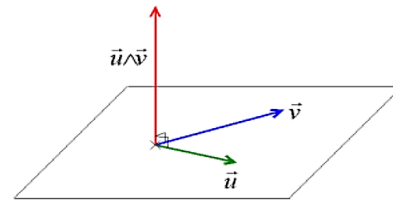
$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \end{bmatrix} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} \quad \text{div } \mathbf{F}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \end{bmatrix} = \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \quad \text{curl } \mathbf{F}$$

Malgré leurs différences, ces deux produits entretiennent une relation, étant l'un et l'autre une multiplication de vecteurs. Le produit scalaire mesure de combien les vecteurs sont plus ou moins alignés, étant rappelé que le produit scalaire entreprend la projection d'un vecteur sur un autre en tenant compte de l'angle entre eux. Une telle projection peut être vue comme l'ombre portée par un vecteur sur l'autre. Le produit vectoriel donne une indication de la perpendicularité entre vecteurs.



Le **produit scalaire** de deux vecteurs non nuls et représentés par des bipoints OA et OB est le nombre défini par $OA \cdot OB \cdot \cos(\theta)$.



Le **produit vectoriel** (rouge) est perpendiculaire aux vecteurs vert et bleu. En France, le produit vectoriel de u et de v est noté $u \wedge v$

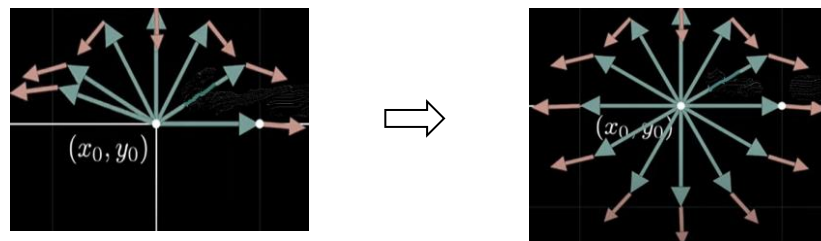
Rappel et complément 4. Le **produit vectoriel** de deux vecteurs u et v non colinéaires se définit comme l'unique vecteur w tel que :

- . le vecteur w est **orthogonal** aux deux vecteurs donnés ;
- . $\|w\| = \|u\| \|v\| \sin(\text{angle}(u,v))$,

étant rappelé en particulier que :

- . deux vecteurs sont colinéaires si (et seulement si) leur produit vectoriel est nul ;
- . deux vecteurs sont orthogonaux si et seulement si la norme de leur produit vectoriel est égale au produit de leurs normes.¹

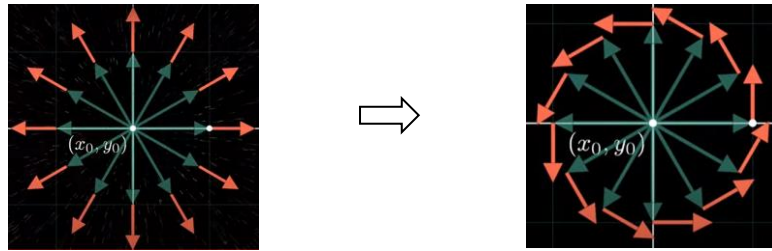
Le **produit scalaire** (*dot product*) tend à être > 0 si la divergence est positive, et réciproquement. La divergence est **une sorte de valeur moyenne du produit scalaire** entre le vecteur qui tend à surgir de la source et le vecteur qui tourne dans toutes les orientations possibles.



Le **produit vectoriel** (*cross product*) tend à être > 0 si le rotationnel est positif, et réciproquement. Le rotationnel est **une sorte de valeur moyenne du produit vectoriel** entre le vecteur qui tend à surgir de la source et le vecteur qui tourne en étant orthogonal au premier.²

¹Blue1Brown, *Divergence and curl : The language of Maxwell's equations*, video cit. ; https://fr.wikipedia.org/wiki/Produit_scalaire ; https://fr.wikipedia.org/wiki/Produit_vectoriel ;

²Blue1Brown, *Divergence and curl : The language of Maxwell's equations*, video cit.



On peut maintenant faire parler les équations en ayant une notion un peu intuitive des opérateurs divergence et rotationnel qui ne sont pas que des outils mathématiques, mais comportent une signification concrète sans laquelle la compréhension des équations de Maxwell reste problématique.

La 1^{re} équation de Maxwell

$\text{div } \mathbf{E} = \rho/\epsilon$ (loi de l'électrostatique, qui renvoie à l'ensemble des lois connues à l'époque de Maxwell). \mathbf{E} désigne un champ électrique. Ce champ est généré en tout point de l'espace par une charge électrique, positive ou négative. \mathbf{E} représente l'induction électrique \mathbf{D} dont il a été fait état plus haut.

Cette charge constitue une source (ou un puits) du champ électrique.

(§62^{bis}
3/b)-i)

Autre écriture, avec l'opérateur nabla et le produit scalaire : $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon$. Un champ électrique \mathbf{E} peut être créé par un électron par ex., de densité de charge ρ . $\text{div}(\mathbf{E}) = \rho(\mathbf{x})/\epsilon_0$, ou $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon$ est la forme locale de **la loi de Gauss** attestant un champ électrique \mathbf{E} en un point \mathbf{x} précis donné (avec $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$).

$\text{div}(\mathbf{E})$ est proportionnel à la distribution (ρ) des charges.

Le champ électrique est orienté des charges positives vers les charges négatives. L'intensité de ce champ décroît par l'inverse de la distance au carré de la charge ($1/r^2$). Plus on s'éloigne par ex. d'une ligne à haute tension, moins on ressent physiquement l'effet du champ électrique. Le lecteur reconnaîtra derrière la loi expérimentale de Coulomb, $\mathbf{E} = k_c q/r^2$, avec q la charge électrique intérieure et k_c la constante de Coulomb, devenu $E = 1/(4\pi\epsilon_0) Q/r^2$ en appelant ϵ_0 la permittivité du vide (\approx son élasticité).

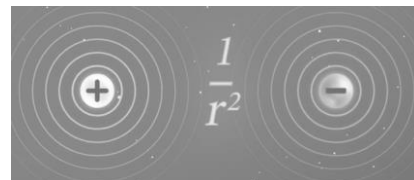
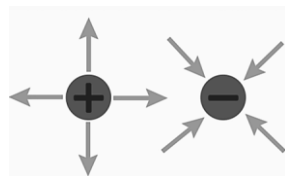
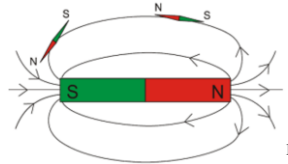


fig. de gauche : La 1^{re} équation signifie que le champ électrique (\mathbf{E}) est **divergent** (lorsque la charge est positive, +) ou **convergent** (lorsque la charge est négative, -) à partir de la source, qu'est la charge en question. Les flèches de l'une ou l'autre charge n'indiquent aucune rotation ; le rotationnel du champ électrique est ici nul.

2^e équation de Maxwell

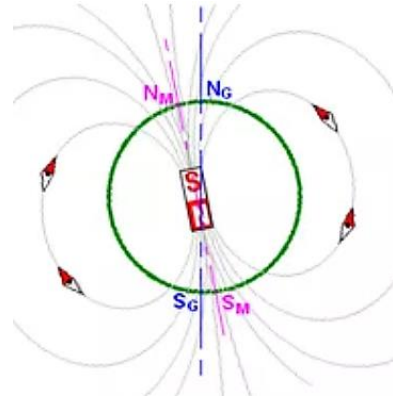
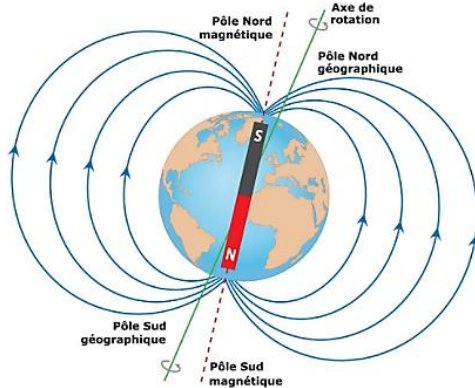
$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$. Il n'existe aucune charge magnétique analogue à une charge électrique. Autrement dit, la source du champ magnétique n'est nullement une charge. Le champ magnétique regroupe une charge positive et une charge négative reliées entre elles et inséparables.

Un tel champ est effectivement engendré par une configuration en « dipôle », formé d'un pôle négatif et d'un pôle positif comme dans un aimant : un pôle Nord et un pôle Sud., car il n'existe aucun objet magnétique composé d'un seul pôle, un monopôle doté soit d'un pôle Sud, soit d'un pôle Nord. Les lignes du champ magnétique partent du pôle Nord et se referment obligatoirement au pôle Sud.



La divergence du champ magnétique est nulle. En effet, les lignes de champ magnétique ne divergent pas ; elles sortent d'un pôle (positif ou négatif) pour aller dans l'autre. Tous les aimants possèdent deux pôles.

Il en est ainsi de la Terre qui peut être vue comme un gigantesque dipôle magnétique, un aimant droit, qui permet aux boussoles de s'aligner sur la ligne du champ magnétique terrestre. L'aiguille de la boussole indique le pôle nord magnétique, proche du pôle nord géographique.²



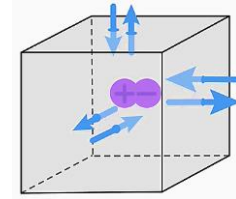
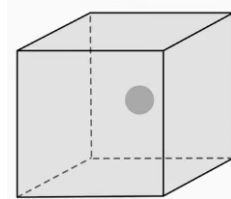
Le pôle Nord magnétique terrestre est en réalité un pôle de magnétisme "sud" qui attire le pôle "nord" (le Nord magnétique, N_M , sur la figure de droite) de l'aimant que constitue l'aiguille de la boussole. N_G est le nord géographique.

Le champ magnétique terrestre oriente la boussole. C'est le premier instrument par lequel on a pu mesurer le champ magnétique. Elle est restée pendant très longtemps le seul instrument, avec des variantes élaborées, qui permet de le détecter.

(§62^{ter}
3/c)ii)

Le lecteur se rappellera l'expérience fondamentale qui consiste à tenter de couper un aimant en deux. L'opération donne naissance à *deux aimants*, et non un pôle Nord et un pôle Sud séparés.

Dernière précision : si la divergence est 0, chaque point de l'espace (x,y,z) est, soit sans charge électrique, soit dans une situation où il y a tant de charges électriques, positive, et négative, que toutes ces charges s'annulent. Il y a conservation de la composante normale.³



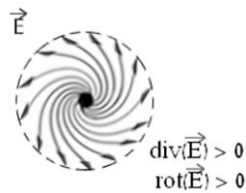
3^e équation de Maxwell

rot $\mathbf{E} = - \partial \mathbf{B} / \partial t$. Cette équation rend compte de l'induction magnétique. Elle signifie qu'un champ magnétique \mathbf{B} va influencer le champ électrique \mathbf{E} , mais ce n'est pas le champ magnétique lui-même, mais sa variation, indiquée par les dérivées, $(\partial \mathbf{B} / \partial t)_n$ qui induit le champ électrique.

¹ <https://jeretiens.net/les-4-equations-de-maxwell/>

² 3Blue1Brown, *Divergence and curl: The language of Maxwell's equations*, video cit. ; <https://www.techno-science.net/definition/8687.html> ; Ecole normale supérieure, *Qu'est-ce que le champ magnétique terrestre ?* 7 févr. 2017, sur YouTube.

³ Universaldenker, *The 4 Maxwell's equations ; Important basics you need to know !* 5 oct.2019, sur YouTube ; C. Finot, *Les bases de l'électromagnétisme*, : les équations de Maxwell



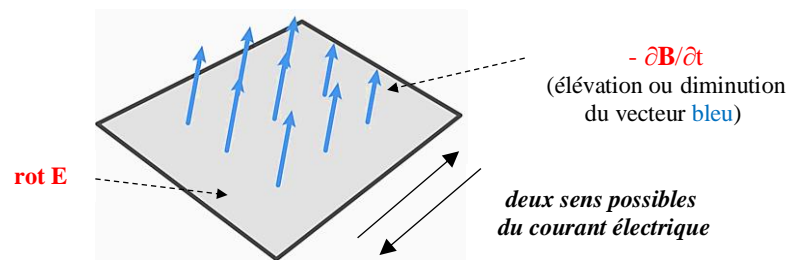
Les flèches font l'objet d'une rotation Le rotationnel du champ électrique n'est pas ici nul. ¹

La fig. ci-contre montre un sens inverse de celui des aiguilles d'une montre (*anticlockwise rotation*). Voir la légende du schéma infra

Par ex., en bougeant un aimant au cours du temps à travers une boucle (*loop*), un circuit fermé, ou un solénoïde formé de plusieurs boucles, le champ magnétique de l'aimant provoque un courant électrique dans la boucle ou le fil du solénoïde. Autre ex. : une dynamo immobile sur un vélo n'alimente pas les lumières ; en revanche, lorsque l'on roule, les lampes s'allument, car il y a une variation du champ magnétique. ²

La variation consécutive du courant électrique n'est autre que l'excitation électrique ou le flux électrique.

Le rotationnel indique une circulation ou un écoulement électrique dans un cercle ou un circuit fermé à travers lequel un champ magnétique varie (un aimant qui bouge, comme indiqué supra, de haut en bas). Si le flux magnétique ne varie pas, le membre droit de l'équation $\text{rot } \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t$ sera éliminé, donnant $\text{rot } \mathbf{E} = 0$. Il n'y aura pas de champ électrique rotationnel le long du circuit fermé



La dérivée temporelle du flux magnétique $\partial \mathbf{B} / \partial t$ mesure la variation du champ magnétique (sur la fig. supra, les vecteurs bleus augmentent ou diminuent en longueur au cours du temps). Plus le flux magnétique est important (croît en variation, i.e. en variation positive), plus est important le champ électrique rotationnel, $\text{rot } \mathbf{E}$, le long du circuit fermé, et vice versa.

Le signe négatif devant la dérivée temporelle $-\partial \mathbf{B} / \partial t$ indique le sens de la rotation. Si la variation du flux magnétique est positive (les vecteurs bleu croissent en hauteur), le voltage électrique, ou force électromotrice due à une différence de potentiel, $U_e = -\partial \mathbf{B} / \partial t$, est négatif (le courant tourne dans le sens des aiguilles d'une montre) ; si la variation temporelle du flux magnétique est négative (les vecteurs bleu se rapetissent en longueur), le voltage électrique ($U_e = -\partial \mathbf{B} / \partial t$) est positif (le courant tourne dans le sens contraire des aiguilles d'une montre, ou, formellement, dans le sens trigonométrique).

Le voltage électrique et la variation du flux magnétique se comportent d'une façon opposée à l'autre. *The minor sign ensures energy conservation.* Un champ rotationnel électrique produit un changement du champ magnétique, et réciproquement. *The magnetic flux generated by the rotating electric field counteracts its cause. If is not the case, the rotating electric field would amplify itself and generates energy out of nowhere* (les électrons quittent le circuit fermé). ³

L'induction électromagnétique est à la base de tous les générateurs (moteurs, alternateurs et autres transformateurs électriques couramment utilisés aujourd'hui). Un aimant en rotation crée un champ magnétique en mouvement, qui génère un champ électrique dans un fil conducteur à proximité.

On peut donner d'autres exemples familiers. L'induction électromagnétique, i.e. donc la création d'un champ électrique par variation d'un champ magnétique, intervient prosaïquement quand on fait chauffer une casserole sur une plaque à induction, ou que l'on charge, sans fil, une batterie de portable. ⁴

¹ <https://jeretiens.net/les-4-equations-de-maxwell/>

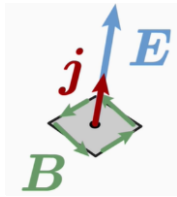
² *Ibid.*

³ Universaldenker, *The 4 Maxwell's equations ; Important basics you need to know !*

⁴ CEA Recherche, *Les équations de Maxwell* ; https://fr.wikipedia.org/wiki/équations_de_Maxwell

4^e équation de Maxwell

$\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{J} + \epsilon_0 \partial \mathbf{E} / \partial t)$, ou écrit avec l'opérateur nabla et le produit vectoriel : $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{J} + \epsilon_0 \partial \mathbf{E} / \partial t)$. Comme dans la 3^e équation, il est toujours question de circulation. Ce qui est créé ou induit est un champ magnétique le long d'un circuit fermé



avec μ_0 une constante du champ électrique et ϵ_0 une constante du champ magnétique *around the wire*,

et j la densité de courant, \mathbf{E} définie par le rapport $\mathbf{j} = \mathbf{I}/A$ (intensité sur la surface traversée A). \mathbf{J} indique seulement la part du courant \mathbf{E} à travers une telle surface. (Une intensité est toujours une puissance/aire : *intensity* : *power/area*. et une puissance, une énergie/temps : *power* : *energy/time*.)

Dans l'équation apparaissent deux contributions : celle du courant électrique, \mathbf{J} (comme l'avait déjà énoncé Ampère), dit courant de conduction, et celle de la variation du champ électrique, $\partial \mathbf{E} / \partial t$ (Maxwell ajoute ce **courant dit de déplacement** à la loi d'Ampère que Maxwell ainsi généralise). *The rotating magnetic field generates electric current through the surface A and the change in electric field.*

La variation du champ électrique peut être obtenu par une variation du courant (son amplitude entre sa valeur maximale et sa valeur minimale peut varier au cours du temps), mais le courant de déplacement, né de la variation du champ électrique, peut exister même en l'absence de courant de conduction (le courant de déplacement n'est pas constitué de charges électriques). Il en est pour preuve sa présence dans un condensateur dont l'isolation des plaques ne permet pas aux charges électriques de traverser.¹

Le courant de déplacement est négligeable par rapport au courant de conduction (surtout si ce dernier courant de charges est lentement variable), mais le rôle du courant de déplacement apparaît primordial dans la propagation des ondes électromagnétiques dans le vide. Le savant Hertz en confirmera expérimentalement l'existence en 1887 en mettant en évidence les ondes « hertziennes » (i.e. radio).

La 4^e équation de Maxwell $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{J} + \epsilon_0 \partial \mathbf{E} / \partial t)$ met donc à jour la création d'un champ magnétique qui n'a même pas besoin d'un courant. Il suffit d'une variation du champ électrique dans la région. Ainsi, si un champ magnétique variable peut être à l'origine d'un champ électrique, un champ électrique variable induit aussi un champ magnétique.



L'intervention d'un certain « courant de déplacement », existant même dans le vide, abolit la différence entre les circuits ouverts et les circuits fermés. [Dans le vide, le vecteur « densité de courant électrique \mathbf{J} et la densité de charge électrique, ρ , sont nuls.]

³

La 4^e équation locale de Maxwell permet de joindre les deux domaines de l'électricité et du magnétisme.⁴

En résumé, et en revisitation à venir

Telles sont les quatre équations de Maxwell au fondement de l'électromagnétisme. *Elles ouvrent la porte à des bouleversements profonds que la physique connaîtra au début du XX^e siècle.* Le lecteur, curieux, pourra découvrir en *Annexe II* leur forme intégrale.

¹ <https://delhipages.live/fr/divers/displacement-current> ; http://res-nlp.univ-lemans.fr/NLP_C_M07_G02/co/Module_M07G02_8.html

² David SantoPietro, *Electromagnetic waves and electromagnetic spectrum*, <https://www.khanacademy.org/science/physics/>

³ Louis de Broglie, *Matière et lumière*, op. cit., p.166 et 112.

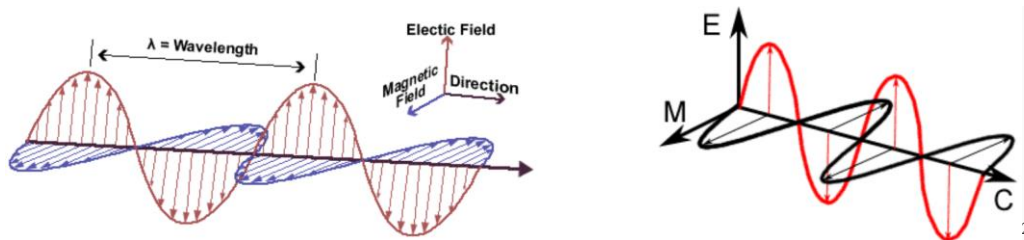
⁴ Universaldenker, *The 4 Maxwell's equations ; Important basics you need to know !*; CEA Recherche, *Les équations de Maxwell*

Grâce à ces quatre équations, les physiciens vont rapidement se rendre compte que les ondes lumineuses ne sont autres que des ondes électromagnétiques et que leur vitesse (la vitesse de la lumière) est exactement identique à celles de toutes les autres. **Seule leur fréquence de vibration les distingue les unes des autres.**¹

Un changement du champ électrique qui induit un changement du champ magnétique, lequel, à son tour, produit un changement du champ électrique, crée *a sort of chain reaction that propagates outward like a wave* qui possède *an Independent existence whatever parent current or parent charge created them*. Grâce au fait que la variation d'un champ magnétique crée un champ électrique, et que la variation d'un champ électrique crée un champ magnétique, les équations de Maxwell permettent la propagation d'ondes électromagnétiques autoentretenues, ce qui traduit l'expression anglaise de *chain reaction* qu'on désigne exactement par **rayonnement électromagnétique**.

Il y a toutefois une différence avec les ondes ordinaires. L'onde électromagnétique n'a nullement besoin d'un médium (des particules ou tout autre substance). La seule chose qui ondule ou oscille est la valeur des champs électrique et magnétique. S'il fallait figurer une telle onde, avec une image qui devrait être en mouvement, elle se présenterait comme nous l'avons déjà représentée :

(§40-i)



Le champ magnétique oscille en avant et en arrière et le champ électrique de haut en bas. Conformément au produit vectoriel, les deux champs sont perpendiculaires entre eux, et ils sont eux-mêmes perpendiculaires à l'onde qui se propage à la vitesse de la lumière, c , même si l'onde électromagnétique ne représente pas proprement le cas particulier de la lumière.

Il faut voir les flèches d'une façon cinématique : elles montent progressivement et descendent non moins progressivement. La longueur d'onde (*wavelength*, λ) est la distance parcourue par l'onde pendant une période T , entre deux crêtes successives de même couleur. La période est le **temps d'aller-retour**. Elle est l'inverse de la fréquence d'oscillation ($f = 1/T$ et $\lambda = v/f$)

- Comment Maxwell a-t-il pu déterminer la vitesse de l'onde électromagnétique à partir de ses quatre équations ?

- Subodorant que les champs électriques et magnétiques ne sont pas indépendants l'un de l'autre, Maxwell eut l'idée de mettre en rapport les constantes dans les expressions des forces respectivement électriques et magnétiques.

Ce sont les constantes ϵ_0 et c^2 qui apparaissent dans les équations de l'électrostatique et de la magnétostatique : $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0$ et $\nabla \times \mathbf{B} = j/\epsilon_0 c^2$. Le rapport de ces deux constantes expérimentales est c^2 – ce n'est qu'une autre constante électromagnétique.

[...]

Si nous prenons deux fois plus de « charge », ϵ_0 doit être quatre fois plus petit. Si nous faisons passer deux courants à travers deux fils, il y aura deux fois plus de « charge » par seconde dans chacun des fils, et ainsi la force entre les deux fils est quatre fois plus grande. La constante $\epsilon_0 c^2$ doit être réduite d'un facteur quatre. Mais le rapport $\epsilon_0 c^2/\epsilon_0$ n'est pas modifié.

Ainsi, uniquement par des expériences avec des charges et des courants, nous trouvons un nombre c^2 qui se trouve être le carré de la vitesse de propagation des influences électromagnétiques. A partir de mesures statiques – en mesurant les forces entre deux charges unités et entre deux courants unités – nous trouvons que $c = 3,00 \times 10^8$ mètres secondes.³

Cette vitesse était égale, avec la précision obtenue à l'époque, à celle de la lumière. Maxwell en conclut que la lumière, qui oscille à la même fréquence, est une onde électromagnétique. La lumière

¹ CEA Recherche, *Les équations de Maxwell*

² <https://socratic.org/questions/how-are-electromagnetic-waves-usually-drawn>; <https://www.rncan.gc.ca/cartes-outils-publications/>

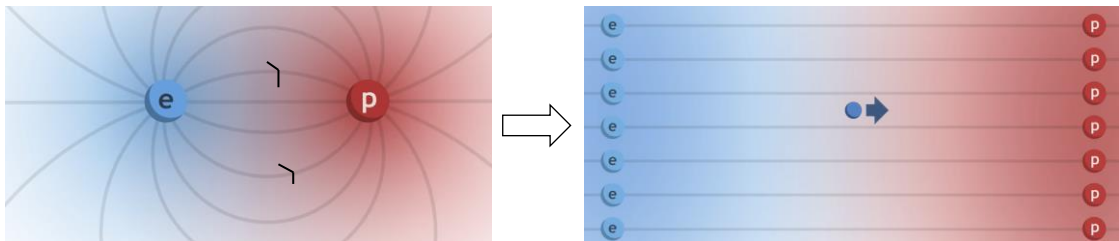
³ Feynman/Leighton/Sands, *Le cours de physique de Feynman, Electromagnétisme 1*, op. cit., pp.320-321. Texte abrégé.

est une onde électromagnétique transversale, avec des variations de champs électrique et magnétiques perpendiculaires l'une à l'autre et perpendiculaires à la direction de propagation.

La lumière, c , est une constante, égale au rapport de deux constantes, *celles des unités de charge dans les systèmes d'unités électrostatiques et électromagnétiques*. Mais la constante c^2 , qui est le carré de la vitesse, apparaît *parce que le magnétisme est en réalité un effet relativiste de l'électricité*.¹
La force magnétique est une conséquence de la relativité restreinte.

Pour le comprendre, observons d'abord qu'une particule neutre ne va rien ressentir dans un champ électrique. Elle va se déplacer en ligne droite comme si rien ne s'était passé ; elle n'est ni attirée ni repoussée par une charge quelconque. Mais une charge positive comme un proton va être repoussée dans un champ entourant une charge positive et attirée dans le champ créé par la charge négative d'un électron.

Imaginons maintenant un champ électrique uniforme, dans lequel une particule ressent la même force d'où qu'elle soit. L'on passe donc d'un champ formant une sorte de pont entre un électron et un proton à un champ dont les caractéristiques sont inchangées au cours du temps.²

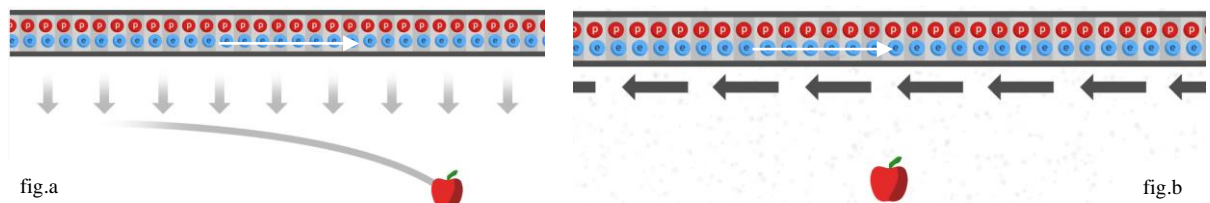


Dans un champ électrique uniforme, les lignes de champ sont toutes parallèles, ce qui signifie que le champ a , en tout point de l'espace, même intensité, même direction et même sens. C'est le cas d'un condensateur, composé de deux plaques conductrices, séparées par un isolant, qui lui permettent d'accumuler de l'énergie en stockant des charges électriques opposées sur chacune d'elles (charges < 0 d'un côté et > 0 de l'autre).

De la même façon, on peut mettre en mouvement les électrons à l'intérieur d'un fil électrique. Ce mouvement donne lieu à un courant électrique.

Imaginons davantage. Soit un fil électrique composé d'une très longue chaîne de **protons** et d'**électrons** dans lequel s'écoule un courant électrique (seuls **les électrons** sont en mouvement le long du fil). Plaçons un objet à une certaine distance du fil, par ex. une pomme qui possède une certaine charge électrique positive. Chaque **proton** (charge > 0) dans le fil repousse la pomme, mais en même temps chaque électron attire la pomme avec la même intensité. La somme de toutes ces forces se compensent parfaitement ; la pomme ne ressent au total aucune force. Elle reste bel et bien immobile.

Donnons à la pomme une vitesse de déplacement vers la droite. (*fig.a*) On observe alors, si on procède à une telle expérience, que la pomme est progressivement repoussée par le fil. Tout se passe comme si une autre force mystérieuse agissait en secret sur la pomme. Cette force n'agit que lorsque la pomme, est en mouvement suivant une direction et une vitesse données. Lorsque, de façon générale, des charges électriques q (qui est un scalaire) se déplacent, la force en question est la force magnétique.³



La force magnétique \mathbf{F}_m qui fait dévier la direction du mouvement de la pomme (q), doté de la vitesse \mathbf{v} , a pour expression : $\mathbf{F} = q \cdot \mathbf{v} \cdot \mathbf{B}$, la lettre \mathbf{B} désignant le champ magnétique dans lequel la pomme se déplace. Elle est

¹ L. de Broglie, Matière et lumière, op. cit., p.166 ; Feynman/Leighton/Sands, *Le cours de physique de Feynman*, p.9.

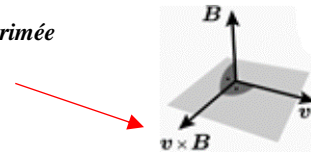
² ScienceClic, *Le champ électromagnétique*, 24 août 2018, <https://www.youtube.com/watch?v=9o-g1FN0X40>

³ *Ibid.* ; Universaldenker, *The 4 Maxwell's equations*, video déjà cit.

proportionnelle à ces trois quantités, comme il est attesté expérimentalement. Elle est mesurée en *teslas*. $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ est un produit vectoriel (*cross product*) :

$$\begin{pmatrix} F_{mx} \\ F_{my} \\ F_{mz} \end{pmatrix} = q \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix}$$

*le résultat de la direction imprimée
à la pomme
sous l'action
du champ magnétique*



La théorie de la relativité restreinte permet de comprendre l'origine de cette force. Pour commencer, il faut se placer, non pas d'un point de vue extérieur, mais du point de vue de la pomme. Par rapport à elle, ce n'est pas elle qui se déplace, mais le fil qui se déplace vers la gauche. (*fig.b*) (Chacun vit cette expérience dans un train qui démarre par la fenêtre duquel on regarde un autre train à quai.)

Or, d'après la relativité restreinte, plus un objet se déplace rapidement, plus sa longueur va se contracter dans le sens du mouvement (si $c = x/t = \text{conste}$, quand le temps se dilate, $t \uparrow$, la longueur x se rétracte, $x \downarrow$, et inversement)

Une théorie de la lumière doit nécessairement être relativiste puisque les corrections de relativité dans la dynamique d'un corpuscule sont d'autant plus importantes que la vitesse de ce corpuscule est plus voisine de celle de la lumière.¹

Dans notre expérience, les **protons** sont maintenant en mouvement par rapport à la pomme : ils se déplacent vers la gauche ; ils vont ainsi être contractés dans la longueur du fil comme si les **protons** s'étaient légèrement rapprochés les uns des autres. A l'inverse, les **électrons** semblent se déplacer plus lentement. Ils ont perdu un peu de vitesse, car le fil tout entier se déplace maintenant vers la gauche, et semblent légèrement étirés par rapport au point de vue précédent. Ils donnent l'impression de s'éloigner les uns des autres. Globalement, quand on fait la somme des forces qui s'exercent sur la pomme de son point de vue, celles-ci ne se compensent plus : il y a davantage de charges électriques positives – des **protons** dans le fil – que de charges négatives. Par conséquent, le fil en entier va exercer une force répulsive sur la pomme qui va progressivement l'en éloigner. (*fig.c*)²

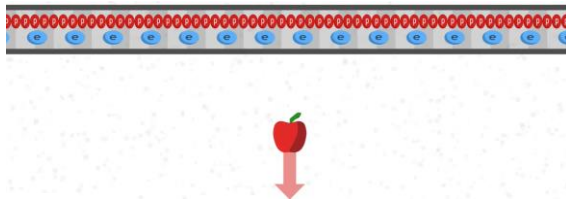


fig.c

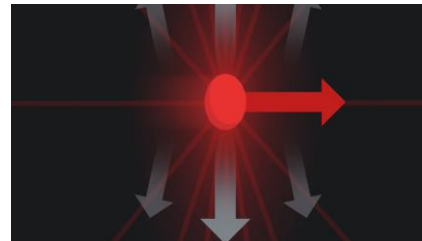


fig.d

En prenant en compte la relativité restreinte, on s'aperçoit que le champ électrique généré par une charge se déforme quand celle-ci se met en mouvement. [fig.d] Ce phénomène emporte l'apparition d'une nouvelle force : la force magnétique qui n'est en fait qu'une simple force électrique mais perçue selon un point de vue différent.³

Quand une charge électrique se déplace, elle crée autour d'elle un champ magnétique qu'on peut représenter par des flèches qui tournent autour de la direction de son mouvement. (*fig.e infra*)

- Voilà pour la théorie de la relativité ? Et la physique quantique, y a-t-il un effet propre qui permet également de comprendre des choses sur l'électromagnétisme ?

¹ L. de Broglie, *Matière et lumière*, op. cit., p.141.

² ScienceClic, *Le champ électromagnétique*, video cit.

³ *Ibid.* Nous soulignons.

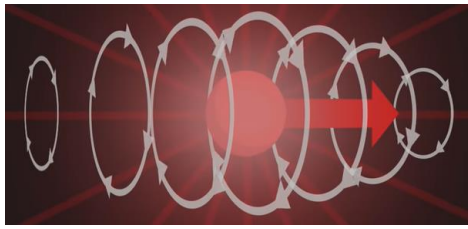


fig.e

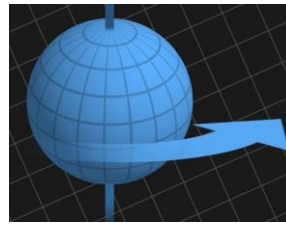
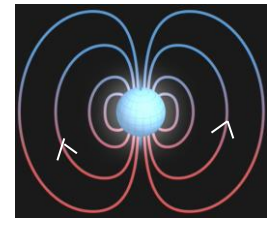


fig.f



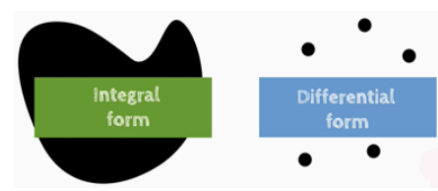
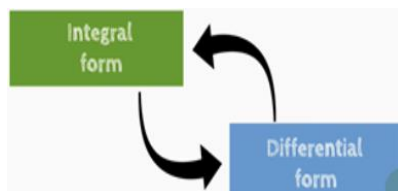
- Oui. Pensez par exemple aux aimants permanents qui n'ont pas besoin d'un déplacement d'électrons pour fonctionner, à la différence d'un solénoïde qui se comporte comme une sorte d'aimant, - un électroaimant - lors d'un tel déplacement. Pour comprendre cette situation, il faut savoir que les particules élémentaires comme l'électron possède une propriété importante qu'on appelle, en physique quantique, *le spin*, interprétée comme une rotation intrinsèque de la particule sur elle-même.(fig.f supra)

En tournant sur elle-même, la particule engendre une sorte de courant électrique qui, comme dans le cas [d'un solénoïde], va permettre un champ magnétique. Les particules élémentaires se comportent ainsi comme de petits aimants, et on les regroupe de façon alignée pour créer ainsi des matériaux aimantés.¹

Que conclure ?

Nous dirons, comme Richard Feynman, qu'avec Maxwell, **la lumière cessa d'être « quelque chose d'autre », mais fut seulement de l'électricité et du magnétisme sous une nouvelle forme – des petits morceaux de champs électrique et magnétique qui se propagent par eux-mêmes à travers l'espace.** Richard Feynman ajoutera que *le magnétisme est réellement un effet relativiste.* Et de répéter, à la même page : *les effets relativistes (c'est-à-dire le magnétisme).* C'est pourquoi, *quand la relativité fut découverte, les lois de l'électromagnétisme n'eurent pas besoin d'être changées. Contrairement aux lois de la mécanique, elles étaient correctes à la précision de v^2/c^2 près.²*

L'Annexe li, du Volet 2II du §66, présentera rapidement la version intégrale des équations de Maxwell, complémentaire de la différentielle, dans laquelle les théorèmes de Stokes et d'Ostrogradski seront réécrits comme il a été annoncé. Le premier permet de transformer une somme sur un contour en une somme sur une surface, et le second de transformer une somme sur une surface en une somme sur un volume. Les formes différentielle et intégrale sont complémentaires et reliées l'une à l'autre.



3/ L'électromagnétisme de Maxwell et le droit constitutionnel moderne

- i Reprise de l'esquisse de réponse d'un juriste à Richard Feynman*
- ii Un détour à la demande : l'idée d'intégrales de chemins en droit constitutionnel*
- iii Les deux composantes indépendantes et indissociables des Lumières*
- iv Le dépassement du mouvement en couplage du droit des Lumières*

4/ Paradigme, analogie partielle et épistémè : ce qui les différencie et les relie

- i Paradigme en science et en droit. ii Analogie partielle et épistémè*

¹ Ibid.

² Feynman/Leighton/Sands, *Le cours de physique de Feynman, Electromagnétisme 1*, op. cit., p.321 et 15.

³ Universaldenker, *The 4 Maxwell's equations*, video déjà cit.

Annexe I

L'arc-en-ciel et la décomposition et recombinaison de la lumière

1/ L'arc-en-ciel

Les arcs -en-ciel se forment par réfraction de la lumière solaire à travers les gouttes de pluie.

Le premier savant qui signale une telle cause est Theodoric de Freibourg au XIII^e siècle. L'étude fut reprise et développée au XVII^e siècle par Descartes dans les *Météores* en 1637. Descartes y apporta des précisions sur les angles de réfraction grâce à la loi Snell-Descartes...

Quand vous êtes dos au Soleil, la lumière pénètre à l'avant des gouttes, se réfléchit sur leur paroi arrière, puis ressort par devant et entre dans votre œil.

Durant ce processus, le faisceau lumineux se décompose par réfraction en ses couleurs constitutives, chacune d'elles correspondant à sa longueur d'onde.

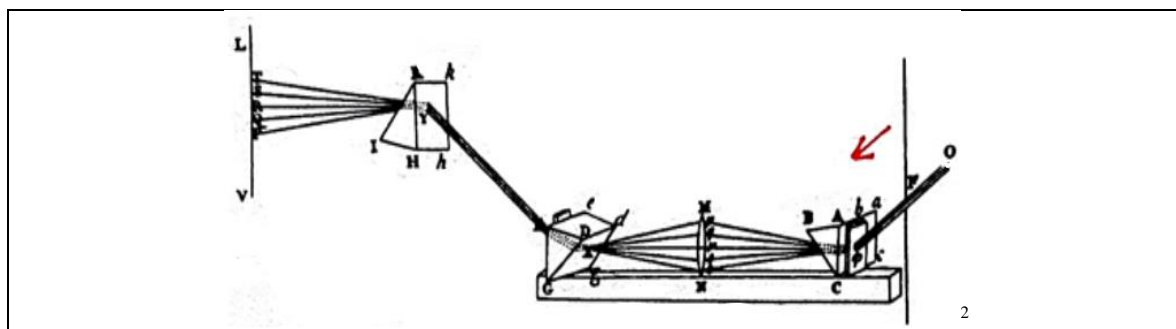
L'éventail des couleurs d'un arc-en-ciel résulte du fait que les gouttes de pluie qui émettent le bleu sont plus près du sol que celles qui émettent le rouge.¹

2/ La décomposition et recombinaison de la lumière

Cette décomposition et recombinaison est l'œuvre de Newton qui entreprit différentes expériences avant de publier sa découverte en 1672 dans une communication adressée à la *Royal society* de Londres.

Sur les traces de Descartes, Newton fit passer un faisceau de lumière à travers un prisme qui réfracta la lumière en un arc-en-ciel dont chaque couleur a une longueur d'onde différente selon la variation de l'angle. Newton alla, cependant, plus loin que Descartes. Après avoir décomposé la lumière en ses couleurs fondamentales, il ajouta un second prisme par lequel il reconstitua le faisceau initial produisant à nouveau la lumière blanche.

Suivant la *fig. infra*, Newton réfracta la lumière à travers le prisme ABC, le recombina optiquement à travers la lentille MN et le sépara à nouveau par el prisme KIH :



¹ Rom Harré, *Great scientific experiments*, Oxford Univ. press, 1989, cha.8 : The causes of rainbow, pp.85-94. ; James Trefil, *La science en 1001 leçons*, InterEditions, Paris, 1993, p.108.

² R Harré, *Great scientific experiments*, ch.17 : The nature of cours, p.172. Dans la traduction française du *Traité d'optique* de Newton, à partir de son édition de 1722, il est question de réfrangibilité. Est *réfrangible* ce qui est susceptible d'être réfracté. V. Gauthier-Villars, Paris, 1955.

La version intégrale des 4 équations de Maxwell

1/ Rappels préalables

a) Les vecteurs champ électrique \mathbf{E} et champ magnétique \mathbf{B} (dans l'espace à trois dimensions) ¹

Chaque vecteur a trois composantes correspondant aux trois directions de l'espace. Dans chaque direction (par ex. dans le sens du mouvement x), nous pouvons indiquer l'ampleur ou la grandeur du champ en question suivant les axes x, y, z .

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} \quad \mathbf{E} = \begin{pmatrix} E_x(x,y,z) \\ E_y(x,y,z) \\ E_z(x,y,z) \end{pmatrix} \quad \text{Idem pour } \mathbf{B} : \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix}$$

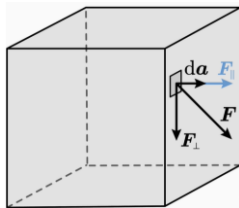
b) Théorème de la divergence (*divergence integral theorem, dit de Green-Ostrogradski*) :

Ce théorème relie la divergence d'un champ vectoriel à la valeur de l'intégrale de surface du flux défini par ce champ. Le flux d'un vecteur à travers une surface fermée est égal à l'intégrale de la divergence de ce vecteur sur le volume délimité par cette surface. Le théorème découle de celui de Stokes qui généralise lui-même le théorème fondamental du calcul différentiel et intégral.

$$\int_V (\nabla \cdot \mathbf{F}) dv = \oint_A \mathbf{F} \cdot d\mathbf{a}$$

L'intégrale de la partie droite de l'équation représente une surface A enveloppant le volume V quelconque (sphère, cube, ou tout autre volume sans trous en 3D. L'intégrale du volume (ici, un cube) est représentée dans la partie de gauche de l'équation. da est moins une surface infinitésimale de la surface A que le **vecteur de surface** orienté vers l'extérieur, de norme égale à l'élément de surface qu'il représente. En fait, que représente géométriquement $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{a}$?

(§62^{bis}
3/b)-i)



Comme tout vecteur, le vecteur \mathbf{F} peut être écrit comme somme de deux vecteurs,

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{a} = (\mathbf{F}_{\parallel} + \mathbf{F}_{\perp}) \cdot d\mathbf{a}$$

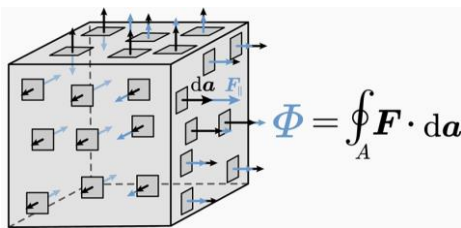
Le vecteur parallèle au vecteur de surface $d\mathbf{a}$ est la **projection de \mathbf{F} dans la direction de $d\mathbf{a}$** . Or, les produits scalaires des deux vecteurs composants du champ vectoriel (ou *vector field*), \mathbf{F} , produisent les nombres suivants :

$$\mathbf{F}_{\perp} \cdot d\mathbf{a} = 0 \qquad \mathbf{F}_{\parallel} \cdot d\mathbf{a} \neq 0$$

D'où :

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{a} = \mathbf{F}_{\parallel} \cdot d\mathbf{a}$$

En prenant en compte toutes les faces du cube, on obtient la surface intégrale qui mesure le flux du vecteur \mathbf{F} sortant ou entrant à travers la surface A :



Si \mathbf{F} est \mathbf{E} (champ électrique), le flux ϕ est électrique ; si \mathbf{F} est \mathbf{B} (champ magnétique), le flux ϕ est magnétique. Nous comprenons maintenant le sens de l'équation :

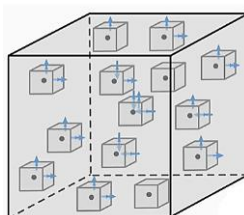
$$\int_V (\nabla \cdot \mathbf{F}) dv = \oint_A \mathbf{F} \cdot d\mathbf{a}$$

La somme de la source du champ vectoriel (électrique ou magnétique) contenue dans le volume V (**intégrale triple**) est égale au flux, ϕ_e ou ϕ_m , total de ce champ à travers la frontière du volume qui est une intégrale de surface (**intégrale double**).

avec :

$$\int_V (\nabla \cdot \mathbf{F}) dv$$

dv désignant un cube infinitésimal



sachant que la **divergence du champ vectoriel** est :

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} \quad \nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

Selon le signe du produit scalaire, le flux ϕ est sortant (si > 0), entrant (si < 0), il n'y a ni source ni puits du *vector field*

¹ Universaldenker, *The 4 Maxwell's equations*, video déjà cit. ; <https://fr-academic.com/dic.nsf/frwiki/1626150>

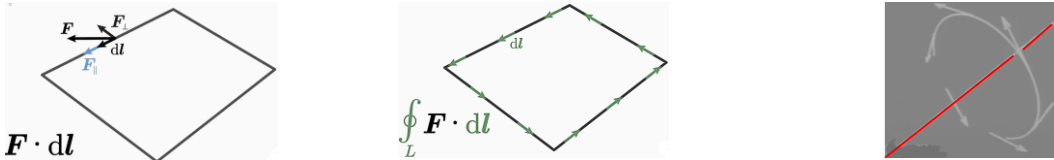
La version intégrale des 4 équations de Maxwell (suite)

c) Le théorème du rotationnel (curl integral theorem), qui est un cas particulier du théorème de Stokes

Le théorème du rotationnel, sous sa forme la plus simple, met en relation **la circulation d'un champ vectoriel** le long d'un contour L (courbe fermée, décrite par une intégrale simple) à l'intégrale (double) du rotationnel de ce champ sur toute la surface A ayant le contour pour frontière.¹

$$\int_A (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{a} = \oint_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}$$

sachant, que, **dans le second membre de l'équation** qui est un produit scalaire, on ne garde, là encore, que la composante de ce produit qui n'est pas nul, soit le vecteur ayant le même sens que le vecteur de longueur infinitésimale dl (le vecteur serait tangent sur un contour plus ou moins circulaire). L'intégrale somme les produits scalaires en tout point du contour.²



Parce qu'il y a contour, le champ vectoriel retourne au même point. La question se pose de savoir combien le champ vectoriel circule le long du contour L. Le champ vectoriel F peut être un champ électrique E ou un champ magnétique B.

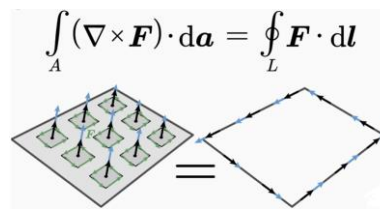
Le second membre de l'équation définit le rotationnel du champ vectoriel par un produit vectoriel (cross product) suivant :

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} \qquad \nabla \times \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \\ \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \\ \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Ce produit vectoriel peut être représenté en ne gardant que la partie (∇x F) qui est parallèle au vecteur de surface da (qui est ⊥ à la surface A) dans le produit scalaire (∇ x F).da. D'où l'intégrale du rotationnel (curl) en tout point de la surface A :



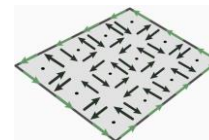
D'où le théorème du rotationnel en « image » :



*The total curl of F corresponds to the vector field F along the line L of the surface.*³

en remarquant au passage que *the rotation of the vector field F inside the surface cancels in the sommation.*

*Only the rotation of the vector field along the line L remains.*⁴



¹ <http://epiphys.emn.fr/spip.php?article300>

² Universaldenker, *The 4 Maxwell's equations*, video déjà cit. ; D. L. Goodstein, *Maxwell's equations. The mechanical universe*, video cit.

³ Universaldenker, *The 4 Maxwell's equations*, video déjà cit.

⁴ *Ibid.*

La version intégrale des 4 équations de Maxwell (suite et fin)

2/ Les quatre équations

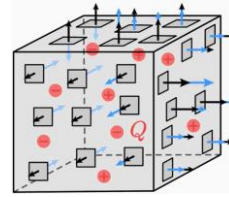
a) La 1^{re} équation (sous forme intégrale) :

$$\oint_A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

ou

$$\Phi_e = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Q représente la charge Q totale, divisée par la constante du champ électrique ϵ_0 pour avoir les bonnes unités



Selon la 1^{re} équation établie, le flux du champ électrique, Φ_e , sortant ou entrant dans la surface A, correspond à la charge électrique Q (comprenant en rouge des charges > 0 et < 0), enclose dans la surface A.

Comme, en rappelant que par définition $\rho = Q/V$, soit $V\rho = Q = \int_V \rho dv$ (l'intégrale de la charge enclose dans le volume V) :

$$\int_V (\nabla \cdot \mathbf{E}) dv = \oint_A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} \qquad \int_V (\nabla \cdot \mathbf{E}) dv = \frac{Q}{\epsilon_0} \qquad \int_V (\nabla \cdot \mathbf{E}) dv = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dv$$

soit $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0$, qui n'est autre que la forme différentielle de la 1^{re} équation de Maxwell.

b) 2^e équation (sous forme intégrale) :

$$\oint_A \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = 0$$

Comme

$$\int_V (\nabla \cdot \mathbf{B}) dv = \oint_A \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} \qquad \int_V (\nabla \cdot \mathbf{B}) dv = 0$$

il en découle : $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ (le flux magnétique Φ_m est toujours égal à 0). On retrouve la forme différentielle de la 2^e équation

c) 3^e équation (sous forme intégrale) :

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_A \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}$$

Comme

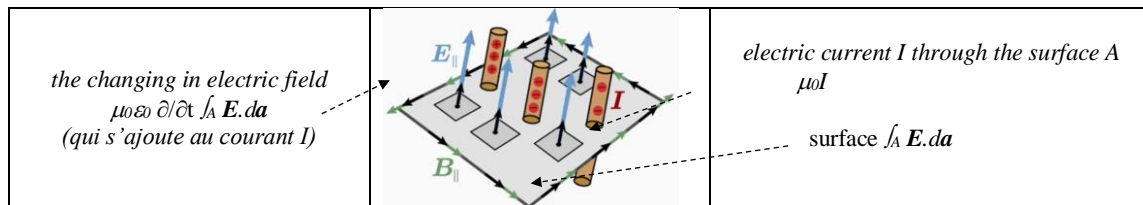
$\int_A (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{a} = \oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$	$\int_A (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{a} = -\int_A \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{a}$	$\int_A (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{a} = -\int_A \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{a}$
--	--	--

il s'ensuit : $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t$, la forme différentielle de la 3^e équation de Maxwell

d) 4^e équation (sous forme intégrale) :

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \int_A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a}$$

The rotating magnetic field \mathbf{B} generates . electric current I through the surface A and the changin in electric field

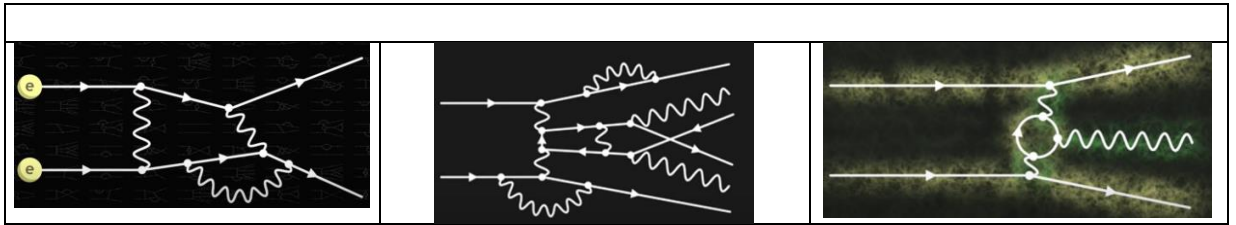


Comme $\mathbf{j} = \mathbf{I}/A$ et $\int_A \mathbf{j} \cdot d\mathbf{a} = \mathbf{I}$ (current identity \mathbf{j} over the surface A), dans le produit scalaire $\mathbf{j} \cdot d\mathbf{a}$, on ne prend que la composante non nulle, soit celle qui prolonge le vecteur de surface $d\mathbf{a}$,

$\int_A (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{a} = \mu_0 I + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \int_A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a}$	$\int_A (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{a} = \mu_0 \int_A \mathbf{j} \cdot d\mathbf{a} + \mu_0 \epsilon_0 \int_A \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \cdot d\mathbf{a}$	$\int_A (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{a} = \int_A (\mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}) \cdot d\mathbf{a}$
--	--	---

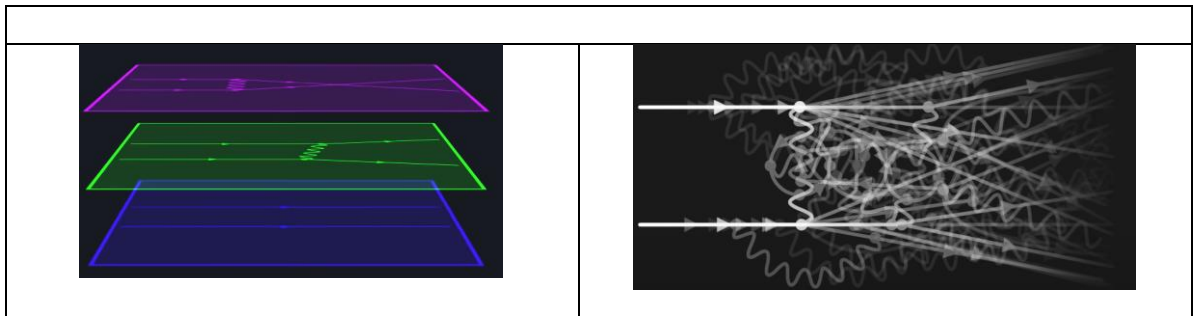
il en résulte $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \epsilon_0 \partial \mathbf{E} / \partial t$, la forme différentielle de la 4^e équation de Maxwell

Annexe VI



Les diagrammes de Feynman, qu'ils soient simples ou compliqués, avec notamment des boucles, représentent l'échange de photons (lignes ondulées) entre électrons (lignes droites). A chacun de ces différents diagrammes correspond une intégrale. Les contributions de chacune doivent être additionnées. Voir infra l'Annexe 2..¹

Annexe VII



L'ensemble des amplitudes, pour les divers états entrants et sortants, forme une sorte de matrice (qui est toutefois infinie) dont les « lignes » et les « colonnes » correspondent à une base pour les états entrants et sortants respectivement. Le calcul de cette matrice est considéré comme l'un des principaux objectifs de la théorie quantique des champs.²

¹ ScienceClic, *Electrodynamique quantique et diagrammes de Feynman*, video cit. ; R. Penrose, *A la découverte des lois de l'univers*, op. cit., pp.651-653.

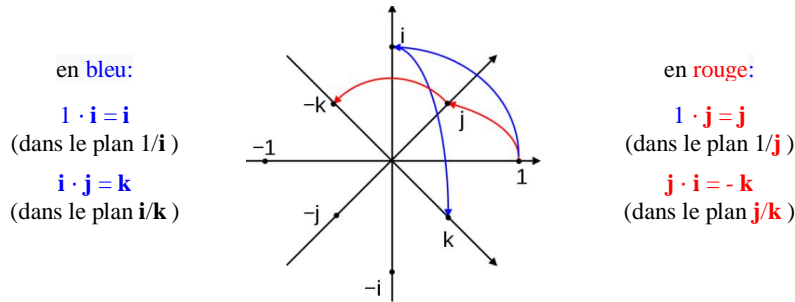
² *Ibid.* La matrice en question est une matrice ou opérateur de collision.

Deux mots sur les quaternions¹

1/ Une nouvelle structure

Tout comme les nombres complexes s'écrivent sous la forme $a_1+i a_2$, où a_1 et a_2 sont des nombres réels et où i vérifie $i^2 = -1$, les quaternions s'écrivent sous la forme $a_1+i a_2 +j b_1 +k b_2$ où a_1, a_2, b_1, b_2 sont des nombres réels et où i, j et k sont trois racines carrées différentes de -1 .

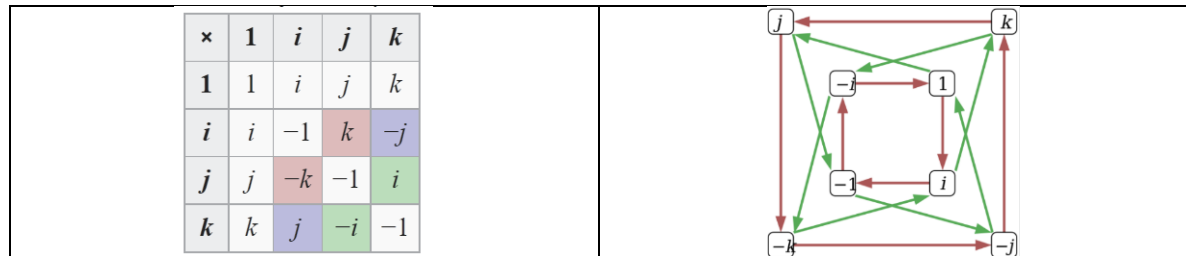
On imagine assez bien comment additionner deux quaternions (à savoir terme à terme, comme pour les complexes). Pour la multiplication, comme $ijk = -1$, on a $ijk^2 = -k$ et donc $ij = k$ car $k^2 = -1$. Par ailleurs, on a aussi $i^2jk = -1$, soit $-jk = -1$. On a donc aussi $j^2k = ji$, c'est-à-dire $-k=ji$. Voir infra le plan en 4 D où $i \cdot j = -(j \cdot i)$ (dans i, j , l'opération commence par i , suivie de j , tandis que $j \cdot i$, c'est l'inverse) :



Comme pour les nombres complexes, la **conjugaison** permet de multiplier les quaternions à moindres frais grâce aux formules classiques entre les nombres complexes et leurs conjugués. On appelle conjugué de $q = a_1+i b +jc +kd$ le quaternion $\bar{q} = a - i b - jc - kd$.

2/Non commutativité de la multiplication

On remarquera que les nombres ij (soit k) et ji (soit $-k$) ne sont pas égaux : les quaternions obéissent à une multiplication non commutative dans laquelle l'ordre des facteurs influe sur le résultat du produit. Voir, sur la *fig.a* infra, la table de multiplication (les cases colorées montrent la non-commutativité de la multiplication) et, sur la *fig.b*, le graphe de Cayley (les **flèches rouges** représentent la multiplication à droite par i , et les **vertes** la multiplication à droite par j).



3/ La représentation matricielle

On peut voir le quaternion $q = a+i b +jc +kd$ comme une matrice M_q à coefficients complexes égale à $Id + bI + cJ + dK$ où les matrices Id, I, J, K sont définies par :

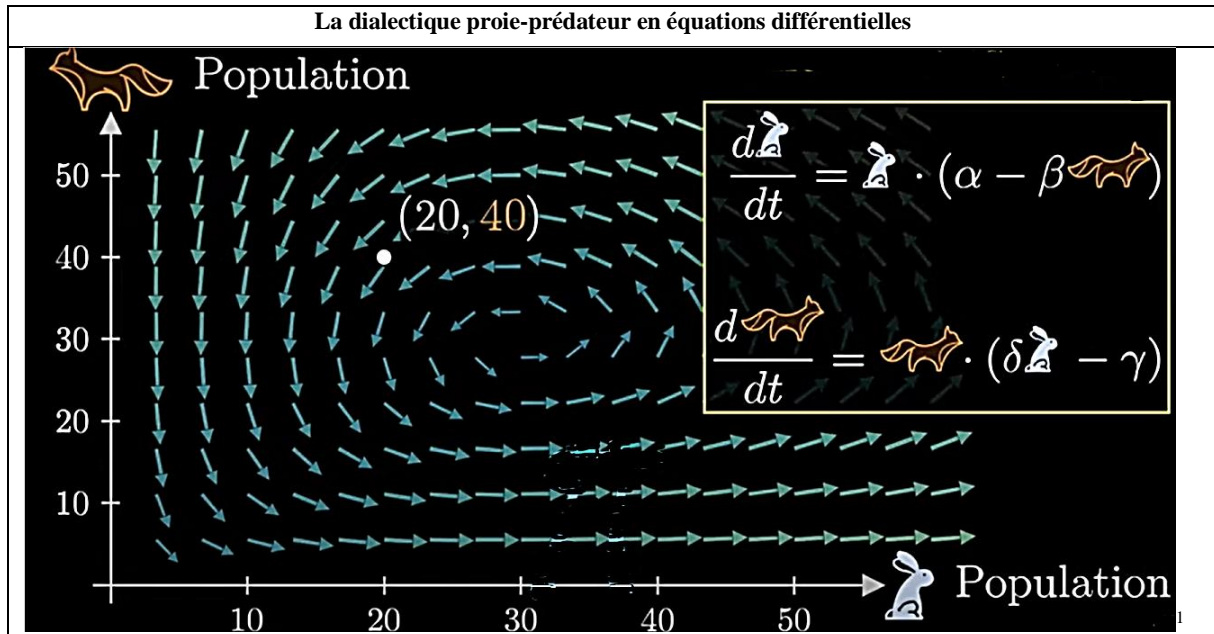
$$Id = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad I = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} \quad J = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et } K = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{bmatrix}$$

4/ Octonions

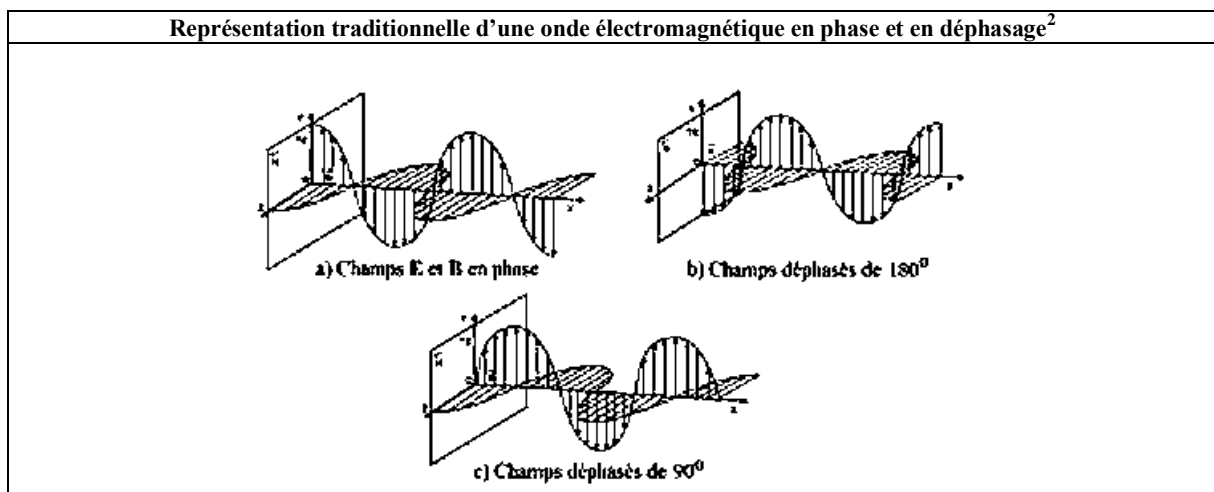
En sus de conserver la propriété de non commutativité, les octonions sont une extension non associative de l'algèbre des quaternions. **Ce n'est donc pas un groupe algébrique**, mais ils forment une algèbre à 8 dimensions sur le corps \mathbb{R} des nombres réels. Chaque octonion x s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire à coefficients réels x_n de huit éléments de base, $x = x_0 + x_1i + x_2j + x_3k + x_4l + x_5il + x_6jl + x_7kl$ On peut établir également une table de multiplication et un graphe mnémotechnique dit de Fano.²

¹ F. Aoustin, *La généralisation des complexes : les quaternions*, art. cit., pp.46-49. <https://en.wikipedia.org/wiki/Quaternion>
² <https://fr.wikipedia.org/wiki/Octonion>

Annexe X



Annexe XI



¹ 3Blue1Brown, *Divergence and curl : The language of Maxwell's equations, fluid flow, and more*, vidéo déjà cit.

² <https://www.google.com/search?q=onde+électromagnétique+en+déphasage>

§67.- Le rajeunissement de l'épistémè des Lumières

1/ Le continuuel apport des mathématiques et de la physique

a) Retour sur l'effet de résonance en droit constitutionnel

i Résonner et raisonner

ii Le recours au tore plat pour mieux suivre les trajectoires, 528

iii La préparation et la résolution de la dissonance dans l'harmonie

b) Reconsidérations et mises au point d'analogies partielles précédentes

i La dualité à nouveau

ii L'objet du droit comme objet fractal sous certains aspects

iii L'individu à la racine de la nouvelle société

iv Des racines singulières parmi les racines, 533

Annexes I, II, III, III^{bis}, IV, IV^{bis}, V, VI, VI^{bis}, VII et VIII, 537

o

1/ L'apport vivifiant des mathématiques et de physique

a) Retour sur l'effet de résonance en droit constitutionnel

i Résonner et raisonner. ii Le recours au tore plat pour mieux suivre les trajectoires

iii La préparation et la résolution de la dissonance dans l'harmonie

b) Reconsidération et mise au point d'analogies partielles précédentes

i au sujet de la dualité

ii L'objet du droit comme objet fractal sous certains aspects

Un objet ou un phénomène fractal se remarque à sa manière de reproduire la même forme ou structure à toutes les échelles, et ce indéfiniment en principe (la reproduction par ordinateur donne cette illusion). Dans la nature, *les fractales sont, bien entendu, bornées et dépourvues de détails infinitésimaux.* ¹ En voici d'autres présentations, que nous avons déjà vues, relatives au nombre d'or, mais revues ici autrement :

¹ Mandelbrot, *Fractales, hasard et finance*, Flammarion, Paris, 1997, p.41.

$$\begin{aligned} \varphi^2 &= \varphi + 1 && \text{En divisant par } \varphi \\ \varphi &= 1 + \frac{1}{\varphi} && \text{En remplaçant } \varphi \text{ par sa valeur} \\ \varphi &= 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\varphi}} && \text{Apparition de la structure fractale de } \varphi \\ \varphi &= 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}} \end{aligned}$$



le nautilus

le chou romanesco ¹

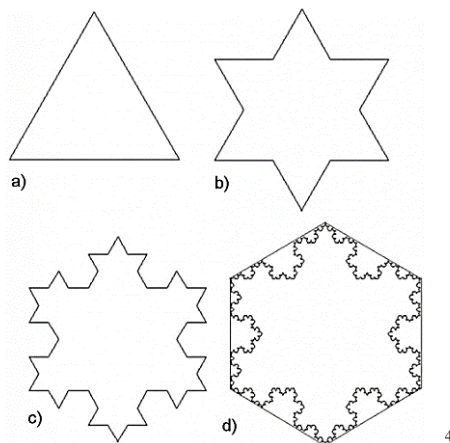
Cette fraction continue, et ces objets du monde naturel, exhibent à nouveau la notion d'avoir la même forme de près ou de loin. Les fractales possèdent les mêmes propriétés, nonobstant quelques variations à toutes les échelles.

Par-delà, la structure qui émerge est celle d'une **invariance par réduction et délimitation**.² Que l'on pense aussi à une feuille de fougère qui se réplique en plus petit sur chacune de ses pétales. La fougère n'est pas plus que le chou romanesco un objet fractal proprement dit qui se répète en théorie à l'infini, mais ses niveaux de ramification, en nombre fini, suggère la genèse d'un tel objet. L'on songera autant au flocon de neige du monde naturel. En mathématiques, le *flocon de Koch* s'en approche, de façon étonnante ; avec assez d'exactitude. (voir la fig. infra).

Pour caractériser une figure, la géométrie euclidienne nous apprend qu'un point isolé, ou un nombre fini de points, constituent une figure de dimension zéro. Qu'une droite, ainsi que toute autre courbe, constituent des figures de dimension un. Qu'un plan, ainsi que toute autre surface standard, constituent des figures de dimension deux. Qu'un cube a la dimension trois, mais, pour caractériser d'autres figures, la dimension peut se situer, par ex. entre 1 et 2,

quand une figure apparaît plus « effilée » qu'une surface ordinaire, tout en étant plus « massive » qu'une ligne ordinaire. En particulier, une courbe ne devrait-elle pas avoir une surface nulle mais une longueur infinie ? De même, si sa dimension est entre 2 et 3, ne devrait-elle pas avoir un volume nul ?³

De ce point de vue, le flocon de Koch est un véritable objet fractal, dessiné par von Koch en 1904. L'auteur entendait montrer l'existence d'une courbe continue sans tangente, constructible par la géométrie élémentaire. La courbe, obtenue par autosimilarité, révéla une propriété inattendue : sa longueur est infinie mais la surface qu'elle dessine ne l'est pas. Cette figure parlante suggérait ainsi une dimension inhabituelle entre 1 et 2.



Le flocon de neige de von Koch est une courbe idéale.

A l'échelle ou à l'étape (d),

la ligne du flocon de neige, présente une longueur infinie si nous agrandissons encore et encore le dessin en zoom..

A la grande surprise, le dessin rentre dans un hexagone de dimension limitée., ce qui signifie qu'une longueur infinie peut s'inscrire dans une surface finie !

On retrouve autrement l'infini logé dans une coquille de noix, comme l'imaginait Shakespeare dans *Hamlet*, ou Spinoza lorsqu'il réfléchissait à l'espace entre deux demi-cercles concentriques (cf. §33)

¹ <https://www.linflux.com/sciences/la-fractale-cet-objet-fascinant/>

² B. Mandelbrot, *Les objets fractals*, p.60..

³ B. Mandelbrot, *Les objets fractals*, p.12.

⁴ <https://brunomariano.com/fr/les-fractales-pour-les-nuls/>

Le processus de construction du flocon de Koch est aussi simple que surprenant. Sur un segment de droite horizontale de longueur 1, il convient de remplacer ce segment par quatre segments de longueur $1/3$ chacun. La première courbe itérative b), sur la représentation supra, est ainsi formée. Par le même procédé, la courbe c) et d) le seront également, et ainsi de suite jusqu'à l'infini en principe. Comme si la dualité entre le tout et la partie, caractéristique de l'infini réel, enfermait aussi, au niveau du calcul, un infini potentiel (au fur et à mesure que s'exécute l'algorithme itératif, le dessin se complexifie étape par étape sans fin).

Dans des structures plus conventionnelles que le flocon de Koch, il existe une relation entre le facteur de réduction r (facteur d'échelle) et le nombre de pièces n dans lequel est divisée la structure considérée. Divisons un segment de droite en deux, soit $r = 1/2$, nous obtenons à nouveau, en deux, le segment initial ($n=2$). Divisons un carré en quatre ($r = 1/4$), nous obtenons, en quatre, le carré original ($n= 4$). Avec un cube, si $r = 1/2$, $n = 8$ copies du cube en plus petit, et si $r = 1/3$, $n = 27$ copies.. Etc. Dans tous les cas, $n = 1/r^2$, satisfaisant un principe d'échelle, étant donné que cette formulation fait apparaître un exposant ε tel que $x = y^\varepsilon$.¹

Cette relation, toutefois, n'est plus évidente, avec le flocon de Koch, car nous obtenons, à la 1^{ère} itération $r = 1/3$, $n = 4$. Dans le flocon de Koch, le facteur de réduction $r = 1/3$, et $n = 3$. Guidés, cependant, par ce que nous avons vérifié dans le cas du segment, du carré et du cube, nous pouvons postuler en jeu *une loi de puissance* de la forme $f(x) = a \cdot x^k$, où x est un nombre réel strictement positif, a une constante ou coefficient de proportionnalité, et l'exposant k une autre constante exprimant le degré de la loi (l'exposant k peut être un entier ou une fraction simple).

Une telle loi permet de décrire une invariance d'échelle. Pour un changement d'échelle, la fonction est seulement multipliée par un coefficient. Si $y = y = x^{-n}$, il vient $y(\lambda x) = (\lambda x)^{-n} = \lambda^{-n} x^{-n} = \lambda^{-n} y(x) \propto y(x)$. Le coefficient est λ^{-n} en l'occurrence. Ainsi toutes les lois de puissance de même exposant sont équivalentes à un facteur constant près.²

Caveat : Ne pas confondre **la fonction puissance**, où la variable de base est élevée à **une puissance fixe**, par ex. $f(x) = x^2$, ou $(f(x) = x^{-2})$, ou $f(x) = x^{1/3}$, avec **la fonction exponentielle**, par ex. $f(x) = 2^x$ où une constante de base est élevée à **une puissance variable**. La fonction exponentielle ne connaît pas cette invariance d'échelle.

La loi de puissance pour la courbe de Koch est $4 = 3^D$. Comment la calculer, sinon en passant simplement aux logarithmes dans les deux membres de l'équation, soit $\log 4 = D \log 3$, ou $D = \log 4 / \log 3 = 1,2629$. Si nous faisons la même chose à la seconde itération de la courbe, alors nous obtenons $16 = 9^D$, ou $D = \log 4^2 / \log 3^2 = 2 \log 4 / 2 \log 3 = 1,2629$. En généralisant, pour toute itération, on voit que la loi est vérifiée. On obtient toujours $D = 1,2629$. Ce nombre s'appelle la dimension d'autosimilarité notée par la suite D_s , pour ne pas la confondre avec d'autres dimensions fractales. (Une fractale est un espace métrique ; il en existe une liste, ordonnée par la dimension dite d'Hausdorff, δ , croissante.)³

Ainsi, D_s peut être définie comme suit : $D_s = \log n / \log 1/r$. **Cette loi d'échelle** (*scaling law*) entre le facteur de réduction, r , et le nombre de pièces réduites, n , reconstituant la structure, **transcende les dimensions pour donner accès à un principe de simplicité essentiel**.

¹ M.I. Binimelis Bassa, *Une nouvelle manière de voir le monde. La géométrie fractale*, p.82 ; Mandelbrot, *Fractales, hasard et finance*, p.52.

² https://fr.wikipedia.org/wiki/Loi_de_puissance

³ M.I. Binimelis Bassa, *Une nouvelle manière de voir le monde. La géométrie fractale*, p.83 ; Pour la dimension fractale https://fr.wikipedia.org/wiki/Liste_de_fractales_par_dimension_de_Hausdorff

Dans $D_s = \log n / \log 1/r$, le rapport $1/r$ est le **rapport d'homothétie H** permettant de passer de l'unité au nombre de copies, n . La dimension D_s est la dimension fractale du nombre de copies, n .

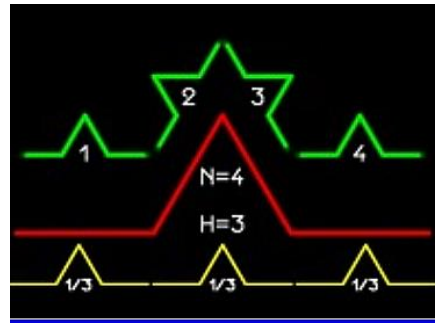
Dans le cas de la courbe de Koch : $D = \log(4) = \log(3)$,

avec

$$1 < \log(4)/\log(3) \ 1.261859507142915 < 2$$

$$\Rightarrow$$

droite < courbe de von Koch < **plan**



Illustrations en science

Avec le flocon de Koch, nous sommes déjà entrés dans le musée des sciences. Or, bien avant le début du XX^e siècle, l'idée de fractale flottait déjà dans les esprits, mais sans s'appeler telle. On n'en retiendra quelques-unes pour que le lecteur ait encore une meilleure idée visuelle du phénomène.

Celles d'abord des plus anciennes figures fractales connues, réalisées en Grèce ancienne par Apollonius de Perga au III^e siècle av. J.-C. :

- l'une part d'un triangle curviligne dont les côtés sont des arcs de cercle. On y inscrit un cercle, tangent aux trois côtés. Puis on construit des cercles, tangents aux côtés et au cercle. On recommence la construction indéfiniment ; (fig.a)
- l'autre est engendré à partir de trois cercles, deux d'entre eux quelconques étant tangents à un troisième. (fig.b)

fig.a

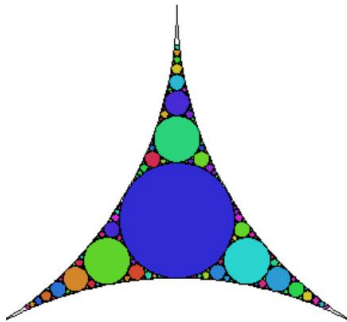
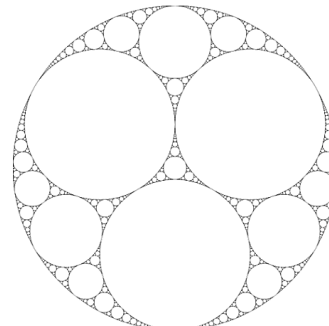


fig.b



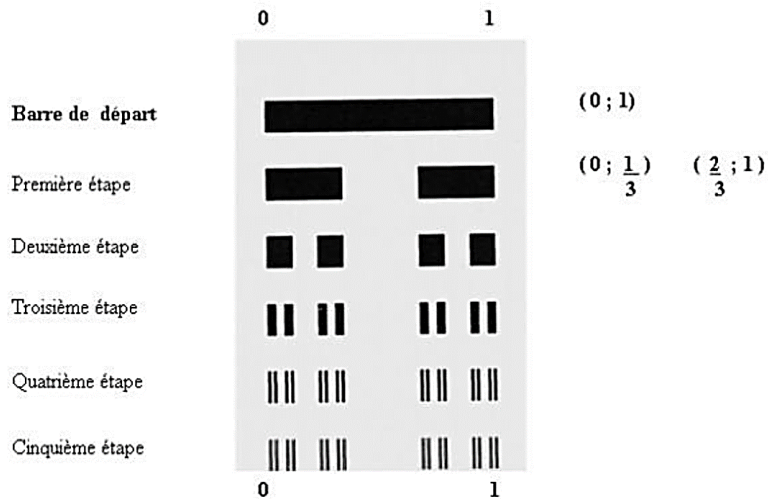
2

On saute les siècles, où apparaissent çà et là, en Occident, d'autres figures relevant de la même inventivité. On s'arrêtera, à la fin du XIX^e siècle, sur la *poussière de Cantor*. On parle métaphoriquement, de « poussière », car il s'agit d'une barre qui se pulvérise en de multiples copies de plus en plus ténues.

Pour construire une telle fractale avant la lettre, il faut diviser l'intervalle unité $[0, 1]$, d'intérieur vide, en trois parties égales. A chaque itération, il faut retirer le tiers central, en en conservant les extrémités. On répète le même procédé en enlevant, à chaque fois, le tiers central de chacun des nouveaux segments obtenus, et ce indéfiniment. Le résultat donne :

¹ <http://www.lactamme.polytechnique.fr/Mosaic/descripteurs/Fractal.11.html>

² <https://complexe.jimdofree.com/les-fractales/définition/historique-d-apparition/>



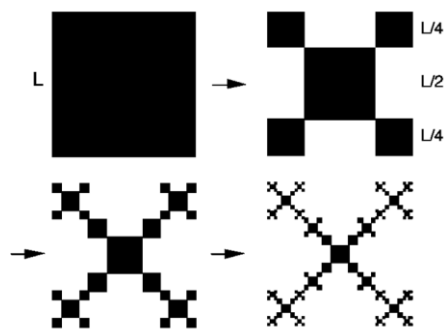
La barre (ou ensemble triadique) de Cantor est un sous-ensemble remarquable de la droite réelle. La dimension fractale a , par la suite, été calculée ; elle possède également une dimension non entière : $D = \log_3 2 = \log_b(2)/\log_b(3) \approx 0,63$, où b est n'importe quelle base. C'est, à nouveau, un nombre irrationnel. L'écriture est en base 3, sachant que tout réel $x \in [0, 1]$ peut s'écrire

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{3^n}$$

avec $x_n \in \{0, 1, 2\}$. L'ensemble de Cantor est formé des réels de $[0, 1]$, ayant une écriture en base 3 ne contenant que des 0 et des 2.

La propriété d'autosimilarité est manifeste : L'image de l'ensemble de Cantor par l'homothétie H de rapport $1/3$ est elle-même une partie de l'ensemble de Cantor.¹

Un dernier mot pour dire qu'il existe des variations dans les structures fractales du fait de la présence possible simultanée de plusieurs échelles de dilatation. Voici un exemple d'une telle structure non uniforme obtenue par itération contenant les facteurs $1/4$ et $1/2$ comme échelles de contraction.²



Les fractales présentées jusqu'ici sont déterministes, mais il existe une géométrie fractale non déterministe dans laquelle intervient le hasard.

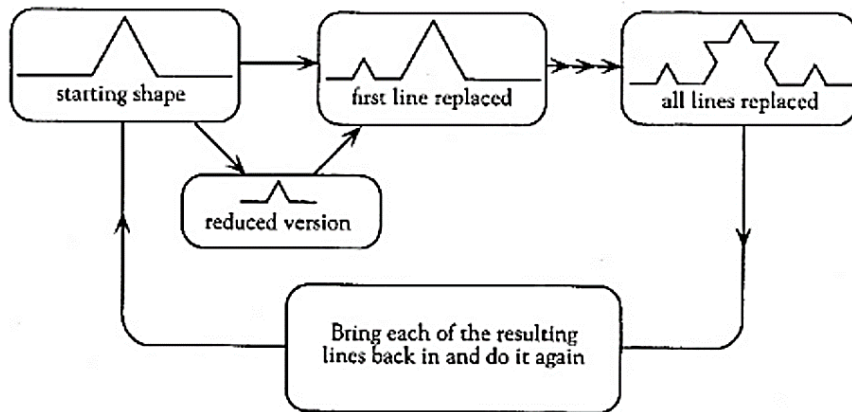
Pour le moment, nous ne nous en occupons pas. On retiendra, à ce stade de la réflexion qu'il y a dans la nature, que confirment ou découvrent rigoureusement les mathématiques, des détails similaires à toute échelle d'observation. Un phénomène fractal est donc autosimilaire exactement ou approximativement. Il suffit d'un algorithme récursif pour en cerner le processus de construction.

- Pourquoi dites-vous récursif plutôt qu'itératif ?

¹ https://fr.wikipedia.org/wiki/Ensemble_de_Cantor

² <http://www.jfgouyet.fr/fractal/fractalfr/chap1.pdf>

- Le processus est en fait itératif et récursif, parce qu'à la fin de chaque étape, la forme ou structure résultante (*output*) est reportée au début d'une nouvelle étape (*input*). Voir, par ex., le schéma logique appliqué au flocon de Koch :



Fractals are characterized by three concepts :
Self-similarity, response of measure to scale, and the recursive subdivision of space.²

Illustrations et Intérêt d'une telle idée en droit.

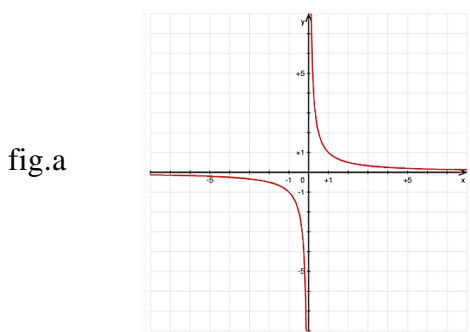
iii L'individu à la racine de la nouvelle société

iv Des racines singulières parmi les racines

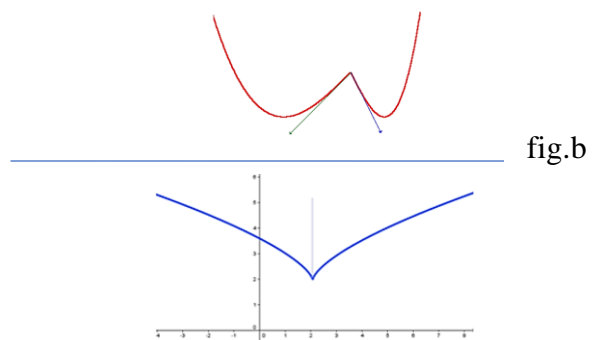
Définir une singularité est une gageure, car une singularité est précisément *un point auquel un objet mathématique donné n'est pas défini ou un point où l'objet mathématique cesse de se comporter de façon régulière par manque de différentiabilité ou d'analyticité* (i.e. exprimable par une série entière).³

Par ex, une valeur où une fonction d'une variable réelle devient infinie, comme la fonction qui, à tout réel x non nul, associe son inverse, $1/x$. Cette fonction permet de modéliser un certain nombre de comportements qui décroissent mais qui présentent une « borne inférieure » pour ne pas tendre vers $l'∞$, comme, il a été vu, la force de gravitation et la force électrostatique qui sont en $1/r^2$. (fig.a)

De même, la fonction d'une variable complexe, $f(z) = 1/z$, n'est pas non plus définie en $z = 0$. Ce point est donc un point singulier, mais, lorsque $z \neq 0$, la fonction est analytique.



$f(x) = 1/x$. En 0, sa limite vaut $-\infty$ et à droite, $+\infty$.



Deux exemples de points singuliers ou « anguleux »

Un point singulier est aussi un point où une courbe a plusieurs tangentes. On dit que f admet une dérivée à gauche en x_0 quand x tend vers x_0 par valeurs inférieures (en restant plus petit que x_0). Si f

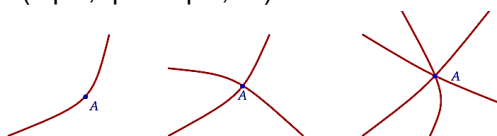
¹ Schéma d'après Ron, Eglash, *African Fractals. Modern Computing and Indigenous Design*, New Brunswick, Rutgers University Press., 1999, in Danièle Dehouve, « La notion de fractale en anthropologie », *Ethnographiques.org*, n° 29 déc. 2014, en ligne.

² <http://neocybernetics.com/report145/Chapter10.pdf>

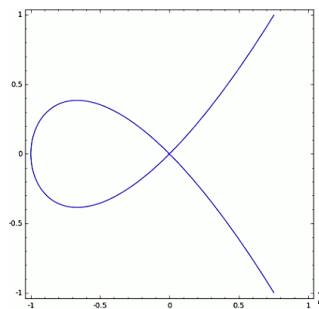
³ [https://stringfixer.com/fr/Singularity_\(mathematics\)](https://stringfixer.com/fr/Singularity_(mathematics))

est dérivable à droite en x_0 , on dit que la courbe, représentative de f , admet une demi-tangente à droite au point $(x_0, f(x_0))$.¹ (*fig b supra*).

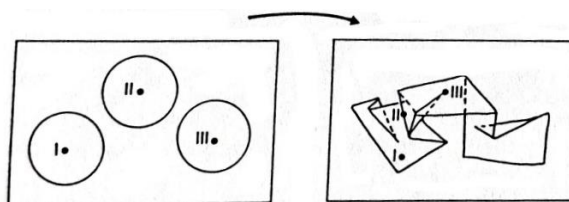
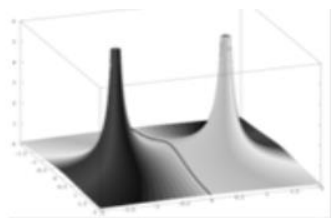
D'autres points particuliers comme les points doubles ou multiples (triple, quadruple, ...)



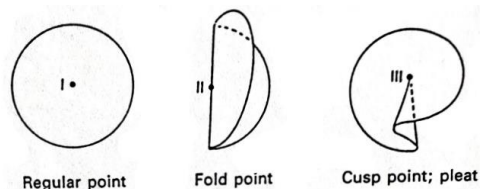
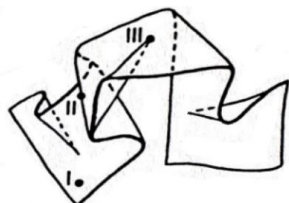
peuvent être assimilés à des points singuliers dans la mesure où, dans des courbes qui se croisent, *a single tangente may not be correctly defined there.* →



Tel est un point singulier d'une courbe en géométrie algébrique. Les fonctions d'une variable complexe peuvent présenter aussi un comportement singulier : ce sont des singularités non isolées comme des points d'amas ou limites de singularités isolées (ex. pôles). Aucun développement en série n'est également possible à la limite. (*fig. infra à gauche*)



De façon plus générale, la théorie des singularités, initiée par Hassler Whitney, a démontré l'existence de trois types de singularités qui sont inévitables lorsque on froisse par ex. une feuille de papier plate. (*fig supra à droite*, et finalement *infra à gauche*) Ces trois types de singularités sont stables en ce qu'elles ne disparaissent pas sous l'effet de petites perturbations : il s'agit du point régulier, du pli (*fold*) et du *cusp* (point de rebroussement) (*fig. infra à droite*)³ Nous avons déjà rencontré le pli (*fold*) et le point de rebroussement (*cusp*) en transposant la théorie des catastrophes en droit constitutionnel.



La théorie des catastrophes de Thom s'est appuyée sur les travaux de Whitney pour rendre compte de certains changements discontinus de la nature, sur fond toutefois de continuité.

Résumons la notion de singularité, un peu plus algébriquement, avant d'aller plus loin :

Une singularité désigne, en mathématiques, une fonction qui présente la particularité d'avoir toutes ses dérivées premières nulles en un point. Un exemple très simple est la fonction quadratique $f(x) = x^2$. La dérivée première de $f(x)$ est $2x$, qui s'annule à l'origine ($x = 0$). (la fonction présente un minimum en un point et possède une tangente horizontale). Un autre exemple est la fonction quadratique dépendant de deux variables $f(x,y) = x^2 + y^2$. Les deux dérivées premières $2x$ et $2y$ s'annulent à l'origine (la fonction présente un minimum).

Plus encore :

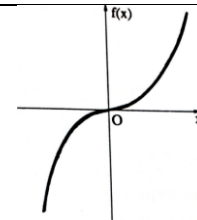
¹ https://fr.wikipedia.org/wiki/Fonction_inverse ; <http://www.jybaudot.fr/Analyse/tangente.html> ; <https://www.bimath.net/dico/index.php?action=affiche&quoi=/d/demitangente.html> ;

² https://en.wikipedia.org/wiki/Singular_point_of_an_algebraic_variety

³ Van Lundsgaard Hansen, *Geometry in nature*, A K Peters, Massachusetts, 1993, ppp.75-76.

Une fonction est une singularité dégénérée si non seulement toutes ses dérivées premières, mais aussi toutes ses dérivées jusqu'à un certain ordre s sont nulles (en un même point).

Ainsi la fonction $f(x) = x^3$ est une singularité dégénérée d'ordre deux : sa dérivée première ($3x^2$) et sa dérivée seconde ($6x$) sont toutes deux nulles à l'origine. L'origine est ce qu'on appelle **un point d'inflexion [pour $x=0$]**. Plus généralement, la fonction $f(x^k)$ est une singularité dégénérée d'ordre $k-1$.



Continuons en nous dirigeant davantage ... vers le droit. La réflexion de Thom lui-même va nous aider.

L'être individué peut être appréhendé, soit en extension, soit en intension (avec un s au milieu, comme en logique, i.e. en compréhension). En extension, l'être individué est défini de manière « externe » par sa localisation spatio-temporelle (si elle existe). De ce point de vue, l'« être individué » apparaît être un fermé dans l'espace (euclidien). L'individuation requiert qu'il soit connexe. *Dans la majorité des cas, ce sera un ensemble contractile, en fait une « boule ».* Il existe évidemment des exemples individués non connexes : le couvert sur une table. Dans le domaine social, une entreprise ou une administration sont en général non connexes. Mais même là, il existe des relations de contiguïté entre les individus constituants, et des relations fonctionnelles entre ces derniers qui rétablissent la connexité.¹

En extension, Thom rappelle que, selon Spinoza, tout être (individué) tend à persévérer dans son être. (Spinoza généralise le postulat de Hobbes dans le domaine politique.). *De là, dit-il, qu'il faut s'intéresser de près aux mécanismes qui permettent à un être de résister aux perturbations qui l'assaillent.* De ce point de vue, il importe d'élucider l'instabilité [éventuelle] et les voies d'issue vers un nouvel équilibre.²

Dans ce projet d'étude, les points singuliers s'avèrent avoir des propriétés spécifiques qui permettent de trouver l'allure globale d'une courbe ou d'une forme de façon plus générale. Une singularité, telle qu'explorée par Thom, possède en effet la propriété remarquable de concentrer une forme globale en un point, i.e. très localement.

- Un exemple ?

- Reconsidérons la fig. supra représentant la fonction $f(x) = x^3$ qui possède un point d'inflexion à l'origine.

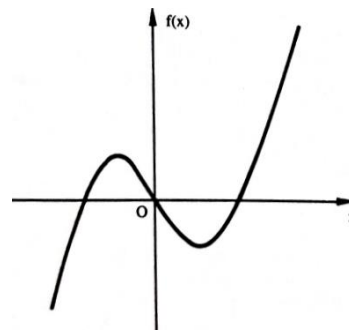
Ce point est une racine cubique :

$$y = x^3 = x \times x \times x. \text{ La racine cubique de } y \text{ est notée } \sqrt[3]{y}.$$

C'est une singularité (cubique) en $x = 0$. Ce n'est pas, en dépit de l'apparence, quelque chose de simple.

Il résulte de la collision d'un maximum et d'un minimum, et recèle donc en lui-même une complexité cachée. Le déploiement de la singularité, c'est-à-dire sa déformation sous l'effet de petites perturbations, permet précisément de mettre en évidence cette structure latente.

*En déformant la singularité x^3 en $x^3 - a^2x$, on fait apparaître, de part et d'autre de l'origine, un maximum et un minimum locaux, initialement confondus, et donc inapparents. Ce maximum et ce minimum sont dits locaux, car ils ne sont le point le plus haut ni le plus bas de la courbe, mais seulement le plus haut et le plus bas par rapport aux points voisins.*³



(§54
3/a)
-ii)

¹ R. Thom, *Apologie du logos* [1990], op. cit, p.207.

² *Ibid.*, p.208 ; René Thom, « Spectre bord d'un centre obscur », in *Passion des formes. A René Thom*, coord. par Michèle Porte, E.N.S Edit., Fontenay-Saint Cloud, 1994, p.23.

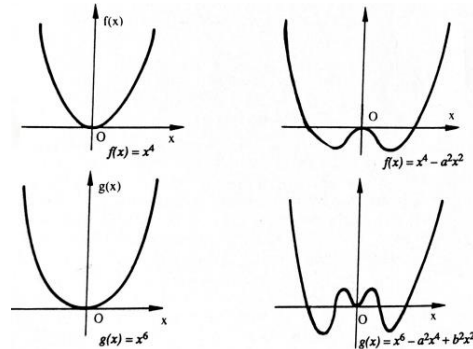
³ Alain Boutot, *L'invention des formes*. Odile Jacob, Paris, 1993, pp.284-285.

Nous ne développerons pas à nouveau le processus de déformation de cette fonction, ou d'une autre comme $f(x) = x^4$ ou $g(x) = x^6$, sous le coup de petites déformations qui ont pour effet de « déployer », autrement dit de désingulariser la singularité initiale. Ce qu'il faut retenir ici est que

le déploiement est une technique pour rendre apparent le latent, pour actualiser le virtuel contenu dans une singularité.

C'est aussi une méthode pour faire surgir des différences qualitatives entre fonctions apparemment identiques. Ainsi, les fonctions $f(x) = x^4$ ou $g(x) = x^6$ ont un aspect semblable au voisinage de l'origine. Les deux fonctions décroissent, passent par un minimum (à l'origine) puis croissent. Cette similitude est trompeuse, car elles ont d'un ordre différent, et par conséquent d'une nature différente.¹

Déploiement de $f(x) = x^4$ et $g(x) = x^6 \rightarrow$



- Mais Thom ne parle pas seulement de déploiement. Il qualifie ce dernier d'*universel* lorsqu'il évoque le germe d'une fonction, par x^3 , dans la fonction $f(x) = x^3$. Le germe engendre la famille de toutes ses déformations (comme la déformation $x^3 - a^2x$ par ex). *De par sa structure, ce germe analytique engendre quelque chose qualitativement. Le déploiement universel est tout simplement une manière de « déployer » toute l'information intrinsèque renfermée en une singularité.*² La singularité concentre toute une structure globale en une structure locale qui se déploie sous l'effet de petites perturbations.

- Thom parle de « manière ». Il y a en effet plusieurs manières de déployer une singularité en la déformant, car on est libre dans le choix des termes perturbateurs.

*Rien n'interdit, par ex., de déployer la singularité en lui ajoutant deux termes, cent termes, voire davantage. Le déploiement universel a ceci de particulier qu'il ne retient que des transformations topologiquement pertinentes et les retient toutes. Il est constitué par la famille minimale de toutes les déformations possibles d'une fonction donnée. Il paramétrise "toutes les actualisations" possibles, dit Thom, des virtualités contenues dans une situation instable représentée mathématiquement par une singularité ».*³

Une fronce, déjà évoquée dans notre thèse, est le déploiement universel de la singularité biquadratique $x^4/4$. Et Thom de préciser plus formellement :

*L'idée de déploiement universel contient en un certain sens la partie qualitative de la formule de Taylor : quand on a un germe de fonction différentiable, il y a localement un développement de Taylor, et l'on peut légitimement se demander si en le tronquant à un certain point, ce développement tronqué continue à avoir la même allure, le même type topologique que le germe de fonction différentiable initial. (...) Réduire localement un germe, décrit par une série infinie, à une série qui se compose d'un nombre fini de termes, cela représente une grande économie de pensée : un moyen unique pour décrire toutes les déformations possibles de ce germe.*⁴

Le déploiement d'une singularité, d'origine aussi dynamique, ne pourra que lui rappeler **l'idée d'un prolongement analytique** dont nous sommes devenus familiers. L'obstacle à la tendance à persévérer dans son être ne peut pas être seulement analysé, au dire de Thom, comme une *cassure analytique*, un *raté dans le prolongement analytique*. Comme une crise qui accouche d'une nouveauté, le déploiement universel qui en resurgit restitue le prolongement autrement :

*Comme les seules fonctions effectivement définies sont les fonctions analytiques qui permettent le raccordement d'arcs de courbes donnés empiriquement, on est amené à conclure que toute loi d'évolution temporelle d'un phénomène doit pouvoir s'exprimer analytiquement.*⁵

Un phénomène physique peut ainsi être appréhendé à la fois comme un point de bascule, à l'image d'un *cusps* qui, à la lettre, signifie être sur le point de (*on the cusp of*) d'être bousculé, et un point de départ pour remettre sur ses pieds un nouveau développement, sous la forme par ex. d'un pli ou

¹ *Ibid.*, pp.285-286.

² R. Thom, *Paraboles et catastrophes*, Flammarion, Paris, 1983, op. cit., p.27

³ A. Boutot, *L'invention des formes*. P.296.

⁴ R.Thom, *Paraboles et catastrophes*, p.28.

⁵ R.Thom, « Spectre bord d'un centre obscur », p.15.

d'une fronce en théorie des catastrophes. Tel est le destin d'une singularité, que Thom qualifie de *générique* en ce qu'elle en sort « vivante », mais comme transformée par une perturbation arbitrairement petite.

La *catastrophe* n'est finalement que la réaction d'un point singulier (« catastrophiste ») à cette perturbation qui emporte la disparition d'un équilibre stable pour aboutir à un nouvel équilibre. La catastrophe n'est donc pas totale..., quoiqu'elle puisse le devenir, malheureusement aussi, dans la nature et le droit.

- Pourquoi parler du droit ?

- Parce que le droit constitutionnel recèle lui-même des singularités au destin un peu similaire, sans connaître bien sûr un prolongement aussi déterminé « analytiquement » à l'avance.

Annexe I

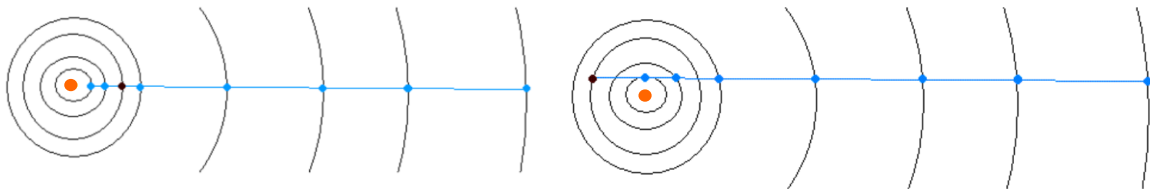
Alignement des planètes et résonance orbitale

Les alignements planétaires ont toujours fasciné les populations, qui y voient des « signes » que ne ratifient point la science.

1/ Alignement des planètes

Pour avoir un alignement entre planète, il faut considérer au moins trois planètes ! Pour constater simplement un alignement planétaire avec la Terre, il suffit de voir deux planètes ou plus se rassembler dans le ciel en un même point, ou du moins, dans une même zone du ciel restreinte.

Si cette zone du ciel passe au méridien à minuit, alors, le Soleil sera aussi dans cet alignement. Si certaines planètes se trouvent derrière le Soleil, on aura aussi un alignement, mais ce sera bien moins spectaculaire car invisible.



alignement avec le Soleil :

on ne peut pas voir toutes les planètes dans une même région du ciel : Mercure et Vénus sont obligatoirement du côté du Soleil (la Terre est figurée par un point noir)

alignement avec la Terre :

on peut voir toutes les planètes dans la même région du ciel. La présence de Mercure doit être observée au crépuscule. Sans Mercure, le regroupement est plus spectaculaire.

Est-ce dangereux ?

Non, pas vraiment, car *la force d'attraction diminue considérablement avec la distance. Le Soleil, malgré sa masse presque un milliard de fois plus importante que celle de la Lune, exerce une force inférieure à celle-ci. Jupiter, la planète la plus massive, ne représente qu'un millième du Soleil et est 5 fois plus éloignée de nous que celui-ci. La marée créée par Jupiter sur la Terre, élève les océans de moins d'un millimètre... L'ensemble des planètes alignées, de masse inférieure à celle de Jupiter, n'a donc aucune influence notable sur la Terre.*

De plus,

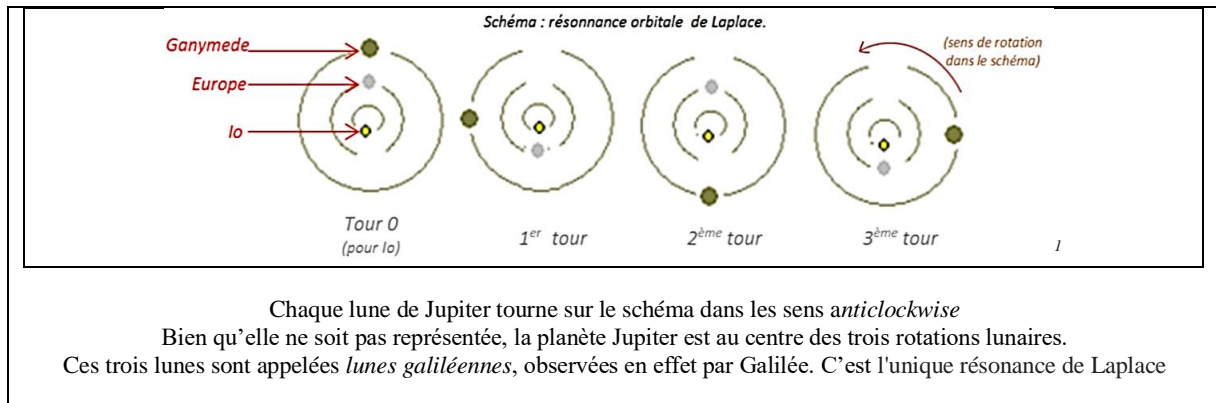
le véritable alignement planétaire nécessite que les centres des planètes concernées se trouvent tous sur une même droite à un instant donné. C'est évidemment très rare car les planètes ne se déplacent pas dans un même plan.¹

2/ Résonance orbitale (revoir §42 2/ii plus explicite)

*Une **résonance orbitale**, en astronomie, a lieu lorsque deux objets orbitant autour d'un troisième ont des périodes de révolution dont le rapport est une fraction entière simple. C'est un cas particulier de résonance mécanique.*

*Lorsque plusieurs objets ont leur période orbitale dans un rapport avec des entiers simples, on parle de résonance de Laplace. C'est le cas, par exemple, **des lunes de Jupiter**, Ganymède, Europe et Io qui sont dans une résonance 4:2:1.*

¹ JE Arlot, *les alignements planétaires*, <https://www.imcce.fr/newsletter/docs/ch3-alignements-planetaires.pdf>



Annexe II

Rappel et complément sur l'élasticité (déjà évoquée au §46, /a)vii)

1/ Notion

L'élasticité est traitée, notamment en économie, pour appréhender le problème de **variation non proportionnelle** de certaines quantités en fonction d'une autre. L'élasticité est l'exposant qui mesure le rapport entre deux variations relatives, **e, élasticité de y par rapport à x** = $(dy/y) / (dx/x)$.

Cette proportion e est une constante. Dans la plupart des cas, on peut écrire la relation entre les deux variables comme une fonction puissance dont l'exposant est cette élasticité : $y = k x^e$.

Pour toute fonction dérivable u, et de dérivée u', le rapport u'/u, qui représente la variation relative instantanée, est **la dérivée logarithmique de la fonction u, i.e. ln(u)**.

2/ Exemple d'élasticité mettant en rapport le budget total des ménages et un poste de dépenses

Lorsque l'élasticité e est < 1 , la part du poste de dépenses considéré (comme l'alimentation) décroît lorsque le revenu des ménages augmente, tandis que lorsqu'elle est > 1 (comme pour l'habillement ou l'automobile) le poste de dépenses considéré prend une part croissante en fonction du revenu.

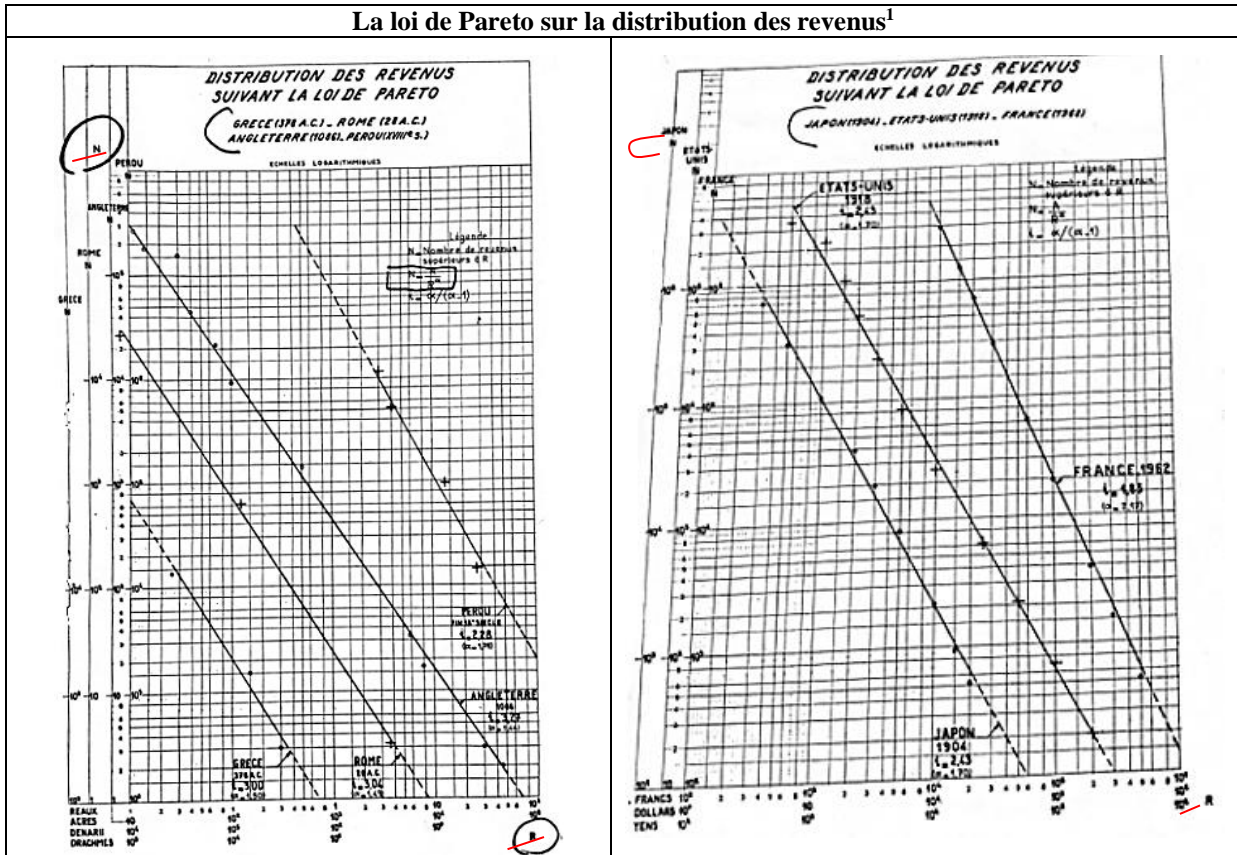
Si $e = 1$, la relation entre le revenu total et la dépense partielle est **linéaire**. L'une varie proportionnellement à l'autre.

Lorsque $e \neq 1$, la relation entre les deux grandeurs **n'est pas linéaire** (la dépense consacrée à un poste particulier augmente plus ou moins vite que le revenu total), **mais c'est entre les variations des deux variables que l'on a une relation de proportionnalité**.

¹ <https://www.techno-science.net/definition/6597.html> ; http://tpe.viesureurope.free.fr/categorie_principale/voir_plus_loin/2-2-b-les_4_principaux_satellites_joviens.html#h4 ; https://fr.wikipedia.org/wiki/Résonance_orbitale

Annexe III

La loi de Pareto sur la distribution des revenus¹



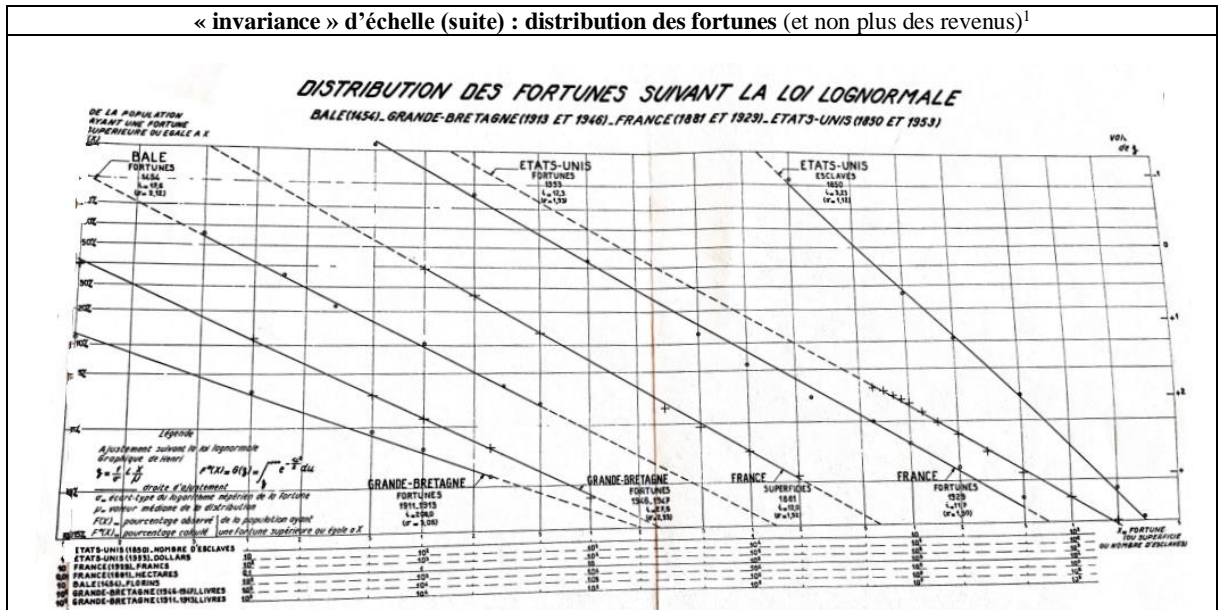
<p>Grèce (378 AC) – Rome (28 A.C.) - Angleterre (1086) – Pérou (XVIII^e s.)</p>	<p>Japon ((1904) – Etats-Unis (1918) – France (1962)</p>
---	--

$$N = A/R^\alpha,$$

où N est le nombre de revenus supérieurs à une valeur R,
et où A et α (le coefficient de Pareto) sont des constantes

¹ Maurice Allais, *Classes sociales et civilisations*, in *Economies et sociétés*, op. cit., Cahiers de l'I.S.E.A., série HS, n+ 17, 1974, pp.320-321.

« invariance » d'échelle (suite) : distribution des fortunes (et non plus des revenus)¹

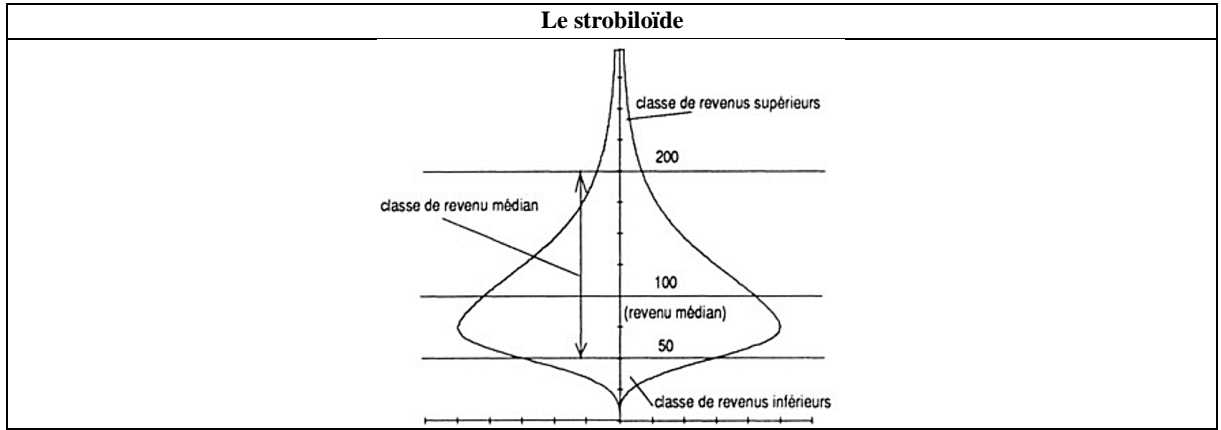


en ordonnée : F(x) de 0,015 % à 90 % : % de la population ayant une fortune supérieure ou égale à X
 en abscisse : X = fortune (ou superficie ou nombre d'esclaves)

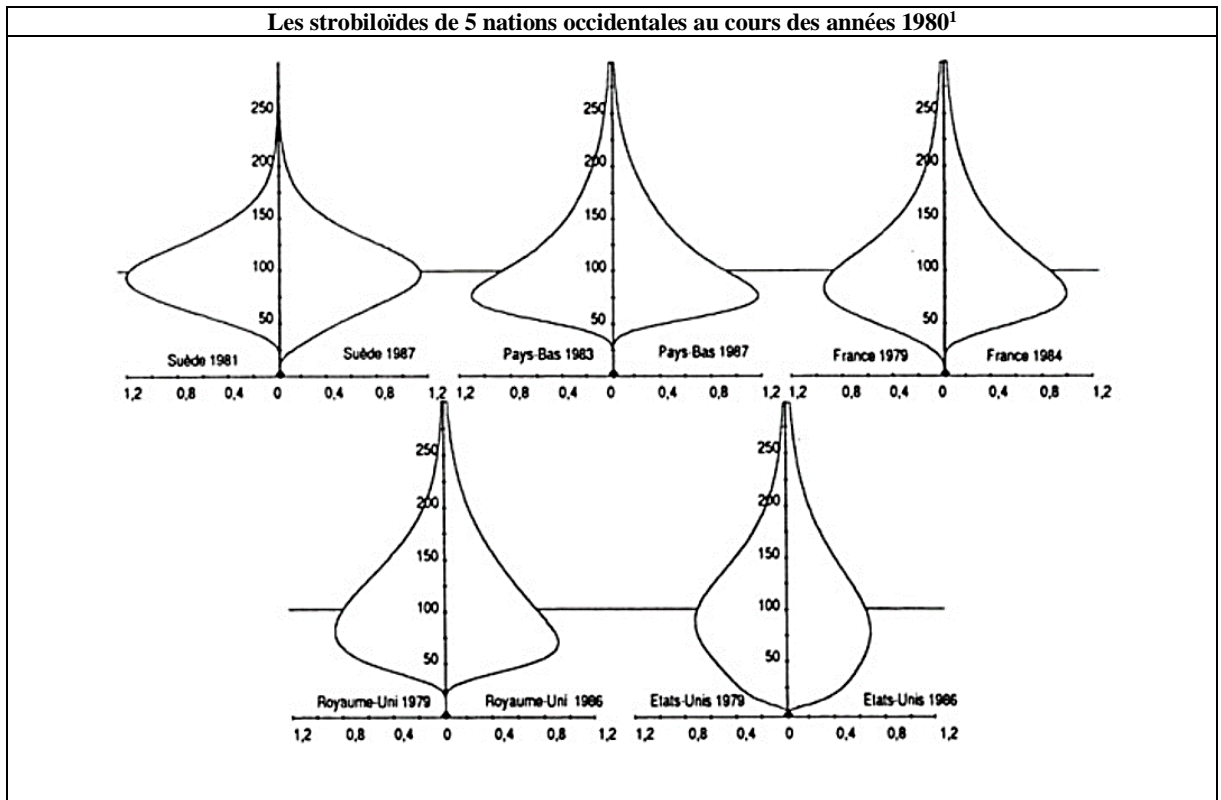
Pays concernés : Bâle (1454),- Grande-Bretagne (1913 et 1946) – France (1881 et 1929) – Etats-Unis (1850 et 1953)

¹ Ibid.

Annexe IV



Annexe IV^{bis}



¹ L. Chauvel, « Inégalités singulières et plurielles : les évolutions de la courbe du revenu disponible art. cit., p.230.

Annexe V

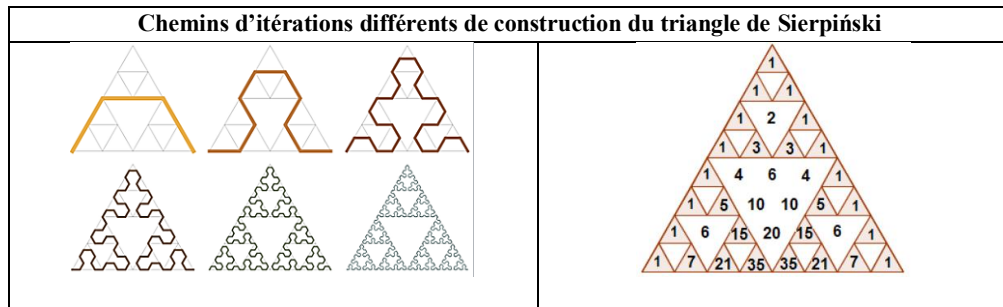


fig de droite : Dans le triangle de Pascal construit dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, on a retenus tous les coefficients binomiaux pairs. Par ex. : **4, 6, 4** dans le développement du binôme de Newton qui généralise le triangle de Pascal :

$$(x+y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$$

Rappel : \mathbb{Z} = ensemble des entiers relatifs : $\mathbb{Z} = (\dots; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; \dots)$. L'ensemble \mathbb{N} est inclus dans l'ensemble \mathbb{Z} qui est, par ailleurs, stable pour l'addition, la soustraction et la multiplication. C'est un groupe pour ces opérations. $2\mathbb{Z}$ est l'ensemble des entiers pairs ; c'est un sous-groupe de \mathbb{Z} .

(§24
1/-
ii)

(§26
a)ii)

$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est un exemple d'**ensemble quotient**, i.e. un ensemble de classes d'équivalence. C'est formellement le quotient d'un ensemble par une relation d'équivalence.

Si l'on prend l'ensemble des entiers, et la relation d'équivalence "avoir le même reste dans la division par 2", l'on peut mettre ensemble tous les entiers pairs, et ensemble tous les entiers impairs. On obtient deux classes d'équivalence. $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est également un groupe. Dire que x et y ont le même reste dans la division par 2 est la même chose de dire que $x-y$ est pair", i.e. $x-y$ appartient à $2\mathbb{Z}$. De façon générale, L'application $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ associe à un entier relatif le reste de la division par n .

Le groupe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ peut être vu comme l'ensemble $\{0,1\}$ muni de l'addition modulo 2, où $\bar{0}$ est la classe des entiers pairs et $\bar{1}$ la classe des entiers impairs, ce qui se traduit par : $0+1 = 1+0 = 1, 1+1 = 0$

Annexe VI

Raisonner en calculant en modulo ¹

Rappel : calculer modulo tel nombre, produit ou puissance par ex..

Soit 16 modulo 3 : j'enlève 3 à 16, ce qui fait 13, i.e. $16 \equiv 13 [3]$, et je peux continuer le processus en enlevant chaque fois 3, i.e. $16 \equiv 13 [3] \equiv 10 [3] \equiv 7 [3] \equiv 4 [3] \equiv 1 [3] \equiv -2 [3]$, etc. Tous ces nombres ont égaux (ou congrus) modulo 3. De même $12 \equiv 4 [8]$.

Soit $2 \times 3 \times 5 \times 3$ modulo 7 : commençons par $2 \times 3 = 6 [7] = -1$; ensuite $5 \times 3 = 15 - 7 - 7 = 1 [7]$, soit au final : $-1 \times 1 = -1 [7]$, ou, si l'on souhaite un nombre positif : $2 \times 3 \times 5 \times 3 \equiv 6 [7]$.

Avec les puissances : soit $6^{43} [7]$: On pensera à enlever 7 de 6 pour essayer de nous ramener à 1 ou -1 ; donc $7 \div 6 = -1$, pour calculer $-1^{43} [7] \equiv -1 [7]$. Ou, un peu plus compliqué : $4^{50} [7]$: on calcule progressivement les puissances de 4 jusqu'à tomber sur 1 ou -1, soit $4^1 \equiv 4 [7]$; $4^2 = 16 - (2 \times 7) \equiv 2 [7]$; $4^3 = 16 \times 4 = 2 \times 4 = 8$, soit $4^3 [7] \equiv 1 [7]$. Or $4^{50} = 4^{3 \times 16 + 2} = 4^{3 \times 16} \times 4^2 = 4^3 \wedge (16) \times 16 [7] = 1 \times 16 = 16 - (2 \times 7) = 2$, d'où $4^{50} [7] \equiv 2 [7]$. Attention à l'erreur à éviter pour les puissances : dans $4^{50} [7]$, on peut remplacer 4 par un nombre modulo 7, mais pas l'exposant 50, car $50 \equiv (7 \times 7) + 1 = 1 [7]$, mais $4^{50} \neq 4^1$

¹ <https://www.youtube.com/watch?v=SdKhHF9v9zo>

Annexe V^{bis}Equations, avec ou sans modulo¹**1/ Equation avec multiplication :**

Soit à calculer par ex. : $4x \equiv 2 [11]$. L'idée est de chercher un nombre tel que $1 \equiv ? [11]$, i.e. $1 \equiv 12 [11]$. Je songe alors à multiplier par 3 de part et d'autre l'équation, soit : $12x \equiv 6 [11] \equiv 1x [11]$. D'où $x \equiv 6 [11]$. On a résolu l'équation, mais jusqu'ici, on a raisonné par implication. Il faut donc vérifier que 6 est la solution de l'équation : $4x \equiv 2 [11]$. Donc $4 \times 6 \equiv 2 [11]$, i.e. $24 - (11 \times 2) = 2$. On a bien : $4x \equiv 2 [11]$.

Attention ; dans l'équation $4x \equiv 2 [11]$, x est un entier relatif, ce qui veut dire que $x = 6 +$ un certain nombre de fois 11, i.e. $x = 6 + 11.k$, avec k élément de \mathbb{Z} (ensemble des entiers relatifs). En fit, on a une infinité de solutions, i.e tous les entiers de la forme $6 + 11.k$

2/ Equation avec division : ici, on n'a pas le droit, avec les congruences, de diviser de part et d'autre de l'équation par un même nombre

3/ Lien avec les restes :

Dans $a \equiv b [n]$, si $0 < b < n$, i.e. $b > 0$ et $b < n$, alors b est le reste de la division euclidienne de a par n . Par ex., si, dans un calcul, on arrive à $a \equiv 2 [7]$, 2 est bien le reste, mais si $a \equiv -2 [7]$, alors -2 n'est pas un reste, car c'est < 0 ; il faudra rajouter $+7$ (car $+7$ ne change rien), donc $a \equiv 5$ modulo 7. Ce qui veut dire que 5 est bien le reste dans la division euclidienne par 7.

Si, dans un calcul, on trouve $a \equiv 16 [16]$, 16 ne peut être le reste parce que $16 > 7$; on doit donc enlever 2 \times à $16 = 2$. Le reste de la division euclidienne de a par 7 est bien 2.

4/ Problème avec les produits nuls :

Si $a \times b \equiv 0 [n]$, on peut appliquer la règle du produit nul avec les congruences (i.e. quand on est en modulo), et dire $a \equiv 0 [n]$ ou $b \equiv 0 [n]$. Ex. pour s'en persuader : calculons $2 \times 3 \equiv ? [6]$. Or $6 [6] \equiv 0 [6]$. On a un produit égal à 0 sans ni 2 ni 3 soient égaux à 0 [6].

5/ Equation avec des entiers, sans modulo, ou comment passer au modulo :

Soit $2x + 5y = 3$. On commence par se débarrasser du bloc $2x$; il faudrait qu'il soit $2x = 0$. Pour ce faire, il faut travailler en modulo 2, i.e [2]. Or $2 \equiv 0 [2]$. Dans ce cas, dans $2x + 5y \equiv 3$, le $2 \equiv 0 [2]$. le $5 \equiv (2 \times 2) + 1 [2] \equiv 1 [2]$, et le $3 \equiv 3 - 2 \equiv 1 [2]$, d'où $y \equiv 1 [2]$. Maintenant, pour se débarrasser du bloc $5y$, on passe au modulo 5. Comme $5 \equiv 0 [5]$, il reste $2x \equiv 3 [5]$. Ainsi, on $y = 1 [2]$ et $2x = 3 [5]$, ce qui se traduit par $y = 1 +$ un certain nombre de fois 2 = $1 + k \cdot 2$ (avec entier relatif) et $x = \dots + k' \cdot 5$, les pointillés étant à remplir avec une « table de congruence ». Enfin, on remplace x et y dans l'équation de départ pour obtenir les valeurs des solutions dans lesquelles k' s'exprimera en fonction de k .

6/ Table de congruence. Résoudre par ex. l'équation $4x \equiv 5 [9]$. Il faut compléter la table des restes dans la congruence modulo 9. Supposons $x \equiv 5 [9]$. Alors $4x \equiv 20 [9] = (2 \times 9) + 2 [9] \equiv 2 [9]$, à insérer dans la table, et ainsi de suite...

$x \equiv$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$4x \equiv$						2			

A l'aide de la table, on peut dire que les solutions de l'équation sont les entiers égaux à 8 modulo 9 (car 5 est sous l'entier 8 après calcul)

¹ Ibid. ; <https://www.youtube.com/watch?v=dsJyYDF21j4> ; <https://www.youtube.com/watch?v=mw9-Fhs-OJw>

Annexe VII

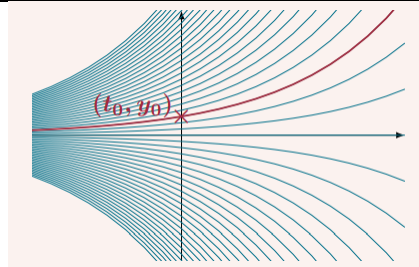
Le problème de Cauchy

1/ Définition

Soient t_0 et y_0 deux réels. On appelle problème de Cauchy de (E) de condition $y(t_0) = y_0$ le système défini par le système suivant, comprenant une équation différentielle vérifiant une certaine condition initiale :

$$(E_{t_0, y_0}) : \begin{cases} y' + ay = b \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Ce problème admet une unique solution (voir ci-contre en rouge)



2/ Portée

Dans le cas d'une équation différentielle d'ordre 1, de la forme $y'(t) = f(t, y(t))$,

la condition initiale adaptée sera la donnée d'une valeur initiale pour la fonction inconnue y , et prendra la forme d'une équation $y(t_0) = y_0$. Les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz exigent une certaine régularité de la fonction f .

Dans le cas des équations d'ordre supérieur,

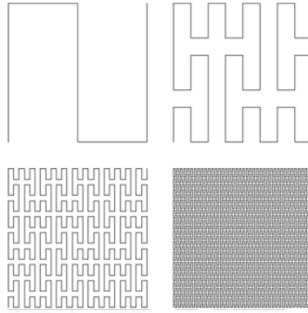
la condition initiale portera sur une hypersurface du domaine de définition : par exemple, dans le cas réel, les conditions se porteront non seulement sur une valeur initiale pour y , mais aussi pour toutes ses dérivées jusqu'à la dérivée d'ordre $n-1$ pour une équation d'ordre n . Ainsi, pour une équation d'ordre 2 de la forme $y''(t) = f(t, y'(t), y(t))$ seront imposées la valeur initiale de y sous la forme d'une équation, mais aussi la valeur initiale de y sa dérivée sous la forme d'une équation $y'(t_0) = y'(0)$.¹

¹ Julie Scholler, *Mathématiques pour l'économiste*, Univ. de Tours, 2019, <https://juliescholler.gitlab.io/publication/12maths4-1920/L2ECO-CoursComplet-1920.pdf> ; https://fr.wikipedia.org/wiki/Probl%C3%A8me_de_Cauchy

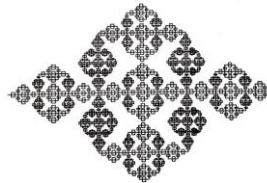
Annexe VIII

La courbe de Peano et ses variations ¹

1/ Après quatre itérations :



2/ En faisant varier le procédé des 9 segments de manière à ce que la longueur des verticales soit inférieure à celle des horizontales :



¹ https://fr.wikipedia.org/wiki/Courbe_de_Peano ; I. Binimelis Bassa, *Une nouvelle manière de voir La géométrie fractale*, op. cit., p.76..

§67^{bis}. - Le rajeunissement de l'épistémè des Lumières

2/ Le continuuel apport des mathématiques et de la physique (suite)

c) La contribution multiforme d'Henri Poincaré

- i Que peuvent nous dire les géométries non-euclidiennes en droit ?
- ii Le disque et le demi-plan de Poincaré, 546
- iii Un renvoi à l'occasion au plan projectif, 548
- iv Retour à Poincaré et à sa notion de section, 551

d) L'approche physico-mathématique de la stabilité institutionnelle

- i L'instabilité est la règle, et la stabilité l'exception ? 557
Annexe XIII
- ii Stabilité, symétrie et invariance, 562
Annexes I, II ; III, IV, VI, VII, XIII et XIV, 573

o

1/ Le continuuel apport des mathématiques et de la physique

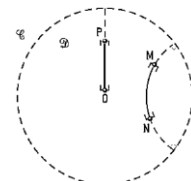
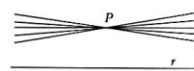
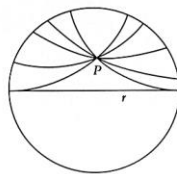
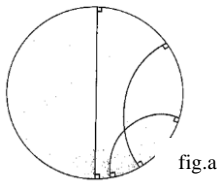
c) La contribution multiforme d'Henri Poincaré

i Que peuvent dire les géométries non-euclidiennes en droit ?

ii Le disque et le demi-plan de Poincaré

Le disque de Poincaré

Nous ne retenons ici que la représentation plane de la géométrie hyperbolique par Henri Poincaré en 1882. Cette représentation a été précédée par celle de Beltrami, reprise par Felix Klein. Ce qui est commun à ces trois représentations est la prise en considération d'un disque ouvert, donc sans bord. Dans le modèle Beltrami-Klein, les droites demeurent des segments de droites euclidiennes, tandis que dans celui de Poincaré, les droites sont des arcs de cercles, à l'exception des diamètres (euclidiens) du disque. Toutes ces droites sont orthogonales au cercle. (*fig.a*)



Dans cette géométrie, par un point extérieur à une droite, passe une infinité de droites « parallèles », i.e. de droites qui ne coupent pas. Idem dans le plan de Poincaré : les droites peuvent se croiser ... sans se couper. Ce sont à nouveau des géodésiques qui portent les chemins les plus courts entre deux points. Elles ne vérifient pas, comme celles sur la sphère, le V^e postulat d'Euclide. (*fig.b*) Un segment droit sur diamètre du disque est aussi une géodésique comme tout arc de cercle dans le disque. (*fig.c*)

Autre propriété connue : si nous traçons un triangle, la somme des angles est inférieure à deux droits, dans cette géométrie comme dans son modèle dans le plan euclidien. Par ex., la somme d'un triangle rectangle au centre du disque vaut $\alpha + \beta + \gamma < 180^\circ$. (*fig.d*) La courbure est négative. Dans ce plan, les distances sont, par ailleurs, déformées. Plus on s'approche du bord, plus les points, proches en apparence, sont, en réalité, éloignés. Un habitant du disque hyperbolique, partant du centre O, n'attendra jamais le pourtour du cercle en un temps fini.

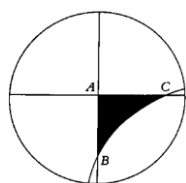


fig.d

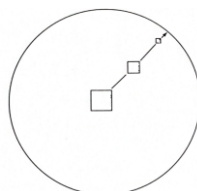


fig.e

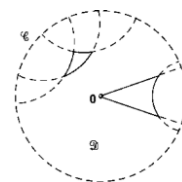


fig.f

Il existe enfin une autre propriété inhabituelle à signaler : il n'y a pas d'homothétie entre les triangles de la taille souhaitée, puisque la somme des angles varie entre un minimum, 0° , et moins de 180° . (fig.f supra) Cette somme peut prendre toutes les valeurs comprises strictement entre ces nombres (fig.g et h), contrairement à celle d'un triangle euclidien qui est constante, et égale à 180° . Les angles de chaque triangle peuvent varier de 0 à $\pi/3$, ce qui permet de dessiner une infinité de pavages par triangles équilatéraux. Soit, parmi ces derniers, un pavage hyperbolique avec des triangles tous équilatéraux, mais aussi de même taille par la transformation dite « conforme » qui préserve les angles. (fig.i)¹

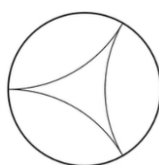


fig.h

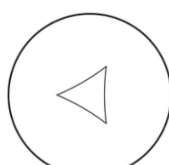


fig.g

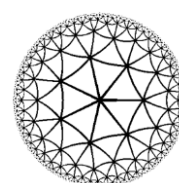


fig.i

triangle équilatéral où la somme des angles est très petite

triangle équilatéral où la somme des angles égale $3\pi/4$

pavage triangulaire du plan hyperbolique dont les angles valent tous $2\pi/7$ radians

$360^\circ = 2\pi$ rad. ; $60^\circ = \pi/3$ rad.

(Annexe IV, sur les transformations conformes, et celles en particulier de Möbius)

Voilà l'ABC de la géométrie hyperbolique qui peut être un bagage utile pour le juriste constitutionnel.

Henri Poincaré a modélisé, avons-nous dit, cette géométrie dans le plan euclidien par un disque dont le bord est exclu. Le bord représente l'infini ou « l'horizon ».

Comme le montre le pavage supra des triangles équilatéraux (ou d'autres figures comme des octogones réguliers ayant tous des angles de 45° et des côtés égaux), certaines figures apparaissent sur ce disque, plus petites que d'autres bien qu'elles soient égales. Cette différence est due à la déformation des distances à mesure que l'on approche du bord du disque de Poincaré. *C'est seulement la représentation que nous nous en faisons dans le plan euclidien qui donne l'illusion qu'il y a un centre.*²

Dessignons quelques représentations, parmi d'autres, du disque de Poincaré. Que constate-t-on ? Des courbes qui sont des « droites » en représentation conforme (celle qui préserve les angles). Il en existe une infinité. Toutes sont « parallèles » entre elles (elles ne se coupent pas, même si elles se croisent) comme les droites d_1 , d_2 et d_3 , qui passent par le point M, à la droite D. (fig. 1) Ainsi, par un point M, situé hors de la droite (Δ), on peut mener deux parallèles à (Δ) : (d') et (d''). Nous ne parlons pas ici de la façon dont est calculée la distance EF sur la droite (d). (fig.2) Enfin, les droites sont des arcs de cercles orthogonaux au cercle. (fig.3)³

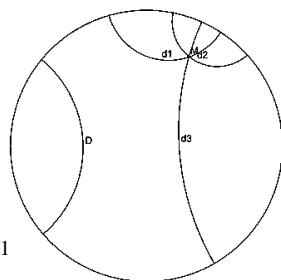


fig.1

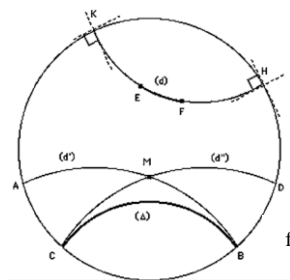


fig.2

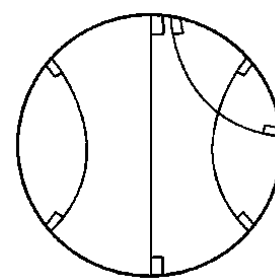


fig.3

¹ Jos Leys, *Une chambre hyperbolique*, 24 dé. 2008, <https://images.math.cnrs.fr/Une-chambre-hyperbolique.html>

² Jean-Paul Delahaye, « Calculer dans un monde hyperbolique ? », in *Pour la science*, n° 316, févr. 2004, p.92.

³ https://fr.wikipedia.org/wiki/Géométrie_hyperbolique http://serge.mehl.free.fr/anx/disqu_beltrami.html ; Françoise Dal'Bo-Milonet, « La géométrie des horizons », in *Pour la science*, n° 411, janv., 2012, p.41.

(§47
c)-i)

N.B. : On peut représenter certains aspects du plan hyperbolique en géométrie euclidienne, mais, avec de telles tentatives, d'autres aspects du plan hyperbolique sont perdus. Cette complication s'apparente au problème auquel furent confrontés Mercator et les autres dessinateurs de cartes lorsqu'ils tentèrent de représenter une géométrie sphérique (celle du globe terrestre) dans le plan euclidien.¹

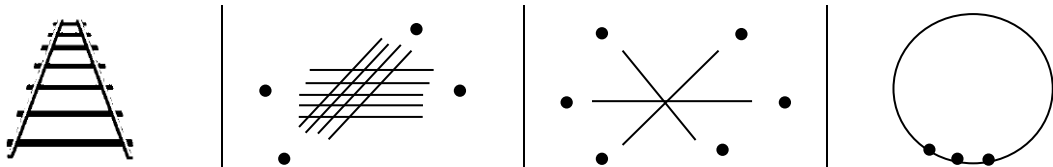
Le demi-plan de Poincaré

iii Un renvoi à l'occasion au plan projectif

- Le plan projectif, c'est le plan euclidien + une droite.

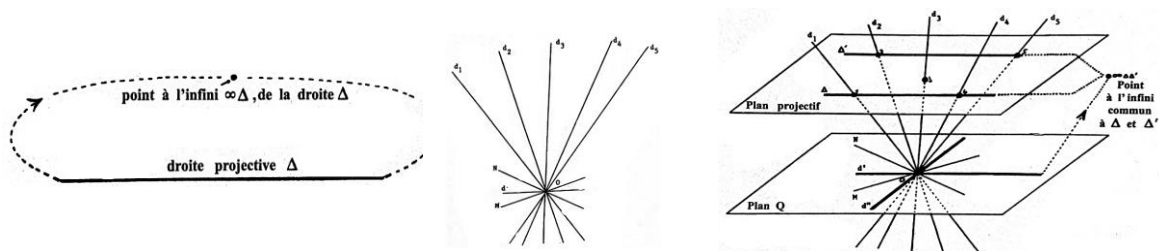
- Abscons !

- Pensez aux rails d'un chemin de fer. Vous savez qu'elles sont parallèles, et qu'elles le demeurent pour arriver à destination ! Sur le quai cependant, vous voyez au loin qu'elles convergent vers un point. Si vous êtes au centre d'un réseau ferroviaire, les rails parallèles des différentes directions convergent toutes chacun vers un point à l'horizon, que vous regardiez en avant ou en arrière. Pour chaque direction, et quel que soit le nombre de parallèles, vous avez donc un point « à l'infini ». Tous les points



sont reliés. Ils forment ce que l'on appelle « la droite projective », représentée par un cercle sur le pourtour duquel sont situés tous les points projectifs (3 seuls ont été dessinés). Les directions sont parallèles mais ils convergent vers un point projectif, comme l'admirent les peintres de la Renaissance pour représenter la perspective grâce à un « point de fuite ». Une droite projective est une infinité de points projectifs à l'infini. Chacun correspond à une direction. Une direction définit une classe d'équivalence.

Une droite projective est une droite en fin de compte fermée, ce qui explique le cercle. Ce qui se produit en 2D demeure valable en 3D. Au lieu d'un faisceau de droites, nous avons affaire à une gerbe de droites auxquelles correspondent des points à l'infini. Il y a encore une bijection entre le plan projectif et la gerbe. A chaque point du plan projectif, y compris ses points à l'infini, correspond une seule droite de la gerbe, et réciproquement. La bi-continuité est aussi établie ; à deux points voisins du plan projectif correspondent deux droites voisines de la gerbe, et réciproquement. Ces deux conditions étant remplies, nous pouvons affirmer formellement que le plan projectif est « homéomorphe » à la gerbe.²



Le cercle n'est pas ici le cercle immatériel du disque de Poincaré. A l'infini figure un point de l'horizon.

La propriété essentielle n'est pas encore révélée. Elle réside dans le fait que la droite projective est **une surface non orientable**.

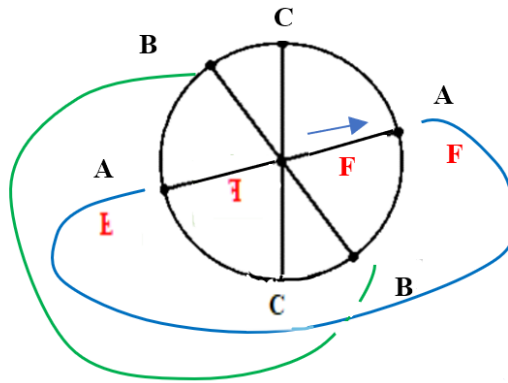
¹ Barry Mazur, « Plus symétrique que la sphère », in Pour la science, n° 41, oct.-déc. 2003, p.6. Nous soulignons.

² Pour cette approche intuitive, nous avons suivi en partie celles relativement concrètes de la psychanalyse faisant son miel du plan projectif : Jacques Siboni ; Topologos Lutecium 012, *D'un objet de la réalité à un objet de désir*, sur YouTube ; J.-D. Nasio, *Introduction à la topologie de Lacan*, Payot, Paris, 2010, pp.41-42

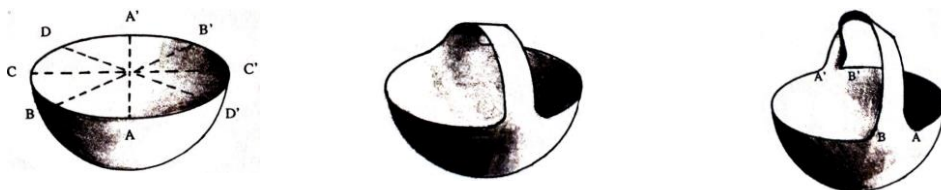
- Vous vous plaisez dans l'obscur, Une droite qui est une surface ? C'est difficile déjà à avaler...

- Reprenons le plan projectif sous forme de plan euclidien doté d'un cercle où se situent les points à l'horizon de toutes les directions. Soient A, dédoublé en deux points, B aussi et C de même, puisque nous sommes sur la droite projective qui rejoint les points d'horizon à l'infini. Quels sont les effets d'un chemin sur un plan projectif ?

Supposons que je sois au centre et que je suis la lettre F qui part vers l'infini. Quand elle arrive par ex. en A, elle va réapparaître de l'autre côté en A, et, en cours de chemin, la lettre F s'inverse comme la main droite qui devient la main gauche. On passe, de F, à F à l'envers. De A en A, c'est comme si nous étions passés via le chemin **bleu** infra au cours duquel la lettre F subit une torsion d'un demi-tour avant de revenir F. Idem si nous étions partis de B via le chemin **vert**. La lettre F semble avoir parcouru un anneau de Möbius transparent de (A,B) à (A,B). Ainsi, en suivant à la trace la lettre F, je m'aperçois qu'a été connecté en fait sur un disque, en A et en B, un anneau de Möbius qui est non orientable...



Le problème, c'est que l'histoire se répète partout, en C et en tout autre point sur le cercle qui représente la droite projective. Il est impossible de se représenter l'ensemble en 3D, mais je peux le penser. On peut imaginer, en renversant le point de vue, que j'ai un anneau de Möbius que je viens de coudre sur quelque surface comme un cercle, ou le bord d'une demi-sphère sur lequel peuvent être définis une série de points antipodaux AA', BB', CC', DD', etc. Nous pouvons suturer certains de ces points comme sur la fig. centrale et obtenir une sorte d'anse qui subira une torsion en étirant par ex. B vers B'. En procédant de la même façon pour l'infinité des points qui constitue le bord de la demi-sphère, nous obtenons la même torsion sur l'anse jusqu'au traversement complet de la surface par elle-même.¹



The projective plane, which we denote $\mathbb{R}P^2$, is constructed by identifying every point on the sphere S^2 with its antipodal point, or equivalently by identifying every point on the edge of a hemisphere with its antipodal point.²

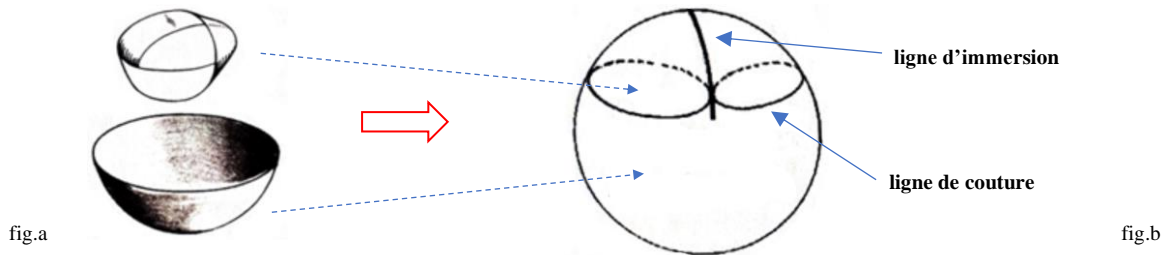
Le plan projectif peut être redéfini comme **une bande de Möbius + un disque ou une calotte sphérique** qui peut, par déformation, se ramener à un disque plat. Ce plan a la particularité d'inverser ce qui serait la droite en ce qui serait la gauche, et réciproquement. Le plan projectif réel permet de contourner l'impossibilité de superposer des objets chiraux comme le constatait à la fin du XVIII^e siècle Kant avant que la chimie d'aujourd'hui généralise son observation (un objet chiral, comme certaines molécules, n'est pas superposable à son image dans un miroir). L'on passe ici de l'un à l'autre par torsion en parcourant un ou plusieurs anneaux de Möbius cousu sur un disque ou une calotte sphérique.

(§43
3/b)
-ii)

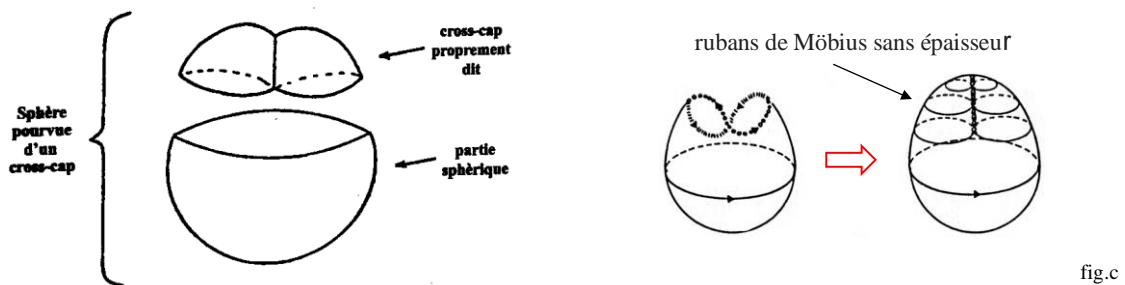
¹ Jacques Siboni ; Topologos Lutecium 012, *D'un objet de la réalité à un objet de désir*, sur YouTube ; Joël Dor, Introduction à ma lecture de Lacan, Denoël, Paris, 1992, pp.466-467.
² V. Lundsgaard Hansen, *Geometry in nature*, A K. Peters, Massachusetts, 1993, op. cit, p.41.

Voilà le mécanisme d'inversion plus précis que vous cherchiez. Quant à son articulation avec le disque ou la calotte sphérique, voici une de ses représentations en dimension 3, faute de représenter l'ensemble en dimension 4 où il peut être plongé sans qu'il soit écrasé pour le rendre facilement à voir.

Présentation donc dite en *cross-cap* suivant le processus de formation consistant à coudre un anneau de Möbius sur un disque, ou un morceau de sphère coupé, **en les assemblant bord à bord** (celui du ruban de Möbius, qui ne possède qu'un bord, et celui du disque ou de la demi-sphère qui n'en a qu'un) :



La ligne d'immersion est un artefact, lié au fait que le plan projectif ne peut pas être représenté, « sans y laisser des plumes », dans un espace euclidien à 3D, qui permet de la voir. Cette surface ne peut faire l'objet que d'une « immersion », et non d'un « plongement ». Cette immersion fait apparaître ainsi une ligne fictive. En 4D, cette ligne n'existe pas. En 3D, la *fig.a* représente le démontage de la sphère pourvue d'un cross-cap, et la *fig.b* montre comment le plan projectif *is constructed by sewing the edge of a hemisphere diagonally*.¹ Plusieurs bandes de Möbius peuvent être étagées. Il y a comme **une fibration du plan projectif** ; au lieu de courbes, **les fibres sont des rubans de Möbius**. (*fig.c*)



La couture opère entre une surface fermée (la sphère) et une surface ouverte (la bande de Möbius). *A closed surface is a geometrical object, which resembles the plane locally, consists of a single piece (it is connected), and has no edges (the object is closed)*. La sphère, munie d'un cross-cap, est, à ce titre, une surface fermée. Le tore est, lui aussi, un exemple de surface fermée qui n'a pas non plus de bord ; l'intérieur ne se confond pas avec l'extérieur, mais, à la différence de la bande de Möbius, il est orientable. On observera que

*l'unilatéralité dans le cas du cross-cap est beaucoup plus intéressante que dans le cas de la bande de Möbius, car celle-ci est une surface ouverte tandis que le cross-cap est une surface fermée : il est bien plus curieux de penser l'unilatéralité dans un ballon fermé que dans un ballon ouvert, parce que si nous admettons que les supposées deux faces d'un corps volumineux clos ne font qu'une seule face, il faut alors immédiatement accepter aussi que l'ordre dit intérieur du corps est en parfaite continuité avec le milieu environnant. Le corps est fermé, et pourtant le milieu qui l'entoure y est dedans. Ou à l'inverse, le milieu entoure un corps fermé dont il est pourtant le noyau le plus intime.*²

Le *cross-cap* n'a ni un dedans, ni un dehors, alors qu'un disque est bilatère. La bande de Möbius est une surface qui a la propriété d'être unilatère, i.e. d'avoir une seule face. Or, si on les coud ensemble,

¹ Ian Stewart, *Concepts of modern mathematics*, J.Dover, New York, 1995, pp.153-154 ; V. Lundsgaard Hansen, *Geometry in nature*, p.42 ; J.D. Nasio, *Introduction à la topologie de Lacan*, p.55 ;

² V. Lundsgaard Hansen, *Geometry in nature*, p.46 ; J.-D. Nasio, *Introduction à la topologie de Lacan*, p.77.

le disque et la bande de Möbius, le tout devient une seule face : on a mis en connexion une face avec l'autre en articulant, de façon continue, de l'orientable et du non orientable dans une unique surface.

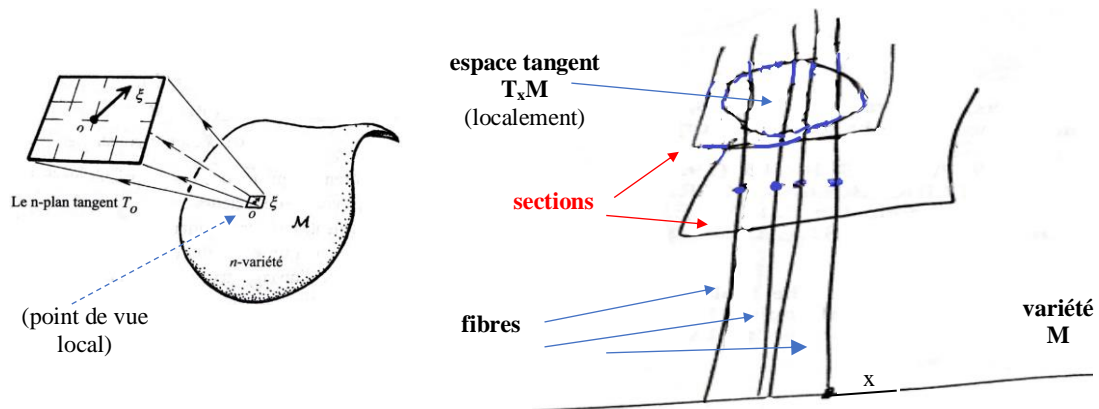
La sphère munie d'un cross-cap, est non orientable, mais la modification, générée par la couture, ne porte que sur la topologie globale.¹ Autrement dit, le plan projectif est globalement non-orientable. La topologie du plan projectif au voisinage de chacun de ses points demeure celle du plan usuel (c'est une « variété » de dimension 2), ce qui n'empêche pas le plan projectif de modifier l'orientation de l'objet qui le parcourt.

Le plan projectif transforme ainsi un objet chiral en son image dans un plan, comme une main gauche en une main droite, ou inversement. C'est la bande de Möbius qui a rendu ce caractère non orientable, **son endroit étant toujours en continuité avec son envers**. (Les expressions *anneau de Möbius*, *ruban de Möbius*, *bande de Möbius* varient suivant les auteurs. Il n'y a en fait aucune différence.)

Bouleverser la frontière dedans/dehors, voilà, pour résumer, ce que le plan projectif peut enseigner au droit, dans sa représentation d'une sphère pourvue d'un *cross-cap*, Un tel outil théorique fait penser, d'un autre œil, l'espace constitutionnel. Cet outil topologique est aussi précieux que d'autres.

iv Retour à Poincaré et à sa notion de section

Avec le tore, nous retrouvons l'orientable, du moins principalement, car nous n'ignorons pas qu'il y ait sur sa surface des zones hyperboliques autour des points-selles à l'orée du trou. Nous retrouverons aussi l'idée de *section*. Nous l'avions entrevu dans le cadre d'un (espace) fibré, qui est une variété, composé de fibres disjointes dont chacune peut être projetée en un point sur la base de la variété M.



Une section coupe les fibres d'un fibré. Une telle section peut être conçue un espace tangent, $T_x M$, un espace plat vectoriel.

L'espace tangent à une variété M, i.e. à un espace courbe, en un point O ou x, noté T_o ou $T_x M$, peut se comprendre intuitivement comme l'espace limite obtenu lorsqu'on examine, avec un grossissement de plus en plus fort, des voisinages de plus en plus petits de O sur M. L'espace T_o ainsi obtenu est plat : il s'agit d'un espace vectoriel à n dimensions.²

La section de Poincaré précède en réalité cette idée de section dans un fibré. La section de Poincaré est, en outre, plus dynamique, en coupant les orbites périodiques ou quasi-périodiques d'un tore.

Avant même de penser à une section sur le tore, Poincaré eut l'idée d'introduire d'un arc courbe, ou *arc transverse*, qui n'est tangent en aucun point d'une courbe. Il faut comprendre pourquoi. L'équation différentielle d'évolution de certaines courbes, devenues ainsi intégrales, n'est pas facilement résolue à l'aide des fonctions classiques comme la logarithme ou l'exponentielle. Poincaré surmonta la difficulté en ramenant l'étude de la forme des trajectoires dans le plan à celle de la succession des points d'intersection d'une courbe sur une ligne. (fig.a)

¹ A Möbius strip is (topologically) equivalent to a crosscap (V. Lundsgaard Hansen, *Geometry in nature*, p.461)

² R. Penrose, *A la découverte des lois de l'univers*, op. cit., p.218.

Parmi les courbes considérées, certains aboutissent à des **points singuliers** comme des nœuds, des cols, des foyers et des centres. (Comme on voit, la modernité n'en finit pas avec les points singuliers.)

Imagine sur une carte des lignes de niveaux joignant des points de même altitude, et interprétons ces lignes comme des courbes intégrales, solutions d'une certaine équation différentielle. Sur cette carte, on distingue plusieurs types de points singuliers :

- des *centres*, qui ont les sommets et les fonds, entourés de courbes intégrales qui s'emboîtent à la façon de cercles concentriques ;
- des *cols*, qui ne sont ni des maximums ni des minimums ; les cols présentent en leur voisinage des courbes intégrales qui ont une disposition analogue à celle des hyperboles ;
- des *nœuds*, où viennent se croiser une infinité de courbes intégrales ;
- et des *foyers*, autour desquels les courbes intégrales tournent en s'approchant sans cesse à la façon d'une spirale. (*fig. au centre*)

Caveat : Les quatre types de points singuliers ne caractérisent les courbes intégrales qu'à leur proximité

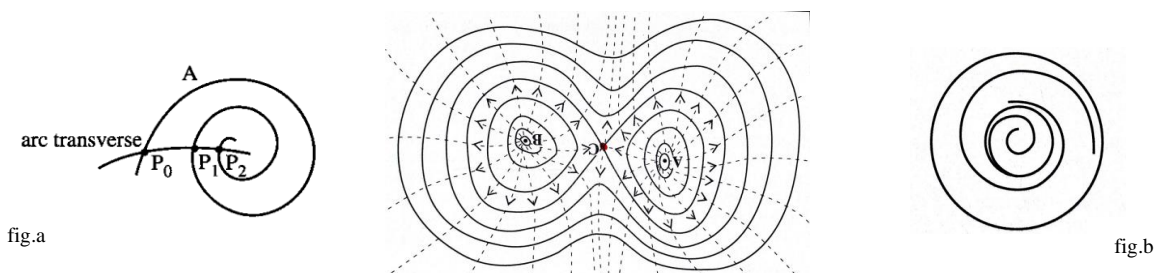


fig. au centre : les courbes en traits pleins correspondent aux lignes de niveau, et les lignes en pointillé aux lignes de pente [qui constituent des exemples d'arcs transverses]. Les flèches indiquent le sens de la pente. Le point C est un col ; les points A et B sont des sommets pour les courbes de niveau ; ce sont des nœuds pour les lignes de pente.¹

Les courbes intégrales qui n'aboutissent pas à un point singulier sont des courbes fermées, qui se referment donc sur elles-mêmes. Toutes autres sont des spirales s'enroulant asymptotiquement autour. Ce sont des *cycles limites*. (*fig. b*)

Poincaré ne s'en tient pas à cette description locale. Il entend passer du local au global en prenant en compte la topologie de la surface qui peut, par ex..., comporter un trou comme le tore. La trajectoire d'une orbite périodique sur cette surface peut en être fortement modifiée. Pour certaines équations différentielles simples, chaque courbe intégrale peut passer au voisinage d'un point du tore, à une distance aussi petite que l'on veut. Dans ce cas, il n'y a ni points singuliers, ni cycles limite, ni courbes intégrales s'enroulant asymptotiquement autour de cycles limites. A la différence de la sphère, qui possède au moins **une singularité** (on ne peut la peigner sans y laisser un épi, selon le théorème de la boule chevelue), le tore de genre 1, percé d'un seul trou, est le seul type de surface où il n'y en a point. Sur sa surface, on peut imaginer un champ de vecteurs sans singularité.

(§65
d)iii)

Dans ce cadre, l'idée de *section*, intersectant toute courbe intégrale par un plan normal, est dans la logique des choses :

Se plaçant en un point M_0 de la trajectoire périodique C , Poincaré met en œuvre la méthode fructueuse avec l'arc transverse : il coupe les trajectoires par le plan normal (perpendiculaire) à la courbe C au point M_0 . Si P_0 est un point du plan normal, très proche de M_0 , la trajectoire passant par P_0 , après avoir effectué un tour dans le voisinage de C , recoupera le plan normal en un point P_1 , a priori différent de P_0 , mais proche de lui, puis au tour suivant elle recoupera le plan en P_2 , etc. C'est l'étude de cette suite de points P_0, P_1, P_2, \dots , qui permettra de prévoir l'avenir de la trajectoire issue de P_0 .²

¹ Jean-Luc Chabert, Amy Dahan Dalmedico, « Les idées nouvelles de Poincaré », in *Chaos et déterminisme*, sous la dir. de A. Dahan Dalmedico, J.-L. Chabert ; K. Chemla, Seuil, Paris, 1992, pp.278-282.

² *Ibid.*, pp.286-291.

La section de la trajectoire par un plan normal s'appelle aujourd'hui une **section de Poincaré**, et l'application du plan normal dans lui-même qui associe, au point P_0 , son successeur s'appelle **l'application du premier retour**. (fig.c)

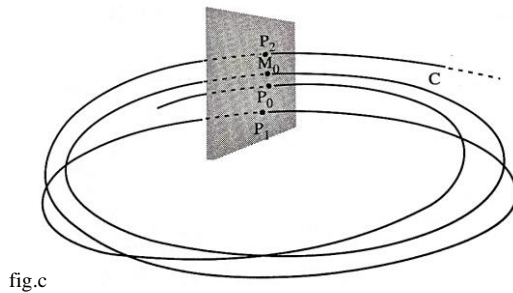


fig.c

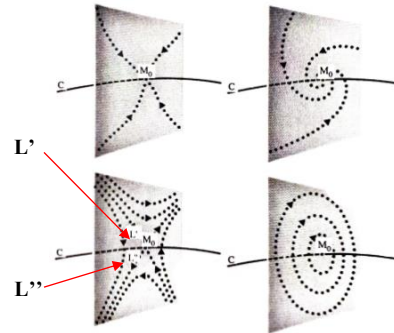


fig.d

Sur la fig.d :

en haut à gauche, on a l'analogie d'un **nœud** ; *en haut à droite*, l'analogie d'un **foyer** : les trajectoires s'approchent toutes – ou s'éloignent toutes de C (les parties réelles des valeurs propres sont de même signe). Dans ce second cas, l'approche est asymptotique et s'effectue « en tire-bouchon ».

en bas à gauche, on a l'analogie d'un **col** (les parties réelles des valeurs propres sont de signes opposés). Une **ligne d'impact L'** correspond à une contraction, alors qu'une autre ligne **L''** correspond à une dilatation. Ainsi, les trajectoires qui rencontrent la ligne **L''** vont se rapprocher asymptotiquement de C, celles qui rencontrent **L'** vont au contraire s'en éloigner.

en bas à droite : on a l'analogie du **centre**. Les trajectoires semblent situées sur des tores, comme des chambres à air contenant les unes les autres et entourant C (les parties réelles des valeurs propres sont nulles).¹

L'application de la première récurrence porte sur les solutions périodiques. Elle permet ainsi de ramener le problème considéré à un problème de dimension inférieure. On simplifie. **La simplification consiste à oublier tout le reste entre deux valeurs périodiques**. On a une photo à un instant. On oublie d'où la courbe intégrale vient et où elle va. On se concentre sur les points d'impact dans le plan de section dont l'étude fait apparaître une parenté avec les différents points singuliers évoqués dans le cas d'une équation différentielle du 1^{er} ordre. (fig.d) Peuvent s'y ajouter également des points doubles.

On économisera aussi, de notre côté, le propos en n'écrivant pas leur nature algébrique, peu utile jusqu'à présent en droit. (Le lecteur peut avoir l'intuition qu'il s'agit de déterminer les valeurs propres du déterminant d'une équation sous forme matricielle. Les vecteurs propres sont les directions privilégiées des trajectoires considérées.)

Enfin, on observera que l'idée directrice de Poincaré revient en fait à associer, à une solution d'une équation différentielle, une récurrence discrète $P_1, P_2, \dots, P_n, \dots$ (le temps ne varie plus de façon continue ; il est symbolisé par une suite d'entiers n). La récurrence consiste en une transformation ponctuelle.

Cette propriété facilite notre transition vers la jurisprudence constitutionnelle si on assimile par ex. ces points à des arrêts de justice. Nous serons néanmoins obligés de revenir un peu sur la technique.

Les effets d'une « juris-imprudence » et d'une inflation normative hors contrôle

(§39
ab initio)

Au début du XIX siècle, Verhulst remet en cause le modèle malthusien qui proposait un taux d'accroissement constant sans frein, conduisant à une croissance exponentielle de la population. Le modèle logistique de Verhulst contesta cette conclusion en prenant en compte la limitation de la population.

Le principe est simple : l'accroissement de la population n'est proportionnel à la population que pour les petites valeurs de celle-ci. Lorsqu'elle croît, des facteurs limitants apparaissent (place ou quantité de nourriture disponible, etc.) qui font qu'il y a une population maximale, Verhulst postule alors que l'accroissement de la population x est proportionnel à la quantité $x(M - x)$.

¹ Ibid., pp.292-293.

Aujourd'hui,

il y a deux modèles logistiques, selon qu'on fait varier le temps de manière continue ou discrète. Le modèle à temps continu conduit à une équation différentielle très simple, on en connaît parfaitement les solutions et on sait les interpréter. En revanche, le modèle discret peut mener, pour certaines valeurs des paramètres, à des comportements beaucoup plus compliqués, voire chaotiques.¹

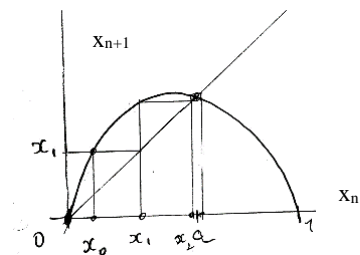
Revenons à l'expression citée $x(M-x)$ qu'il convient de compléter sous sa forme de l'équation : $x_{n+1} = \mu x (1-x_n)$, avec $x_0 \in [0,1]$. Il s'agit d'une suite simple, mais dont la récurrence n'est pas linéaire. (Rappelons qu'une relation de récurrence ne démontre pas, mais sert à calculer de proche en proche.)

Suivant la valeur du paramètre μ (dans $[0,4]$, pour assurer que x reste dans $[0,1]$), cette relation engendre une suite convergente, une suite soumise à oscillations ou une suite chaotique.

Quelle est donc graphiquement l'allure de la fonction : $f(x) = \mu x (1-x)$ suivant la valeur de μ ?²

On observe que pour le paramètre $1 < \mu < 3$, les trajectoires partant de tout point $0 < x_0 < 1$ convergent vers le point $x = a$.

a est un point de la forme (x, x) . On dit que x est *un point fixe* de f puisque $f(x) = x$. Autrement dit, x est solution de l'équation $f(x) = x$ (à l'intersection de la courbe représentative et de la bissectrice $y = x$). C'est **un point attracteur**.



Voir ci-contre le schéma de la trajectoire pour $\mu = 2$

L'itération graphique supra consiste à **tracer la bissectrice pour transformer les ordonnées $f(x_n)$ en abscisses x_{n+1}** . Un point x est attractif s'il existe un voisinage qui est attiré par ce point ; si x_0 appartient à ce voisinage, l'orbite de x_0 est une suite convergente vers x .

a est un point attractif (ce qui correspond à un équilibre stable), mais ∞ est aussi attractif...

Pour $\mu = 3.5$, l'allure devient plus compliquée. Les trajectoires convergent vers un cycle périodique de 2 points. Ces deux points forment également un ensemble attracteur. Il y a « adhérence » des trajectoires $(x_n)_m$ qui partent d'une quelconque condition initiale x_0 . (En mathématiques, l'adhérence d'une suite x_n est formée des points x près duquel s'accumulent une infinité de termes de la suite.)

Voici le dessin des trajectoires partant de $x_0 = 0.1$, pour différentes valeurs de μ . On observe que

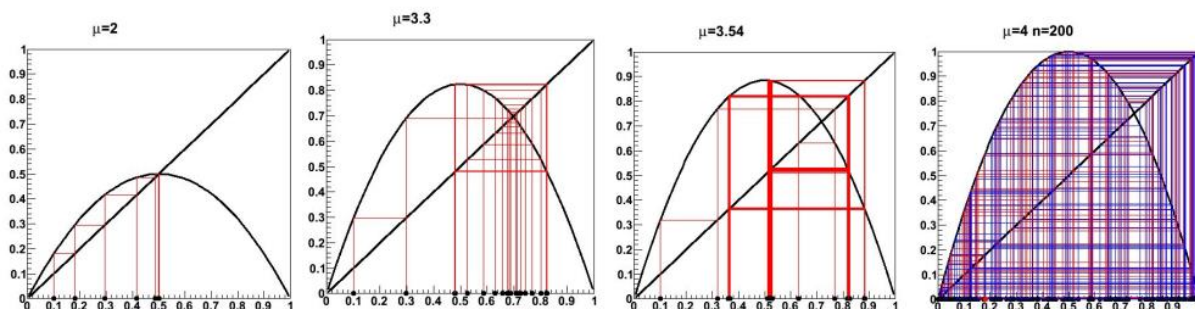
- . pour $\mu = 2$, la trajectoire converge vers le point $x = a = 1 - 1/\mu = 1/2$ (*point attractif*) ;
- . pour $\mu = 3.3$, la trajectoire converge vers une séquence de 2 points (*points périodiques attractifs, ou cycle attractif*) ; pour $\mu = 3.54$, vers une séquence de 4 points (*orbite aussi périodique ou cycle attractif*) ;
- . si μ est légèrement plus grand que 3,54, la trajectoire finit par osciller entre 8 valeurs, puis 16, 32, etc. L'intervalle des valeurs de μ conduisant au même nombre d'oscillations décroît rapidement.

Cet attracteur ne dépend pas du point initial (la suite, qui oscille entre ces points ou valeurs, ne dépend que de μ). En revanche, pour $\mu = 4$, la trajectoire a un comportement « chaotique » sur tout l'intervalle $[0, 1]$. Au-delà de $\mu = 4$, la suite diverge pour toutes les valeurs initiales (existence d'un **point fixe répulsif**, même si on se place très près de ce point).³

¹ Daniel Perrin, *La suite logistique et le chaos*, <https://www.imo.universite-paris-saclay.fr/~perrin/Conferences/logistiqueDP.pdf>, pp.3-4.

² Frédéric Faure, *Cours de Systèmes dynamiques, chaos et applications*, Univ. de Grenoble, France, 5 nov. 2018, https://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~faure/enseignement/systemes_dynamiques/cours_chaos.pdf; https://fr.wikipedia.org/wiki/Suite_logistique;

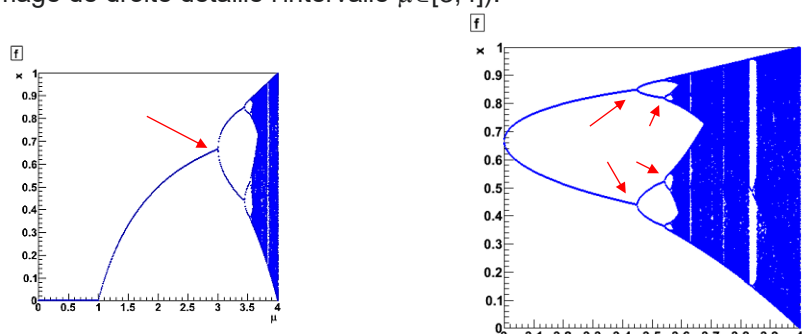
³ https://www.univers-ti-nspire.fr/files/pdf/14-th_point_fixe-TNS21.pdf



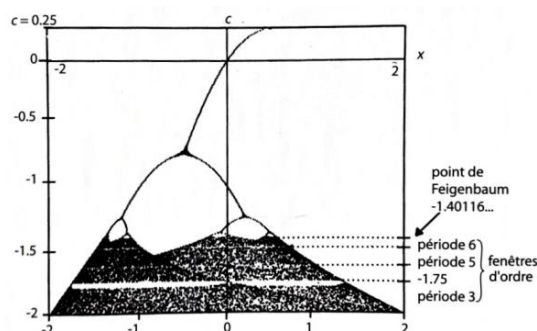
L'on voit que la suite logistique passe insensiblement d'un domaine de convergence à un domaine périodique (la zone des cycles attractifs), puis chaotique.¹

- Qu'en est-il des bifurcations ? Quelles sont les premières manifestations d'un tel phénomène ?

- Si l'on ne dessine que l'ensemble attracteur de la suite f en fonction de μ , voici l'allure qui apparaît (l'image de droite détaille l'intervalle $\mu \in [3, 4]$).²



En $\mu = 1$, il y a une « bifurcation » ; de même, en $\mu = 3$, etc. S'ensuit **une cascade de bifurcations** dont les périodes d'apparition ne cessent de se dédoubler. Le rapport entre deux périodes ou intervalles successifs de bifurcation tend vers un point ou un nombre constant, dit point ou *nombre de Feigenbaum*. Cette constante peut être utilisée pour signaler quand le chaos peut se produire dans un tel système.³



$$\delta = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu_{n+1} - \mu_n}{\mu_{n+2} - \mu_{n+1}}$$

Tel est le modèle de la suite logistique en théorie. Voyons s'il arrive que l'expérience du droit emprunte ce cheminement, ou du moins s'en approche, même lointainement du point de vue du calcul strict.

(renvoi à nouveau du Volet I, du 67bis))

¹ F. Faure, *Cours de Systèmes dynamiques, chaos et applications*, pp.26-29 ; J. Hubbard, B. West, *Equations différentielles et systèmes dynamiques*, op. cit., pp.166-176.

² F. Faure, *Cours de Systèmes dynamiques, chaos et applications*, pp.28-29 ;

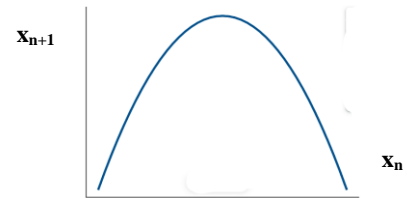
³ J. Hubbard, B. West, *Equations différentielles et systèmes dynamiques*, p.181 ; https://fr.wikipedia.org/wiki/Nombres_de_Feigenbaum

Soit une population de lapins, x . L'année suivante la population sera multipliée par le taux de croissance r , soit $r.x$. Par ex., $r = 2$, soit $2x$, ce qui signifie que la population double chaque année et sa croissance est exponentielle pour toujours. Comme s'y employa Verhulst, on peut rendre plus réaliste une telle croissance en prenant en compte la contrainte de l'environnement, soit $rx(1-x)$ si l'on imagine que la population x est un % du maximum théorique. Donc x va de 0 à 1. Lorsque l'on s'approche de ce maximum, **le terme $(x-1)$ tend vers 0 avec pour effet de restreindre la population**. Cette expression n'est autre que la suite logistique : $x_{n+1} = r.x_n(1-x_n)$,

x_n est la population de l'année précédente et x_{n+1} celle de l'année suivante.

En les mettant en rapport, nous obtenons un graphe qui se révèle être une parabole inversée.

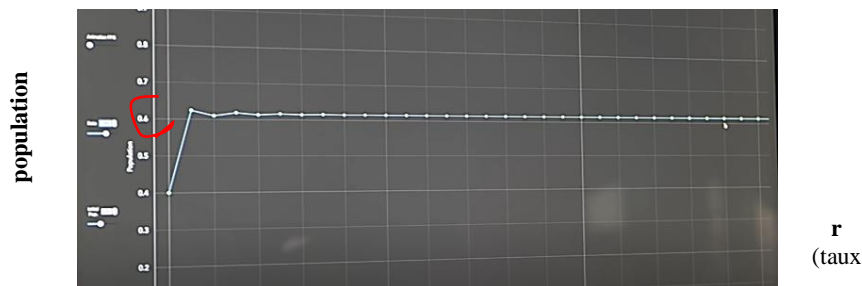
L'équation $x_{n+1} = r.x_n(1-x_n)$ fonctionne en **rétroaction négative**.



negative feedback : plus la population grandit, plus elle sera petite l'année suivante.¹

Donnons un exemple, avec un groupe de lapins particulièrement actifs. Leur taux de croissance est disons $r = 2,6$ (r comme *rate* i.e. taux). Et soit une population de départ dont la taille est 40 % du maximum, soit 0,4. D'où $2,6 \times 0,4(1-0,4) = 0,624$.

La population s'est accrue la première année, mais qu'en est-il de son comportement à long terme ? A cette fin, nous pouvons remettre dans l'équation supra ce résultat, soit $2,6 \times 0,624(1-0,624) = 0,6100202$. La population a un peu baissé. Puis, à nouveau : $0,61852718589$, etc. par le même procédé. Au vu des chiffres successifs, on s'aperçoit que celui de la population ne change pas vraiment ; elle semble se stabiliser au cours des années. Les populations ne varient plus aussi longtemps que les naissances et les décès sont équilibrés (*on balance*). Voir le graphe de la courbe qui atteint la valeur d'équilibre 0,615 :

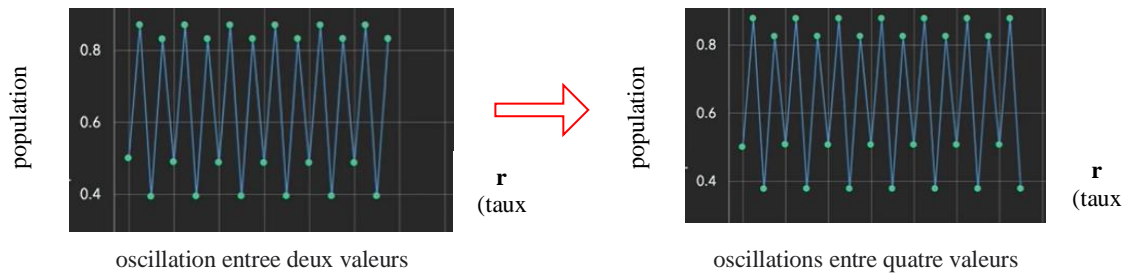


Sur cet autre graphe, le taux de croissance, r , est porté sur l'axe des abscisses, et la population en ordonnée.

So far so good. Mais qu'arrive-t-il si on change la population initiale ? Après un temps où les premières années varient, on s'aperçoit que la population à l'équilibre reste sur la même ligne relativement droite. On peut par conséquent négliger la population initiale, et voir plutôt comment cette population varie à l'équilibre selon r , le taux de croissance. Si je diminue r , on pourrait avoir le même graphique, avec une diminution de la population à l'équilibre. Si $r < 1$, elle diminuera plus rapidement et finira par s'éteindre.

Quand $r = 3$, le graphique se sépare en deux, oscillant entre deux valeurs, quel que soit le nombre de fois que l'on itère l'équation. Le graphique ne se stabilise jamais sur une seule valeur. Une année, la population est plus grande, l'année d'après, plus petite, et le cycle se répète, comme on l'observe dans la population des lapins. Quand r continue de croître, les piques de la fourche s'écartent, et chacune se sépare encore en deux. Maintenant, les populations suivent un cycle de quatre ans avant de se répéter.

¹ Veritasium, *Cette équation va changer la façon de voir le monde*, <https://www.youtube.com/watch?v=ovJcsL7vyrk>. Nous suivons fidèlement son exposé des plus clairs



Puisque la longueur du cycle, - la période, - a doublé, on appelle ce phénomène *period doubling bifurcations* (bifurcations à période se dédoublant). Et si on augmente encore r , ce phénomène se reproduira également. Les bifurcations arriveront de plus en plus vite et menant à des cycles de 8, 16, 32, 64, et, tout à coup, quand r atteindra 3,57, le chaos apparaîtra ! La population ne parvient plus à se stabiliser ; elle varie comme si elle était sujette au hasard. Il n'y a pas de *pattern*, pas de répétition. Evidemment, si on connaissait exactement toutes les conditions initiales, on pourrait calculer toutes les valeurs, ce qui montre que les nombres ne sont que pseudo-aléatoires.

On pourrait s'attendre à ce que l'équation soit chaotique à partir de là, mais si r continue d'augmenter, l'ordre revient. Surgissent des fenêtres de comportement stable et périodique au milieu du chaos. Par ex., quand $r = 3.83$, il y a un cycle stable avec une période de 3 ans, et si r continue d'augmenter, la population se sépare en 6, 12, 24, etc., 2^n , avant de retourner au chaos. En fait, cette équation contient des périodes de toutes les tailles : 37, 51, 1052, ... selon la valeur de r .

En regardant de plus près (en zoomant), le diagramme prend l'apparence d'un **fractal**. Les motifs (*patterns*) à grande échelle semblent se répéter à des échelles de plus en plus petites. C'est effectivement un fractal, comme il est manifeste dans la cascade de bifurcations.¹

d) L'approche physico-mathématique de la stabilité institutionnelle

i L'instabilité est la règle, et la stabilité l'exception ?

De Laplace à Poincaré en sciences. 557 - Du chaos créatif, 562

De Laplace à Poincaré en sciences

Nous partons de la stabilité spatio-temporelle des objets dans les lieux desquels se situent des singularités. En ces singularités peuvent se produire des transformations, voire des bifurcations susceptibles autant de créer du nouveau que de le faire disparaître. Ces phénomènes n'excluent pas que les objets puissent connaître une certaine stabilité.

Commençons avec Laplace par ce qu'il entend par stabilité. Pour ce savant de la fin du XVIII^e siècle, la notion renvoie à celle d'équilibre qui peut revêtir deux modes : le stable et le non stable. Voici ce qu'il en dit dans son *Exposition du système du monde* de 1796 :

*Dans l'autre état d'équilibre, les corps s'éloignent de plus en plus de leur position primitive, lorsqu'on les en écarte. On aura une juste idée de ces deux états [le stable et l'autre], en considérant **une ellipse placée verticalement sur un plan horizontal**. Si l'ellipse est **en équilibre sur son petit axe**, il est clair qu'en l'écartant un peu de cette situation, par un petit mouvement sur elle-même, elle tend à y revenir en faisant des oscillations que les frottements et la résistance de l'air auront bientôt anéanties. Mais si l'ellipse est **en équilibre sur son grand axe**, une fois écartée de cette situation, elle tend à s'en éloigner davantage, et finit par se renverser sur son petit axe.*

La stabilité de l'équilibre dépend donc de la nature des petites oscillations que le système, troublé de manière quelconque, fait autour de cet état.²

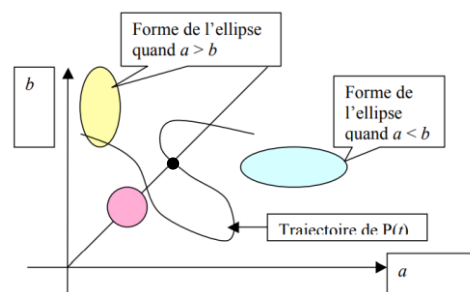
¹ J. Hubbard, B. West, *Equations différentielles et systèmes dynamiques*, p.229.

² Pierre-Simon Laplace, *Exposition du système du monde* [1796], Fayard, Paris, 1984, Liv.3, chap.33 : De l'équilibre d'un système de corps, p.p.216, cité » in Claude P. Bruter, *Energie et stabilité Eléments de philosophie naturelle et d'histoire des sciences*, Semiotics Institute on Line, 2007, p.78. Nous soulignons.

Au sujet de cette description, le mathématicien Claude Bruter indique opportunément que le passage d'un équilibre à l'autre est le fait d'une bifurcation. Il suffit de jouer sur les paramètres a et b de l'équation de l'ellipse : $ax^2 + by^2 = 1$. Les paramètres de la forme de l'ellipse sont des nombres positifs. On peut les représenter par un point du premier quadrant d'un plan, a étant placé en abscisse, b en ordonnée. On peut aussi introduire un paramètre de forme réduite, $f = a/b$ et examiner la forme de l'ellipse quand f parcourt l'ensemble des nombres réels. (Sur la *fig.*, les ellipses sont remplacées par des rectangles.)

Le lieu des points où se produit l'égalité des paramètres ($f=1$) est la bissectrice du quadrant : l'ellipse est alors un cercle, une forme singulière rare dans l'univers infini des formes elliptiques, forme parfaite au sens de Platon.

Soit un point représentatif de la forme $P(t) = (a(t), b(t))$. Supposons qu'il se déplace. Lorsqu'il devient transverse à la bissectrice (●), un changement de forme peut être soudain, important, brutal. Une **bifurcation** est advenue. *Si, de plus, l'un des paramètres devenait négatif, alors l'ellipse muterait en une hyperbole, une vraie métamorphose.*¹



Tout au long du XIX^e siècle, la notion de stabilité va évoluer en s'efforçant de définir des objets mathématiques précisément en évolution. L'étude des points mobiles, tels que des planètes et autres objets célestes, va élargir la notion en mettant l'accent sur les trajectoires mêmes de ces objets. Voici comment Poincaré appréhende la chose :

Nous dirons que la trajectoire d'un point mobile est stable, lorsque, décrivant autour d'un point de départ un cercle ou une sphère de rayon r , le point mobile, après être sorti de ce cercle ou de cette sphère, y rentrera une infinité de fois, et cela, quelque petit que soit r . C'est ce qui arrive dans les trois premiers exemples. Elle sera instable si, après être sorti de ce cercle ou de cette sphère, le point mobile n'y rentre plus. C'est ce qui arrive dans les deux derniers exemples.

[...]

L'instabilité est donc la règle, et la stabilité l'exception.²

En déplaçant l'attention sur le devenir même des trajectoires, le regard se porte davantage sur l'instabilité que sur la stabilité. De même que l'arrêt était déjà, en mécanique, devenu une situation particulière du mouvement, de même la stabilité devient l'exception qui confirme la règle. On se préoccupe davantage du dérangement de l'équilibre et de ses effets que de la tendance à l'équilibre :

*L'instabilité est donc l'exception et la stabilité la règle, tout comme, dans les nombres réels, les rationnels sont l'exception et les irrationnels la règle.*³

The courage of being imperfect. Voilà celui de la science moderne la plus nouvelle : celui d'accepter, peut-être à contrecœur, le monde tel qu'il est, et non celui tel que l'on aimerait qu'il soit : stable ou qui se rétablit de lui-même à tout jamais ! On a crédité Laplace de penser le contraire quand il écrit en 1814 cet extrait aussi connu que mal interprété :

Nous devons envisager l'état de l'Univers comme l'effet de son état antérieur et la cause de ce qui va suivre. Une intelligence qui pour un instant donné connaîtrait toutes les forces dont la nature est animée et la situation respective des êtres qui la composent, si d'ailleurs elle était assez vaste pour soumettre ces données à l'analyse, embrasserait dans la même formule le mouvement des plus grands corps de l'Univers et ceux du plus léger atome : rien ne serait incertain pour elle, l'avenir comme le passé serait présent à ses yeux.

Non, Laplace ne nous invite pas à croire à un déterminisme absolu dans le sillage de celui de Newton. Ces deux phrases sont souvent citées hors de leur contexte, le livre d'où elles sont tirées, à savoir *l'Essai sur les probabilités* dans lequel Laplace exprime une conception nuancée de la prévisibilité. Comme l'écrit aujourd'hui le physicien Roger Balian, de l'Académie des sciences, Laplace est tout à fait conscient de ce que, sauf cas exceptionnels, le programme déterministe (que l'on associe à son

¹ C. O., Bruter. *ibid.*, pp.109-110.

² Henri Poincaré, *Sur les courbes définies par les équations différentielles* [1881], in C. P. Bruter, *Energie et stabilité* *Eléments de philosophie naturelle et d'histoire des sciences*, art. cit., p.82. Nous soulignons.

³ Umberto Bottazzini, *Poincaré. Philosophe et mathématicien*, Belin- Pour la science, Paris1999, p.135.

nom) est irréalisable. Ces phrases ne sont que le point de départ d'un raisonnement démontrant la nécessité de la notion de probabilité.

Il n'est pas question de la nécessité dans la nature, mais de la nécessité de recourir davantage aux probabilités dans la science. Dans le même ouvrage, rappelle Roger Balian, Laplace écrit d'ailleurs un peu plus loin : *La courbe décrite par une molécule d'air ou de vapeur est réglée d'une manière aussi certaine que les orbites planétaires : il n'y a de différence entre elles que celle qu'y met notre ignorance. La probabilité est relative en partie à cette ignorance, en partie à notre connaissance.* Et Roger Balian de commenter :

L'allusion dès 1814 à un caractère aléatoire, mal connu, de la trajectoire des molécules d'un gaz préfigure l'avènement, des décennies plus tard, de la théorie cinétique. Il est remarquable que, constatant l'impossibilité pratique de mettre le déterminisme en œuvre, Laplace a été conduit à souligner que « le système entier des connaissances humaines se rattache à la théorie des probabilités ». Il ne serait pas surpris de la place centrale qu'elles occupent dans la physique d'aujourd'hui.¹

Les probabilités demeurent indispensables pour faire des prévisions, car le « démon », qui désignera l'intelligence omnisciente à laquelle Laplace faisait allusion, n'existe, selon lui, précisément pas. Sans doute, Laplace garde-t-il l'espoir de découvrir un jour le degré de probabilité encore inconnu, mais son propos demeure équivoque. Laplace semble flotter entre une conception subjective et objective des probabilités avant de s'en tenir plus clairement à l'idée que le rapport probabiliste résulte de ce que l'on sait et de ce que l'on ignore. Son démon est un myope qui a besoin des lunettes des probabilités !

Quand bien même les probabilités seraient dans les choses, il reste à prouver un mécanisme causal pouvant générer des lois statistiques que représente par ex. une courbe gaussienne. On peut faire appel à de petits événements indépendants (mais postulés équiprobables par Laplace), ou comme Cournot au XIX^e siècle à la rencontre de chaînes causales indépendantes (une tuile qui vous tombe sur la tête à cause du vent pendant que vous allez chez le dentiste en raison d'un mal de dents), *ce n'est que l'avènement de la théorie quantique qui a ouvert la possibilité de concevoir la régularité statistique comme fait naturel, brut et irréductible.*²

Henri Poincaré partagera pour partie une vision subjective des probabilités en concevant que *les faits prévus ne peuvent être que probables, mais la probabilité est souvent assez grande pour que pratiquement nous puissions nous en contenter.* La physique ne décrit pas des objets en soi, mais fournit une image du monde dans notre esprit, dont une image probabiliste si précise soit-elle comme celle qu'offre la mécanique quantique dont Poincaré aurait conçu certaines prémonitions.³

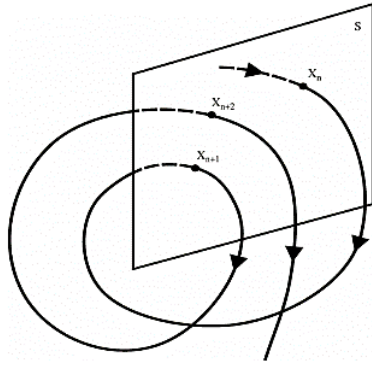
S'agissant de la mécanique céleste, régi par les lois de Newton. Poincaré envisage également que les lois physiques pourraient changer, et il le prouve. Jusqu'ici, la donnée exacte des conditions initiales permettait en principe de prévoir toute la trajectoire. *C'était la conception de Laplace lorsqu'il avait étudié la mécanique céleste, mais Poincaré montre comment la moindre déviation dans les conditions initiales, la moindre perturbation, la moindre erreur d'arrondi dans les calculs peuvent s'amplifier et empêcher toute prévision à long terme.*⁴ C'est grâce à la mesure des impacts sur la section (de Poincaré), qui remplace un problème continu par un problème discret, que ce dernier a pu cerner une divergence des trajectoires bien que le processus soit parfaitement déterministe. C'est à lui que l'on doit l'esquisse de la théorie du chaos. Le processus, après une certaine durée, peut s'avérer chaotique.

¹ Roger Balian, *Une crise en physique ? Entre déterminisme et imprévisibilité*, online.

² Ian Hacking, *L'émergence de la probabilité*, op. cit., Seuil n, Paris, 2002, p.p.184-186 et 236.

³ Roger Balian, « L'héritage d'Henri Poincaré en physique », OpenEditions Journal, Bibnum : *Textes fondateurs de la science analysés par les scientifiques d'aujourd'hui*, online since 15 June 2017, <http://journals.openedition.org/bibnum/1055>

⁴ *Ibid.*



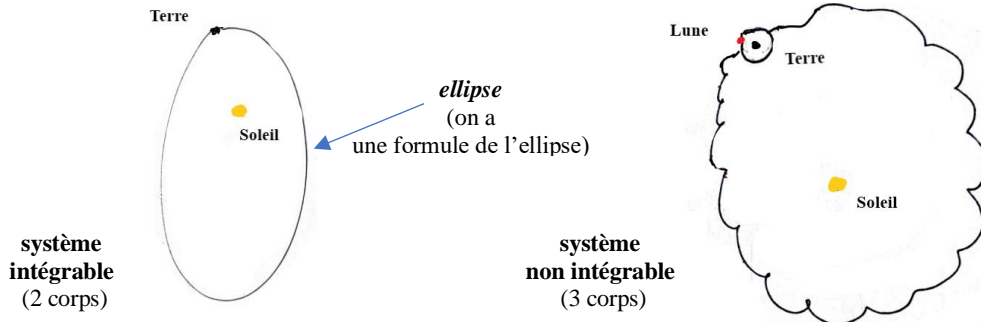
Le clair génie de Newton avait bien vu (ou cru voir, nous commençons à nous le demander) que l'état d'un système mobile, ou plus généralement celui de l'univers, ne pouvait dépendre que de son état immédiatement antérieur, que toutes les variations dans la nature doivent se faire d'une manière continue [...]

Eh bien, c'est cette idée fondamentale qui est aujourd'hui en question : **on se demande s'il ne faut pas introduire dans les lois naturelles des discontinuités, non pas apparentes, mais essentielles.**¹

Les lois d

Il ne faut pas confondre « intégrable » et « intégrale » au sens de la théorie leibnizienne de l'intégration, même si une équation différentielle comporte par définition des dérivées comme la vitesse ou l'accélération. L'intégration permet, dans le cas d'espèce, de calculer la longueur d'une trajectoire, mais ce n'est pas ce que l'on veut. Il est possible d'ailleurs d'avoir une équation différentielle intégrable, et une fonction compliquée pour calculer sa longueur. On veut savoir si l'équation a une solution, au sens, comme on dit, de Liouville. On cherche une formule exacte, ou, à défaut, par le biais d'une série convergente, comme dans le cas de deux corps célestes qui s'attirent, comme la Terre et le Soleil, ou la Terre et la Lune, générant une conique (une ellipse képlérienne plus ou moins allongée ou circulaire).

Si on ajoute un 3^e corps (la Lune par ex., au Soleil et à la Terre), la trajectoire résultante ne devient plus nécessairement intégrable. L'équation peut générer une improbabilité. On ne peut faire que des calculs d'approximation par développement en séries entières en négligeant le reste à partir d'un n^{-ième} terme (on ne peut pas calculer indéfiniment !), et on essaie de simplifier le problème de différentes manières.



Entre le Soleil et la Terre, on peut ne pas tenir compte de l'influence de la Lune, sauf pour les marées. Il faut comprendre le problème : avec 3 corps + la loi de gravitation, on a 18 paramètres (3 de position et 3 de directions ou vitesses pour chaque corps), alors qu'avec 2 corps + loi de gravitation, on n'a plus que 12 paramètres. On peut aussi considérer le Soleil et la Terre tournant sur un même plan (un plan épais, comme ce qu'il en est par chance dans la réalité) et entrevoir en conséquence un barycentre. C'est une façon de faire, car une ellipse ne peut être redressée ou déformée pour « intégrer » un 3^e corps (l'ellipse reste fermée ; c'est topologiquement constant).

On peut aussi considérer 3 corps tourner dans un même plan (dans notre système solaire, les planètes sont à peu près toutes dans le plan écliptique). Les trajectoires y resteront en raison du principe d'inertie et de l'absence de symétrie due à l'isotropie de l'espace où il n'y a pas de direction privilégiée. Cependant, l'équation différentielle recherchée ne sera pas nécessairement intégrable.

(§67
1/ b)
-iii)

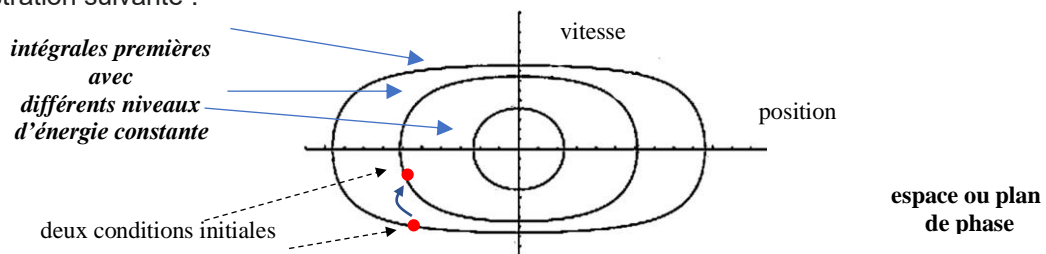
On a pensé, il est vrai, au problème de Cauchy constitué d'une équation différentielle dont on recherche une solution vérifiant une certaine condition initiale. L'équation se propage localement à partir d'une telle condition, mais encore faut-il connaître une formule, et être sûr que la solution ne varie pas à la moindre variation de cette condition, ce qui n'est pas toujours avéré. En pareil cas, la

¹ H. Poincaré, *Dernières pensées* (post., 1920), chap. VI, L'hypothèse des quanta, in R. Balian, « L'héritage d'Henri Poincaré en physique ».

formule s'avère inutile. La résolution du problème de Cauchy serait inopérante, parce que la détermination des conditions initiales de telles solutions est impossible à déterminer a priori.¹

La théorie, - Henri Poincaré y excelle, en concevant **un espace de phases** des mouvements, tangents à un champ de vecteurs, qui s'impose comme *le lieu privilégié d'une analyse qualitative des solutions*. L'idée est, non pas de s'attarder sur une solution, via la série qui la représente, mais sur **un ensemble de solutions voisines**, car la 1^{re} option ne fournit aucun renseignement sur la nature de la solution (présence par ex., dans le plan de phase, d'un ou plusieurs attracteurs, comme un point fixe ou un cycle limite, - i.e. une courbe fermée, - entouré d'un bassin d'attraction dans lequel un trajet converge).²

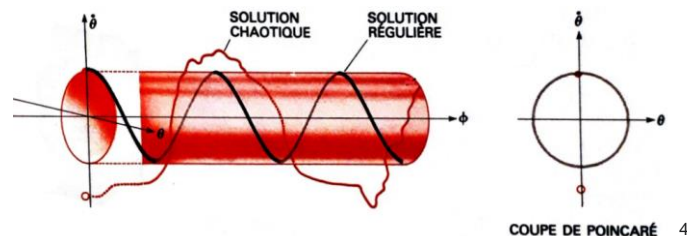
Ces solutions voisines sont celles les « **intégrales premières** » des équations du mouvement. Une intégrale première est une fonction constante sur chaque trajectoire ; l'intégrale première préserve une quantité (par ex., une énergie mécanique constante). Si on pouvait résoudre l'équation différentielle, on n'aurait pas besoin de telles intégrales que l'on peut supposer avant même de connaître la trajectoire. L'espace de phase est un feuilletage de trajectoires approchées par de telles intégrales. Le système étudié reste constant sur chaque feuille. Les constantes du mouvement, que sont ces intégrales, sont déterminées par les conditions initiales. En variant celles-ci, le système évolue différemment en conservant, quelle que soit la condition initiale, une énergie constante. Voir l'illustration suivante :



Une trajectoire ne peut pas se couper. Des conditions initiales identiques entraînent la même évolution. On peut envisager un espace de phase plus compliqué si l'on tient compte des mouvements de rotation des planètes sur elles-mêmes.³

La notion d'intégrale première implique un feuilletage de l'espace de base qui en fait l'espace des conditions initiales. En raison de leur caractère quasi-périodique, les intégrales premières, vérifiant ces conditions initiales, peuvent être représentées sur un tore (ou des tores emboîtés). Or, d'après un théorème de Liouville, tout ce qui se déplace sur un tore est intégrable. En d'autres termes, si toutes les trajectoires restent sur le tore, la trajectoire est régulière et prévisible.

Par le biais d'un plan fictif, judicieusement placé, - la fameuse section de Poincaré, - on peut vérifier si toutes les trajectoires demeurent sur le tore ou s'en échappent dans toute la section, ce qui est un signe d'un comportement chaotique et très instable dans le temps. (Le système « s'en va », comme on l'a vu ci-avant avec l'écoulement d'un robinet d'eau consécutivement à la cascade de doublements quasi-périodiques.) Les diagrammes qui suivent ont été dessinés par d'autres scientifiques dans le sillage de la pensée d'Henri Poincaré qui envisageait déjà une sorte de tore sur lequel s'enroulait la trajectoire représentative de l'état d'évolution du système. . Nous les reproduisons pour leur clarté insigne :



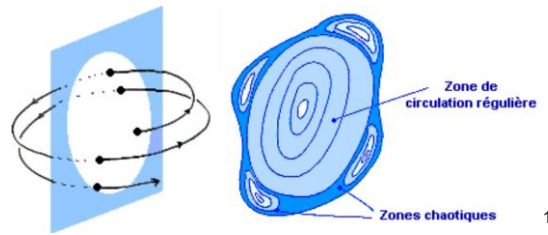
¹ Alain Chenciner, *Vous avez dit « qualitatif » ?* Observatoire de Paris, Univ. Paris VII, 15 février 2016, p.10, <https://perso.imcce.fr/alain-chenciner/Qualitatif.pdf>

² *Ibid.*, p.3.

³ J.-F. Le Bourhis, *Une histoire des conceptions du système solaire*, Académie de Normandie, Caen, 26 janv. 2000, pp.9-10.

⁴ Vincent Croquette, « Déterminisme et chaos », in *L'ordre du chaos*, Pour la science, Paris, 1989, p.73.

(Annexe XII, du volet du §67^{bis}, reprenant le schéma pour figurer d'autres points d'impact sur le plan de coupe de Poincaré)

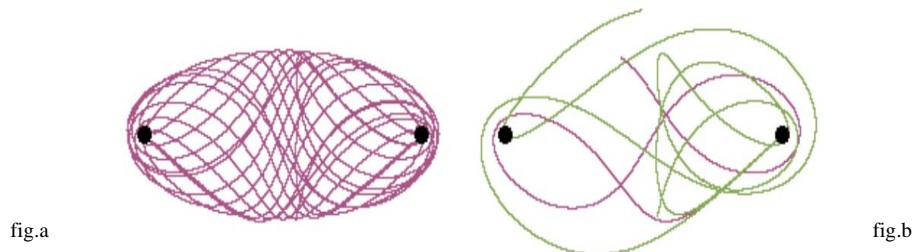


Poincaré a rencontré ce problème en étudiant (au crayon, sans ordinateur) le problème des trois corps. Il en a conclu que le système n'est pas intégrable, car on ne trouve pas de solutions analytiques exactes. Les données du problème sont déjà difficiles : toutes les planètes s'influencent les unes les autres et les conditions initiales de leurs mouvements sont mal connues. Le problème devient véritablement insoluble quand la plus petite modification des conditions initiales s'avère fatale. La sensibilité exacerbée de ces conditions fait que les courbes ne repassent pas où l'on s'attendrait à les voir apparaître.

*Actuellement, on ne sait même pas si le système solaire est stable : un écart inférieur à 1 m, incontrôlable en pratique, modifie radicalement les trajectoires des planètes au bout de 10 millions d'années.*²

On peut, il a été rappelé, procéder en pratique par approximations successives. Ce procédé permet de se ramener à un système intégrable en tronquant des séries, comme l'ont fait Laplace et Lagrange à la fin du XVIII^e siècle, mais Poincaré a bien montré depuis que ces séries, qui s'efforcent d'épouser au mieux l'allure des courbes représentatives des fonctions, sont, hélas, généralement, divergentes. Il faut savoir que le système solaire est composé de 10 corps, qui s'attirent les uns les autres selon la loi de gravitation de Newton, sans que l'on compte les satellites et les astéroïdes !

La simulation par ordinateur peut déjà donner aujourd'hui une meilleure idée visuelle du problème des trois corps :



Soient deux soleils et une planète.
fig.a : la trajectoire suivie par la planète (en violette) est très complexe et ne peut être décrite par une équation.

fig.b : partant apparemment au même instant et du même point du Soleil de droite, les deux planètes, aux trajectoires respectivement violette et verte, donnent l'impression de suivre la même trajectoire. Mais, soudainement, au bout de quelques secondes, la trajectoire violette diverge de la trajectoire suivie par la trajectoire verte. Voilà une représentation de la sensibilité à la moindre modification des conditions initiales **L'itération amplifie les erreurs infinitésimales.. Le global est gonflé jusqu'à faire exploser l'équation !**³

Dans un tel contexte, on ne peut que prendre acte, dans le ciel, de la non-périodicité des solutions...

Du chaos créatif

ii Stabilité, symétrie et invariance

De l'intrinsèque et du contravariant, 563 – Energie et stabilité, 570 – Stabilité, symétrie et conservation, 570

¹ Luxorion, *La science du chaos. L'œuvre de Poincaré*, <http://www.astrosurf.com/luxorion/chaos-systemesolaire2.htm>

² R. Balian, « L'héritage d'Henri Poincaré en physique », art. cit., point 9.

³ Luxorion, *La science du chaos. L'œuvre de Poincaré*, art. cit. ; John Briggs et F. Davis Peat, *Magie itérative*. extrait de leur livre *Le miroir turbulent*, In SVM, mars 1991, p.54.

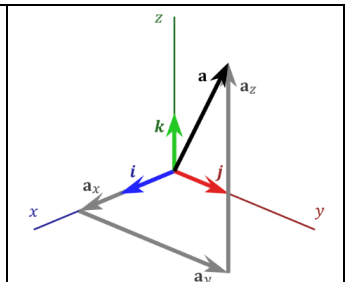
De l'intrinsèque et du contravariant.

Une solution approchée n'est pas intrinsèque par ex. Des dérivées secondes, décrivant en physique des accélérations, ne sont pas intrinsèques, car l'accélération est mesurable par un système de coordonnées. Mais est-ce si simple ? Pas toujours. Des dérivées partielles secondes, apparues en des points critiques d'une surface (un point selle par ex.) ne dépendent pas d'un système de coordonnées ; elles relèvent aussi de l'intrinsèque en indiquant si une fonction évolue vers un extremum (maximum ou minimum). De même, une base canonique possède des propriétés intrinsèques, même, si elles sont écrites dans un système de coordonnées (faisant intervenir même des dérivées partielles par ex).

En algèbre linéaire, *une base* est un ensemble minimal de vecteurs à partir desquels on peut construire un espace vectoriel.

Une **base canonique**, dite aussi naturelle ou standard, d'un espace vectoriel est l'ensemble des vecteurs dont les composantes sont toutes nulles, sauf une qui est égale à 1.

Par., une base constituée **des vecteurs (1,0,0), (0,1,0) et (0,0,1)** est une base canonique de \mathbb{R}^3 . Chaque vecteur a est une combinaison linéaire des vecteurs de base standard \mathbf{i}, \mathbf{j} et \mathbf{k} ¹



- Quel est le sens d'intrinsèque de façon générale ?

- Un dictionnaire anglais le définit ainsi : *Intrinsic*, vient du latin *intrinsicus*, *from inside*. Deux sens voisins en sont issus : 1. *belonging to the nature or essence of a thing*. 2. *Belonging to something independent of its relations to other things*. L'antonyme est *extrinsic*, dérivé d'*extrinsecus*, avec aussi deux nuances : 1. **External**, *no part of the nature or essence of a thing*. 2. *Belonging to something in virtue of its relation to something else*. En mathématiques, Il s'agit moins, en fait, d'appartenance à l'essence d'une chose que d'un concept. Des propriétés intrinsèques sont des propriétés de forme. ²

Intrinsèque veut dire que l'espace doit être analysé sans avoir besoin de supposer qu'il existe quelque chose en dehors de cet espace. On l'appréhende de l'intérieur (on voit la surface de l'intérieur, et non de l'extérieur, comme si une fourmi se baladait dessus sans lever la tête, ni en creuser le sol...).

Par ex., Gauss, dans son *theorema egregium* (remarquable), définit la courbure comme une propriété intrinsèque en ce qu'elle n'est pas modifiée par des déformations rigides. Si nous prenons une section de surface (que l'on peut imaginer comme un grillage métallique) et que nous la déformons dans une direction, nous pouvons augmenter la valeur de k_1 , mais cela tendra l'autre direction et diminuera la valeur de k_2 , de sorte que le produit $K = k_1 k_2$ restera le même. Dans la géométrie intrinsèque à courbure constante, le tore, par ex., présente *ne varietur* une courbure $K = 0$, la sphère $K > 0$, les surfaces de genre ≥ 2 (plus de deux trous) $K < 0$. Il n'est même pas besoin de connaître les valeurs de k_1 et de k_2 , qui sont des propriétés extrinsèques. La formule du théorème de Gauss-Bonnet y supplée. ³ (*Annexe li*)

Mettre un paramètre sur un objet fait entrer cet objet dans la géométrie extrinsèque. Un paramètre peut être par ex., la hauteur d'un verre à pied. Grâce à ce paramétrage, on peut savoir si le verre est plus ou moins haut ou s'il est stable.

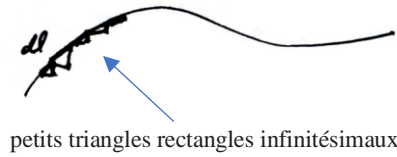
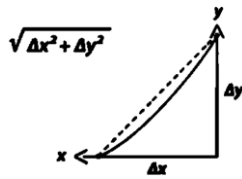
Cependant, une nuance doit aussi être apportée ici. Il existe des paramètres intrinsèques, telle l'abscisse curviligne dans un espace euclidien. Pour calculer la longueur d'un arc l , on se donne une origine à partir de laquelle on calcule les longueurs, en les munissant d'un signe pour se situer de façon bien déterminée sur la courbe : à telle distance avant ou après le point initial. Pour les arcs réguliers, l'abscisse curviligne permet de reparamétriser la courbe de façon à s'affranchir des considérations sur la vitesse de parcours. C'est la première opération permettant de définir des

¹ https://stringfixer.com/fr/Standard_basis

² *The Penguin dictionary of philosophy*, édit. by Thomas Mautner, Penguin books, London, 2000, p.191 et 281 ; Bertrand Hauchecorne, *Les mots et les maths*, Ellipses, Paris, 2003, p.147 ; *Atlas des mathématiques*, op. cit., La pochothèque, Paris, 1974, p.213, Nous soulignons.

³ V. Munoz, *Les formes qui se déforment*, op. cit., p.96, 89-110.

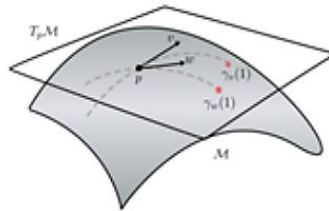
notions attachées à la courbe, indépendamment du paramétrage choisi.¹ $l(\gamma) = \int_a^b dl$, chaque dl étant l'hypoténuse d'un triangle infinitésimal. L'abscisse curviligne est donc un mixte du théorème de Pythagore + la notion d'intégrale.



$$l(\gamma) = \int_a^b dl$$

petits triangles rectangles infinitésimaux

Autre objet de la géométrie intrinsèque : la distance en métrique riemannienne, parce qu'elle ne fait intervenir que la structure abstraite de la variété. *L'idée fondamentale et radicalement nouvelle de Riemann est d'introduire, pour mesurer la longueur, une métrique qui ne dépend que du point.* L'espace n'est plus parcouru par des droites au sens euclidien. La longueur du chemin minimal définit une fonction distance géodésique. En chaque point de la variété, on calcule le produit scalaire de deux vecteurs de l'espace tangent en ce point (espace tangent qui est, lui, euclidien, et vectoriel).²



3

*Dans la manière de concevoir les surfaces, aux rapports intrinsèques dans lesquels on n'a à considérer que les longueurs des chemins tracés sur ces surfaces, se mêle toujours l'idée de leur position relativement aux autres points placés en dehors d'elle. Mais on peut faire abstraction des rapports extérieurs, lorsqu'on fait subir à ces surfaces des changements tels que les longueurs des lignes qui y sont situées, restent invariables, i.e. lorsqu'on les suppose flexibles sans extension et que l'on considère de même espèce toutes les surfaces ainsi obtenues.*⁴

(§47
3/
c)ii)
(§49
c)ii)

Dernier ex., en algèbre linéaire à nouveau. Nous parlions supra de base. La base, c'est un référentiel, donc un observateur, comme une matrice est un point de vue sur un objet (une autre matrice est aussi un point de vue sur le même objet). Une base est non intrinsèque par définition, car un observateur est toujours à l'extérieur. Que l'on se souvienne du déterminant d'une matrice, calculé à partir de ses colonnes. Le déterminant est nul si deux colonnes sont égales. Son caractère nul ou non est indépendant de la base choisie. Le déterminant est intrinsèque aux données des vecteurs. Le fait d'être non nul est indication de l'indépendance linéaire de ces vecteurs. Il n'est nul besoin de se référer à une métrique (aux longueurs des vecteurs).⁵

Tels sont quelques aperçus de la notion d'intrinsèque en mathématiques. Ce caractère est un signe avant-coureur d'une certaine stabilité, à l'instar du nombre qui représente la courbure totale d'une surface $K = k_1 k_2$. Ce nombre possède **une propriété de résistance face aux déformations.**

(en moi, à part)

- Ah ! J'oubliais les vecteurs propres, toujours en algèbre linéaire.

(Haut.)

¹ https://fr.wikipedia.org/wiki/Abscisse_curviligne

² <https://www.les-sciences.fr/mathematiques/la-geometrie-riemannienne/> ; https://fr.wikipedia.org/wiki/Géométrie_riemannienne

³ https://gdr-gdm.univ-lr.fr/ihp-maths-meca/materials/mosquera_ihp_Nov2021.pdf

⁴ Bernhard Riemann, *Sur les hypothèses qui servent de fondements à la géométrie* [1867], Gauthier-Villars, Paris, 1990, p.358. Nous soulignons.

⁵ C.P. Bruter, *Comprendre les mathématiques*, op. cit, Odile Jacob, Paris, 1996, p.117.

On pourrait aussi penser à **la conservation des directions** que suggère le dégagement des vecteurs propres d'une matrice lorsque précisément le déterminant de la matrice est non nul (matrice inversible dans ce cas, d'où l'on peut déterminer le polygone caractéristique qui permet de définir des valeurs propres. Ces valeurs propres sont à insérer dans une matrice diagonale pour la combiner avec la matrice de départ et obtenir les vecteurs propres recherchés).

La signification des vecteur propres et valeurs propres ne dépend pas du contexte de l'espace étudié. On peut y voir *des axes de rotation et de constantes d'inertie **intrinsèques au solide**. En statistique, ce pourraient être les composantes principales qui révèlent la dimension la plus significative d'un sondage.*¹

(renvoi à nouveau du Volet I du §67^{bis})

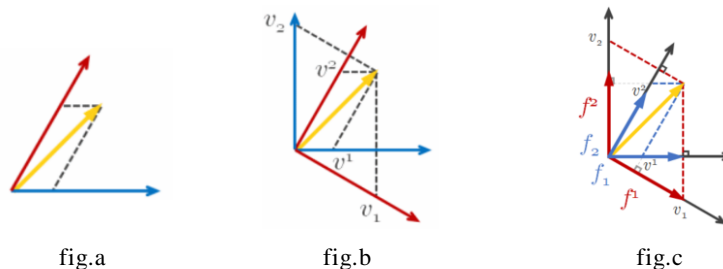
Partons d'une base, d'un repère, où se situerait, si vous voulez, une interprétation d'un texte de droit constitutionnel. Comment passer de cette base à une autre base où se situerait une autre interprétation du même texte ? Qui dit base, dit géométrie extrinsèque ; mais, en mathématiques, il existe de nombreuses relations de passage, dont celles, plus sophistiquées qu'est par ex. un (espace) fibré entre des espaces superposés. Dans le même esprit, il existe aussi une telle relation entre différentes bases. Cet objet est le « **tenseur** » qui ne dépend pas d'un système de coordonnées particulier, bien que les coordonnées changent lorsqu'on passe d'une représentation dans une base donnée à celle d'une autre base.

Le tenseur est défini intrinsèquement à partir d'un espace vectoriel.

Grâce à une base f d'un espace vectoriel, on peut projeter un vecteur sur les vecteurs qui composent cette base. (Tout vecteur v de l'espace peut s'obtenir comme combinaison linéaire, i.e. comme somme, pondérée par des scalaires k_i , de ces vecteurs de base : $v = \sum_i k_i b_i$; ces vecteurs sont linéairement indépendants).² Soit donc une base non orthogonale dont les axes par définition ne sont pas perpendiculaires entre eux. Comment construire un tenseur « sur cette base » ?

N'hésitons pas à se considérer comme nul pour comprendre en partant de multiples références..³

Un 1^{er} repère (un repère est un couple de vecteurs, formant une base, muni d'un point du plan O) est construit à partir de la base préalablement définie f en traçant un axe perpendiculaire à un 1^{er} axe de la base. Nous obtenons un nouveau couple d'axes sur lesquels est projeté le vecteur v , dont les composantes, dans ce 1^{er} repère, sont précisément nommées « **contravariantes** », v^1 et v^2 . Faisons de même pour composer un 2^e repère en traçant un axe perpendiculaire au 2^e axe de la base du départ. Les composantes du vecteur dans ce 2nd repère sont appelés « **covariantes** », v_1 et v_2 .



Les adjectifs covariant et contravariant sont utilisés pour décrire la manière avec laquelle des grandeurs varient lors d'un changement de base. Ces grandeurs sont dites covariantes lorsqu'elles varient comme les vecteurs de la base, et contravariantes lorsqu'elles varient de façon contraire.

Le vecteur v est finalement représenté dans deux bases différentes, une 1^{re} base d'axes f^1 et f^2 , et une autre base, d'axes. f_1 et f_2 . Cette façon de calculer la longueur du vecteur v dans

¹ <http://www.jybaudot.fr/Vecteursmatrices/diagonalisation.html>

² C.P. Bruter, *Comprendre les mathématiques*, op. cit, p.113.

³ <https://www.naturelovesmath.com/mathematiques/les-tenseurs-pour-les-nuls/> ; Daniel Fleisch, *A student's guide to vectors and tensors*, Cambridge Univ. Press, 2012, ch.4 : Covariant and contravariant vector components ; Claude Jeanperrin, *Initiation progressive au calcul tensoriel*, Ellipses, Paris, 1999 ; [https://fr.wikipedia.org/wiki/Covariant_et_contravariant_\(algèbre_linéaire\)](https://fr.wikipedia.org/wiki/Covariant_et_contravariant_(algèbre_linéaire))..

n'importe quel repère, en combinant ses composantes covariantes et contravariantes : $\|\mathbf{v}\|^2 = v^i v_i = v^1 v_1 + v^2 v_2$.

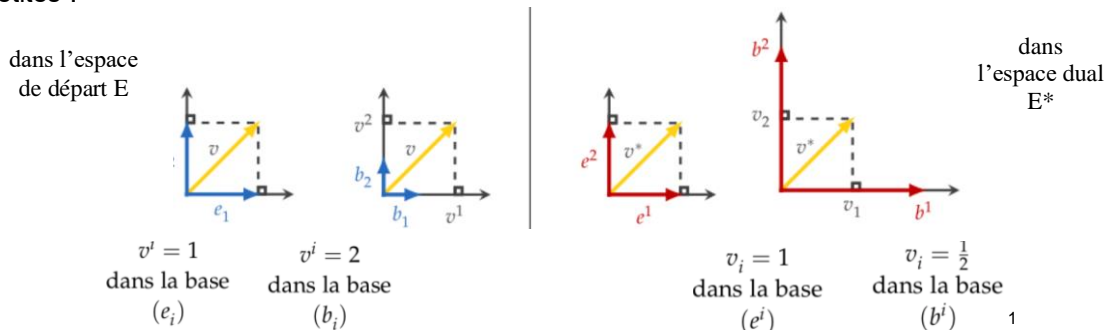
Cette formule n'a guère d'utilité en droit, mais continuons d'explorer l'idée qui guide la notion de tenseur. Derrière cette idée de longueur, quel que soit le repère où se trouve le vecteur \mathbf{v} , les *physiciens disent que la longueur du vecteur est invariante pour toutes les transformations de coordonnées*. Là réside ce qui nous importe, parce qu'une telle propriété *garantit que les lois physiques ne changeront pas lorsqu'on les observera d'un autre endroit ou à une autre date, et même si l'on est en train de se déplacer !*

D'où l'aspect intrinsèque du tenseur : la longueur reste invariante par changement de base, mais pour que cette propriété demeure, **il faut que les composantes covariantes de \mathbf{v} subissent la variation inverse de celle de ses composantes contravariantes**. Nous pouvons obtenir les anciennes composantes en fonction des nouvelles, mais nous pouvons aussi obtenir les nouvelles en fonction des anciennes par un changement de base inverse de celui des vecteurs de base (on utilise à cette fin une matrice inverse), ce qui explique le terme de composantes contravariantes par changement de base.

Covariant components transform in the same way as basis vectors ("co" \approx "with"), and contravariant components transform in the opposite way to basis vectors ("contra" \approx "against"),

Il y a donc de l'intrinsèque sous la notion, mais il y aussi de la dualité, comme l'indique le préfixe « co » : *les composantes covariantes du vecteur sont les composantes d'un vecteur identique qui se trouve dans un autre espace vectoriel, en quelque sorte "miroir" de l'espace du vecteur d'origine*. On l'appelle l'espace dual E^* ("reciprocal" or "dual" basis vectors ; ce sont des *alternative basis vectors*).

Donnons un exemple pour en voir l'effet dans le cadre d'une base orthogonale. Ce sera plus clair. Lorsqu'on change de base, on effectue corrélativement un changement de base duale associée dans l'espace dual E^* . En passant à une base "plus petite", les composantes contravariantes v^i du vecteur \mathbf{v} sont devenues plus grandes (dans l'espace dual), alors que ses composantes covariantes v_i , qui diminuent ou se contractent comme les vecteurs de la nouvelle base, sont devenues "plus petites".



Prenons un stylo. Si on regarde son image dans un miroir déformant, on s'attend évidemment à ce que le stylo soit déformé (le contraire serait bizarre). Le miroir modifie le système de coordonnées, le stylo est lui aussi modifié. Pourtant, d'un côté ou de l'autre du miroir, la réalité physique du stylo n'a pas changé. Seule sa description est transformée. Et pas n'importe comment : la prise en compte du détail de la transformation doit nous permettre, dans l'image déformée, de retrouver les dimensions réelles du stylo.²

On voit que si l'on se contentait de se référer au théorème de Pythagore, à partir des composantes du vecteur étudié, pour connaître sa longueur, celle-ci serait de longueur variable. Ce ne serait plus le même vecteur. D'où le retour au tenseur qui permet aux composantes du vecteur devenues plus grandes d'être compensées par celles des vecteurs de base devenues plus petites, et inversement.³

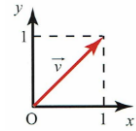
L'emploi de la base duale (de l'espace dual E^*) s'avère très commode dans les calculs précisément de la norme ou longueur du vecteur \mathbf{v} .

¹ <https://www.naturelovesmath.com/mathematiques/quest-ce-qu'un-nombre-episode-5-les-tenseurs/>

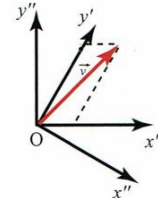
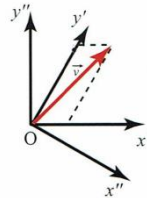
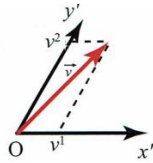
² http://cordier-phychi.toile-libre.org/phy/Relativite_files/Partie%201.pdf

³ <https://www.youtube.com/watch?v=C761WSOTqnc>

Dans un repère orthonormé dans lequel les composantes du vecteur sont 1 sur l'axe des x et 1 sur l'axe des y, il suffit de considérer le théorème de Pythagore., i.e. le carré $\|\mathbf{v}\|^2$ de la norme du vecteur \mathbf{v} pour vérifier $1^2 + 1^2 = 2$. Voir donc ci-contre le vecteur de norme $\sqrt{2}$



Un tel calcul devient plus compliqué dans une base non orthogonale, comme si l'ancien repère orthonormé supra avait subi une rotation de l'un ou l'autre de ses deux axes. Qu'à cela ne tienne ! Comme sur *les fig. a, b et c supra*, on réintroduit l'orthogonalité dans le nouveau repère ajoutant des axes orthogonaux aux axes du repère.



Représentation de \mathbf{v} dans un repère $(Ox'y')$ qui n'est plus orthogonal | On construit un axe orthogonal (Oy'') à (Ox') , et un autre (Ox'') à (Oy') | Le vecteur \mathbf{v} dans le repère $(Ox''y'')$

On note (v_1, v_2) les coordonnées de \mathbf{v} dans le repère $(Ox''y'')$. Ce sont les composantes covariantes de \mathbf{v} . On a alors la relation suivante, qui fait tout l'intérêt des tenseurs (d'ordre 1) : $\|\mathbf{v}\|^2 = v^1v_1 + v^2v_2$ (c'est la formule du produit scalaire de deux vecteurs en termes de leurs composantes, formule que l'on obtient en projetant les vecteurs sur les axes d'un repère cartésien et en considérant le cosinus de l'angle de chacun des vecteurs avec ces axes). Pour que le lecteur peu familier s'en assure, voir note.¹

On observera que le positionnement des indices contravariant et covariant n'est pas arbitraire. Un indice répété covariant-contravariant dans un même terme sera toujours sommé. Un indice ne le sera pas s'il apparaît deux fois covariant ou deux fois contravariant dans le même terme.

En effet, si (v^1, v^2) sont les composantes du vecteur d'origine \mathbf{v} dans l'espace avec son repère $Ox'y'$ qui n'est pas orthonormé, alors (v_1, v_2) sont les composantes de \mathbf{v} , vu comme covecteur dans l'espace dual $(Ox''y'')$. Ces composantes sont en fait des coordonnées dans le dual ; elles varient dans le même sens que les vecteurs de la base d'origine, mais, relativement aux vecteurs de base du dual, elles sont contravariantes.

*On mesure donc bien, dans les deux cas, la norme de \mathbf{v} , à partir de ses composantes contravariantes, en exploitant un phénomène de dualité. C'est par le tenseur que l'on passe des composantes dans une base aux composantes dans la base duale : lorsqu'on change de repère, le tenseur encode la correspondance entre els composantes covariantes et contravariantes. **Cette méthode permet de calculer ou de retrouver la norme d'un vecteur dans tout repère du plan.***

Le phénomène est très général et s'applique à tous les tenseurs, de tout ordre, même si les notions de composantes sont plus difficiles se représenter. La covariance et la contravariance des composantes sont liées à leur comportement lors d'un changement de base.²

En résumé, *a tensor is an object that is invariant under a change of coordinates, and has components that change in a special, predictable way under a change of coordinates.*³

On peut ainsi avoir au départ un tenseur métrique dans une base d'origine, représenté par une matrice dont les coefficients sont les coordonnées d'un vecteur dans cette base, et, à l'arrivée, un autre tenseur métrique, représenté par une autre matrice, dont les coefficients sont les coordonnées du même vecteur dans la nouvelle base. Dans les composantes figurent des produits scalaires avec les vecteurs de base. Il s'agit, cependant, **du même tenseur métrique qui est invariant.**

Ce qui nous intéresse, au-delà cet aperçu formel très contracté, est surtout **la signification physique de cet objet qu'est le tenseur**. Le mathématicien Claude Bruter nous la fait bien saisir :

¹ Marc Haelterman, Clipedia, *Le produit scalaire*, 2018, <https://www.youtube.com/watch?v=uXPfmoRIJp0>

² D. Justens & E. Thomas, « Le tenseur : un outil indispensable », in *Les équations de la physique moderne* ; Tangente HS n°71, Paris, 2020, pp.46-51 ; Pierre Amiot, *Initiation aux tenseurs. Scalaires, vecteurs et autres sous transformations*, Département de Physique, de Génie physique et d'Optique, Univ. Laval, Québec. Sur internet. Nous soulignons.

³ <https://www.youtube.com/watch?v=C761WSOTqnc>

Si un objet physique a quelque existence, il reste invariant lorsqu'on le déplace dans l'espace-temps. Les objets physiques étant assez homogènes dans leur constitution, c'est à l'échelle la plus locale qu'on peut formaliser cette invariance. Ce qui caractérise l'objet local, c'est **sa capacité de résistance à la déformation**, en termes plus savants, **son tenseur local d'énergie**. Celui-ci évalue le travail accompli pour étirer le milieu interne d'un écart élémentaire $dx = (dx^1, dx^2, dx^3, dx^4)$, lorsque la force appliquée sur ce milieu est la force élémentaire $dx = (dx_1, dx_2, dx_3, dx_4)$.

Ce travail, $dx(dx)$, s'écrit comme la somme des $dx_i dx^i$, affectés de coefficients g_i^j . Le vecteur dx est **un vecteur dit contravariant**, alors que **la force** dx , vecteur de l'espace dual de l'espace des vecteurs déplacements, est appelé **un vecteur covariant**.

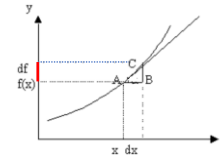
Lorsqu'on représente le vecteur force dans l'espace des vecteurs de déplacements, la composante [covariante] dx_i devient une composante [contravariante] dx^i : le travail élémentaire précédent qui évalue l'énergie locale s'écrit alors comme le produit scalaire de dx par lui-même.¹

Les coordonnées (et vecteurs) ordinaires (entendons physiques) sont notées avec un indice supérieur. Ce sont les composantes contravariantes dx^i qui varient du vecteur déplacement, alors que les composantes covariantes dx_i varient comme le gradient, une grandeur vectorielle qui indique de quelle façon une grandeur physique varie dans l'espace. Il se dégage donc **deux types de grandeurs physiques : des vecteurs (contravariants) et des forces qui agissent sur ces vecteurs** (sous la forme de vecteurs covariants ; ce sont des forces dues à un gradient, comme par exemple le gradient d'un potentiel ; le gradient est une forme linéaire ou différentielle). **Ces grandeurs se transforment à l'inverse l'une de l'autre pour rester invariante lors d'un changement de coordonnées.**²

(*n*^{ième} rappel sur le gradient : le gradient indique en général l'augmentation ou la diminution progressive d'une variable par rapport à la distance. Le gradient est un vecteur dont les coordonnées sont les dérivées partielles, une dérivée par exemple en 3 dimensions. Il indique la direction perpendiculaire aux courbes et aux surfaces.

Le gradient est une autre écriture possible de la différentielle,

Par ex. en 1D : l'accroissement de la fonction $df = df/dx \cdot dx$, avec df/dx , la dérivée, i.e. la limite d'un taux d'accroissement, et dx un petit déplacement, et plus généralement : $df = \text{grad } f \cdot dl$.



Soit par ex., un gradient d'altitude, un gradient de température), un gradient de potentiel, décrivant des zones sont plus concentrées ou élevées qu'à une autre. Le gradient engendre un flux comme un flux thermique, un flux de particules à travers une surface, une charge électrique traversant par unité de temps un fil, etc. **L'inhomogénéité de la température ou de la concentration d'an l'espace crée une sorte d'excitation linéaire** si la différence n'est pas trop grande (sinon, le gradient ne serait plus proportionnel aux dérivées partielles, interviendraient alors des termes quadratiques, au carré, voire au cube, comme dans un ressort trop tiré ; l'allongement n'est plus proportionnel à la force exercée : le ressort a perdu son élasticité. La force de gradient de pression dans l'atmosphère est due aussi au gradient, la direction de cette force étant toujours des hautes pressions vers les basses pression et perpendiculaire aux isobares, assimilables à des courbes de niveaux.³

On parle de travail, W , parce qu'on parle de déplacement, d , d'une force, F , dans l'espace, $W=F \cdot d$. (C'est un produit scalaire entre deux vecteurs : voir *Annexe IV* du §68 suivant pour s'en persuader). En effet, une force appliquée à un objet effectue un travail lorsqu'elle le met en mouvement ou modifie son mouvement. Le travail est une forme d'énergie qui n'est pas toutefois limitée à un déplacement linéaire.

La métrique riemannienne, adaptée à des espaces courbes, utilise un tenseur g dont les coordonnées changent lorsqu'on passe d'une représentation dans une base donnée à celle d'une autre base.

*Toutes ces transformations se traduisent naturellement en termes matriciels. Lors d'un changement de base, **g conserve la correspondance entre les composantes covariantes et contravariantes**. Si l'on multiplie les composantes contravariantes par g , on en obtient les*

¹ Claude Bruter, « Invariance, symétrie et stabilité », in *Qu'est-ce que comprendre en physique ?* éd M. Espinoza., Strasbourg, 2000, pp.36-43.

² http://cordier-phychi.toile-libre.org/phy/Relativite_files/Partie%201.pdf ; Gilles Leborgne, *Mécanique : tenseurs 1ère partie vecteurs et formes linéaires (contravariance et covariance), formules de changement de bases, tenseurs uniformes, contractions.*, ISIMA, 4 janv. 2021

³ *La signification physique du gradient*, E-learning physique, 25 seot. 2008, sur YouTube.

composantes covariantes. Si l'on multiplie les composantes covariantes d'un vecteur par g^{-1} , on en obtient les composantes contravariantes.¹

(Annexe XIV, de ce volet 2, sur le lien, dans un tenseur, entre changement de base et produit scalaire)

Ainsi, bien que le tenseur préserve par ex. une longueur invariante, il varie continûment avec la position sur la variété, à commencer par la courbure de la variété (surface) qui varie continûment en fonction du point. Mais attention : le tenseur de Riemann, g , lié à la courbure, sert à calculer une distance, pas une courbure, contrairement à un autre tenseur, celui de Ricci.

Qui dit variations infinitésimales, dit présence de dérivées dans le tenseur qu'il faut calculer. Il existe donc de nombreux tenseurs g possibles. En fait, le terme tenseur est souvent étendu pour désigner **un champ de tenseurs**, i.e. une application qui associe à chaque point d'un espace géométrique un tenseur différent.² De même que, dans un champ de vecteurs, on associe à un point un vecteur, de même, dans un champ tensoriel, on associe à chaque point un tenseur.

Dans la tradition de l'analyse des Lumières, *l'idée fondamentale de Riemann est de saisir les propriétés des choses d'après leur mode d'existence de l'infiniment petit*.³ Une telle hypothèse nous prive-t-elle de concevoir un pseudo-tenseur en droit constitutionnel dont le développement n'est pas toujours continu, pour parler par euphémisme ? Non, si l'on s'en tient au schéma logique du tenseur comme objet invariant à travers son évolution. Nous avons déjà postulé cette hypothèse de continuité par commodité pour appréhender la fonction d'interprétation des dispositions de la Constitution ou des lois comme une fonction à plusieurs variables.

(§ 46
3/a)

Avant d'aborder le droit, à nos risques et périls, descendons du niveau abstrait vers le concret.

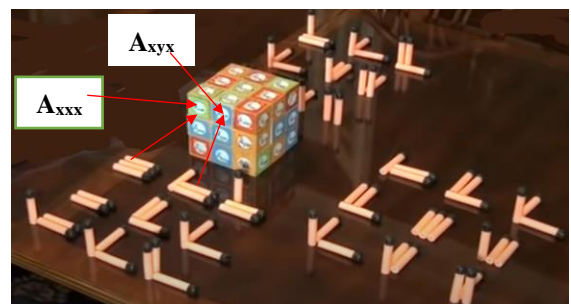
Il vaut d'abord de relever qu'un vecteur est un tenseur d'ordre 1 (car un vecteur de base - *basis vector* - par composante).

Dans le même esprit, un scalaire est un tenseur 0 (sachant qu'un scalaire n'indique aucune direction, donc ne comporte aucun indice, puisque indice = direction), une matrice est un tenseur d'ordre 2. Un tenseur n'est pas autre chose qu'une combinaison de composantes et de vecteurs de base (*unit vectors to express the length of a vector*). Soit par ex. un tenseur d'ordre 2 (*rank 2*) dans un espace 3 D (une pile de 9 petits cubes). Au lieu d'avoir 3 composantes et 3 vecteurs de base, nous avons 9 composantes et 9 couples de vecteurs de base (un couple dans les directions x et y , et un couple dans les directions x ou y et z , la hauteur, auquel cas chaque composante (un petit cube) ne possède plus 1 mais 2 indices.

Quel est le besoin d'avoir une telle représentation ? Considérez les forces à l'intérieur d'un objet. On peut imaginer des surfaces dont **les vecteurs normaux** à cette surface (*area vectors*), sont dirigés dans la direction x , ou la direction y , ou la direction z . Sur chacune de ces faces, on peut imaginer aussi une force qui peut avoir une composante soit dans la direction, ou y ou z . Aussi, pour caractériser toutes les forces possibles sur toutes les faces possibles, nous avons de 9 composantes, chacune étant dotée de deux indices correspondant aux vecteurs de base.

Voici un tenseur d'ordre 3 (un cube de 3 piles de 9 petits cubes chacune), comprenant donc 27 composantes et 27 ensembles de trois vecteurs de base, comme sur la *fig. ci-contre* qui montre leur répartition pour chaque face verticale du cube, l'une de face, l'autre au milieu, et l'autre derrière.

Chaque composante a trois indices. Le petit cube du haut à gauche dans la pile de face, A_{xxx} , possède 3 vecteurs de base dans la direction x , alors que celui qui est à côté, à la même hauteur, A_{xyx} has deux vecteurs de base dans la direction x et un vecteur de base dans la direction y , et ainsi de suite.⁴



¹ D. Justens & E. Thomas, « Le tenseur : un outil indispensable », art. cit., p.51. Nous soulignons.

² https://fr.wikipedia.org/wiki/Géométrie_riemannienne ; <https://fr.wikipedia.org/wiki/Tenseur>

³ Felix Klein, in Bernhard Riemann, *Sur les hypothèses qui servent de fondements à la géométrie*, p.XXX.

⁴ Dan Fleisch, *What's a tensor ?* <https://www.youtube.com/watch?v=f5liqUk0ZTw>

Rappel : Pour une surface définie par deux vecteurs, le produit vectoriel donne le vecteur représentatif de la surface. Ce vecteur est le vecteur normal, perpendiculaire à la surface, et proportionnel à ladite surface. Il mesure à sa façon cette surface

C'est la combinaison des vecteurs de base et des composantes qui rend le tenseur si attractif pour les chercheurs. Les vecteurs de base assurent le passage d'un repère (*reference frame*) à un autre tandis que les composantes permettent à leur combinaison avec vecteurs de base d'être la même pour tous les observateurs. Le tenseur ne dépend pas de telle ou telle base. C'est bien une grandeur intrinsèque. Les coordonnées changent, et le tenseur avec, mais ce dernier *fluctuat nec mergitur*. Il ne coule pas.

Energie et stabilité Symétrie, invariance et conservation

Les phénomènes de symétrie, d'invariance et de conservation perçaient déjà dans l'intrinsèque, le contravariant et le lagrangien qui évalue l'énergie.

Quelle que soit leur taille, on retrouve dans tous les cercles, les mêmes propriétés intrinsèques qui sont indépendantes du système de coordonnées. A contrario, on pensera, dans l'extrinsèque, à un cercle dans un plan cartésien dont on chercherait à déterminer le centre et le rayon, ou à une courbe dont on entendrait appréhender le rayon de courbure comme l'inverse du rayon du cercle tangent (le cercle osculateur approche le mieux, nous le savons, parmi les cercles tangents, la courbe en question).

Tout cercle a des propriétés de symétrie. Son diamètre agit comme un axe de symétrie, séparant le cercle en deux parties de surfaces égales. Comme il y a une infinité de lignes passant par son centre, un cercle a un nombre infini de lignes de symétrie. Corrélativement, le cercle a une symétrie rotationnelle. Si nous tournons le diamètre du cercle d'un certain angle, le cercle **conserve sa symétrie** autour du diamètre.

La sphère possède aussi des propriétés propres, quelle que soit sa petitesse ou grosseur. *La sphère est omniprésente dans le cosmos. Non seulement elle est sphérique, mais les autres étoiles le sont aussi, tout comme les planètes et la Lune (quelques irrégularités de surface mises à part). Dans l'infinie variété des formes et des contours possibles, tous ces corps célestes ont choisi la sphère. La symétrie sphérique est causée par la gravité. Quand on a compris que la Nature traite toutes les directions de la même manière, symétriquement, on vient à considérer la sphère comme la forme naturelle par excellence. Cependant, tout n'est pas sphérique, et d'autres motifs de symétrie peuvent apparaître.*¹

La symétrie miroir, ou symétrie par réflexion comme les deux ailes d'un papillon, en est un exemple, mais une symétrie miroir peut être conçue de façon plus abstraite.

Soit par ex. un espace vectoriel. Dans cet ensemble de vecteurs, V , on a le droit d'additionner des vecteurs ($\mathbf{u}+\mathbf{v}$) et de les multiplier par un scalaire, $\lambda\mathbf{u}$. On peut donc associer à tout vecteur une « forme linéaire », i.e. une mesure, la fabrication d'un nombre. Dans l'espace vectoriel des fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , la fonction f préserve les combinaisons linéaires : $\forall x,y \in E, f(x+y) = f(x)+ f(y)$, $\forall x \in E \forall \lambda \in K f(\lambda x) = \lambda f(x)$, Une forme linéaire peut être simplement $x + y$. La forme linéaire est une forme « duale ».

Le dual V^ des formes linéaires sur un espace vectoriel V de dimension finie est lui-même un espace vectoriel de même dimension que l'espace V des vecteurs. L'on peut considérer les vecteurs v **comme des déplacements**, éventuellement instantanés, et les formes linéaires f peuvent être considérées **comme des forces**. Les formes linéaires de V^* opèrent sur les vecteurs de V de sorte que l'action de f sur v , $f(v)$, est le travail accompli par la force f lors du déplacement v .*

Nous n'allons pas prolonger nos propos sur la symétrie. Nous retiendrons seulement l'idée essentielle que **la création de symétries est un procédé employé par la nature pour stabiliser un objet.**²

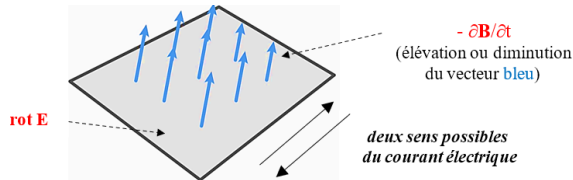
¹ Frank Close, *Asymétrie : la beauté du diable, Où se cache la symétrie de l'univers ?* EDP sciences, Paris, 2001, pp.19-21.

² Cl. Bruter, *Energie et stabilité. Eléments de philosophie naturelle et d'histoire des sciences*, op. cit., p.9. Nous soulignons.

Lorsque Lagrange, écrit au début de sa *Mécanique analytique*, que ***l'équilibre résulte de la destruction de plusieurs forces qui se combattent et qui anéantissent réciproquement l'action qu'elles exercent les unes sur les autres***,¹ il souligne sans le dire l'importance de la symétrie des forces en jeu qui produit un zéro au sortir, signe de stabilité.

En électromagnétisme, on déduit les lois de symétrie du champ électromagnétisme en utilisant les équations de Maxwell. Considérez la 3^e loi de Maxwell, l'équation de Maxwell-Faraday, reliée à la loi d'induction de Faraday. Elle décrit comment la variation d'un champ magnétique peut créer (induire) un champ électrique.

(§66
2/ii)



Rappel : si la variation de l'un va dans tel sens, la variation de l'autre va dans le sens contraire.

*Changes in magnetic field B cause a rotation electric field E, and vice-versa in such that conservation is fulfilled.*²

L'existence d'une symétrie, ou d'un **élément inverse** pour être plus parlant, emporte une stabilité absolue ou invariance. Il en est ainsi en mathématiques des **groupes de transformation** qui admettent un symétrique qui empêche les éléments d'un ensemble d'en sortir. Tel est, par ex., le groupe des permutations associées aux racines des équations algébriques, ou tel autre groupe dont nous avons déjà parlé.³ Autre ex. (en passant) : le groupe cercle unité dans le plan euclidien, qui est le groupe multiplicatif des nombres complexes de module 1 (groupe des rotations qui agit sur le cercle).

Un groupe algébrique « conserve », car l'élément symétrique permet de revenir au point de départ en annulant toute opération, même composée, des éléments de l'ensemble considéré. **La réversibilité qui compense**, voilà le secret de l'invariance qui paraît être une permanence à travers le changement.

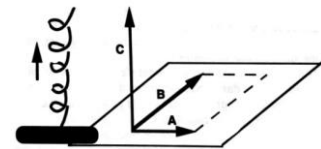
Cette permanence, nous la retrouvons avec le tenseur sur l'ensemble des bases duquel agit un groupe.

Pensons à nouveau au cube avec ses 6 faces définissant 3 plans, et dans chaque plan trois forces qui peuvent s'exercer sur le cube. L'une des forces est perpendiculaire à la face du cube et les deux autres parallèles à la même face avec des directions différentes. *Ces 9 forces en tout, dans les 3 plans, peuvent être réunies en une seule entité, un tenseur, dont les 9 forces sont les composantes.*

L'invariance est également présente dans les objets géométriques qui se conservent lors d'une rotation. Le produit vectoriel d'un vecteur **A** par le vecteur **B** voit son image inversée dans un miroir du fait que l'image du tire-bouchon est « gauche »

Ce vecteur, produit de deux autres, appartient à la catégorie générale des tenseurs, encore que ce soit un tenseur particulier qui est antisymétrique à cause de la propriété du miroir.

*Mais ce qui importe ici est que sa définition ne change pas s'il tourne dans l'espace, cette invariance reste vraie pour tous les tenseurs.*⁴



À la toute fin du XIX^e siècle, la symétrie en science était encore inconnue du public, plus familiarisé avec les diverses symétries en art. Pourtant, Pierre Curie avait montré l'importance **des raisonnements de symétrie** en observant un principe : *Lorsque certaines causes produisent certains effets, les éléments de symétrie des causes doivent se retrouver dans les effets produits.* En sus de ses autres recherches, Pierre Curie en fit l'expérience en électromagnétisme sans passer par les équations de Maxwell⁵.

¹ Joseph-Louis Lagrange, *Mécanique analytique* [1788], Gabay, Paris, 1989, p.2.

² Universaldenker, *The 4 Maxwell's equations ; Important basics you need to know !* <https://www.youtube.com/watch?v=hJD8ywGrXks>

³ Claude Bruter, « Géométrie et physique. Invariance, symétrie et stabilité, », art. cit, p.5.

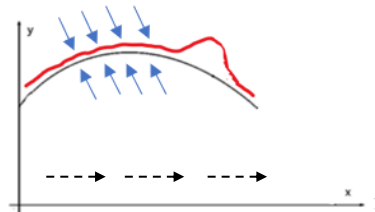
⁴ <https://stringfixer.com/fr/Tensor> ; P. Lochak, *la géométrisation de la physique*, op. cit., chap.89 : Les groupes prennent le pouvoir, p.186.

⁵ P. Lochak, *la géométrisation de la physique*, op. cit., chap.8 : Comment la symétrie a émergé de la physique, p168.

Dans le premier tiers du XX^e siècle, l'importance de la symétrie fut soulignée par Emma Noether qui exhiba davantage le lien étroit entre invariance et symétrie. *En 1918, elle est conduite à donner une forme précise au principe de Curie pour des systèmes physiques dont on connaît la représentation lagrangienne ; elle donne une expression quantitative aux « effets », les causes figurant dans la construction du lagrangien.* Voici l'énoncé de son principe théorème : *À toute transformation infinitésimale qui laisse invariante l'intégrale d'action, $\int \mathcal{L} dt$, correspond une grandeur qui se conserve.*¹ Le résultat de Noether repose sur une combinaison du calcul des variations et de la théorie des groupes continus de Lie.

Si un système physique subit une transformation comme un déplacement ou une rotation, une quantité physique est conservée lors de l'évolution du système. Il y a comme une égalité qui perdure dans le temps. C'est bien le cas pour des transformations dans le temps de l'énergie qu'évoque le lagrangien. L'invariance par rapport à cette transformation est une symétrie des transformations représentées par un groupe algébrique. Inversement, une quantité conservée signale l'existence d'une symétrie cachée. **La conservation est la notion fondamentale de la physique**, même si elle n'est pas partout et qu'il s'agit parfois d'une conservation approchée.

Deux exemples d'application du théorème de Noether : la chute libre d'abord. Sachant que, dans un système de coordonnées (x,y) le lagrangien est $\mathcal{L} = E_c - E_p = \frac{1}{2} mv^2 - mgy$ on voit déjà que cette expression ne dépend pas du temps ; l'énergie est conservée. De plus, si je change x en (x + une cste), l'impulsion mw se conserve le long de la trajectoire par translation dans l'espace, parce que x n'intervient pas dans \mathcal{L} . (voir infra). Dans un système plus compliqué où advient une rotation, le lagrangien ne dépend que de r et non de θ en coordonnées sphériques. Le moment cinétique est conservé.²



La conservation du moment cinétique n'est pas une loi fondamentale pour tous les systèmes. En revanche, d'autres lois de conservation ne semblent pas avoir été mises en défaut : celle, par ex., de conservation de l'énergie (y compris l'énergie de masse en relativité restreinte; l'énergie de masse est l'énergie que possède un corps du fait de sa masse), celle de la quantité de mouvement, celle de la charge électrique à propos de laquelle *cet invariant est lié à une symétrie dite « interne » , c'est-à-dire qu'elle ne met en jeu ni l'espace ni le temps mais un « espace » de type nouveau lié aux particules. C'est un espace à la fois abstrait et réel par rapport à notre perception sensorielle.*

On retrouve, au fond, l'intuition de la mécanique du XVIII^e siècle, puisque

si un objet présente quelque symétrie, c'est qu'existe dans sa constitution un système de forces internes qui s'équilibrent, et qui contribuent à assurer de ce fait la stabilité de l'objet. Et réciproquement, si un tel système de forces s'établit en équilibre, il est naturel qu'il en imprègne la structure de l'objet en question, et qu'il s'extériorise sous la forme d'une morphologie présentant des symétries.³

La compréhension de la physique des particules devient la quête du « groupe » de symétries qui représente les interactions et dont le couronnement est le modèle standard testé actuellement au CERN par l'accélérateur L.H.C. (Marc Zito, CEA, La symétrie est un combat, in Le Monde du 10 mars 2012)

Tout ne vire donc pas à la déréluction. Il y a des îlots de stabilité que découvre aussi la science.

¹ Cl. Bruter, *Energie et stabilité.*, p.100. Nous soulignons ; [https://fr.wikipedia.org/wiki/Théorème_de_Noether_\(physique\)](https://fr.wikipedia.org/wiki/Théorème_de_Noether_(physique)); Jérôme Perez,

« Le théorème de Noether. Son centenaire, sa signification et sa portée », in *Quadrature*, n° 100, 2016, pp.33-43.

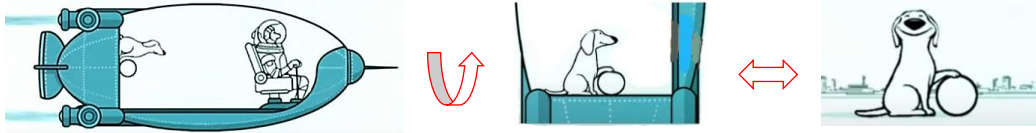
² A. Bourget, Scientia Egredia, *Le principe de moindre action et la mécanique (analytique) lagrangienne*, video cit.

³ Cl. Bruter, *Energie et stabilité.*, p.98. Nous soulignons.

Pourquoi les corps tombent-ils en chute libre à la même vitesse ?

1/ Rem. Nous ne présenterons que quelques diagrammes suggestifs en guise d'explication, tirés de la vidéo en référence. ¹

2/ Le principe d'équivalence entre la force gravitationnelle et la force d'inertie

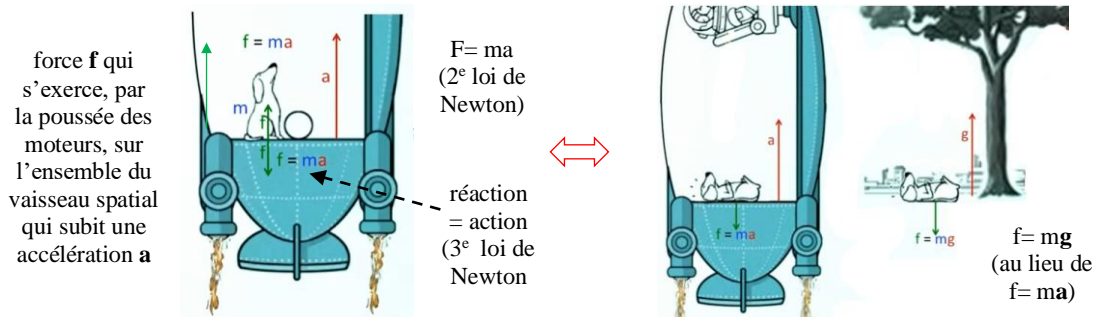


La fusée démarre et accélère (par rapport à un référentiel inertiel, i.e. à un mouvement rectiligne uniforme). Sous la poussée, naît une force d'inertie qui plaque le petit chien au fond, car la force d'inertie ne dépend d'aucun référentiel. Le petit chien ne tombe pas parce qu'il est en apesanteur (dans le référentiel sans accélération du vaisseau, qui est donc inertiel). L'astronaute reste fixé sur son siège au fond duquel il ressent aussi la force d'inertie (comme dans une voiture en démarrage),

La force d'inertie est de même nature que la force de gravitation, comme si le petit chien était assis sur la surface de la Terre :



2/ Avec les forces qui s'exercent :



L'accélération a de la fusée diffère de l'accélération g de la Terre (100 km/heure). Dans la fusée, le petit chien a un poids apparent $f = ma$ (la réponse à l'accélération de la fusée lui fournit la force d'inertie qui est ce poids), mais le poids qu'il retrouve sur Terre est $f = mg$.

En bougeant, la fusée change à chaque heure de référentiel en km/h, et la Terre ne cesse d'accélérer aussi vers le haut (le référentiel de la Terre n'est nullement un référentiel fixe ; depuis notre naissance, cela fait une vitesse vertigineuse...).

3/ En pratique, si me situe dans le vaisseau spatial, il est clair que, comme le petit chien, je ne bouge plus et ai l'impression que c'est le reste qui s'en va (comme si j'étais dans un train qui part et regarde le quai qui s'éloigne derrière moi) ; je dois donc diriger l'accélération dans l'autre sens. Je tombe, comme le petit chien avec l'accélération a . Idem sur la Terre avec l'accélération. Dans les deux cas, le référentiel (avec son origine et ses axes), au lieu de monter, descend comme on le voit sur les figures à gauche :

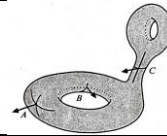


Il n'en demeure pas moins le fait suivant : la balle et le petit chien sont dans le même référentiel inertiel de l'intérieur du vaisseau spatial (ils sont en état d'apesanteur ; ils ne bougent plus). Si l'astronaute les lâche, c'est la Terre (ou nous qui bougeons, en particulier le sol qui va les rejoindre...)

¹Marc Haelterman, <https://clipedia.be/videos/pourquoi-les-corps-tombent-ils-tous-a-la-meme-vitesse>

Le théorème de Gauss-Bonnet

Ce théorème a trait à la théorie des surfaces dans l'espace \mathbb{R}^3 dans laquelle on voit apparaître la notion fondamentale de courbure



(Concl. Chap.I 2/-i)

Si l'on constate une courbe plane en dimension 1, on constate que, parmi les cercles dont le centre est situé sur la normale à la courbe passant par P, il y en a un qui épouse la courbe la mieux possible au voisinage de P. Nous l'avons nous-même rappelé en parlant du cercle osculateur en mettant en rapport « le droit naturel moderne » (la courbe) et le droit positif (ledit cercle).

Ce cercle a un rayon qu'on appelle le de courbure au point P. Quant à la courbure, dans la mesure où il est naturel qu'elle soit d'autant plus forte que la courbe est plus « courbée », c'est l'inverse du rayon du rayon de courbure. Elle est donc définie par l'égalité $R = 1/R$. (fig.1 infra)

Dans le cas plus général des surfaces, on peut tracer par un point P d'une surface la normale à cette dernière et, pour diminuer de 1 la dimension, couper la surface par un plan qui passe par cette normale. Lorsqu'on intersecte ainsi la surface par un plan passant par la normale, on obtient une courbe plane. Cette courbe plane a un rayon de courbure au point P, qui n'a aucune raison d'être constant. Pour une sphère qui est parfaitement symétrique, on a toujours le même rayon de courbure, mais dans les deux dessins infra de la fig.2, on trouve sur la a) deux courbures différentes : K_1 et K_2 . Sur la b) (la selle de cheval), il y un plan passant par la normale pour lequel elle est nulle. C'est dire que la courbure, si on lui donne un signe, change de signe entre ces deux extrêmes, lorsqu'on fait pivoter le plan autour de la normale.¹

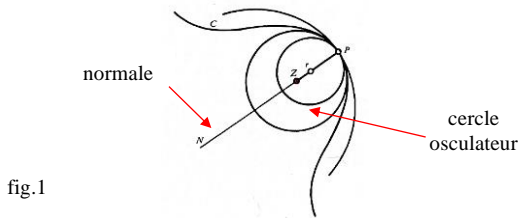


fig.1

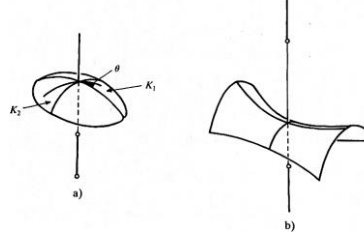


fig.2

Un théorème dû à Euler, montre qu'en fait, on n'a pas besoin de connaître les courbures de tous les plans passant par la normale pour décrire entièrement la situation. Il suffit de connaître les deux courbures extrêmes., K_1 et K_2 . (fig.3) Elles sont atteintes pour deux plans qui sont perpendiculaires , et lorsqu'on coupe la surface par un plan passant par la normale, mais faisant un angle θ avec le plan pour lequel la courbure a la valeur extrême K_1 , la formule suivante, due à Euler, donne la valeur de la courbure pour ce plan : $K_\theta = K_1 \cos^2 \theta + K_2 \sin^2 \theta$.

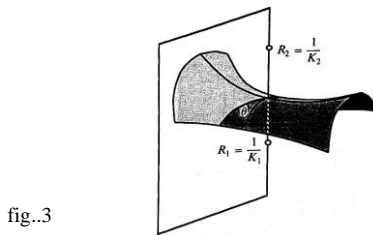


fig..3

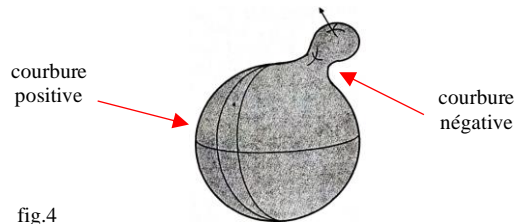


fig.4

On remarquera personnellement l'analogie avec le théorème fondamental de l'analyse, puisque l'intégrale d'une dérivée n'est pas autre chose que la différence des bornes, i.e. les extrêmes, du domaine considéré : $\int_a^b d/dt f(t) dt = f(b) - f(a)$

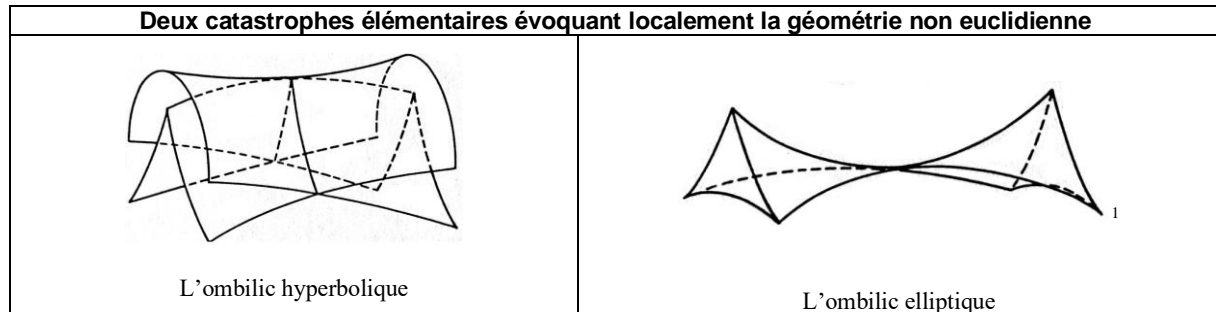
Le théorème de Gauss-Bonnet s'énonce ainsi :

Soit Σ une surface orientée plongée dans \mathbb{R}^3 . Pour tout $P \in \Sigma$, soit $R(P) = K_1 K_2$, la courbure totale de Σ en P. On a alors : $\int_{\Sigma} R(P) d^2P = 2 \pi (2-2g)$, où g est un entier, indépendant du plongement, appelé genre de Σ . Ainsi, le nombre $\int_{\Sigma} R(P) d^2P$, bien qu'il soit calculé comme une intégrale, a la propriété tout à fait extraordinaire d'être un nombre stable. Cela signifie que, bien que ce nombre soit défini à partir de nombreux paramètres, il ne dépend pas de leur choix.

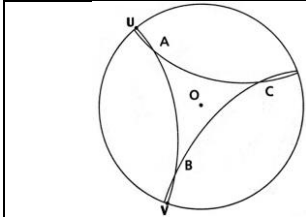
La propriété de stabilité par rapport aux déformations, dont parle Alain Connes, se comprend si on imagine une surface où, par endroits, la courbure est positive de la fig.4, et dans d'autres, comme sur la bosse, et dans d'autres, comme au bas des pentes de la bosse, une courbure totale $R = K_1 K_2$, négative. Lorsqu'on modifie légèrement la surface, voire radicalement, mais sans changer sa nature topologique, à savoir le genre de la surface, i.e. le nombre de trous, ce nombre ne change pas.

¹ Alain Connes, Géométrie non commutative, Dunod, Paris, 2005, pp.166-169. Nous soulignons.

Annexe III



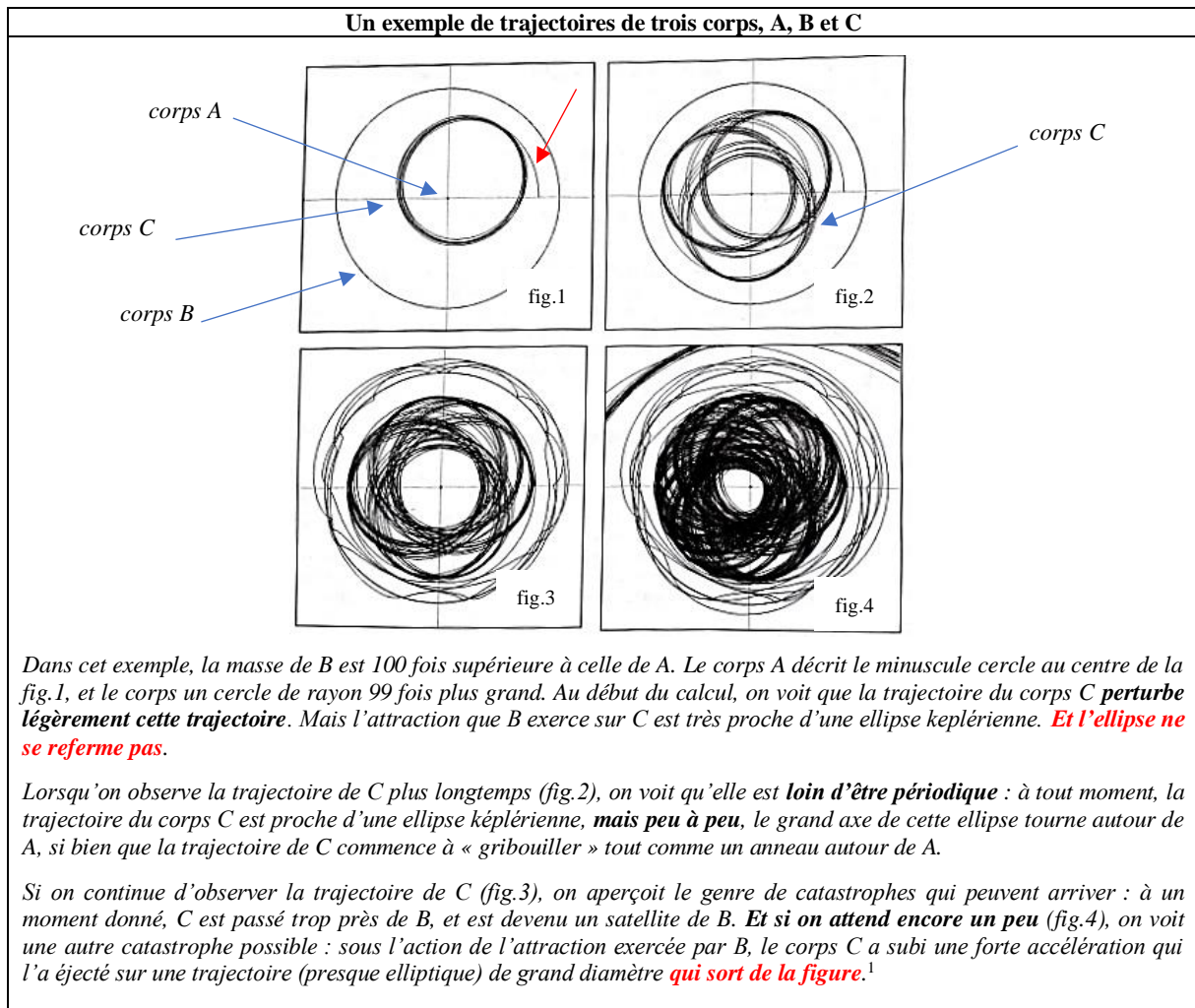
Annexe VI

La métrique spécifique à la géométrie hyperbolique	
<p>Malgré sa représentation euclidienne, le modèle du disque de Poincaré est muni d'une distance spécifique qui peut être définie comme suit, à partir des points U et v sur le cercle ;</p>	
	$d(A, B) = \left \text{Log} \left(\frac{AU}{AV} \frac{BU}{BV} \right) \right $
<p>où AU mesure la longueur d'arc le long de la « droite » UABV.</p> <p><i>Plus A se rapproche du bord, plus AU est petit et AV est grand, le numérateur tend vers zéro, son logarithme vers l'infini : A s'éloigne indéfiniment de B. Le raisonnement est le même pour B quand il se rapproche du bord.</i></p> <p>Les « droites » du disque de Poincaré vont donc à l'infini dans le cercle muni de cette distance.²</p>	

¹ V. Lundsgaard Hansen, *Geometry in nature*, A K. Peters, Massachusetts, 1993, op. cit, p.101.

² Alexandre Moatti, *Les indispensables mathématiques et physiques pour tous*, Odile Jacob, Paris, 2006, p.78.

Annexe VII



¹ F. Béguin, « Le Mémoire de Poincaré pour le prix du Roi Oscar : l'harmonie céleste empêtrée dans les intersections homoclines », art. cit., pp.199-200.

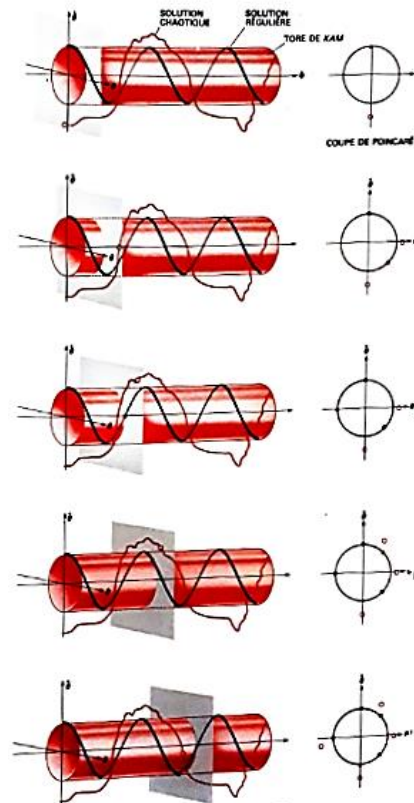
Annexe XII

La construction des coupes de Poincaré

a) On porte dans un même plan les points se trouvant à l'intersection des diverses trajectoires avec des plans de coupe espacés de 2π selon l'axe ϕ .

b) Pour les trajectoires régulières qui se bobinent en hélice sur les tores KAM [des tores emboîtés], chaque intersection est un point situé sur une courbe (ici, un cercle) : la superposition des plans de coupe constitue la courbe point par point.

c) En revanche, les trajectoires stochastiques correspondent à des mouvements désordonnés; les points à l'intersection des plans de coupe et de ces trajectoires se répartissent dans une région située à l'extérieur des derniers tores de KAM.¹



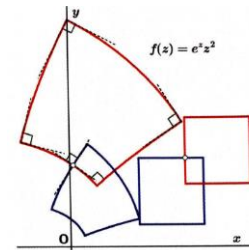
¹ Vincent Croquette, « Déterminisme et chaos », in *L'ordre du chaos*, Pour la science, Paris, 1989, pp.73-74.

Les transformations conformes

1/ Définition

Les transformations conformes rendent les images difforment, mais, pour que les formes servent, elles conservent l'information angulaire. Un outil fondamental pour l'étude de ces transformations est l'analyse complexe.

La multiplication par z , dont le module est r et l'argument θ , correspond à un changement d'échelle (une contraction si $0 < r < 1$, une dilatation si $r > 1$) et à une rotation. L'allure générale de la figure est inchangée. L'ensemble des compositions d'homothéties et de rotations, auxquelles on peut ajouter les translations, est l'ensemble des similitudes qui correspondent aux transformations $z \rightarrow az + b$ du plan complexe. Par construction, ces constructions conservent les angles, et sont donc bien conformes.¹

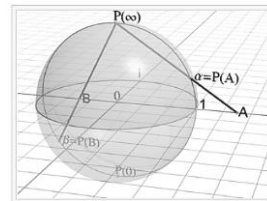
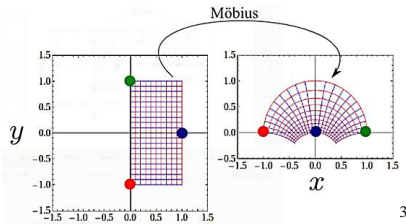


Une transformation de Möbius s'écrit : $f(z) = (az + b)/(cz + d)$, où a, b, c et d sont des nombres complexes. Cf. ci-contre l'une d'elles :

2/Cas particulier : les transformations de Möbius

Les transformations de Möbius sont des transformations conformes. Elles sont une combinaison – une composition - de quatre effets (translations, dilatations, rotations, inversions qui tourne le plan *inside out* à partir de l'intérieur). Tandis que les angles droits demeurent les mêmes, les lignes du plan restent telles ou sont transformées en cercles orthogonaux aux droites, i.e qu'ils ont tous pour centre O et qu'ils sont tous concentriques.

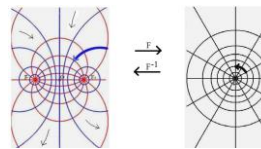
L'unité de ces transformations de Möbius se révèle en passant à une dimension supérieure. Il suffit (si on peut dire) de poser un axe vertical sur le plan sur lequel on place une sphère appelée à se mouvoir dans différentes directions. La sphère en cause est **une sphère de Riemann**, composée du plan complexe + un point à l'infini (∞). Ladite sphère est reconstituée en inversant la projection stéréographique d'une sphère sur un plan complexe. A un point du plan complexe correspond un point de la sphère. Le point situé à l'infini est le pôle Nord ou Sud de la sphère.²



3/ Les transformations de Möbius peuvent être elliptiques, hyperboliques et loxodromiques⁴

Nous ne présenterons que des « images ». Sur l'explication des transformations opérées, voir la note en référence.

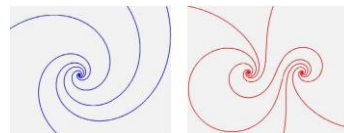
transformations elliptiques



transformations hyperboliques
(les points fixes de la transformation de Möbius sont des « source » ou des



transformations loxodromiques
(courbes loxodromiques à partir de spirales logarithmiques)



¹ François Lavalou, « Les transformations conformes », Tangente, *Les angles*, n° hors-série, n° 53, édit. POLE, Paris, 2015, p.71.
² Jonathargness, *Möbius transformations revealed*, <https://www.youtube.com/watch?v=JX3VmDgiFnY>
³ http://laussy.org/wiki/MMII/The_Möbius_Transformation ; https://fr.wikipedia.org/wiki/Sphère_de_Riemann
⁴ <http://www.pierreaudibert.fr/explor/TransformationsMobius.pdf>

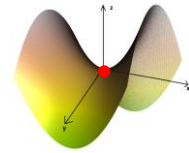
Des multiplicateurs de Lagrange dans l'étude du droit constitutionnel ?

1/ Optimisation sans contrainte

L'optimisation peut être sans contraintes ou avec contraintes. Un exemple d'optimisation sans contrainte est le vecteur gradient normal à une ligne de niveau ou à un plan tangent. On a le droit de dériver partout. L'extremum est obtenu par l'annulation de dérivées partielles, mais le fait de devoir évaluer 0 est déjà en fait une contrainte.

Le fait de minimiser une fonction aboutit à déterminer des points critiques où a lieu l'annulation.

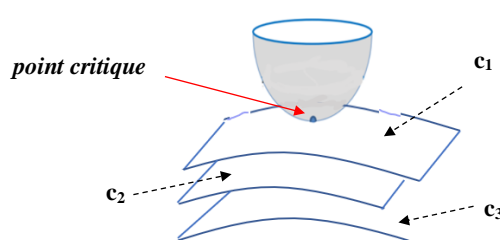
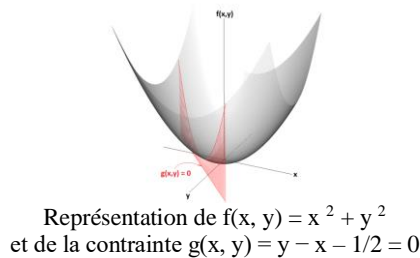
Ce sont par ex. les extrema locaux (maximum et minimum **en rouge**) de la $f(x,y) = x^2 - y^2$ en forme de selle de cheval.



Les multiplicateurs de Lagrange renforcent considérablement la contrainte en exigeant, en outre, le respect d'une égalité (ou d'une inégalité). Le coefficient λ est vraiment un coefficient de gêne. Il impose une comptabilité.

2/ Optimisation avec contrainte

Assimilons le lagrangien, qui représente une énergie, à une surface, une « variété » de façon générale. La contrainte d'égalité peut être une autre surface qui rencontre la 1^{re}. Leur intersection ne donne qu'une partie de la 1^{ère} surface, partie que l'on ne pourra pas quitter. Un point de cette portion appartient à la fois aux deux surfaces. Voilà une 1^{re} traduction en termes géométriques de l'adjonction d'une telle contrainte. On peut aussi imaginer un feuilletage de surfaces superposées d'énergie différente constante c chacune. La contrainte consisterait à sélectionner la surface d'énergie c_1 ou c_2 ou c_3 par la surface d'une demi-sphère par ex.



L'optimisation avec contrainte revient à résoudre l'équation : **gradient $J + \lambda$ gradient $g = 0$** , étant rappelé que le gradient est l'ensemble des dérivées partielles d'une fonction à plusieurs variables. Le gradient g est par ex. : $grad g = (\partial g / \partial x, \partial g / \partial y, \partial g / \partial z)$. J est la surface dont on cherche le point critique et g la surface de contrainte. Les gradients J et g sont colinéaires et proportionnels. Les fonctions sont dérivables, sinon on ne peut rien faire.

Rem : L'optimisation sous contrainte peut se traduire algébriquement à partir de la forme différentielle $dJ = \partial J / \partial x dx + \partial J / \partial y dy + \partial J / \partial z dz$ donnant lieu à la matrice jacobienne des dérivées partielles à combiner avec celle de la contrainte g car J n'est pas définie partout.

3/ exemple numérique incongru (pour avoir une meilleure idée du raisonnement en droit constitutionnel)

Supposons que le « coût » de fabriquer une loi soit, dans des circonstances données $J(x,y,z) = 6x + 3y + 2z - 5$ (x représente le coût d'intervention du pouvoir législatif, y celui du pouvoir exécutif et z du judiciaire). L'unité de coût pourrait être le nombre d'heures travaillées pour faire simple. L'équation de liaison, qui exprime la contrainte, serait $g(x,y,z) = 4x^2 + 2y^2 + z^2 - 70$, soit $4x^2 + 2y^2 + z^2 = 70$. Ce serait une contrainte budgétaire, sophistiquée, il faut l'admettre, dans le cas présent.

On n'est pas dans une optimisation sans contrainte, car, si on dérivait seulement $J(x,y,z) = 6x + 3y + 2z - 5$, on n'aurait pas la possibilité d'annuler la dérivée qui donnerait 6,3,2 ; ce serait une équation du plan, sans maximum ni minimum.

Faisons donc intervenir les multiplicateurs de Lagrange pour optimiser sous contrainte. $(6,3,2) = \lambda(8x, 4y, 2z)$. Il faut donc trouver x, y, z qui vérifient simultanément :

$$\begin{cases} 6 + 8\lambda x = 0, \text{ soit } 8\lambda \\ 3 + 4\lambda y = 0, \text{ soit } 4\lambda y = 3 \\ 2 + 2\lambda z = 2 \end{cases}$$

¹ <https://leonard.perso.math.cnrs.fr/teaching/L1%20sceco-analyse%202-notes%20de%20cours.pdf>

Des multiplicateurs de Lagrange dans l'étude du droit constitutionnel ? (suite)

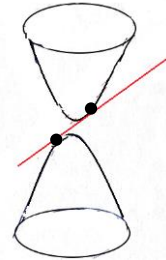
Nous obtenons 3 équations avec 4 inconnues : x , y , z et λ . Pour résoudre un tel système, il faut ajouter une équation. Nous l'avons : c'est l'équation de liaison : $4x^2 + 2y^2 + z^2 = 70$ qui permet de remplacer les x , y et z par λ , d'où deux valeurs de λ , à savoir $\lambda = 1/4$ et $\lambda = -1/4$. Les λ permettent de relier contrainte et optimisation. En effet : $6x + 3y + 2z = 1/4 (4x^2 + 2y^2 + z^2 - 70)$ et $6x + 3y + 2z = -1/4 (4x^2 + 2y^2 + z^2 - 70)$, soit avec $\lambda = 1/4$, on a $x=3$, $y=3$ et $z=4$, et avec $\lambda = -1/4$, on a $x=-3$, $y=-3$ et $z=-4$.

Si $\lambda = 1/4$ on peut déterminer la fonction de coût budgétaire de confection d'une loi : $J(3, 3, 4)$, i.e. 3 unités de pouvoir législatif, 3 unités de pouvoir exécutif et 4 de pouvoir judiciaire. Si $\lambda = -1/4$ alors $J(-3, -3, -4)$, ces valeurs négatives n'ayant guère de sens en droit.

Quelle pourrait être l'interprétation géométrique d'une telle optimisation sous contrainte ?

Un mathématicien dirait un parabolôïde avec 2 nappes elliptiques, ce qui laisserait coi le constitutionnaliste peu familier avec ce jargon (on ne lui jette pas la pierre, car nombre de mathématiciens, et de scientifiques de façon générale, sont, de leur côté, ignorants de la subtilité du droit qui protège leur liberté de pensée sans qu'ils y songent eux-mêmes).

Sachant que $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, on devrait avoir quelque chose comme ci-contre ;



Sur le lien, dans un tenseur, entre changement de base et produit scalaire

1/ Précisions préalables

Le produit scalaire usuel est la projection orthogonale, utilisant les propriétés d'un triangle rectangle pour son expression géométrique ou trigonométrique ($\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a \cdot b \cos \theta$) ou en termes de composantes des vecteurs \mathbf{a} et \mathbf{b} dans un repère euclidien ($\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y$). [les vecteurs sont en gras et leurs composantes ne le sont pas.]

La dualité dont il s'agit est la correspondance (l'isomorphisme) entre l'espace vectoriel de départ et son espace dual (l'espace des vecteurs covariants ou covecteurs, i.e. l'espace des formes linéaires ou combinaisons linéaires des composantes des vecteurs considérés). Le vecteur \mathbf{v} et son dual \mathbf{v}^* coïncident.

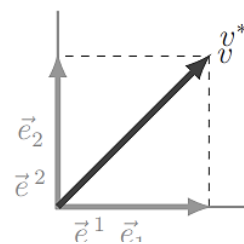


fig. supra : Dans la base canonique, munie du produit scalaire usuel, la dualité "ne change rien" [Dans \mathbb{R}^2 , la base canonique est $\mathbf{e}_1 = (1,0)$ et $\mathbf{e}_2 = (0,1)$] ¹ Le vecteur est $(1,1)$

2/ Rem. : un produit scalaire est-il une combinaison linéaire ?

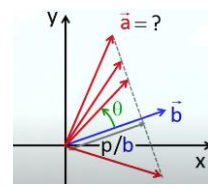
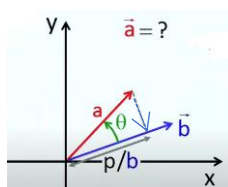
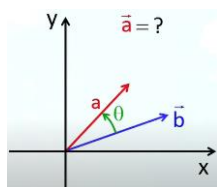
The dot product isn't a linear transformation, but it gives you a lot of linear transformations : if you think of [the dot product] $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$ as a function of \mathbf{v} with \mathbf{w} fixed, then it is a linear transformation $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, sending an n -dimensional vector \mathbf{v} to the one dimensional vector $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$.

*You can also fix \mathbf{v} , and think of [the dot product] $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$ as a function of \mathbf{w} . Then this also defines a linear transformation $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. In other words, the dot product is linear in each variable.*²

Un cas simple pour bien comprendre la différence.³

Ecrivons le produit scalaire entre les deux vecteurs \mathbf{a} et \mathbf{b} en termes trigonométriques : $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a \cdot b \cos$

Supposons que $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a \cdot b \cos \theta = p$, un nombre donné. On cherche où localiser le vecteur \mathbf{a} . Traçons la projection orthogonale du vecteur \mathbf{a} sur \mathbf{b} , soit la longueur $a \cos \theta = p/b$ sur le vecteur \mathbf{b} . Or, nous avons une égalité avec deux inconnues a et θ . Nous avons donc **une infinité de solutions, de couples de valeurs qui permet de satisfaire l'égalité**, autrement dit, une infinité de vecteurs susceptibles d'avoir la même projection p/b sur \mathbf{b} . On ne peut donc pas représenter et localiser \mathbf{a} . Le vecteur \mathbf{a} reste indéfini quand on connaît \mathbf{b} . Calculer $a = p/b$ est un non-sens.



Il en est de même, observons en passant, de la division d'un vecteur par un vecteur, soit \mathbf{a}/\mathbf{b} .

Supposons que le résultat sont connu : $\mathbf{a}/\mathbf{b} = \mathbf{c}$, un autre vecteur. On aurait donc $\mathbf{a} = \mathbf{c} \cdot \mathbf{b}$. Or \mathbf{c} est $\mathbf{c} \cdot \mathbf{b}$ est un produit scalaire entre deux vecteurs, c'est un nombre, mais \mathbf{c} est un vecteur. **Un nombre ne peut pas être égal à un vecteur**. Ce résultat n'a aucun sens non plus en mathématiques. On ne peut pas avoir une division vectorielle qui donnerait un vecteur.

Pourquoi la division d'un vecteur par un vecteur ne donnerait pas plus un scalaire, $\mathbf{a}/\mathbf{b} = c$? Essayons : on aurait : $\mathbf{a} = \mathbf{c} \cdot \mathbf{b}$, soit la multiplication d'un vecteur par un scalaire, ce qui supposerait que les vecteurs \mathbf{a} et \mathbf{b} soient colinéaires, parallèles ou alignés, l'un étant un multiple de l'autre. Nous sommes dans un cas particulier, et non dans un cas général.

3/ Le lien en images

Les vecteurs covariants varient avec la base (comme elle), les vecteurs contravariants contre elle. Alors que **le vecteur contravariant \mathbf{v}^i** est un développement sur la base (une somme des vecteurs de base, $\sum x^i \mathbf{e}_i$), **le vecteur covariant \mathbf{v}_i** est une projection sur ces mêmes vecteurs. **La covariance est liée aux projections orthogonales des vecteurs**. Le produit scalaire s'occupe, par définition, de projeter orthogonalement les vecteurs les uns sur les autres.⁴

¹ JohannColombano, « Enquête : Qu'est-ce un tenseur ? », in Quadrature, avril-juin 2008, p.39

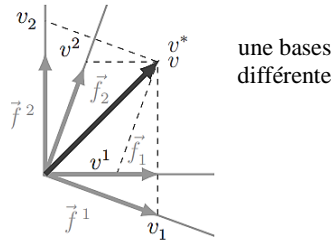
² <https://math.stackexchange.com/questions/2856198/is-dot-product-a-kind-of-linear-transformation>.

³ Marc Haelterman, Clipedia, *On ne peut pas diviser par un vecteur !* 2017, <https://www.youtube.com/watch?v=Y1PL0jyugzQ>

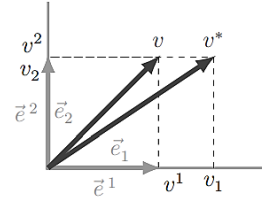
⁴ http://cordier-phychi.toile-libre.org/phy/Relativite_files/Partie%201.pdf

Sur le lien, dans un tenseur, entre changement de base et produit scalaire (suite)

En sélectionnant deux bases et deux produits scalaires différents : ¹

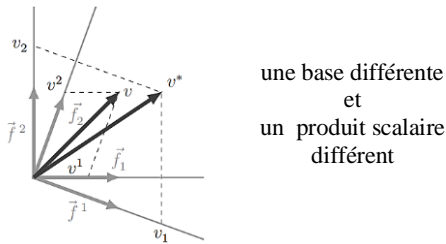


un produit scalaire différent

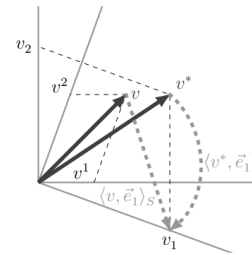


Dans une autre base [que la canonique qui est orthonormale], munie du produit scalaire usuel, seules les composantes sont différentes

Dans la base canonique, munie d'un produit scalaire différent, le vecteur dual se distingue.



produits scalaires usuel (standard) et non usuel (non standard)



Dans une autre base, munie d'un produit scalaire différent, "tout change"

Le produit scalaire usuel est la projection orthogonale. Un autre donnera une projection différente

La longueur du vecteur étude reste la même car, quand les composantes d'un vecteur augmentent, le produit scalaire des vecteurs tend à diminuer. So the rowing of the components and the shrinking of the dot product of the basis vectors is going to balance out and the length will be the same.²

4/ L'effet d'un changement de base sur les composantes et covariantes contravariantes d'un tenseur ³

Supposons que l'on décide de construire un mur d'une longueur déterminée de 1000 centimètres. Si nous utilisons des briques de 10 centimètres, il en faudra 100 pour construire une couche de notre mur. Mais, supposons maintenant que l'on décide plutôt d'utiliser des briques de 20cm. Alors seulement 50 briques seront nécessaires. **Plus les briques sont grandes, moins il en faut pour atteindre notre objectif de longueur.**

[NB : les vecteurs sont entre parenthèses pour les distinguer des composantes]. On note $e_1 = (10)$ notre base de l'espace vectoriel \mathbb{R} de dimension 1 et on pose $v=(20)$. L'espace est muni du produit scalaire usuel (pour que la notion de distance nous soit familière) $\langle(x),(y)\rangle = xy$. La composante contravariante du tenseur v est $v^1 = 2$ puisque le produit scalaire composante x base, i.e. $2x(10) =$ le vecteur dual (20) La base duale est $e^1 = (1/10)$ afin que l'on ait le produit scalaire $\langle e^1, e_1 \rangle = 1/10 \times 10 = 1$. [Les vecteurs covariant et contravariant varient à l'inverse l'un de l'autre lors d'un changement de coordonnées, mais leur produit scalaire, lui, ne varie pas.] Pour calculer le vecteur dual, v^* , nous avons besoin du tenseur métrique : $g_{11} = \langle(10),(10)\rangle = 100$, donc les composantes covariantes seront $v_1 = g_{11}v^1 = 200$. D'où $v^* = 200 \times (1/10) = (20)$.

le tenseur métrique G_{ij} est représenté ici par la matrice identité ou unité I des vecteurs de la base canonique $e_1 = (1,0$ et $e_2 = (0,1)$ dans le cadre d'un produit scalaire usuel (standard dot product ou standard inner product)	$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, car $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$
Un produit scalaire usuel dans l'espace vectoriel \mathbb{R}^2 serait $\langle x y \rangle = x_1y_1 + x_2y_2$. Un produit scalaire non usuel serait par ex. $\langle x y \rangle = x_1y_1 + 2x_2y_2$. Avec pour tenseur métrique la représentation matricielle ci-contre :	$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

On peut aussi vérifier que le vecteur covariant $v_1 =$ le produit scalaire $\langle v^*, e_1 \rangle = \langle (20),(10) \rangle = 200$. Maintenant le tenseur est un double-décimètre, le vecteur $v = (20)$ nous donne sa longueur en centimètres, ses graduations (un peu particulières) font 10cm (notre base) et la composante contravariante nous donne le nombre de graduations $v^1 = 2$. L'exercice a consisté à passer d'une échelle à une autre ou « graduation image » dans l'unité de graduation 1/10 cm avec un nombre de « graduations image », à savoir le vecteur dual $v^* = (20)$. La longueur de la « règle » v est $\sqrt{(v^1v_1)} = \sqrt{(200 \times 2)} = 20$ cm.

¹ J. Colombano, « Enquête : Qu'est-ce un tenseur ? », pp.37-41.
²; <https://www.youtube.com/watch?v=C76lWSOTqnc>
³ J. Colombano, « Enquête : Qu'est-ce un tenseur ? », pp.37-41 ; Lorenzo Sadoun, Non-standard inner products. Sur YouTube

B/ Une action efficiente mais circonscrite

§68.- La part de la nécessité et du probable, 583 - §69.- L'apport vivifiant de la science susceptible de renouveler l'approche du temps, 614 - §70.- De l'horreur du vide à son acceptation sur Terre et au Ciel, 650. - §71. Le triangle croire- savoir- incertitude, 653

68.- La part de l'empire de la nécessité et du probable

1/ De la physique au droit politique

a) Nécessité

i Repère local et référentiels inertiels et non inertiels, 583

ii De l'espace de configuration à l'espace de phase, 586

iii Viscosité et flot de Ricci, 595

Annexes de I, II, III, V, VI et VII, 604

b) Hasard

o

1/ De la physique au droit politique

a) Nécessité

i Repère local et référentiels inertiels et non inertiels

Le repère de Frenet. - Les référentiels inertiels et non inertiels, 565- Les forces fictives en droit

Les référentiels inertiels et non inertiels

Par référentiel, il faut entendre un système de repérage permettant de situer un événement dans l'espace et le temps, car, *en physique, il est impossible de définir une position ou un mouvement par rapport à l'espace « vide »*. La description d'un mouvement doit se faire par rapport à un objet, choisi comme référence. *Le mouvement d'un parachutiste observé au sol est différent du mouvement observé par un autre parachutiste, d'où l'importance de définir un référentiel dans la description du mouvement.*¹

Il existe, en physique, deux types de référentiel : le référentiel inertiels (le galiléen, déjà évoqué) et le référentiel non inertiels (ou accélérés).

Dans le référentiel inertiels, les trois principes de la mécanique classiques demeurent valables :

- *le principe d'inertie*, selon lequel, répétons-le, un corps matériel tend à préserver son état de mouvement rectiligne uniforme ou en repos ;
- *le principe fondamental de la dynamique* : $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, suivant lequel un corps de masse m conserve son état tant qu'il ne subit pas une force extérieure \mathbf{F} qui change sa vitesse (en accélération \mathbf{a}) ou sa direction ;
- *le principe d'action et réaction*, par lequel deux corps, qui ne sont pas forcément de masse égale, exercent chacun sur l'autre une force de même grandeur, dans le sens opposé.

Ex. de référentiel inertiels : votre chambre dans laquelle un livre est posé sur la table. La force de soutien du livre sur la table est égale à la force de pesanteur. Autre ex. : un train qui se déplace à vitesse constante (disons 80 km à l'heure). Le train n'entreprend aucune accélération ni n'entame un tournant.²

Ex. de référentiel *non* inertiels : un avion qui ne se déplace, **en ne cessant pas d'accélérer**. Un ballon, placé dans cet avion, roulera vers l'arrière de l'avion, bien qu'il n'y ait pas de force réelle qui l'y pousse. La seule force considérée est une force fictive, en l'occurrence la force d'inertie. **C'est une**

¹ [https://fr.wikipedia.org/wiki/Référentiel_\(physique\)](https://fr.wikipedia.org/wiki/Référentiel_(physique))

² Swissmath, *La force d'inertie et autres forces fictives (centrifuge et Euler)*

résistance opposée au mouvement par un corps, grâce à sa masse. La force d'inertie s'oppose à l'accélération de l'avion en ligne droite.

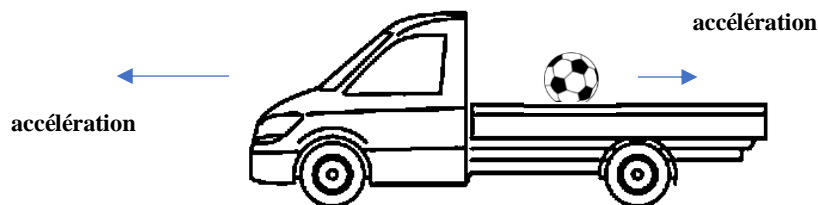
La force d'inertie est une force apparente qui agit sur les masses lorsqu'elles sont observées à partir d'un référentiel non inertielle, autrement dit depuis un point de vue en mouvement accéléré (en translation ou en rotation).

*Les forces d'inertie sont dites fictives, car elles ne découlent pas d'interactions entre objets, mais sont seulement la conséquence d'un choix de référentiel. **Les forces d'inertie n'existent pas dans les référentiels galiléens.*** ¹

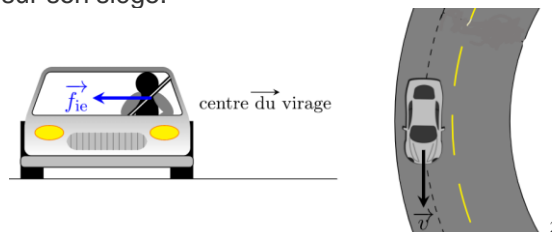
Autre ex. de référentiel *non* inertielle (en translation). Une camionnette, à plateau à l'arrière, est située dans la rue. Il y a deux façons d'analyser sa localisation, et surtout son mouvement. Le référentiel est, soit la rue, soit la camionnette. Il n'y pas de référentiel moyen, qui ferait la moyenne entre la vue à l'extérieur de la camionnette et la vue d'un conducteur qui serait dans la camionnette.

La vue de l'extérieur. Un ballon est placé, sans être attaché, sur le plateau de la camionnette. Lorsque la camionnette est au repos, le ballon est immobile. Lorsque la camionnette commence à **accélérer** vers la gauche, le ballon reste immobile, mais finit par tomber sous l'effet de la pesanteur qui n'est pas contrebalancé par une force de soutien. Les trois principes de la mécanique classique s'appliquent

La vue de l'intérieur (celle du conducteur). Quand le chauffeur accélère, le ballon part vers la droite, à cause de la force d'inertie, mais si le chauffeur se mettait à freiner, le ballon serait, au contraire, projeté vers la gauche. Les trois principes de la mécanique classique ne s'appliquent plus.



Ex. de référentiel *non* inertielle (en rotation). Considérons une voiture qui tourne autour d'un rond-point. Lorsque le véhicule tourne, la personne qui tient le volant se sent déportée en accéléré vers l'extérieur du virage par un autre type de force fictive, **la force centrifuge**. Cette force est compensée par les forces de contact (frottement du siège et tension de la ceinture). Les deux forces s'annulent : la personne reste immobile sur son siège.



Autre ex. de référentiel *non* inertielle (en rotation). Un enfant est assis sur un cheval de manège. Le carrousel tourne de plus en plus vite. Si on se met à la place de l'enfant, on se sentira rejeté vers l'arrière. Or, il n'y a aucune force qui nous pousse ainsi, sinon une autre force fictive, **la force d'Euler**.³

Voilà l'étrange paradoxe : le conducteur de la voiture, comme l'enfant sur le manège, ressentent dans leur chair des forces qui les déportent, et pourtant les forces en cause n'existent pas plus que la force d'inertie. Ils en ressentent les effets sans qu'elles soient réelles...au sens de forces d'interaction (ces dernière n'existent pas vraiment non plus), ayant vocation à être remplacés aujourd'hui en physique par la notion de *champ de force*. Un champ, comme celui de la pesanteur, est en quelque sorte « la

¹ https://fr.wikipedia.org/wiki/Force_d'inertie

² *Référentiels non galiléens*, <https://femto-physique.fr/mecanique/referentiels-non-inertiels.php>

³ Swissmath, *La force d'inertie et autres forces fictives (centrifuge et Euler)*

force de la force » qui n'apparaît nulle part. mais se fait sentir partout. La force de l'invisible existe en science.

Un **champ** peut être *scalaire* (comme celui de la température, de la pression d'une tornade). Il peut être *vectériel* (comme le champ de la pesanteur, uniforme localement, le champ de vitesses d'un fluide, gaz ou liquides, les champs électrique et magnétique). Il peut être enfin **tensoriel** en étant à la fois scalaire et vectériel.

(A scalar field is a **zeroth-order tensor field** [for e.g. distance, time, temperature to name a few] and a vector field is a **first-order tensor field**.¹ Un champ de vecteurs est un ensemble de vecteurs associés en chaque point de l'espace, et un champ de tenseurs est un ensemble de tenseurs associés également à chaque point de l'espace.

Soit un manège sur lequel des gens sont debout. Des sièges sont répartis à la périphérie du manège, Entrons dans leur référentiel. Le manège se met en mouvement en augmentant progressivement sa vitesse de rotation. Les gens sentent qu'ils doivent se battre contre *la force centrifuge* qui finit par les plaquer au fond de leurs sièges. Mais pour un observateur extérieur, cette force n'existe pas. La seule qui existe pour lui est *la force centripète* qui projette les gens sur le manège en avant ! Si cette force n'existait pas, tous seraient éjectés du manège *illico presto*. La force centripète vient à la rencontre du dos des personnes assises. C'est leur banc, sur lequel elle s'exerce, qui empêche les corps de filer tout droit. C'est elle qui leur sauve la vie, comme celle du conducteur qui entreprend un virage.²

Pas facile de tenir debout sur un manège en rotation, à cause de la force centrifuge, et ce d'autant moins que l'on se tient loin du centre où se situe l'axe du manège. Un pendule pesant, fixé en haut du manège, en position verticale, s'incline aussi de plus en plus ($| \rightarrow l$) à mesure que la vitesse de rotation augmente bien que la pesanteur n'ait pas changé. La pesanteur apparente qui est ressentie sur le manège, est la résultante de la pesanteur et de la force centrifuge. Elle diffère de la réelle, ressentie hors du manège, qui est **toujours verticale et dirigée vers le centre de la Terre**. C'est la personne qui a la vision juste des choses, et non celle, emportée par le manège, qui l'a perdue en tournant.

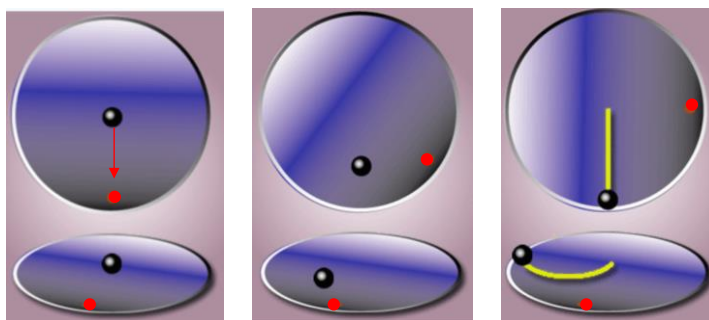
Il « existe » encore une force fictive susceptible de nous intéresser : **la force de Coriolis**. Nous sommes toujours sur un manège circulaire augmentant toujours sa vitesse de rotation dans le sens contraire des aiguilles d'une montre (\curvearrowright). Je décide de marcher tout droit d'un bord à l'autre en suivant la ligne d'un diamètre. Un observateur extérieur me dit :

- Votre vitesse varie.

- Ah bon, je n'ai pourtant pas changé d'allure ;

- Si, elle varie ; quand vous marchez, vous tournez sur la droite sans vous en rendre compte, et quand vous vous approchez du centre, vous ne passez plus devant moi à mesure que vous voulez vous y rendre. Vous passez devant moi moins vite, puisque, quand vous êtes au centre, vous tournez sur vous-même sans plus défilez devant moi (**la force de Coriolis est une force axifuge**).

Votre vitesse se rétrécit vers la droite, pour moi situé à l'extérieur.



Trajectoire d'une bille noire (●) à vitesse constante vue d'au-dessus devant un disque en rotation où se trouve un point rouge (●) à la bordure. Pour un observateur extérieur immobile, c'est une ligne droite (en haut). Pour un observateur qui serait sur le point rouge (en bas), elle épouse la courbe inverse de la rotation.³

(et l'observateur, en dehors du manège, de continuer de dire)

Vous êtes comme dans le compartiment un train qui aborde une courbe sur la gauche : vous ressentez une force qui vous pousse vers la droite. C'est la force de Coriolis. Dès lors, si vous voulez

¹ <https://farside.ph.utexas.edu/teaching/336L/Fluidhtml/node251.html>. Les crochets sont nôtres.

² Rumèbe Girard, *Forces d'inertie*, Palais de la découverte, 1997, <https://www.canal-u.tv/chaines/erimes/physique-chimie/forces-d-inertie>

³ https://fr.wikipedia.org/wiki/Force_de_Coriolis

traverser en ligne droite le manège circulaire en rotation, vous devez en tirer la conséquence : il suffit de dévier votre trajet en sens inverse du sens de rotation...¹

La force de Coriolis explique l'écoulement de l'eau dans un évier autant à droite qu'à gauche. Il est faux, à cet égard, de dire que le sens de la rotation dépend de l'hémisphère sud ou nord, car un tourbillon dans un lavabo diffère grandement en échelle d'un cyclone dans l'atmosphère. Pour percevoir une telle influence,

*il est nécessaire d'observer une masse d'eau stabilisée dans un très grand bassin circulaire, d'un diamètre de l'ordre d'au moins plusieurs dizaines de kilomètres pour un effet en centimètres. Dans le siphon d'un lavabo, le sens de rotation de l'eau est dû à la géométrie du lavabo et aux microcourants d'eau créés lors de son remplissage, ou lors d'une agitation de l'eau. Il est donc possible de fausser le résultat en donnant une impulsion à l'eau.*²

Les forces fictives en droit

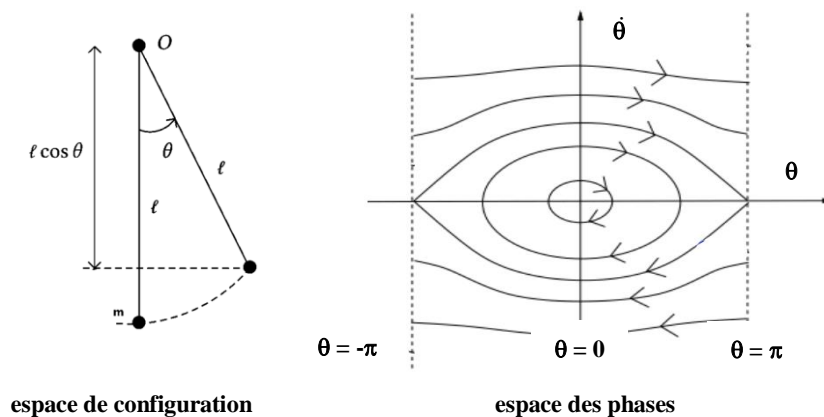
ii De l'espace de configuration à l'espace de phase en sciences

L'espace de configuration et le fibré tangent.. - L'espace des phases et le fibré cotangent..

Au cours de la thèse, nous avons déjà abordé ces notions sans évoquer l'arrière-fond théorique qui explique la nécessité. Sans trop entrer dans la technique qui est exposée, à l'université, dans tout cours de physique, il est bon de resituer ces notions pour en saisir la force et la généralité dans nombre de domaines en sciences. Ce survol permettra de comprendre pourquoi leurs modes de raisonnement, sans leur accompagnement technique, aide à comprendre certains de ceux tenus en droit public.

L'espace de configuration et le fibré tangent L'espace des phases et le fibré cotangent

La notion d'espace des phases, et sa représentation, ont déjà été rapportées plusieurs fois le long de ce travail. Nous en avons donné une possible utilisation en droit en interprétant les paramètres d'amplitude (θ) et de vitesse angulaire ($\dot{\theta}$) suivant la situation constitutionnelle dans laquelle les acteurs agissent. La vitesse angulaire mesure par définition l'angle de rotation parcouru par le pendule en une seconde, mais le temps n'apparaît pas directement dans l'espace des phases. Nous y avons ajouté, à l'occasion, l'énergie.



(§42
Adend.)

Ainsi, dans le §42, nous avons assimilé, au sujet d'un projet de loi, l'amplitude à l'écart entre les oui et les non en réaction au sein d'une assemblée législative. La vitesse angulaire « mesurait » l'impossibilité de l'assemblée de se stabiliser sur le projet de loi qui lui est soumis. Plus le dialogue de sourds entre les députés est installé, plus la vitesse est grande, et moins le pendule a des chances de trouver une position d'équilibre pérenne (l'unité de temps implicite indiquerait le degré d'incompréhension, ou d'ignorance mutuelle, dans l'assemblée : degré 0, en t_0 ; degré 1, en t_1 , etc.).

¹ Ibid.

² Ibid.

L'énergie caractérisait le 3^e axe, considéré en 3D. Ce paramètre était censé « mesurer » le nombre de gens qui participèrent peu ou prou à la rédaction du projet de loi, avant et durant les débats.

(Concl. Chap.I 3/-ii)

En conclusion du Chap.I, nous adoptons une approche tout à fait différente, plus simple ou lisible. L'amplitude désignait les étapes du parcours du processus de décision ou de vote d'une assemblée, tandis que la vitesse angulaire désignait, plus clairement, la vitesse d'examen du projet de loi étudié. Cette interprétation s'imposait pour mieux prendre en compte l'action des *lobbys* œuvrant en coulisse.

Avant de concevoir une autre interprétation, plus adaptée à l'hamiltonien, il convient de présenter brièvement ce dernier en le comparant au lagrangien. L'hamiltonien reformule le lagrangien et le généralise à d'autres circonstances avec une structure un peu nouvelle : *la géométrie symplectique*, qui fait partie de la géométrie différentielle qui applique les outils du calcul différentiel à la géométrie.

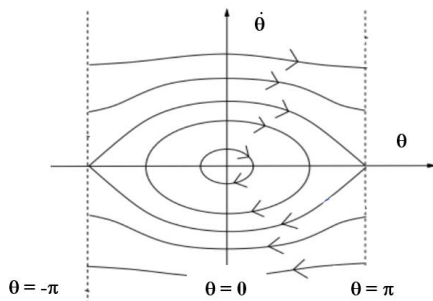
(Annexe III sur l'approche historique de la notion de géométrie symplectique)

(§67^{bis} 2/d-i)

Les deux formalismes participent du principe de « moindre » action (action extrémale, en fait). Alors que le lagrangien repose sur un principe variationnel avec la recherche d'une *fonctionnelle* parmi d'autres fonctions, l'hamiltonien repose sur l'idée de conservation de l'énergie. Dans le lagrangien, on cherche une extrémité ; dans l'hamiltonien, on se préoccupe d'une *constante du mouvement*, d'une *intégrale 1^{re}*. Les intégrales sont des courbes qui sont obligées de rester, dans l'espace des phases, sur un cercle, plus ou moins déformé en ellipses allongées, du fait de cette constante du mouvement

Cette distinction n'exclut pas que le lagrangien puisse aboutir aussi à une énergie qui se conserve dans le cadre d'un système isolé, i.e. d'un système dont la grandeur - l'énergie - ne dépend pas du temps (il n'y a pas d'échange de matière ni d'énergie - ex. thermique - avec l'environnement extérieur),

Reprenons l'ex. du pendule simple pesant pour apprécier l'approche de l'hamiltonien qui renvoie précisément à l'idée d'**espace de phases**, la phase étant associée à l'idée de mouvement périodique.



Sujet à de petites oscillations, le pendule reste borné autour de l'équilibre. S'il est animé d'une énorme vitesse, il tournera en rond sans jamais s'arrêter. Les lignes sont orientées (si $\theta > 0$ l'amplitude 0 est croissante ; si $\theta < 0$, l'amplitude est décroissante. La vitesse angulaire ($\dot{\theta}$ balance aussi entre \uparrow et \downarrow).

Dans l'espace de configuration, le pendule tourne le long de sa trajectoire \Leftrightarrow l'énergie est conservée. **Dans l'espace des phases**, on peut approximer par la quantité de mouvement $p = mv$ en dérivant l'équation d'Euler-Lagrange par la dérivée temporelle de θ , i.e. le mouvement rotationnel $\dot{\theta}$. On obtient $p \approx \dot{\theta}$, à une constante de proportionnalité près, à partir de

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = m \cdot l^2 \ddot{\theta}$$

Soit l'équation du pendule : $E = E_0 + mgl \cos \theta = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 - mgl \cos \theta$, avec la hauteur du fil du pendule = - l cos θ . On veut que $E = cste$. On trace donc des courbes à énergie constante qui dépendent de θ et de $\dot{\theta}$. Ces courbes périodiques se ferment (certaines au-delà de $-\pi$ et π), mais s'aplatissent de plus en plus, car $\cos \theta$ croît moins vite que $\dot{\theta}$ dans l'équation.¹

Dans l'équation d'Euler-Lagrange, il ne faut pas confondre cette équation pour un mouvement unidimensionnel (avec x la position, comme il avait été vu) :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial x} \right) = 0$$

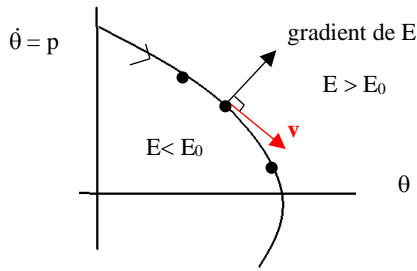
et l'équation d'Euler-Lagrange pour un mouvement rotationnel, compte tenu de la nature de la vitesse à caractère angulaire, $\dot{\theta}$:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial \theta} \right) = 0$$

Pour que la quantité E soit constante, $E = E_0 = cste$, il faut que sa dérivée $dE/dt = 0$. Focalisons-nous sur une seule de ces trajectoires. $E = E_0$ est situé juste à la frontière entre $E < E_0$ et $E > E_0$. Le vecteur normal à cette trajectoire est le gradient de E (dans la direction nord-ouest sur le schéma infra). (Le

¹ Antoine Bourget, *Energie et formalisme hamiltonien* de la mécanique hamiltonienne, Scientia Egregia, 23 janvier 2022, sur YouTube ; https://v-assets.cdns.w.com/fs/genie_civil/dauxp-CHAPITRE_I.pdf

gradient varie en fait dans les trois directions de l'espace d'une propriété physique comme la pression, la température, ...)



Le **grad** E est la dérivée par rapport aux deux coordonnées, θ et p soit

$$\begin{bmatrix} \partial E / \partial \theta \\ \partial E / \partial p \end{bmatrix}, \text{ soit } \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \partial E / \partial p \\ -\partial E / \partial \theta \end{bmatrix},$$

car, pour décrire le mouvement du pendule, je dois prendre le vecteur \perp au vecteur normal, donc faire une rotation de 90° , sachant que si on a un vecteur de coordonnées :

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, \text{ après cette rotation, on a } \begin{bmatrix} b \\ -a \end{bmatrix} \text{ (il suffit de voir : } \begin{array}{c} \text{b} \\ \text{---} \\ \text{-a} \end{array} \text{)}$$

Le vecteur \mathbf{v} joue le rôle du vecteur vitesse d'un point qui se déplace le long de la courbe. On y décrit l'état du système avec une vitesse donnée.

Retour sur l'intrinsèque : avec **la normale**, nous sommes dans un espace métrique, mesurant des angles. Nous sommes plongés dans \mathbb{R} . La normale n'est pas une propriété intrinsèque, à la différence de **la tangente** qui ne sort pas de la variété.

Si $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \partial E / \partial p \\ \partial E / \partial \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{p} \end{bmatrix}$, alors on obtient les deux équations d'Hamilton qui traduisent **la conservation de l'énergie**, soit :

$$\begin{cases} \dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p} \\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial \theta} \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{\partial H}{\partial p} = \dot{q} \\ \frac{\partial H}{\partial q} = -\dot{p} \end{cases}$$

où H désigne l'hamiltonien, $H = E_c - E_p$, ou autrement écrit : $H = T - U$. On remarquera la symétrie des équations dans les 2 systèmes, ce qui n'est pas étonnant puisqu'il y a deux oscillations, verticale et horizontale, en opposition de phase. Une telle symétrie permet de comprendre pourquoi l'énergie $E = E_c + E_p$ se conserve.

\dot{q} représente la dérivée de la position q , et \dot{p} la dérivée de l'impulsion p (la quantité (de mouvement, $m\mathbf{v}$)). La symétrie n'est pas dans l'espace réel de configuration mais dans l'espace abstrait des phases qui est de dimension double, car vous devez tenir compte de toutes les positions q et de toutes les impulsions p . **C'est parce qu'on considère à la fois des données dynamiques comme les impulsions et des données spatiales comme les positions que l'objet étudié est de dimension paire,**

Par ex., si vous entendez décrire le mouvement des planètes autour du Soleil, l'espace réel demeure de 3 dimensions (x,y,z) mais l'espace des phases corrélatif est de dimension 6. L'on passe de n dimensions à $2n$ dimensions. Dans un tel espace, *on peut ainsi mélanger les q et les p par des transformations qui simplifient le problème.*¹

On comprend alors pourquoi dans le système des deux équations d'Hamilton, il y a p et q (ou leurs dérivées, \dot{p} et \dot{q}), et non plus seulement q (ou sa dérivée, \dot{q}) comme dans l'espace de configuration sur lequel opère le lagrangien. Dans l'hamiltonien, même si la position q dépend de la vitesse, on les considère comme indépendants, d'où le recours à des dérivées partielles, ∂ , d'une fonction à plusieurs variables. On peut dire seulement que \dot{q} dépend implicitement de p .

Grâce à un tel système d'équations, on peut retrouver facilement les lois du mouvement, comme celles de la chute libre, du pendule, du ressort, etc. Nous ne détaillerons pas leur application. On se contentera de ressusciter un souvenir en deux ou trois lignes de ce que nous avons appris autrefois.

Supposons, par ex., que $m = 1$, la vitesse \mathbf{v} devient, dans l'expression $\frac{1}{2} m v^2$, l'énergie cinétique : $v = p$. Comme $H = T - U = p^2/2 - U(q)$. Comme $\dot{q} = \partial H / \partial p$ et $\dot{p} = -\partial H / \partial q$, on a, en dérivant par rapport à q : $\dot{p} = p^2/2 - dU/dq = 0 - dU/dq = \mathbf{grad. U}$, i.e. la force. On retrouve Newton ($\mathbf{F} = m\mathbf{g}$, avec $m = 1$).

- Comment êtes-vous passé du 1^{er} système d'équations au second, son équivalent ?

¹ A. Bourget, *Energie et formalisme hamiltonien*, video cit.

- Par un changement de variables grâce à *la transformation de Legendre*. (voir *Annexe V*, du volet 1 du §68). C'est précisément la transformation de Legendre qui permet l'interrelation entre p et \dot{q} .

Pour commencer à résumer, et souffler un peu, on retiendra que l'hamiltonien reformule autrement le principe de moindre action. Ce principe jouait un rôle important par l'action, i.e. l'intégrale du lagrangien décrivant la trajectoire physique dans l'espace de configuration. Le lagrangien est ce qui minimise l'action parmi toutes les chemins candidats dans cet espace. *Mais, ce qui apparaissait très général et puissant n'est en fait qu'un cas particulier d'un principe plus général qui autorise tous les chemins possibles dans l'espace des phases en découplant ainsi la vitesse et la position.*¹

(§43
3/
b)-i)

Cette généralisation implique aussi plusieurs coordonnées : pas seulement la position q et l'impulsion p , mais aussi (q^1, q^2, \dots, q^n) et (p_1, p_2, \dots, p_n) . Dans l'intuition mécanique, l'impulsion est la quantité de mouvement, mais pas toujours dans l'espace des phases : la quantité peut être le moment de la quantité de mouvement, i.e. le moment angulaire ou cinétique L dans une rotation ($L = \mathbf{r} \wedge \mathbf{p}$, avec \mathbf{r} le vecteur position par rapport à l'origine), ou l'angle et le rayon, mais l'intuition n'est pas complètement perdue.²

- Pourquoi cette différence dans les indices en haut et en bas ?

- *Il y a une raison profonde, car il est loin d'avoir toujours une proportionnalité entre p et q . Ce sont vraiment des objets différents. Il faut voir les q comme des vecteurs dans un certain espace et les p comme des covecteurs, donc comme une forme différentielle.*³

(§67^{bis}
2/d)-ii)

Nous avons déjà une différence d'indices en abordant le changement de base d'un tenseur, mettant en relation des vecteurs covariants et des vecteurs contravariants. **Les vecteurs covariants renvoient à des forces et les vecteurs contravariants résistent aux déformations causées par les premières.** Le vecteur contrariant agit en sens inverse de la force qui étire, par ex. un pouvoir constitutionnel, dans un sens « covariant ». Précisément, les composantes « covariantes » d'un vecteur sont notées \mathbf{v}_1 et \mathbf{v}_2 , et ses composantes contravariantes \mathbf{v}^1 et \mathbf{v}^2 .

Un vecteur contravariant est un vecteur, alors qu'un **vecteur covariant** est *une forme linéaire*, appelé **covecteur** ou **vecteur dual**. Une forme linéaire est un scalaire, un nombre, une pente. Un scalaire est un chiffre qui décrit une grandeur, alors qu'un vecteur décrit, en plus, une orientation. **Une forme linéaire (ou covecteur) est ainsi un instrument de mesure servant à évaluer un vecteur.**

Revenons à l'hamiltonien où la différence d'indices est du même genre.

(§46
1/-i)

La différentielle d'une fonction numérique en un point donné est le 1^{er} degré d'une forme différentielle. Si la variété est une surface S^2 dans le système de coordonnées local (x,y) , la différentielle totale de $f(x,y) = udx + vdy$ avec u dérivée partielle de f par rapport à x et v dérivée partielle de f par rapport à y . On le voit encore : la notion de différentielle permet d'introduire, dans l'étude, les dérivées partielles d'une fonction à plusieurs variables dans le cadre déjà simple d'un espace vectoriel et, plus généralement, quand on travaille sur une « variété ». A un vecteur correspond une forme linéaire à un champ de vecteurs correspond **un champ de formes linéaires**, appelées **formes différentielles** (chacune de ces formes linéaires fonctionne comme un espace tangent ou vectoriel en tout point).⁴

Rappel : un *espace vectoriel* renvoie à une chose de droit, tel un plan, un plan tangent, alors qu'une « *variété* » évoque une chose courbe, comme une surface courbe en 2 D par ex., telle une sphère ou un tore. **En tout point x d'une variété, existe un vecteur tangent et une forme linéaire**, donc un vecteur associé à un nombre.

$\forall x \in$ à une variété M , une forme linéaire, relative à un vecteur, est ainsi une façon de fabriquer un réel. On ne fabrique pas seulement une fonction, car s'y ajoute une propriété qui respecte les combinaisons linéaires (addition des vecteurs entre eux et multiplication d'un vecteur par un scalaire). Cette propriété est celle d'une application linéaire. Une forme linéaire, relative à un

¹ *Ibid.* Nous soulignons.

² *Ibid.*

³ *Ibid.*

⁴ https://fr.wikipedia.org/wiki/Forme_linéaire; https://fr.wikipedia.org/wiki/Forme_différentielle ; *Les formes différentielles et la dérivée extérieure*, https://www-liphy.univ-grenoble-alpes.fr/pagesperso/bahram/Math/chap_FormeDif.pdf

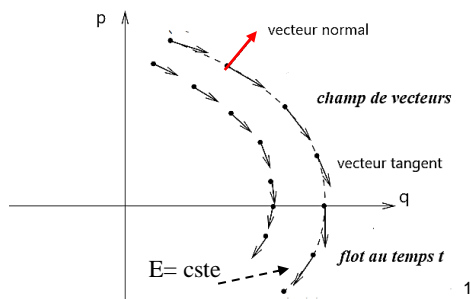
espace vectoriel, est un cas particulier d'application linéaire (forme linéaire ou espace vectoriel, c'est pareil).

(§42
Adend.)

La question que l'on peut poser maintenant est comment le système étudié évolue et se transforme ? En clair, dans l'espace des phases, si on suit les lignes, les points vont-ils rester proches ou s'éloigner, au risque de déstabiliser le système, comme on en a eu un aperçu avec le mouvement du pendule ?

Cette question invite à analyser le « flot » hamiltonien en ne considérant pas seulement un système qui se meut sur une courbe à énergie constante (l'énergie E est un nombre), mais plusieurs systèmes potentiellement. On ne peut en dessiner l'évolution en 2D. C'est a priori difficile, car si on retient un espace de configuration en 2D pour le pendule par ex., l'espace de phases est de 4D... (ça double toujours) On va donc faire comme si dans le simple système de coordonnées (impulsion p , position q).

Quand on se transporte sur une variété, on commence à faire de la géométrie différentielle. Dans cette géométrie, la notion de *flot* permet de modéliser le déplacement dans le temps d'un fluide par ex.



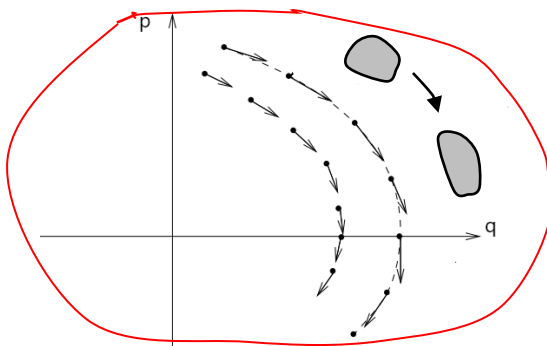
Le flot hamiltonien rassemble des courbes à énergie constante, mais on peut le voir aussi comme le flot d'un champ de vecteurs. Chaque courbe a une énergie constante E différente. Le champ de vecteurs, **est réalisé par la rotation du vecteur normal**.

Le flot est global, car le champ de vecteurs est défini partout. Une solution du champ de vecteurs est une courbe intégrale. Des courbes intégrales forment une famille du même champ de vecteurs.

Le champ de vecteurs hamiltonien est donné par les deux équations d'Hamilton, $(\dot{q}) = \partial H / \partial p$ et $(\dot{p}) = -\partial H / \partial q$,

- Mais quelle est la propriété de ce flot qui s'avère donc être l'ensemble des courbes intégrales ?

- La propriété est celle du théorème de Liouville : *le flot hamiltonien préserve les volumes de l'espace des phases*.² Mais attention : les volumes dont il est question ici sont des formes dans l'espace des phases ; ce ne sont pas proprement des volumes dans l'espace ordinaire. Ces formes sont invariantes au cours d'un déplacement temporel. Leur préservation peut être comprise via la notion d'aire. Soit un petit domaine D_0 d'une certaine aire. Je laisse évoluer le flot pendant une ou deux secondes ; à la fin, j'obtiens un autre domaine D' de même aire, si déformée qu'elle soit. Le volume de D et le volume de D' ont la même aire **lorsque la position (q) et la vitesse (l'impulsion p) changent à la fois**.



On suppose, pour être sûr que les domaines d'énergie constante existent, que ces domaines sont dans une zone compacte (**zone entourée de rouge**).

Autrement, dit les courbes doivent se boucler, au risque sinon qu'une courbe ou plusieurs courbes partent à l'infini dans l'espace des phases en allant, soit très loin, soit très vite, emportant ainsi l'énergie vers $l'∞$

L'aire de chaque domaine est mesurée par l'intégrale $dp dq$ (la convention est d'omettre le produit \wedge entre dx et dy), et le volume : $\text{vol}(D_t) = \int_{D_t} dp_i dq_i$. Cette formule donne le volume après un instant t . On ne fera pas ici le calcul de cette intégrale.

¹ https://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~faure/enseignement/systemes_dynamiques/cours_hamilton.pdf. Nous avons amendé le dessin original.

² A. Bourget, *Energie et formalisme hamiltonien*, video cit.

- Quelles sont les conséquences du fait que les volumes soient conservés ?

Il y en a trois :

. la 1^{ère} est qu'il impossible d'avoir une position d'équilibre stable, même asymptotique, car il faudrait que le flot converge vers un certain point. Mais un volume, qui doit rester invariant, ne peut se réduire à cette peau de chagrin.

. Le théorème de Liouville interdit également un cycle stable, tel un cycle attractif qui reviendrait, là encore, à admettre une trajectoire de surface nulle, de volume nul. Tout retour à l'équilibre prouverait que le système n'est pas vraiment hamiltonien, qu'il y a des frottements, de la dissipation quelque part.

(§67^{bis}
2/d)-ii)

. la 3^e conséquence annonce *le théorème de récurrence* de Poincaré. Récurrence doit être pris au sens de retour, mais un retour qui n'est pas celui d'un raisonnement par récurrence sur les entiers dans une suite ou une série. Selon ce théorème, un flot, qui préserve les volumes dans un espace des phases, est amené à repasser par le même chemin au bout d'un certain temps, fût-il très long. Il arrivera fatalement un moment où la succession des aires sur une trajectoire croisera à nouveau l'aire initiale, et ce une infinité de fois.¹

- Quelle est la structurée mathématique qui est derrière toute cette présentation ?

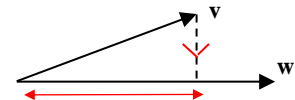
- L'espace fibré cotangent.

Le fibré cotangent est un nouveau personnage introduit dans le paysage. Il est toujours question d'une variété M , mais au lieu de concevoir des plans tangents ou des vecteurs tangents en chaque point, dont l'ensemble forme un fibré tangent ($TM = \cup T_x M$, avec $x \in M$), on conçoit, sur la même variété M , d'autres plans, un peu semblables aux plans tangents, que l'on appelle des plans cotangents, avec des vecteurs cotangents en chaque point de M , dont l'ensemble forme le fibré cotangent $T^*M = \cup T^*_x M$, avec $x \in M$).

Autrement dit, le fibré cotangent, quand il s'agit de l'hamiltonien, est, l'espace des phases qu'est l'espace de configuration + le dual du plan tangent (étant rappelé que le lagrangien est l'espace de configuration + une fonction sur le fibré tangent)

Lexique I : Vecteur cotangent, vecteur dual, covecteur, sont des appellations synonymes. Elles renvoient à la même réalité. Ce sont des formes linéaires, ou, pareillement, des formes différentielles, d.

Etant donné un certain vecteur v , une forme linéaire se projette sur la 1^{re} coordonnée. La forme linéaire - un nombre - résulte de cette opération.



L'espace dual du plan tangent contient tous les vecteurs qui forment un produit scalaire (*dot product*) avec tout vecteur du plan tangent. Voir, un peu plus avant, sur la considération à nouveau du produit scalaire.

En chaque point de la variété M , il y a l'ensemble des formes différentielles sur le plan tangent, donc le dual du plan tangent. Plus précisément, en chaque point $x \in M$, la forme différentielle s'avère une forme bilinéaire qui, à tout couple (u,v) de vecteurs tangents en $x = M$ fait correspondre un nombre $\omega(x)(u,v)$, qui, pour x fixé, dépend linéairement de chacune des variables u et v . Elle a pour propriété d'être *antisymétrique*, ce qui signifie que $\omega(x)(u,v) = -\omega(x)(v,u)$.²

Lexique II : Une forme bilinéaire se définit ainsi $\forall x,y \in E^2$ (i.e. le même espace vectoriel E), $\forall \lambda \in$ un cops K , $\varphi(\lambda x + y) = \lambda\varphi(x) + \varphi(y)$. Ex. simple : $(1,3) \times 2 = (2,6)$ au lieu de $(2,6)$ dans une forme linéaire. Plus algébriquement : $2(a \times b) = 2a \cdot xb$. Comme on le dit bien en anglais, *the covector that takes a vector in the xy-plane and spits out [eject] its y-coordinate*. On définit un volume par un espace plus petit en écrasant une des coordonnées, la z . On projette un volume sur une surface.

¹ Sur le théorème de récurrence, revoir. François Béguin, « Le Mémoire de Poincaré pour le prix du roi Oscar ; l'harmonie céleste empêtrée dans les intersections homoclines », in *L'héritage scientifique de Poincaré*, Belin, Paris, 2006, p.194.

² Charles-Michel Marle, *Systèmes hamiltoniens et géométrie symplectique*, Univ. Pierre et Marie Curie (UPMC) Paris, 17 juin 2014, <https://marle.perso.math.cnrs.fr/diaporamas/semin17juin2014.pdf>

Lexique III : ¹Ne pas confondre la **propriété de symétrie** : $(xRy) \Rightarrow (yRx)$ et la **propriété d'antisymétrie** : $\forall x,y, (xRy \text{ et } yRx) \Rightarrow x = y$. L'une n'est pas le contraire de l'autre ! **Il y a deux sens, et non un sens unique**. La contraposée permet de bien le comprendre : si $x \neq y$, alors soit x n'est pas en relation avec y , soit y n'est pas en relation avec x ; c'est faux : ce n'est pas antisymétrique, car on ne peut pas avoir la relation dans les deux sens.

Ex. : la relation « est inférieur ou égal » sur l'ensemble \mathbb{R} des réels : pour deux réels x et y , on peut avoir $x \leq y$ et $y \geq x \Rightarrow x = y$. Idem pour la relation « est inclus dans » sur l'ensemble des parties d'un ensemble : pour deux parties A et B , on peut avoir $A \subset B$ et $B \subset A \Rightarrow A = B$.

Le fibré cotangent, serait plus puissant que le fibré tangent, car on peut combiner des vecteurs avec des coordonnées, ce qui n'est pas le cas avec le fibré tangent où ce n'est pas « covariant » du fait qu'il n'y a pas, comme dans le cadre du fibré cotangent, d'indices en bas dénotant des vecteurs (et des indices en haut dénotant des formes linéaires). Les p_i (l'ensemble des impulsions ou forces) et les q^i (l'ensemble des positions successives du système) ne peuvent pas se transformer de façon opposée.

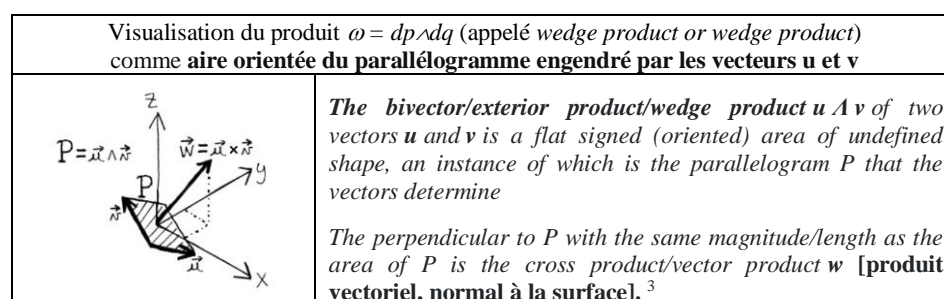
En se rappelant qu'une base joue le rôle d'observateur, tout vecteur se décompose dans une base du plan tangent $T_q M$ à la variété M au point q , donnée par les dérivées : $\partial/\partial q^1, \partial/\partial q^2, \dots, \partial/\partial q^n$. Les composantes de tout vecteur v dans un plan tangent sont, par définition, les positions q^1, q^2, \dots, q^n , i.e. les q^i qui forment un système de coordonnées locales de q sur M . Autrement dit, $v = (q)^{-1} \partial/\partial q^1, (q)^{-2} \partial/\partial q^2, \dots, (q)^{-n} \partial/\partial q^n$.

En se rappelant encore qu'une autre base joue aussi le rôle d'observateur, une base d'un plan cotangent $T_q^* M$ à M en q est l'espace des formes linéaires dq^1, dq^2, \dots, dq^n au point q . Toute autre forme linéaire α se décompose sur cette base de la manière suivante : $\alpha = p_1 dq^1 + p_2 dq^2 + \dots + p_n dq^n$ (par opposition aux vecteurs q , les indices des vecteurs p_i sont en bas, et les indices des formes linéaires dq^i en haut)

Revenons au nombre ω .

La forme $\alpha = \sum p^i dq^i$ est une 1-forme différentielle, considérant soit un vecteur, soit **un covecteur ou forme linéaire**, alors que la forme différentielle $\omega = d\alpha = \sum dp_i \wedge dq^i$ exprimée en coordonnées locales, est une 2-forme différentielle symplectique qui « mange » deux vecteurs tangents à la variété M pour créer un nombre : ω (vecteur, vecteur) = nombre, en multipliant la projection du premier vecteur dp_i par la projection du second dq^i . C'est la **forme symplectique** ω permet de mesurer une sorte de « produit scalaire » entre les deux vecteurs. (A travers un tel produit, on ne travaille que sur des vecteurs, et non plus sur une forme et un vecteur. On peut oublier le dual, car on s'est ramené sur le même espace.)

Ainsi, à chaque instant, les $2n$ coordonnées $(q(t), p(t))$ définissent un point dans l'espace des phases T^*M qui s'identifie au fibré cotangent. Cet espace des phases est muni de la forme symplectique précitée $\omega = d\alpha = \sum dp_i \wedge dq^i$ sur la variété M de dimension paire.² M est une variété de forme symplectique ou *une variété symplectique*. On peut coller, sur cette structure, 2-formes différentielles pour fabriquer de l'impulsion, ou de l'énergie cinétique comme dans un mouvement en chute libre ($E = \frac{1}{2} mv^2$, soit une forme quadratique). Le plan tangent TM et le plan cotangent T^*M sont récoltables.

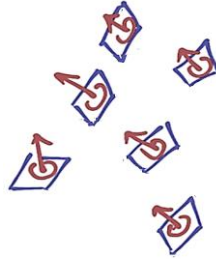


¹ Maths Adultes, *Relations binaires : Les bases*, <https://www.youtube.com/watch?v=W7cH06qOIIM>

² Pierr Aimé, *Introduction à la géométrie différentielle*, Ellipses, Paris, 1999, p.117 ; Alain Guichardet, *Sur le problème de Kepler*, 2011. fihal-00576029, p.13.

³ <https://math.stackexchange.com/questions/4368519/exterior-wedge-product-of-two-vectors-as-an-area>

Cette variété différentiable M n'est pas seulement munie, mais déterminée par cette forme différentielle antisymétrique ω , de degré 2, sachant que $\omega(x)(v, u) = -\omega(x)(u, v)$, soit $\omega = \text{constant}$, i.e. $d\omega = 0$. La dérivée de la forme différentielle $d\omega$ est appelée *la dérivée extérieure de ω* et a pour expression $d\omega = dp \wedge dx + dq \wedge dy$ que l'on peut dériver.¹ La dérivée extérieure indique combien rapidement la forme linéaire change à chaque direction possible le long d'une trajectoire comme le rotationnel d'un champ de vecteurs (le rotationnel est défini comme le produit vectoriel du gradient par le champ de vecteurs).



La forme différentielle ω est *fermée* si $d\omega = 0$, La propriété d'antisymétrie découle du fait que ω définit « **un crochet de Poisson** » sur les fonctions de T^*M (un crochet combine deux fonctions f et g pour en rendre une 3^e, i.e. un nombre en tout point). Le crochet de Poisson indique, lui, comment une quantité change sous une transformation générée par une autre (p et q , donc dp et dq).

Le crochet de Poisson est précisément antisymétrique : $\{A, B\} = -\{B, A\}$. C'est une trace de non-commutativité, $xy \neq yx$, en physique classique. Le crochet de Poisson applique la même fonction dans les deux sens. ($\rightarrow \leftarrow$). Il y a un isomorphisme. **Quand $\{f, g\} = 0$, la fonction f considérée est une constante du mouvement.** Il faut donc se donner un crochet pour qu'il en soit ainsi. Le crochet de Poisson était une structure additionnelle venant de la structure symplectique de l'espace des phases. Sans un tel crochet, on ne peut rien faire. La forme $\alpha = \sum p^i dq^i$ doit être « crochetable » par ω .

ω est *une forme canonique*, inhérente à la structure. Cette transformation préserve les aires dans l'espace des phases. **Ce n'est pas juste une évolution temporelle comme dans l'espace de configuration. Dans l'espace de phase, les contraintes sont conservées dans le temps.**

ω est un nombre, ou plutôt pt un tableau de nombres comme une matrice (de rotation) bilinéaire antisymétrique.	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$
La matrice ci-contre est une 270° counter-clockwise rotation ²	

Nous retrouvons à nouveau l'**intrinsèque** comme dans le lagrangien. Il n'est plus besoin d'écrire les coordonnées. Si l'on change ces dernières, il n'en demeure pas moins que ω est préservé. C'est un objet géométrique invariant, comme peut l'être une dérivée première, définissant une tangente à une courbe, au contraire d'une dérivée seconde qui dépend du choix des coordonnées. On a besoin d'une base pour définir une dérivée seconde (une matrice de dérivées secondes, dite *hessienne*, requiert un des coordonnées dans une base donnée, à la différence d'une matrice jacobienne entrevue en droit).

(§46
1/
3/a)

Nous ne sommes plus dans la géométrie analytique à la Descartes, qui postulait une équation dans une base, i.e. d'un point de vue, mais dans une géométrie intrinsèque. La géométrie reste invariante quand on change de repère. On comprend qu'une telle structure conservatrice de l'énergie soit en relation avec la notion de groupe algébrique, en l'espèce un **groupe symplectique qui conserve la forme symplectique**, laissant ainsi invariante une forme bilinéaire (qui associe, on l'a vu, à deux vecteurs un scalaire). Derrière ω , il y a donc l'idée de groupe d'opérations dont l'inverse qui permet de revenir au point de départ ou de remettre en état les éléments modifiés d'un ensemble.

(§49
1/
a&b)

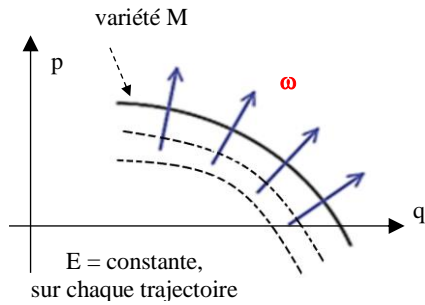
Les formes d'aires sont les formes symplectiques de la variété M . Ce sont elles qui sont préservées. **La propriété de conservation des aires** est donc le résultat sur M de l'action d'un groupe

¹ <https://www.math.univ-toulouse.fr/~jroyer/TD/2015-16-L2PS/L2PS-poly.pdf>
² https://en.wikipedia.org/wiki/Rotation_matrix

symplectique. On devine une symétrie sophistiquée, la symétrie symplectique en jeu dans le groupe symplectique.

Le feuilletage de l'espace total en espace de mouvements,
ou courbes intégrales tangentes en tout point à ses vecteurs.

L'énergie augmente suivant le gradient en direction nord-ouest, mais elle est constante sur chaque courbe intégrale, appelée, en cette circonstance, intégrale première ou constante du mouvement. Chaque courbe intégrale est la solution particulière d'une équation différentielle, dépendante localement des conditions initiales (théorème de Cauchy assurant l'existence d'une solution), et l'ensemble des courbes intégrales constitue la solution générale.



ω , orientée dans la direction du gradient de E , est une *orthogonale symplectique*, une matrice ω qui permet de faire une rotation en reliant les dp et les dq . Mais attention, bien qu'étroitement liés, ω demeure une forme linéaire et le gradient un vecteur.

N'est représentée **en gras** qu'une courbe parmi d'autres disjointes les unes des autres dont l'ensemble constitue un feuilletage d'évolution du fibré cotangent. Le feuilletage décompose la région en sous-variétés sur lesquelles figurent des courbes intégrales d'énergie constante du champ de vecteurs. Ce sont des **intégrales premières**. Chaque intégrale constituerait **une fibre** du fibré cotangent alors que la forme différentielle ω sur la variété M en serait **une section**

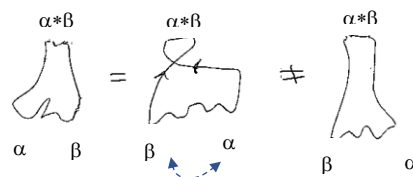
(Annexe VI sur une visualisation finale des espaces tangents et cotangents et de leur articulation)

(§56
1/b)

Tel est le formalisme hamiltonien, que l'on retrouvera en mécanique quantique, via le produit scalaire *bra-ket*, associant un vecteur (*ket*) et une forme linéaire, un nombre (*bra*). (Un produit scalaire représente un angle ω ; c'est un scalaire, ici non pas un nombre réel mais complexe; sa conservation, donc celle des angles, des distances et des normes, indique la conservation de l'énergie dans le temps).

Il en est de même du crochet de Poisson : **deux fonctions sur l'espace des phases, assimilées à deux observables (une observable est l'équivalent d'une grandeur physique en mécanique classique, comme la position et l'impulsion). Ce qui jouera un rôle analogue en mécanique quantique sont les commutateurs $[A, B]$ dont la loi n'est pas commutative.**

Si deux observables A et B [comme la position et l'énergie cinétique] ne commutent pas, il est impossible de connaître précisément à la fois A et B. Donc si le commutateur est nul, on peut mesurer les deux observables simultanément. Par ex., on ne peut pas mesurer ou préciser les valeurs de la position et de l'impulsion en même temps, alors qu'en mécanique classique, on sait très bien le faire. **[Les crochets sont nôtres]**



Traduisons en variété (sans points ni coins, malgré la maladresse du dessin) une opération de croisement de deux bords Soient α et β deux variables au bord d'une variété. α et β commutent par inversion, mais le produit des deux $\alpha*\beta$ reste identique. Il y a commutativité entre les deux. Par contre, à droite, α et β ne commutent pas. Le résultat n'est pas le même.

Plus précisément :

*if the commutator of two 'observables' is zero, then they can be measured at the same time, otherwise there exists an uncertainty relation between the two. For example, **the famous Heisenberg Uncertainty principle** is a direct consequence of the fact that position and momentum do not commute, therefore we cannot precisely determine position and momentum at the same time.*²

¹ François Gieres, *Formalisme de Dirac et surprises mathématiques en mécanique quantique*, LYCEN 9960b, Juillet 1999, <https://core.ac.uk/download/pdf/25263497.pdf>. ; <http://vetopsy.fr/mecanique-quantique/mecanique-analytique.php> ; <https://fr.quora.com/Physlink.com,What-is-the-physical-meaning-of-a-commutator-in-quantum-mechanics?>

Remarquons enfin que le formalisme hamiltonien ne s'intéresse qu'à l'énergie totale sans dépendance explicite du temps, ce qui est au cœur de la mécanique quantique, alors que le lagrangien est une fonction de la position, de la vitesse et du temps, $\mathcal{L} = \mathcal{L}(x, v, t)$. Ce n'est que quand le lagrangien ne dépend pas du temps que l'on peut écrire $\partial \mathcal{L} / \partial t = 0$.¹

(§67bis
2/
d)-ii)

En théorie des tenseurs, présente en théorie de la relativité restreinte et générale, le couple (vecteur, forme linéaire) réapparaît en vecteur contravariant, et vecteur covariant qui est une forme linéaire.² (Rappelons que **le tenseur est une grandeur qui possède plusieurs directions**; elle est représentée par une matrice qui se transforme comme une matrice lors d'une transformation géométrique.) Une grandeur covariante se transforme comme un objet géométrique (un vecteur par ex.), et une grandeur contravariante se transforme à l'inverse d'un objet géométrique (une grandeur, duale à la grandeur covariante, telle une résistance qui agit **contre** une force qui étire un objet dans un sens covariant).

iii Viscosité et flot de Ricci

La viscosité institutionnelle (bis), 595. Le flot de Ricci, 598

La viscosité institutionnelle (bis)

(§28
-2)

(§47
-1)

(§62bis
Ann.IV)

Rappelons seulement, dans l'équation Navier-Stokes rappelée infra, que le symbole nabla, ∇ , désigne le gradient d'une fonction de plusieurs variables que l'on peut définir en coordonnées cartésiennes (voir infra à droite). C'est un vecteur qui caractérise, en un certain point, la variabilité de cette fonction au voisinage de ce point. La divergence est un opérateur différentiel comme le gradient (une divergence > 0 signifie que les vecteurs d'un champ de vecteurs vont en s'écartant). Il faut intégrer ces variations infinitésimales pour atteindre les quantités physiques (un volume, à partir de volumes microscopiques, le gradient et la divergence n'établissant que des relations locales).³

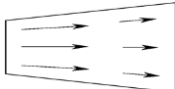
$$\overrightarrow{\text{grad}} f = \overrightarrow{\nabla} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} \quad \vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{u}_x + \frac{\partial}{\partial y} \vec{u}_y + \frac{\partial}{\partial z} \vec{u}_z = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$$

En revanche, on s'attardera sur l'analyse de cette équation sous le rapport de la viscosité et l'inertie pour souligner leur rôle différent dans l'équation.⁴


$\rho \left(\underbrace{\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}}_{\text{Unsteady acceleration}} + \underbrace{\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}}_{\text{Convective acceleration}} \right) = \underbrace{-\nabla p}_{\text{Pressure gradient}} + \underbrace{\mu \nabla^2 \mathbf{v}}_{\text{Viscosity}} + \underbrace{\mathbf{f}}_{\text{Other body forces}}$	$\underbrace{\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}}_{\text{Variation}} + \underbrace{(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}}_{\text{Divergence}} = \underbrace{-\nabla w}_{\text{Internal source}} + \underbrace{\nu \nabla^2 \mathbf{u}}_{\text{Diffusion}} + \underbrace{\mathbf{g}}_{\text{External source}}$
--	---

Le terme **inertie** est du côté gauche de l'équation, donc de la masse (volumique) et de l'accélération. L'inertie est liée à la masse du fluide en mouvement, et l'accélération est l'effort associée à cette masse pour se mettre en mouvement. ρ représente la densité, $\partial \mathbf{v} / \partial t$ la dérivée temporelle, $\mathbf{v} \cdot \nabla$ (avec ∇ le gradient) signifie le produit scalaire (*dot product*) entre ces deux quantités.

L'accélération convective est la projection du gradient de vitesse sur la direction locale de l'écoulement.



Sur la figure ci-contre (\rightarrow), une particule fluide n'a pas la même vitesse quand elle est en M_1 ou en M_2 . Elle acquiert une accélération dite « convective », due à sa convection le long de l'écoulement.⁵



¹ http://www.lpthe.jussieu.fr/~zuber/Cours/M1_14/Chap4.pdf

² Gilles Leborgne, *Tenseurs, vecteurs et formes linéaires (contravariance et covariance)*, ISIMA, 4 juil. 2021, p.18.

³ [http://www-ext.impmc.upmc.fr/~ayrinhac/documents/grad.div.rot_\(S.Ayrinhac\).pdf](http://www-ext.impmc.upmc.fr/~ayrinhac/documents/grad.div.rot_(S.Ayrinhac).pdf)

⁴ [https://userpages.umbc.edu/~squire/reference/Navier-Stokes_equations, htm](https://userpages.umbc.edu/~squire/reference/Navier-Stokes_equations.htm) https://en.wikipedia.org/wiki/Navier-Stokes_equation

⁵ Olivier Granier, Delphien Chareyrib, Nicolas Taberlet, *Une équation fondamentale en mécanique des fluides : l'équation de Navier – Stokes*, http://olivier.granier.free.fr/ci/NS/res/Video_Viscosite.pdf

Quand un morceau de fluide glisse sur un autre, il y a un frottement qui le freine et qui est d'autant plus important que le fluide est visqueux. Dans l'équation de Navier-Stokes, on verra donc apparaître un paramètre μ qui représente la viscosité du fluide. **L'équation est non-linéaire** du fait de la présence à gauche de l'accélération convective et à droite du fait que le terme $\mathbf{v}\nabla\mathbf{v}$ varie comme le carré du champ de vitesse, ce qui rend la résolution de l'équation particulièrement difficile.¹

Le terme de **viscosité** figure dans la partie droite de l'équation. Nous retrouvons le gradient ∇ , attaché et aux effets de la pression p , positive (compression) ou négative (détente), et aux forces frictionnelles, ou tension, dues à la viscosité du fluide (ou sa diffusion, i.e. l'action de se répandre et de se répartir ; c'est par le biais de **la diffusion visqueuse** que sont introduites des dérivées du second ordre). $\mu\nabla^2\mathbf{v}$ se résume en $\nabla\cdot\mathbf{T}$ avec \mathbf{T} désignant **le tenseur des contraintes visqueuses** (il n'est pas inutile de rappeler incidemment qu'un tenseur est une grandeur qui possède plusieurs directions vers lesquelles le fluide s'écoule). La force de pression s'exerce sur une surface ou l'aire d'une paroi (cette force s'exerce du fait qu'un petit morceau du fluide se fait pousser par tout le reste du fluide qui l'entoure).

Les effets de la pression et les forces frictionnelles constituent *la contrainte élastique*. Quant aux symboles f et g , ils représentent les forces massiques qui naissent de l'accélération de la particule du fluide. Ce sont des forces qui agissent sur le volume du fluide (gravité, champ électrique ou magnétique, forces fictives comme la force centrifuge, les forces d'Euler et de Coriolis ; rappelons que ces forces et celle d'inertie ne s'appliquent que dans un référentiel non galiléen, un référentiel accéléré ou tournant).²

Il va sans dire qu'en statique, la force frictionnelle de viscosité disparaît, ainsi que les forces fictives.

Pour synthétiser cette présentation, il vaut de remarquer :

- que le terme **inertie** de l'équation ne renvoie qu'à la composante latérale de l'énergie en activité dans un flux laminaire ou turbulent, tandis que le terme de droite, où figure **la force visqueuse**, à côté notamment de la force de pression, a trait à la composante frontale. *Ces deux termes de l'équation sont deux fonctions à part entière, bien que strictement égalitaires ; elles concernent donc le même écoulement de fluide, vu de deux manières différentes, mais en même temps !*

- que toutes ces informations aboutissent à l'équation de Navier-Stokes que l'on peut interpréter comme la description d'un champ de vitesse d'un fluide, la vitesse variant d'un point à un autre dans l'espace et d'un instant à un autre dans le temps. Ce faisant, **l'équation de Navier-Stokes ne dit pas autre chose que** « somme des forces = ma », *mais comme on parle du champ de vitesse d'un fluide, la forme est un peu plus compliquée que pour un boulet de canon.*³

L'équation recèle en réalité **une lutte entre l'inertie et la viscosité**, mais il existe de nombreux cas où l'un de ces deux termes prédomine sur l'autre. Un nombre sans dimension, **le nombre de Reynolds** permet de comparer ces deux termes. Ce nombre montre quand les transferts de quantité de mouvement par inertie sont plus ou moins importants que ceux par viscosité. *Les écoulements dominés par la viscosité sont toujours des écoulements très lents (miel, glacier) avec une longueur caractéristique très courte (sève dans les pores des arbres) ou impliquant des fluides très visqueux.*⁴

- La nature aime toujours le conflit, du moins dans la façon dont on se la représente, ce qu'elle n'a pas jusqu'ici contester. Après la lutte entre l'énergie potentielle et l'énergie cinétique dans le modèle lagrangien d'un objet en mouvement, voici maintenant dans le modèle de Navier-Stokes un nouvel affrontement entre la vitesse et l'intensité des frottements qui peuvent freiner l'écoulement d'un fluide.

- Dès l'antiquité, Héraclite disait que *le combat est père de toute chose...*

¹ https://en.wikipedia.org/wiki/Navier-Stokes_equations ; Science étonnante, *La mystérieuse équation Navier-Stokes*, 2 mars 2014, sur internet.

² Ian Stewart, *17 équations qui ont changé le monde*, chap.10 : L'ascension de l'humanité, Robert Laffont, Paris, 2014, pp.211-226 ; https://en.wikipedia.org/wiki/Body_force ; l'équation de Navier-Stokes,

³ <http://antigravity.over-blog.com/2020/12/1-equation-de-navier-stokes-s-inscrit-dans-une-equation-plus-grande.html> ; David Louaprré, Science étonnante, *La mystérieuse équation Navier-Stokes*, art. numérique cit.

⁴ http://olivier.granier.free.fr/ci/NS/res/Video_Viscosite.pdf

Même pour un solide, il a une lutte entre l'énergie cinétique $1/2mv^2$, d'un skieur par ex. qui dépense l'énergie potentielle accumulée, et les frottements de la neige qui vont le freiner. La force de frottement est proportionnelle à la vitesse du skieur. $k.v$, où k est un coefficient de frottement (externe). *Si vous faites le rapport des deux, vous obtenez mv/k , qui est une quantité qui vous donne en gros la distance que vous allez parcourir grâce à votre élan. Si vous êtes lourd, rapide et que la neige glisse bien, vous irez plus loin que si vous êtes léger, lent et que la neige est de la soupe.*¹

Retournons aux fluides, par ex. un liquide, et appliquons-lui un raisonnement analogue, hormis le fait que les frottements sont internes au liquide (et non externes, comme ceux de la neige sur les skis) :

Imaginons que le liquide s'écoule à une vitesse moyenne v , dans un tube de diamètre D . Si ρ est la masse volumique du fluide, l'énergie cinétique du fluide est en gros proportionnelle à ρv^2 .

*Pour la viscosité, elle fonctionne presque comme les frottements du skieur. Pour faire simple, on peut dire que la viscosité est ce qui fait que **le liquide a tendance à coller à la paroi du tube**. Les forces de viscosité sont d'autant plus importantes que la viscosité μ du liquide est élevée, que sa vitesse v est importante, et que le diamètre D du tube est petit. Au final, l'énergie dissipée par les forces de viscosité est proportionnelle à la quantité $\mu v/D$.*

*Pour calculer le ratio inertie/frottement dans le liquide, on fait le rapport des deux formules précédentes, et on obtient cette quantité appelée le **nombre de Reynolds de l'écoulement** :*

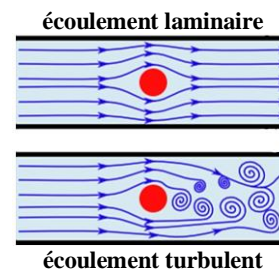
$$Re = \frac{\rho v D}{\mu}$$

Le nombre de Reynolds n'a pas d'unité comme rapport de deux quantités qui sont des énergies volumiques. Le résultat est donc un **nombre sans dimension**. De plus, le nombre de Reynolds ne dépend pas uniquement du liquide que l'on considère : il n'y a pas de sens à parler du nombre de Reynolds « de l'eau », puisque ce nombre dépend des caractéristiques de l'écoulement (vitesse et diamètre du tube).²

L'intérêt d'un tel nombre est de comparer la viscosité entre différents types de fluide (l'eau, par ex., est plus visqueuse que l'air, le sirop de canne plus visqueux que l'eau, le miel est plus visqueux que le sirop de canne, etc. Il permet aussi de savoir si l'écoulement est **laminaire** ou **turbulent**. Plus le nombre de Reynolds est élevé, plus l'inertie est importante et la viscosité faible, et plus les tourbillons, qui naissent de petites perturbations, peuvent se développer. Dans le laminaire, l'écoulement reprend son cours tranquille malgré la présence de certains obstacles (**objet rouge** dans les deux schémas infra).

*Quand l'écoulement d'un liquide est le siège de multiples tourbillons, on dit que cet écoulement est **turbulent**. Au contraire si l'écoulement semble se faire de manière bien parallèle, on parle d'écoulement **laminaire**.*

*Les écoulements turbulents se repèrent particulièrement au voisinage d'obstacles, par exemple les piles d'un pont. La différence entre les deux situations est schématisée sur la figure ci-contre : en haut l'écoulement laminaire, en bas l'écoulement turbulent.*³



Nous arrêterons ici le versant technique, réduit au minimum, de la mécanique des fluides qui n'étudie pas seulement, on s'en doute, les cas simples de fluides incompressibles, homogènes à viscosité constante (*homogène*, lorsque l'on peut négliger ses variations de masse volumique). Un cas simple est l'eau, mais déjà le cas des déplacements de l'air est mathématiquement plus complexe, parce que l'air a la propriété de se comprimer.

*En modifiant leurs équations pour les rendre applicables à un fluide compressible, les mathématiciens ont fait naître la science qui finira par donner son envol à la conquête du ciel : l'aérodynamique.*⁴

¹ D. Louapre, Science étonnante, *La mystérieuse équation Navier-Stokes*, art. cit.

² *Ibid.*

³ *Ibid.*

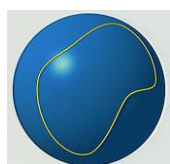
⁴ I. Stewart, *17 équations qui ont changé le monde*, op. cit., p.215

Le flot de Ricci

Nous retrouvons Henri Poincaré, si présent en de multiples domaines mathématiques. On part d'une question qu'il s'est posée ; qui fut, par la suite, appelée *la conjecture de Poincaré*. Une conjecture est une assertion qui sert de guide pour la pensée bien qu'elle ne soit pas encore démontrée (si jamais elle puisse) mathématiquement. C'est une piste de recherche pour soi ou, à défaut, pour les autres. La voici : *Toute variété compacte de dimension 3, et simplement connexe, est homéomorphe à la sphère de dimension 3*. Nous disons bien une sphère de dim. 3, et non de dim. 2 comme la sphère habituelle de l'espace euclidien.

La sphère habituelle, S^2 , est une variété de dim. 2 (une surface, alors que le cercle, S^1 , est une courbe). Au voisinage de chacun des points de S^2 , on peut se repérer avec deux coordonnées, la latitude et la longitude. La sphère, S^3 , de dim 3 (la 3-sphère) est une « hypersphère » dans l'espace de dimension 4. Une 3-sphère de rayon 1 est l'ensemble des points de coordonnées (x,y,z,t) tels que $x^2+y^2+z^2+t^2=1$.

Un espace est *simplement connexe*, lorsque tout lacet (ou chemin) sur cet espace peut être déformé continûment jusqu'à se réduire à un point. L'espace considéré est d'un seul tenant, sans trou ni poignée. La variété est *one-piece and without holes*. Il en est ainsi de la sphère : toute courbe, tracée sur elle, peut se déformer sans rupture en un point. Un lacet sur la surface du tore ne possède pas toujours cette propriété. La déformation de la courbe sur le tore infra n'aboutit par exemple qu'à un cercle méridien.¹



La sphère est la seule surface simplement connexe de toutes les surfaces fermées à dimension 3. Il n'y a pas de difficulté pour démontrer la conjecture de Riemann en dim..2 ou en dim.1. *Toute variété compacte de dimension 2, et simplement connexe, est homéomorphe à la sphère de dimension 2*, la S^2 . *Toute variété compacte de dimension 1, et simplement connexe, est homéomorphe à un cercle de dimension 1*, la S^1 . (La variété de dimension 0 est le point.). En revanche, la démonstration en dimension 3 a requis quasiment la cogitation d'un siècle... La conjecture de Poincaré, qui date de 1904, est devenue, en 2003, le théorème de Perelman. Dans cet espace de temps, William Thurston et Richard Hamilton ont apporté leurs pierres à l'édifice.

(§68
3/
b)iii)

Les démonstrations en dimension supérieure à 3 se sont avérées moins coriaces, l'ajout de dimension permettant de mieux comprendre le problème. On élargit la vue. (On l'a vu avec la théorie des nœuds : pour dénouer parfois un nœud, il faut parfois le compliquer pour le rendre plus simple...) Il revient à Richard Hamilton d'avoir découvert *le flot de Ricci* dans le cheminement précité des connaissances.

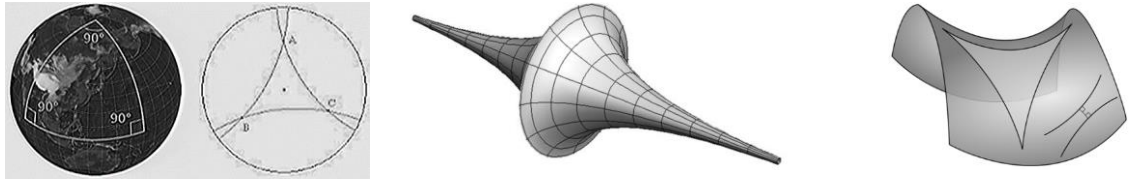
(Concl.
Chap.I,
2/-ii)

Pour en appréhender clairement la notion, il est bon de reprendre celle de *courbure* conçue par Gauss au début du XIX^e siècle. L'étude de la courbure peut faire l'objet de plusieurs approches. La plus simple est celle qui définit *la courbure positive* par la somme des angles d'un triangle dessiné sur la sphère ; cette somme est supérieure à π , i.e.180°, sachant que chaque angle sur une sphère vaut $\pi/2$, i.e.90°, le tout faisant $3\pi/2$, soit 270°. (La somme maximale des angles d'un triangle sur la sphère est de $3 \times 180^\circ = 540^\circ$, avec 3 points alignés sur l'équateur..., chaque angle étant de 180°.)

Dans un espace de courbure positive, les géodésiques s'écartent en partant du pôle Nord et se recoupent aux pôle Sud, alors que, dans le plan, les droites, qui se coupent une fois, ne se recoupent pas une seconde fois. *La courbure négative* est définie par une somme des angles d'un triangle inférieure à π . On pensera au triangle dans le disque de Poincaré, modélisant la géométrie

¹ G. Besson, "De Poincaré à Perelman : une épopée mathématique du 20^{ème} siècle", conf. cit. ; Etienne Ghys, *La conjecture de Poincaré vaincue*, in Pour la science, nov.2017, n°481, pp.74-75 ; <https://www.techno-science.net/definition/5178.html>

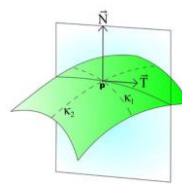
hyperbolique, ou à la pseudosphère ou sphère inversée en quelque sorte, ou bien à la selle de cheval.¹



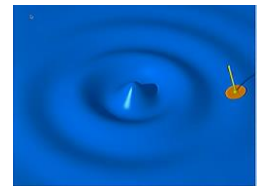
La courbure, ainsi définie, donne une description simple de la façon dont les géométries sont courbées. La courbure *positive* signale la tendance des géodésiques à s'écarter moins que les géodésiques dans l'espace plan, la *négative* la tendance à s'écarter davantage dans le même espace. La courbure est la notion clé pour l'étude des géométries non euclidiennes qui étudieront n'importe quel objet courbé. Dans la riemannienne, contrairement à l'euclidienne, les longueurs ne sont plus les mêmes en allant d'un point à un autre de l'espace (elles peuvent être plus grandes ou plus petites).

Une autre approche de la courbure consiste à faire bouger la normale sur la surface dans tous les sens.

On peut associer au mouvement de la normale deux nombres : la variation d'une direction, et la variation d'une autre direction.²



normale



mouvement de la normale

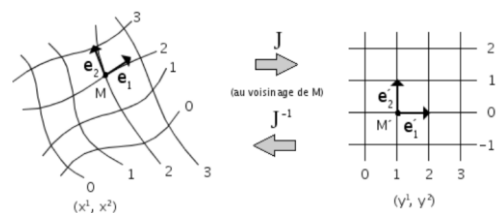
(Annexe VII : la courbure : notion extrinsèque ou intrinsèque ?)

Dans le cadre de la géométrie riemannienne sont définies la courbure de Riemann et celle de Ricci., **La courbure de Ricci est un scalaire qui mesure la courbure d'une variété riemannienne.** Elle est un rapport en avec la moyenne des courbures dans une direction donnée, alors que la courbure de Riemann mesure, par un tenseur, la déviation exacte des vecteurs tangents lors d'un déplacement.

[Nous parlons de « vrai scalaire », i.e. un nombre indépendant de la base choisie pour exprimer les vecteurs, et dont l'existence est donc intrinsèque, par opposition à un pseudoscalaire, i.e. un nombre qui dépend de la base comme les composantes d'un vecteur. La courbure de Ricci, ou scalaire de Ricci porte une information sur la courbure **intrinsèque** d'une variété en chaque point.]³

Le tenseur de courbure de Riemann *symbolise la pente des coordonnées curvilignes*, autre mode de repérage des points à défaut de pouvoir utiliser des coordonnées rectilignes sur une variété.

Il est toutefois d'approximer linéairement des lignes de coordonnées curvilignes au voisinage d'un point M.



Il y a lieu aussi de prendre en compte le tenseur de Ricci pour comprendre finalement le flot de Ricci.

On a compris que le tenseur de Riemann décrit combien **une forme** est déformée quand elle évolue le long des géodésiques dans l'espace. Cet espace peut toutefois contenir de la matière et de l'énergie. Le tenseur de Ricci répond à cette donnée nouvelle. Il décrit, lui, dans la théorie de la relativité générale, combien **le volume d'espace-temps** d'un objet change dû à la courbure de

¹ G. Besson, "De Poincaré à Perelman : une épopée mathématique du 20ème siècle", conf. cit ; Cédric Villani, *Tout est mathématique dans nos vies*, Conférence honoris causa, HEC Paris, 11 févr. 2016, sur internet ; <https://www.rudyrucker.com/blog/2009/08/28/pseudospheres/> ; <https://www.rudyrucker.com/blog/2009/08/28/pseudospheres/>

² G. Besson, "De Poincaré à Perelman : une épopée mathématique du 20ème siècle", conf. cit , *Curvature Concentrations* on Reseachgate

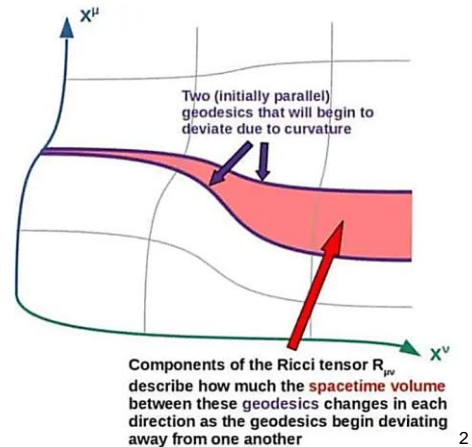
³ [https://fr.wikipedia.org/wiki/Scalaire_\(mathématiques\)](https://fr.wikipedia.org/wiki/Scalaire_(mathématiques))

l'espace-temps sous l'effet des ondes gravitationnelles. (On reviendra sur cette théorie, et la restreinte, dans le §69 suivant.)

Le diagramme ci-contre, à qui veut voir pour comprendre, montre l'œuvre sur l'espace-temps du tenseur de Ricci

If you have a small geodesic ball in free fall, then (ignoring shear and vorticity) the Ricci tensor tells you the rate at which the volume of that ball begins to change, whereas the Riemann tensor contains information not only about its volume, but also about its shape. The Ricci tensor has fewer components than the Riemann tensor.

If the Riemann tensor is zero, then the equation of geodesic deviation reduces to the equation of a straight line, meaning that the separation vector between geodesics is constant. Hence, initially parallel lines will remain parallel everywhere – you are dealing with a flat manifold.¹



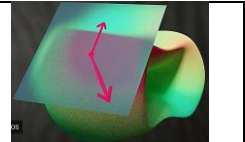
En clair, le tenseur de Ricci s'obtient à partir d tenseur de courbure de Riemann, qui exprime la courbure de la « variété » (un espace courbe, qui est celui de l'espace-temps dans la théorie de la relativité générale). On passe du tenseur de Riemann au tenseur de Ricci en réduisant les indices du tenseur.

- Vous ne parlez pas du tenseur métrique g . Il entre pourtant dans la formulation des tenseurs de Riemann et de Ricci.

- Exact.

Le rôle du tenseur métrique est d'établir *the invariant distance between points no matter which coordinate system you employ [at right angles, or curved axes]*. Le tenseur métrique g indique où la variété se contracte ou rétrécit (*shrinks*), et où elle se dilate (*expands*), comme sur la fig. infra :

On considère des vecteurs tangents à une variété. Un vecteur peut avoir longueur de 2 dans une direction et de 5 dans un autre. Un tenseur métrique permet de définir leur produit scalaire à chaque point d'un espace. Il mesure des longueurs et des angles entre des vecteurs \mathbf{r} suivant $ds^2 = d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r}$, avec $d\mathbf{r}$ la distance infinitésimale d'un vecteur d'un point à un autre. Le tenseur g généralise le théorème de Pythagore.³



Plus généralement, le tenseur métrique d'une variété différentielle (une variété sur l'on peut faire du calcul différentiel) est la donnée, en chaque point de la variété, d'un tenseur métrique **sur l'espace tangent à la variété en ce point**. L'attribution d'un tenseur métrique à cette variété fait de celle-ci une « variété riemannienne ». Comme il est aussi bien résumé en anglais :

*The Riemann tensor is derived from **the metric tensor, which is a generalization of the inner product of vectors** [produit intérieur, i.e. produit scalaire dans un espace non euclidien]. The metric tensor allows one to define the length and angle between vectors in any number of dimensions.*

***The Riemann tensor is a generalization of the metric tensor** that allows one to define the curvature of space-time.⁴*

- Mais quel est le rapport avec le flot de Ricci ?

¹ Johann Colombano, <http://images.math.cnrs.fr/Visualiser-la-courbure.html>, 8 déc. 2021 ; <https://www.physicsforums.com/>

² *The Ricci Tensor: A complete guide with examples*, *Profoundphysics*, sur internet ; *The Ricci flow : Techniques and applications*, *American mathematical society*, 2000.

³ Daniel Fleish, *Vectors and tensors*, op. cit., Cambridge Univ. Press, 2012, pp.140-141 ; *Poincare and Ricci conjecture*, video sur internet; <http://www.astrosurf.com/luxorion/relativite-concepts-tenseur-rc2.htm>;

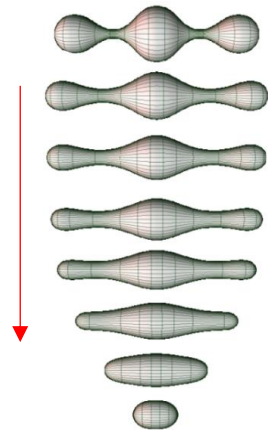
⁴ <https://www.quora.com/> ; https://fr.wikipedia.org/wiki/Tenseur_métrique

- **Le flot de Ricci de Richard Hamilton rend plus « rond » le tenseur de Ricci** qui mesure la déformation moyenne dans une variété riemannienne. Ce que l'on traduit techniquement en disant : *The Ricci flow is an evolution equation which deforms Riemannian metrics by evolving them in the direction of minus the Ricci tensor. It tries to smooth out initial metrics.* Le flot tend à homogénéiser la métrique, l'outil qui mesure une distance entre les éléments d'un ensemble, étant rappelé qu'*homogène* signifie qu'en chaque point, on voit la même chose, devant, derrière, en haut, en bas. Prenez une variété de dim. 3, et choisissez une métrique quelconque sur cet espace. Cette métrique n'est pas nécessairement homogène : elle peut être plus courbée en certains endroits que d'autres.

Le flot de Ricci appliqué à l'espace donné peut s'imaginer comme une sorte de « chauffage » pendant lequel on laisse diffuser la métrique qui atteint alors une espèce de position d'équilibre thermique.

Dans le flot de Ricci, l'évolution temporelle de g est liée à une expression non linéaire des variations spatiales secondes. Cette équation se traduit par une évolution de la surface ou de l'univers tridimensionnel considéré.

On a une équation qui relie une matrice, dépendant du point et du temps, à une autre matrice. **L'équation est non linéaire parce que la vitesse change quand la courbure change.** La variété devient convexe et termine sur une forme circulaire (ou un point à la limite) ¹

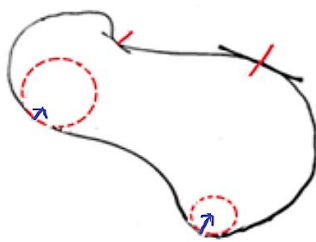


several stages of Ricci flow on a 2D manifold (en.wikipedia) →

(§46
2/b)

On fait « chauffer » l'espace et on laisse diffuser la métrique, jusqu'à ce qu'elle atteigne une espèce de position d'équilibre thermique qui sera homogène. Le flot de Ricci est l'analogie non linéaire de l'équation de la chaleur [celle de Fourier, dans laquelle la propagation de la chaleur est reliée, par un coefficient de proportionnalité, aux dérivées partielles secondes par rapport au temps et à l'espace].²

Replaçons-nous en 2D par simplicité en nous posant la question : comment arrondir une courbe dans le plan ? Il existe une version à 1 dimension du flot de Ricci dans laquelle chaque point va se déplacer dans la direction perpendiculaire à la courbe et à une vitesse qu'est la courbure au moment où se trouve le point. Une déformation continue advient, dirigée par la courbure qui évolue. Précisément, on pousse la courbe en tout point dans le sens de la convexité, i.e. dans le sens d'une courbure sphérique fermée, arrondie en dehors (tout segment est inclus dedans).



L'idée est de tracer le long de la courbe une tangente en chaque point d'où s'élève une normale. La courbure de la courbe est variable. Elle est mesurée par le biais du rayon de la courbure, soit $1/\text{rayon de courbure}$.

Lorsque la courbure est très grande (cf. **le petit cercle rouge** en pointillé), la vitesse de déformation est très grande, d'où un vecteur vitesse (**en bleu**) très grand comparativement au rayon du cercle vers le centre du cercle. Lorsque la courbure est beaucoup plus faible (cf. **le grand cercle rouge** en pointillé), le vecteur vitesse (**en bleu**) est beaucoup plus petit dans la direction du centre du cercle. Quand la courbure est presque plate, la courbe ne bouge presque pas. La vitesse est quasi nulle.³

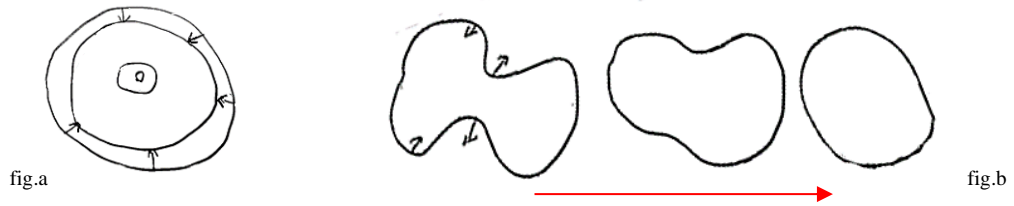
Lorsque le cercle n'est pas à l'intérieur de la courbe, mais en dehors, le mouvement se fait vers le dehors. Si la courbe était elle-même presque un cercle, le mouvement se ferait vers l'intérieur en tout point à la même vitesse jusqu'à ce que le cercle diminue de plus en plus vers un tout petit cercle (fig. a). La question demeure de savoir combien de temps (fini) le processus a besoin pour atteindre ce minuscule cercle dont la courbure est très grande. Ce cercle à petite taille extrême est une singularité.

¹ Etienne Ghys, *La conjecture de Poincaré vaincue*, art. cit., p.75 ; Cédric Villani, *Grigori Perelman*, 25 octobre 2010, https://cedricvillani.org/sites/dev/files/old_images/2012/10/perelman.pdf ; G. Besson, "De Poincaré à Perelman", conf. cit.,

² Etienne Ghys, *Géométrer l'espace : de Gauss à Perleman*, 17 nov. 2007, <http://images.math.cnrs.fr/>

³ Mathematical Sciences Research Institute, *Curve shortening flow*. Sur internet

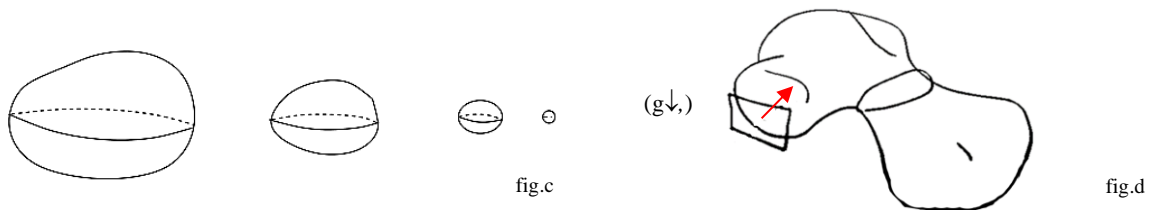
De façon générale, toute forme fermée évolue, quelle que soit l'orientation de sa courbure, vers une figure circulaire. (fig.b) ¹ La métrique change sans changer la variété sous-jacente.



If you have a Riemannian manifold M with metric g_0 , **the Ricci flow is a partial differential equation that evolves the metric tensor [over time]**. C'est un instrument de mesure (une matrice) dans lequel apparaît the Ricci curvature R of the metric $g(t)$. Donc, si vous connaissez g , vous connaissez R .

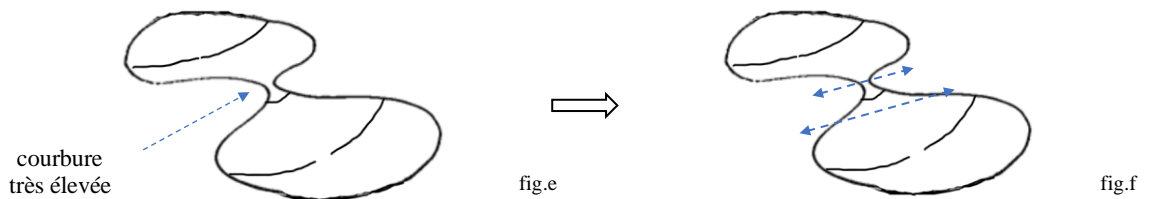
If $R < 0$ [negative curvature], the length increases ($g \uparrow$, i.e. $d/dt g > 0$): the Ricci flows inflates like a balloon. If $R > 0$ [positive curvature], the length decreases ($g \downarrow$, i.e. $d/dt g < 0$): the Ricci flows deflates. Autrement dit, $R = - d/dt g$. Voilà l'équation qui décrit le Ricci flow (à l'origine, ce fut $2R = - d/dt g$, mais la signification est la même. On peut comprendre ainsi pourquoi Ricci flow squishes a sphere to nothingness. Une sphère a une courbure positive en tout point, donc la dérivée temporelle de g est négative.²

On peut imaginer le même flot en 3D pour une surface en 2D, qui ne soit pas, au départ, aussi régulière que celle la Terre à courbure positive constante. Comme la courbure peut s'avérer compliquée, on utilise une courbure moyenne des courbures dans une direction donnée.



Comment une telle surface se meut-elle dans l'espace pour arriver à une métrique de courbure constante positive, que l'on considère en géométrie comme la meilleure métrique possible ? On suppose que le volume demeure constant et ne tende donc pas vers 0, sinon la surface deviendra infiniment petite enveloppant un volume très très petit (fig.c). Au lieu de considérer des vecteurs tangents, on recourt, sur une surface 2D, à des plans tangents en chaque point en essayant toujours de contrôler la courbure en la bornant pour éviter d'aboutir comme pour le cercle à une singularité (fig.d)

Mais quid d'une surface qui présente en un endroit une courbure très élevée au départ ou à l'arrivée ?



Si le virage est serré (comme dans un petit rond-point ou un virage en épingle), cela est équivalent à un cercle de faible rayon, et l'accélération est forte, donc la courbure élevée. Inversement, si le virage est très grand (comme sur une autoroute, ce n'est pas un hasard), cela est équivalent à un cercle de grand rayon, et l'accélération est plus faible, donc la courbure moindre. On peut donc voir la courbure comme l'inverse du rayon du cercle tangent.³

¹ Ibid.

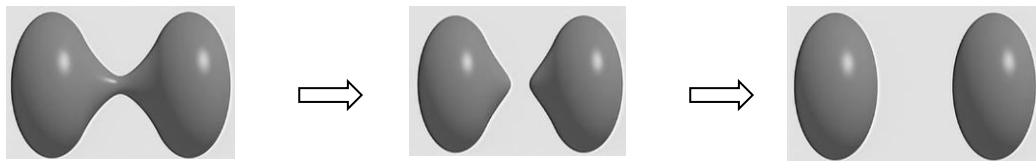
² Nick Sheridan, *Hamilton's Ricci Flow*, The Univ. of Melbourne, Depart. of math., <https://web.math.princeton.edu/~nsher/ricciflow.pdf>; *Poincare conjecture and Ricci flow. A million dollar problem*, video sur internet.

³ Johann Colombano, <http://images.math.cnrs.fr/Visualiser-la-courbure.html> ; <https://www.math.u-bordeaux.fr/~labessie/habilitation.pdf>

Le flot de Ricci évolue proportionnellement à la courbure. A l'arrivée, il peut se trouver, il est vrai, face à une surface dont la forme ressemble à celle d'un sablier (*hourglass*). (*fig.e*) La courbure au point de jonction, est très élevée. La courbure risque d'éclater vers l'infini à continuer le processus de déformation. Le flot de Ricci ne doit plus en conséquence se mouvoir. Une opération chirurgicale, découpant l'espace autour de la singularité, pourra permettre de poursuivre l'opération. (*fig.f*) C'est cette opération sur le flot de Ricci qui permettra à Perelman de démontrer la conjecture de Poincaré.¹

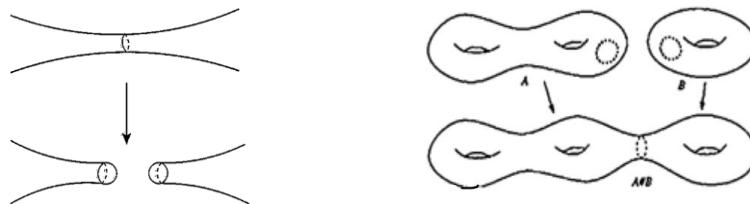
Reprenons le fil des idées (et celui de l'évolution du flot de Ricci) pour mieux saisir l'apport de ce dernier.

L'évolution du flot peut assurément provoquer des ruptures sur une surface fermée, car ce qui se joue justement est la somme des courbures ou leur moyenne pour une direction donnée. **Ce qui se passe dans un endroit a un impact partout.** Il suffit que l'une des courbures soit plus grande pour qu'elle influe plus sur toute l'évolution. C'est le milieu de la surface qui va se contracter jusqu'à la scission.



(§65
c)-i)

Sans entrer dans les détails qui excèdent notre savoir présent, on peut dire en deux mots que Perelman a eu l'idée de prendre le taureau par les cornes. Il casse en morceaux la surface susceptible d'évoluer pour en comprendre les caractéristiques et suivre leur propre déformation. L'opération consiste, par chirurgie, à faire l'inverse de « la somme connexe » de deux surfaces (*fig.c*) avant de recoller les morceaux. A cette fin, un petit disque est découpé sur chaque surface connexe de même dimension pour les relier (comme on recolle par ex. un tore à deux trous avec un tore à un trou (*fig.d*)). (Le tore n'est pas une variété simplement connexe, mais l'idée d'un flot de Ricci à son sujet n'est pas écartée.)²



Telle est la voie par laquelle Perelman a réussi à démontrer la conjecture de Poincaré : toute variété compacte de dimension 3, et simplement connexe, est homéomorphe à la sphère de dimension 3.

N.B. : Is a tensor just a matrix ?

A matrix can be used to multiply a vector to get another vector and then, in turn, use that result to multiply another vector to get a scalar. **In short, a matrix can assign a scalar to a pair of vectors.** A rank-2 tensor can do this, with the matrix serving as its representation in a given coordinate system. Similarly, a rank-3-tensor can assign a scalar for a triplet of vectors ; this rank-3 tensor could be represented by a 3D-matrix thingie [truc, machin] of $N \times N \times N$ elements.

(§47
Ann.II)

So a rank 2-tensor is not just a matrix. **It is represented by a matrix, but that representation depends on the choice of coordinate** [comme un vecteur colonne d'une matrice représente un vecteur dans un système donné de coordonnées]. In fact, vectors and tensors are often defined in terms of how their representations transform under a change of coordinates.³

b) Hasard

¹ Mathematical Sciences Resarch Institute, *Curve shortening flow*. Sur internet

² G. Besson, "De Poincaré à Perelman, conf. cit ; https://fr.wikipedia.org/wiki/Somme_connexe. Pour flow de Ricci portant sur le tore, v. la littérature spécialisée actuelle.

³ <https://www.quora.com/>

Annexe I

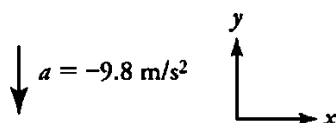
La loi de la chute dans le référentiel galiléen, avec conditions initiales et indication de l'horloge au départ

Résumons la chose en deux mots, d'après la note ¹.

1/ Le cadre

On connaît la loi fondamentale de la dynamique : $F = ma$. Dans le cas d'espace $a = g$, puisqu'il n'y a qu'une force dans le cas considéré, le poids mg . (L'accélération de la pesanteur est à peu près 10m/s^2).

On est sur Terre, dans un référentiel galiléen à peu près ; où s'applique la 1^{re} loi de Newton., le principe d'inertie (trajectoire rectiligne et uniforme) (Si on se plaçait dans un référentiel non galiléen, ce serait plus compliqué). Soit donc un repère, avec trois axes, x , y et z . On peut se passer de l'axe z qui n'apporte pas grand-chose à l'analyse.



On va résoudre l'équation de Newton, $F = mg$, en un système d'équation différentielle sur les coordonnées x et y

3/ Les intégrations successives

La masse est repérée par un vecteur position $v = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, un vecteur vitesse $v = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ et un vecteur accélération $g = \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -g \end{bmatrix}$ (nous avons accolé aux variables des primes, ', au lieu des points, ., usuels en mécanique, faute d'avoir le logiciel pour)

D'où le système différentiel à résoudre : $x'' = 0$ et $y'' = -g$ (c'est $-g$ car le corps tombe dans la direction inverse de y)

Pour résoudre, il faut intégrer, soit $x' = \text{cste}$ (vitesse selon x , i.e. v_x) et $y' = -gt + \text{cste}$ (i.e. vitesse au temps initial v_y) ;

et en intégrant encore : $x = v_x t + x_0$ et $y = -\frac{1}{2} g t^2 + v_y t + y_0$, avec x_0 et y_0 la position et la vitesse au point initial. On connaît ces conditions initiales, on peut connaître en tout temps la trajectoire de la particule.

4/ Pour simplifier,

on choisit l'origine du repère de façon que x_0 et $y_0 = 0$ (**l'origine est au moment où je lance l'horloge**, ce qui me permet de me débarrasser de x_0 et y_0), d'où $x = v_x t$ et $y = -\frac{1}{2} g t^2 + v_y t$, un système à deux degrés de liberté

Il est alors facile de découvrir la trajectoire en fonction de x parce que $y = -\frac{1}{2} g \cdot (x/v_x)^2 + v_y \cdot x/v_x$

<p>C'est l'équation d'une parabole $y = x^2$, avec un coefficient négatif : $-\frac{1}{2} g$, déterminée par les conditions initiales, x_0 et $y_0 = 0$, en supposant que $v_x \neq 0$ pour diviser par v_x.</p> <p>Si $x = .$, i.e. sans vitesse initiale, la particule ne fait que tomber en ligne droite.</p>		
---	--	--

5/ Rem :

En l'absence de gravité, i.e. $g = 0$ (absence de poids), y devient une fonction linéaire de x : la trajectoire est une ligne droite. On retrouve la 1^{re} loi de Newton, une trajectoire libre en ligne droite à vitesse constante.

¹ Scientia Egregia, *Le principe de moindre action et la mécanique lagrangienne*, 7 nov. 2021 conf. cit. ; <https://www.physicsclassroom.com/>

Annexe II

Aperçu de quelques référentiels usuels en physique

1/ Exemples

D'abord, tous ceux dont la masse ponctuelle isolée (i.e. soumise à aucune force) en translation rectiligne uniforme. Autrement dit, les référentiels inertiels ou galiléens, bien que la plupart des référentiels usuels ne sont pas parfaitement galiléens (**on ne voit pas tous jours des mouvements en ligne droite, à vitesse constante, qui ne soient pas perturbés par des évènements externes !**).

Ensuite :

- **le référentiel terrestre**, le plus utilisé. Il est centré en un point de la Terre, et ses axes sont liés à la rotation terrestre : un homme « immobile » est donc fixe dans le référentiel terrestre. On le considère en première approximation comme galiléen lorsque la durée de l'expérience est très inférieure à la période de rotation de la Terre ou lorsque l'effet de cette rotation est négligeable par rapport à d'autres facteurs.¹

- **le référentiel géocentrique**, qui a pour origine le centre de masse de la Terre et ses axes sont définis par rapport à trois étoiles suffisamment lointaines pour sembler immobiles. Il peut être considéré comme galiléen sur des expériences « peu longues », dont la durée est très brève devant une année, car la révolution de la Terre autour du Soleil n'est alors pas prise en compte. Par exemple, l'étude des mouvements des satellites artificiels sera effectuée dans ce référentiel.

- **le référentiel de Copernic**, centré sur le centre de masse du système solaire et dont les axes pointent vers trois étoiles éloignées. Il peut être considéré comme galiléen pour les mêmes raisons, et est adapté à l'étude du système solaire.

- **Le référentiel de Kepler** (ou référentiel héliocentrique), centré sur le centre de masse du seul Soleil. En première approximation, l'orbite de chaque planète, dans ce référentiel lié au Soleil et aux étoiles lointaines, est une ellipse dont le Soleil est un foyer. **C'est la 1^{re} loi de Kepler.**

- **Le référentiel barycentrique**, aussi appelé référentiel du centre de masse, est le référentiel en translation par rapport à un référentiel de référence (choisi généralement galiléen) et dans lequel le centre de masse est immobile. On lui associe souvent un système de coordonnées ayant pour origine le centre de masse du système considéré. Ce référentiel n'est pas nécessairement galiléen

2/ Balistique et cercles inertiels

Une des utilisations pratiques de la force de Coriolis est le calcul de la trajectoire des projectiles dans l'atmosphère.

Une fois qu'un obus est tiré ou qu'une fusée en vol sous-orbital a épuisé son carburant, sa trajectoire n'est contrôlée que par la gravité et les vents (quand il est dans l'atmosphère). Supposons maintenant qu'on enlève la déviation due au vent. Dans le repère en rotation qu'est la Terre, le sol se déplace par rapport à la trajectoire rectiligne que verrait un observateur immobile dans l'espace. Donc pour un observateur terrestre, il faut ajouter la force de Coriolis pour savoir où le projectile retombera au sol.

Dans la figure ci-contre, on montre la composante horizontale de la trajectoire qu'un corps parcourrait s'il n'y avait que la force de Coriolis qui agissait (sans la composante verticale du vol, ni la composante verticale de Coriolis).

Supposons que le corps se déplace à vitesse constante de l'équateur vers le pôle Nord à altitude constante du sol, il subit un déplacement vers la droite par Coriolis (hémisphère nord). Sa vitesse ne change pas mais sa direction courbe. Dans sa nouvelle trajectoire, la force de Coriolis se remet à angle droit et le fait courber encore plus. Finalement, il effectue un cercle complet en un temps donné qui dépend de sa vitesse (v) et de la latitude.²



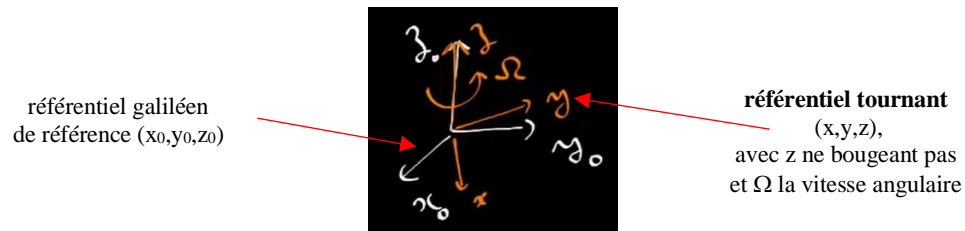
¹ [https://fr.wikipedia.org/wiki/Référentiel_\(physique\)](https://fr.wikipedia.org/wiki/Référentiel_(physique))

² https://fr.wikipedia.org/wiki/Force_de_Coriolis

Annexe II^{bis}**Le principe fondamental de la dynamique dans un référentiel **non inertielle** avec l'ajout des forces fictive****1/Le choix du lagrangien : la dynamique de la chute libre**

Le choix d'une dynamique est un préalable avant toute application de l'équation d'Euler-Lagrange. L'analyse qui suit est sommaire. Elle abrège fortement les calculs de dérivation pour faire sentir l'essentiel.

En chute libre, le lagrangien est: $\mathcal{L} = E_c - E_p = 1/2 m v^2 - mgy$, en prenant soin d'orienter y vers le haut dans le système de coordonnées. Dans la cas le plus simple de la particule libre, : $\mathcal{L} = E_c - E_p = 1/2 m v^2$, en l'absence d'énergie potentielle, en considérant x, y et z.



Dans le référentiel tournant supra (x,y,z) , - par rapport au référentiel galiléen (x_0, y_0, z_0) , - qui tourne avec une certaine vitesse angulaire Ω , on a :

$$\begin{cases} x = x_0 \cos \Omega t + y_0 \sin \Omega t \\ y = y_0 \cos \Omega - x_0 \sin \Omega \\ z = z_0 \end{cases}$$

En injectant dans le lagrangien ; $\mathcal{L} = 1/2 m v^2 = 1/2 m (\dot{\mathbf{r}} + \Omega \dot{\mathbf{r}})^2$, avec $\dot{\mathbf{r}}$ pour \mathbf{v}

D'où la question : qu'est l'équation d'Euler-Lagrange dans ce référentiel ?

On doit calculer $\partial \mathcal{L} / \partial \dot{\mathbf{r}}$, et en dérivant cette expression successivement par r et par $\dot{\mathbf{r}}$, on trouve au final un lagrangien auquel il faut ajouter des deux **forces fictives** que sont la force de Coriolis et la force d'inertie d'entraînement.

2/Propriété de l'équation d'Euler-Lagrange

On voit que l'équation qui a été développée est bien $d/dt (\partial \mathcal{L} / \partial \dot{\mathbf{r}}) = \partial \mathcal{L} / \partial \mathbf{r}$. Cette équation est constante bien que la vitesse $\dot{\mathbf{r}}$ ne soit pas analysée dans un référentiel galiléen.

Annexe III

Sur l'approche historique de la notion de géométrie symplectique pour mieux en comprendre la notion

C'est Hermann Weyl qui, dans son livre *Les Groupes classiques* [Wey1946], choisit ce nom : groupe symplectique. **La relation étroite entre cette structure définie par l'aire signée et la structure des nombres complexes** lui fait choisir le mot symplectique [grec sum-plektikos], transposition de complexe [latin com-plexus], pour désigner ce groupe.

Le suffixe plekticos ~ plexus signifiant tenir, entrelacer... L'idée de complexe, comme symplectique sous-entend l'existence de plusieurs types d'objets (ici deux) maintenus ensemble dans une même structure. On peut dire, rapidement, que dans un cas la complexité représente la **dualité réel-imaginaire**, et dans l'autre la sym- plecticité représente la **dualité position-vitesse**.¹

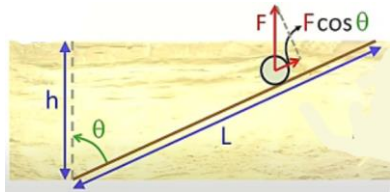
¹ Patrick Iglesias-Zemmour, *Aperçu des origines de la géométrie symplectique*, Univ. Hébraïque de Jérusalem, 18 déc. 2002, in <http://serge.mehl.free.fr/pdf/AOGS-MSH.pdf>. Nous soulignons.

Annexe IV

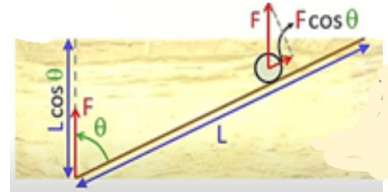
Sur la relation produit scalaire et travail¹ – l'ex. du plan incliné qu'étudia Galilée

On comprendra la relation par cette série d'images suffisamment suggestives. Dans $W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{h}$ ou $\mathbf{F} \cdot \mathbf{d}$, W désigne le travail accompli par la force \mathbf{F} en soulevant un corps à une hauteur h ou en le déplaçant le long d'un plan incliné de longueur L , semblable à celui de Galilée bien que le savant florentin ne pensait pas encore en ces termes. Il faut attendre le XIX^e siècle pour que cette notion advienne.

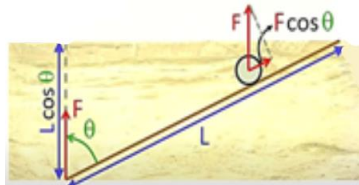
Comme déplacement, d , la longueur est le vecteur. De là l'idée que le travail est un produit scalaire entre deux vecteurs, $W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{d}$, d'où il ressort un nombre, **un scalaire** (du latin *scala* qui signifie *échelle*). En tant que fabricant d'un scalaire, le produit scalaire permet une évaluation, une graduation sur l'échelle des nombres réels.



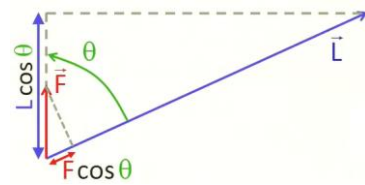
$$W = F \times h = F \cos \theta \times L$$



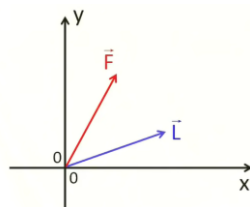
$$W = F \times h = F \cos \theta \times L$$



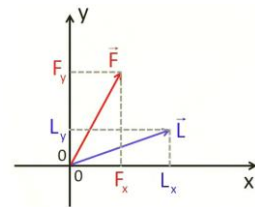
$$W = F \times L \cos \theta = F \cos \theta \times L = \vec{F} \cdot \vec{L}$$



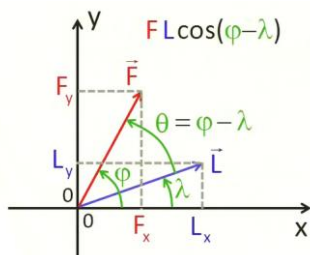
$$W = F \times L \cos \theta = F \cos \theta \times L = \vec{F} \cdot \vec{L}$$



Les mêmes vecteurs \mathbf{F} et \mathbf{L} dans un repère cartésien



$$W = F \times L \cos \theta = F \cos \theta \times L = \vec{F} \cdot \vec{L} = (F_x, F_y) \cdot (L_x, L_y)$$



Comme :

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

En remplaçant a par θ et b par λ , on a :

$$F L \cos(\varphi - \lambda) = F L \cos \varphi \cos \lambda + F L \sin \varphi \sin \lambda$$

et

$$F \cos \varphi \quad L \cos \lambda + F \sin \varphi \quad L \sin \lambda$$

d'où le produit scalaire :

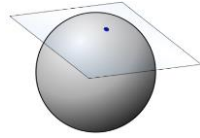
$$\vec{F} \cdot \vec{L} = F_x L_x + F_y L_y$$

Mais attention : cette formulation du produit scalaire (en somme des produits des coordonnées) **ne marche que dans un repère orthonormé**. Dans ce repère, grâce aux triangles rectangles, on peut recourir aux cosinus et sinus. Ce n'est qu'un cas particulier. Si on changeait de repère, il faudrait changer de formule.

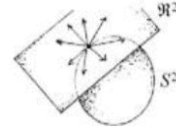
¹ Marc Haelterman, Clipedia, *Le produit scalaire*, 2018, <https://www.youtube.com/watch?v=uXPfmoRIJp0>

Annexe VI

Une visualisation finale éclairante des espaces tangents et cotangents

1/ Plan tangent et vecteurs tangents ¹

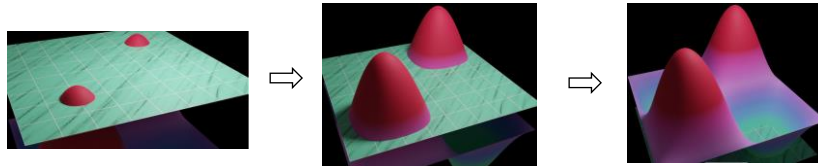
plan tangent à une sphère



vecteurs tangents sur un plan tangent

2/ Ensemble de covecteurs ²

Since covectors convert vectors into scalars, we can plot out some of the level sets of a covector to get a feel for them, where a level set consists of all the inputs that give the same value.



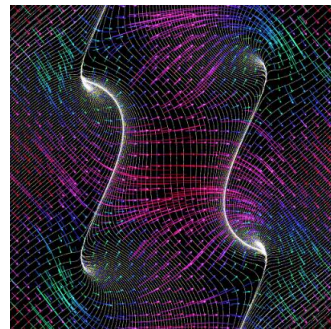
Chaque covecteur est perpendiculaire à un vecteur tangent. Le covecteur est presque le gradient d'une fonction, sans l'être.

The gradient is a vector field, not a covector field. [...] To get a covariant vector from the gradient, we have to multiply by the metric tensor, which would get us the total differential.

3. Espace tangent et espace cotangent ³

Covector fields are quite difficult to plot because you have to plot curves perpendicular to the various vectors at every point while also making sure that large covectors are spaced close together while small covectors are spaced far apart. Here's an attempt.

The white lines indicate the covector field corresponding to the vector field shown in the background. The spacing is definitely incorrect, but it does show the appropriate curves.



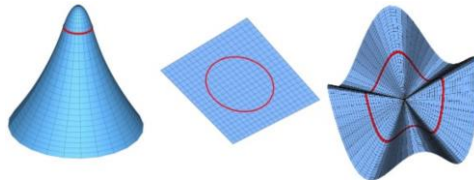
¹ https://fr.wikipedia.org/wiki/Espace_tangent ; <https://studfile.net/preview/4421958/page:13/>

² <https://joseph-mellor1999.medium.com/vectors-and-covectors-81b64ff6e38b>

³ *Ibid.*

Courbure extrinsèque – courbure intrinsèque

1/ Exemples de courbure ¹



2/ Courbures extrinsèque et intrinsèque

La **courbure extrinsèque** d'une courbe ou surface S contenue (plongée) dans un espace E de dimension plus grande mesure comment S est incurvé (ne s'étend pas tout droit) dans E .

La **courbure intrinsèque**, mesure combien les propriétés géométriques des figures dans un espace donné, diffèrent de celles d'une géométrie "plate" (qui contient la géométrie affine), indépendamment de quelque autre espace où il peut être plongé.

3/ Courbure extrinsèque d'une courbe et d'une sphère

Lorsqu'on **suit une courbe**, sa direction (son vecteur tangent) peut varier. L'angle de déviation de cette direction pour un arc d'une courbe lisse S près d'un point donné P , est généralement proportionnel à sa longueur, soit exactement (dans le cas d'un arc de cercle), soit approximativement (d'autant plus précisément que l'arc est petit).

Sur une sphère, les "lignes droites", courbes de courbure extrinsèque nulle, sont les "grands cercles" de même centre que la sphère.

4/ Courbure intrinsèque et courbure de Gauss

La **courbure de Gauss** est la courbure intrinsèque pour le cas particulier d'une surface (espace à 2 dimensions), où il est un champ scalaire.

5/ Courbure intrinsèque et courbure de Riemann

La courbure de Riemann est le cas général de courbure intrinsèque, pour les espaces de toute dimension (supérieure à 2). C'est un champ qui n'est pas scalaire, mais multidimensionnel (décrit par plusieurs composants quand un système de coordonnées est donné).

6/ Courbure de Riemann et dérivée covariante (

En géométrie différentielle, la **dérivée covariante** est un outil destiné à définir la **dérivée** d'un champ de vecteurs sur une variété en chaque point. **La dérivée covariante respecte les conditions du transport parallèle**. Elle est l'image « la plus fidèle » de la variation du champ autour de ce point, au sens où elle ne correspond aux dérivées partielles de ce domaine que si on choisit un système de coordonnées qui est spécialement le moins déformé possible près de ce point.

La dérivée covariante est connue aussi sous le nom de **dérivée de tenseur**. **Il n'existe pas de différence entre la dérivée covariante et la connexion**. Un champ de vecteurs est parallèle si la dérivée covariante est 0

Les propriétés de la dérivée covariante, sont différentes de celles des dérivées partielles dans un système de coordonnées fixe, parce que (si la courbure est non nulle), un système de coordonnées ne peut pas être également adapté à tout le voisinage d'un point, de sorte qu'on ne peut pas maintenir un système de coordonnées fixe dans tout le voisinage, qui donne la dérivée covariante directement par les dérivées partielles.

En d'autres termes, les variations mesurées par les dérivées partielles, sont celles venant de la structure affine de l'espace donnée par le système de coordonnées choisi, mais cette structure affine est celle d'une géométrie plane, sans courbure, qui n'est pas celle que l'on veut étudier.

7/ Rem. : Change of basis v. change of coordinate system ?

The difference is that you can't explain the abstract change of basis in terms of just moving/rotating/stretching/etc. the original coordinate system.²

¹ Johann Colombano, <http://images.math.cnrs.fr/Visualiser-la-courbure.html>

² <https://physics.stackexchange.com/questions/422069/change-of-basis-vs-change-of-coordinate-system>

Notions, trop vite peut-être sous-entendues ,au cours du §68

I/ Notions fondamentales

a) Application linéaire

Une application linéaire est une opération sur des vecteurs qui permet de les **étirer ou les contracter de façon uniforme**. Cette opération conserve la structure de l'espace vectoriel, D . Chaque vecteur de D devient un vecteur $\mathbf{v}' = \lambda \mathbf{v}$, de ce sous-espace, de rapport ou de coefficient ou de « **valeur propre** ».

En utilisant le langage vivant de la physique quotidienne, nous dirons que nous avons effectué une dilatation. Cette dilatation étant uniforme sur tout l'espace, nous l'appellerons également, d'un terme plus mathématique, une « **homothétie** ». Lorsque la valeur propre est nulle, nous dirons que la droite est projetée sur l'origine O .¹

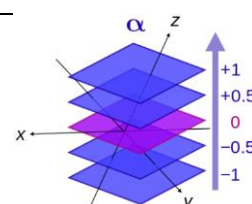
b) Forme linéaire

Une application linéaire répond aux conditions suivantes : Pour tout vecteur u de E et pour tout scalaire λ , $f(\lambda \mathbf{u}) = \lambda f(\mathbf{u})$. Une forme linéaire est un cas particulier d'application linéaire, définie ainsi :

Soit E un espace vectoriel sur un corps commutatif K . Une **forme linéaire** sur E (ou **covecteur** de E) est une application φ de E dans K qui est linéaire, c'est-à-dire qui vérifie :

$$\forall (x, y) \in E^2, \forall \lambda \in K, \varphi(\lambda x + y) = \lambda \varphi(x) + \varphi(y).$$

Une 1-forme linéaire est **une application linéaire qui agit sur un vecteur et produit un nombre**. Cf. ci-contre, où, à chaque plan, l'application linéaire α , fait correspondre à chaque plan un scalaire.²



Ex : l'application $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, dans $(x, y) \rightarrow (2x + 3y)$ est une forme linéaire sur \mathbb{R}^2 .

b) La forme multilinéaire

Une forme multilinéaire, ou *p-linéaire*, est une forme linéaire en chaque variable. A *multilinear k-form on V over R* is called a **(covariant) -tensor**, If $k = 2$, $f : V \times V \rightarrow K$ is referred to as a **bilinear form**. A familiar and important example of a (symmetric) bilinear form is dot product, [produit scalaire] of vectors.³

Parmi les formes multilinéaires, figure naturellement la **1-forme** ci-dessus. En notation matricielle, les (vrais) vecteurs sont représentés par des colonnes (vecteur colonne) Ces vecteurs lignes sont ce qu'on appelle des 1-formes.

L'application d'une forme u à un vecteur v revient à "multiplier" son "vecteur" ligne par le vecteur colonne de v pour produire un nombre.

Etant rappelé :

. qu'une colonne de nombre est juste une représentation d'un vecteur, qui dépend de la base choisie. Les vecteurs sont des objets géométriques qui ne dépendent évidemment pas de leurs représentations ;

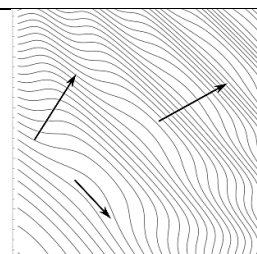
.de la même manière, les 1-formes ne sont pas des vecteurs lignes qui est juste une façon de les représenter par des nombres. Le scalaire ne dépend pas de la base choisie.⁴

c) Comment représenter une 1-forme ?

Dans l'espace à 2 dimensions, une très bonne représentation sont les lignes de flux. Ainsi, l'action d'une 1-forme sur un vecteur est le nombre de lignes que ce vecteur coupe. C'est une façon aussi de représenter le gradient,

Rapport avec la notion de **forme différentielle** :

le mot "différentielle" dans "forme différentielle" sous-entend bien que nous nous adressons qu'aux "petits" vecteurs ; l'action des formes sur des plus grands objets s'obtient par la sommation de leurs actions sur les petits, ce qu'on désigne par intégration.⁵



¹ Claude Bruter, *Comprendre les mathématiques*, Odile Jacob, Paris, 1996, p.224.

² https://fr.wikipedia.org/wiki/Forme_linéaire; https://en.wikipedia.org/wiki/Linear_form

³ https://en.wikipedia.org/wiki/Multilinear_form ; https://fr.wikipedia.org/wiki/Forme_multilinéaire

⁴ https://www.liphy.univ-grenoble-alpes.fr/pagesperso/bahram/Math/chap_FormeDif.pdf

⁵ *Ibid.*

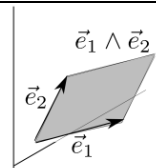
Notions, trop vite peut-être sous-entendues, au cours du §68 (suite 1)

d) Le bi-vecteur et la 2-forme

Dans l'espace, nous avons des points, des vecteurs (reliant deux points proches), et des 1-formes. Nous pouvons généraliser ces concepts et construire des objets plus complexes.

Par exemple, nous pouvons construire des **bi-vecteurs**.

De la même manière qu'un vecteur e peut être utilisé pour "porter" un segment de ligne orienté, un bi-vecteur $e_1 \wedge e_2$ peut être utilisé pour porter un **élément de surface orientée**



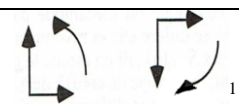
Les 2-formes sont une généralisation des 1-forme. **Une 2-forme ω s'applique à un bi-vecteur pour produire un scalaire de façon bilinéaire.** Ainsi, la 2-forme $dx dy$ [i.e. $dx \wedge dy$], appliquée à $e_1 \wedge e_2$ produit le nombre 1. **Une 2-forme constante peut-être vue comme un flux ; appliqué à une surface, cela produit le flux à travers cette surface.**

e) Représentation géométrique de $dx dy$

La multiplication extérieure de la 1-forme dx par la 1-forme dy [la multiplication et extérieure car les deux formes sont extérieures l'une à l'autre] définit un élément de surface $dx \wedge dy$.

L'ordre dans lequel on présente les éléments dx et dy est important, car il permet de définir une orientation de l'élément de surface :

$dx \wedge dy$ est orienté de manière opposée à $dy \wedge dx$, ce qu'on traduit par $dx \wedge dy = - dy \wedge dx$



2/ Le tenseur métrique

a) Le produit scalaire

Les concepts de distance et de produit scalaire transforment un espace topologique en un espace métrique ; ils nous permettent de distinguer une sphère d'une ellipsoïde.

Le produit scalaire associe à deux vecteurs, de façon linéaire, **un nombre**. En géométrie, un produit scalaire fixe la structure de l'espace. Le produit scalaire (\mathbf{u}, \mathbf{v}) entre deux vecteurs \mathbf{u} et \mathbf{v} est indépendant du système de coordonnées. Cependant, si nous nous donnons un système de coordonnées et un produit scalaire, nous pouvons exprimer le produit scalaire entre le vecteur $\mathbf{u} = h^i e_i$ et le vecteur $\mathbf{v} = k^j e_j$ par

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = g_{ij} h^i k^j$$

Les quantités g_{ij} sont appelés les éléments du **tenseur métrique g** . Si on choisit un autre système de coordonnées, leurs valeurs changent de façon à laisser invariant (\mathbf{u}, \mathbf{v}) . En général, g dépend du point P de l'espace.²

On peut traduire cette propriété en disant que le produit scalaire b est **une forme bilinéaire symétrique** au regard d'un couple de vecteurs (\mathbf{F}, \mathbf{A}) , sachant que $b(\mathbf{F}, \mathbf{A}) = b(\mathbf{A}, \mathbf{F})$. Le vecteur \mathbf{A} indique une direction, et le vecteur \mathbf{F} indique une force., pointée dans une autre direction. (voir fig. infra) Ce produit scalaire est non dégénéré (au sens de régulier, et non abâtardi, ruiné), car si, quel que soit le vecteur \mathbf{A} , $b(\mathbf{F}, \mathbf{A})$ est nul, alors \mathbf{F} est le vecteur nul.³ (Dégénéré peut signifier qu'un vecteur devient linéairement dépendant.)

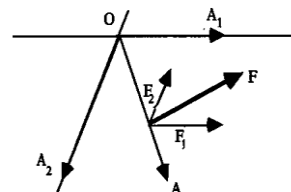
b) Sens physique du produit scalaire

Le calcul d'un produit scalaire donne une idée d'**un travail**, via la détermination d'une longueur. Le travail est un scalaire.

Le travail d'une force le long d'un chemin est défini, en mécanique usuelle, comme le produit de la valeur de cette force par la longueur du chemin parcouru si la direction de la force est constamment parallèle à celle du chemin.

Ainsi, le travail, noté $\mathbf{F}_1 \mathbf{A}_1$, de la force \mathbf{F}_1 , le long du vecteur \mathbf{A}_1 , a pour valeur le nombre algébrique positif $+ |\mathbf{F}_1| |\mathbf{A}_1|$, alors que le travail de la Force \mathbf{F}_2 le long du vecteur \mathbf{A}_2 a pour valeur algébrique le nombre négatif $- |\mathbf{F}_2| |\mathbf{A}_2|$, Le travail $\mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{A}_2$ de \mathbf{F}_1 (respectivement $\mathbf{F}_2 \cdot \mathbf{A}_1$ de \mathbf{F}_2) le long de \mathbf{A}_2 (respectivement de \mathbf{A}_1) est nul.

Le travail noté $\mathbf{F} \cdot \mathbf{A}$ de $\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$ le long de $\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2$ s'obtient en additionnant le travail de chacune des composantes de \mathbf{F} selon chacune des composantes de \mathbf{A} .



¹ Claude Bruter, *Comprendre les mathématiques*, Odile Jacob, Paris, 1996, p.224.

² https://www-liphy.univ-grenoble-alpes.fr/pagesperso/bahram/Math/chap_FormeDif.pdf

³ C. Bruter, *Comprendre les mathématiques*, p.140.

Notions, trop vite peut-être sous-entendues, au cours du §68 (suite 2)

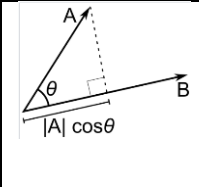
c) longueur ou forme quadratique

On convient de définir le **carré de la longueur** d'un vecteur A , relativement à un produit scalaire donné b , comme le **travail accompli par la force pour parcourir le trajet A** . L'idée de prendre le carré a un sens en physique : que l'on pense au carré dans l'expression de l'énergie cinétique $\frac{1}{2} m v^2$. Le carré est le travail sur une longueur donnée accompli par une énergie.

On appelle également ce carré la valeur en A de la forme quadratique q associée à b . On note $I^2 I(A) = \|A\|^2 = b(A,A) = q(A)$.¹

Pour comprendre l'apparition du carré dans un produit scalaire, considérons un vecteur u , et le produit scalaire de u avec lui-même.

On a : $u \cdot u = \|u\| \times \|u\| \times \cos(\theta) = \|u\|^2 \times \cos \theta = \|u\|^2$, avec θ l'angle entre les deux vecteurs u et u , le vecteur u se projetant sur lui-même. On prend le cosinus d'un angle = à 0, soit 1.



La donnée de la longueur (ou du produit scalaire, ou de la forme quadratique) définit ce que l'on appelle la « métrique de l'espace ».²

Le **tenseur métrique** est un tenseur d'ordre 2 permettant de définir le **produit scalaire de deux vecteurs en chaque point d'un espace**. On comprend qu'il soit alors utilisé pour la mesure des longueurs et des angles. Il généralise le théorème de Pythagore.

3/ Relation entre la notion de travail et celle de tenseur.

Cette relation n'est guère exhumée dans la littérature spécialisée. On doit la pénétration du mathématicien Claude Bruter d'y jeter quelque lumière.

(question d'Alain Laraby)

Claude,

Quand tu parles du travail local d'un tenseur, penses-tu au tenseur énergie-impulsion ou au tenseur de Ricci ?

Je te pose la question, car personne, ou presque (voir Hermann Weyl) n'a mis en relation le travail et ce type de tenseur.

Tibi,

Alain

(réponse de Claude Bruter)

Je pense plus globalement au **tenseur énergie-impulsion**, quoique le **tenseur de Ricci** soit aussi lié à des considérations énergétiques locales. La courbure de Ricci est, en effet, définie comme une moyenne des courbures locales sur les différents sous-espaces tangents de dimension 2 de la variété. On a une moyenne des accélérations locales.³

Vale,

Claude,

Le **tenseur énergie-impulsion** représente la **répartition de masse et d'énergie dans l'espace-temps**. Utilisé notamment en relativité générale, il indique que **ces dernières courbent l'espace**. L'effet visible de cette courbure est la déviation de la trajectoire des objets en mouvement, observé couramment comme l'effet de la gravitation.

Dans le cadre de cette théorie, le **champ de gravitation est interprété comme une déformation de l'espace-temps**. C'est cette déformation qui est exprimée à l'aide du **tenseur de Ricci**. Comme une moyenne des courbures locales, on peut le considérer comme le **lapalucien du tenseur métrique riemannien** dans le cas de variétés riemanniennes [variétés sujettes à courbure].⁴

On vient de parler des accélérations locales, i.e. des dérivées secondes. C'est l'occasion d'aborder la matrice hessienne. →

¹ Ibid., p.141.

² Ibid.

³ Courriel de Claude Bruter en réponse à une question d'Alain Laraby, en date du 29 avril 2023.

⁴ https://fr.wikipedia.org/wiki/Tenseur_énergie-impulsion ; https://fr.wikipedia.org/wiki/Tenseur_de_Ricci

Notions, trop vite peut-être sous-entendues, au cours du §68 (suite 3)

/ La matrice hessienne

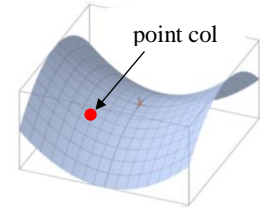
La matrice hessienne d'une fonction numérique f , noté $H(f)$, est la matrice carrée de ses dérivées partielles secondes. f est définie comme suit : les variables (x_1, x_2, \dots, x_n) de f définie sur un domaine de définition $D \rightarrow$ la valeur de f pour ces coordonnées $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}$ (e.i. f a une valeur réelle)

Elle permet, dans de nombreux cas, de déterminer la nature des points critiques de la fonction f , c'est-à-dire des points d'annulation du gradient (le **gradient** est le vecteur représentant la **variation d'une fonction au voisinage d'un point donné** ; les **composantes de ce vecteur sont les dérivées partielles de f calculées en ce point**).

*Si a est un **point de minimum local** de f , alors c'est un point critique et la hessienne en a est positive (c'est-à-dire que la **forme hessienne est positive**).*

*Si a est un **point de maximum local** de f , alors c'est un point critique et la hessienne en a est négative (c'est-à-dire que la **forme hessienne est négative**).*

*En particulier, si la hessienne en un point critique admet au moins une valeur propre strictement positive et une valeur propre strictement négative, le point critique est un **point col**.*



En clair, la matrice hessienne est utile pour analyser le comportement des points critiques de la fonction f , c'est-à-dire des points d'annulation du gradient.

Comment déterminer la matrice hessienne d'une fonction de plusieurs variables ? Il faut commencer par déterminer le gradient (donc les dérivées partielles 1^{ères}) avant de calculer les coefficients de cette matrice (les dérivées partielles 2^{ndes}).¹

dérivée partielle de f par rapport à x_1

dérivée partielle de la 1^{re} e composante du gradient $\partial f / \partial x_1$ par rapport à x_2 , i.e. $\partial^2 f / \partial x_1 \partial x_2$

gradient de f , i.e. ∇f

matrice hessienne, $H_{f(x_1, x_2, \dots, x_n)} = \nabla^2(f) = \nabla \nabla(f)$

Exemple : soit la fonction $f(x,y) = x^3 + x^2y + xy^2 + y^3$

$\nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + 2xy + y^2 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 2yx + 3y^2 \end{pmatrix}$

$H_f(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = 6x + 2y & \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = 2x + 2y \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = 2x + 2y & \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = 2x + 6y \end{bmatrix}$

soit :

$$H_f(x,y) = \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$$

calcul du **déterminant** de la matrice: $(8 \times 8) - (4 \times 4) = 56 > 0$;
calcul de la **trace** (la diagonale de ma matrice) : $8 + 8 = 16 > 0$.

Les déterminant et la trace sont > 0 . Les deux valeurs propres de la hessienne sont positives. La $f(x,y) = x^3 + x^2y + xy^2 + y^3$ connaît donc un **point minimum autour duquel l'espace se contracte ou s'élargit**.

On voit combien la matrice hessienne dépend des coordonnées choisies du système, comme ∇ dépend toute dérivée seconde. Le lien avec le **tenseur hessien** ? La matrice hessienne est un tenseur de dimension 2. Le tenseur hessien est à n dimensions. De plus, le tenseur hessien, comme tout tenseur, n'est pas qu'un simple conteneur de données. C'est un outil entre tenseurs de transformations linéaires comme le produit scalaire (*dot product*) et le produit vectoriel (*cross product*).

¹ La matrice hessienne et le gradient d'une fonction de plusieurs variables, <https://www.youtube.com/watch?v=TeVbe-CH5Ng>

§. - 69.
L'apport vivifiant de la science
susceptible d'enrichir encore la théorie constitutionnelle

1/ Dans le cadre de la théorie de la relativité restreinte et générale :

- a) **L'espace du droit constitutionnel est plus courbé que plat**
- b) **Le principe de relativité galiléen (et d'inertie) revisité**
- c) **Le principe de relativité restreinte et sa traduction institutionnelle partielle**
 - i Un trousseau de voyage pour en comprendre le ressenti, 614*
 - ii Les différences de vitesse quant à la compréhension de la volonté générale*
 - iii Les composantes spatiale et temporelle du droit constitutionnel moderne*
 - iv Quel sens donné à $E = mc^2$ en dehors de la physique ?*
- d) **S'aventurer, à ses risques et périls, pour en parler en droit constitutionnel**
 - i Mise au point préalable*
 - ii L'entrée en relativité générale*
 - iii Les notions de base à voir ou revoir, 622*
- e) **La théorie de la relativité générale, et la théorie du pouvoir et de son pourtour (1)**
 - i Géodésique sans le dire*
 - ii Métrique et courbure « motus et bouche cousue »*
 - iii Le tenseur constitutionnel ne varie-t-il pas ?*
- f) **La théorie de la relativité générale, et la théorie du pouvoir et de son pourtour (2)**
 - i La stratégie radissonienne relookée de façon relativiste.*
 - ii L'équation d'Einstein nous souffle des choses en droit*
 - iii La gravité ralentit le temps*
 - iv La constante cosmologique ou l'énergie sombre agissant en sourdine.*

2/ Quid encore du « fil du temps » en droit constitutionnel ?

- a) **La question de la coexistence de la stabilité et de l'instabilité**
 - i La flèche du temps et l'irréversibilité, 635*
 - ii La querelle du déterminisme, 638*
 - iii Comment le droit constitutionnel participe au débat à sa façon*
- b) **La flèche du temps, véhiculant l'ordre et le désordre**
 - i Le flux du temps comme réalité physique*
 - ii Le flux du temps comme réalité psychologique*
 - iii Quel flux temporel en droit constitutionnel ?*

Le satellite Euclid, 643
 Annexes V à VIII, 643

◦

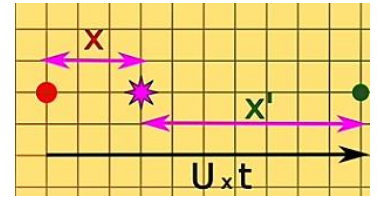
1/ Dans le cadre de la théorie de la relativité restreinte et générale

- a) **L'espace du droit constitutionnel est plus courbé que plat**
- b) **Le principe de relativité (et d'inertie) galiléen revisité**
- c) **Le principe de relativité restreinte et sa traduction institutionnelle partielle**
 - i Un trousseau de voyage pour en comprendre le ressenti*

La vitesse est relative, que l'on soit en repos, à vitesse nulle, ou en mouvement à vitesse constante. Elle doit toujours être définie par rapport à quelque chose. Le mouvement n'est rien en lui-même. Quand on observe un pareil phénomène, il faut toujours préciser **qui parle, et qui parle par rapport à quoi.**

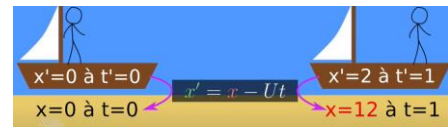
Pour profonde qu'elle soit, la pensée de Galilée n'en est pas moins ailée. Son principe de relativité établit une règle de passage d'un référentiel à l'autre lorsque les deux sont en mouvement rectiligne uniforme. La règle est la transformation de Galilée qui mixte déjà, à sa façon, le temps et l'espace.¹

Soient deux observateurs au même point sur une plage à l'instant 0. L'un avance en ligne de 2m par seconde. Un événement surgit à 3 m devant celui qui avance. Au bout de 5 secondes, cet observateur aura parcouru $2 \times 5 = 10\text{m}$. En conséquence, dans son référentiel, il y aura $10 - 3 = 7\text{m}$ auront été parcourus derrière lui. Soit donc la formule : si un référentiel se déplace à la vitesse U par rapport à un autre, on passe de la coordonnée x dans le 1^{er} référentiel à la coordonnée x' dans le 2nd avec l'équation : $x' = x - Ut$ (on retranche la distance parcourue Ut pendant le temps t).



Ex. d'application de cette formule. Si un observateur A marche sur le pont d'un bateau de 2m par seconde, en partant de $x = 0$ et $t = 0$, au bout d'une seconde, il sera à la position $x' = 2\text{m} = t = 1$. Le bateau se déplace aussi de 10 m par seconde par rapport au référentiel d'un observateur B sur une plage. Les coordonnées du référentiel du bateau sont l'événement « A démarre » à $x = 0$ et $t = 0$, et l'événement « A s'arrête » à $x' = 2$ et $t = 1$. A partir de ces deux événements, l'observateur A, situé sur le bateau, sera à même de calculer leurs coordonnées dans le référentiel de la plage indiquées infra.

Dans ce référentiel, l'observateur A aura parcouru au bout d'1 seconde, non pas 2 m, mais $2 + 10 = 12\text{ m}$ (à $t = 1$). Les vitesses s'ajoutent, $2 + 10 = 12\text{ m}$, i.e. de façon générale $v = v' + U$. Ce constat se déduit de la transformation de Galilée : $x' = x - Ut$



Le changement de référentiel, selon Galilée

Cependant, le principe de relativité de Galilée ne met nullement en cause l'invariance des distances. Un bâton sur le pont du bateau, ou sur la plage, paraîtra avoir toujours la même longueur., Il ne met pas non plus en cause celle des durées entre deux événements, comme deux coups sur un tambour sur le bateau ou sur la plage, les durées sont les mêmes. La simultanéité des événements ne vacille pas non plus : si les deux coups sont frappés en même temps, l'intervalle de temps entre les deux coups sera 0 dans les deux référentiels.

La loi de Newton, $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, s'avèrera, cependant, compatible avec le principe de relativité de Galilée. Sur le bateau qui avance de 10 m/s, on lance horizontalement une bille dont la vitesse est de 5m/s. Si l'on se contentait d'appliquer une autre loi, telle que $\mathbf{F} = m\mathbf{v}$, on obtiendrait $F = m \times 5$ dans le référentiel du bateau, mais, dans celui de la plage, on obtiendrait $F = m \times (10+5) = m \times 15$. Ce résultat est problématique pour une loi, puisque la somme des forces \mathbf{F} n'est pas égale dans les deux référentiels. En revanche, le principe fondamental de la dynamique, $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, joue dans les deux situations, car l'accélération, \mathbf{a} , d'une vitesse constante, \mathbf{v} , est la même dans les deux systèmes de coordonnées. Dans chacun d'eux, le résultat est bien : $F = m \times 15$.²

Au XIX^e siècle, le Ciel ne tomba sur la tête d'aucun savant, mais une idée vient ébranler l'édifice de la mécanique classique qui avait si bien prédit, jusqu'ici, le mouvement des planètes ou la trajectoire des boulets de canon. Maxwell réussit le tour de force d'unifier l'électricité, le magnétisme et la lumière. Ses équations impliquent, effectivement, que la lumière reste la même dans tous les référentiels. Alors que l'on acceptait l'idée que toute vitesse est relative, on se trouva nez à nez avec une vitesse constante, comme l'expérience de Michelson et Morley en apportera la preuve expérimentale. On ne détecta aucune variation de la vitesse de la lumière suivant l'orientation de la direction de la lumière par rapport au mouvement de la Terre. A l'évidence, cette vitesse jurait au regard de la relativité galiléenne.

Einstein partit de la considération théorique de Maxwell, non controuvée par l'expérience. Il chercha plutôt à amender la relativité galiléenne en dehors du cas où les référentiels sont en mouvement rectiligne uniforme les uns par rapport aux autres à de très faibles vitesses. Einstein ne considéra plus la transformation de Galilée : $x' = x - Ut$ et $t = t'$ pour de très grandes vitesses. Il recourut, dans son article fondateur de 1905 sur la relativité restreinte, à la transformation de Lorentz, énoncée par ce

¹ David Louapre, ScienceEtonnante, *La théorie de la relativité restreinte d'Einstein*, 13 septembre 2017, <https://www.youtube.com/watch?v=M86YM6QA4-M>

² *Ibid.*

dernier en 1904.¹ Dans cette nouvelle transformation, ces vitesses ne s'additionnent plus, mais se composent autrement en tenant compte de la forte contrainte imposée par l'invariance de la vitesse de la lumière.

La transformation de Lorentz inaugure un changement de référentiel, différent de celui de la transformation de Galilée.

(Annexe II)

La vitesse de la lumière est de 300.000 km/h. Supposons que l'on soit dans un train imaginaire allant à 200.000 km/h. Si l'on tire un rayon lumineux avec un laser allant à la vitesse de la lumière, il appert que la vitesse du rayon sera toujours de 300.000 km/h.

Les conséquences d'une telle invariance sont assez connues : tout devient relatif, y compris les notions de distance, de durée et de simultanéité entre deux événements. Il faut plus que jamais se poser la question : **qui mesure quoi ?** avant d'affirmer quoi que ce soit sur la préservation de ces grandeurs. Il n'y a pas pour autant, comme on dit parfois, contraction physique des longueurs (la vitesse les raccourcirait) et dilatation du temps. La mesure des distances et des durées dépend seulement des observateurs. Il ne faut que chercher les coordonnées des événements dans les différents référentiels.²

Une horloge donne des indications sur les rapports temporels de certains événements qui précisément arrivent, là où l'horloge se trouve. Mais naïvement, et avec une évidence pleine et entière, tout en percevant à chaque instant les faits qui se trouvent dans notre voisinage immédiat, nous étendons à tout l'univers notre notion du temps.

Nous croyons que cela a un sens objectif d'affirmer, que tel événement qui arrive n'importe où, a lieu « maintenant » (au moment où nous dirons ce mot). Nous croyons que la question de savoir si, de deux événements arrivés en deux points différents, l'un est antérieur ou postérieur, ou simultané de l'autre, possède en elle-même un sens objectif.³

(§54
1/iii)

Un exemple pour montrer combien notre compréhension intuitive du temps est bouleversée. Deux événements peuvent se produire en même temps pour une personne, mais à des moments différents pour quelqu'un d'autre. Ce constat est une conséquence subtile du fait que la lumière est constante : quel que soit le point de vue adopté, la vitesse de la lumière est la même, que l'on la regarde immobile ou en se déplaçant, qu'on la propulse à partir d'un point fixe ou un point en mouvement, on verra toujours la lumière se déplacer avec exactement la même vitesse du fait de son invariance.

(La lumière est une constante universelle, fondamentale, à la base de ma structure même de l'univers. Sa vitesse est prodigieuse par rapport à nous : 299 792 458 m/s. En l'espace seulement d'un clignement d'œil, un rayon lumineux aura parcouru 3 aller-retours Paris-New York.)⁴

Je suis, de mon point de vue immobile, au milieu d'un vaisseau spatial, avec en mains deux lampes torches, l'une dirigée vers l'avant, l'autre vers l'arrière. La lumière va se propager à la même vitesse (\approx 300.000 km/h) des deux côtés. Mais, pendant ce temps, le vaisseau se déplace vers l'avant. De mon point de vue, les deux événements (l'arrivée du rayon vers l'avant et vers l'arrière) sont simultanés.

Du point de vue d'un observateur sur Terre, la perception est différente. Le rayon lumineux envoyé vers l'arrière du vaisseau atteint cette extrémité avant qu'il n'atteigne l'autre extrémité du fait que le vaisseau se déplace vers l'avant. En clair, si l'on suppose qu'il est midi (12h) au milieu du vaisseau, l'arrière du vaisseau est légèrement dans le futur (en étant par ex. à 13h), alors que le devant du vaisseau est légèrement dans le passé (à 11h par ex.) Depuis la Terre, le rayon lumineux n'atteint pas les deux extrémités du vaisseau au même moment. Leurs horloges respectives sont désynchronisées, alors que pour le passager du vaisseau, il est 12h aussi bien à l'avant qu'à l'arrière du vaisseau.

De manière générale, lorsqu'un objet se déplace à grande vitesse par rapport à nous, on observe que l'avant de l'objet est en retard par rapport à l'arrière. Poussons plus loin l'étonnement quant au temps. Si l'on plaçait deux personnes de même âge (des jumeaux par ex.) aux extrémités du vaisseau, on

¹ https://fr.wikipedia.org/wiki/Relativité_restreinte

² David Louapre, ScienceEtonnante, *La théorie de la relativité restreinte d'Einstein*, video cit.

³ Hermann Weyl, *Temps, espace, matière*, op. cit., p.129. Nous soulignons.

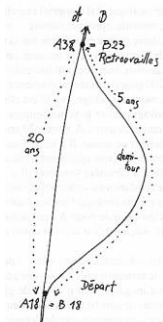
⁴ Alessandro Roussel, *La relativité restreinte*, ScienceClic, 1 nov. 2017, <https://www.youtube.com/watch?v=rNUwjlXR8fg>

observerait aussi que la personne à l'avant est légèrement plus jeune (sa montre indique 11h et non plus midi), et la personne à l'arrière légèrement plus âgée (sa montre indique 13h, et non plus midi)...¹

Le paradoxe des jumeaux précisément, A et B, du physicien Paul Langevin, est une autre façon d'illustrer l'idée. Les jumeaux ont tous 18 ans. Le jumeau B va dans l'espace sur un boulet, ou dans un vaisseau spatial, dont la vitesse, par rapport à la Terre, est de 85 % de la vitesse de lumière, c , soit $v = 0,85 c$ (255.000 km/s). Au bout de 5 ans, donc à 23 ans sur sa montre, il décide de faire demi-tour ; il met donc 5 ans de plus pour revenir. Le voyage aura duré 10 ans. Le jumeau B, voyageur, a maintenant 28 ans, et son frère, le jumeau A, sédentaire, a 38 ans sur Terre où 20 ans se sont écoulés sur sa montre. Cette histoire n'est pas une fable. C'est ce que prédit la relativité restreinte d'Einstein.

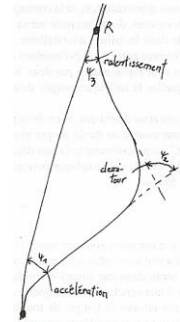
*Les faits expérimentaux les plus sûrement établis de la physique nous permettent d'affirmer qu'il en serait bien ainsi.*²

Le paradoxe des jumeaux de Langevin



Le jumeau A, qui est resté sur Terre, ne subit aucune force. Il est en mouvement rectiligne uniforme, alors que le jumeau B, ne l'est plus. Du début (« événement départ ») à la fin de l'expérience (événement « retour au point de départ »), il doit subir une décélération avant de faire demi-tour puis une accélération (comme pour le départ).

Cf. la fig. de droite où le jumeau B, voyageur, subit des accélérations (représentées par les angles ψ_1 décollage, ψ_2 demi-tour et ψ_3 atterrissage). Le jumeau A, sédentaire, n'en subit aucune ; il est inertielle ; il avance dans le temps sur une géodésique, mais il reste à la même coordonnée spatiale.



Les deux trajectoires relient les mêmes points d'espace-temps que sont le décollage et l'atterrissage en utilisant, toutefois, des trajectoires différentes. C'est toujours le temps de la trajectoire inerte, qui semble plus long. Là encore, *il n'y a aucun sens à déclarer qu'une des durées est « contractée » ou est « dilatée » par rapport à l'autre. Une durée propre s'est écoulée pour le jumeau A ; une autre durée propre s'est écoulée pour le jumeau B.*³

L'étonnement n'est pas moins eu égard à l'espace. Retournons dans notre vaisseau, et observons-le depuis la planète.

Comme il se déplace au cours du temps, et comme l'arrière est légèrement dans le futur, il est aussi légèrement en avance par rapport à son mouvement (l'arrière du vaisseau avance) ; de même, l'avant est légèrement en retrait par rapport au mouvement du vaisseau (son avant recule). La longueur *globale* du vaisseau se voit donc contractée, dans le sens de la vitesse. Elle semble se contracter, vue depuis la planète, mais, du point de vue du passager du vaisseau, ce n'est pas le vaisseau qui se contracte, mais la planète, car, selon ce point de vue, c'est elle qui se déplace et non le vaisseau.

L'ensemble des événements constitue l'espace-temps. C'est une structure à 4 dimensions (3 d'espace, et 1 de temps) qui résulte de l'unification du temps avec l'espace. A des vitesses ordinaires où l'espace et le temps semblent, à tout à chacun séparés, une telle contraction est minime, quasi-indéceltable.⁴

La durée propre – ou le temps propre – est celle qui est vécue, ressentie, éprouvée, mesurée par une horloge qu'on porte sur soi ou à côté de soi. Dans le cas des jumeaux, chacun suivait sa ligne d'univers, une géodésique pour le jumeau A qui reste sur Terre, et une autre ligne d'univers pour le jumeau aventurier B. Aucun n'a accès à la durée propre de l'autre s'il n'y participe pas lui-même. Pendant le voyage du jumeau B qui embarque son horloge, les deux jumeaux n'ont pas moyen de comparer leurs temps propres. La notion de temps propre a été introduite par Minkowski en 1908.

¹ *Ibid.*

² Paul Langevin, *La pensée et l'action*, Les éditeurs français réunis, Paris, 1950, p.73

³ M. Lachièze-Rey, *Voyager dans le temps. La physique moderne et la temporalité*, op. cit., pp.142-146.

⁴ Alessandro Roussel, *La relativité restreinte*, ScienceClic, video cit.

Cette durée est proche de la durée habituelle, sauf qu'elle est limitée à une région de l'univers : le long de chaque ligne d'univers.

La ligne d'univers d'un objet exprime l'essence de son existence, son identité, sa vie : la succession continue des points de l'espace-temps qu'il occupe : autrement dit, des événements qui constituent son histoire ; de la création à l'annihilation d'une particule ; de la naissance à la mort d'un observateur (dispersion des atomes qui le constituent)

Une « histoire » est une portion de la ligne d'univers d'un objet. Toute portion de ligne d'univers est une histoire possible.

La géodésique est la courbe qui minimise la distance dans une variété riemannienne, mais dans une variété lorentzienne comme l'espace-temps [où la transformation de Lorentz opère], il faut distinguer les cas

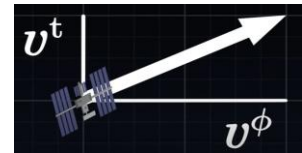
- entre des points spatialement liés (i.e. par des courbes genre espace), la géodésique est la courbe de longueur propre minimale :

- entre deux points temporellement liés (i.e. par des courbes de genre temps), la géodésique est la courbe de durée propre maximale.¹

On remarquera, chose aussi étonnante, que, dans l'espace-temps, tous les objets se déplacent à la vitesse de la lumière. On objectera que cette affirmation n'est vraie que pour les particules de masse nulle, comme les photons. Mais ce n'est pas ainsi qu'il faut analyser la situation, puisque notre astronaute dans l'univers se déplace à la fois dans l'espace et le temps. Comme il est suggéré supra,

every object travels through spacetime at the speed of light. Even a stationary object is moving at the speed of light, but it is moving only through time, and not space. [...] In fact, the speed of light is spread out between those two components, speed through space and speed through time. That is the reason we say that a photon is immortal and never ages, because it uses up all its speed in the space component, so it has none left for the time component.²

Un astronaute dans une station spatiale se déplace et dans l'espace et le temps, mais sa vitesse globale est égale à la vitesse de la lumière, c . Sur sa montre, il est à même de mesurer son temps propre t , l'altitude de la station depuis le centre de la Terre et les angles θ et ϕ . Si on suppose, en particulier, que la station décrit un cercle autour de la Terre, on peut s'affranchir d'une coordonnée spatiale, l'angle θ , car la station orbite dans un plan, ainsi qu'une autre, l'altitude r , qui reste constante tout au long de la trajectoire. D'où la distribution de la vitesse de la lumière entre les vitesses temporelle v^t et spatiale v^ϕ .



On comprend qu'*an object traveling more through space is traveling less through time*, et inversement.

En relativité restreinte, espace et temps sont entremêlés, plus que l'on ne le soupçonnait. Une autre conséquence de cette théorie est l'idée que l'énergie et la masse ne sont pas non plus distinctes comme en physique classique, Elles se trouvent inexorablement associées dans la plus célèbre équation, $E = mc^2$, que l'on comprend mieux en l'écrivant sous la forme : $m = E/c^2$, ou, encore, $\Delta m = \Delta E/c^2$. Si on fait varier l'énergie d'un corps d'une quantité ΔE , alors sa masse doit automatiquement varier d'une quantité ΔE divisée par c^2 . **Si l'énergie d'un corps varie, sa masse ne peut également que varier.**⁴

Mais de quelle masse, m , parle-t-on ? Celle dans l'équation de Newton, $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$? ou celle qui définit le poids d'un objet, selon la formule $\mathbf{F} = m\mathbf{g}$, avec \mathbf{g} désignant l'accélération de la pesanteur ?

Selon $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, plus un objet est massif, plus il est difficile de modifier son mouvement, de le freiner ou de l'accélérer, car la même équation, $\mathbf{a} = \mathbf{F}/m$, indique clairement que plus la masse est importante, plus l'accélération sera faible, et plus sa trajectoire rechigne à changer. Selon $\mathbf{F} = m\mathbf{g}$, plus un individu prend du poids, plus sa masse est élevée, et donc plus lourd apparaîtra-t-il sur la balance.

¹ M. Lachièze-Rey, *Voyager dans le temps*, p.70 et 119,

² <https://www.quora.com/Does-everything-travel-at-the-speed-of-light-in-spacetime>

³ Alessandro Roussel, *Relativité générale*, 8/8, ScienceClic, 2 nov. 2019, <https://www.youtube.com/watch?v=7zHoVF9m-xU>

⁴ David Louapre, ScienceEtonnante, *E = mc^2 et le boson de Higgs*, 29 sept. 2017, <https://www.youtube.com/watch?v=KIGfevsoS8Q>.

Dans $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, la masse est *inerte*. Dans $\mathbf{F} = m\mathbf{g}$, elle est *pesante*. $g \approx 9,8 \text{ m/s}^2$ (la vitesse augmente à chaque seconde de 9,81 m, ou de $(9,81\text{m/s})/1\text{s} = 9,81 \text{ m/s}^2 \approx 35 \text{ km/h}$). L'intensité de la pesanteur à la surface de l'astre est calculée à partir de la formule $g_A = Gm_A/r_A^2$, avec G représentant la constante de la gravitation universelle.

Comme $\mathbf{a} = \mathbf{F}/a$ et $\mathbf{F} = m\mathbf{g}$, on a : $\mathbf{a} = \mathbf{g}$. L'accélération d'un objet est égale au champ de la pesanteur. Cette égalité paraît miraculeuse, car, dans $\mathbf{F} = m\mathbf{g}$, la masse est la façon dont l'objet réagit au champ gravitationnel, et dans $\mathbf{a} = \mathbf{F}/m$, la masse quantifie l'inertie de l'objet. A priori, l'inertie n'a aucun lien avec la pesanteur (un gros rocher est plus difficile à déplacer qu'un petit rocher, même en apesanteur).¹ *On a longtemps accolé au mot « masse » ses deux acceptions, à la fois quantité de matière et coefficient d'inertie, d'où un embarras considérable pour énoncer l'idée que l'inertie croît avec la vitesse.*²

Ce mystère cache quelque chose de profond, éclairci par Einstein sous le nom de *principe d'équivalence*. On y reviendra quand on abordera sous peu la théorie de la relativité générale.

$M = E/c^2$, la masse d'un corps n'est rien d'autre que la mesure de la quantité d'énergie contenue dans un corps. Si l'on retire toute l'énergie d'un corps, l'on retire toute la masse. Mais une autre question se pose immédiatement aussi : de quelle énergie parle-t-on ?

Est-ce l'énergie cinétique, $E = \frac{1}{2} m\mathbf{v}^2$? Pas si simple, car si on se place dans le référentiel de l'objet, la vitesse par définition est nulle, $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, et pourtant le système possède toujours une énergie résiduelle. Il doit plutôt s'agir, pêle-mêle,

- d'une énergie cinétique interne (un corps est globalement au repos quand son centre de gravité ne bouge pas, mais ses composantes peuvent être animées par des vitesses si elles tournent par ex.) :
- d'une énergie potentielle, si le système ou ses composantes sont en interaction sous l'effet d'une certaine force. Un ressort comprimé possède une telle énergie ;
- d'une énergie thermique. Quand on chauffe un corps, on lui apporte de l'énergie qui se retrouve sous la forme d'une agitation microscopique des particules, une forme d'agitation cinétique microscopique.

*$E = \frac{1}{2} m\mathbf{v}^2$ nous dit que si l'on fait varier l'énergie d'un corps par l'un de ses moyens, on fait varier sa masse inerte. Une telle équation traduit bien le concept de masse à partir de celui de l'énergie.*³

S'il est question d'énergie cinétique, son expression en relativité restreinte diffère cependant de son écriture classique. Ce n'est plus $m\mathbf{v}^2/2$ mais $mc^2/(\sqrt{1 - v^2/c^2})$, mais à partir d'elle, on peut retrouver la classique. Comme l'écrit Einstein lui-même,

La [nouvelle] expression tend vers l'infini quand la vitesse v tend vers la vitesse de la lumière, c . La vitesse doit, par conséquent, rester toujours inférieure à c , si grandes que soient les énergies qu'on emploie à l'accélérer. En développant l'expression pour l'énergie cinétique en série, on obtient :

$$mc^2 + m v^2/2 + 3/8 m v^4/c^2 + \dots$$

*Quand $v^2/2$ est petit par rapport à 1, le troisième de ces termes est toujours petit par rapport au second, le seul considéré dans la Mécanique classique. Le premier terme mc^2 ne contient pas la vitesse ; il ne faut donc pas en tenir compte quand il s'agit seulement de savoir comment l'énergie d'un point matériel dépend de la vitesse.*⁴

- Vous n'évoquez pas l'espace de Minkowski qui a modélisé l'espace-temps de la relativité restreinte d'Einstein ?

- J'y arrive. J'aime bien votre rapidité d'esprit, mais laissez-moi souffler.

Hermann Minkowski fut un mathématicien brillant, rapporte-t-on. Il fut le professeur d'Einstein durant ses années à Zurich, mais, plus tard, à propos de l'article d'Einstein sur la relativité restreinte, il dira : *Je n'aurais jamais cru Einstein capable de cela*. Comme l'espace et le temps, la masse et l'énergie, la lucidité et l'aveuglement peuvent être étrangement mêlés. Il est difficile pour un enseignant de préjuger ce qu'est étudiant, apparemment en marge, peut devenir... L'Université ne fut

¹ David Louapre, ScienceEtonnante, *La relativité générale*, 27 sept. 2018, <https://www.youtube.com/watch?v=E5LvA8FHBxs>

² Jean-Marc Lévy-Leblond, *De la matière relativiste, quantique, interactive*, op. cit., Seuil, Paris, 2006, p.58.

³ D. Louapre, ScienceEtonnante, *$E = mc^2$ et le boson de Higgs*, video cit.

⁴ Albert Einstein, *La relativité* [1956], Payot, Paris, 1989, p.56.

pas davantage clairvoyante. *L'espoir d'Einstein de trouver un poste académique dans la même ville de Zurich fut douche par ses professeurs du fait de ses notes médiocres et de conflits personnels (il faut dire qu'il n'en disait pas du bien).* Il finit par obtenir un poste d'employé de l'Office fédéral suisse des brevets...¹

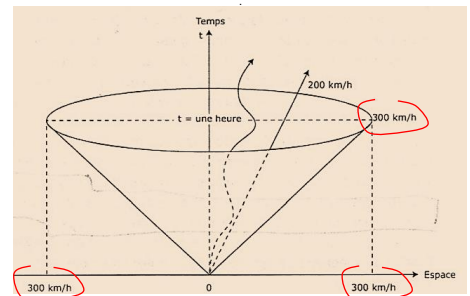
Cela dit, l'idée de Minkowski, comme géométrie sous-jacente de la relativité restreinte, rattrape ô combien la défectuosité de son jugement de professeur. Selon Roger Penrose, *en dépit des superbes intuitions physiques d'Einstein et des contributions fondamentales de Lorentz et de Poincaré, la théorie de la relativité restreinte ne fut complète qu'avec l'idée géniale et fondamentale de Minkowski qu'est l'espace-temps.*²

L'espace de Minkowski est un espace mathématique : 1/ affine (car il omet les notions d'angle et de distance), 2/ pseudo-euclidien (il présente des similitudes avec l'espace euclidien, tout en s'en distinguant par des propriétés distinctes), 3/ à quatre dimensions (trois d'espace et 1 de temps). Voilà une définition qui n'aidera guère le lecteur. Il n'est pas sûr que cette définition soit éclaircie si on ajoute que l'idée de Minkowski fut d'appliquer la transformation de Lorentz à un système de coordonnées tridimensionnel, animé d'un mouvement rectiligne uniforme. Un tel système constitue un référentiel dans lequel la variable temps devient un « temps propre » t , inséparable des autres variables.

Pour en avoir une idée visuelle, simplifions, comme Minkowski le proposa lui-même, cet espace-temps quadridimensionnel en le représentant en 2 D. L'une des coordonnées représentera l'espace doté de trois dimensions, l'autre sera l'axe du temps perpendiculaire à ce dernier. Cette simplification revient à substituer au système traditionnel (O, x,y) le système (O, espace, temps). Soit l'exemple concret d'un commentateur éclairant, dans lequel les vitesses sont largement inférieures à celle de la lumière :

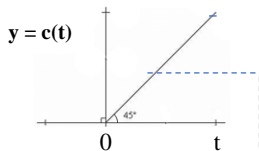
Si vous pilotez un hélicoptère dont la vitesse maximale est de 300 km/h, vous ne pourrez atteindre en une heure, d'où que vous partiez, que les endroits de l'espace-temps qui sont situés dans un rayon de 300 km.

*Cette portion accessible pourra être représentée par un diagramme qui ne peut avoir que la forme d'un cône dont l'enveloppe sera constituée par l'ensemble des trajectoires de l'espace-temps, dans le cas où vous volez constamment à 300 km/h. Si vous volez en dessous de cette vitesse, votre hélicoptère suivra une trajectoire de l'espace-temps qui se situera à l'intérieur du cône (reflétant fidèlement vos changements de vitesse et de direction). Si nous prenons un cas particulier, par ex. le fait de voler constamment à 200 km/h, votre trajectoire sera alors une ligne droite.*³



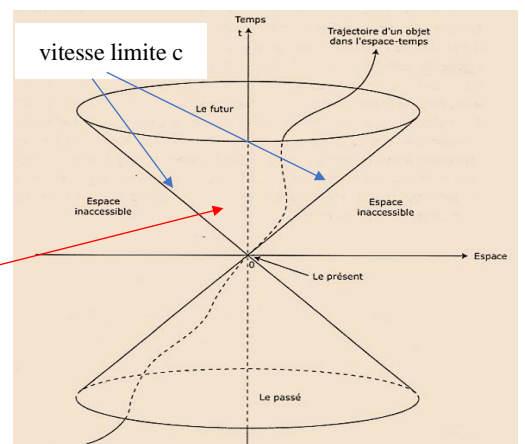
*Remplaçons la vitesse maximale de votre hélicoptère par celle de la lumière. Vous obtiendrez le même cône, mais, avec comme base, un cercle doté d'un rayon fixe de 300.000 km, communément appelé « cône de lumière ». Cette dénomination provient du fait même que les rayons lumineux ne peuvent aller au-delà de ce cône : cette partie sera physiquement inaccessible.*⁴

Dans ce cône, la vitesse de la lumière, 300.000 km/s, ne peut avoir qu'une pente $c = 1$ de la bissectrice.



Le temps ne peut pas exister en dehors de ce sablier

On complétera ci-contre le schéma en introduisant, sur une trajectoire, une relation causale entre le passé, le présent et le futur dans l'espace-temps. Impossibilité de remonter le temps.



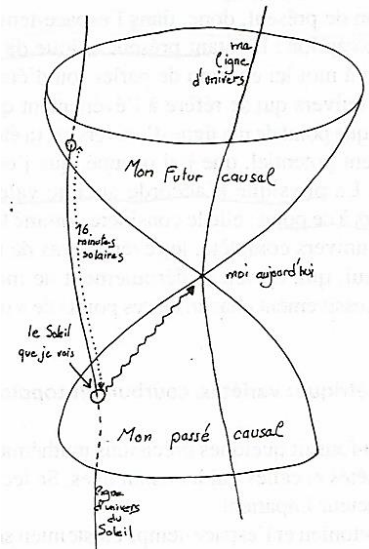
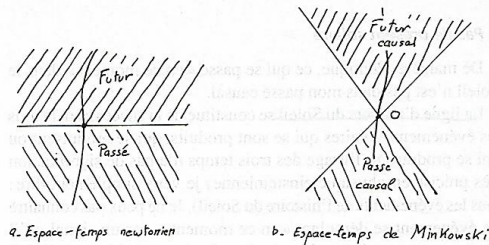
¹ Denis Le Bihan, *L'erreur d'Einstein. Aux confins du cerveau et du cosmos*, Odile Jacob, Paris, 2022, p.21 et 37. L'auteur est médecin et physicien. <http://serge.mehl.free.fr/chrono/Minkowski.html> ; https://fr.wikipedia.org/wiki/Albert_Einstein

² R. Penrose, *A la découverte des lois de l'univers*, op. cit., chap.17 : L'espace-temps, p.393.

³ G.L. Gavet, *Comprendre Einstein*, op. cit., Eyrolles, IParis, 2009, p.81.

⁴ *Ibid*

Dans l'espace-temps de Minkowski, les rayons lumineux sont des droites. Ils sont donc de courbure nulle. La trajectoire d'un objet dans cet espace peut, par ex., être celle de mon histoire personnelle passée, de mon présent, qui n'appartient qu'à moi, et de mon histoire personnelle future. Je dis bien *mon* passé, *mon* présent, *mon* futur, parce qu'un temps unique n'existe plus. Un temps commun à tous les observateurs a disparu. Il faut dire adieu « au présent » qui unit tout le monde. Contrairement au temps newtonien, entre l'ensemble des événements passés et celui des événements futurs, il n'y a plus une même frontière qui formerait le présent. Au plus, le présent se réduit à un point, à l'instant de ma propre histoire, ou celle de n'importe quel objet, que je désigne, en ce qui me concerne, en parlant.



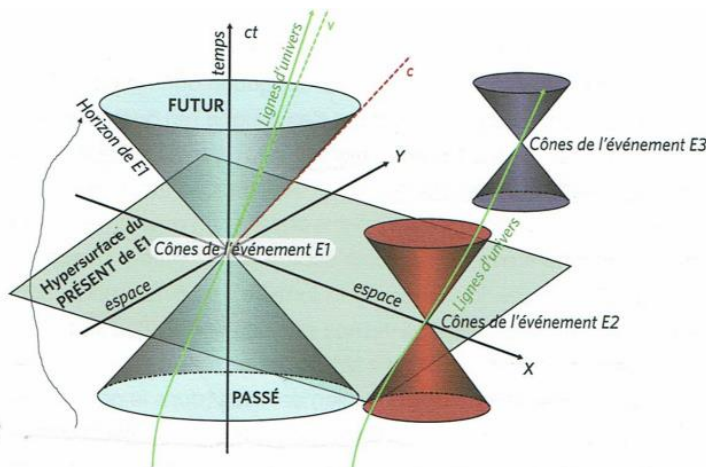
La ligne d'univers du Soleil, par ex., est l'ensemble de tous les événements de l'histoire du Soleil. Mais, « je » ne peux connaître un tel événement se déroulant « en ce moment », car un signal venant du Soleil ne me parviendra que dans 8 mn environ (le Soleil se situe à 8 mn-lumière de la Terre).

Seuls les événements solaires plus anciens que 8 mn sont dans mon passé causal, et seuls les événements solaires qui adviendront dans plus de 8 mn sont dans mon futur causal. La partie qui appartient à mon futur causal commencera dans 8mn aujourd'hui (à partir de ce « *now* » pour moi, j'émet une lumière susceptible d'atteindre le Soleil. D'où une durée propre (du point de vue du Soleil qui avoisine 16 mn (ce serait 0 en physique newtonienne)).¹

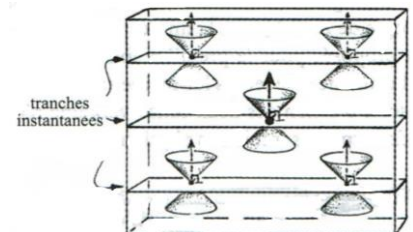
(Sentiment de malaise de certains lecteurs, malgré cette approche pédagogique. Le visage se crispe)

- Il existe quand même des « maintenant » de chacun qui correspondent aux « maintenant » d'autres observateurs, sinon il n'y aurait aucun lien entre les « maintenant » !

- Il n'y a plus de simultanéité absolue des mêmes « maintenant », mais il peut y avoir une simultanéité relative des « maintenant » différents. Sur le diagramme infra de gauche, aucun événement dans la région située à l'extérieur du cône ne peut influencer E ou être influencé par lui, mais peut être simultané à E. Cette région correspond donc au présent causal de E. En effet, les événements qui se produisent simultanément à cet événement ne peuvent pas être physiquement connectés (hypersurface du présent), car cela supposerait une vitesse de propagation infinie. Cette constatation est un point capital montrant que du fait de la vitesse finie de la lumière, l'espace ne peut pas être considéré comme un espace euclidien à trois dimensions où le temps et la simultanéité sont identiques pour tous les points, ce qui correspondrait à des cônes aplatis.²



Sur la fig. ci-contre (←), l'événement E3 peut succéder à l'événement E2. En revanche, aucune ligne d'univers ne peut lier les événements E1 et E2, quoiqu'ils appartiennent à la même « hypersurface du présent » (hypersurface = surface en dimension supérieure ; ex. un plan en 3D)



¹ M. Lachièze-Rey, *Voyager dans le temps*, pp.105-110.

² D. Le Bihan, *L'erreur d'Einstein. Aux confins du cerveau et du cosmos*, op. cit., pp.40-41.

Mais attention : si l'Univers constitue un feuilletage à 3+1 dimensions, cette représentation n'est pas qu'un simple empilement temporel de sections spatiales d'un *fibré*, dont la variété de base serait l'intervalle de temps, comme pourrait le suggérer la fig. de droite supra. Une telle façon de dessiner reviendrait à réintroduire un temps absolu en découpant la variété en tranches parallèles (ou plans tangents) pour chaque événement, **en respectant une orthogonalité commune qui serait une direction privilégiée en chaque événement**. Cette direction privilégiée nous donnerait un état stationnaire privilégié en chaque événement. Au final, nous aurions perdu le principe de relativité ! avertit Penrose qui a figuré à propos ce dessin erroné.¹ Il faut dire encore « adieu » au *now* absolu !

- ii Les différences de vitesse quant à la compréhension de la volonté générale
- ii Les composantes spatiale et temporelle du droit constitutionnel moderne
- iv Quel sens donné à $E = mc^2$ en dehors de la physique ?

d) S'aventurer, à ses risques et périls, pour en parler en droit constitutionnel

i Mise au point préalable. ii L'entrée en relativité générale

iii Les notions de base à voir ou à revoir

Il existe une manière de calculer, dans la géométrie de Riemann, les distances d'un point à un autre de l'espace. Nous sommes en présence d'une courbure, Son expression mathématique fait intervenir les coefficients d'une métrique, g . Un espace de Riemann est entièrement déterminé par la connaissance de cette métrique dont les coefficients ne sont pas constants, la géodésique riemannienne n'étant pas une droite au sens habituel. Entrent donc en scène les dérivées premières et secondes des coefficients qui changent avec l'endroit.

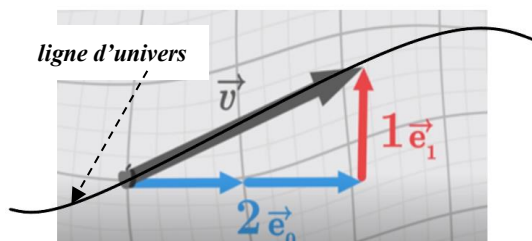
(§68
1/
a)iii)

Les coefficients sont rassemblés dans un tableau de nombres, une matrice, en l'occurrence un *tenseur* qui mesure la déviation exacte des vecteurs tangents sur l'espace courbe en question lors d'un déplacement. Quand on connaît la métrique et que l'on peut calculer les distances, on peut retrouver les chemins les plus courts et reconstruire la forme des trajectoires, les géodésiques sur lesquelles se déplacent tous les objets dans l'univers à la vitesse de la lumière :

*Les lignes d'univers de n'importe quel corps a tendance à tracer une ligne « droite » à travers les différentes dimensions de l'espace-temps. Cette propriété provient du caractère symétrique d'une telle trajectoire, qui n'a aucune raison de tourner dans un sens plutôt que dans un autre. Dès lors qu'on connaît sa vitesse à un instant, il suffit de transporter la flèche du temps le long d'elle-même pour former petit à petit le mouvement de l'objet. Sur la géodésique ; le vecteur vitesse ne tourne donc pas ; sa dérivée par rapport à son temps propre τ est un vecteur nul : $d\mathbf{v}/d\tau = \mathbf{0}$.*²

Géodésique

Evoluant à la vitesse de la lumière, le temps propre d'un objet est la distance qu'il parcourt dans l'espace-temps. En l'espace d'une seconde de temps propre, l'objet se déplace d'une seconde-lumière. L'on sait que le vecteur vitesse peut se décomposer, en chaque point de la ligne d'univers (par ex. d'un satellite), en vecteurs temporel (la flèche rouge) et spatial (la bleue).³



La valeur d'une composante (le vecteur multiplié par son vecteur de base) mesure la vitesse à laquelle augmente la coordonnée associée au cours du temps propre.

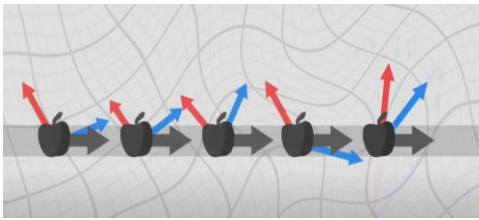
Le vecteur vitesse est la somme de ses composantes, multipliées par leurs vecteurs de base respectifs. Ici : $\mathbf{v} = 2 \mathbf{e}_0 + 1 \mathbf{e}_1$.

¹ M. Lachièze-Rey, *Voyager dans le temps*, pp.134-135 ; R. Penrose, *A la découverte des lois de l'univers*, op. cit., chap.17, p.393

² Alessandro Roussel, *Les mathématiques de la relativité générale, 3/8 : Géodésiques*, ScienceClic, 20 avril 2019, <https://www.youtube.com/watch?v=J3FYIgiVJuE>

³ A. Roussel, *Relativité générale, 1/8 : Vitesse spatio-temporelle*, ScienceClic, 13 avril. Sur YouTube aussi.

Les vecteurs de base peuvent varier à différents emplacements de la trajectoire, car la grille, i.e. le système de coordonnées choisi, n'est pas nécessairement régulière comme on le voit sur le fond gris de la *fig. supra*. Bien que le vecteur vitesse reste le même, ses composantes sur la grille vont également varier au fur et à mesure que se déplace l'objet considéré (une pomme se déplaçant dans l'univers par ex.). **Les variations des vecteurs de base ne dépendent que de la grille elle-même.** En combinant la variation des composantes du vecteur vitesse et la variation des vecteurs de base tout au long de la trajectoire, on aboutit à une expression qui comporte un certain nombre de dimensions traduisant les changements de la grille le long des coordonnées. Ces nombres sont **les symboles de Christoffel, Γ** .



Les symboles de Christoffel contiennent des informations sur la variation du système de coordonnées d'un point à un autre.

Ils symbolisent une **connexion métrique** qui permet d'évaluer l'angle ou l'évolution d'un champ de vecteurs en prenant en compte ses modifications intrinsèques et celle du système de coordonnées.¹ Selon Herman Weyl, *les composantes de la connexion métrique sont les symboles de Christoffel*.

] La notion de **connexion** a été entrevue à plusieurs reprises, notamment sur une sphère sans le dire (revoir, dans ce §69, les diagrammes en 1/a)-i). Mais il ne faut pas confondre *connexion métrique* et *connexion affine* qui relie, des espaces tangents, comme des plans tangents sur une sphère. La connexion affine ne définit pas une métrique ; ce n'est pas un tenseur. La notion de connexion est liée à l'idée de **transport parallèle** d'un vecteur constant le long d'une trajectoire (par ex. un méridien). Un tel transport requiert en effet une connexion. **Un transport parallèle n'est pas autre chose qu'une propagation sans déformation. [...] Les composantes d'un vecteur quelconque ne sont pas altérées quand ce vecteur subit un déplacement parallèle infinitésimal.**²

Le vecteur ne change pas de direction en restant parallèle à lui-même, comme sur *une ligne géodésique qui possède la propriété intégrale que chacune de ses portions est la plus courte ligne joint son origine à son extrémité. En sus, elle possède la propriété différentielle de conserver toujours la même direction.* Comme le mouvement géodésique est celui d'un objet, libre de toute autre force que la gravitation, H. Weyl en vient à dire, dans le même style, que *la connexion affine n'est que le champ de gravitation*.

[La géodésique en fait ne minimise pas toujours le trajet entre deux points ; elle l'extrémalise plutôt ; ce peut être un minimum ou maximum local comme pour le principe du moindre action, étudié au §68.)³

Les géodésiques sont donc les courbes dont le vecteur vitesse est transporté parallèlement à lui-même (**d'une fibre à l'autre dans un fibré**), et on appellera la quantité d'accélération de ce vecteur *la dérivée covariante du vecteur vitesse de la géodésique le long de lui-même*. Cette dérivée de la dérivée est nulle, exprimant le fait que la même mesure est appliquée en tout point d'une variété ou hypersurface lisse. Les vecteurs sont équipollents (parallèles, de même sens et de même longueur). Le champ est uniforme. Il n'est pas besoin de dériver le long d'une géodésique. A la différence d'une dérivée usuelle, **la dérivée covariante prend en compte la courbure** dans l'espace-temps de la relativité générale en transportant un vecteur d'un espace tangent à un autre en étant associée à une connexion.

*Les dérivées covariantes de la courbure sont les dérivées modifiées de la courbure.*⁴

(Question en raison d'une incompréhension)

- La dérivée covariante est-elle toujours nulle ? On peut imaginer des *highly-varying curvatures*...

¹ *Ibid.* ; https://fr.wikipedia.org/wiki/Symboles_de_Christoffel ; Hermann Weyl, *Temps, espace, matière*, op. cit., p.114.

² Hermann Weyl, *Temps, espace, matière*, op. cit., p.97 et 119.

³ *Ibid.*, p.111. Hermann Weyl préfère pour cette raison qualifier la géodésique de *courbe de longueur stationnaire* (p.117).

⁴ https://dournac.org/sciences/tensor_calculus/section24.html ; Jean-Pierre Bourguignon, *Transport parallèle et connexions en géométrie et physique*, https://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~faure/enseignement/geometrie_topologie_M2/article_bourguignon.pdf

- Elle est toujours nulle sur une géodésique, car, par définition, si vous voulez qu'on entre un peu dans le détail, la dérivée covariante est toujours perpendiculaire au plan tangent le long d'une géodésique. Autrement, le produit scalaire du vecteur tangent et du vecteur normal est nul. Mais, comme vous le pressentez, toutes les trajectoires ne sont pas des géodésiques. Il n'est pas besoin d'imaginer des (hyper)surfaces très tordues. Pensez à la sphère. Les méridiens sont des grands cercles assimilables à des géodésiques, mais les parallèles, en dehors de l'équateur, ne le sont pas. La dérivée covariante ne sera pas nulle les concernant, ce qui ne les empêche pas de concevoir une autre forme de connexion.

(retour au transport)

Voir, infra, l'écart créé par le transport parallèle dans un espace courbe. Le transport parallèle le long d'une courbe fermée ne laisse pas invariant un vecteur si la courbe n'est pas plane. A la différence d'une connexion affine, la dérivée covariante, dite aussi *dérivée d'un tenseur*, peut être décrite comme un tenseur dans un système de coordonnées donné, mais ce n'est pas un tenseur parce qu'elle n'est pas invariante par changement de coordonnées...¹

Soit un vecteur que l'on déplace gardant le vecteur dans la même direction de proche en proche le long d'une courbe fermée, comme une géodésique. Le vecteur retourne au point de départ.

Les deux vecteurs sont en général différents, sauf dans un espace plat comme celui de Minkowski. La différence entre les deux est exprimée par la connexion.



Pour être sûr que la notion de *connexion* soit bien comprise. On saisira visuellement que *la connexion exprime l'évolution d'un champ de vecteurs dans une direction particulière. Ou bien de façon équivalente, l'évolution d'un vecteur déplacé de façon continue le long d'une géodésique par rapport au déplacement parallèle. Ou encore, la connexion mesure la différence (localement) entre un champ de vecteurs quelconque et un champ de vecteurs transportés parallèlement.*²

Sur une surface courbe, le transport parallèle aboutit à créer, via une connexion, un décalage.

Les symboles de Christoffel sont un cas particulier de connexion en relativité générale (la connexion de Levi-Civita). Elle permet de passer d'un système de coordonnées curvilignes à un autre. Elle assure le déplacement, de manière « lisse » dans les points, entre les bases des espaces vectoriels tangents.³

Il est inutile de dire que nous nous n'avons pas besoin d'utiliser dans l'étude du droit ces symboles de Christoffel qui mesurent les dérivées partielles des vecteurs de base (il est question de *dérivées*, ou de variations infiniment petites, du fait d'un déplacement). On retiendra simplement l'idée que, malgré ces multiples variations, la trajectoire demeure parfaitement « droite », telle une géodésique qui pourrait être celle d'un avion allant de Paris à New York au-dessus de la sphère terrestre... Ce sont seulement les coordonnées sphériques qui varient ; leurs axes ne représentent pas les lignes droites sur la sphère. Les symboles de Christoffel mesurent l'écartement des coordonnées par rapport à ces lignes d'univers.

Ainsi, à l'aide des symboles de Christoffel, on est capable d'écrire *l'équation des géodésiques qui permet de calculer pour chaque composante de la vitesse son rythme d'évolution à mesure que s'écoule le temps propre.*⁴ L'équation des géodésiques décrit le chemin le plus court entre deux événements.

Métrie

¹ <https://www.techno-science.net/glossaire-definition/Derivee-covariante.html>

² <https://www.naturelovesmath.com/physique-mathematique/equation-champ-einstein/>. Nous soulignons.

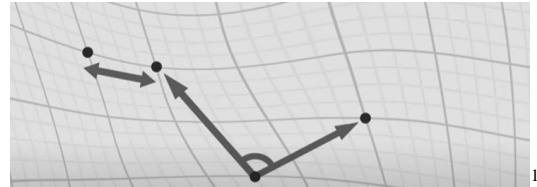
³ <https://forums.futura-sciences.com/physique/605704-symbole-de-christoffel.html>

⁴ Alessandro Roussel, *Les mathématiques de la relativité générale*, 3/8 : *Géodésiques*, video cit.

Jusqu'ici, on a défini la notion de temps propre, un temps possédant sa propre graduation, pour interpréter la ligne d'univers d'un objet comme un mouvement dans l'espace-temps. On a acquis l'espoir de prédire la trajectoire d'un tel objet qui se déplace sur sa ligne d'univers, à condition de connaître les symboles de Christoffel qui prennent en compte de la variation des vecteurs de base. Ces vecteurs permettent de mesurer les composantes temporelles et spatiales du vecteur vitesse de l'objet.

Cependant, un problème persiste : les coordonnées de la grille servant à repérer la position des objets (i.e. les points-événements de l'univers physique formant un continuum à 4 dimensions) ne donnent aucune information quant aux longueurs, angles réels, et aux durées propres qui séparent les objets.

En effet, le filet à mailles curvilignes, qui recouvre une surface non euclidienne (riemannienne, ou pseudo-riemannienne, à cause de l'espace-temps) comporte de multiples cases, **mais une case ne représente pas partout la même distance, ni même la même orientation ou angle.**

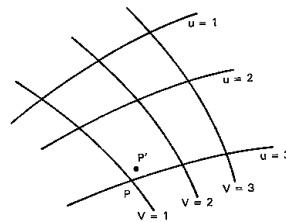


Notez que ce ne sont pas les lignes du quadrillage qui sont déformées, mais l'espace-temps lui-même, en rappelant 1/que la gravité est une déformation de l'espace-temps, que celle-ci est d'autant plus importante que le champ gravitationnel est intense, et donc 3/ que la masse qui produit la déformation de l'espace-temps est importante. Pour Einstein, le tenseur métrique (lorentzien puisque nous sommes dans l'espace-temps) sert de **potentiel de gravitation**. Ce sont les inhomogénéités du champ de gravitation qui accélèrent les particules.²

A partir des coordonnées de deux points, on désire exprimer la distance qui les sépare sur une surface non euclidienne, telle une sphère ou un ellipsoïde. Par chaque point de cette surface, passe une courbe u , et une seule, et une courbe v , et une seule. Les courbes u ne se coupent pas, ni les courbes v . Le long d'une courbe $v = cte$, seul u varie. Chaque point de la surface sera repéré par une valeur de u et une valeur de v qui sont les coordonnées de Gauss de ce point. Ainsi, sur la surface infra, les coordonnées de P son $u = 3, v = 1$, et ceux du pont P', infiniment voisin, sont $u + du, v + dv$, du et dv étant des quantités très petites.

Pour calculer la distance, on ne peut plus faire appel au théorème de Pythagore qui somme les carrés des écarts $(ds)^2 = du^2 + dv^2$. Ce théorème qui n'est vrai que si les cases de la grille forment un repère orthonormé, i.e. un repère doté d'une grille avec des carrés comme unités d'aire.

Il faut trouver une expression plus générale qui fonctionne quelle que soit la forme des cases. L'intervalle élémentaire (ou encore **la métrique**, g) doit être mesuré par la règle de Gauss, d'après laquelle $(ds)^2 = g_{11}du^2 + 2g_{12}dudv + g_{22}dv^2$, les quantités étant, en général, fonction de u et de v .



	du	dv
du	g_{00}	g_{01}
dv	g_{10}	g_{11}

Un tableau des coefficients sous forme de matrice décompose et éclaire cette nouvelle expression.³

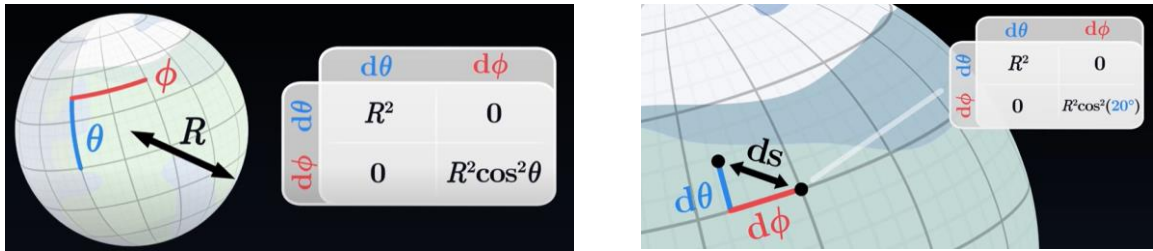
Bernhard Riemann généralisa la formule de Gauss, applicable seulement à deux dimensions, à un espace courbe à n dimensions. Chaque paramètre de Gauss est généralisé par $g_{11}, g_{12}, g_{23}, g_{34}$, soit g_{ij} (avec i et j variant de 1 à 4).⁴

Tel est le **tenseur métrique** (ou plus simplement la métrique) qui permet d'exprimer la norme du vecteur vitesse en relativité générale en utilisant la formule $(ds)^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$. Pour ce faire, on remplace les écarts des coordonnées par les composantes temporel et spatial du vecteur vitesse, soit $||\mathbf{v}'||^2 = g_{\mu\nu} v^\mu v^\nu$. En se souvenant que la norme de la vitesse est toujours égale à celle de la lumière, on obtient l'équation plus précise : $c^2 = g_{\mu\nu} v^\mu v^\nu$.

La variation du tenseur métrique (les dérivées le long des coordonnées) fournit une information nécessaire pour exprimer les coefficients de Christoffel. Le lecteur qui veut connaître la formule la

¹ A. Roussel, *Relativité générale, 4/8 : Métrique, ScienceClic, 27 avril 2019*, <https://www.youtube.com/watch?v=NVOEnu2X71s>
² Jean-Pierre Bourguignon, *Transport parallèle et connexions en géométrie et physique*, art. cit.
³ <https://couleur-science.eu/?d=564f9d--comprendre-la-gravitation-en-relativite-generale> ; S. Mavridès, *La relativité*, op. cit., pp.111-112.
⁴ G.L. Gavet, *Comprendre Einstein*, op. cit., Eyrolles, Paris, 2009, p.92

trouvera dans les livres spécialisés. Qu'il sache cependant que cette formule est simplifiée en choisissant le bon système de coordonnées, celui dont les axes sont perpendiculaires entre eux comme les parallèles et les méridiens sur la surface du globe terrestre. La latitude, $d\theta$ (ex. 20°) et la longitude, $d\phi$, aident à calculer le tenseur métrique en n'importe quel point de la sphère de rayon R .¹

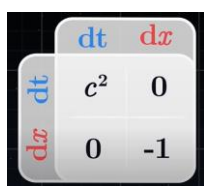


*La connexion respecte la métrique riemannienne., ce qui signifie que le transport parallèle conserve l'orthogonalité définie par la métrique. Si deux vecteurs sont orthogonaux pour la métrique choisie, alors les déplacer sur la surface par transport parallèle conservera leur orthogonalité.*²

Le tenseur métrique ne donne accès qu'à de très petites distances. Pour les grandes, il faut calculer le tenseur métrique à plusieurs endroits (via une intégrale d'une infinité de petites distances, $S = \int ds$), car la forme des cases peut, on l'a dit, varier le long du trajet que l'on souhaite mesurer. Il suffit d'additionner chaque composant du tableau, multipliée par les écarts des coordonnées pour évaluer $(ds)^2$.



Le tenseur métrique n'est pas le même partout sur la sphère ; il dépend en particulier de la coordonnée de latitude dans un espace-temps vide comme celui de Minkowski (par ex. le tenseur métrique un satellite perdu dans le vide dépend pas des coordonnées ; il est le même sur toute la grille.= L'espace-temps de Minkowski est plat. Il ne présente aucune courbure. La géométrie demeure *ne varietur*. Deux objets qui se déplacent, de façon parallèle, ne vont jamais se rencontrer,



En particulier, comme le tenseur métrique ne varie pas sur la grille, tous ses dérivées sont nulles, ainsi que tous les symboles de Christoffel. Les composantes du satellite ne variant pas, le satellite va se déplacer de façon constante à travers ses coordonnées.

Telle est la métrique de Minkowski. *La présence du -1 dans la métrique rappelle que les dimensions de d'espace t de temps sont fondamentalement opposées.*³

Le tenseur métrique, g , permet ainsi de déterminer la distance entre deux points de l'espace, même lorsque celui-ci est courbe, mais **localement, la façon de mesurer cette distance varie**. Alors qu'en géométrie euclidienne, la métrique ne dépend que du point particulier considéré, et que l'on peut travailler avec un étalon universel (cf. le théorème de Pythagore), **le tenseur métrique définit une sorte d'étalon infinitésimal et local de l'espace**. [...] *Dans le cadre de la relativité, l'espace inclut une dimension temporelle, ce qui rend la métrique particulière ; on parle parfois de pseudo-métrique.*⁴

*Dans les coordonnées géodésiques, la métrique riemannienne est osculatrice à la métrique euclidienne.*⁵

¹ A. Roussel, *Relativité générale*, 4/8 : Métrique, video cit.
² <https://www.naturelovesmath.com/physique-mathematique/equation-champ-einstein/>
³ Ibid.
⁴ Daniel Juste,s, « Des solutions remarquables de l'équation d'Einstein », in Tangente, *Les équation de la physique moderne*, edit. POLLE, Paris, 2020, p.87-88. Nous soulignons.
⁵ Jean-Pierre Bourguignon, *Transport parallèle et connexions en géométrie et physique*, art. cit.

C'est à partir des propriétés de la métrique, qui mesure, répétons-le, les distances, les angles et les durées dans l'espace-temps, que se définit la courbure de cet espace-temps. La courbure en découle.

Courbure

Jusqu'ici nous n'avons fait aucune supposition quant à la forme de l'espace-temps. Par commodité, nous nous sommes contentés de l'imaginer comme un plan. Or, comme il vient d'être vu en évoquant la sphère, **la grille d'analyse de l'espace-temps peut faire l'objet d'une déformation**. Comme l'écrivirent Einstein et Infeld, à l'adresse du grand public, *chacun sait [sur la sphère terrestre] que la longitude 0° à 10° sur l'Equateur n'est pas la même chose que celle de 0° à 10° près du pôle Nord*.

Nous quittons donc l'espace-temps sans courbure de la relativité restreinte en compagnie encore d'Einstein qui continue de faire appel à des images intuitives pour se faire comprendre. Avec lui, nous quittons concrètement, la construction urbanistique des rues et des avenues à l'américaine pour celle plus variée des rues et avenues d'une ville européenne qui ne sont guère droites et équidistantes.

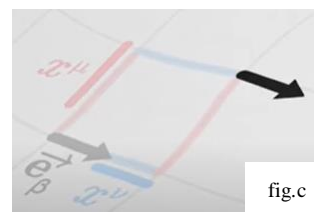
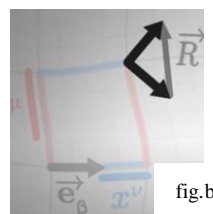
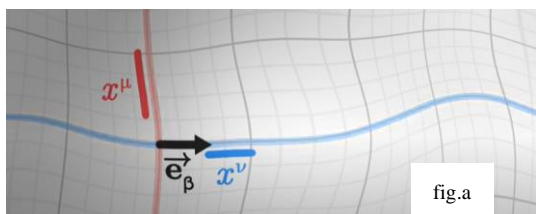
Nous ne pouvons pas, dans la théorie de la relativité générale, nous servir de la structure de barres parallèles et perpendiculaires les unes aux autres et d'horloges synchronisées, comme le système de coordonnées d'inertie de la théorie de la relativité restreinte [...] Les mesures réelles ; qui exigent des règles rigides et synchronisées, ne peuvent être effectuées que dans les systèmes d'inertie locaux.¹

Dans un système de coordonnées arbitraire, c'est autre chose. La courbure se présente sous la forme d'une grille déformée. Comme nous l'avons observé sur la sphère en effectuant un transport parallèle, le chemin que suit, sur une surface courbe, le vecteur influence plus ou moins son orientation finale.

(§68
1/
a)iii)

Nous avons déjà dit des choses sur la courbure. Pour en avoir une idée plus précise, mathématisons davantage, mais sans excès son concept au regard de notre objectif d'étude en droit constitutionnel.

Sur une surface courbée, choisissons un des vecteurs de base, e_β , et deux coordonnées, μ et ν , le long desquelles on déplace le vecteur. (fig.a) Ces coordonnées peuvent être les mêmes ou différentes. Comme sur une sphère au moyen du transport parallèle, on obtient un vecteur R qui mesure la différence entre deux images. (fig.b). Si la surface avait été plate, $R = 0$, soit une seule image (fig.c)



Le vecteur R s'exprime comme la différence entre deux vecteurs, dérivés deux fois, puisque, en le déplaçant, on fait varier le vecteur initial,

- d'une part, le long des coordonnées μ puis ν (le vecteur de base e_β , suit parallèlement la direction de μ puis de ν),

(d'autre part, le long des coordonnées ν puis μ le vecteur de base e_β , suit parallèlement la direction de ν puis de μ).

Nous obtenons une certaine expression algébrique combinant les variations des composantes et celles des vecteurs de base (on prend aussi en compte l'autre vecteur de base, e_α). Dans la même expression, nous décomposons les vecteurs de base en symboles de Christoffel, sachant que ces coefficients mesurent les variations des vecteurs de base qui traduisent les changements de la grille le long des coordonnées. (voir dessus *Géodésiques*).

¹ Einstein, Infeld, *L'évolution des idées en physique* [1936], op. cit., Flammarion, Paris, pp.220-221.

En opérant ainsi pour chaque combinaison de vecteurs et de coordonnées (Il y en a $4 \times 4 = 16$), nous finissons par construire **le tenseur de courbure de Riemann** qui caractérise entièrement la courbure d'une surface dans toutes les directions.¹ *Le tenseur de Riemann donne tous les courbures sectionnelles, et mesure la courbure comparant les vecteurs tangents (via le transport parallèle).*

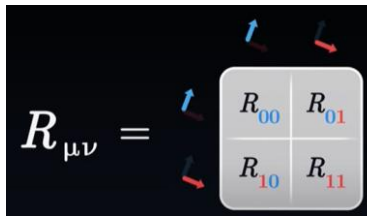
Cf. exemples de courbure sectionnelle. *Each measure convexity and concavity in a specific direction.*²



Comprenons ce que signifie, en définitive, la courbure. Il y a le sens géométrique, et il y a le sens physique. Pour le dire plus clairement : *Géométriquement, la courbure exprime la « forme » de l'espace-temps. Elle est exprimée par un objet mathématique que l'on appelle le tenseur de courbure. Sa valeur varie en général d'un point à un autre. Physiquement, elle représente le champ de gravitation.*³ Le tenseur de courbure (de Riemann) permet de calculer notamment l'accélération relative entre deux géodésiques « très proches » qui sont, au départ, parallèles.

Le tenseur de Riemann est l'outil le plus complet pour décrire une géométrie courbe. Il s'exprime lui-même au moyen des symboles de Christoffel et il fait intervenir des dérivées partielles secondes continues des éléments du tenseur métrique (qui dit dérivées secondes, dit physiquement accélérations locales). Cet outil est, cependant, très lourd à manipuler (dans un vrai espace-temps à 4 D, ce tenseur possède 256 composantes ...). Pour simplifier les calculs, on recourt au **tenseur de Ricci** qui se présente comme un tableau avec une ligne et une colonne pour chacune des coordonnées.⁴

(§68
1/
a)iii)



La simplification consiste à recourir à **des moyennes directionnelles**. Le tenseur de Ricci donne la moyenne des courbures sectionnelles dans une direction déterminée. Cette déformation de l'espace-temps fait penser à **une variation du laplacien, - une moyenne des voisins...**, - propageant par ex. la chaleur dans l'espace.

Le tenseur de Ricci est d'ailleurs considéré comme le **laplacien du tenseur métrique** riemanien, g , traduisant la courbure de l'espace-temps. On rencontre même parfois, dans la littérature scientifique, l'expression de *tenseur laplacien*.

(rappel)

Le **laplacien**, est l'opérateur différentiel, défini par l'application de l'opérateur gradient ∇f (vecteur composé de dérivées partielles), suivie de l'application de l'opérateur divergence qui additionne ces dérivées partielles. Intuitivement, **il combine et relie la description statique d'un champ (décrit par son gradient) aux effets dynamiques (la divergence) de ce champ dans l'espace et le temps.**

$$\Delta\phi = \vec{\nabla}^2 \phi = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla}\phi) = \text{div}\left(\overrightarrow{\text{grad}} \phi\right)$$

En somme, le laplacien est la divergence du gradient. Il donne une information sur la courbure locale en précisant combien elle diverge d'un plan.. Le laplacien est nul, ou assez petit, lorsque la fonction varie sans à-coup. Il n'est pas inutile de rappeler que, *physiquement, le laplacien mesure la différence entre la valeur de la fonction en un point, et sa moyenne autour de ce point. Les fonctions dont le laplacien est nul sont dites harmoniques : la moyenne autour d'un point vaut la valeur en ce point.*⁵

(§47
2/iv)

¹ A. Roussel, *Relativité générale, 5/8 : Courbure*, 18 mai 2019, , https://www.youtube.com/watch?v=_iZ9cl0CCA8

² <https://www.naturelovesmath.com/physique-mathematique/equation-champ-einstein/> ; <https://pro.arcgis.com/en/pro-app/latest/tool-reference/3d-analyst/how-surface-parameters-works.htm>

³ Marc- Lachizèze-Rey, *Voyager dans le temps.*, op0 cit., p.92

⁴ Cécile Huneau, « Les énigmes de la relativité générale », op. cit., p.84 ; A . Roussel, *Relativité générale, 5/8 : Courbure*, video cit.

⁵ Cécile Huneau, « Les énigmes de la relativité générale », in Tangente, *Les équations de la physique moderne*, n°HS 71, juillet 2019, p.18 ; Peter Topping, *Lectures on the Ricci flow*, March 9, 2006, <https://www.bibmath.net/dico/index.php?action=affiche&quoi=/1/laplacien.html> https://homepages.warwick.ac.uk/~maseq/topping_RF_mar06.pdf ; https://fr.wikipedia.org/wiki/Opérateur_laplacien ;

(retour au tenseur de Ricci)

Sachant que l'espace-temps n'est pas tant un plan qu'un volume que déforment des masses à l'intérieur, on considère, toujours de façon intuitive, que **le tenseur de Ricci mesure la variation de volume de la surface lorsqu'on se déplace le long de sa courbure.**



The Ricci tensor represents how a volume in a curved space differs from a volume in Euclidean space.

In particular, the Ricci tensor measures how a volume between geodesics changes due to curvature.¹

Sur une sphère par ex., le volume que renferment deux géodésiques parallèles va diminuer dès lors que l'on se déplace sur la surface. (fig.a,b,c) Les différentes composantes du tenseur de Ricci mesurent les variations de volume selon les différentes directions. (fig.d). Mais, dans le cas d'une géométrie régulière comme la sphère, la courbure est la même dans toutes les directions en raison des plans de symétrie (la sphère est invariante par rotation par rapport au centre). On peut alors décrire la courbure par un seul nombre, la **courbure scalaire**, qui caractérise la courbure selon toutes les directions.



fig.a

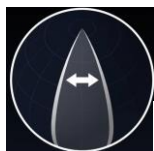


fig.b

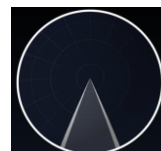


fig.c



fig.d

Résumons ce qui advient sur une sphère. Le tenseur métrique n'est pas le même partout ; il dépend en particulier de la coordonnée de la latitude. La déformation de l'espace-temps se propage. Deux géodésiques ont tendance à se rapprocher ou à s'éloigner. Enfin, la courbure scalaire est d'autant plus faible que le rayon de la sphère augmente, car plus la sphère est grande, plus sa surface est plate.²

Un espace-temps qui devient plat est décrit par la métrique de Minkowski. Cet espace plat, i.e. sans courbure, est un espace vide, sans masse. Les composantes du tenseur métrique ne dépendent plus des coordonnées ; elles ne varient pas sur la grille considérée. Par conséquent, leurs dérivées sont nulles, ce qui implique que les coefficients de Christoffel le sont aussi. Les tenseurs de Riemann, de Ricci et la courbure scalaire valent tous zéro comme la masse qui vaut 0 si elle devait être considérée. Des objets qui se déplacent dans un tel espace-temps de façon parallèle ne vont jamais se rencontrer.

Il s'avère, toutefois, que l'espace-temps de Minkowski est un cas particulier de la relativité générale. Le principe de relativité restreinte, qui le caractérise, demeure, mais ce principe doit se conjuguer avec l'idée d'un espace-temps gauchi ou recourbé par les masses qu'il contient (planètes, étoiles, etc.). Ce fait est par ex. patent pour une planète comme Mercure la plus proche du Soleil. Bien qu'elle soit la moins massive du système solaire, l'excentricité de son orbite elliptique est la plus élevée dans ce système si on la compare à une orbite circulaire.³ Le tenseur de Ricci annonçait la nouvelle en décrivant la déformation de l'espace-temps, de son volume, due au champ de gravitation.

Nous avons déjà quitté la cinématique avec le tenseur de Ricci qui incarne et manifeste la dynamique.

L'équation d'Einstein

Depuis la relativité restreinte, la gravitation, incorporée à la géométrie de l'espace-temps, n'est plus une force extérieure comme chez Newton. *Elle a désormais un support bien défini : la courbure même de l'espace-temps. Celle-ci joue le rôle de l'insaisissable éther gravitationnel de Newton. Mieux*

¹ A. Roussel, *Relativité générale, 5/8 : Courbure*, video cit. ; *The Ricci Tensor: A Complete Guide With Examples*. Sur internet.

² A. Roussel, *Relativité générale, 5/8 : Courbure*, video cit.

³ [https://fr.wikipedia.org/wiki/Mercure_\(planète\)](https://fr.wikipedia.org/wiki/Mercure_(planète))

encore, la gravitation s'identifie à cette courbure : ainsi, les planètes en orbite autour du Soleil ne font que suivre la courbure qu'il engendre.

On ne parle plus ainsi d'interaction à distance, et encore moins d'interaction à distance instantanée, car ne n'est ni le temps, ni l'espace qui sont absolus, mais la vitesse limite de la lumière, c . *Un objet (comme le Soleil) déforme l'espace-temps autour de lui. Cette déformation se propage (à la vitesse c), [...] Plusieurs objets, placés au même endroit, éprouvent la même déformation de l'espace-temps.*¹

Avant même Einstein, des notions, préparant la théorie de la relativité générale, avaient été pressenties par des précurseurs comme Poisson, au début du XIX^e siècle et Clifford vers la fin du même siècle.

(§54
Ann.V)

On a déjà parlé de Siméon Poisson qui avait élaboré, en France, à partir des lois de Newton, une relation entre les variations spatiales d'un champ gravitationnel et la masse d'un corps qui en était l'origine. Poisson devinait l'équation : **courbure = masse**, mais, à la différence d'Einstein, son équation algébrique supposait une perturbation instantanée. Le temps (et la simultanéité) demeurerait absolu.

En Angleterre, William Clifford eut également une prémonition de la relativité générale. Sensible aux lignes de force magnétique de Faraday, il développa l'idée d'un possible *curvature of space*, suggérant *that matter is only a manifestation of curvature in a space-time manifold*.

Dans son livre sur la relativité restreinte et générale, Hermann Weyl, au XX^e siècle, a cru bon de lui rendre hommage en écrivant, dans les mêmes termes, que *Faraday avait exprimé clairement l'hypothèse que le champ ne postule pas la matière, mais qu'au contraire la matière se réduisait à des singularités du champ*. Et d'ajouter : Clifford exprimera la même idée dans la *Fornightly Review* : « *The theory of space-curvature hints a possibility of describing matter and motion in terms of extension only* ». ²

Si Clifford évoque explicitement **the bending of space**, assorti d'irrégularités, dû à la présence d'une masse, des connaisseurs répliquèrent que sa prescience connut aussi des limites en restant trop dans la généralité pour être prédictive. Dans l'algèbre de Clifford, on y retrouve pourtant des notions de courbure et de transport parallèle. Clifford s'appuyait sur les résultats de Riemann.

Nous avons assisté en Angleterre, le 6 juin 1995, à une conférence au Rutherford College de l'Université du Kent à Canterbury, intitulé *A celebration of two lives, Willima and Lucy Clifford*, le Au cours de cette journée, Roger Penrose est intervenu, diagrammes à l'appui...

En arrière-fond de l'espace-temps, à l'origine même de sa courbure, il y aurait donc le contenu matériel (et énergétique) de l'univers qui en déterminerait les propriétés. Mais comment relier la quantité de courbure à la quantité de matière qui courbe l'espace-temps ? Plus il y a de la matière, plus il y a de la gravité, plus il doit y avoir de la courbure. On a toujours envie d'écrire une équation du genre courbure = masse, en imaginant a priori une relation d'influence proportionnelle entre masse et courbure. Plus la déformation est forte, en présence par ex. d'un astre massif, plus on s'éloigne du plan euclidien

Après moult tâtonnements, Einstein est parvenu à concevoir une équation plus compliquée Schématiquement, $G = T$, où G désigne le tenseur dit d'Einstein, reposant sur une métrique, et T , le tenseur énergie-impulsion, impliquant la masse et l'énergie et leurs flux respectifs. L'équation d'Einstein réussit à fixer la manière dont la courbure dépend du contenu en matière de l'espace-temps. Cette équation prend la forme suivante :

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} \quad 3$$

¹ M. Lachièze-Rey, *Au-delà de l'espace et du temps. La nouvelle physique*, op. cit., p.121 ; *Einstein à la plage*, op. cit., pp55-56

² *William Kingdom Clifford, The unseen universe, in Lectures and essays [1901], Ulan Press, 1923, p.283 et290 ;*

https://en.wikipedia.org/wiki/William_Kingdon_Clifford; Hermann Weyl, *Temps, espace, matière*, op. cit., p.111 et 147.

³ https://fr.wikipedia.org/wiki/Equation_d'Einstein

où $R_{\mu\nu}$ est le tenseur de Ricci, R la courbure scalaire, $g_{\mu\nu}$ le tenseur métrique de signature (+,-,-,-), Δ la constante cosmologique, $T_{\mu\nu}$ le tenseur énergie-impulsion, et K la constante gravitationnelle d'Einstein, valant $8\pi G/c$, qui détermine l'intensité de la gravitation de l'univers.⁴ Dans cette équation, le tenseur d'Einstein est très compliqué, car c'est une fonction non linéaire de la métrique, du fait que le tenseur de Ricci et la courbure scalaire en dépendent.

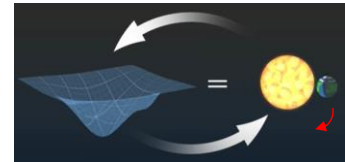
(§62^{bis}
3/
b)-i)

L'équation d'Einstein met en équilibre la structure géométrique et la répartition de la matière et d'énergie au sein de l'espace-temps. Les parties constitutives de cette équation [les équations d'Einstein] sont des tenseurs dont on peut prendre les formes contra- ou covariantes de la métrique choisie
[...] Les équations d'Einstein font partie des équations aux dérivées partielles non linéaires, tout comme les équations de Navier-Stokes. **Le caractère non linéaire implique que des perturbations tout à fait régulières peuvent conduire à la formation de singularités** [celles par ex. cachées à l'intérieur d'un « trou noir »].¹

Ici encore, il faut se méfier de l'adage : *post hoc, ergo propter hoc*, i.e. à la suite de cela, donc à cause de cela. Autant il faut ajouter un terme intermédiaire, la courbure ou la déformation de l'espace-temps, entre un objet et sa trajectoire, autant il ne faut pas non plus ignorer la dialectique de va-et-vient entre la courbure de l'espace-temps et le contenu de l'univers

En effet, les deux côtés de l'égalité d'Einstein sont intimement liés.

Le contenu de l'univers va influencer la courbure de l'espace-temps, et, réciproquement, la courbure de l'espace-temps va, à son tour, influencer le mouvement et l'évolution des astres [des planètes comme la Terre autour du Soleil, ou des astres comme le Soleil].²



On comprend que résoudre une telle équation soit pratiquement impossible sans faire des approximations numériques et des simulations. Il existe cependant des solutions exactes dans le cadre de certaines métriques riemanniennes. Il faut choisir la bonne, comme il faut, en relativité générale, avoir la "bonne" connexion, qui conserve la courbure, en la transportant parallèlement (la courbure de la variété riemannienne se définit à partir d'elle).

(Sur la bonne métrique : il n'y en a pas qu'une métrique riemannienne g ; pensons à nouveau à la formule de Gauss : $(ds)^2 = g_{11}du^2 + 2g_{12}dudv + g_{22}dv^2$, généralisé à n dimensions par Riemann ; *Different instances of g_{ij} define different Riemannian geometries on the manifold [variétés]*.³

(Annexe IV : métrique riemannienne et pseudo-riemannienne)

La métrique de Schwarzschild fut la première dans le genre. Elle s'interprète comme décrivant le champ gravitationnel à l'extérieur d'un corps isolé, à symétrie sphérique, statique (sans rotation), sans charge électrique ni propriété magnétique, et entouré de vide. Cette masse peut être une étoile, une planète ou un trou noir de Schwarzschild.⁴

- Vous n'avez rien dit de précis concernant le tenseur énergie-impulsion.

- Pas encore, c'est vrai. Le tenseur dit énergie-impulsion décrit la répartition énergie-masse dans l'espace-temps. Nous avons évoqué allusivement des flux d'énergie. Il s'agit de mouvements dont l'existence traduit des perturbations dans l'univers.

*Ces perturbations peuvent être de la matière (les masses contiennent de l'énergie, d'après la formule $E = mc^2$). Mais d'autres facteurs contribuent aussi au contenu énergétique de l'univers comme le champ électromagnétique, ou l'énergie sombre qui a la propriété d'être négative. Sous toutes ces formes, l'énergie va se déplacer dans l'espace-temps à la façon d'un fluide.*⁵

¹ Cécile Huneau, « Les énigmes de la relativité générale », in *Tangente, Les équations de la physique moderne*, n°HS 71, juillet 2019, p.17.

² A. Roussel, *Relativité générale, 5/8 : L'équation d'Einstein*, 1^{er} juin 2019, <https://www.youtube.com/watch?v=SGE8T1o0IKs>.

³ https://proofwiki.org/wiki/Definition:Riemannian_Metric

⁴ A. Roussel, *Relativité générale, 5/8 : L'équation d'Einstein*, video cit.; [https://fr.wikipedia.org/wiki/Métrique_de_Schwarzschild](https://fr.wikipedia.org/wiki/M%C3%A9trique_de_Schwarzschild)

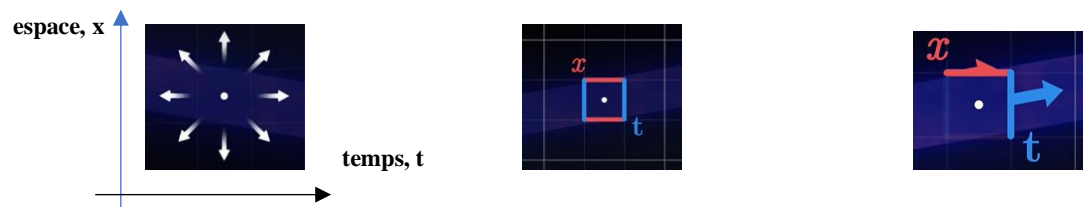
⁵ A. Roussel, *Relativité générale, 6/8 : Flux d'énergie*, ScienceClic, 25 mai 2019, <https://www.youtube.com/watch?v=UGVmRhZNUdQ>

Des ondes gravitationnelles sont par ailleurs, générées par un mouvement de masse dans l'univers, causé par ex. par la « fusion » de trous noirs. L'existence de ces ondes, ainsi que celle des « trous noirs », furent prédites par l'équation d'Einstein. Les ondes gravitationnelles déforment aussi l'espace-temps sur leur passage à la manière d'une onde à la vitesse de la lumière, Elles ont pu être observées en 2017 grâce à des interféromètres Ligo et Virgo aux Etats-Unis.¹

A côté des étoiles, des planètes, des nuages de gaz interstellaire, il ne faut pas oublier non plus les êtres vivants...

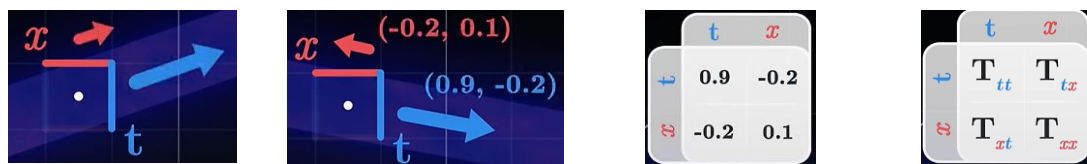
- Mais comment décrire un tel flux d'énergie ?

- Pour vous répondre, intéressons-nous à un point sur sa trajectoire. A partir de ce point, l'énergie va communiquer son mouvement dans différentes directions. On représentera ce dernier en 2D. Il va donc se propager à travers 4 surfaces, 2 pour chacune des coordonnées qu'on utilise, soit 2 surfaces finalement par symétrie (si l'énergie communique son mouvement depuis le passé, il doit ressortir vers le futur). Ainsi, seules deux faces sont nécessaires pour décrire entièrement la façon dont s'échangent les mouvements d'énergie. *Energy flux is the rate of transfer of energy through a surface.*²



Supposons que l'objet en cause soit une pomme. Si la pomme est immobile dans l'espace, elle communique son énergie uniquement vers le futur (vers la droite sur la fig.). Seule la surface, associée au temps (en bleu), va être traversée par un flux de mouvement, représenté par un vecteur. Si la pomme se déplace dans l'espace, elle va communiquer son énergie à travers chacune de ses deux faces.

En fonction de l'énergie, qui se comporte comme une sorte de fluide, ces vecteurs vont varier de direction. Si la pomme se déplace dans l'espace, chacun peut être décomposé sur des vecteurs de base, donnant lieu à un tableau de coefficients représentant les coordonnées des deux vecteurs dans la base. Ce tenseur, qu'on appelle **le tenseur énergie impulsion, T**, traduit les échanges de mouvement au sein de l'énergie.



C'est **T** qui « crée » la courbure de l'univers à laquelle est lié à la courbure la courbure qui est uniquement géométrique.

Pour chaque distribution matérielle que l'on voudra étudier, il faudra envisager un espace de Riemann particulier déterminé par l'équation d'Einstein, ou plutôt l'ensemble des 10 équations d'Einstein). Résoudre ces équations, c'est déterminer l'espace de Riemann - c'est-à-dire la métrique riemannienne – engendré par la distribution matérielle **T**.

Occupons-nous du tenseur **T** en 2D supra :

- la 1^{ère} case, T_{tt} , est la quantité d'énergie qui ne se déplace que dans le temps, vers le futur. C'est **la densité d'énergie**. Cette quantité reste conservée dans le temps, bien qu'elle soit d'autant plus grande que le point de départ est dense en énergie ;

¹ Cécile Huneau, « Les énigmes de la relativité générale », op. cit., pp.84-85.

² A. Roussel, *Relativité générale*, 6/8 : Flux d'énergie, video cit ; https://en.wikipedia.org/wiki/Energy_flux

³ A. Roussel, *Relativité générale*, 6/8 : Flux d'énergie, video cit. ; S. Mavridès, *La relativité*, op. cit., p.115.

- les deux cases qui suivent, T_{xt} et T_{tx} , sont égales. Toutes deux représentent la quantité de mouvement qui va être transmise à l'énergie au cours du temps. Ces cases mesurent la vitesse spatiale de l'énergie. Cette vitesse est d'autant plus grande que l'énergie se déplace rapidement dans l'espace par rapport au temps. On appelle ces cases **la densité d'impulsion**, car elles mesurent la quantité de mouvement (mv) de l'énergie. Elle doit être décomposée pour chaque dimension l'espace ;

- la dernière case mesure la composante spatiale du flux d'énergie. Cet échange de mouvement dans l'espace représente la tendance de l'énergie à pousser dans une direction. Cette tendance est **la pression** qui doit, elle aussi, être décomposée sur les trois dimensions spatiales. ¹

Dans notre ex. à 2 D ; le tableau ne contient que 4 cases, dont deux identiques, dans l'univers à 4 D, ce tableau contient en réalité $4 \times 4 = 16$ cases comme il a été vu. En sus de la densité d'énergie, de la densité d'impulsion, de la pression, on y trouve des termes qui correspondent aux **flux de viscosité**.

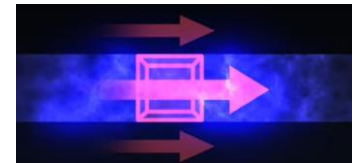
(§62^{bis}
Ann.IV)

La viscosité nous ramène aux équations de Navier-Stokes. Par viscosité, il faut entendre à nouveau une forme de résistance au sein des fluides imparfaits. La viscosité diminue la liberté d'écoulement du fluide et dissipe son énergie (cinétique, i.e. de mouvement.). Ces équations, aussi non linéaires qu'elles soient, sont établies cependant dans un cadre non relativiste. On comprendra aisément que l'on n'entrera pas ici dans le couplage de ces équations avec la relativité générale.

Dans ce cadre, *la viscosité est la tendance que va avoir l'énergie à communiquer un parallèle autour d'elle.*

(§68
1/
a)iii)

On pensera au frottement que la viscosité cause, ce qui entraîne **une contrainte de cisaillement** que l'on doit combiner avec la nature du fluide pour mesurer la vitesse de déformation du fluide (*the degree to which a fluid under shear sticks to itself*). ²



En revanche, il est important de comprendre que les composantes de ce flux de mouvement dépendent du système de coordonnées qu'on a choisies. Lorsqu'on change de coordonnées (*fig.b*), une énergie immobile peut devenir une énergie en mouvement (*fig.c*), ce qui n'a rien d'étonnant en relativité : *le mouvement d'un objet est relatif s'il dépend du point de vue depuis lequel on l'observe.* (*figd*). ³ Des systèmes de coordonnées différents ne sont pas sans effet.

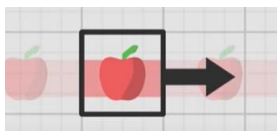


fig.a

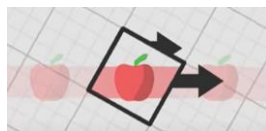


fig.b

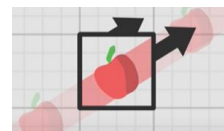


fig.c

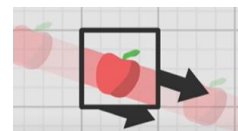


fig.d

On remarquera que le tenseur énergie-impulsion dans l'espace-temps vide de Minkowski est nul, puisqu'un point n'est traversé par aucune énergie. Toutes ses cases valent 0. On ne saurait, toutefois, négliger ce cas particulier si utile lorsqu'on veut décrire un petit objet à travers l'espace-temps. Que l'on pense simplement à un satellite autour de la Terre, ou un objet – comme la pomme... - à proximité d'un trou noir. On peut négliger la masse de ces objets rapportée à celle de la Terre, ou, pire, d'un trou noir.

Remarque finale

Oui, une dernière, pour relativiser ce qui vient d'être dit... Nous sommes en physique, soucieuse d'exprimer des lois indépendantes du système de coordonnées, par rapport auquel ces lois, sous forme d'équations, sont écrites. Les coordonnées sont fort utiles pour analyser et mesurer, mais on ne doit pas confondre l'instrument de mesure (le thermomètre) et l'objet étudié (la chaleur répandue alentour).

Il y a d'abord, des invariances, comme celle de la vitesse de la lumière, ou celle, en relativité restreinte, de la transformation de Lorentz selon lequel aucune ligne d'univers – à commencer par la

¹ A. Roussel, *Relativité générale*, 6/8 : Flux d'énergie, video cit

² Pour les curieux, peu effrayés par la technique, v. Marcelo M. Disconzi, Depar. of Mathematics, Vanderbilt Univ., *Viscosity in general relativity*, https://astro.uni-frankfurt.de/wp-content/uploads/slides/Disconzi_07_2016.pdf

³ A. Roussel, *Relativité générale*, 6/8 : Flux d'énergie, video cit.

nôtre – ne joue un rôle privilégié. Si ce n'était pas le cas, on pourrait choisir un objet particulier dans l'univers et déclarer qu'il est dans un état de « repos absolu », alors que les autres sont en mouvement. Cette croyance, tenace chez certains, contredirait le principe de relativité, parce que, selon ce principe même,

chacun aurait le droit de se déclarer en repos, en considérant que tous les autres sont en mouvement ! Cette impossibilité de déterminer un objet ou système physique qui serait au repos exprime une propriété de l'espace-temps, que l'on qualifié d'isotrope. L'isotropie de l'espace-temps (ou invariance de Lorentz) est considérée aujourd'hui comme l'un des fondements les plus solides de la physique.¹

Aucune direction n'est privilégiée dans l'espace-temps, que ce soit la composante temporelle ou spatiale de l'objet en mouvement. Il n'y a pas une direction unique du temps, ni une direction particulière de l'espace. **Le principe de relativité restreinte** affirme que les lois physiques s'expriment de manière identique dans les tous les référentiels inertiels (ou galiléens), i.e. en mouvement rectiligne uniforme les uns par rapport aux autres. **Le principe de covariance** de la relativité générale généralise ce premier principe en affirmant que les lois physiques s'expriment de manière identique dans tous les référentiels, inertiels ou non (c'est-à-dire en accélération ou en rotation). On dit que les lois sont « covariantes ».

*Un difféomorphisme est une déformation de l'espace-temps qui déplacé tous les points de manière arbitraire. L'espace-temps du départ est transformé en un autre espace-temps, différent du premier mais qui lest difféomorphe ». **La covariance de la relativité générale** s'exprime comme l'indifférence de ses lois vis-à-vis de telles déformations.²*

Sous ce rapport, le calcul tensoriel trouve aussi une justification puisqu'il exprime des propriétés intrinsèques, i.e. indépendantes du système de coordonnées utilisé pour les expliciter. Autant un produit scalaire (*inner product* ou *dot product*), qui applique un vecteur sur un autre vecteur pour en faire un nombre, ne dépend pas des systèmes de coordonnées, autant il en est de même du tenseur métrique, qui définit un produit scalaire sur l'espace tangent de chaque point d'une surface courbe. Plus généralement, la « trace » du tenseur, - i.e. la somme de ses composantes sur la diagonale principale de la matrice qui le représente, - ne dépend pas non plus du choix des coordonnées.

L'équation d'Einstein comprend différents tenseurs, comme, dans sa partie gauche, le tenseur de Ricci qui exprime la déformation de l'espace-temps. Ce tenseur est construit à partir du tenseur de Riemann, qui exprime lui-même la courbure de l'espace-temps (le tenseur de Riemann décrit le mouvement géodésique dans l'espace-temps en précisant comment des géodésiques évoluent les unes par rapport aux autres : comment elles se rapprochent ou s'éloignent rapidement). Le tenseur de Ricci est un tenseur d'ordre 2, obtenu précisément comme la trace du tenseur de courbure ; **le tenseur de Ricci mesure combien une forme se déforme le long d'une géodésique**. Il joue un rôle plus dynamique, comparativement au tenseur de courbure qui considère toutefois des accélérations

Dans la partie droite de l'équation, le tenseur énergie-impulsion représentant la répartition de masse et d'énergie dans l'espace-temps. *Ce tenseur doit donc satisfaire aux lois de conservation de l'impulsion [la quantité de mouvement] et de l'énergie. La conservation de l'énergie est effectivement vérifiée. Les équations du mouvement des corps sont contenues dans la conservation de l'impulsion-énergie.*³

La stabilité est donc au rendez-vous sans pour autant tomber sans l'immobilisme. L'énergie locale détermine une accélération (le tenseur de Ricci est une moyenne des accélérations locales). Qui dit accélération, dit **travail** d'une force le long d'un vecteur, i.e. un produit scalaire. (Sans même sortir d'une surface et prendre de la hauteur, le tenseur métrique, qui vient d'être cité, permet de définir le produit scalaire de deux vecteurs tangents à chaque point d'un espace.) On retrouve aussi cette idée sous-jacente de travail dans le tenseur énergie-impulsion. Comme l'écrivait Hermann Weyl, **la notion de travail s'applique mieux à l'essence physique de l'action que celle de force** [qui a fait

(§68
1/
a)iii)

¹ M. Lachièze-Rey, *Einstein à la plage*, p.28.

² M. Lachièze-Rey, *Voyager dans le temps. La physique moderne et la temporalité*, op. cit., p.125.

³ S. Mavridès, *La relativité*, op. cit., p.116.

place à celle de champ] Cette notion [qui perdure] est plus claire et s'est placée au 1^{er} plan de la physique nouvelle.¹

Le mouvement géodésique est une conséquence directe de l'équation d'Einstein décomposée en 10 équations. Cette équation généralise l'équation fondamentale de la dynamique de Newton : $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, précise Claude Bruter qui partage l'avis d'Hermann Weyl sur l'importance de la notion de travail dans le domaine de la relativité.² (La présentation $m\mathbf{a} = \mathbf{F}$ fait davantage sentir la parenté avec l'équation d'Einstein qui met en relation d'un côté des accélérations et de l'autre des impulsions et de l'énergie.)

L'idée-mère demeure, malgré les trahisons et les améliorations spectaculaires, et inédites, de sa fille relativiste qui s'est enhardie à définir un autre principe d'équivalence, celui de la masse et de l'énergie.

iv Une terra incognita jusqu'ici inconnue en droit

e) La théorie de la relativité générale, et la théorie du pouvoir et de son pourtour (1)

i Géodésique sans le dire. ii Métrique et courbure « motus et bouche cousue »

iii Le tenseur constitutionnel ne varietur

f) La théorie de la relativité générale, et la théorie du pouvoir et de son pourtour (2)

i La stratégie radissonienne relookée de façon relativiste.

ii L'équation d'Einstein nous souffle des choses en droit

iii La gravité ralentit le temps. iv La constante cosmologique ou l'énergie sombre agissant en sourdine.

2/ Quid toujours du « fil du temps » en droit constitutionnel ?

a) La question de la coexistence de la stabilité et de l'instabilité

i La flèche du temps et l'irréversibilité

La relativité restreinte nous apprend que deux horloges identiques mesurent des temps différents. Le temps n'est plus absolu, mais relatif, voire variable. Il est encore plus soumis à variation en relativité générale, puisque l'on sait qu'un champ gravitationnel ralentit les horloges, au voisinage par ex. de la Terre. Le GPS, qui est en usage aujourd'hui, tient compte de l'existence de cette très petite différence temporelle dans la mesure du temps de parcours de signaux entre la Terre et des satellites en orbite.³

Dans le cadre donc de la théorie de la relativité, le statut du temps a perdu beaucoup de son aura, mais il a subsisté sous la forme d'un temps propre d'un observateur, distinct du temps propre d'un autre. Le temps a perduré comme ligne de temps propre, i.e. comme ligne d'univers qui permet de repérer les événements que chaque observateur vit sur son « balai » qui l'emporte à toute vitesse dans l'univers....Le temps absolu n'existerait plus, mais le temps continue d'exister pour celui sur son balai!

Einstein considérait même que *la flèche du temps* est une fiction humaine, une pure construction mentale, relevant du temps psychologue et non physique. Il n'empêche que ce temps psychologique, que définit le philosophe Bergson à la même époque, n'est pas éloigné du temps propre de la relativité :

*Le principe de relativité affirme la symétrie absolue entre deux observateurs en mouvement relatif uniforme ; mais Bergson, à juste titre, souligne que **cette symétrie n'implique en rien l'équivalence entre les perceptions temporelles de l'un quelconque des observateurs et celle qu'il attribue à l'autre.** Pour chaque observateur, il existe bien une perception privilégiée du temps.*⁴

¹ Hermann Weyl, *Temps, espace, matière*, op. cit., p.31 et 35..

² C. Bruter, courriel à Alain Laraby du 20 avril 2023.

³ Carlo Rovelli, *Et si le temps n'existait pas ? Un peu de science subversive*, Dunod, Paris, 20212, p.93

⁴ Jean-Marc Lévy-Leblond, *Impasciencnes*, Seuil, Paris, 2003, *Bergson/Einstein : non-lieu ?* pp.123-125. Nous soulignons.

Pour passer d'une perception à l'autre, chaque observateur, dans sa propre subjectivité, doit effectuer une « projection » quasi-géométrique pour mesurer le temps d'un autre. Cette projection modifie les « mesures », en dilatant ou en contractant le temps (que l'on pense au paradoxe des jumeaux). Bergson, toutefois, persistait de croire à tort à un temps universel qui l'empêchait de maîtriser tout à fait la notion de temps propre qui rompt avec une conception présupposant une simultanéité des durées. Il faut, d'un autre côté, reconnaître en Bergson l'idée-clé de « la spatialisation du temps » qu'exacerberait en science sa mathématisation formelle. La singularité du temps serait perdue dans un tel traitement.¹

Le temps, qui intervient, dans toutes les équations ou presque de la physique classique, apparaît en effet, dans la variable t . Ces équations disent comment les phénomènes changent au cours du temps, comme la position d'un objet, l'amplitude d'un pendule oscillant, la température d'un corps, etc. Elles permettent assurément de prédire ce qui va se produire dans le futur. *Galilée est le premier à comprendre que le mouvement des objets sur la Terre pouvait être décrit par des équations exprimées en fonction de la variable temps*. Par ex., dans la chute des corps, il énonce la loi : $x = \frac{1}{2} at^2$, avec x la distance et a l'accélération, suivant laquelle un objet tombe proportionnellement au carré du temps t .

L'instrument de la mesure de t fut possible grâce au pendule. Ses oscillations présentent toujours la même durée, qu'elles soient grandes ou petites. (En consultant son pouls, Galilée aurait découvert un nombre égal de battements cardiaques pendant chaque oscillation. Mais comment pouvait-il savoir que ses battements avaient tous la même durée ? se demande-t-on aujourd'hui. On reste *perplexe*.)²

Dans la physique classique, le temps t s'écoule de lui-même, et tout le reste évolue par rapport à lui. Il n'y a pas, non plus, de flèche du temps dans la dynamique newtonienne qui complète la galiléenne:

*Mon fils attrape le ballon que je lui ai envoyé. S'il le relance convenablement, le ballon me reviendra exactement. Quand un mouvement est possible, le mouvement opposé (de l'arrivée au départ, avec les directions de vitesse inversées) l'est autant. La dynamique newtonienne est invariante par renversement du temps. **Le temps peut s'écouler du futur vers le passé, mais si un mouvement est conforme aux lois de la dynamique, le mouvement opposé le sera pareillement.***

*Une sonde spatiale se déplace dans l'espace interplanétaire, sous l'influence des attractions gravitationnelles de différentes planètes. Nous décrivons naturellement son mouvement, depuis son lancement de la Terre (position A, dans le passé) jusqu'à son passage près d'Uranus (position B, dans le futur). La physique newtonienne permet de décrire ce mouvement tout aussi bien « depuis » la position B dans le futur « vers » la position A dans le passé. **Les deux descriptions, temporellement symétriques, sont absolument équivalentes***³

Le temps propre se comporterait comme une flèche de temps, propre à chaque ligne d'univers, mais, en dehors de ce fait, d'aucuns évoquent *une flèche relativiste*. Une telle flèche serait une exception notable à l'idée de symétrie temporelle de la dynamique newtonienne, dont les théorèmes restent valables la plupart du temps en relativité générale. Cette exception est liée à *l'existence de trous noirs qui attire tout objet qui tombe vers lui inexorablement ; il est impossible d'envisager un mouvement symétrique*. Plus moyen d'en remonter, la vitesse d'échappement ne pouvant être supérieure à la vitesse de la lumière, c . On demeurerait dans le noir à jamais.

D'autres parlent aussi de *flèche cosmique*, due à l'expansion de l'univers. L'idée contredit l'univers statique de Newton, mais aussi celui d'Einstein sans évolution, toujours identique à lui-même (c'est ce qu'on appelle l'erreur d'Einstein, la plus grande bourde de sa vie, qualifia-t-il).

Dans ces exceptions, la symétrie temporelle est brisée, bien que ces situations s'interprètent aussi dans le cadre relativiste (avec une autre valeur pour la constante cosmologique, Λ).⁴

¹ *Ibid.* ; M. Lachièze-Rey, *Au-delà de l'espace et du temps. La nouvelle physique*, op. cit., p.71

² C. Rovelli, *Et si le temps n'existait pas ?*, pp.97-99.

³ M. Lachièze-Rey, *Au-delà de l'espace et du temps*.p.57. Nous soulignons.

⁴ *Ibid.*, pp.59-61.

Le grand public a peine à concevoir que le fait, désormais prouvé, d'expansion de l'univers a révolutionné sa vision du monde. L'univers, dans son ensemble, n'est plus étranger lui-même aux vicissitudes d'une l'histoire spatio-temporelle *qui oriente irréversiblement la succession des événements physiques. Elle est porteuse d'une flèche cosmologique du temps qui aligne celles de l'ensemble des processus naturels et de toutes les histoires que vivent et racontent les hommes. Voilà qui donne à cet événement une ampleur sans précédent.*

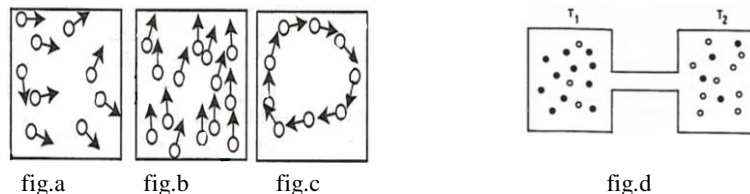
L'entité nouvelle fondamentale, l'*espace-temps-matière*, ne se situe plus sur une scène passive. C'est un acteur physique qui ne traduit pas seulement, par sa courbure, une sensibilité à la présence de son continu matériel. Par-delà les effets de courbure locale de l'espace-temps, l'univers subit aussi une courbure globale qui fournit l'effet répulsif qui fait plus que compenser un effondrement gravitationnel sur lui-même. Contrairement à l'interaction électromagnétique, par ex., qui existe sous ses aspects attractifs et répulsifs, rien n'échappe à l'emprise de la gravitation uniquement attractive. Seule une force antigravitationnelle cosmique peut s'y opposer.¹

Cette histoire universelle dépasse infiniment celle qu'imaginait Bossuet au XVII^e siècle sur Terre sous la supervision de la Providence céleste. L'irréversibilité est aussi à l'œuvre au sein même de la matière au niveau local. Dame matière n'est pas aussi inerte qu'on le pensait : *elle peut, sous certaines contions de non équilibre, s'organiser en structures complexes.*² Cette auto-organisation s'inscrirait dans un temps créatif, qui ne peut plus être assimilé à un moins-être.

Considérons, par x., un fluide enfermé dans une boîte. A l'équilibre, nous observons un « chaos moléculaire » [à ne pas confondre avec la dynamique chaotique révélée en mathématiques] : les mouvements des molécules ne présentent pas de direction privilégiée, et les corrélations sont à faible portée. (fig.a)

*Imposons maintenant un gradient de température en chauffant la boîte par en-dessous. Nous constatons que le système s'autoorganise pour permettre le transport de la chaleur. (fig.b) Si nous augmentons encore le gradient de la température, apparaissent des tourbillons qui correspondent à un nouveau mode de transport de la chaleur. C'est un changement de phase, qui a conduit à **une structure de non-équilibre**. (fig.c) .*

*Ces changements de phase se produisent à **des points de bifurcation**, et généralement **ces points brisent une symétrie du système**. C'est le cas dans l'exemple de l'instabilité de Bénard.³*



La **diffusion thermique** est un phénomène de transport de l'énergie thermique, un tel transfert étant permis par la différence de températures entre deux milieux.

Ces structures de non équilibre (un bel oxymore, avouons-le) sont qualifiées par Ilya Prigogine de *structures dissipatives*. C'est le non équilibre qui créerait de telles structures. L'auteur parle de dissipation, i.e. de dégradation de l'énergie sous forme de chaleur, qui permettrait la naissance de la complexité **loin de l'équilibre**. Il appert des instabilités, associées à des bifurcations qui brisent la symétrie, y compris temporelle. Cette évolution, productrice de nouveau, que l'on constate aussi dans l'étude de moult domaines de la nature, conforterait l'idée que la flèche du temps n'est pas si illusoire.

Ce qui est effectivement nouveau est le fait que, même en physique, l'irréversibilité ne peut plus être mise seulement en rapport avec une augmentation de l'entropie. Suivant le 2^e principe de la thermodynamique, l'entropie aboutit à un équilibre stable, caractérisé par un minimum d'énergie interne. Soit, mais nous sommes ici dans la thermodynamique du non équilibre. La chimie montrerait

¹ Edgard Gunzig, « L'histoire de l'histoire de l'univers », in *L'homme devant l'incertain*, sous la dir. d'Ilya Prigogine, Odile Jacob, Paris, 2011, pp.31-34. Nous soulignons.

² Bossuet, *Discours sur l'histoire universelle* [1681] ; Ilya Prigogine, « Le futur n'est pas donné », in *L'homme devant l'incertain*, op. cit., p.14.

³ Ilya Prigogine, « Le futur n'est pas donné », p.18. Nous soulignons.

que **la flèche du temps peut être une source d'ordre**. La diffusion thermique de la fig.d l'attesterait :

*Bien sûr, les molécules, mettons d'hydrogène et d'azote au sein d'une boîte close, évolueront vers un mélange uniforme, mais chauffons une partie de la boîte et refroidissons l'autre. Le système évolue alors vers un état stationnaire dans lequel la concentration de l'hydrogène est plus élevée dans la partie chaude et celle de l'azote dans la partie froide. L'entropie produite par le flux de chaleur, qui est un phénomène irréversible, détruit l'homogénéité du mélange. C'est donc un processus générateur d'ordre, un processus qui serait impossible sans le flux de chaleur. **L'irréversibilité mène à la fois au désordre et à l'ordre.***¹

(§57
1/a)

Dans l'expérience de pensée du démon de Maxwell, on peut aller à l'encontre du second principe de la thermodynamique en inversant le temps. Le démon serait capable de construire deux compartiments, l'un chaud, l'autre froid, en sélectionnant des molécules de gaz suivant l'information qu'il posséderait de leurs micro-états. Les molécules les plus rapides iraient dans le chaud, et les plus lentes dans le froid. Cependant, dans la thermodynamique de non équilibre, le monde n'est plus aussi parfaitement symétrique, même dans un système matériel fermé où la température tendrait à devenir uniforme.²

On le voit : la flèche du temps et l'irréversibilité font débat qui peut dégénérer en pugilat verbal, à la fois provoquant et peu courtois. (Il est difficile d'avoir l'un sans l'autre.)

ii La querelle du déterminisme

Poursuivons d'abord avec Prigogine.

A l'équilibre thermique, l'entropie a une valeur maximale lorsque le système est isolé. Cette valeur garantit que les fluctuations ou perturbations n'ont aucun effet, car elles sont suivies d'un retour à l'équilibre. Il en est de même dans un système thermodynamiquement fermé, maintenu à une température T donnée : nous sommes dans le cas d'une « énergie libre », F, définie comme la quantité de travail qu'un système peut effectuer. L'énergie atteint aussi sa valeur minimale à l'équilibre: $F = E - TS$ (où E est l'énergie et S l'entropie). Les deux situations sont similaires à celle du pendule stable.

Mais que se passe-t-il pour un état stationnaire de non équilibre ? L'état ou le régime stationnaire est un état, p, où les variables le décrivant ne varient pas avec le temps ; autrement dit : $\partial p / \partial t = 0$. Dans la diffusion thermique, *il n'est plus certain que les fluctuations soient amorties. [...] Loin de l'équilibre, la matière acquiert de nouvelles propriétés où les fluctuations, les instabilités jouent un rôle essentiel : la matière devient plus active. Par ex., nous pouvons avoir des réactions chimiques oscillantes, des structures spatiales de non équilibre, des ondes chimiques.*³

C'est dire si la notion de **fluctuation** est importante, associée aux idées de *distance à l'équilibre* et de *point de bifurcation*, où la thermodynamique devient instable et des solutions nouvelles émergent. On aboutit à un schéma qui fait coexister des zones déterministes (entre les bifurcations) et des points à comportement probabiliste (les points de bifurcation).

¹ Ilya Prigogine, *La fin des certitudes*, Odile Jacob, Paris, 1996, chap.1 : Le dilemme d'Epicure, p.31. Nous soulignons.

² *Ibid.*, p.30

³ *Ibid.*, pp.73-76 et 79-80.

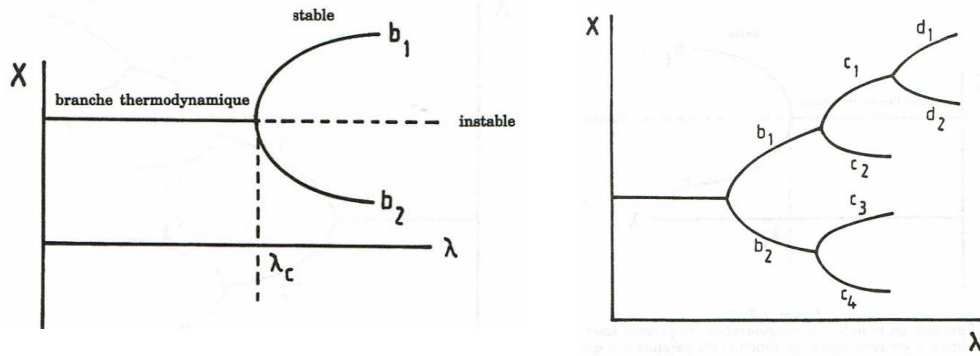


fig a : Bifurcation en fourche : produit intermédiaire X sert de catalyse. Sa concentration est représentée en fonction du paramètre λ qui mesure la distance à l'équilibre. Au point de bifurcation, la branche thermodynamique devient instable et d'autres solutions apparaissent ; fig b : des expériences sont faites pour diminuer les fluctuations, mais tôt ou tard de nouvelles fluctuations se produisent, menant le système vers la branche b_1 , ou la branche b_2 .

Et l'auteur d'évoquer à nouveau les idées d'auto-organisation, d'innovation et de diversification, qu'il résume par l'expression **ordre par fluctuation**.¹

Intr.
gle
1/a)-ii)

Dans *La nouvelle alliance*, co-écrit avec Isabelle Stengers, Prigogine, extrapole son propos sur un plan philosophique, en rappelant le bilan médiocre des machines thermiques du début du XIX^e siècle. Une telle dissipation ouvrait, en mécanique, la question nouvelle de la flèche du temps. Nous serions passés de l'épistémè proprement classique des XVII^e-XVIII^e siècles à une nouvelle épistémè où le temps redeviendrait un acteur majeur, libéré de sa camisole de force du simple paramètre t.

La « nouvelle alliance » instaurerait un nouveau dialogue avec la nature. D'où la mort proclamée de la science des Lumières, à entendre les tenants du *clinamen* épicurien, de la *différence* rebelle à tout identification qui la précède, au mouvement des idées desquels les deux auteurs se rallient : *Nous avons, au cours de cette étude, trouvé inspiration auprès d'un certain nombre de philosophes ; nous en avons cité quelques-uns, qui appartiennent à notre époque, tels Serres ou Deleuze, ou à l'histoire de la philosophie, tel Lucrèce, Leibniz, Bergson et Whitehead.* En un mot, pour en revenir à l'énergie,

*Bergson n'avait pas tort de ne rien voir vraiment de neuf dans la science de l'énergie. Pourtant, par-delà l'impuissance à laquelle la description scientifique avait réduit la nature, d'autres, comme Nietzsche, percevaient l'écho assourdi d'une nature créatrice et destructrice, dont la science avait bien dû reconnaître la puissance pour en étouffer les grondements. La science, qui décrit les transformations de l'énergie sous le signe de l'équivalence, doit pourtant admettre que seule la « différence » peut être productrice d'effets, qui soient à leur tour des différences. La conversion de l'énergie n'est que la destruction d'une différence, la création d'une différence.*²

On a compris : le rendement de la connaissance, édifié à l'âge des Lumières, s'avèrerait lui-même aussi médiocre que celui d'une machine à vapeur. L'âge post-Lumières aurait retrouvé le temps, comme le suggérait, dans la littérature du 1^{er} tiers du XX^e siècle, Marcel Proust à la *Recherche du temps perdu*.

Deux exemples illustreraient l'épistémè signant l'alliance nouvelle : le renouveau de la dynamique, au cœur de l'espace des phases (ce que nous avons abordé nous-même lors de la présentation de l'hamiltonien), et la transformation dite du boulanger. Nous nous contenterons de les résumer sous forme de diagrammes, l'un emprunté à ces auteurs, et l'autre à Ivar Ekeland, mathématicien déjà cité.

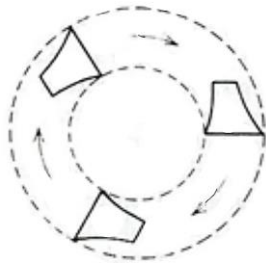
. 1^{er} ex. : Représentation de l'évolution typique dans l'espace des phases du volume initial contenant les points représentatifs d'un système intégrable, *réductible à un ensemble d'éléments sans interaction*).³

¹ Ilya Prigogine, « Loi, histoire ... et désertion », in *La querelle du déterminisme*, Gallimard, Le Débat, Paris, 1990, p.106.

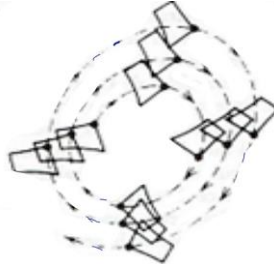
² Prigogine et Stengers, *La nouvelle alliance*, Gallimard, Paris, 1979, p.127 et 291. Nous soulignons.

³ Ilya Prigogine, *La fin des certitudes*, p.23.

Le lecteur reconnaîtra, dans la 1^{re} figure, la dynamique hamiltonienne, reformulant la newtonienne. La nouvelle préserve une forme symplectique (ou volume constant). Les auteurs y ajoutent l'hypothèse ergodique, dans la mesure où ils envisagent un processus stochastique, dont les statistiques peuvent être approchées par la connaissance d'une seule de ses réalisations représentées par des chemins.



Le volume initial du système intégrable garde sa forme, et son évolution le maintient dans une région limitée de l'espace des phases



Le système qui n'est plus intégrable, mais **ergodique**. Il garde sa forme mais sa trajectoire en spirale le mène à balayer la totalité de l'espace

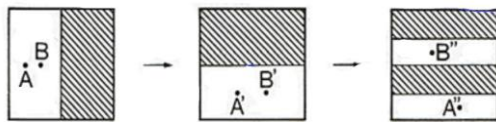


Le système n'est plus intégrable, ni ergodique, mais à **mélange**. Le volume est conservé mais se déforme et s'étire peu à peu à travers tout l'espace.

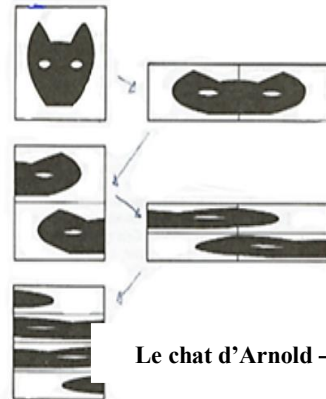
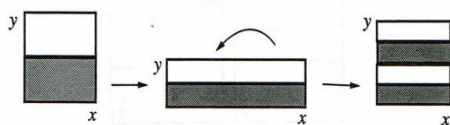
Le système intégrable reste « prisonnier » dans une fraction très petite de la surface à énergie constante. Le système ergodique réussit, lui, à parcourir la totalité de la surface, toujours à énergie constante. Le système à mélange s'y répand, en outre, jusqu'à la couvrir uniformément ; son évolution aboutit à transformer la cellule initiale en un « monstre » géométrique final ...¹

. 2ex. : la transformation du boulanger, et le chat d'Arnold (que nous avons ajouté).

Le boulanger prend de la pâte, l'étale au rouleau jusqu'à réduire son épaisseur de moitié. Puis ; il la replie sur elle-même pour retrouver l'ancienne épaisseur. Il recommence en coupant la pâte, une fois étalée en deux. Il pose les deux feuilles l'une sur l'autre afin qu'elles gardent le même sens. Infra, le carré initial représente la masse de la pâte. Elle est aplatie sous la pression du rouleau de la 1/2 de sa hauteur. Et on réitère le procédé sans discontinuer en engendrant des partitions de plus en plus fines.



La transformation du boulanger



Le chat d'Arnold →

En termes de coordonnées, x et y , on dit que la coordonnée x est **la coordonnée dilatante**, car la distance entre deux points double (modulo 1, car on ne considère que les nombres compris entre 0 et 1) à chaque transformation. **La coordonnée y et au contraire contractante** : la distance entre deux points diminue de moitié à chaque transformation. En conséquence, la surface du carré est conservée.²

La même opération récurrente peut-être appliquée au « chat d'Arnold ». Dans les deux cas, on ne reconnaît plus l'image de départ, surtout après un nombre très grand de partitions, mais il est possible de revenir en arrière et de retrouver le carré initial. Il suffit d'invertir le rôle des coordonnées x (qui devient contractante) et y (qui devient dilatante). Sur la figure de dessus représentant la transformation du boulanger, le carré est alors non plus aplati en rectangle mais allongé verticalement. Par ailleurs, le procédé est déterministe, par application réitérée d'une loi simple. Le futur est entièrement déterminé par le présent, et pourtant, l'effet observé est si irrégulier qu'il appelle

¹ Prigogine et Stengers, *La nouvelle alliance*, pp.243-245.

² Ilya Prigogine, *La fin des certitudes*, p.113

*irrésistiblement le qualificatif aléatoire.*¹ On songe à un jeu de cartes, de mieux en mieux battu, entre les mains d'un joueur expert.

Dans le déroulement, on observe donc des mouvements, régis par des lois déterministes, qui fabriquent de l'aléatoire, comme si l'ordre et le chaos étaient imbriqués l'un dans l'autre. Nous avons déjà exposé cette dynamique chaotique. Mais, au lieu d'examiner deux valeurs seulement, deux partitions (une tranche qualifiée de +1, et une seconde tranche qualifiée de -1), on aurait pu concevoir *une fonction de distribution pouvant prendre toutes les valeurs positives ou nulles (p est une probabilité) à la condition que la somme sur le carré soit égale à l'unité.* Cette extension permettrait de mieux saisir encore, dans la transformation du boulanger, *la coexistence d'éléments déterministes (la trajectoire) et d'éléments statistique irréductibles (évolution de régions dans l'espace des phases [que forme le carré]).*²

Ce que l'on retiendra est ainsi l'idée que la notion de bifurcation est la base de celle d'**événement**, qui peut se produire ou non, le changement impliquant l'idée de *probabilité intrinsèque*. La nature ne serait plus cadencée dans des lois immuables, mais évoluerait plus « librement » ou possiblement, grâce à des fluctuations, des écarts par rapport à l'équilibre, si éphémères que pourrait être leur apparition.³

La flèche du temps, et son irréversibilité, rejaillirait de plus belle en son envol irrépressible vers l'avenir.

(un spectateur déçu de ne pas encore assister à un combat de boxe)

- Où est la querelle du déterminisme là-dedans ? Je ne vois dans ces lignes ni colère, ni accusation !
- L'orage monte ; songez à vous abriter...

La querelle apparaît ouvertement dans l'article de René Thom « Halte au hasard, silence au bruit », paru dans la revue française *Le Débat* en 1980. La plume du mathématicien a été jugée brutale, voire réactionnaire, par ses « adversaires », d'autant que dans son article. Thom cru bon de mettre en exergue une phrase de Joseph de Maistre : *Ne parlons donc jamais de hasard...* Pour ceux qui l'ignoraient ; de Maistre fut idéologiquement contre la Révolution française dont il condamna les pires excès.

René Thom ne va pas par quatre chemins : il reproche aux thuriféraires de la fluctuation aléatoire d'avoir glorifié outrageusement le hasard, Ils seraient fascinés par le « bruit », au point de remplacer le déterminisme rigoureux par un hasard irréductible à la description, hormis celle des méthodes statistiques. Voici un avant-goût de sa diatribe enflammée :

*Car c'est un fait d'expérience banale que notre univers n'est pas un chaos, que l'on peut y discerner des objets, des choses qui font preuve parfois d'une grande stabilité, et qui parfois paraissent naître d'un milieu apparemment indifférencié.*⁴

René Thom dénonce le procédé qui ferait croire que des fluctuations sont, non seulement perturbantes, mais créatrices par elles-mêmes. Elles seraient à l'origine les lois de la nature, comme si l'on confondait déclenchement et constitution d'un ordre. Celui-ci n'advierait qu'après-coup, sans qu'il ait lui-même une quelconque existence autonome et une part active, lui aussi, dans la fabrication du monde.

Il faut comprendre Thom qui fustige les partisans du hasard et des probabilités qui ne prévoient pas a priori les issues possibles des bifurcations. Il les accuse de trop mettre l'accent sur l'irréversibilité au point d'oublier le rôle de la réversibilité dynamique, des symétries de toutes sortes, voire des bijections. En promouvant par trop le hasard, certains de ces penseurs en ligne de mire seraient trop réductionnistes pour expliquer les processus d'émergence qui impliquent une géométrie sous-jacente.

Thom aime, au fond, ce qui a une forme claire et solide, à l'instar de Platon qui entrevoyait des polyèdres réguliers et convexes à la base du cosmos. Thom ne songe pas à ces solides, mais à des morphogénèses subtiles finalement stables et saisissables par l'esprit. Bref, le mathématicien est du

¹ *Ibid.* ; Iva Ekeland, *Le calcul, l'imprévu*, op. cit., pp.66-68. Le schéma de dessus de la transformation du boulanger est tiré de cet ouvrage.

² Prigogine et Stengers, *La nouvelle alliance*, pp.253-256.

³ Ilya Prigogine, *La fin des certitudes*, p.8 et 20

⁴ René Thom, « Halte au hasard, silence au bruit », art. reproduit in *La querelle du déterminisme*, Gallimard, Paris, 1990, p.67.

côté de la régulation plutôt que de la dé-régulation ; seule la régulation pourrait être l'objet de la science.

(§31
-i)
(§55) En contraste, Thom encense le déterminisme de Laplace, i.e. un déterminisme strict de l'évolution temporelle, faisant l'objet d'un formalisme différentiel. Il loue également un autre outil, dans le même esprit de comprendre la mise en ordre dans les choses, celui de « prolongement analytique » dans el plan complexe, ainsi qu'une notion d'« attracteur » structurellement stable, même en un sens affaibli.

Parmi ses collègues, Thom n'est pas le seul à s'étonner de la résistance au déterminisme. Claude Bruter partage ce sentiment, en pourfendant les structures dissipative qui seraient survalorisées selon lui :

Les approches théoriques de l'école de Bruxelles (De Donder, Prigogine), dévolues à l'étude du comportement de milieux principalement chimiques en situation d'équilibre, n'ont pas convaincu : elles restent sans descendance. Les équations stœchiométriques [relatives aux proportions des éléments chimiques] sont très élémentaires et ne rendent pas compte de la richesse de transformations nombreuses, complexes et subtiles qui interviennent simultanément dans les milieux biologiques. Les équations actuelles concernent des données quantitatives et non point les données morphologiques si essentielles dans la compréhension et dans la mise en œuvre des phénomènes.

Pas plus que Thom, Bruter ne croit en un *désordre ontologique*. Il faudrait regarder à deux fois, pense-t-il, la thermodynamique afin de conclure aussi vite. ¹ Il existe toutefois, dans le même domaine, d'autres expériences, comme les réactions chimiques, de Belossov et Jabotinski en URSS, qui passent à un état de non équilibre et de coloration inédite. Pour la petite histoire, *Belossov rédigea un article qu'il soumit à une première revue, mais le rapporteur le refusa, déclarant que son expérience allait à l'encontre du 2^e principe de la thermodynamique [qui introduit la notion d'entropie ou de désorganisation d'un système], en dépit des photographies des différentes phases de la réaction qui étaient jointes.*²

A vrai dire, sous la polémique verbale, nous ne sommes pas, de part et d'autre, dans le tout ou rien. Certes, pour Thom, *l'appel au hasard n'est pas plus scientifique que l'appel à la volonté du Créateur*. Pour Henri Atlan, la croyance a priori au déterminisme de type laplacien (et thomien) est assimilable à *la foi en l'existence du Grand horloger* pour qui le temps n'est que le déroulement d'une série de causes et d'effets en germe dans les lois qui les régissent. Atlan voit dans le « bruit » du potentiel positif : *l'indétermination n'est-elle pas la source d'émergence du nouveau ?* interroge-t-il. Mais il s'agit, en fait, chez l'un et l'autre débateur, d'une question de prévalence : est-ce l'ordre ou le désordre, la règle ou l'écart à la règle, qui l'emporte dans leur conjonction éventuelle ? Sont-ce les conditions initiales qui déterminent avant tout développement, ou le hasard qui les détermine ?³

Il nous est difficile de départager ces préférences épistémologiques. Nous avons connu, et Thom et Atlan, et suivi leurs séminaires à des époques différentes. Nous avons apprécié leurs points de vue respectifs, sans nous en sentir mal à l'aise. Il nous semble que la charge de Thom est un peu excessive, mais il faut reconnaître que son caractère décapant aide à mieux saisir les limites de l'aléatoire trop souvent célébré de façon romantique.

Écoutons par ex. Atlan pour qui le bruit est conçu comme un **événement**, et non comme un parasite qui brouillerait l'information comme dans la théorie de la communication de Shannon au XX^e siècle :

(§62^{bis}
2/c)ii)i

(§62^{ter}
c)-i)

A partir du moment du moment où le système est capable de réagir aux [erreurs aléatoires, provenant de chaînes de causalité indépendantes], non seulement sans disparaître, mais en se modifiant lui-même dans un sens qui lui est bénéfique ou qui, préserve, au minimum sa survie ultérieure,

autrement dit, à partir du moment où le système est capable d'intégrer ces erreurs à sa propre organisation,,

alors celles-ci perdent a posteriori un peu de leur caractère d'erreurs. [...]

Après cet instant, elles sont intégrées, récupérées comme facteurs d'organisation.

[...]

Ce processus ininterrompu de désorganisation-organisation [réalise] une unité des contraires, une « synthèse », qui ne peut exister qu'en tant que les erreurs sont a priori de vraies erreurs, que l'ordre à un moment donné est vraiment perturbé par le désordre, que la destruction, bien que non totale, soit réelle, que l'irruption de l'événement soit une véritable irruption (une catastrophe ou un miracle ou les deux).

¹ Claude Bruter, *Au-delà de l'entropie classique. L'évolution comme processus de création sous l'effet de la contrainte*, ISTE OpenScience, 30 mai 2023, DOI : 10.21494/ISTE.OP.2023.0982 : *Les architectes du feu*, op. cit., chap.6, p.153.

² https://fr.wikipedia.org/wiki/Réaction_de_Beloussov-Jabotinski

³ R. Thom, « Halte au hasard, ... », p.63 ; Henri Atlan, « Postulats métaphysiques et méthodes de recherche », in *Le Débat* cit., p.115 et 119.

C'est en ce sens que le bruit, pour Atlan, est *un principe d'organisation*.¹

- Quel parti adoptez-vous finalement vous-même ? Dans la connaissance comme dans l'action, le balancier n'est jamais en place en son milieu...

- C'est vrai. Ayant pratiqué en droit moi-même la médiation, j'essayerai de voir, sans les y pousser, comment les parties peuvent articuler leurs différences. Chaque thèse semble l'emporter suivant le contexte, soit parce qu'on le désire nous aussi, soit parce qu'elle s'impose elle-même. Il y a une dialectique entre les deux, il est difficile de concevoir l'une sans l'autre, mais il arrive que règne une rigidité mortelle, par excès d'ordre, ou une décomposition fatale, par excès de désordre, sans aucune maîtrise, fût-elle partielle, de l'aléa. Il y a un bon hasard, susceptible d'être intégré dans une stabilité renouée, et un mauvais hasard, producteur de désaccord fondamental et d'instabilité irrécupérable.

Le déterminisme et le hasard, **je les accepte tous les deux à la fois**, dit Henri Atlan, mais je ne vous cache pas que je penche, pour ma part, pour une place prépondérante pour le déterminisme en droit.

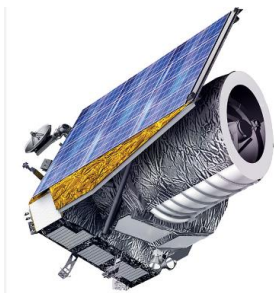
La raison est le thème même de notre thèse : le constitutionnalisme des Lumières a précisément pour objet, comme le dit Thom, d'**intérieuriser mentalement une bonne part du déterminisme qui nous meut, en ce sens que ce déterminisme, c'est nous-mêmes**. On ne conçoit pas cet effort juridique intellectuel sans précédent sans la notion de contraintes quasi matérielles et de causalité efficiente, qui ne vas pas toutefois s'illusionner sur leur efficacité permanente. Leur **nécessité** a le mérite de remplacer les seules exhortations morales et religieuses, encore moins performantes, d'avant l'âge des Lumières.²

iii Comment le droit constitutionnel participe au débat à sa façon

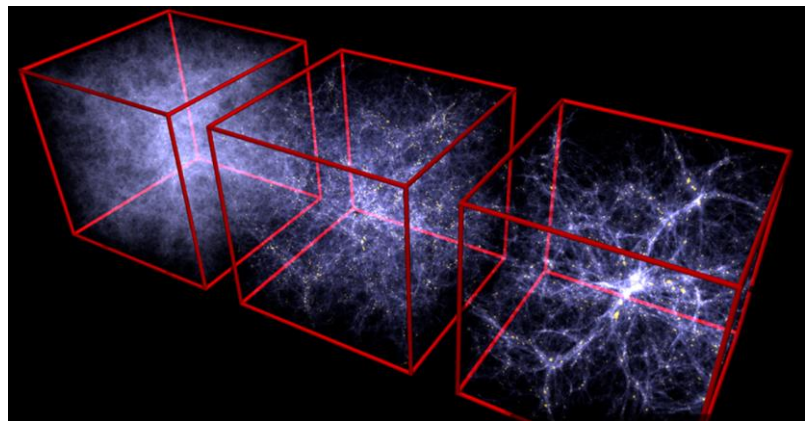
b) La flèche du temps », véhiculant l'ordre et le désordre

i Le flux du temps comme réalité physique. ii Le flux du temps comme réalité psychologique

iii Quel flux temporel en droit constitutionnel ?



Le satellite **Euciid**,
lancé le 1^{er} juillet 2023



Simulation de la croissance de la structure cosmique (galaxies et vides) lorsque l'Univers avait 0,9 milliard d'années, puis 3,2 milliards et 13,7 milliards d'années (aujourd'hui)³

¹ Henri Atlan, *Entre le cristal et la fumée*, Seuil, Paris, 1979, pp.57 et 67. Nous soulignons.

² Henri Atlan, « Postulats métaphysiques et méthodes de recherche », in *La querelle du déterminisme*, op. cit., p.117 ; René Thom, « En guise de conclusion », ibid., p.147.

³ <https://saf-astronomie.fr/origines-univers-en-attendant-euclid/> ; <https://cerncourier.com/a/euclid-to-pinpoint-nature-of-dark-energy/>;

Annexe I

Le principe de relativité restreinte abordé par la notion de groupe algébrique

Dans sa théorie de la relativité, Poincaré généralise le groupe de Galilée en concevant le groupe de Lorentz qu'il conçoit à son tour comme un sous-groupe du groupe de Poincaré. Expliquons cette phrase rapide.

La relativité galiléenne repose sur des transformations linéaires qui conservent l'intervalle de temps et la distance entre deux événements simultanés. Ces transformations forment un groupe qui relie deux systèmes de coordonnées en mouvement relatif uniforme. Le groupe de Galilée cède la place au groupe de Lorentz (groupe de rotations). Les transformations de Lorentz conservent l'origine (0,0,0,0). Avec l'adjonction des translations spatio-temporelles, nous obtenons le groupe de Poincaré. Un tel groupe est conçu comme le produit du sous-groupe de translation avec le groupe de Lorentz. C'est un produit cartésien, muni d'une loi de groupe. **Nous retrouvons une loi de composition.**

La théorie des groupes permet de mieux comprendre la nature des lois de la physique qui restent invariantes sous diverses transformations. L'intervalle de temps « vécu » par une particule entre les événements O (origine) et P diffère de celui « vécu » par la même particule et mesuré par une autre horloge dans le repère R'. Les événements qui se produisent en même temps du point de vue de R se produisent à des moments différents du point de vue de R'. Ces déformations sont consécutives à un déplacement de Poincaré dans l'espace-temps, mais ce déplacement n'en laisse pas moins inchangées les distances dans cet espace-temps. **C'est l'idée d'invariance qui gouverne celle des déformations et non l'inverse.**¹

Annexe V

Pourquoi appeler « ds » intervalle entre deux événements ?

1/ Définition :

ds représente une longueur entre des points qui permet de mesurer un intervalle de l'espace-temps comme une très petite distance séparant deux événements situés sur une même trajectoire (ou ligne d'univers).. **Un événement** est un point de l'espace-temps, i.e. quelque chose qui se passe en un endroit précis de l'espace à un moment précis.

On appelle ds **la quantité de l'intervalle entre deux événements**. Elle a pour expression, via son carré : $ds^2 = c^2 dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2)$. L'étirement du temps est compensé par une contraction de l'espace, et réciproquement, d'où l'opposition des signes algébriques entre la variable temps et la variable espace en 3D. L'intervalle entre deux événements est le même dans tous les systèmes de référence lorentziens.

2/ Signification du signe de ds^2

Le carré de l'intervalle ds^2 , peut être positif ou négatif (ou nul) suivant que ce sont les comportements du temps ou celles d'espace qui prédominent.

Puisque l'intervalle a la même valeur quel que soit le système de référence lorentzien utilisé, la propriété pour ds^2 d'être positif, négatif ou nul, est une caractéristique indépendante du référentiel.

Si le carré de l'intervalle entre deux événements est positif ($ds^2 > 0$), l'intervalle est dit du « genre temps » : la partie temporelle de l'intervalle prédomine sur la partie spatiale. Si $ds^2 < 0$, l'intervalle est dit du « genre espace » : la partie spatiale de l'intervalle prédomine sur la partie temporelle.

3/ Pourquoi appeler ds intervalle entre deux événements ?

La distance entre deux points dans l'espace euclidien est donnée en coordonnées cartésiennes, par $(distance)^2 = (dx_1)^2 + (dx_2)^2 + (dx_3)^2$. L'expression - ds^2 exprimée à l'aide des coordonnées (x_1, x_2, x_3, x^4) a exactement la même forme – mais étendue à 4 dimensions – que la $(distance)^2$ entre deux points de l'espace habituel. D'où le nom d'intervalle donné à ds.²

¹ Alain Laraby, « Revivre l'appris », revue Quadrature, 2012, n°1 hors-série, p.108. Cet article avait mis en ligne sur le site de l'Institut Henri Poincaré (IHP) la même année à l'occasion du centenaire de la mort d'Henri Poincaré. Un extrait de l'article est paru aussi dans la revue de l'École polytechnicien, La Jaune et la Rouge, nov. 2012, pp.30-33.

² S. Mavridès, *La relativité*, op. cit., pp.48-50.

La transformation de Lorentz ¹

1/ Observation préalable

Dans la théorie de la gravitation de Newton, la vitesse est relative (en particulier le fait de ne pas bouger, i.e. avoir une vitesse = à 0, est un fait relatif, alors que dans la théorie électromagnétique de Maxwell, la vitesse de la lumière est absolue. La contradiction était manifeste.

Au tournant du XIX^e siècle, on avait aussi remarqué que les lois de Maxwell n'étaient pas compatibles avec la transformation de Galilée. En revanche, Poincaré avait démontré qu'elles l'étaient avec une variante : la transformation de Lorentz. D'où l'idée d'Einstein d'utiliser cette transformation.

La transformation de Lorentz résout le problème que la vitesse de la lumière soit la même dans tous les référentiels.

2/ Son expression

Puisque la lumière mettait en échec la loi galiléenne de composition des vitesses par addition, il a semblé naturel de modifier cette loi de

$$v, w \rightarrow V_G(v, w) = u + w \text{ (selon Galilée)}, \quad n : v, w \rightarrow V_L(v, w) = (u + w) / (1 + vw/c^2)$$

Cette formule admet deux propriétés remarquables :

- lorsque l'une des deux vitesses, v ou w , est celle de la lumière c , le résultat est toujours c ; autrement dit :

$$V_L(v, w) = V_L(c, w) = c$$

- lorsque les deux vitesses v et w sont au contraire petites devant c :

$$V_L(v, w) = u + w = V_G(v, w)$$

approximativement. On retrouve la loi d'addition galiléenne ; à condition de ne pas effectuer de mesures précises.

Succès ! La formule rend compte aussi bien de la cinématique de la matière que de celle de la lumière. On s'apercevra plus tard qu'elle rend compte également de celle des particules relativistes. Les observations des rayons cosmiques ou des particules dans les accélérateurs et l'astrophysique la confirment en permanence.

La transformation de Lorentz n'est donc pas si différente de celle de Galilée ; elle diffère d'un facteur $\gamma = 1/(\sqrt{1-w^2/c^2})$, le **facteur de Lorentz**. Si w est très faible, par ex. $0,01c$, alors $\gamma \approx 1,0005$, proche de 1, i.e. c . Ainsi, pour revenir à l'expérience de pensée de Galilée d'un bateau, voguant sur l'eau, sa longueur L par ex., vue de la plage, serait L/γ , avec γ très faible.

3/ Rotation et groupe de rotations

Les transformations de Lorentz décrivent des changements de référentiels. Elles correspondent à des rotations d'espace-temps (appelées *boosts*, pour les différencier des rotations usuelles de l'espace).

Une transformation de Lorentz est formellement **une rotation hyperbolique dans l'espace-temps de Minkowski**.

L'ensemble des transformations de Lorentz forme **un groupe qui laisse inchangé un intervalle d'espace-temps, le même dans tous les référentiels**. C'est l'intervalle $s_{12}^2 = c^2(t_2-t_1)^2 - \ell^2$, avec $\ell^2 = (x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2$ la distance entre deux points et (t_2-t_1) la distance entre deux instants. (Dans la physique prérelativiste, galiléenne, on admettait que tous les observateurs inertiels, i.e. se déplaçant à vitesse uniforme, mesuraient tous la même distance entre deux points et entre deux instants.)

Le groupe des transformations de Lorentz est un sous-groupe de Poincaré, qui comprend aussi les décalages du système de référence.²

4/ Rem. finale :

Pour sauvegarder ce qui avait été dûment établi, la vitesse absolue de la lumière, qu'admettait aussi la transformation de Lorentz, Einstein n'a pas hésité à sacrifier ce qui semblait acquis, à savoir, le caractère prétendument absolu de l'espace et du temps. Le fait que la vitesse de la lumière soit la même dans tous les référentiels a pour conséquence que le temps lui-même n'est pas le même pour tous ; il n'y a plus de temps universel. Le temps semble se dilater pour les objets en mouvement.

¹ Lê Nguyễn Hoan, Science4All, *La relativité restreinte*, 11 mars 2016, <https://www.youtube.com/watch?v=bIJBoEIJkoE> ; David Louapre, ScienceEtonnante, *La relativité restreinte*, 13 sept. 2017, <https://www.youtube.com/watch?v=M86YM6QA4-M> ; M. Lachièze-Rey, *Voyager dans le temps. La physique moderne et la temporalité*, op. cit., p.61.

² <https://www.techno-science.net/glossaire-definition/Transformation-de-Lorentz.html> ; <https://boowiki.info/art/minkowski-spacetime/groupe-de-lorentz.html>

Annexe III

Le principe d'équivalence de la relativité générale comporte une restriction

1/ Rappel :

a) Gravitation = accélération

Un champ de gravitation est équivalent à l'accélération d'un référentiel non inertiel par rapport à un référentiel inertiel. D'après ce constat, tous les corps en chute libre dans un même état initial suivent une même trajectoire dans un champ de gravitation, ce qui suggère que cette trajectoire ayant une nature universelle est une propriété de l'espace-temps.¹

b) Dit autrement :

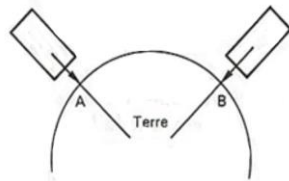
*Pilier de la théorie de la relativité générale, le principe d'équivalence postule que tous les objets tombent de la même façon dans le vide. Cette universalité de la chute libre postule en fait **l'équivalence entre deux types de masses : la masse grave**, qui détermine la sensibilité d'un corps à l'attraction de la gravité, et la masse inerte, qui détermine le degré de résistance d'un corps à une modification de son mouvement.*

Ainsi, le rapport entre ces deux masses serait toujours le même. Voilà pourquoi tous les corps soumis à un même champ gravitationnel chutent à la même vitesse dans le vide.²

2/ Un principe d'équivalence local.

Il est, cependant, bien connu que la présence d'un champ de gravitation dans une région étendue de l'espace se manifeste par une convergence des lignes de force de ce champ.

C'est ce fait qui restreint le principe d'équivalence : en raison de la convergence des lignes de force, il n'existe pas de système de référence global unique par rapport auquel le champ de gravitation puisse s'annuler partout.



*L'accélération de l'ascenseur qui composerait la pesanteur en A ne peut compenser la pesanteur en B : l'accélération compensatrice en B doit avoir une autre direction. Les ascenseurs A et B ne peuvent constituer un référentiel inertiel unique, mais chacun, **localement**, se comporte comme un système d'inertie.*

Comme un système d'inertie, au sens einsteinien, et pas seulement galiléen ou newtonien, car :

le principe d'équivalence permet de rallier les mouvements accélérés au groupe des mouvements libres. Il a conduit Einstein à l'énoncé du principe de relativité générale.³

Annexe IV

Métriques riemannienne et pseudo-riemannienne

¹ <https://cosmology.education/relativite-generale/principe-d-equivalence/#> !

² <https://lejournal.cnrs.fr/articles/le-principe-dequivalence-a-lepreuve>

³ S. Mavridès, La relativité, op. cit., p.100. Nous soulignons.

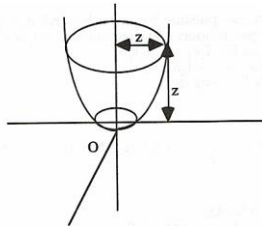
1/ Métrique riemannienne

L'intersection d'un parabolôide de révolution avec un plan contenant l'axe z (plan vertical passant par l'origine) est une parabole. A la cote positive z, la section du parabolôide par le plan horizontal est le cercle d'équation $z = x^2 + y^2 =$ (v. infra)

$$z = x^2 + y^2 = (x \ y) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad z = g_{11} x^2 + g_{22} y^2 = (x \ y) \begin{bmatrix} g_{11} & 0 \\ 0 & g_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Si, plus généralement, la métrique sur l'espace vectoriel à deux dimensions est **riemannienne**, le cercle de rayon z est le lieu des points (x,y) tels que $z = g_{11} x^2 + g_{22} y^2 = \dots$ (v. supra sous forme matricielle ; nous avons rappelé par des segments *bleu* horizontal et vertical la façon de multiplier la matrice par le vecteur colonne), où les deux coefficients g_{11} et g_{22} sont positifs : dans l'espace usuel, ce **cercle riemannien** est représenté par une ellipse.

C'est un parabolôide elliptique, i.e. une surface dont la section par un plan vertical contenant l'axe Ox est une parabole, la section par un plan horizontal une ellipse : lorsque l'ellipse est un cercle, le parabolôide est de révolution.

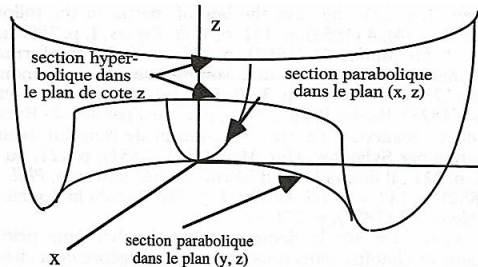


2/ Métrique pseudo-riemannienne

Supposons maintenant que la métrique sur l'espace précédent soit pseudo-riemannienne. Le cercle de rayon z a pour équation

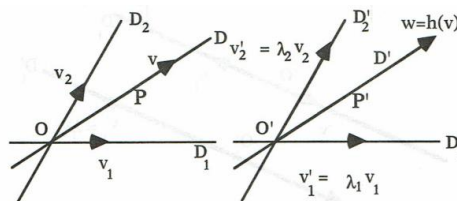
$$z = g_{11} x^2 - g_{22} y^2 = (x \ y) \begin{bmatrix} g_{11} & 0 \\ 0 & -g_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

où les deux coefficients g_{11} et g_{22} sont encore positifs : dans l'espace usuel, ce **cercle pseudo-riemannien** est représenté par une hyperbole. La section par un plan $y =$ constante est une parabole. C'est un parabolôide hyperbolique.¹



Annexe VI

Sur la représentation numérique de h dans l'expression du vecteur $h(v) = v'_1 = \lambda_1 v_1$ et $h(v) = v'_2 = \lambda_2 v_2$



Soit une matrice qui relate comment les vecteurs v_1 et v_2 sont transformés en v'_1 et v'_2 .

¹ Claude-Paul Bruter, *Comprendre les mathématiques. Les 10 notions fondamentales*, op. cit., édit. Odile Jacob, Paris, 1996, pp.144-145.

Choisissons (v_1, v_2) comme base du plan initial P : dans cette base, v_1 a pour composantes $(1, 0)$ ($v_1 = 1v_1 + 0v_2$), v_2 a pour composantes $(0, 1)$, v a pour composantes (x_1, x_2) . Choisissons (v'_1, v'_2) comme base de P' : dans cette base, $h(v) = w'$ a également pour composantes (x_1, x_2) , et, dans ce cas, la matrice qui permet de passer des composantes de v à celles de $h(v)$ est l'identité.

Mais prenons comme base de P' des vecteurs (v''_1, v''_2) équipollents à (v_1, v_2) , ce qui revient à identifier v''_1 , à v_1 , et v''_2 à v_2 [équipollent : se dit de vecteurs parallèles, de même sens et de même grandeur]. Alors : $h(v) = w' = x_1\lambda_1 v''_1 + x_2\lambda_2 v''_2$.

Dans cette nouvelle base (v''_1, v''_2) w a pour composantes $(x_1\lambda_1, x_2\lambda_2)$.

Pour le couple $b = (v_1, v_2)$ de P et $b'' = (v''_1, v''_2)$ de P' , la matrice de l'application h est définie par les composantes des images par h des vecteurs v_1 et v_2 de la base b , à savoir $(\lambda_1, 0)$ pour $h(v_1)$, et $(0, \lambda_2)$ pour $h(v_2)$. On écrit :

$$\begin{pmatrix} x_1\lambda_1 \\ x_2\lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

La matrice :

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

a une structure particulière : les seuls éléments éventuellement non nuls qu'elle possède, les λ_i , sont situés sur une diagonale singulière, appelée « diagonale principale ».

On notera que h , considérée comme application de P dans lui-même, admet deux sous-espaces **globalement invariants**, à savoir, les sous-espaces propres D_1 et D_2 . [voir les droites ci-dessus]. Ces invariants caractérisent évidemment h . Il est donc tout à fait naturel de commencer par rechercher ces espaces invariants, **figures stables par rapport auxquelles on rapportera les éléments qui varient**.¹

Annexe VII

Taux d'actualisation, coefficient d'actualisation, demande de monnaie

1/ Définition du taux d'actualisation

L'actualisation consiste à **déterminer le pouvoir d'achat que procurera la valeur d'un bien dans le futur**. Elle se calcule en tenant compte de l'inflation. Actualiser un montant signifie déterminer ce que l'on sera en mesure d'acquérir avec cette somme, à la date à laquelle elle sera encaissée. (<https://www.journaldunet.fr/>) Autrement dit, **le coefficient d'actualisation permet de transformer la valeur d'un flux futur en sa valeur d'aujourd'hui**.

2/ Rapport entre le taux d'actualisation et le coefficient d'actualisation :

Un taux d'actualisation **faible** = prise en compte par moi du futur éloigné ; taux d'actualisation **élevé** = le futur pour moi a moins de valeur, **le présent est préféré**. Soit t le taux d'actualisation et n le nombre de périodes, le coefficient d'actualisation vaut $1 / (1 + t)^n$. Il est toujours inférieur à 1 car les taux d'actualisation sont toujours positifs.

Coefficient = 1 (anticipation constante ; poids du passé maximal) ; = 0 (anticipation aléatoire ; le passé pas pris en compte)

3/ Rapport entre le coefficient d'actualisation et la demande de monnaie

La demande de monnaie est une encaisse désirée, i.e. la quantité de monnaie qu'un agent souhaite détenir à une période. Allais constate que **le coefficient d'actualisation est d'autant plus élevé que la demande de monnaie est plus faible**.² La vitesse de circulation de la monnaie, i.e. son taux de rotation entre les mains des agents, n'est pas, elle, élevée, car les agents ne cherchent pas à s'en séparer comme en situation d'hyperinflation (encaisse désirée ou préférence pour la liquidité = inverse de la vitesse de circulation de la monnaie).

¹ C.-P. Bruter, *Comprendre les mathématiques*, op. cit. pp.127-128.

² Ramzi Klabi, « La théorie Héritaire et Relativiste de la demande de monnaie : anticipations et problème de non-invariance chez Maurice Allais », 7-4 2017, <https://journals.openedition.org/oeconomia/2827>

Le référentiel de temps psychologique d'Allais¹

1/ Aperçu général

Au-delà de l'analogie supposée entre l'oubli du passé et l'actualisation du futur, la grande originalité de la théorie monétaire d'Allais tient à l'hypothèse d'existence de « constantes universelles » dans le « référentiel de temps psychologique », comme par exemple la valeur du « taux d'oubli ». Dès lors, c'est la déformation de l'échelle du temps psychologique par rapport à celle du temps physique qui permet de décrire dans ce dernier référentiel les évolutions observées des encaisses monétaires et du niveau général des taux d'intérêt, avec les mêmes équations qu'il s'agisse de situations d'hyperinflation, de périodes « courantes » ou de crises.

2/ Relation avec la théorie de la relativité restreinte d'Einstein :

Concernant la relativité de la notion de temps, Allais rappelait qu'Einstein « soutenait justement qu'on ne devait pas parler de la durée d'un événement » sans autre précision, mais de la « durée par rapport à un système de référence particulier »

D'après Allais, « la similitude de dt^2 de la formulation héréditaire et relativiste de la demande de monnaie et du taux d'intérêt psychologique est totale. Dans l'un et l'autre cas, il s'agit d'une transformation d'échelle telle que les lois de la nature s'inscrivent de manière invariante ».

La notion de temps qui intéresse les agents économiques serait « relative à une situation donnée ». Par ex., une journée de détention d'encaisses correspondrait à une durée psychologique plus importante au cours d'une hyperinflation que pendant une période caractérisée par des prix stables. Dès lors, il est nécessaire de trouver un système de référence permettant de définir le nombre d'unités de temps psychologique correspondant à une unité de temps physique [le temps que mesure une horloge].

3/ Le postulat du taux d'oubli

En particulier Allais émet le postulat que le « taux d'oubli », variable dans le référentiel de temps physique, resterait constant dans le référentiel de temps psychologique. C'est ce postulat qui lui permet de définir le rapport entre les valeurs de ces deux unités de temps : « au temps physique dt [d'une horloge] correspond un temps psychologique dt' , défini par la condition que le taux d'oubli $\chi' dt' = \chi dt$, où χ est une « constante universelle », χ_0 traduisant la faculté fondamentale d'oubli de l'Homme.

(Toute constante est représentée par l'indice 0. Tout symbole ne comportant pas cet indice désigne une variable datée en t , sauf indication contraire, à la seule exception de la fonction d'encaisse désirée ψ . Ainsi, χ représente le taux d'oubli à l'instant t , soit $\chi(t)$. La présence de l'apostrophe ' signifie que la variable est considérée dans le temps physique.)

Le taux d'oubli observé dans le référentiel du temps physique varie proportionnellement au rapport entre la valeur de l'unité de temps psychologique et celle de l'unité de temps physique ($\chi' = \chi_0 dt'/dt$).

Pour bien comprendre ce point essentiel, prenons l'exemple suivant.

Supposons qu'en période de prix stables, on ait $dt'/dt = 1$, i.e. $\chi = \chi' = \chi_0$, c'est-à-dire que l'unité de temps astronomique dt vaut exactement l'unité de temps psychologique dt' (ex. : une journée est ressentie comme ayant une durée d'une journée). Si, en période d'inflation, ce rapport augmente jusqu'à 72, cela signifie qu'une journée astronomique, caractérisée par des prix stables, est, au plan des échanges, vécue comme ... vingt minutes en période d'hyperinflation. Cela signifie aussi que, bien que constant dans le référentiel de temps psychologique, le taux d'oubli a été multiplié par 72 dans le référentiel de temps physique, ce qui semble assez intuitif. L'assertion « il y a 24 heures », en situation courante, correspond psychologiquement à l'assertion « il y a 20 mn » en hyperinflation du point de vue des encaisses et des transactions monétaires.

¹ Georges Prat, « Maurice Allais, Professeur à Nanterre », 66/2020, pp.167-178, <https://journals.openedition.org/sabix/2841#ftn8> ; « Temps psychologique, oubli et intérêt chez Maurice Allais », Febr. 1999, Recherches économiques de Louvain 65(2), Febr. 1999, pp.183-185.

§70.- DE L'HORREUR DU VIDE A SON ACCEPTATION SUR TERRE ET AU CIEL

1/ La question du vide en science et en droit aux XVII^e-XVIII^e siècles

i Torricelli, Pascal, Boyle

ii La position des philosophes à 1^{ère} vue

iii La position des philosophes en 2^e vue

2/ Controverses à propos du paradoxe de Bayle

i Les paradoxes de Bayle

ii Contra : Montesquieu, Rousseau, Durkheim

iii Une courbe de Gauss qui ne dit pas son nom

3/ L'idée de Dieu comme tentative de combler le vide dans le Ciel

i Dieu comme évidence du cœur et de la raison

ii Le calcul de la raison par la géométrie différentielle et les probabilités

iii Dieu comme source du général et de la volonté générale en droit

iv Dieu comme point fixe, point de fuite et planche de salut grâce à la « compactification »

vi Des poches salutaires de vide dans l'esprit et la société

Annexes I à V, 651

o

Annexe I

Autre exemple d'erreur d'intuition en calcul des probabilités

On prend un événement qui a une probabilité $1/100$: il faut tenter, en moyenne, 100 coups pour qu'il se produise.

L'intuition commune (première discussion probabiliste, qui eut lieu entre Blaise Pascal et le chevalier de Méré en 1654) conduit parfois à conjecturer : « Si un événement a une probabilité de $1/100$, il y a une chance sur deux qu'il se produise avant le 50^e coup. »

Cette intuition est fautive : il y a une chance sur deux qu'il se produise avant le 69^e coup.

Vraisemblablement, un nombre moindre d'épreuves sera nécessaire puisqu'il y a une chance sur deux que l'événement »nt se produise avant 69 épreuves (la valeur probable du nombre de coups est 69, c'est-à-dire qu'il est plus probable que l'événement ait lieu dans les 69 premiers coups qu'après). Mais la valeur moyenne de 100 tient compte des cas où, par suite d'un caprice du hasard, il faudrait attendre fort longtemps pour que l'événement se produise.¹

Sur la démonstration, lire la suite dans l'ouvrage en référence. **Dans la démonstration interviennent les probabilités conditionnelles, le raisonnement par récurrence et enfin les logarithmes...**

Annexe II

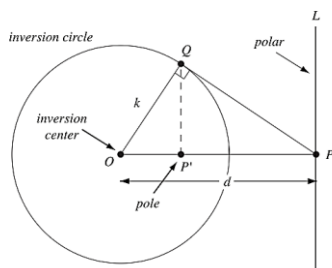
comment construire l'inversion (invertive geometry) ?²

1/Notion

En géométrie, une **inversion** est une transformation qui inverse les distances par rapport à un point donné, appelé centre de l'inversion. Cela signifie en substance que l'image d'un point est d'autant plus éloignée du centre de l'inversion que le point d'origine en est proche.

Selon une phrase célèbre, « Plaçons une cage sphérique dans le désert, entrons-y et fermons-la. Puis, faisons une inversion par rapport à la cage. Le lion est alors à l'intérieur de la cage, et nous sommes à l'extérieur³ ».

2/ Construction



Inversion is the process of transforming points P to a corresponding set of points P' known as their inverse points.

Two points P and P' are said to be inverses with respect to an inversion circle having inversion center and inversion radius $O = (x_0, y_0)$ and inversion radius k if P' is the perpendicular foot of the altitude of $\triangle OAP$, where Q is a point on the circle such that $OQ \perp PQ$.

Annexe V

Axiomatique ZF et axiome de choix

Dans l'axiomatique ZF, l'ensemble vide existe effectivement, il n'a aucun élément, son cardinal est noté 0; si x est un objet, $\{x\}$ est un ensemble appelé *singleton* (single = seul), son cardinal est 1. Si x et y sont des objets distincts, $\{x,y\}$ est un ensemble appelé *paire*, son cardinal est 2,. Etc. On peut concevoir N ainsi. On se donne l'élément 0 (jouant le rôle de l'ensemble vide ; on pose $1 = \{0\}$, puis $2 = \{0,1\}$, $3 = \{0,1,2\}$, ...

Quant à l'axiome de choix, pour toute classe d'ensembles non vides et disjoints, il existe un algorithme (fonction de choix) permettant d'extraire un élément et un seul dans chaque ensemble afin de constituer un nouvel ensemble.³

Annexe III

¹ Alexandre Motti, *Les indispensables mathématiques et physiques pour tous*, Odile Jacob, Paris, 2006, pp.97-98.

² [https://fr.wikipedia.org/wiki/Inversion_\(g%C3%A9om%C3%A9trie\)](https://fr.wikipedia.org/wiki/Inversion_(g%C3%A9om%C3%A9trie)); <https://mathworld.wolfram.com/Inversion.html>

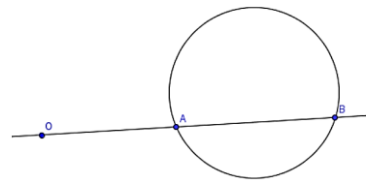
³ Théorie des ensembles : les axiomes de Zermelo-Frankel, http://serge.mehl.free.fr/anx/axiom_zf.html

La puissance d'un point par rapport à un cercle ¹

1/ Définition

Soient \mathcal{C} un cercle, O un point et \mathcal{D} une droite passant par O, sécante à \mathcal{C} en A et B. On appelle **puissance du point O par rapport au cercle \mathcal{C}** , le produit algébrique :

$P = \mathbf{OA} \times \mathbf{OB}$, sachant que \mathbf{OA} et \mathbf{OB} sont des vecteurs.



2/ Propriétés

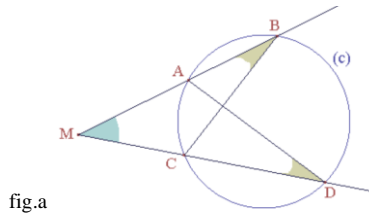


fig.a

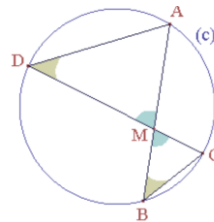


fig.b

fig.a : Les triangles MBC et MDA sont semblables [ou homothétiques], car ils ont d'une part \hat{M} en commun, et d'autre part $\hat{MBC} = \hat{MDA}$ (angles inscrits). Par suite : $MB / MD = MC / MA$. **Leurs proportions sont identiques. C'est dire que : $MA \times MB = MC \times MD$.**

fig. « croisée » b : On remarque qu'en mesure algébrique les produits seraient tous deux négatifs. En conséquence : si d'un point M situé hors d'un cercle (c), on mène une sécante (MAB), le produit : $P_{(c)}(M) = \mathbf{MA} \times \mathbf{MB}$ est constant. $P_{(c)}(M)$ est la **puissance de M par rapport à (c)**. **Les sécantes sont quelconques ; la généralisation est donc possible.**

La démonstration inverse est vérifiable au moyen d'un raisonnement par l'absurde, ce qui donne donc lieu à un théorème puisque la réciproque est aussi vraie. **La formule est également valable pour toute intersection de deux cordes.**

3/ Condition de cocyclicité

Une condition nécessaire et suffisante pour que quatre points A, B, C et D, dont trois d'entre eux ne sont pas alignés, (AB) et (CD) se coupant en M, soient sur un même cercle (points cocycliques) est : **$MA \times MB = MC \times MD$.**

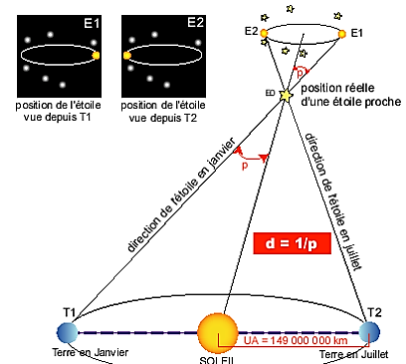
Annexe IV

La notion de parallaxe ²

En astronomie, la parallaxe correspond au décalage périodique des positions apparentes des étoiles proches dû à la position variable de la Terre sur son orbite autour du Soleil.

En effet, à six mois d'intervalle, une étoile proche semble se déplacer dans le ciel, en comparaison avec des étoiles plus lointaines. Plus l'étoile est proche, plus ce mouvement est important. L'étoile décrit une ellipse dont le demi-grand axe est qualifié de parallaxe annuelle, mesurée en seconde d'arc. Mais cet angle reste faible. Pour une étoile située à environ dix années-lumière, la parallaxe n'excède pas les 0,35 seconde d'arc.

La parallaxe diurne, quant à elle, est visible uniquement sur les objets du Système solaire. Elle a pour longueur de base, le rayon de la Terre



¹ <http://abdelhafidmohad.free.fr/fichierpdf/Puissancepoint.pdf> ; <http://serge.mehl.free.fr/anx/ppc.html> ;

² <https://www.futura-sciences.com/sciences/definitions/univers-parallaxe-54/>

§71. LE TRIANGLE CROIRE- SAVOIR - INCERTITUDE

Le judaïsme, évitant au monde chrétien de s'enfermer et d'étouffer la liberté de penser.

- Retour à nouveau au triangle équilatéral.

- Des oscillations permanentes à la façon de la série de Grandi. - *Le vide v. le virtuel* chez Badiou et Deleuze
- Le vide fondamental énérgisant. - L'opérateur du doute

Annexes I, I^{bis}, II, IV et V, 653

o

Annexe I

Le graviton
<p><i>Malgré de nombreuses tentatives, le graviton n'a été ni observé, ni même théoriquement bien cerné. À ce jour, toutes les tentatives de créer une théorie simple de la gravité quantique ont échoué. Le graviton constituerait le vecteur de la force gravitationnelle. Les gravitons, dont l'existence est encore hypothétique, serait associé aux ondes gravitationnelles qui ont été récemment détectées.</i></p> <p><i>(L'onde de gravitation, est une oscillation de la courbure de l'espace-temps qui se propage à grande distance de son point de formation.)¹</i></p>

Annexe I^{bis}

La constante de Planck, h
<p>1/ Présentation liminaire :</p> <p><i>La constante h traduit l'existence d'une sorte d'atomicité de l'action mécanique. Le quantum d'action $h = \lambda \cdot mv$ a les dimensions d'une quantité de mouvement mv et de son état dynamique (mv), multipliée par la longueur h. L'action est donc une grandeur qui dépend à la fois de la configuration du système (λ, la longueur de l'onde) D'où la conséquence fondamentale dont les relations d'indétermination de Heisenberg ne sont qu'un aspect.</i></p> <p><i>L'existence de h exprime l'impossibilité de considérer séparément le géométrique et la dynamique. Il y a deux faces complémentaires de la réalité : la localisation dans l'espace-temps et la spécification dynamique par énergie et quantité de mouvement.</i></p> <p><small>[...]</small></p> <p><i>Les relations d'indétermination sont des relations certaines qui permettent de calculer l'indétermination ou le degré de probabilité de présence et de vitesse de nuages corpusculaires. (V. Le Ru, La science et Dieu. Entre croire et savoir, op. cit., p.92).</i></p> <p><i>(voir Annexe V, du volet 2 du §71).</i></p> <p>2/ Constante et ère (ou domaine) de Planck :</p> <p><i>La constante de Planck est le nombre qui donne le coefficient de proportionnalité entre 'énergie d'un photon et sa fréquence. C'est une mesure de l'unité de moment angulaire des particules. La rotation diurne de la Terre correspond à 10^{68} unité de Planck.</i></p> <p><i>L'ère (ou domaine) de Planck équivaut à la période à laquelle l'univers aurait atteint 10^{32}K. Il est traditionnel de la situer à un temps de 10^{-43} s, « après le Big Bang », bien que cela ne veuille probablement rien dire. (Hubert Reeves, Dernières nouvelles du cosmos, op. cit., p.325).</i></p> <p>3/ Temps de Planck</p> <p><i>C'est le temps mis par la lumière pour franchir une distance de la longueur de Planck [de 10^{-33} centimètre]</i></p> <p>4/ Mur de Planck</p> <p><i>Le mur de Planck désigne la période de l'histoire de l'univers où ce dernier avait un âge de l'ordre du temps de Planck. Le temps zéro est, pour l'instant, inaccessible car le mur de Planck nous empêche de remonter jusqu'à l'origine. (Trinh Xuan Thuan, La plénitude du vide, op. cit., p.173 et 221).</i></p> <p><i>Le mur de Planck est une sacrée falaise, à peine concevable, y compris pour les imaginations les moins bridées. Il se caractérise par des paramètres hors norme, qu'on a pris l'habitude d'exprimer sous la forme d'un temps, d'une longueur et d'une énergie caractéristiques, tous trois dits « de Planck ». (E. Klein, Discours sur l'origine de l'univers, op. cit., chap.4 : Comment escalader le mur de Planck ?, p.57).</i></p>

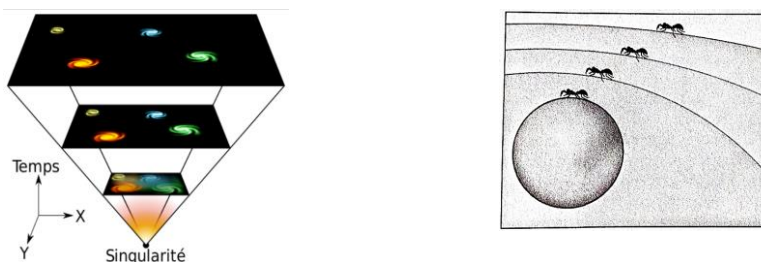
¹ <https://fr.wikipedia.org/wiki/Graviton> ; https://fr.wikipedia.org/wiki/Onde_gravitationnelle

Annexe II

Précisons élémentaires sur le big-bang¹

1/ **fig.a** : Le Big Bang (« Grand Boum ») est un modèle cosmologique utilisé par les scientifiques pour décrire l'origine et l'évolution de l'Univers.

De façon générale, le terme « Big Bang » est associé à toutes les théories qui décrivent notre Univers comme issu d'une dilatation rapide. Par extension, il est également associé à cette époque dense et chaude qu'a connue l'Univers il y a 13,8 milliards d'années, sans que cela préjuge de l'existence d'un « instant initial » ou d'un commencement à son histoire. La comparaison avec une explosion, souvent employée, est, elle aussi, impropre. (https://fr.wikipedia.org/wiki/Big_Bang=



Depuis le 'Big bang', l'expansion de l'univers éloigne des objets, comme les galaxies, continûment les uns des autres. Cette expansion fait croître de manière démesurée le volume de l'univers. Pareille expansion (dit 'inflation') finit par conférer à l'univers une géométrie plate.

2/ **Episode d'inflation** : Période d'accroissement très rapide des distances dans l'univers, accompagnée d'une chute brutale de la température. C'est la forme particulière que prend l'expansion durant un processus analogue à une transition de phase avec surfusion. Hubert Reeves, *Dernières nouvelles du cosmos*, op. cit., p.320).

3/ **fig.b** :

Si nous gonflons un ballon, son rayon s'agrandit, sa surface augmente et sa courbure diminue jusqu'à devenir nulle. En effet, plus un objet sphérique est grand, plus il est difficile de percevoir sa courbure. Ainsi, s'il est aisé de voir la courbure d'un ballon de football d'une dizaine de centimètres de rayon, il est beaucoup plus ardu de percevoir la courbure de la Terre avec son rayon de plus de 6300 km : localement, elle nous apparaît plate.

De même, en gonflant la taille de l'univers d'un fantastique facteur 10^{30} (ou plus), l'inflation lui confère une courbure nulle, quelle que soit sa courbure initiale. L'inflation doit nécessairement déboucher sur un univers plat, avec une densité de matière et d'énergie exactement égale à la densité critique. (Trinh Xuan Thuan, *La plénitude du vide*, op. cit., p.230).

Annexe IV

Des lois fixes susceptibles d'évoluer

Par ex., le nombre de dimensions de l'espace, trois, fait partie du fond. Serait-il possible qu'une autre théorie, plus profonde, ne nécessite pas de présupposer le nombre de dimensions spatiales ? Dans une telle théorie, les trois dimensions pourraient émerger comme solutions d'une loi dynamique. Il n'est pas exclu que, dans cette théorie, le nombre de dimension spatiales puisse même évoluer dans le temps. Si nous étions capables d'inventer une théorie comme celle-ci, elle pourrait nous expliquer pourquoi l'univers a trois dimensions. Cela serait un progrès certain, puisqu'une chose auparavant simplement possible, serait enfin expliquée.²

Pour passer d'une géométrie à l'autre, il faut une dynamique, i.e. un système de forces, qui pourrait à son tour être géométrisée autrement... Même les variétés topologiques à 3 dimensions ne se réduisent pas à l'espace euclidien de dimension 3 que l'on connaît, selon le mathématicien William Thurstone.³ C'est dire déjà si le nombre de dimensions de l'espace 3D est déjà, par lui-même, plus compliqué qu'il n'y paraît.

¹ Trinh Xuan Thuan, *La plénitude du vide*, p.231.

² Lee Smolin, *Rien ne va plus en physique !* Dunod, Paris, 2007, Préf. d'Alain Connes, chap.6 : La gravité quantique : la bifurcation, p.126.

³ William P. Thurston, *The geometry and topology of the three-manifolds*, March 2002, https://www.math.unl.edu/~jkettinger2/thurston.pdf

Les relations d'incertitude d'Heisenberg

1/ Le principe d'incertitude, ou théorème d'indétermination d'Heisenberg

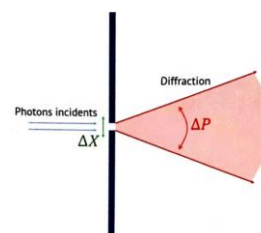
Précisons d'abord qu'une *observable* est une opération de mesure donnant une information sur un système physique en mécanique quantique.

Pour deux observables X et Y, les incertitudes qui y sont associées ΔX et ΔY sont telles que $\Delta X \times \Delta Y > 0$. Pour deux observables comme la quantité de mouvement P et la position X, on a même : $X \times \Delta Y > h/2$. *Ce qui est troublant est que cette incertitude ne soit pas liée à des erreurs de mesure ; elle est fondamentale. Quoi qu'on fasse, on ne pourra pas connaître avec précision et en même temps deux informations incompatibles sur le système.*

2/ Relations d'incertitude et diffraction

En faisant passer un faisceau de lumière par une fente très étroite, la position des photons est connue avec une grande précision ; au moment où la fente est traversée, le photon est forcément dans l'espace très réduit formé par l'interstice.

A cause du principe d'incertitude d'Heisenberg, il en résulte automatiquement une incertitude sur d'autres observables, comme la quantité de mouvement et la direction que prend le photon. Cette incertitude se répercute comme un étalement des directions de propagation de la lumière : la diffraction.¹



3/ Relations d'incertitude et vide

Bien que la matière soit du presque vide, c'est le principe d'incertitude d'Heisenberg qui fait que les objets sont solides, et que nous ne pouvons pas passer nos mains à travers les murs ou tomber à travers les planchers.

On pourrait se demander ce qui empêche les électrons d'un atome de tomber dans son noyau, détruisant ainsi la solidité des choses. Avec la force électromagnétique par laquelle les charges électriques de signe opposé s'attirent, les protons de charge positive qui composent le noyau atomique devraient attirer vers celui-ci les électrons de charge négative. Mais le principe d'incertitude empêche les électrons de tomber dans le noyau : s'ils le faisaient, nous saurions alors exactement leurs positions (le centre de l'atome) et leurs vitesses (nulle), ce qui violerait le principe d'incertitude.

Pour assurer la solidité et l'impenétrabilité des choses, un autre principe vient prêter main forte au **principe de Heisenberg** C'est le **principe d'exclusion de Pauli**. L'action conjuguée de ces deux principes fait que la matière ne s'effondre pas, malgré un grand vide.²

Septième leçon des Lumières :

§ 72.- LE FEED-BACK DU DROIT CONSTITUTIONNEL SUR LA SCIENCE MODERNE

I Les errances de la science et de la technique ancillaire

L'appel aux armes de la science. - La réponse du droit (international, constitutionnel, civil, pénal et administratif)

ii Le retour partiel à la réflexion morale et à la phronesis

Efficacité v. équité, ou efficacité & équité pour redoubler en efficacité.

La *phronesis*, en sus de l'*épistémè* et de la *technè*. -Un modèle de *phronimos moderne* : Vauban au XVII^e siècle

o

CONCLUSION GENERALE

¹ Vincent Rollet, *La physique quantique (enfin) expliquée simplement*, op. cit., pp.91-92.

² Trinh Xuan Thuan, *La plénitude du vide*, op. cit., p.153..

Un bonus :

*La relation entre la pratique de la justice transitionnelle
et
la notion mathématique de cobordisme mise en avant par René Thom*

Deux mots sur la justice transitionnelle

La justice transitionnelle est une technique de réconciliation nationale qui s'efforce d'éviter les solutions toutes faites et l'importation de modèles étrangers, et à appuyer plutôt l'action sur des évaluations nationales, la participation des acteurs nationaux et les besoins et aspirations locaux.¹

Cette justice particulière repose sur l'idée que le passé monstrueux des guerres civiles ne peut être dépassé sans que les anciens acteurs du conflit ne se parlent à nouveau. Il s'agit d'un passage obligé pour réaliser, non seulement une *peace-making*, mais aussi une *peace-building*, - une reconstruction des esprits et des cœurs en vue d'un futur commun nouveau.

La démarche, on le pressent, est ambitieuse : il ne s'agit rien de moins que de penser les modalités de la transformation globale d'une société traumatisée, et de jeter les bases d'un nouveau contrat social. [Il est question] à la fois de garantir une trêve politique, de stabiliser le nouveau régime, et d'apaiser les colères de chacun. L'apparition politique de la « transition démocratique » serait ainsi comparable, selon Pierre Hazan, à l'apparition du Purgatoire sur le plan spirituel : comme ce dernier, la transition est le lieu de l'aveu, du repentir et du jugement, animé par la perspective d'un possible salut.²

On tente de **refabriquer du consentement** en invitant bourreaux et victimes à se regarder face à face, les yeux dans les yeux, pour que tous entendent et échangent leurs ressentis. La parole n'est plus aux armes, aux factions armées, qui ont commis d'abominables exactions, pendant des jours, des semaines, des années, - une durée interminable où tous les repères moraux furent brisés et éclatés. Il n'y avait plus de retenue dans la sauvagerie et la barbarie. Tout dissonait dans la société. Le droit et les comportements avaient été dé-naturés jusqu'à ne plus reconnaître l'homo dans l'autre. Il y avait comme une perte d'identité humaine, même si cette identité reste mouvante et protéiforme.

(On parle de fabrication du sentiment, et pas seulement du *calculus of consent*, trop tôt en la matière.)

Les regrets, plus ou moins sincères des uns, et les pleurs, impossibles à retenir des autres, adviennent péniblement à la lumière, dans le cadre d'une institution ad hoc de réconciliation. L'apparition du « purgatoire » passe d'abord par une purgation des sentiments sur la place publique. Les « confessions » sont diffusées à la radio ou à la télévision pour que tout le pays y participe. Un climat d'entente devrait en ressortir, car qu'est-ce qu'un contrat social, sinon une forme d'auto-résonance collective, où chaque groupe apprend à osciller ensemble dans une composition audible ?

Rien, toutefois, n'est acquis. Rien ne se fait d'un coup. Le processus de réconciliation comporte des arrêts, des rechutes, des loupés, à travers des étapes de transition qui visent à rétablir la vérité et la justice. In particular, *truth-seeking may impede/hinder reconciliation, instead of laying good foundations for the future*. De ce point de vue, le droit est proche encore des phénomènes naturels d'évolution, susceptibles de stagner ou de dévier. Pour raisons de stabilité locale forte, ils peuvent être localement bloqués sur des périodes plus ou moins longues. On le voit dans des modèles de physique (avec les files d'attente, de trafic routier), ou de biologie (avec le passage d'ions ou de

¹ Conseil de sécurité, Rapport sur le Rétablissement de l'état de droit et administration de la justice pendant la période de transition dans les sociétés en proie à un conflit ou sortant d'un conflit, des Nations-Unies, 23 août 2004, <http://archive.ipu.org/splz-f/unga07/law.pdf>

² Kora Andrieu, *La justice transitionnelle : de l'Afrique du Sud au Rwanda*, Folio Paris, 2012, emplacement 222 sur kindle. Nous soulignons. L'auteur renvoie au livre de Pierre Hazan, intitulé *Juger la guerre juger l'histoire*, Puf, Paris, 2007.

bactéries dans des micro-canaux à travers des membranes). Mais ce qui est vécu comme une perte de stabilité en science (lorsque les solutions explosent) peut être entendu aussi comme déblocage.¹

Le mot même d'étapes n'est pas, à vrai dire, très approprié. Il faut affiner. Ce sont plutôt des états, qui peuvent se chevaucher, la ligne directrice, bien que ferme dans ses variations, n'étant pas toujours continue et linéaire. Sans doute, ne faut-il pas s'attendre à l'émergence d'une démocratie constitutionnelle, comme dans les pays qui ont ingéré les Lumières depuis longtemps. On espère au plus, à court ou à moyen terme, l'avènement, ou la consolidation, d'un Etat moins brutal et arbitraire.

Il arrive que les anciens bourreaux se soient déjà enfuis du pays grâce à des filières clandestines. Certains d'entre eux n'en continuent pas moins d'être traqués et jugés par la compétence universelle des tribunaux dans les Etats où, sous les radars, ils se sont « réfugiés » incognito. La collecte des témoignages, principalement oraux, s'avère toutefois difficile, d'autant que les tensions diplomatiques n'aident en rien pour prévenir l'évanescence des preuves et d'éventuelles délais de forclusion.

Challenge lies ahead !

Lors de notre passage au Centre d'analyse du Ministère français des affaires étrangères, nous avons eu l'occasion de rédiger une brochure sur ce type de justice dans le monde. La brochure devait servir de *vademecum* au personnel des ambassades, confronté à une problématique encore inhabituelle.² A l'occasion, j'avais établi personnellement des tableaux synoptiques en A3 sur le sujet qui n'ont pu malheureusement être intégrés dans la brochure pour ne pas trop en alourdir la lecture.

Je profite du travail présent pour les insérer en A4. Le lecteur y découvrira une classification en double entrée. *En colonne*, une classification par types de conflit, sorties de conflit, CVR (Commission Vérité & Réconciliation), types de procès, programmes de réparations, DDR (programme de désarmement, démobilisation et réinsertion) et RSS (réforme du secteur de la sécurité), « vetting » (lustration laïque, ou épuration des personnes « suspectes » ayant exercé des responsabilités ante quo)³, consolidation/re-fragilisation. *En ligne*, une classification par continents et par pays concernés.

Pareils tableaux risquent de troubler la vue par trop de détails, aussi ramassés et significatifs qu'ils soient. D'où notre recours encore à un diagramme, censé décrire le fonctionnement logique sous-jacent du processus de justice transitionnelle. Il s'agit à nouveau d'un modèle graphique, ayant pour vocation d'aider à comprendre et non pour être appliqué. On n'entend pas toutefois dessiner une idée souhaitable, mais un processus dans sa factualité, épuré simplement à l'extrême. Un diagramme est comme un film où l'on met des sons, des images et des mouvements sur des phénomènes qui ne sont pas toujours perçus dans la vie quotidienne. Tout vécu occulte fatalement une partie de la réalité. Les conflits des autres n'intéressent guère, par indifférence ou par souci premier de sa propre survie.

Un mot (ou un dialogue entre MOI et LUI) sur le cobordisme

MOI. La présentation de cette notion n'ambitionne que de faire partager une compréhension intuitive. Par-delà les données techniques, nous essayerons de découvrir ensemble le fil d'un tracé squelettique qui en fait la trame thématique. Proposer des formules et des démonstrations ? Non pas, mais offrir au lecteur, sous forme d'image, l'unité de vision et de pensée qui fonde un pareil concept.

LUI. Je suis au regret de constater à nouveau que vous allez vous casser les dents, pour parler familièrement. Il vous plaît de simplifier les choses à outrance. Or la matière traitée est combustible. Vous allez vous-même vous brûler, et causer des dommages collatéraux dans la perception d'un phénomène déjà peu lisible.

MOI. Nous n'avons jamais exposé des solutions toutes faites. Nous ne posons que des questions, sous forme de dessins, pour mieux cerner un problème, préoccupant seulement les spécialistes.

¹ Chloé Barré, *Physique statistique des phénomènes de blocage dans les flux de particules*, Thèse, Univ. Pierre et Marie Curie, Paris, 26 sept. 2017, <https://www.theses.fr/2017PA066227.pdf> ; J. Hubbard, B. West, *Equations différentielles et systèmes dynamiques*, op. cit, p.201.

² Alain Laraby, *L'approche française de la justice transitionnelle* (en collaboration avec Arnaud Garcette), Ministère des affaires étrangères, Direction générale de la mondialisation, du développement et des partenariats, 2014.

³ <https://www.unilim.fr/iirco/2021/06/14/justice-transitionnelle-vetting-process-les-processus-de-verification/>

Nous concentrons nos efforts sur une finalité de citoyen qui veut comprendre le monde, en découvrant en l'espèce la « morphologie invisible » d'une justice qui aspire, elle-même, à ressusciter l'humain...¹

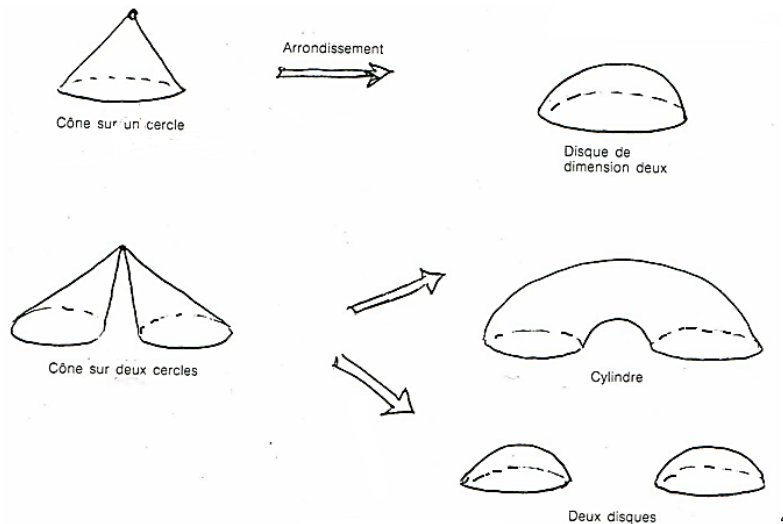
LUI. Cette forme de « quintessence » mathématique en mouvement assurerait-elle la cohésion du processus de transition que vous évoquez ?

MOI. J'ai la faiblesse de le croire. Écoutons ce que dit, de façon claire René Thom, à son propos:

Le problème du cobordisme est de savoir quand deux variétés [par ex. deux surfaces de dimension 2 comme la sphère S^2 ou le tore T^2] peuvent être déformés l'une dans l'autre sans qu'à aucun moment dans cette déformation il n'y ait dans l'espace obtenu de singularités [des points critiques, si vous voulez].²

Le cobordisme est, pour faire court, une relation d'équivalence entre de telles variétés topologiques, i.e. une relation réflexive, transitive et symétrique entre variétés différentielles compactes (fermées et bornées). Une telle équivalence implique que les deux variétés soient de même dimension pour qu'elles soient dites *cobordantes* ou en cobordisme entre elles.³

Nous avons vu dans notre travail que les séries de Fourier étaient une façon d'arrondir les angles. Le cobordisme en est une autre en toutes dimensions comme dans les cas suivants :



LUI. Je vous accorde que, jusqu'ici, je ne perds pas mon latin (que j'ai déjà perdu, je l'avoue, mon grec ancien). Si j'ai bien compris, l'idée est d'assembler les bords de deux surfaces par exemple. Il s'agirait de rendre leur association compatible

MOI. Les mathématiciens comme Pontriaguine et Thom ont envisagé à cette fin des variétés différentiables (dérivables, pour des fonctions de plusieurs variables) et compactes. Ces variétés peuvent être orientables (comme la sphère) ou non orientables (comme le ruban de Möbius). On rétracte les deux ensembles sollicités dans une variété de dimension supérieure (3 pour les variétés de dimension 2). Une variété de dimension n devient le bord d'une variété à bord de dimension $n+1$.⁵

LUI. Je sens que votre analogie en droit peut être *une source d'illusions, mais aussi un instrument puissant de connaissance*. L'analogie, comme nous l'avons répété, *peut suggérer des rapprochements utiles entre des champs d'investigation très éloignés*. L'analogie traduit la part d'imagination dans la recherche que celle-ci corrige ensuite par des enchaînements plus rigoureux.⁶

¹ J'emprunte cette expression à Luciano Boi, auteur du livre déjà cité du livre comportant ce titre, paru, Presses univ. de Limoges en 2011.

² René Thom, *Exposé introductif*, in *Logos et Théorie des Catastrophes*, Genève, Patino, 1988, p.27. Les crochets sont nôtres.

³ Luciano Boi, *Morphologie de l'invisible*, Presses univ. de Limoges, 2011, p.245.

⁴ Alain Chenciner, *Lexique*, in René Thom, *Prédire n'est pas expliquer*, op. cit., Eshel, Paris, 1991, p.155.

⁵ Claude P. Bruter, *Topologie et perception*, op. cit. Maloine, Paris, 1985, t.1, pp.136-140 ; R. Thom, René Thom, *Exposé introductif*, p.26.

⁶ Claude P. Bruter, *Les architectes du feu. Considérations sur les modèles*, op. cit., pp.5-7.

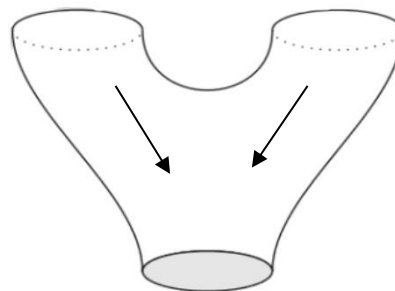
(§62^{ter}
3/c)-ii)

La « variété » de dimension supérieure serait, dans ce domaine, le groupe humain qu'il s'agirait de (re)-constituer à travers l'expérience d'une Commission Vérité et Réconciliation (CVR). Il en aurait été ainsi en Afrique du Sud de 1996 à 1998 entre le groupe des Blancs et celui des Noirs, séparés par des années d'apartheid. Vous pensez aussi, je suppose, à l'expérience, non moins originale, au Rwanda entre les Hutus et Tutsis, consécutivement au génocide de 1994. La tâche fut rude, mais semble porter des fruits, ce dont ces pays peuvent se féliciter. *As commitment to a peaceful process, leurs CVRs have prepared an atmosphere conducive to an agreement and less disrespect for the law.*

MOI

(sortant moi-même de ma posture intellectuelle. Il est trop facile de passer d'un mot à l'autre, sans appréhender vraiment les idées, mais les idées mêmes ne suffisent pas, selon moi, sans un crayon à la main. *(Je secoue donc mon cerveau pour entrer en accord avec mon corps).*)

Le signal est lancé. Je trace un cercle dans une partie supérieure, et une réunion de deux cercles disjoints dans une partie inférieure.)¹



LUI. Le processus de restauration n'est pas toujours aussi convergent dans ce genre d'expériences.

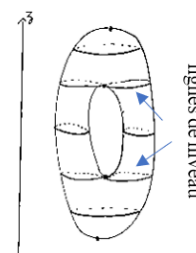
MOI. Le processus de réunion est plus important que le résultat, qui restera, quoi qu'on fasse, imparfait. Ce qui compte est avant tout le processus même de transformation du *mindset* des groupes initiaux dont les préjugés, et les sentiments respectifs, divergeaient tant au départ. L'idée n'est pas seulement de joindre, mais de permettre à ce qui fut « plusieurs » de vivre simultanément, et en bonne intelligence, sur une même terre, en ne se laissant plus dominer par la déraison et l'ignorance.

LUI. La construction progressive de cette réalité unique, multiple et complexe, n'est pas manifeste sur votre schéma. Cette œuvre novatrice, opérant dans le « cœur » et l'« âme » de chaque groupe, doit pouvoir être, sinon « mesurée » rigoureusement, du moins étalonnée qualitativement.

MOI. Le cobordisme y pourvoit. Il est capable de rythmer, de façon plus ou moins régulière, la déformation de deux cercles en un cercle. Rappelez-vous la théorie de Morse en topologie différentielle que notre §67^{bis} a exposée.

Cette théorie permet d'analyser les lignes de niveau de la forme globale d'une variété (en 2D, 3D,...) par une fonction « numérique ».

On aplatit cet espace global sur l'axe réel de la fonction.² La fonction z considéré peut être, par ex, la hauteur ou l'altitude, repérant, entre un minimum et un maximum, les points critiques associés à la surface étudiée (comme le tore posé verticalement ci-contre)



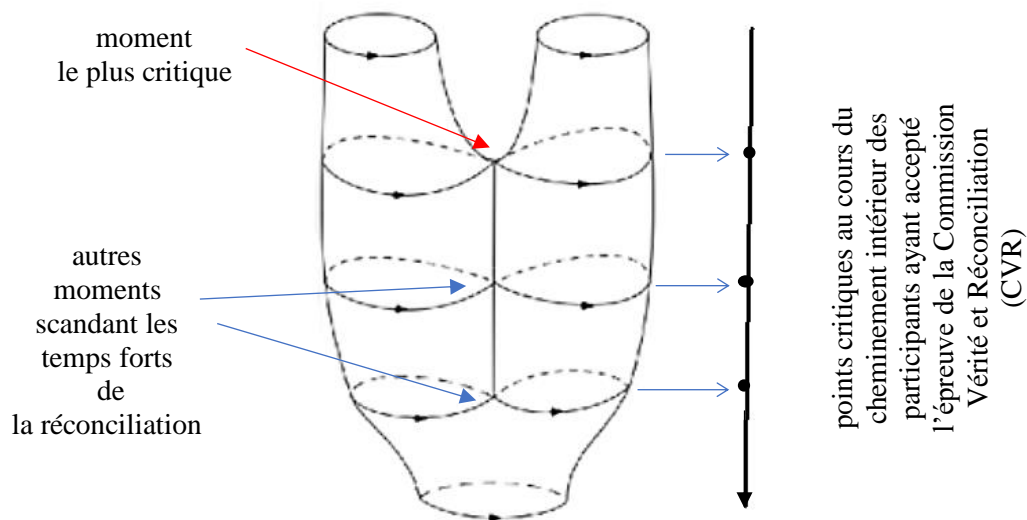
La fonction z définit les lignes de plus grande pente sur le tore. *Ces lignes sont orientées dans le sens des altitudes croissantes, suivant lesquelles la fonction augmente le plus rapidement. Le fait qu'elles soient perpendiculaires aux lignes de niveau montre qu'une mesure des longueurs sur la surface sous-tend cette notion (ici, c'est la longueur euclidienne d'une courbe sur la surface considérée comme une courbe dans \mathbb{R}^3 .*³

Les lignes sur la surface du tore perpendiculaires aux lignes de niveau sont des lignes de gradient. **Le gradient de la fonction hauteur z** peut être « descendant » autant que montant. En matière de justice transitionnelle, ce peut être le mouvement vers une réconciliation de plus en plus grande dans le cadre de la procédure d'une CVR. Rien ne nous interdit donc d'imaginer un schéma plus précis pour décrire une situation comme celle de la fin de l'apartheid en Afrique du Sud :

¹ <https://en.wikipedia.org/wiki/Cobordism>,

² R. Thom, *Exposé introductif*, in *Logos et Théorie des Catastrophes*, p.26.

³ A. Chenciner, *Lexique*, in René Thom, *Prédire n'est pas expliquer*, p.151. Nous sloilignons.



Réconciliation nationale mettant fin à la violence quasi-institutionnelle

(social justice implies social inclusion ; human dignity is linked with human rights)

*On cherche à projeter, à appliquer (application est synonyme de fonction) à la surface sur une portion de droite. **Les points critiques sont des points de résistance**, les points où « ça crie », ceux où les lignes de niveau subissent un changement qualitatif, ceux au voisinage desquels la fonction f refuse d'être une fibration.¹ [voir notre §47 6/iii)].*

MOI toujours. Pour simple qu'il soit, ce schéma est loin d'être trivial : il comporte des points critiques, des « singularités » que l'on pourrait interpréter comme des moments critiques lors du processus de réconciliation. Les participants sont déchirés intérieurement ; ils n'en peuvent plus ; ils sanglotent ou ne peuvent plus parler, projeter en dehors d'eux « la vérité » des crimes qu'ils ont commis ou subis. Comme l'écrit Thom en topologie, *dans cette opération d'aplatissement, l'espace ne se laisse pas faire ; il réagit en créant des singularités pour la fonction*. C'est Thom qui évoquait précisément *les cris de la topologie qui se manifeste par des points critiques*.² Ces points de résistance sont comme des moments où l'excès de refoulement est en crise comme en psychanalyse. Ce sont des forces internes (et parfois externes, du fait de pressions factionnelles) qui empêchent toute élucidation publique.

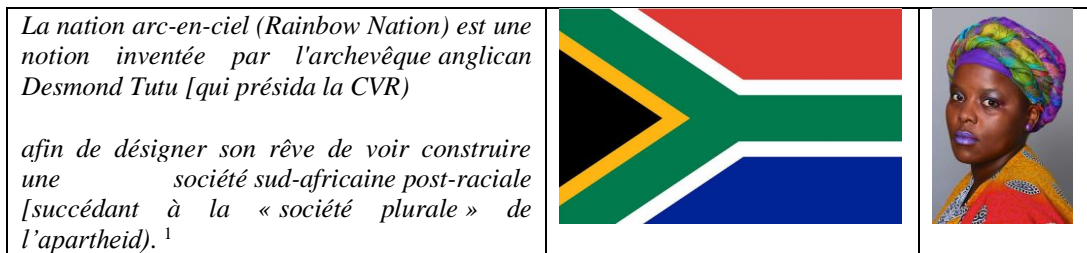
Il s'agit d'un travail de conversion qui implique, non seulement un changement de pouvoir (par ex. celui des Blancs en Afrique du Sud), mais aussi de culture, attendu que ce qui est également en cause sont les représentations de chaque groupe social sur l'autre. La dictature de l'un sur l'autre est bien un effet de la culture héritée ambiante. (Les préjugés et la peur participent de ce pouvoir plus général des croyances qui comprennent les idées religieuses sur ce que fut un homme Noir ou Blanc).

Ce n'est pas non plus la situation d'un cobordisme élémentaire possédant une fonction ayant un unique point critique, constante sur chaque bord. Certes, les lignes de niveau paraissent encore régulièrement espacées, mais c'est par un choix de commodité visuelle. On sait bien que dans la réalité ces séquences de transformation de soi, telles des « séances » collectives et individuelles, sont plus erratiques, dépendantes de la psychologie de chacun ou du contexte général.

Cette vision mathématique laisse entrevoir la « morphogenèse » du processus dynamique de réconciliation vers plus de transparence des non-dits et de justice. Deux ensembles humains, socialement et politiquement séparés, entretenant une animosité mutuelle ancestrale, finissent par se réunir lorsque les bords (ou frontières) de chaque groupe se conjoignent pour former le bord d'une nouvelle « variété » (une nouvelle « forme de société », comme le deviendra l'Afrique du Sud en « nation arc-en-ciel », *a rainbow nation better attuned to the insecurities and hopes of today's people*).

¹ *Ibid.*, p.147.

² René Thom, *Exposé introductif*, in *Logos et Théorie des Catastrophes*, p.26.



Le drapeau sud-africain (au centre) est une belle illustration du cobordisme social du pays. La morphologie dynamique d'un tel diagramme, d'ordinaire invisible, saute aux yeux de tous et de toutes.

LUI ou ELLE. Vous donnez à rêver, mais soyez plus factuel. La nouvelle société est davantage aujourd'hui une cohabitation pacifique qu'une fusion dans un espace plus vaste et homogène. Les inégalités n'ont jamais été si fortes que dans la décennie qui a suivi l'invention de cette expression *nation arc-en-ciel*. Alors qu'elle est censée symboliser la réconciliation raciale et un avenir meilleur, le pays est néanmoins connu pour son insécurité qui n'épargne ni les Noirs ni les Blancs. Beaucoup de ces derniers ont quitté le pays. Il y a un fait, qui en dit long, en restant encore dans le non-dit : les cérémonies privées, y compris religieuses comme le mariage, le baptême, les obsèques, continuent d'être célébrées à l'intérieur d'un même groupe racial. Le ciel de la nation arc-en-ciel reste brouillé.²

(HER and HIM together, having been on the ground) Serious issues are indeed still being ignored ! Whether the South Africa of the 21st century will respond is an open question.

MOI. Sans doute, mais le pays présente déjà une équipe de rugby multi-couleur. Elle a gagné la coupe du monde plusieurs fois. *A glimmer of hope* subsiste, malgré les pesanteurs du passé qui expliquent la lenteur du changement. Une CVR ne peut avoir l'effet d'une baguette magique : Voutch !

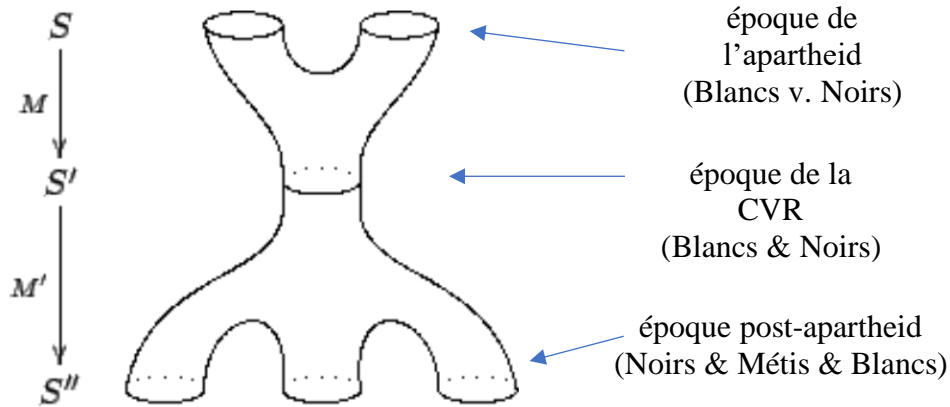
LUI. Vous vous croyez peut-être bon en dessin, mais votre touche demeure simpliste. Je veux bien accepter que le cobordisme soit un outil conceptuel pour métaphoriser le phénomène de justice transitionnelle, mais il serait bon de complexifier votre diagrammation pour comprendre la diversité des situations de ce genre. Vos tableaux synoptiques en annexe les rapportent assez fidèlement.

Pour reprendre l'exemple de l'Afrique du Sud, je verrais plutôt l'épure infra, compte tenu du fait que cohabitent maintenant dans ce pays trois groupes raciaux distincts : les Noirs, les Blancs et les Métis. Leur juxtaposition, il est vrai, n'est plus aussi meurtrière que dans le passé où les Blancs s'opposaient aux Noirs ainsi qu'aux Métis. Je vais parler comme vous en disant qu'on est aujourd'hui en présence d'une « **composition** » de cobordismes, M'M. Les deux variétés, au niveau de S, se « fondent » dans la variété S', en passant par M, et la variété finalement unifiée, S', accouche à son tour, à l'inverse, ... trois sous-variétés au niveau S'' en passant par M' (la période post-apartheid).³

¹ https://fr.wikipedia.org/wiki/Nation_arc-en-ciel

² *Ibid.* V aussi Alain Laraby, « Afrique du Sud : Retour sur l'expérience de justice transitionnelle ». Note DP/042 (DP = Direction de la Prospective), Ministère des affaires étrangères.), 3 février 2012 ; « Réconciliation nationale et émergence économique : l'Afrique du Sud, de Mandela aux BRICS », Note CAPS/170, 20 juin 2013, *ibid.* En tant que diplomate en mission, je suis allé sur place pour rédiger ces notes.

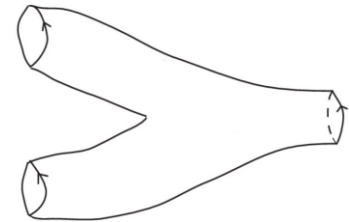
³ Sur la figure originelle inspiratrice en physique quantique : *Lessons from topological quantum field theory*, <https://math.ucr.edu/home/baez/quantum/node2.html>



MOI. Parfait pour la contribution. Je ne saurais dire mieux.

ELLE. Votre diagramme de cobordisme, illustrant la dynamique de la réconciliation, met en rapport deux variétés différentielles non orientées, alors qu'en Afrique du Sud, le groupe des Blancs et le groupe des Noirs avaient des intentions bien arrêtées. Vous auriez dû penser à une orientation sur le bord de chacune de ces « variétés » groupales. Il n'était pas sûr que leurs directions eussent aller dans le même sens.

MOI. Elles n'allaient pas dans le même dans la période de l'apartheid, à l'évidence, mais, lors de la CVR, celle-ci n'aurait pu produire un effet si les Noirs et les Blancs n'avaient pas cherché, de part et d'autre, à mettre fin au régime de l'apartheid de façon pacifique. Il y avait une visée commune : celle d'éviter à tout prix le bain de sang d'une effroyable guerre civile teintée de revanche.



Nelson Mandela a joué un grand rôle pour que les intentions des uns et des autres restent pareillement orientées sur leurs bords.

ELLE. Cette idée de cobordisme est, je l'avoue, plutôt éclairante en droit. Pourquoi ne pas en voir une trace en régime constitutionnel normal ?

MOI. J'y ai songé, au regard d'une cour suprême comme la fédérale aux Etats-Unis.

(§55
2/ii)

ELLE. Oui, pensez justement au rôle de Sandra Day O'Connor comme juge de cette même Cour. Comme première femme nommée à cette instance suprême, elle a joué un rôle reconnu de pivot entre les positions extrêmes de ses collègues. Son attitude créa aussi un espace de rencontre entre leurs bords opposés. Elle tâcha souvent de trouver un terrain d'entente (*a search of common ground*).

MOI. Assurément. Bien qu'elle fût nommée par le Président Reagan du fait de son profil conservateur, elle a su rester à distance des *broad sweeping views* quant à la manière d'interpréter la Constitution de 1787 et ses Amendements. Ses opinions modérées ont été considérés comme des *consequential votes* dans des matières aussi disparates que l'avortement ou le droit électoral.

*She became known for her pragmatism and was considered, a decisive swing vote in the Supreme Court's decisions. she attempted to fashion workable solutions to major constitutional questions, often over the course of several cases.*¹

(§47
7/
a)iv)

Cette position ne l'a pas empêchée parfois d'être ferme, et bien dans ses bottes, quand il le fallut. Dans l'affaire *Hamdi v. Rumsfeld*, traitant en 2004 des questions de sécurité face au terrorisme international, elle n'hésita pas à écrire, *in a plurality opinion representing the Court's judgment*, que « *a state of war is not a blank check [cheque] for the President* » vis-à-vis des droits individuels.²

¹ <https://www.britannica.com/biography/Sandra-Day-OConnor> ; v. aussi son interview par la BBC World service en 2006 : *Sandra Day O'Connor : The first female Us Supreme Court*, <https://www.bbc.co.uk/programmes/w3ct4p3z>

² https://en.wikipedia.org/wiki/Hamdi_v._Rumsfeld

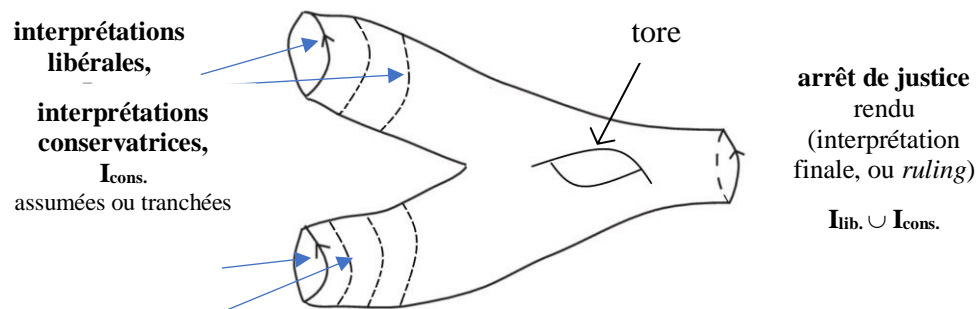
L'Associate Justice O'Connor fut qualifiée, par une presse digne de l'être, de *fair-minded professional*, mais il n'y a pas lieu de voir dans son souci d'équilibre une simple volonté de syncrétisme qui serait une diminution *unfair* des opinions d'autres Justices. L'aurait-elle voulu, qu'elle n'aurait pu y réussir, car le droit, dans une Cour supérieure comme dans un Congrès, ne peut ignorer les rapports conflictuels, voire les défis de puissance de groupes sociaux, qu'embrassent, de façon plus voilée, les juges mêmes. La jurisprudence est comme la politique étrangère d'un pays qui ne peut faire fi de la géopolitique qui révèle des intérêts constants sous des méthodes changeantes. On peut toutefois essayer d'orienter les rapports de force dans un sens positif comme tenta de le faire Sandra O'Connor.

Sous le savoir, l'*épistémè* d'une époque, il y a toujours un *hypogée* où s'agitent des rapports de pouvoir.

(§9) ELLE. Comment traduire cette attitude de « juste milieu » au fond dans un diagramme de cobordisme ? Nous savons, depuis Aristote, que le « juste milieu » n'est pas la simple moyenne arithmétique. Ce n'est pas de l'eau tiède combinant de l'eau chaude et de l'eau froide. Sa synthèse est au-dessus ; elle une élévation, une *Aufhebung*, synthétisant les contradictions situées plus bas.

MOI. C'est « juste », mais reprenons d'abord le schéma précédent pour répondre à votre question. Il me semble que les interprétations libérale et conservatrice sont, de part et d'autre, des classes d'homotopie de lacets (des *loops*, des chemins fermés) qui représentent des variations sur un même thème (deux lacets sont *homotopes* si l'on peut passer continûment de l'un à l'autre). En revanche, au sein de la Cour suprême comme l'américaine, advient une dynamique qui impose des contraintes nouvelles prenant la forme de lacets qui ne sont homotopes, ni aux lacets interprétatifs libéraux, ni aux lacets interprétatifs conservateurs. Tout se passe comme si les différentes interprétations d'origine étaient obligées de composer, sur un tore, avec un lacet indépendant, né de leur interaction.

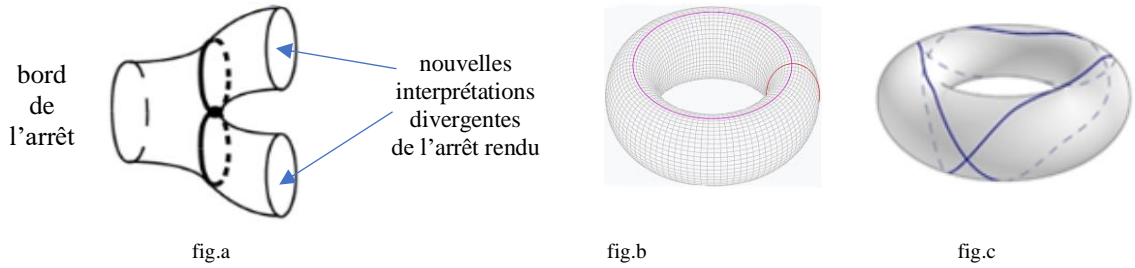
Il n'est pas facile de déformer une interprétation libérale en interprétation conservatrice, et vice versa, sans rupture (saut) ou déchirure idéologique comme sur la figure infra. A leur embouchure éventuelle, il y a comme un point critique. Il est encore moins possible de se hisser par déformation d'un petit lacet à un grand lacet sur la même figure où apparait un tore, (aux commissures de la « bouche » que forme le trou du tore, il y a des points qui ne sont plus des points « réguliers » où rien ne se passe).



La réunion des deux variétés compactes disjointes, représentant respectivement les interprétations $I_{lib.}$ et $I_{cons.}$ n'est pas tant une addition d'interprétations qu'une *suradditivité*. Le bord final est la « somme » des deux surfaces cobordantes. Cette « somme » n'implique pas qu'il s'agisse d'un simple « + ». *Une nation is more than the sum of its parts, unless it lacks clarity of purpose, collaborative drive and strong leadership.*

ELLE et LUI. Le passage par le tore n'est pas clair. On n'y voit pas la surface où se mêlent les lacets !

MOI. Un arrêt de justice, aussi composé soit-il, est un jugement unique, quasi sui generis par rapport aux facteurs qui l'ont façonné, ce qui n'empêche qu'il puisse à son tour être l'objet, à son bord, d'interprétations libérales et conservatrices divergentes. D'où le schéma rectificatif de la *fig.a* infra. Ces interprétations divergentes peuvent naître des opinions dominantes ou dissidentes exprimées dans le corps de l'arrêt qui précède le dispositif. Un tore est engendré par la rotation un petit cercle (vertical, ou méridien) autour d'un grand cercle (horizontal, suivant la longitude). (*fig.b*) Ces deux cercles peuvent être combinés en un mouvement mixte enroulant le tore (*fig.c*).

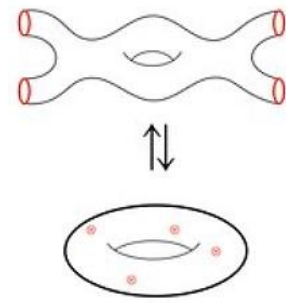


(§24
4/b)

(Nous retrouvons la composition de mouvements différents, comme l'imaginait Galilée avec le trajet d'un boulet de canon. Revoir le mixte chez les Modernes, par opposition au mixte chez les Anciens.)

Ces dessins sont naturellement très schématiques, car on pourrait objecter que les petits lacets verticaux, libéraux et conservateurs, ne sont pas exactement les mêmes comme ils semblent l'être sur les figures. Ce sont deux types de cercles verticaux idéologiques qui doivent être combinés avec le grand lacet longitudinal dans le cadre d'un compromis ou marchandage qui peut se produire dans une cour de justice comme dans toute assemblée politique, même si la comparaison choque. On pourrait imaginer une 1^{re} combinaison entre un lacet vertical, par ex. l'interprétation libérale, et l'horizontal, suivie d'une 2^{de} combinaison entre cette composition et l'autre lacet vertical, la conservatrice, mais il n'est pas assuré que la composition soit aussi associative si on commençait par la dernière...

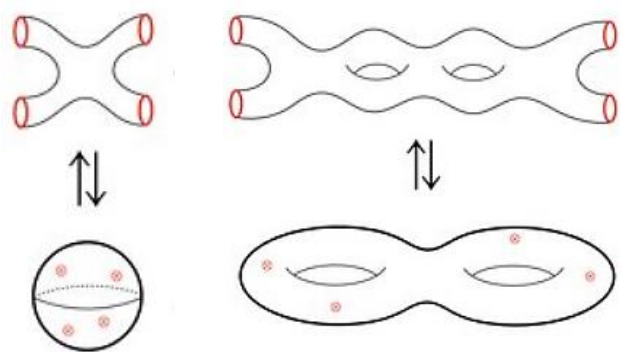
A partir de ces observations, il est aisé de voir surgir, comme par miracle, un tore d'un diagramme cobordisant initial. Il suffit de joindre deux à deux, et les bords des interprétations libérales ex ante et ex post, et ceux des conservatrices ex ante et ex post. Et le tour topologiquement est joué... (fig. ci-contre).



Il est sûr que les interprétations ex ante et ex post diffèrent entre elles en raison de la survenue de l'arrêt de justice qui a été rendu. Mais, entre les premières et les dernières, il existe une certaine continuité de pensée. La rupture totale des idées est peu probable.

1

Cette différence relative entre les interprétations qui précèdent un jugement et celles qui le suivent explique que la surface globale résultante, représentative de l'état du droit, ne peut être une sphère. *Some differences remain.* Il faut s'attendre plutôt à une concaténation de cobordismes donnant lieu) par ex. à un tore à deux trous (une somme connexe).



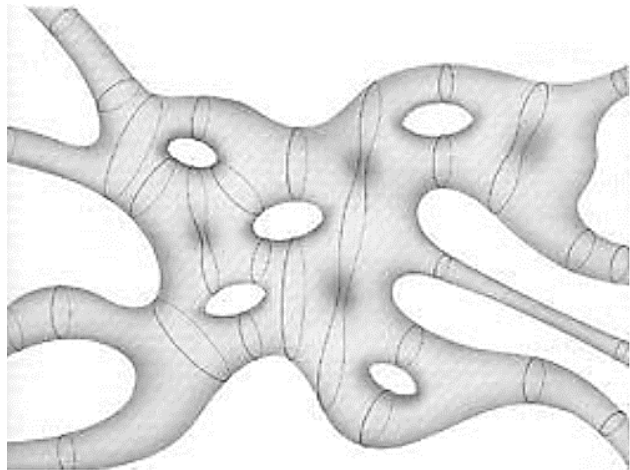
(§47
7/c)-i

Une telle figuration montre le lien, presque organique, subsistant entre la jurisprudence antérieure et la postérieure.

Elle et Lui, ou Lui ou ELLE. Votre démarche s'inspire des figures des diagrammes de la physique quantique, voire de la théorie des cordes des XX^e et XXI^e siècles. Il faut admettre que le cobordisme en droit constitutionnel est peu sophistiqué au regard de cette réflexion physico-mathématique en plein essor.

MOI Sans doute, mais les chercheurs futurs, s'ils empruntent cette voie, qui doit en faire sursauter plus d'un aujourd'hui, y découvriront par eux-mêmes des canevas jurisprudentiels un peu semblables.

¹ https://www.researchgate.net/publication/321488161_String_Theory_at_First_Glance/figures?lo=1



Le lecteur assidu mettra en parallèle le graphe, non moins sophistiqué, de la jurisprudence pré- et post- *Roe v. Wade* de 1973 en matière d'avortement, analysé par les outils de l'algèbre linéaire (matrice, valeurs et vecteurs propres) V. §47 3/b.

Concl.
Chap.
I
3/-iii)
(§60
c)

MOI toujours. Ce qu'il faut retenir aujourd'hui est bien la dynamique interne à une cour suprême comme l'américaine. Dans un espace aussi restreint que celui de 9 juges, se voyant ou discutant jour après jour, directement ou indirectement via leurs *clerks*, la dynamique ne peut être que celle de groupe créant de l'émergence ou de la suradditivité dans les décisions comme dans la théorie des jeux coopératifs. L'interdépendance de leurs cogitations, et prises de position, est une donnée fondamentale, ce qui n'exclut point la liberté de chacun avec son autonomie de jugement et ses particularités. La cour suprême fonctionne, à l'image de la société, de façon individuelle et collective.

Cette interdépendance devient patente lors de la nomination d'un juge en remplacement d'un ancien. Comme il a été rapporté dans l'interview précité de Sandra O' Connor,² on pourrait presque parler à ce moment d'une nouvelle Cour, même si le *Chief Justice* est toujours en place. L'effet de dynamique de groupe devient encore plus patent si ce dernier fait place à un autre Chief Justice. Ne parle-t-on pas de la Marshall Court, la Taney Court, la Warren Court, la Rehnquist Court, la Roberts Court ?

La seconde remarque entend signaler qu'il ne faut pas voir partout du cobordisme en droit constitutionnel. Pensez par ex. au Brexit, décidé par référendum. En 2016, 51,89 % des électeurs se sont prononcés pour un retrait de leur pays de l'Union européenne et de la Communauté européenne de l'énergie atomique. Il y eut trois groupes de *Brexiteers* :

- deux groupes du côté des *Eurosceptics* conservateurs : les partisans d'un libéralisme pur et dur à la Thatcher, et les souverainistes, partisans d'un retour de l'autorité pleine et entière du Parlement sur les lois du pays. Leur argument tient en une phrase, exprimée en anglais : *the EU is run by unaccountable bureaucrats who trample on Britain's sovereignty, thereby deleting British-made regulations*. Ils sont résolument opposés à l'idée que l'Union européenne devienne une unité politique;
- un groupe, composé de *left wing Eurosceptics*, trouvant, *on their side*, l'Union européenne trop libérale.

Ces trois groupes ont réussi, par une campagne fort habile et démagogique, à faire triompher le *No* à l'Europe. Forment-ils pour autant une « réunion » nouvelle, subsumant leurs différences et divisions ? Il est évident que non, au vu de leur rejet commun sur fond de flou artistique pour dire le moins, flou qui masque en fait leurs dissensions permanentes sur le même *Yes* à l'avenir :

*You have at least three groups who disagree about stuff that matters. The Leave campaigns were able to paper over these cracks through vagueness, magical thinking and promising all things to all people. This was very clever campaigning but not good for UK social cohesion. But it was aided and abetted by a willing electorate who were unwilling to understand nuance or trade offs.*³

¹ <https://www.damtp.cam.ac.uk/user/mbg15/superstrings/superstrings.html>

² *Sandra Day O'Connor : The first female Us Supreme Court*, <https://www.bbc.co.uk/programmes/w3ct4p3z>

³ Peter Hawkins, *Why, despite winning their vote to leave EU, are Brexiteers still to angry ?* In *Quora.com* du 18 Dec.2023

Avec un pareil *political divide between them*, on est loin, pour le moment, d'une « variété » humaine nouvelle heureuse, ayant passé à un niveau supérieur (*leveled up*). Les sceptiques, doutant des *Euroscptics*, voient plutôt *a compounding recipe for disappointment [and internal discontent]*.¹ Les nostalgiques regretteront, à tort ou à raison, par rapport à avant, *a far more diverse and dynamic society,- open and creative*. En y ajoutant : *from their perspective, the situation is going bad to worse*.

Annexe : les trois tableaux synoptiques annoncés sur la justice transitionnelle



Quelques exemples de justice transitionnelle dans le monde (1983 - 2014)

¹*Ibid.* Les crochets sont nôtres.

Table des matières

(des parties techniques des chapitres I et II du Volet I)

Les indications techniques sont insérées dans des § correspondants aux § du Volet I

INTRODUCTION GENERALE

PREMIERE PARTIE

L'ESPRIT DE LA SCIENCE DANS LE DROIT DES CONSTITUTIONS

CHAPITRE I : Un concours d'approches issues de la Renaissance

Section 1

L'accent mis sur les différences plutôt que sur la ressemblance

Section 2

L'accent mis sur l'origine plutôt que sur la finalité

A/ L'origine d'où surgit la différence

§ 14. L'art antique de raisonner, p.4. - § 15. Les prémices de la modernité, p.16. - § 16. Le renouvellement de l'*analyse*, ou l'art de penser des Lumières, p.16. - § 17. Son usage en philosophie naturelle et politique, p.28. - § 18. Son approfondissement par le calcul différentiel, p.34. - § 19. La génération de Léviathan et sa perpétuation, p.48

Deuxième leçon des Lumières :

§ 20. La naissance du droit constitutionnel (du contrat social à la séparation des pouvoirs) p.51. - § 21. Première réponse à des objections p.52. - § 22. *Annexe* : Portrait de John Locke

B/ L'origine d'où sourd la puissance

§ 23. Une fascination nouvelle. § 24. La puissance du nombre, p.53. - § 25. La série de puissances, p.71. - § 26. L'idée d'auto-engendrement, p.86. - § 27. De la puissance individuelle au corps social, p.87.

Troisième leçon des Lumières :

§ 28.- Le renforcement du droit constitutionnel (de la science de la résistance au droit de résistance), p.106. - § 29.- Récapitulation et deuxième réponse à des objections. § 30 – *Annexe* : Planches de l'*Encyclopédie* de Diderot et d'Alembert

Section 3

La considération du fait particulier dans le fait général

A/ Le fait particulier n'est pas isolé

§ 31. La loi de nature ou l'unicité d'un processus. p.118. - § 32. La loi positive ou le lien institutionnel, p.131. - § 33. La volonté générale comme objet-limite, p.134. - § 34. Les aventures de la convergence, p.138. - § 35. Encadrement strict et encadrement probable, p.135. - § 36. La porte étroite du droit, p.168. - § 37. L'encadrement des comportements en moyenne, p.171.

Quatrième leçon des Lumières : La self-regulating machine

§ 38. De l'auto-engendrement à l'autorégulation.

- § 39. La machine de Watt constitutionnelle.

B/ Le fait général n'est pas englobant

§ 40. – Une nouvelle vision de l'optique à l'âge des Lumières, p.190. § 41. - L'expérience de Young et son rapport au droit, p.197. - § 42. - Le caractère perturbateur de la résonance, p.202 — Portrait de Pitt le Jeune (peinture).

Addendum : Figures de pensée permettant de suivre comment le balancement des opinions se convertit en action.

§.43. Relativité, dualité et dissymétrie au berceau des partis politiques, p.216. - § 44. Analyse de Fourier en droit positif, p.229. - § 45. Filtrage, convolution et ondelettes, p.246. - § 46. La spécificité de l'interprétation constitutionnelle, p.258. - § 47. La moyenne (des voisins) jurisprudentielle, p.291.

Cinquième leçon des Lumières :

La souveraineté individuelle et la volonté générale au cœur l'une de l'autre

§ 48. L'extension non archimédienne de la science et du droit des Lumières, p.318. - § 49. La conservation de la partie autant que du tout par le contrôle des lois, p.320. - § 50. L'effet de pouvoir d'un excès de contrôle, p.334.

Conclusion

CHAPITRE II : La place de la science et la portée de sa contribution

Section 1

Des savants sur un piédestal

A/ Une révolution submergeant la planète entière

§51. De la diabolisation à la reconnaissance. - §52. De la reconnaissance au retour à la crainte. *Rés. XLIV* -

B/ Une révolution dans les méthodes de penser

§53. Partir du « tout » vers la partie, *p.339*. - §54. « Raisonner en hauteur », *p.352*. - §55. Modéliser en termes d'attracteur, *p.383*. - §56 « Réduire » l'indécision en décision, *p.393*. - §57. Dresser un mur à la Maxwell, *p.418*. - §58. Disolâtrer à la Bentham. § 59 Repenser la volonté générale en termes de nœuds et en termes vectoriels, *p.424*.

Appendice à la demande : le droit constitutionnel comme « espace vectoriel topologique »
(des points de ressemblance plutôt qu'une rigoureuse analogie)

§60. Raisonner en utilitariste et en inférence bayésienne, *p.430*. - §61. Elargir la logique en transformant le carré des oppositions en hexagone. - §62 Ouvrir aussi la logique à d'autres formes périphériques, *p.437*. - §62^{bis}. Le « très » et le « flou », *p.438*. - 62^{er}. Quid encore de la logique bivalente ? *p.456*. - 62^{quater}. Quid de l'indécidable ? *p.457*. - § 63. Déceler le nombre d'or en droit constitutionnel ? *p.477*.

Sixième leçon des Lumières :

Constitutionnalisme ancien et constitutionnalisme moderne

§64. L'expérience grecque et romaine. *p.492*. - §65. L'expérience occidentale moderne, *p.496*.

Section 2

Une contribution majeure en évolution

A/ L'épistémè des Lumières en mutation

§66.- Les Lumières : un phénomène de « lumière » quasi-physique. *p.507*. - §67. Le rajeunissement de *l'épistémè des Lumières : le continuel apport des mathématiques et de la physique à l'étude du droit constitutionnel*. *p.528*. - §67^{bis} (*Suite de cet apport*), *p.546*.

B/ Une action efficiente mais circonscrite

§68.- La part de la nécessité et du probable, *p.583*. - §69.- L'apport vivifiant de la science susceptible de renouveler l'approche du temps, *p.614*. - §70.- De l'horreur du vide à son acceptation sur Terre et au Ciel, *p.650*. - §71. Le triangle croire- savoir – incertitude, *p.653*.

Septième leçon des Lumières :

§72. Le *feed-back* du droit constitutionnel sur la science moderne, *p.655*

CONCLUSION GENERALE

o

Un bonus : justice transitionnelle et cobordisme mathématique, *p.656*

brève vue d'ensemble
(brief overview)

brève vue d'ensemble

1/ Le titre de la thèse, **Le constitutionnalisme des Lumières**, comprend deux sous-titres : *De l'objet des lois au sujet de droit*, et *De l'objet géométrique à la liberté politique*

La thèse couvre en fait une période plus longue que ne le suggère le titre, car le constitutionnalisme des Lumières est un mouvement, et non un état. Les Constitutions étudiées sont essentiellement l'anglaise, l'américaine et la française des XVII^e et XVIII^e siècles. Le constitutionnalisme en question porte sur la structure et l'évolution de ces Constitutions.

Le 1^{er} sous-titre indique comment le droit constitutionnel des Lumières est bâti sur l'idée qu'il incombe au droit positif de l'Etat de garantir le droit naturel moderne et ses métamorphoses. Par l'objet des lois – la liberté politique – les sujets assujettis deviennent des sujets de droit.

Le 2nd sous-titre indique la manière dont l'étude est entreprise. Il s'agit moins de passer d'un énoncé à un autre énoncé que d'un diagramme à un autre diagramme afin de constater in visu les multiples modes de raisonnement capables d'éclairer le droit non moins moderne.

Les deux sous-titres ont un lien : **l'esprit de la science moderne dans les Constitutions non moins modernes, ou comment de nouveaux modes de raisonnement en science peuvent éclairer, sous forme de diagrammes, les nouveaux modes d'autorité politique en Occident.**

2/ Chaque concept du droit constitutionnel (séparation des pouvoirs, séparation des Eglises et de l'Etat, fédéralisme, procédure parlementaire, interprétation du droit par tous les acteurs institutionnels en compétition, volonté générale, lutte contre les factions, modes de décision, droits de l'homme, procédures de démocratie directe et indirecte, etc.) est analysé au crible des concepts scientifiques (barycentre, fonction à plusieurs variables, laplacien, « variété » topologique, arithmétique modulaire, théorie des groupes, séries de Fourier, théorie des nœuds, espace des phases,).

Le but de « l'exercice » n'est pas de réduire le droit constitutionnel (et la philosophie politique sous-jacente) aux mathématiques, ni d'appliquer ces dernières au droit. L'ambition est plus modeste : on entend seulement montrer une certaine parenté entre les modes de raisonnement de la science et du droit organisant le fonctionnement de l'Etat. **Ce parallélisme est au mieux un pseudo-isomorphisme.** Le préfixe *pseudo-* n'est pas à prendre au sens de faux, de trompeur, mais au sens, comme en science même, de qui ressemble logiquement à, à déformation près. L'analyse est générique ou qualitative. Elle n'entre ni dans les détails ni dans des mesures fort précises. Son souci est plutôt de mieux singulariser le propre du droit.

3/ Cette assimilation partielle révèle au jour l'« intériorisation » par le droit constitutionnel des procédés d'analyse de la science moderne. Ce qui est intériorisé sont des contraintes du monde naturel. Le droit positif des Lumières (et post-Lumières) les intègre, consciemment parfois, ou à son insu plus souvent. La thèse s'efforce de dégager la portée d'une telle internalisation : la liberté, qui s'est affranchie, en est devenue plus affermie grâce à des « butées » constitutionnelles qui visent à retenir l'exorbitance éventuelle des pouvoirs.

Bien que la comparaison s'avère partielle, l'analogie permet au droit constitutionnel de contrôler en retour, tant bien que mal, l'usage de la science et de la technique modernes. Sous ce rapport également, le constitutionnalisme des Lumières s'oppose aux régimes autoritaires et totalitaires. Ces régimes n'hésitent pas, aujourd'hui plus que jamais, à les retourner contre la liberté politique et individuelle dont pourraient jouir leurs populations. Sans la liberté, contestatrice par nature, la justice ne peut advenir. Seule une minorité installée profite du système en joignant au monopole de la force celui de l'opinion. Cette perversion autant du savoir que du droit régissant l'Etat tourne résolument le dos à l'héritage des Lumières.

brief overview

1/ The title of the thesis, ***The Enlightenment constitutionalism***, is underlined by two subtitles : *From the purpose of law to the subject of law*, and *From the geometric object to political liberty*.

The thesis actually covers a longer period than the title would suggest, since the Enlightenment constitutionalism is a movement, not a stasis. The Constitutions of this study are primarily the English, the American and the French ones. The constitutionalism under discussion bears on the structure and evolution of these Constitutions.

The first subtitle points out how the Enlightenment constitutional law is based on the idea that the positive law of the State guarantees modern natural law and its metamorphoses. This is the purpose of law – mainly political liberty – that make subjected people free under law.

The second subtitle indicates that the research study is carried out through multiple diagrams. Their successive display highlight diverse on-going modes of reasoning in modern science.

The two subtitles are linked : **the spirit of modern science in modern Constitutions, or how scientific modes of reasoning could help to clarify, through diagrams, new modes of political authority in the Western world.**

2/ Every concept of constitutional law (separation of powers, separation of church and state, federalism, parliamentary procedures, interpretation of law by competing institutional powers, general will, regulation of various and interfering interests, whether private or public, decision-making strategies, human rights, direct and indirect democratic procedures, and so on). Each of those comes under scrutiny in the light of modern scientific concepts (barycentre, multiple variable function, laplacian, topological manifold, modular arithmetic, group theory, Fourier series, knot theory, phase space, ...).

The goal of the exercise is neither to boil down constitutional law (and underlying political philosophy) to mathematics or physics, nor to apply them straightforwardly to law. The ambition is more modest : it is to show a certain relationship between modes of reasoning in science and law and its limits. **The parallelism is at most a pseudo-isomorphism.** Such a pseudo- prefix should not be understood as being false or misleading. It only depicts, like in science, approaching logical problems with some variations. The analysis is generic or qualitative. It does not intend to enter into excessive details or definite measures. Its concern is rather to better single out the characteristic feature, the hallmark of law governing State.

3/ This assimilation openly reveals how modern scientific modes of reasoning have been incorporated into constitutional law. What seems rather well internalized are the constraints from natural world, either in a conscious way, or, more often, without the full knowledge of drafters or users of constitutional law. The thesis also aims at identifying the scope of such a integration : liberty became free thanks to the constitutional stops that endeavour to prevent State power from being exorbitant.

Although the analogy turns out to be partial, it allows constitutional law to take back control, - albeit not always successfully, - the use of modern science and technology. Under this perspective the Enlightenment constitutionalism opposes to authoritarian and totalitarian, regimes. These regimes do not hesitate, more than ever, to turn them against political and individual liberty that their populations might enjoy. Without liberty, which is challenging by nature, justice cannot happen. Only a minority in power benefits from the system by the monopoly of force as much of opinion. Such a perversion of knowledge and State law steadfastly turns away from the heritage of Enlightenment.

Compendium

(Recueil de tous les résumés, figurant dans les volumes 1 et 2 du Volet I)

Ce recueil accueille des aperçus qui se suivent, plutôt qu'ils s'enchaînent, jusqu'à une conclusion provisoire. Chaque résumé répète, comme un drame, un conflit qui ouvre, à chaque fois, sur une solution un peu différente. Le conflit en question a trait au dialogue entre le droit constitutionnel et le cours du monde, - entre la perception de la Nature physique et la puissance politique et ses effets.

Tout dans le cosmos semble obéir à des lois de nature, à l'instar des masses qui s'attirent, ou des charges électriques qui interagissent. Cependant, la négociation de l'homme avec la Nature, via la science dont le droit moderne s'inspire souvent à son insu, ne répond plus toujours à la logique, ou du moins à la même logique. Des lois émergent par exemple - qui l'eût cru ? - du hasard, mais le hasard prend aussi des formes multiples tant l'aléatoires. L'harmonie politique supposée d'antan elle-même est ébranlée. Elle n'éclot plus spontanément. L'ordre humain relève désormais moins du providentiel que de l'artificiel, de ce qui est construit rationnellement par l'homme, sans que l'artificiel soit factice.

A l'âge des Lumières, la nature humaine, censée être éternelle, fait place à la condition humaine. Des individus nouveaux, qui n'étaient que poussière, au plus bas de la société, surgissent dans des contextes particuliers. L'époque est devenue sensible, moins à ce qu'ils sont qu'à ce qu'ils font, notamment le commerce, et elle prête plus attention à ce qu'indiquent leurs avis et opinions. On ose partout contester la civile autant que la religieuse. Ce qui s'ensuit sera empli de la même philosophie.

A la vertu, prétendant placer des obstacles dans le cœur des gens au pouvoir, on préfère faire davantage confiance aux contraintes matérielles institutionnelles plus aptes à corriger le dérèglement des passions. A leurs interprétations s'opposent d'autres interprétations, d'où il ressort un équilibre dans le cadre de la séparation des pouvoirs. Cet équilibre est stable, sans l'être tout à fait, pouvant être revu par un renouvellement régulier, ou imprévu, de la volonté de tous par la volonté générale.

Ainsi, aux certitudes arrogantes et fragiles d'autrefois, ont succédé des incertitudes approchées, mais plus fiables, tant dans le savoir que l'action. Les Lumières s'épandent sur un abîme sans solution définitive perdre leur éclat.

Résumés de l'Introduction générale, 703

Résumés du Chapitre I, 706

Résumés du Chapitre II, 758

RESUMES DE L'INTRODUCTION GENERALE

1/La période étudiée : a) L'empire de la science classique ; b) L'heure du constitutionnalisme

Résumé I

① Les Lumières ont commencé à poindre vers 1450 et cessé de briller vers 1830. Elles naissent en opposition au moyen âge. Elles deviennent mal aimées, mal comprises ou peu reconnaissables au cours du XIX^e siècle. Dans l'intervalle considéré, elles constituent une pensée plus ou moins unifiée.

Les Lumières exhument moins le passé que les lois de la nature. Elles exhibent en droit des lois « positives » qui font écho aux premières au plan constitutionnel.

② Les Lumières expriment un savoir général, une *épistémè* pour reprendre une expression usitée.

L'épistémè des Lumières rassemble des raisonnements qui informent la pensée quel que soit l'objet étudié. Droit et science présentent des instructions communes pour mieux s'accommoder à la réalité.

Il existe un raisonnement de base que les Lumières partagent plus que tout autre. Le moyen âge voyait partout dans le monde une fin cachée. A l'instar des premiers hommes, les Lumières se contentent d'inverser les effets en causes. Par ce procédé, les Lumières espèrent progresser.

Le constitutionnalisme des Lumières a pris acte du succès de la science. Le droit public s'est construit et autoproduit, en intériorisant, presque sans le savoir, les règles qui gouvernent la nature.

Les sujets sortent de leur assujettissement. Ils réalisent un objet, - la liberté politique, - qui les transforme en sujets de droit. De même que les individus deviennent artistes en pratiquant leur art, de même ils deviennent citoyens en décidant de faire la politique leur propre affaire (*subject-matter*).

③ Ce mouvement d'orientation des Lumières définit le sens de notre travail. Nous passerons des effets aux causes en étudiant comment la science procède et comment le droit régule l'Etat. L'*épistémè*, à la source de laquelle ils s'alimentent, se dégagera d'elle-même. Le savoir des savants ne précède pas toujours celui des publicistes, mais il s'avère que les nouveaux modes de pensée du droit sont éclairés par la science et ses voies de recherche à nulle autres pareilles (*unlike any other*).

2/ La méthode employée :
a) une méthode comparative générale ; b) une méthode comparative détaillée

Résumé II

① Il ne suffit pas de dire vers quoi tend le présent travail. Il faut aussi annoncer les moyens d'y parvenir. Notre méthode, en l'espèce, est comparative et qualitative.

Elle compare des façons de penser en droit et en science, plus précisément **des nouveaux modes de raisonnement dans le savoir et des nouveaux modes d'autorité dans le pouvoir**. Se faisant, elle cherche à mettre en relation moins des solutions que des manières de poser des questions. Voilà la motivation générale, *the overall objective of our programme*.

② Ce qui se révèle commun est de l'ordre de la logique. Comment comprendre et résoudre une situation. Des situations analogues suggèrent des stratégies analogues, malgré l'éloignement des matières auxquelles l'esprit est confronté. La comparaison ne porte pas sur les mathématiques et la physique, mais sur la science physico-mathématique d'un côté et le droit de l'autre. Un rapprochement entre la physique et la biologie, voisines, aurait pu paraître moins risquée, mais il n'y avait pas beaucoup de Diderot au XVIII^e siècle pour oser appréhender le vivant à partir de l'inerte :

*Tous les êtres circulent les uns dans les autres, par conséquent toutes les espèces... tout est en un flux perpétuel... Tout animal et plus ou moins homme ; tout minéral est plus ou moins plante; toute plante est plus ou moins animal. Il n'y a rien de précis en nature.*¹

③ La jonction des philosophies naturelle et politique qui s'opère à l'âge des Lumières n'est guère de nature quantitative. Il s'en faut de beaucoup que les modèles de comparaison fournissent une estimation, mais ce qui est limité sous ce rapport peut être fécond dans une étude transdisciplinaire. L'approche qualitative n'autorise nullement la paresse intellectuelle. Nous resterons au plus près des réflexions du droit et de la science comme le ferait un praticien qui a un pied en chaque domaine.

④ L'étude de la transfusion de la science en droit constitutionnel ne sera pas qu'une cogitation inutile. Son éclairage montre combien la liberté politique (et civile) en sortira renforcée. Cet objet des lois premier du constitutionnalisme des Lumières sera plus à même de garantir en retour les mésusages de la science et de la technique de pointe par ceux qui veulent asseoir leur pouvoir en violant le droit.

⑤ Comme nous y invite le point ④, l'actualité alimentera à l'occasion notre réflexion. Les nouvelles du monde montrent que le droit des Lumières jusqu'à ses mutations actuelles n'est pas sans être sérieusement secoué par une telle éventualité. La tentative de prise de contrôle par la foule, encouragée par le Président Trump, est un avertissement que rien n'est définitivement acquis. L'agression de l'Ukraine par la Russie, redevenue despotique, et usant d'une technologie meurtrière, en est un autre. La façon plus qu'autoritaire de juguler en Chine l'épidémie de la Covid-19, et ses variants, confirme, au grand jour, les déficiences d'un droit qui n'a pas appris à son profit les leçons de la science. Trump niait la science. Poutine et Xi Jinping s'en servent contre la liberté des gens.

¹ Diderot, *Le rêve de d'Alembert* [1769], Paris, Garnier, 1961, p.311.

RESUMES DU CHAP. I :
Un concours d'approches issues de la Renaissance

SECTION 1

L'ACCENT MIS SUR LES DIFFERENCES PLUTOT QUE SUR LA RESSEMBLANCE

§ 1.- L'ATTENTION AUX FAITS NEGATIFS.-

§ 2.- LA CONNAISSANCE CLAIRE ET DISTINCTE. § 3.- L'IDEE D'UN ÉTAT SOUVERAIN ET RECOMPOSE.

(Résumé III)

① L'attention aux faits négatifs démontre combien l'esprit moderne commence à douter de lui-même. Halte aux analogies qui concluent trop vite à l'unité du monde ! Pour Bacon, le salut de l'esprit exige qu'on se dégage de leur emprise.

Tout le monde est unanime pour dénoncer ce que le moyen-âge appelait le réalisme. Comment a-t-on pu croire qu'une idée générale pût exister comme une chose particulière ?

Les Lumières sont réfractaires à cette façon d'étouffer la différence sous la ressemblance.

② Les mathématiques, utiles aux arts mécaniques, sont l'instrument idoine d'épuration d'un savoir trop subjectif. En beaucoup d'autres domaines, elles offrent l'espoir d'une connaissance claire et distincte qui ouvrirait la voie à un savoir plus objectif.

L'époque subodore les difficultés que pose l'étude de la matière comme de la pensée, mais ces difficultés ne lui paraissent pas réhivitoires. Elle reste fondamentalement optimiste !

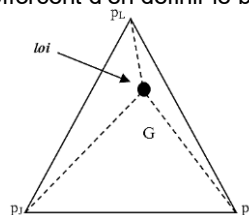
③ Selon Descartes, l'idée claire et distincte est manifeste dans l'appréhension d'un morceau de cire. L'idée subsiste au-delà des modifications apparentes sous l'effet par exemple de la chaleur. Le morceau de cire est assorti de qualités propres (*qualités primaires*) qui en font un *ob-jet*. Ses qualités sensibles (*secondaires*) ne renvoient qu'au *sujet* qui le voit.

Bodin ne songe pas au morceau de cire, mais son idée de la souveraineté de l'Etat évoque celle du résidu d'une cire fondue. La souveraineté a des *qualités indivisibles* qui subsistent quelles que soient les variations de l'Etat. Chez Hobbes, elle est incarnée par Léviathan.

L'idée de l'Etat devient plus claire, mais elle ne distingue pas les parties qui le composent.

L'idée claire *et distincte* de l'Etat deviendra manifeste dans le contrat social. Hobbes, puis Rousseau, comme jalons essentiels, s'emploieront à définir l'Etat comme un ensemble d'éléments, doté de propriétés qui en conservent l'unité, en deçà de toutes ses tribulations.

La perception claire et distincte de l'Etat deviendra aussi manifeste dans la séparation des pouvoirs. Après avoir dissocié les notions de *fonction* et de *pouvoir*, Locke et Montesquieu les entremêlent aussi savamment que les propriétés d'un triangle dont ils s'efforcent d'en définir le barycentre.



§ 4.- LA SEPARATION DES EGLISES ET DE L'ÉTAT.

(Résumé IV)

① Séparé davantage de Rome qu'au moyen âge, l'Etat moderne ne s'est jamais coupé pour autant du monde religieux. Le retrait de l'Eglise dans l'Etat a fait place à une Eglise nationale dans laquelle l'Etat a joué plus ou moins le rôle du Pape.

La scission du christianisme entre catholicisme et protestantisme n'a guère modifié cette évolution en faveur de l'Etat.

② Ce qui est nouveau est l'affirmation outre-Manche que l'Etat ne doit s'occuper que des choses indifférentes à la religion. Ce principe, formulé par Locke, fonde la séparation des Eglises et de l'Etat. La religion devient une fonction sociale dont l'Eglise assure la plus grande part. L'Etat n'intervient que si les prières et les prêches dégénèrent en pugilat ou en guerre civile.

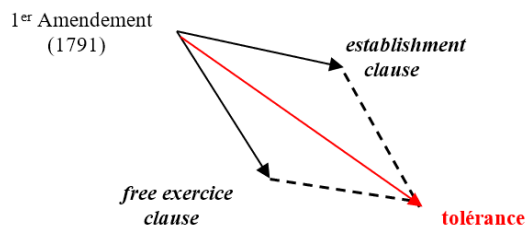
Le partage de la fonction religieuse entre les Eglises et l'Etat ne doit emporter aucune immixtion sous le couvert d'une collaboration nécessaire entre les deux institutions. Outre-Atlantique, un mur de séparation est élevé pour éviter que l'Etat ne favorise une religion. Pour Jefferson et Madison, le salut des âmes – et de l'Etat – en dépend.

③ La mise au point des rapports entre les Eglises et l'Etat n'est qu'un premier pas dans le règlement de la question religieuse. Sur le continent, les Etats ont du mal à s'affranchir de la tutelle pontificale et de son esprit. Bien qu'ils deviennent anticléricaux, ils conservent une allergie à la diversité qui les rend plus catholiques que le pape. Par son protestantisme diversifié, la Hollande fait figure d'exception.

Outre-Manche et outre-Atlantique, les circonstances et les idées ont su convertir un tel conflit en une adaptation progressive. La séparation des pouvoirs a fini par apparaître utile pour défendre la tolérance. La séparation des pouvoirs offre plus de garantie qu'une déclaration des droits. *All papier barriers*¹, si beaux soient-ils, ne trouvent qu'un appui en eux-mêmes. Au lieu de vœux pieux, l'époque préfère, comme en science, des mécanismes. Sous l'influence de Voltaire, Madison et Jefferson voient dans la mise en concurrence des religions un opérateur puissant pour en refroidir l'ardeur excessive.

Une chose est de diviser les pouvoirs, une autre est de multiplier les sectes. D'un côté, on divise le pouvoir civil ; de l'autre, on affaiblit le pouvoir religieux. Le pouvoir civil est toutefois moins diminué que le pouvoir religieux. Il garde les commandes. La séparation des pouvoirs et le pluralisme des Eglises mêlent leurs effets pour pacifier l'espace où chacun, au nom de Dieu, s'étripait. L'Etat moderne assume pleinement la différenciation au sein du pouvoir civil comme celle au sein du pouvoir religieux.

④ Le raisonnement du 1^{er} Amendement de la Constitution fédérale américaine fait écho à celui du parallélogramme des forces de Newton. Deux clauses « additionnent » leurs effets. L'une interdit toute Eglise établie ; l'autre protège l'exercice d'une religion. Ces deux clauses se renforcent. Leur conjonction établit un climat de tolérance sans que surgissent entre elles des tensions insurmontables.



⑤ Le jeu combiné de la multiplication des sectes et de la séparation de pouvoirs participe du même schéma de pensée. La séparation des pouvoirs veille ainsi au respect de la liberté religieuse.

§ 5.- UNE CLASSIFICATION PLUS FINE DES CONSTITUTIONS

(Résumé V)

① Sans rompre le lien entre l'un et le multiple, les Lumières sont fascinées par la distinction.

Dans la classification des constitutions, le despotisme ressort d'une singulière façon. Souveraineté et gouvernement se confondent. Le despotisme n'entre dans aucune des catégories politiques, même s'il arrive qu'il en dérive. Ce régime n'est ni la monarchie, ni l'aristocratie, ni la démocratie. Le despotisme isole totalement les individus. Il particularise les intérêts au point d'abolir en chacun le sens de la communauté. Il n'y a plus de voisin.

② Le despotisme est, non seulement distinct, mais monstrueux. Rien ne lui est comparable, hormis l'esclavage. Comme l'écrit Bodin dès le XVI^e siècle :

Le despote est si abhorré que l'on emploie toutes sortes de raisons pour le décrier. « Une autorité contre la loi de la nature, dit-on, ne peut être légitime. La nature a fait des hommes libres ; le despotisme en fait des esclaves. »

¹ R. Ketcham, *James Madison*, p.290

Sans doute, l'esclavage politique n'est-il pas exactement l'esclavage domestique. Le sujet, aussi asservi qu'il soit, n'est ni une chose ni un bien meuble, mais, ajoute Bodin,

le souverain n'a jamais pu penser qu'il fut le motif déterminant pour lequel le Ciel a fait naître ses sujets. Il les a soumis à lui pour les conduire et les conserver, et non pour être les victimes d'un pouvoir arbitraire.¹

Le Ciel a changé de couleur. Il est toujours ce qui est conforme à la nature, mais la nature exclut désormais, dans la cité, l'esclavage domestique. Le droit naturel ancien est devenu moderne. L'esclavage politique est honni autant que le civil. Fantôme ! Fantôme ! me quitteras-tu enfin quelque nuit ? *Ghost, you are still wandering here and there. Wherefore this ghastly looking?* Finiras-tu de nous terroriser ? La société s'affranchit de sa peur collective. En homme sensé, Locke fait suite à Shakespeare en comparant expressément les deux formes d'esclavage :

La liberté naturelle de l'homme consiste à vivre affranchi de tout pouvoir supérieur sur terre, sans dépendre de la volonté, ni de l'autorité législative d'aucun homme et à ne connaître d'autre règle que la loi de nature.²

③ Les Lumières distinguent l'Angleterre, en marge, elle aussi, de toute liste. En séparant les pouvoirs, la constitution anglaise est la première à mettre fin au despotisme politique. *C'est un chef-d'œuvre de législation que le hasard fait rarement*, relève Montesquieu. Il appartient à l'art politique de s'en inspirer pour éviter à l'individu à nouveau de disparaître. Les Etats-Unis briseront, à leur tour, le despotisme que l'Angleterre même exerçait à leur égard. Ils tarderont cependant, à réconcilier, chez eux, la fin de l'esclavage politique et le civil.

§ 6.- L'EXACERBATION DE LA DIFFERENCE. - § 7.- LE COMBAT CONTRE L'ERREUR

(Résumé VI)

① Le propos de Hegel montre combien la conception de l'analyse a évolué au cours des Lumières. L'analyse demeure la décomposition d'une représentation en ses éléments originaires, mais l'activité de diviser met en évidence la puissance prodigieuse du négatif (cf. sa Préface à la *Phénoménologie de l'esprit*, op. cit., t.1, pp.28-29).

On pourrait reprocher à Hegel de diviniser cette puissance, mais il faut reconnaître son extraordinaire sensibilité à la pensée d'une époque si attentive aux effets opposés.

② Qu'on me permette de dire *non*. La chose n'est pas croyable, mais la séparation des pouvoirs en a autorisé la formulation au sein du pouvoir ! Chaque pouvoir a acquis une indépendance. Aucun n'est subordonné à l'autre. Les pouvoirs législatif, exécutif et judiciaire n'ont pas de compte à rendre de leur action. Ils peuvent agir sans que l'autre agisse, mais leur indépendance juridique n'exclut pas leur participation à une même fonction (l'élaboration de la loi par exemple). Le *non* est même représentable. Les trois pouvoirs forment un système d'axes perpendiculaires ayant la même origine. La participation à une même fonction se situe au croisement des contributions de chaque axe (la loi se situe au point de concours des apports relatifs – en % - des trois pouvoirs).

Le *non* ne s'affirme pas seulement au sein de la séparation des pouvoirs. *Je crois que non*, ou *je crois différemment*, jusqu'à *je ne crois pas*, s'invite également en religion, ou en marge d'icelle, dans le cadre de la séparation de l'Eglise et de l'Etat.

L'Eglise et l'Etat sont parvenus en Angleterre à devenir indépendantes l'une de l'autre. On dira plutôt que les deux institutions sont autonomes tant la variation de l'une répond à la variation de l'autre. Le roi demeure, toutefois, le chef de l'Eglise anglicane. Le *non* dans le *oui* est également concevable. La *dual constitution of church and state* donne lieu à un système d'axes obliques de même origine. Il n'y a plus d'autorité à pensée unique.

L'indépendance des deux institutions est nettement plus affirmée aux Etats-Unis. L'Eglise et l'Etat ont aménagé leurs relations en position orthogonale. Une telle distanciation oblige à collaborer sur un pied d'égalité. Les deux clauses du 1^{er} Amendement ne forment pas, entre elles, un angle droit. Elles n'en restent pas moins distantes l'une de l'autre, mais leur complémentarité l'emporte sur la contrariété.

¹ Bodin, *De la République*, Liv.II, chap. 3: De la légitimité et de la durée des empires despotiques, in C. de Lavie, *Abrégé de la République de Bodin*, op. cit., p.222.

² Locke, *Deux. Traité...*, §22. Extraits de *A Midsummer Night's Dream* [1590-96] et *The Tempest* [1610-11]. - *wherefore* : for what reason.

Toutes les nuances de la *différence* hégélienne chatoient, brillent et étincellent en droit public. Plus l'angle entre les pouvoirs est grand, plus leur indépendance est accusée. La tension monte ! Il n'y a rien de tel que la négation pour forcer à écouter et à s'accorder.

③ Le combat contre l'erreur est mené sans répit sur tous les fronts, mais la recherche de la vérité ne se réduit pas à la pourchasser. L'erreur plaît pour elle-même. On s'y intéresse. On découvre qu'elle a une vérité et une densité propres. L'ignorer est le comble de l'erreur. Tout ne tombe dans l'abîme du doute. L'erreur oblige la vérité à se contredire.

L'ombre apparaît et monte en degré dans la peinture des Lumières. Les ténèbres envahissent le tableau. Elles font partie de son unité. La lueur – l'éclair ! - se dégage mieux de l'obscurité.

§ 8.- La critique du critère de la vérité

(Résumé VII)

① La vérité va de pair avec sa critique. Grâce à cette association tumultueuse, les Lumières adoptent une nouvelle façon de voir la vérité.

Au moyen âge, le démon demeurait en retrait. Avec le monde moderne, il réapparaît sous forme multiple au cœur de la vérité :

- sous une forme subjective, lorsque le moi s'autorise à dire quoi que ce soit ;
- sous une forme logique, lorsque la cohérence du dire est passée au peigne fin ;
- sous une forme objective, lorsque les faits (*the evidence of the senses*) impose leur version, nonobstant la logique et la conviction. *Le diable se niche dans les détails.*

② Il ne faudrait pas croire que le thème du démon jure avec une approche rationnelle. Le démon est aussi familier aux hommes des Lumières qu'à ceux de l'antiquité. Socrate parlait de son *daimon*. Descartes évoque *le malin génie* qui pousse sa pensée dans ses retranchements. Grâce au démon, le doute devient radical contre tout ce qui est établi.

Les publicistes n'échappent pas au démon de la vérité qui ronge leur époque. Suivant Descartes, Montesquieu conclut que la matière existe, bien que *nous ne sommes pas sûrs qu'il y ait un monde, parce que Dieu peut être trompeur et nous affecter de manière que nous serions comme ceux qui rêvent, ou comme ceux à qui on a coupé une jambe, et qui la sentent sans l'avoir.* (*Mes Pensées*, n°2067).

③ Les démons subjectif, logique et objectif forment une troupe joyeuse et désordonnée qui contribue à la construction d'une vérité et à une politique moins arbitraire.

*C'est un grand agrément que la diversité.
Nous sommes bien comme nous sommes.
Donnez le même esprit aux hommes,
Vous ôtez tout le sel de la société.
L'ennui naquit un jour de l'uniformité.*

(Antoine Houdar de la Motte, *Les Amis trop d'accord*, Fables, Paris, 1719)

④ Les démons se piquent du savoir et fréquentent comme experts les allées du pouvoir. Chacun conseille diversement l'Etat :

- le démon *subjectif* prépare le pouvoir exécutif à faire face à l'événement ;
- le démon *logique* fait passer ses résolutions aux membres du Parlement ;
- le démon *objectif* assiste aux procès en veillant au respect des faits et des précédents.

Ces génies facétieux errent en politique comme dans les laboratoires des savants. Contrairement aux certitudes révolutionnaires, le droit ne se confond pas avec la seule vérité subjective. Il a besoin d'autres critères d'évaluation pour asseoir sa légitimité. Le droit ne saurait se confondre avec la vérité de la science tant il dépend de la volonté politique qui n'entend pas toujours l'entendement. Les murs entre le droit et la science ne sont pas toutefois étanches. Les démons de la critique passent à travers sans hésiter. Leur venue n'exclut pas le droit d'être empesté par le diable local de la chicane.

⑤ De malicieux, ils deviennent des génies protecteurs. Par un étrange retournement, leur fourberie les incite à travailler ensemble. Tous tirent à hue et à dia pour leur compte, mais tout compte fait, en droit comme en science, leur chahut produit du bon.

La Discorde n'est pas mauvaise mère. Une synthèse constitutionnelle sort du brouhaha.

§ 9.- LA SYNTHÈSE DES CONTRAIRES.

§ 10.- LES DEUX ERREURS D'INTERPRÉTATION DE HEGEL ET LEUR POSTÉRITÉ

(Résumé VIII)

① Pour prévaloir sur les ressemblances évidentes, la différence gonfle en importance : elle apparaît sous forme d'une distinction avant de s'aiguiser en opposition. Quand l'opposition devient franche, elle se transforme en contradiction. La synthèse des contraires opère alors.

Un Etat qui n'est pas absolu accepte sa propre négation ou contestation. La séparation des pouvoirs en montre la voie. Chaque pouvoir porte la contradiction à chacun des deux autres. Leur action et contre-réaction produit une synthèse qui surmonte la contradiction mutuelle.

La synthèse des contraires de Hegel peut faire l'objet d'une représentation dans les mathématiques de l'époque qui raisonne aussi à partir de positions extrêmes. La synthèse des pouvoirs a encore la forme d'un triangle dont chaque sommet représente un pouvoir. L'équation du plan, où se situe le triangle, est celle dont la somme des coordonnées $x + y + z = 1$.

② Selon Hegel, la séparation des pouvoirs du XVIII^e siècle n'entrerait pas dans ce schéma. Le constitutionnalisme des Lumières n'aurait pas su user de la contradiction à son avantage. La contradiction serait une barrière, non un moyen de dépassement.

Il s'agit d'une *misconception* qui se retrouve au XX^e siècle chez des publicistes qui pensent la relation entre les pouvoirs en termes d'*injection*. Cette grille de lecture n'est applicable qu'au système de la spécialisation des organes (une fonction, un organe *au plus*). La balance des pouvoirs est à penser en termes de *surjection* (une fonction, un pouvoir *au moins*). Les qualifications mathématiques sont à prendre dans un sens extensif (on est dans le *comme*).

③ Hegel s'est fourvoyé dans une interprétation inexacte de la séparation des pouvoirs. Il en a même dénaturé le sens en l'englobant dans un pouvoir gouvernemental. Ce pouvoir devait lever la barrière de la séparation. Il ne voit pas l'unification réalisée par la fonction législative.

L'idée est peut-être dans les choses, mais les choses ne se laissent pas aussi facilement cerner. Les têtes des hommes sont plus manipulables. Les erreurs de Hegel connaîtront la postérité. Leur identification aide à rectifier l'image de la séparation des pouvoirs qui perdure depuis deux siècles.

④ Suivant Koyré, *l'influence d'une pensée se mesure au nombre de contresens que l'on peut faire à son sujet*.¹ L'influence des théories du XVIII^e siècle se mesurerait par un nombre élevé !

Admirateur de Montesquieu pour avoir été attentif au *Zeitsgeist* de son époque, il est étonnant que Hegel n'ait pas vu dans l'*Esprit des lois* une phrase qui résume la dialectique en droit :

*Il peut y avoir de l'union dans un État où l'on ne croit voir que du trouble
c'est-à-dire une harmonie d'où résulte le bonheur, qui seul est la vraie paix.*²

L'harmonie ne dissipe pas le conflit mais prend appui sur lui. Il s'en sert comme d'un levier. En droit comme en science, les Lumières préfèrent les problèmes aux solutions, les exceptions aux principes, accueillant même les contradictions par-delà le principe de non-contradiction. Ce n'est que par ce biais, et non en rêvant d'un monde irénique, que l'apaisement est possible. Le paradis est perdu, mais

*Mieux vaut régner en enfer que servir au paradis.*³

¹ Alexandre Koyré, in Centre International de Synthèse, *Pierre Gassendi. Sa vie et son œuvre 1592-1655*, Paris, Albin Michel, 1955, p.179.

² Montesquieu, *Consid. sur les causes de la grandeur des Romains et ...*, op. cit., chap. 9, p.119.

³ Milton, *Paradise Lost* [1667], I, v. 264

Première leçon des Lumières

§ 11.- UNE PHYSIQUE CONSTITUTIONNELLE DE LA LIBERTÉ POLITIQUE ET DE LA TOLÉRANCE

§ 12.- Et maintenant ? - § 13.- Textes et portrait de Madison

o

SECTION 2

L'ACCENT PORTE SUR L'ORIGINE PLUTÔT QUE SUR LA FINALITÉ

A/ L'origine d'où surgit la différence

§ 14.- L'art antique de raisonner

(Résumé IX)

① Avant les grecs, il existait mille solutions concrètes, mais il n'existait pas d'*ars mathematica* exposant des théorèmes. Dorénavant, la majeure partie des raisonnements s'énoncent sous la forme du *si alors*. Une minorité de géomètres inversent la démarche en remontant du *alors* au *si*. L'analyse, sous sa première forme, est née.

Russell considère que Platon et d'Aristote sont d'un autre temps. Leur finalisme ne s'accorderait pas avec la science qui n'a que faire des explications téléologiques.

L'histoire des sciences donne raison à Russell, mais il y a chez Platon et Aristote des raisonnements en mathématique et en physique qui frôlent remarquablement la pensée moderne.

② Ces brillantes exceptions n'empêchent pas que Platon et Aristote demeurent des *has-been*. Même dans le monde antique, Platon et Aristote ne sont déjà plus en phase avec la science naissante si on compare leur philosophie et la façon dont se construisent les mathématiques.

L'instauration d'une société nouvelle est posée comme un problème à démontrer. On part d'une hypothèse, la Justice en soi, pour réaliser la fin recherchée, une société juste. Platon, particulièrement, s'interroge sur l'essence de la Justice. Il procède comme un géomètre qui étudie une figure pour en montrer les propriétés.

On pourrait croire que le résultat atteint la précision d'un énoncé mathématique, mais il n'en est rien. Le raisonnement s'appuie sur des prémisses qui ne renvoient guère, ou peu à l'expérience. Les mathématiques, certes, ne considèrent que des figures fausses comme un cercle parfait et non des formes approchées, mais les prémisses platoniciennes se présentent comme une révélation, une vision du Juste et un ordre qui doit s'imposer. Leur conclusion ne sont pas aussi vraies qu'en mathématiques. Aristote, il est vrai, nuancera le propos et procédera à des subdivisions au vu des faits. Malgré cet effort, les deux philosophes se rejoignent en raisonnant moins à partir d'axiomes, ou de postulats, que sur des présupposés qui s'apparentent à des articles de foi.

③ Popper considère que Platon et Aristote ne sont pas davantage à la page au plan politique. Leurs conceptions favoriseraient la tyrannie qu'ils prétendent honnir.

Il est difficile de contredire totalement Popper. La maïeutique de Socrate apparaît assez directive. La politique de Platon en découlerait. Les réponses seraient enfermées dans les questions.

Selon Russell, la politique d'Aristote n'en serait pas moins inquiétante. Son examen des régimes reposerait sur des considérations morales qui paraissent absolues ou a priori pour les Modernes.

§ 15.- LES PREMICES DE LA MODERNITE

(Résumé X)

① Les sophistes annoncent la modernité. Leur raisonnement est l'analyse en science et en politique. L'analyse implique une connaissance factuelle antérieure. Ce que l'on cherche est supposé réalisé. On remonte aux conditions qui en concèdent la vérité.

Dans les débats, l'habitude se formait de considérer la thèse contraire, de tout critiquer, de tout remettre en question. Cette habitude lançait l'esprit sur des voies nouvelles. Au principe du respect des règles succédait leur contestation. Rien n'était plus accepté a priori. Le critère sûr devint l'expérience humaine, immédiate et concrète.

Les dieux, les traditions, les souvenirs mythiques ne comptaient plus : nos jugements, nos sensations, nos intérêts constituaient désormais ce qui est certain. L'homme, disait Protagoras, est la mesure de toute chose [du savoir comme de la façon de fonder la cité].¹

② Platon et Aristote ne seront pas les seuls à réagir contre les excès de l'individualisme. Thucydide propose une alternative au meilleur régime dont les exigences portent atteinte à la liberté. Dans le sillage des sophistes, il analyse la conduite humaine afin d'en saisir les ressorts cachés. La crainte, l'ambition, le désir du plus, sont des conditions à prendre en considération. Hobbes sera attentif à son œuvre qu'il traduit au XVII^e siècle.

Ce n'est pas l'amitié, mais l'appréhension qui nous retenait dans cette alliance. [...] Les hommes sont ainsi faits qu'ils méprisent ceux qui les ménagent, et respectent ceux qui ne leur concèdent rien. [...] Il faut être naïf pour ne pas voir qu'il est impossible de brider la nature humaine à l'aide de lois ou d'une menace quelconque et d'arrêter les hommes engagés avec ardeur dans une entreprise.²

③ Non, il n'existe pas, pour les Lumières, d'esclaves par nature. La justification antique de l'esclavage n'est plus recevable. La vérité n'est plus une correspondance, fixée à jamais, entre les idées et les faits. L'adéquation à la réalité est plus compliquée. *Platon regardait les mathématiques comme la source la plus propre à accoutumer l'homme aux généralités et aux abstractions, et à s'élever des choses sensibles aux choses intelligibles.*³ Cela reste vrai, mais le monde ne saurait à ce point être oublier. Même les mathématiques sont condamnées à changer au contact de la physique. La contemplation de l'intelligible ne serait plus d'inspiration divine.

④ Platon n'est pas le platonisme et Aristote pas davantage l'aristotélisme. Leur pensée se soustrait à la théologie qui voudra les coiffer. Sans partager le raisonnement des Modernes, les Anciens en préparent l'assise sous le moyen âge.

§ 16.- LE RENOUVELLEMENT DE L'ANALYSE OU L'ART DE PENSER DES LUMIERES (Résumé XI)

① L'analyse des Anciens retrouve des couleurs au XVII^e siècle. Descartes est le premier à retourner à une méthode de pensée qui révolutionne l'ordre de raisonner. On ne sort plus du chapeau de l'inconnu un théorème ; on fait mieux : on feint à nouveau de connaître la solution.

Pour Euclide, résoudre un problème géométrique consistait à partir de ce qui est donné et connu pour arriver graduellement, de prémisses en conclusions intermédiaires, à la conclusion finale recherchée. Cette méthode combinait diverses propositions connues, d'où son nom de « méthode synthétique ».

Pour Descartes [comme pour certains des Anciens qui opéraient en dehors du discours d'Euclide], résoudre un problème géométrique consiste à partir de la solution comme si elle était connue. [Elle consiste ensuite à remonter de la solution supposée vers les conditions qui en vérifient la validité]. La méthode devient analytique.⁴

1 J. de Romilly, *Les grands sophistes*, ..., p26.

2 Thucydide, *La guerre du Péloponnèse*, in *Hérodote – Thucydide. Œuvres complètes*, Paris, Gallimard, Pléiade, 1964, III, 12, 39, 45.

3 Encyclopédie, art. « Platon », p.748.

4 Peter Wolff, *La grande aventure des mathématiques*, 3, Paris, Encyclopédie Planète, 1966, p.104. Texte amendé.

② La méthode analytique de Descartes diffère de l'antique en imaginant un système de coordonnées. On n'entrevoit pas seulement la solution. On l'entrevoit à travers le prisme d'une équation. L'équation précise, en termes de x et de y , les conditions d'acceptation.

Les Anciens, reconnaît volontiers Descartes, n'ignoraient pas entièrement l'analyse.¹ Descartes n'ignorera pas non plus entièrement la synthèse, mais celle-ci n'interviendra qu'au terme de la résolution (lorsque la condition est apparue non seulement nécessaire mais suffisante). La méthode de mise en équation par coordonnées aboutit à une équation à partir de laquelle tout découle. *C'est l'intégralité [de cette démarche cartésienne] qui paraît caractéristique et décisive.*²

La recherche de la solution numérique participe de la synthèse. La solution est finalement trouvée en calculant x dans l'équation. Si la racine ne se déterre pas facilement, on la rend évidente en combinant les coefficients de l'équation.

③ Contrairement à l'analyse antique, la moderne ne vit plus dans les marges de la science. Elle en occupe le centre. Elle séduit l'époque nouvelle par la correspondance qu'elle établit entre des matières apparemment étrangères comme la géométrie et l'algèbre. La répugnance d'un Rousseau pour cette dernière n'emporte pas le rejet de la méthode. Au contraire : en avouant sa difficulté à en assimiler la correspondance, Rousseau en souligne l'unité. La méthode est une passerelle entre les formes de l'algèbre et celles de la géométrie sans que l'une et l'autre s'en formalisent. Leur entraide est monnaie courante aux XVII^e et XVIII^e siècles :

*La première fois que je trouvai par le calcul que le carré d'un binôme était composé du carré de chacune de ses parties, et du double produit de l'une par l'autre $[(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab]$, je n'en voulus rien croire jusqu'à ce que j'eusse fait la figure. [Il n'était pourtant pas difficile de développer $(a+b)^2$ en $(a+b)(a+b) = a.a + a.b + ba. + b.b$, mais Rousseau était, sans maître, pour l'apprendre.] Ce n'était pas que je n'eusse un grand goût pour l'algèbre en n'y considérant que la quantité abstraite, mais je voulais voir l'opération sur les lignes ; autrement, je n'y comprenais plus rien.*³

Grâce à sa marche rétrograde, et au parallèle qu'elle révèle entre des systèmes auxquels rien a priori ne rapproche, l'analyse est prête à prouver son utilité dans des domaines les plus variés.

§ 17.- SON USAGE EN PHILOSOPHIE NATURELLE ET POLITIQUE (Résumé XII)

La méthode analytique est appliquée autant à l'étude de la société qu'à celle de la nature.

① En philosophie naturelle (la physique), la méthode revient à considérer le mouvement comme déjà effectué pour en décrire ensuite les conditions. Ces conditions sont celles de la tangente à la courbe représentant le mouvement.

② En philosophie politique, Hobbes fut le premier à appliquer la méthode analytique. Léviathan est la solution supposée. Il imagine un système de coordonnées ayant le talent comme abscisse et le pouvoir comme ordonnée. Les deux axes aident à définir les conditions pour que Léviathan devienne réalité. Ces conditions sont les clauses d'un contrat social subordonnant le pouvoir au talent.

La prévalence du talent sur *la condition* (ou le rang social) est dans l'air du temps. Même dans les régimes où la politique n'est pas encore libéralisée, Pascal rappelle qu'une telle condition découle

d'une infinité de hasards. Votre naissance dépend d'un mariage, ou plutôt de tous les mariages de ceux dont vous descendez. Mais d'où ces mariages dépendent-ils ? D'une visite faite par rencontre, d'un discours en l'air, de mille occasions imprévues. [...]

¹ Les anciens géomètres n'ignoraient pas entièrement l'analyse, mais ils la réservaient pour eux seuls comme un secret d'importance. (Descartes, *Réponses aux secondes objections aux méditations*, op. cit., Pléiade, p.388). Texte allégué.

² L. Brunschvicg, *Les étapes de la philosophie mathématique*, p.118.

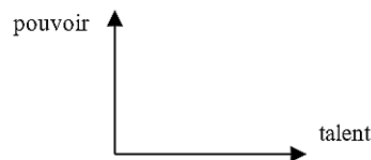
³ Rousseau, *Les Confessions*, Liv. VI, vol.2, p.284.

Vous imaginez que ce soit par quelque loi naturelle que [vos] biens ont passé de vos ancêtres à vous ? cela n'est pas véritable. Cet ordre n'est fondé que sur la seule volonté des législateurs qui ont pu avoir de bonnes raisons, mais dont aucune n'est prise d'un droit naturel que vous ayez sur ces choses. S'il leur avait plu d'ordonner que ces biens, après avoir été possédés par les pères durant leur vie, retourneraient à la république après leur mort, vous n'auriez aucun sujet de vous en plaindre. Ainsi tout le titre par lequel vous possédez votre bien n'est pas un titre de nature, mais d'un établissement humain.¹

Pascal perçoit le problème que Hobbes résout en 2 temps : 1/ en dégage le talent de l'établissement humain par le marché ; 2/ en subordonnant le pouvoir au talent une fois que le mérite est libéré.

③ Le rapprochement entre l'analyse mathématique et l'analyse politique n'est pas explicite chez Hobbes, mais l'application de la méthode analytique est aussi manifeste en droit qu'en science. Elle commence avec *Léviathan* et se répand dans la pensée des Lumières qui formalise les conditions de constitution de l'Etat. Cette façon de raisonner agit dans les esprits sans le dire. La méthode des moindres carrés serait idoine pour ajuster des données, mais, du point de vue des idées, on peut imaginer des courbes simples (d'équation $y = ax + b$ ou $y = ax^x$) **en sachant que plus le tracé est simple, plus le phénomène décrit par la géométrie et l'algèbre a des chances d'être rare ou éloigné de la réalité.**

④ Le rapport pouvoir/talent permet de mieux comprendre le nouvel individu ainsi que le régime anglais qui se met en place. Montesquieu mettra ce dernier à part dans sa classification des constitutions. Les critères de distinction se trouvent enrichis d'un critère nouveau qui deviendra dominant. Au contrat social, il importe d'ajouter la séparation des pouvoirs pour que la constitution de l'Etat soit véritablement constitutionnalisée.



En dehors de l'Angleterre, le gradient des Lumières faiblit. La France en capte une partie, et à Berlin et à Vienne règnent au XVIII^e siècle des despotes qui se veulent éclairés. A Saint-Petersbourg, l'autocratie de Catherine II, plus resserrée, l'ambitionne aussi, mais tous ces régimes ne sauront faire illusion longtemps. En Russie surtout, le talent procèdera moins du marché que de l'autorité. Sous le vernis, le despotisme continuera de régner, voire de régresser vers une forme primitive :

Ce clinquant séduit surtout les philosophes. [...] Catherine II a bien établi sa légende. Charmant les gens de lettres, elle a séduit par son mécénat. Cette politique, à usage externe, s'adresse à l'Europe éclairée plutôt qu'à l'empire russe. La « comédie philosophique » de Catherine [est] bien différente du gouvernement réel que beau-coup, y compris en Russie] jugent arbitraire, tyrannique et rétrograde.²

⑤ Le marché devient un moyen d'analyse pour évaluer sans préjugés les individus aptes à commander, particulièrement au plan politique. Léviathan est un Etat rationnel, appelé à être éclairé. Le risque sinon est grand de revivre le despotisme, aussi logique que soit la refondation de l'Etat.

§18.- L'APPROFONDISSEMENT DE L'ANALYSE PAR LE CALCUL DIFFERENTIEL

(Résumé XIII)

① Depuis Galilée, la mécanique n'aura de cesse de résoudre l'équation différentielle du mouvement, si sophistiqué soit-il. Toute la mécanique revient à intégrer des équations différentielles qui permettent de trouver la trajectoire.

Trouver des courbes intégrales est le problème central de l'analyse mathématique.

La détermination de la tangente n'est qu'une première étape. Le problème inverse de la tangente auquel se ramène la recherche d'une courbe à partir du triangle dit caractéristique. Cette deuxième étape est décisive. Elle doit permettre de savoir si l'analyse est couronnée de succès.

② La méthode analytique est, non seulement applaudie, mais illustrée dans l'Encyclopédie. D'Alembert y

¹ Pascal, *Trois discours sur la condition des grands* [1660], Premier discours, Paris, Gallimard, Pléiade, 1954, p.616.

² F. Bluche, *Le despotisme éclairé*, op. cit., IV : L'autocratie éclairée, p.186 et 194.

emploie l'expression consacrée : *Supposons que le problème soit résolu ...*, pour montrer à l'honnête homme comment trouver la tangente pour tracer la courbe désirée. Pour résoudre les cas plus compliqués (de belles courbes mais ardues à être domestiquées), l'Encyclopédie montre à ses lecteurs comment on recourt au calcul différentiel en espérant que la méthode analytique soit aussi féconde que ses premières applications, ce qui n'est pas acquis.¹

Rien n'est en effet assuré. L'intégration d'une fonction n'offre pas de règle générale. La résolution d'une équation différentielle se révèle parfois ardue. Ce n'est que dans un tout petit nombre de cas particuliers qu'on sait trouver des solutions. La résolution d'une équation différentielle peut s'avérer impossible, mais les savants de l'époque apprendront à contourner les difficultés.

③ En droit comme en science, les Lumières s'emploient à résoudre les problèmes en les modélisant sous forme d'une équation différentielle où entrent des variations, car résoudre un problème revient souvent à en résoudre une qui ne dit pas son nom.

Pour construire le droit nouveau, il convient de se tourner vers les conditions d'existence d'un objet supposé exister. Parmi ces dernières, il importe de rendre en compte les variations infinitésimales d'une ou plusieurs variables. Une fois que toutes les conditions sont déterminées, la résolution implicite de l'équation aide à reconstituer l'objet initial pour s'assurer de sa réalité :

L'esprit différentiel s'empara du XVIII^e siècle.

Inoculant dans le savoir une sensibilité microscopique, ce fut l'époque où, dans de nombreux domaines, on alla y « voir de plus près ».

Jusqu'alors une connaissance locale permettait parfois une connaissance globale. On sauta le pas : une connaissance microscopique [conduisait] à présent sur une connaissance globale.²

L'idée d'équation différentielle a vocation à s'appliquer à la relation, fondamentale des Lumières entre le pouvoir (P) et le talent (T). Il suffit de considérer le rapport P/T dans le temps en prenant soin toutefois de ne pas ignorer la présence des discontinuités dans la fonction (existence de « trous » ou de sauts) ou dans la fonction dérivée (des « coins », des pics ou des arêtes par ex.).

§ 19.- LA GENERATION DE LEVIATHAN ET SA PERPETUATION

(Résumé XIV)

① Hobbes s'emploie à trouver un Etat qui ressemblerait au Léviathan dont il a eu un premier aperçu lors de son exil en France.

La monarchie absolue de Louis XIV procure la sécurité mais nuit à la liberté des individus. En envisageant un Etat rationnel, Hobbes aspire à réunir l'une et l'autre. Sa méthode revient à résoudre une relation dans laquelle sont considérés,

- un Etat fort et sécurisant (Léviathan),
- des individus préservant leur conservation,
- et un contrat social tacite justifiant le pouvoir dans l'Etat (et hors de l'Etat) sur la base du talent.

Une telle relation a la forme implicite d'une équation différentielle que les Lumières commencent à résoudre pour calculer les trajectoires des objets en mouvement. L'équation de Hobbes est loin d'être aussi formalisée, mais on y distingue une dérivée lorsque Hobbes entend fonder tout surcroît de pouvoir sur un surcroît de talent.

② Hobbes opère comme en science. Il appréhende Léviathan comme un pouvoir total sommant toutes les portions de pouvoir des individus. Cependant, l'addition n'a pas a priori grand sens en droit en l'absence d'un étalon commun qui unifierait les divers degrés et types de pouvoir.

Hobbes parvient à établir l'homogénéité entre les éléments via leur évaluation monétaire. La référence au marché fait le lien. Léviathan est conçu comme un *Commonwealth* rassemblant en son sein toutes les richesses fondées sur le commerce. Cette quasi-assimilation du pouvoir politique au pouvoir économique devient un thème dominant tout au long des XVII^e et XVIII^e siècles. L'Europe de l'ouest et sa frange outre-

¹ Encycl., art. « Différence », t.4, p.986.

² Denis Guedj, *La gratuité ne vaut plus rien ...*, op. cit., p.449.

Atlantique célèbrent la *République commerciale*.

③ Pour achever de donner un contour à Léviathan, Hobbes choisit parmi les régimes politiques classiques celui qui garantit à l'Angleterre la stabilité. La monarchie est le régime idoine en raison de la taille du territoire et du caractère héréditaire de ce pouvoir depuis plus de six siècles.

Le raisonnement de Hobbes revient à trouver *une fonction primitive* dont on connaît la dérivée en recourant, devant la difficulté, à des fonctions usuelles. Mais Hobbes fait plus : il varie les bornes mêmes de l'intégration. Entre ses mains, la fonction primitive devient un concept dont il *déploie*, comme un mathématicien de son temps, la portée interne pour parler comme Hegel.

Montesquieu et les fondateurs américains (Hamilton) exploiteront davantage le filon. Comme Hobbes, ils ne s'embarrasseront des mots qui peinent à émerger en science, mais ils raisonneront de la même façon. Leur réflexion demeurera parallèle à celle des savants sans oublier les particularités du contexte qu'il serait vain et maladroit de négliger.

La figure du monstre émerge de terre. C'est un monstre rationnel. Il incarne l'Etat. Grâce à son apparition, les hommes ont quitté l'état de nature où ils tâchaient de survivre tant bien que mal. Le nouvel Etat permet leur coexistence, mais celui qui est censé ramener la paix peut causer à son tour un problème. Comme la science, le droit parvient à ouvrir une porte... au-delà de laquelle d'autres énigmes viennent à nouveau troubler l'esprit.

Deuxième leçon

§ 20.- LA NAISSANCE DU DROIT CONSTITUTIONNEL (du contrat social à la séparation des pouvoirs)

(Résumé XV)

① La réflexion de Hobbes sur le contrat social reflète la société anglaise de son temps. Le contrat devient la loi des parties grâce à l'appui de l'Etat. Hobbes ajoute toutefois que l'Etat doit se soumettre lui-même à un contrat : un contrat social qui donne aux individus le droit de participer au pouvoir suivant leurs talents que révèle une économie basée sur le marché.

Le rêve de Hobbes d'un Etat fort, qui garantirait à la fois la paix et la compétition, ne se réalise pas, cependant, facilement : Le Léviathan de fait, mis en place sous Cromwell, n'a résisté, ni à la pression de son « Lord Protecteur », ni à celle de ses successeurs lors de la Restauration.

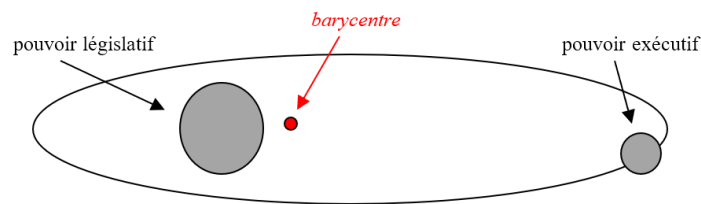
② Locke est le philosophe moderne qui dénonça les déformations inévitables de Léviathan. Il n'était ni mathématicien ni physicien, mais médecin et avait lu Galilée. Il avait en mains un manuscrit que lui avait remis Newton. Il ne pouvait pas méconnaître la chute des corps de Galilée. Tout objet, quelle que soit sa masse, tombe à la même vitesse. Il n'est pas non plus interdit de penser que Locke connaissait le tir du boulet de canon qui illustre autrement la loi de Galilée. La gravité finit par l'emporter en attirant, à la même vitesse, tout boulet vers la terre.

Hobbes fut lui-même sous l'influence de Galilée sous le rapport du principe d'inertie. L'autoconservation de l'individu (*self-preservation*) fait écho à la conservation de l'état de repos ou de mouvement des corps en l'absence de toute force qui s'exercerait sur ces corps. Le modèle de construction de Léviathan par Hobbes décrit le souhaitable.

Or, aux yeux de Locke, Léviathan est un Etat presque aussi instable que l'état de nature, censé être réformé.

Indépendamment de la répartition du pouvoir en fonction du talent, Locke appréhende le phénomène de la concentration du pouvoir. La loi de Locke, selon laquelle le pouvoir tend à croître avec un mouvement uniformément accéléré, met en lumière les limites de l'approche hobbesienne, aussi rigoureuse qu'elle puisse paraître du point de vue du calcul intégral. En accumulant pouvoir sur pouvoir, l'Etat est au bord de la rupture. Son excès de « poids » risque d'entraîner sa chute avec une accélération rappelant également celle de la pesanteur.

③ C'est la préoccupation du confort qui sensibilise Locke à cette loi d'évolution. La sérénité du propriétaire ne saurait être perturbée à la longue. Locke ne critique pas seulement Hobbes. Il le dépasse. Sans mettre en question l'équation qui relie pouvoir et talent, il s'interroge sur la façon de contrarier un pouvoir qui sort de ses gonds. Il n'ignore pas que Newton a compris pourquoi les planètes ne quittent pas leur trajectoire. La tendance des planètes à continuer en ligne droite est contrariée par la force de gravité qui donne l'impulsion au mouvement elliptique des planètes. Tout reste sous contrôle. Dans l'astronomie du droit, Locke entend éviter également que Léviathan devienne ex-orbitant.



La métaphore est implicite. Les constituants américains la fileront ouvertement en évoquant les dérives potentielles du pouvoir exécutif ou celles des Etats fédérés dans l'Union. Par-delà la métaphore, il convient de retenir de Locke que les pouvoirs dans la séparation des pouvoirs sont assimilables à des « masses » qu'il importe de mettre en balance. Montesquieu et les fondateurs américains sauront agencer de façon dynamique la balance en cherchant à atteindre l'équilibre grâce à un jeu quasi-mécanique de mouvements et contre-mouvements.

④ A l'instar de Galilée et de Newton, Locke a donné le coup de grâce à l'Ancien régime de la pensée européenne.¹ Le résultat est paradoxal : en invitant le droit public à s'inspirer de la science, il achève l'œuvre de Hobbes. Avec un raisonnement apparenté aux mathématiques et à la physique, il veut croire qu'il y a lieu de moins désespérer des hommes si le droit sait saisir dans la politique l'ordre naturel, révélé par la science, et en tirer les conséquences.

⑤ Locke ne fait appel, ni à l'algèbre, ni à la géométrie. Il n'apporte pas comme un savant de preuve à l'aide de ces outils, mais même chez un savant pur-sang, les calculs ne remplacent pas la compréhension qualitative.² Locke pensait que les idées morales sont plus complexes que celles des figures qu'on considère dans les mathématiques.³ Nos figures, qui accompagnent sa pensée, ont montré que cette opinion n'est que partiellement fondée.

§ 21.- REPONSES A DES OBJECTIONS EVENTUELLES. § 22.- PORTRAIT DE JOHN LOCKE
§ 22.- PORTRAIT DE JOHN LOCKE

B/ L'origine d'où sourd la puissance

§23.- UNE FASCINATION NOUVELLE

¹ J.W. Herivel, « Sur les premières recherches de Newton en dynamique », op. cit., p.131.

² Cédric Villani, *Théorème vivant*, Paris, Grasset, 2012, p.224.

³ Locke, *An Essai oconcerning Human Understanding*, Bk.IV, ch.3, § 19, p.551.

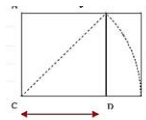
24.-LA PUISSANCE D'UN NOMBRE

(Résumé XVI)

① Que ce soit dans le temps ou l'espace, l'idée de puissance, si vague soit-elle, évoque celle d'une génération naturelle, et non surnaturelle. Plus besoin d'invoquer le Très haut pour qu'il daigne mettre sa puissance au service du Très bas. Avec le nombre et sa réplique, les hommes ont de quoi pouvoir faire !

② Dans la puissance du nombre, pour parler vite, gît l'idée de générateur qu'illustre la construction par Pascal du triangle arithmétique. Un nombre ne se génère pas seul. La puissance du nombre signifie : nombre + opération, que ce soit une addition, ou une élévation du nombre à une certaine puissance

③ Le contrat social de Locke obéit à ce schéma en comptant sur le nombre et la coopération, basée sur la confiance (*trust*). L'idée de génération inspire également le pavage du territoire ainsi que le pliage des documents administratifs sous la France de la Révolution.



Si le côté du carré a égale 1, alors $b = \sqrt{2}$



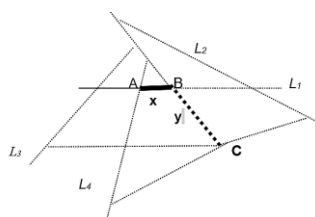
§24.-LA PUISSANCE D'UN NOMBRE (bis)

(Résumé XVII)

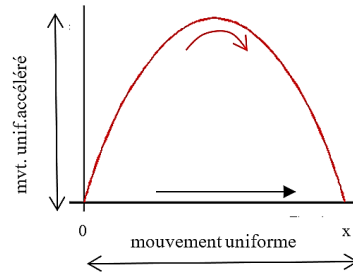
① L'idée de puissance du nombre sous-tend celle de dimension en droit comme en science.

Dans son ouvrage, La Géométrie, que Descartes révèle la méthode qui va à rebours de la méthode synthétique que les Anciens privilégiaient. Au lieu de partir d'axiomes et d'en déduire la suite comme dans les Eléments d'Euclide, Descartes ne s'emploie pas à construire, tracé après tracé, à la règle et au compas, la solution pour en cerner les propriétés. Il suppose d'emblée que la solution qu'il cherche existe, pour en saisir consécutivement les conditions.

La méthode est qualifiée par lui d'analytique. Elle consiste par exemple à trouver un point C qui doit être à une certaine distance de chacune de quatre lignes sous un angle donné. Les quatre lignes L_1 , L_2 , L_3 et L_4 sont situées dans un même plan. L'ingéniosité du mathématicien est de choisir les lignes qui peuvent servir à établir un système de coordonnées en x et y.



Abandonnant la règle et le compas des Anciens, Descartes invente aussi des instruments qui lui permettent d'engendrer, « mécaniquement », des courbes par des mouvements continus différents. Dans la même idée de recombinaison des trajectoires, Galilée combine en physique différents types de mouvements uniformes, comme dans la trajectoire parabolique d'un boulet de canon combinant un mouvement uniforme et un mouvement uniformément retardé (vers le haut) ou accéléré (vers le bas). A la spirale d'Archimède succède, comme changement significatif, la spirale logarithmique. Du mixte, différent de l'antique, apparaît.

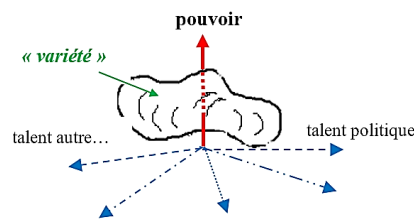


② Les méthodes cartésienne et galiléenne vont œuvrer dans les esprits des Lumières, préoccupés d'étudier et de réformer le droit politique. La nouvelle géométrie étendra ainsi sa façon de penser dans tout le savoir.

Comme Descartes, mais sans que Hobbes y songe lui-même, les clauses d'un contrat social sont considérées, implicitement, dans le cadre un système de coordonnées mettant en relation le pouvoir et le talent. Dans le style analytique également, Montesquieu supposera, à son tour, l'existence d'une Constitution à l'anglaise afin d'en déterminer les conditions. L'objet de pensée retenu (la liberté politique), assimilé à une solution connue, renverra, à rebours, à la nature du régime anglais qui sépare les pouvoirs. Il renverra aussi à son principe (l'intérêt, et non, de façon dominante, la gloire, l'honneur ou la vertu civique).

③ Les directions des axes, qui forment un système de coordonnées, sont, non seulement indépendantes les unes des autres, mais plurielles, à l'instar d'un « produit cartésien » $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$, à multiples dimensions.

Comme sur le frontispice qui orne d'entrée Léviathan, le corps politique coiffe les pouvoirs les plus divers en respectant leurs différences et leur ordonnancement interne. La gravure n'est pas qu'une visée esthétique. Elle indique la multiplicité des pouvoirs et des talents dans un Etat esquissant le droit moderne où la liberté d'exercer son talent peut s'exercer en toute sécurité.

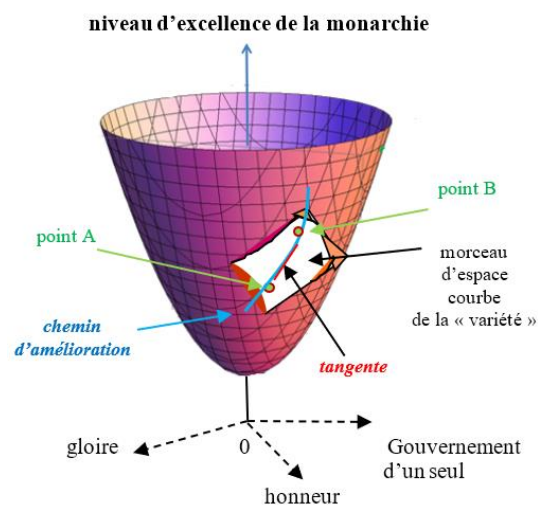


(Résumé XVII, suite et fin)

Hobbes discerne, et les Lumières qui suivent aussi.

Dans le livre sur la composition des lois qui figure dans l'Esprit des lois, Montesquieu écrit : On ne doit point regarder ceci comme un traité de jurisprudence ; c'est plutôt une méthode pour étudier la jurisprudence : ce n'est point le corps des lois que je cherche, mais leur âme. L'âme n'a rien, chez Montesquieu de chrétien ni d'aristotélécien. Elle évoque seulement l'idée d'unité, mais cette unité doit, contrairement à certains, nullement annihiler la faculté de séparer sans laquelle il ne saurait y avoir de bons jugements. Ceux qui sont aveugles intellectuellement ne voient jamais, parmi les diverses choses, qu'une.¹

Les trois variables (objet, nature, principes) que retient Montesquieu pour caractériser un régime peuvent être représentées par une « variété » topologique dans laquelle est « mesuré » le degré d'excellence d'un régime particulier ressortant d'une catégorie politique considérée (le monarchique, le républicain sous forme d'une aristocratie ou d'une démocratie). Ainsi, la perfection d'une monarchie peut être visualisée, de nos jours, par la surface suivante par exemple :



Une république commerciale comme l'Angleterre n'échappe pas non plus à une schématisation géométrique. On y distingue autant chez Montesquieu une « variété » figurant la cohérence des lois dans un pays qui a servi tant de modèles.

Le lecteur verra dans l'Addendum ci-après comment Montesquieu procède à la manière notamment d'un savant qui étudie l'état d'un corps (solide, liquide, etc.). Non plus à partir de deux dimensions (comme la loi des gaz parfaits de Boyle-Mariotte, reliant la pression et le volume), mais de trois si on ajoute la température.

¹ Montesquieu, *Dossier de L'esprit des lois*, Pléiade, p.1025 ; *Défense de L'Esprit des lois*, Pléiade, p.1136.

§25.- LA SERIE DE PUISSANCES

(Résumé XVIII)

① La réflexion de Hobbes sur le contrat social reflète la société anglaise de son temps. Le contrat devient la loi des parties grâce à l'appui de l'Etat. Hobbes ajoute toutefois que l'Etat doit se soumettre lui-même à un contrat : un contrat social qui donne aux individus le droit de participer au pouvoir suivant leurs talents que révèle une économie basée sur le marché.

① Une analogie de raisonnement majeure gouverne silencieusement l'âge des Lumières : celle attachée à la notion de série qui devient prégnante dans tous les esprits. Silencieusement, mais non insidieusement, car la notion se révèle judicieuse. La série offre une clé d'exploration pour comprendre en droit comme en science nombre de phénomènes.

② En science, la série généralise la notion de somme finie. Son maniement peut aboutir à une limite avec un nombre de termes tendant vers l'infini. Lorsque la limite existe, la série se révèle convergente.

Grâce à cette technique, le XVIII^e siècle apprend à domestiquer les fonctions mathématiques récalcitrantes au calcul intégral. Euler s'impose, à cet égard, comme le grand manitou de la discipline. En retravaillant la série de Taylor, Lagrange découvre sa loi de formation en mettant à jour le mécanisme d'engendrement des dérivées.

③ Le raisonnement en termes de série imprègne une foultitude de philosophes politiques comme Hobbes, Locke, Hume, Diderot, Montesquieu, Rousseau et Condorcet. Tous pensent saisir la génération des phénomènes, tant de l'homme isolé que de l'homme en société. L'individu est perçu, non comme une simple succession d'événements, mais comme le terme d'une série proprement dite, même si on ne s'aventure pas à en donner une formule précise.

Connaissant le 1^{er} terme, ils prétendent en déduire les autres consécutivement. Les événements observés ne leur paraissent pas étrangers les uns aux autres. Ils seraient reliés selon une loi de nécessité qui les engendrerait comme une série de dérivées, sans qu'aucun de ces penseurs ne s'en rende compte lui-même ou ne le mentionne expressément.

Même un esprit rétif comme Rousseau n'échappe pas à la règle. Il imagine une corruption de la société qui s'enchaîne inéluctablement et qui tend vers une limite ou horizon peu agréable. Le « taux » de corruption qu'il décrit ressemble à celui d'un intérêt. Sa capitalisation est fatale pour l'individu et ses pareils. Le philosophe en marge cogite comme un financier qui s'ignore.

Dans ses Confessions, Rousseau avoue cette contradiction (sic) dans sa vie personnelle :

celle d'allier une avarice presque sordide avec le plus grand mépris pour l'argent. [...] Je dépenserais tout mon revenu sans chercher à l'augmenter, mais ma situation précaire me tient en crainte. J'adore la liberté. J'abhorre la gêne, la peine, l'assujettissement. Tant que dure l'argent que j'ai dans ma bourse, il assure mon indépendance ; il me dispense d'intriguer pour en trouver d'autre ; nécessité que j'eus toujours en horreur, mais de peur de le voir finir, je le choie {abandonne}. L'argent qu'on possède est l'instrument de la liberté ; celui qu'on pourchasse est celui de la servitude. Voilà pourquoi je serre bien et ne convoite rien.¹

¹ Rousseau, *Les confessions* [edit. posth. 1781 et 1788], Lausanne, édit. Rencontre, 1960, Liv. I, pp.61-62.

§26.- L'IDEE D'AUTO-ENGENDREMENT (*Résumé XIX*)

① L'approche de Hegel est plus heureuse quand il interprète le développement des fonctions en série de puissances que quand il réfléchit sur la puissance du nombre lié à une opération.

Dans la relation de puissances (sic), par ex. $a = b^2$, le quantum b monte en puissance en devenant l'autre quantum, a . Dans $2^2 = 2 \times 2 = 4$, le 2 s'élève à 4. A l'image de la seconde puissance (autre ex : $3^2 = 3 \times 3$), la racine se multiplie par elle-même sans que l'on n'y ajoute rien d'autre ($3^2 = 3+3+3$). Cet exemple aurait été plus parlant si les conditions de sa validité l'avaient permis. Hegel ne prêta guère attention à la manière dont la règle de commutativité est appliquée suivant les opérations. L'ordre peut être différent d'un opérateur à l'autre.

La justification de son système philosophique, via les mathématiques, est plus crédible quand il se penche sur la série de Taylor que Lagrange vient de refaçonner grâce à un algorithme.

Une telle série donne l'impression qu'une fonction s'engendre dans ses dérivées, mais on ne saurait oublier comme Hegel le rôle de la série qui enchaîne les dérivées successives. Sous cette réserve, l'idée d'auto-engendrement est bien mise en lumière par Hegel. Il est possible d'envisager une fonction sur un intervalle plus étendu que le simple voisinage d'un point.

② Il ne faut pas, toutefois, trop applaudir Hegel qui croyait par ce biais comprendre les Lumières. Dans le petit voisinage du point considéré gît une infinité d'informations que le mathématicien n'est pas toujours à même d'appréhender. A l'instar de Lagrange, Hegel n'imagine pas un instant qu'un point + n dérivées ne reconstitue pas toujours la courbe représentative de la fonction en ce point. Son erreur est celle du mathématicien, mais celui-ci a soin, contrairement à Hegel, de faire la distinction entre les intentions et la mise en œuvre.

Si les termes d'une série de Taylor dépendent bien en théorie les uns des autres, la pratique du calcul exige d'encadrer les restes de série quand les nombres sont introduits dans les séries. Hegel n'a pas aperçu les difficultés de passer du formel au numérique. Cette cécité constitue chez lui une autre lacune, sachant que l'idée d'auto-engendrement ne peut être contemplée sans considération de la majoration du reste. Les Lumières s'en préoccupèrent davantage en science et en droit.

③ Les lecteurs, peu portés à apprécier la langue obscure de Hegel, se demanderont pourquoi notre travail renvoie à nouveau à ce philosophe. Pourquoi faut-il revenir à sa Science de la logique ? N'est-ce pas enfin un chef d'œuvre d'égarement qui affirme, page après page, que tout est déterminé par la pensée, et que rien n'échappe à la ruse de l'Esprit qui s'en amuse !

Notre réponse demeure la même : Hegel est des rares philosophes à tenter une synthèse de l'esprit des Lumières avant même que celles-ci ne se fondent dans un autre mode de pensée dominant. S'efforçant nous-mêmes d'en saisir l'épure, il serait injuste de ne pas reconnaître en Hegel le mérite d'avoir dégagé, dans l'air du temps, l'idée d'auto-engendrement. En dehors de son mysticisme logique, il a saisi, mieux que quiconque, qu'une telle idée pouvait rappeler fortement l'algorithme lagrangien qui opère dans une série de Taylor.

④ Pareil algorithme est en œuvre dans la pensée littéraire politico-juridique des Lumières.

Il n'y a pas que Rousseau qui raisonne de cette façon en imaginant, implicitement, un taux de corruption. Ce taux serait semblable à un taux d'intérêt qui s'ajoute au capital et s'applique à la somme à chaque moment du temps. D'autres théoriciens du contrat social comme Pufendorf, Burlamaqui et Barbeyrac ont conçu clairement le passage de l'état de nature à l'état de société comme un enchaînement nécessaire de deux ou trois contrats sociaux intermédiaires. Rousseau lui-même en a complété la liste en y insérant de multiples étapes.

⑤ L'emploi du mot « puissance » en philosophie politique n'est pas aussi éloigné que l'on croit de celui de « puissance » dans l'expression séries de puissance, ou celle de puissance d'un nombre. Sous l'analogie opère une logique commune qui permet de comprendre : 1/ que la puissance des individus produise Léviathan ; 2/ que leur accord primaire, à la base même de Léviathan, puisse donner lieu lui-même à une série d'accords « dérivés » ou secondaires.

§27.- DE LA PUISSANCE INDIVIDUELLE AU CORPS SOCIAL

(Résumé XX)

① Les individus se révèlent à la lumière au terme d'un processus de division, semblable à celui qui est en œuvre dans les mathématiques de l'époque.

De même qu'une équation polynomiale a des solutions, que ces solutions sont des racines, que ces racines suffisent à déterminer l'équation, les individus les plus quelconques, nouveaux venus dans l'histoire, apparaissent eux-mêmes comme les « racines » d'un Etat rationnel dont ils déterminent par eux-mêmes le droit. Il y a une parenté entre le théorème général de l'algèbre et la théorie du contrat social par lequel les individus recomposent l'Etat.

② Ce processus de détermination n'est pas d'abord sans évoquer le procédé de « descente infinie » de Fermat. Un groupe social, quelle que soit sa taille, n'offre pas de solution au problème de l'insécurité dans l'état de nature. Dans le groupe réduit de la famille, l'autorité du père règne, mais cette autorité n'assure pas une liberté adulte dans la sécurité. Elle ne saurait s'étendre au niveau politique d'une autre nature où tous les hommes sont autonomes.

Les individus s'imposent comme solution s'ils parviennent à instituer un pouvoir commun, contraignant capable de faire respecter le droit de chacun à l'autoconservation. Léviathan, créé par le contrat social, devrait répondre, mieux que tout autre groupe et autre Etat, à cette mission. L'état de nature, sans trop perdre au change, serait transformé en liberté sécurisée.

③ Les individus sont les racines de la société régénérée, mais il y a lieu pour eux de dépasser l'horizon immédiat pour renouveler la société. Ils doivent accepter, à leurs côtés, les « racines manquantes ». Les individus, à l'esprit protestant et commerçant, apparaissent comme la condition sine qua non de la reconnaissance de l'individu le plus modeste. Ils jouent le rôle de « racines imaginaires » dans le plan complexe, qu'elles soient « conjuguées » ou non.

Aussi bizarre qu'elle soit, une telle mise en rapport du droit et de l'analyse complexe continue d'exhiber un raisonnement commun, sans perdre à l'esprit la limite d'un tel rapprochement.

§27.- DE LA PUISSANCE INDIVIDUELLE AU CORPS SOCIAL (bis)

(Résumé XXI)

① Le droit d'un homme se mesure à sa puissance. Dans l'état de nature, c'est l'évidence : il ne peut compter que sur sa propre force et ruse. Le thème Robinson Crusoé en perfectionnera l'image. – Ecce homo, voici l'homme, le nouvel homme, le héros moderne par excellence !

Dans l'état de nature de Hobbes et de Locke, l'individu est déjà sujet, et non assujetti, comme il le sera dans l'état de société à réformer. Il est esprit et corps indissolublement, atome de puissance insécable de la puissance collective plus grande qu'est Léviathan. Dans son île, dont la vision enrichit celle de l'état de nature, Robinson est un sujet-corps plus qu'actif. Il défriche et colonise l'île. Il lit la Bible. Il est, au suprême degré, entreprenant et protestant.

② Placée dans cette nouvelle lumière, les individus n'apparaissent plus seulement comme les racines de Léviathan, comme peuvent l'être les racines qui reconstituent un polynôme. Ils participent à une dynamique de construction où tous les individus sont à égale distance du droit, défendu par l'Etat, et à portée de voix de chacun. Comme s'ils étaient assis sur le pourtour d'un cercle dont ils occupent peu à peu la circonférence. De ce point de vue, une telle répartition n'est pas sans rappeler celle des racines n-èmes de l'unité sur le cercle-unité.

Cette dynamique de construction ressemble également à celle des racines primitives modulo n, à partir desquelles sont engendrés tous les éléments d'un ensemble. L'enchaînement des flèches dans un cercle issues de telles racines donne pareillement une idée beaucoup plus vivante et fidèle de la genèse de Léviathan que celle résultant du calcul différentiel et intégral.

La notion de racine primitive modulo n a le mérite de dégager le « modulo » du reste. Le modulo est la partie commune et le reste est ce qui sépare, spécifie. Robinson représente tous les individus, modulo les

changements mineurs qui affectent chacun. L'idée de modulo se retrouve dans celle de député représentant à l'assemblée, à chaque élection, soit les idées (mandat impératif), soit les électeurs d'une circonscription (mandat représentatif plus souple).

③ Les Robinsons ne sont pas que Robinhoods des bois, rebelles à toute autorité traditionnelle, autant politique que religieuse. Son portrait continue de se préciser. L'homo nuovo l'est doublement : il ne fait pas que consommer ce qu'il produit. Il épargne. Il dégage un surplus et l'échange quand il se voit entouré d'autres Robinsons à son image. Le cycle de sa conservation, que figure également un cercle, s'ouvre de plus en plus à la manière d'une spirale logarithmique moderne.

Contrairement à l'ironie de Karl Marx, les Robinsonnades ne sont pas un mythe sans consistance. Ce sont des modèles d'économie qu'Adam Smith inaugure au XVIII^e siècle pour comprendre la naissance d'une économie fondée par un individu protestant et commerçant.

④ L'idée que l'individu représente ce qui est commun à tous les hommes devient celle des Lumières. Le bon sens de Descartes en est un exemple. Depuis Montaigne et Pascal, l'individu et ses semblables incarnent l'humanité en marche. Son esprit parcourt différentes étapes vers le progrès. Condorcet décrit ce processus historique sous la forme implicite d'une suite et d'une série, rompu qu'il fut, comme savant, à ce mode de raisonnement.

Le tableau historique de Condorcet n'évoque qu'en passant le développement du commerce et la tolérance religieuse. Rien n'est dit sur le protestantisme. Comme il est annoncé, il ne s'agit que d'une esquisse des progrès de l'esprit humain, mais l'auteur reste silencieux sur les circonstances matérielles et morales d'un tel progrès. Robinson est gommé au profit d'une humanité abstraite qui bénéficie du progrès des sciences et de l'éducation.

⑤ Les lumières ont confirmé que l'individu est la racine du processus d'autoconstitution de l'Etat. Il en est la 1^{ère} puissance. Un tel processus ne peut que réjouir un autre philosophe de l'histoire comme Hegel qui, tout protestant qu'il fut culturellement, manque toutefois, comme Condorcet, de voir que l'individu en question est un Robinson. Hegel ne voit dans la genèse de l'individu qu'une propédeutique de l'Etat, seul être au fond existant. Il ne voit pas que Robinson n'appartient à personne, sauf à lui-même, et jamais complètement à l'Etat qu'il fondera avec ses compères. Le fait de devenir propriétaire sur l'île le garantira de l'arbitraire.

On ne peut comprendre le constitutionnalisme des Lumières en faisant fi du commerce et de l'appropriation qu'il entraîne.

Troisième leçon :

**§28.- LE RENFORCEMENT DU DROIT CONSTITUTIONNEL
(DE LA SCIENCE DE LA PUISSANCE AU DROIT CONSTITUTIONNEL)**

(Résumé XXII)

① Leibniz entrevoyait des liens invisibles entre ce qu'il appelait des monades n'entretenant entre elles apparemment aucune connexion. Ainsi en est-il pour beaucoup, hier comme aujourd'hui, de la « monade droit » et de la « monade science » à mille lieux l'un de l'autre dans l'esprit et la pratique de ceux qui s'adonnent à leur étude ou en exercent la profession.

La distinction entre la masse et le poids est à l'œuvre dans la science newtonienne. La distinction entre le droit de propriété au sens large et le droit de propriété au sens étroit est à l'œuvre dans la pensée lockéenne du droit. Les deux distinctions naissent à la même époque.

Il n'y a entre elles aucun rapport,

- si ce n'est que le droit de propriété au sens large apparaît aussi invariable que la masse en physique et que l'un et l'autre ont pour qualité d'opposer, dans leurs domaines respectifs, une résistance à toute altération de leur état ;

- si ce n'est que le droit de propriété au sens étroit est aussi variable et dépendant que l'est le poids. Le droit de propriété au sens large est au droit de propriété au sens étroit comme la masse l'est au poids dans la mécanique nouvelle.

Les monades droit et science sont liés par un problème, sinon commun, du moins analogue.

② Grâce au droit de propriété au sens large, l'individu, quel qu'il soit, demeure maître de sa vie, de sa personne, de ses biens, de son honneur. Rien ne peut le priver arbitrairement de ce droit naturel de propriété qui enveloppe tous ces droits.

La naturalisation du droit de propriété réalise une première conversion du sujet en objet avant que le sujet n'entre en société. Sans cette étape, le contrat social ne pourrait guère compléter la réalisation du sujet comme être libre dans la société. L'objet même du contrat (la protection de la propriété) suppose que le sujet ait déjà quelque chose à soi (une signature bien à soi).

③ Le droit de propriété au sens étroit est par définition limité par la loi. En étant reconnu titulaire d'un tel droit, le sujet devient, non seulement sujet de droit dans l'Etat, mais un « poids » dans cet Etat au prorata des biens que protège ce droit. Son intérêt matériel « pèse ». Il lui permet d'être plus présent politiquement. Par ses avoirs, il a l'avantage de voter les lois et de participer à une milice ou garde nationale. Ce sont des privilèges nouveaux qui remplacent ceux de la noblesse et du clergé. On reste une fois encore mieux défendu par soi.

④ Par son inertie, la balance des pouvoirs garantit cet avantage, mais le droit constitutionnel ne saurait éternellement s'en tenir à telle restriction du droit de propriété. La distinction entre le droit de propriété au sens large et le droit de propriété au sens étroit continue d'opérer en sous-main pour tâcher de faire respecter la proportionnalité entre les deux droits de propriété.

Certes, il ne s'agit que d'une tendance et non d'un coefficient de proportionnalité constant, mais la similitude des raisonnements entre le droit et la science est relativement frappante.

Le « coefficient » d'ajustement serait en droit le sentiment de justice naturelle moderne qu'éveille la violation flagrante du droit naturel de propriété. L'existence d'une relation de proportionnalité aide à comprendre le besoin qu'éprouvent certains individus ou groupes de redresser des situations qui se départissent à la longue, plus qu'il ne faut, d'un ratio décent.

§ 29.- RECAPITULATION ET REPONSE A DE NOUVELLES OBJECTIONS

§30.- Planches de l'Encyclopédie de Diderot et de d'Alembert

o

SECTION 3

LA CONSIDERATION DU PARTICULIER DANS LE GENERAL

A/ Le fait particulier n'est pas isolé

§ 31.- LA LOI DE NATURE OU L'UNICITE D'UN PROCESSUS

(Résumé XXIV)

① La conception aristotélicienne opposait le Ciel et la Terre. Dans le Ciel, tout était fait d'une substance cristalline qui se meut de façon circulaire et éternelle autour de la Terre. La Terre jurait ou faisait tâche par son imperfection. Sur Terre, on distinguait deux sortes de mouvement : le mouvement forcé et le mouvement naturel.

*Le mouvement forcé est causé par une force, et il s'arrête quand s'arrête la force.
Le mouvement naturel advient à la verticale ou le vers haut selon les substances.
Quand nous soulevons un caillou et que nous le lâchons, il se meut vers le bas,
par un mouvement naturel, pour revenir au niveau qui lui est propre. En revanche,
les bulles d'air dans l'eau, ou le feu dans l'air, vont vers le haut, toujours pour
regagner leur lieu naturel.¹*

② Avec Galilée, le mouvement d'un corps lancé obliquement en l'air et qui retombe un peu plus loin forme une seule et même courbe. Le projectile décrit une parabole. Du début à la fin, le mouvement est prolongé « analytiquement ».

③ A l'instar du trajet d'un projectile, le mouvement du pendule se révèle être un processus continu fondant en un même mouvement l'aller et le retour. Le moment d'une force réussit à combiner également en un seul mouvement deux éléments qui restent même hétérogènes comme un axe et une force. Le levier unifie l'un et l'autre en un effet.

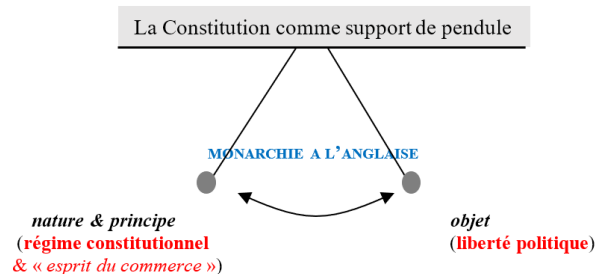
§ 32.- LA LOI POSITIVE OU LE LIEN INSTITUTIONNEL

(Résumé XXV)

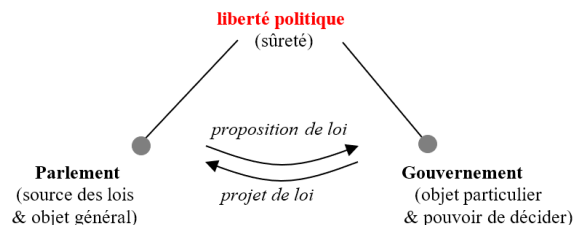
① L'unification de l'Etat hante les écrivains politiques et juristes des Lumières.

Rousseau clame contre Hobbes, mais il pense de la même façon. Sa méthode de lier individu et Etat ne diffère guère de celle de son aîné. Il passe par la voie de l'intégration (addition). Cette opération répond à une loi de raison. Nature et société sont reliées. Le processus de construction est censé aboutir à la volonté générale.

② D'autres méthodes suppléent à un déficit éventuel de la volonté. La loi de raison devient la loi du pendule. Le balancement entre la source et l'objet des lois réalise leur liaison.

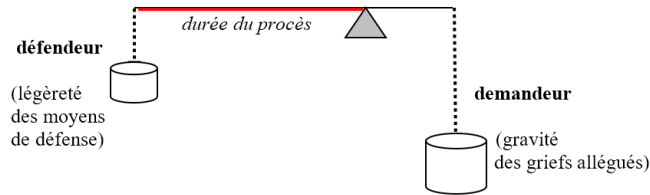


Le balancement entre le Parlement et le Gouvernement, le Gouvernement et le Parlement produit le même effet d'unification.



Idem avec en droit l'idée du moment d'une force, mise à jour en physique.

¹ Carlo Rovelli, *Par-delà le visible. La réalité du monde physique et la gravité quantique*, Paris, Odile Jacob, 2014, pp.39.41.



Les *Federalist papers* reflètent cette transposition dans leur n° 52 : *C'est une maxime sage et reconnue que plus un pouvoir est grand, plus courte doit être sa durée ; plus un pouvoir est faible, plus sa durée doit être étendue sans danger.*

Dans un système constitutionnel divisant le pouvoir législatif en deux Chambres, la Chambre basse, plus puissante en matière de finances, est appelée à siéger moins longtemps que la haute. La chambre haute a, devant elle, la durée pour méditer. Elle transcende un peu le temps alors que la basse en subit l'écoulement.

③ Les *Federalist papers* assortissent la maxime précédente de la réserve, toute scientifique : toutes choses égales par ailleurs (where no other circumstances affect the case).

Montesquieu évoquait déjà les frottements dans la machine constitutionnelle. Le commerce adoucit les choses en faisant intervenir la richesse en politique. Par l'exercice du patronage, le Roi anglais avait coutume de répandre grâces et faveurs pour se ménager des appuis au Parlement. Corruption ? Oui, mais Hume ne s'en offusque pas à une époque où le parti whig abusait de son influence sur les députés. Les ministères dépendaient trop de son omnipotence depuis la Glorieuse révolution.

④ Les Pères fondateurs éviteront que les récompenses ne lubrifient à l'excès la machine du gouvernement. La graisse peut devenir elle-même grain de sable. Le Président dispose d'un pouvoir de nomination aux fonctions publiques. N'est-il pas à craindre que l'exécutif s'assure ainsi de la complaisance du Sénat ou de la Chambre des représentants pour faire passer ses projets, quand on voit combien le roi anglais usait de son pouvoir de patronage ? La question a été clairement posée par les *Federalist papers*. Leur projet de Constitution est censé y avoir répondu sans accabler outre mesure la britannique :

Cette supposition de la vénalité universelle de la nature humaine n'est pas une moins grande erreur dans le raisonnement politique que celle d'une intégrité universelle. [...] La vénalité de la Chambre des Communes a été, pendant longtemps, un sujet d'accusation contre ce Corps. Il n'est pas douteux que, dans une large mesure, le reproche soit fondé, mais il y a toujours eu dans ce Corps un grand nombre de membres indépendants, animés d'un esprit public et qui ont eu une influence considérable dans les conseils de la nation. On a vu souvent ce Corps contrôler les inclinations du monarque, à la fois quant aux hommes et quant aux mesures.¹

⑤ Cette remarque vaut pour les notions de moment de force et de travail en droit. Malgré leurs difficultés d'adaptation en droit, elles font le job comme on dit conformément à l'adage de Bacon : l'homme commande à la nature en lui obéissant. Dans son *Traité des outils*, le philosophe Alain signalait au XX^e siècle qu'un bâton est une machine parce qu'il agit comme un levier.² Le levier est une machine simple comme peuvent l'être un plan incliné et un treuil. Certains aspects de la balance des pouvoirs du XVIII^e siècle opèrent incontestablement de cette manière. Il n'y a pas de mystère dans la physique ; l'intelligence consiste à l'éliminer, à ne plus y penser.³ Il n'y en aurait pas non plus en droit des Lumières. Le constitutionnalisme moderne produit machinalement de la liberté politique sans que son travail soit nul.

¹ *Le Fédéraliste*, n°76, pp. 632-633. Texte abrégé.

² Alain, *Traité des outils* [1925-1928], Aubier, Paris, p.138. Le fonctionnement de chaque outil est illustré par un diagramme tracé à la main.

³ Alain, *Souvenirs sans égards* [1947], Aubier, Paris, p.89.

§ 33.- LA VOLONTE GENERALE COMME OBJET-LIMITE

(Résumé XXVI)

① La notion de limite et celle d'infini apparaissent en analyse mathématique paradoxalement ensemble. Les savants conçoivent la limite dans le domaine des fonctions comme des nombres. L'infini est vécu pour la plupart d'entre eux comme un truchement, un moyen d'atteindre une fin sans que la notion soit interrogée jusqu'au bout. C'est un moyen pratique pour le calcul.

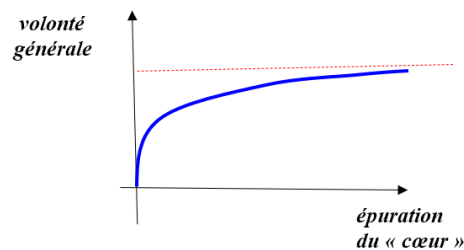
L'infini, qu'il soit petit ou grand, est un truc technique qui marche sans que l'on sache vraiment pourquoi.

Il faut attendre d'Alembert, et surtout Cauchy, pour que l'infiniment petit soit défini comme quelque chose de plus petit que tous les nombres positifs. On pense la limite, plutôt que l'infini, en termes d'inégalité.

② En philosophie, la notion d'infini est vécu plus positivement que dans l'antiquité qui l'assimilait à de l'indéfini, du non défini. En ce domaine qui ose plus de questions qu'il ne donne de réponses, les Lumières ont une vue sur l'infini qui n'est pas non plus sans relation avec le fini jouant le rôle de limite. Avec Leibniz, la méta-pensée rejoint les mathématiques. Au bout de l'infini, il y a du fini comme une série qui converge vers sa limite si elle existe. Il n'apparaît aucune contradiction entre le continu et son terme.

③ A la fin du XVIII^e siècle, Hegel qualifie l'indéfini de mauvais infini et l'infini comme le bon infini. Cette distinction opère déjà en fait chez Rousseau qui oppose la volonté de tous comme mauvais infini et la volonté générale comme bon infini. Dans une première approche, la volonté générale apparaît comme l'aire d'une surface finie calculée au moyen d'une somme infinie d'éléments infinitésimaux. Elle est pensée comme la limite d'un processus de formation infini. En elle, fini et infini s'uniraient.

④ On aurait tort cependant de cerner par trop la volonté générale chez Rousseau par la notion d'intégrale enserrant l'infini entre des bornes finies. Une telle représentation sied davantage à la philosophie politique anglaise (Hobbes, Locke). Contrairement à l'image que se fait de Rousseau, Rousseau est, sur ce point, plus sceptique, attendu que, pour lui, la volonté générale n'est pas tant une limite qu'un objet limite. S'il fallait faire référence à la mathématique de son temps, l'idée d'asymptote la représenterait mieux.



en abscisse : l'épuration du « cœur » augmente avec le contrôle des passions ; *en ordonnée* : la volonté générale monte ou s'impose de plus en plus dans l'esprit, en fonction de l'épuration du « cœur », sans jamais en toucher « le sommet ».

Une loi n'est jamais être assez générale pour embrasser tous les cas, dût-elle exprimée à un moment donné ce que l'on croit être la volonté générale. Il faut distinguer la volonté générale et ses interprétations.

⑤ Pour Rousseau, les individus doivent être dûment informés afin que le processus converge, ou du moins tende vers la volonté générale. Condorcet approfondira cette condition en prônant l'éducation.

§ 34.- LES AVENTURES DE LA CONVERGENCE

(Résumé XXVII)

① Au XVIII^e siècle, la mathématique est préoccupée par la convergence des séries et des fonctions. Le droit public redoute que la Constitution ne puisse atteindre, telle une série d'interprétations ou une fonction à plusieurs variables, ... sa destination (les trois pouvoirs législatif, exécutif et judiciaire participent à une pareille fonction). Cette inquiétude commune, au droit constitutionnel et à la science, donne lieu, faute de mieux, en chacun de ces domaines d'investigation autant que d'action, à des méthodes d'approximation.

② Les mathématiques peinent parfois à calculer la valeur exacte d'un nombre. Elles appellent à l'aide les séries qui n'en peuvent plus sous la tâche. Il s'avère difficile de sommer tous les termes pour obtenir une réponse précise. Faute de mieux, on estime l'erreur commise. Idem pour connaître certaines racines des équations. Les racines sont les points où la courbe (générée par l'équation) coupe l'axe des x. Comme ses prédécesseurs, Newton identifie localement la courbe et sa tangente. Dans le même esprit, il se déplace sur les tangentes qui le conduisent pas à pas aux racines.

L'approximation des fonctions par la série de Taylor est une autre forme d'approximation de la fonction par ses tangentes (ces dernières représentent les dérivées dans la série). Veut-on savoir si la fonction converge ? On ne postule plus qu'elle converge vers une limite finie en cherchant à la suivre à l'infini. On la tronque. Le développement infini devient limité, mais on n'oublie pas le reste. On le majore pour en borner l'écart. Par définition, un développement limité ne converge pas, mais le reste, dûment circonscrit, fournit un renseignement sur le destin de la fonction.

③ Le succès, hélas, n'est pas toujours au bout du chemin. Ignorants si les objets qu'ils étudient tendent vers une fin, les mathématiciens se sont rabattus sur l'analyse des critères qui permettent de percer les ténèbres en la matière. Le droit constitutionnel des Lumières ne procède pas autrement. La liberté politique peut être visée sans être en vue. Il convient de réduire l'errance autant que possible. Faute de cibler juste, le constitutionnalisme des Lumières encadre, resserre, canalise le comportement futur.

④ Les idées hobbesiennes de contrat social et de Léviathan impliquent une idée de majoration. La conclusion du premier, émanant du corps social, et la fondation du second, comme Etat moderne rationnel, finissent par s'en remettre à la volonté de la majorité. Léviathan est un grand majorant. Sa naissance procède d'un calcul logique décrit aujourd'hui par dilemme du prisonnier de la théorie des jeux.

		moi	
		<i>je signe</i>	<i>je ne signe pas</i>
toi	<i>tu signes</i>	LEVIATHAN	état de nature
	<i>tu ne signes pas</i>	état de nature	état de nature

⑤ Montesquieu ne s'en tient pas non plus à la séparation des pouvoirs, version première. Il l'affine petit à petit en resserrant les mailles du filet qui enserre le gouvernement. Des solutions d'encadrement sont également adoptées aux Etats-Unis. Le fédéralisme peut être analysé de ce point de vue. Rousseau appartient au siècle, qu'il le veuille ou non. Sa conception absolutiste de la loi fait place, elle aussi, à des solutions approchées qui se révèlent, par des essais de bornage, plus adaptées que le rigorisme. La notion implicite d'asymptote se substitue chez lui à la notion de limite quasi-mathématique. La volonté générale serait susceptible d'être atteinte en resserrant autant que possible l'écart entre la majorité et l'unanimité rêvée.

⑥ Dans un pays équivalent à Lilliput, Léviathan est maîtrisé. Par de multiples liens, les habitants ont réussi à l'enchaîner. Les individus ne veulent pas le garroter, mais ils ne veulent point le voir entièrement libre de ses mouvements. La nature humaine, on la connaît ! soupirera Swift dans les Voyages de Gulliver. Elle frise en politique la bêtise et le cruel. Les hommes d'Etat ? Peuh ! Ce sont des ignorants, des imbéciles, des vaniteux, des criminels.¹ Selon Hobbes, le pouvoir est nécessaire, mais, même pour Hobbes, il faut s'en méfier. Le contrat social enlace prudemment Léviathan dont on ne peut jurer la conduite à venir.

¹ Jonathan Swift, *Gulliver travels* [1726], Oxford Univ. Press, 1988. V. P. Hazard, *La pensée européenne au XVIII^e siècle*, Fayard, Paris, 1979, reproduit en numérique par l'Université du Québec, Chicoutimi, 2005, Collection « Classiques des sciences sociales », p.11.

§ 35.- ENCADREMENT STRICT ET ENCADREMENT PROBABLE

(Résumé XXVIII)

① La science des Lumières montre les possibilités d'encadrement strict (théorème des gendarmes) mais aussi probable (encadrement en moyenne). L'encadrement probable n'est point une idée farfelue, mais le fruit de trois résultats en théorie des probabilités naissante : deux théorèmes (la loi des grands nombres et le théorème central limite), et un constat : la loi normale.

a) *La loi des grands nombres.* On répète une même expérience aléatoire indépendamment un grand nombre de fois. La fréquence empirique d'un événement (ex : nombre de piles, rapporté au nombre de lancers) converge vers la probabilité théorique de cet événement ($1/2$ si la pièce monnaie est parfaite). Laplace résume ainsi la loi conçue par Bernoulli :

En multipliant indéfiniment les observations et les expériences, le rapport des événements de diverses natures qui doivent arriver approche de celui de leurs possibilités respectives dans des limites dont l'intervalle se resserre de plus en plus et devient moindre qu'aucune quantité assignable.¹

b) Le théorème central limite. Ce théorème complète la loi des grands nombres. On mesure une même quantité aléatoire X au cours d'une suite d'expériences indépendantes (suite de X_i). La loi des grands nombres, autrement formulée, précise que leur moyenne empirique, S_n/n , converge vers leur moyenne théorique (leur espérance mathématique, $E(X) = (X_1 + \dots + X_n)/n$). La loi normale caractérise la dispersion autour de la moyenne théorique via sa variance ou écart-type. Cependant, nous ne savons rien des fluctuations autour de cette moyenne théorique à mesure que n grandit. Quelle est, interrogent les mathématiciens, la vitesse de convergence de la moyenne empirique en fonction de n ? Le théorème central limite répond à la question :

lorsque le nombre d'expériences tend l'infini ($n \rightarrow \infty$), la moyenne empirique suit une loi normale dont l'écart-type diminue comme l'inverse de la racine carrée de ce nombre, $1/\sqrt{n}$.

c) *La loi normale.* On lance un grand nombre de fois une pièce de monnaie ou un dé. On tire un grand nombre de fois une boule dans une urne. On réitère un grand nombre de fois des mesures (la position d'une étoile). On obtient à la limite un résultat moyen autour duquel apparaissent des écarts ou erreurs fortuites. Ces fluctuations se répartissent suivant la loi de De Moivre-Laplace-Gauss (courbe en cloche). La moyenne indique la tendance centrale. Comme l'observe Gauss,

Si une quantité a été déterminée par plusieurs observations directes, faites dans les mêmes circonstances et avec les mêmes lois, la moyenne arithmétique des valeurs observées donne la valeur la plus probable, si ce n'est exactement, du moins approximativement.²

② Le théorème central limite est un théorème limite. Son énoncé n'est vrai, rigoureusement, qu'à l'infini. Ce théorème donne une estimation très précise de l'erreur que l'on commet en approchant la moyenne théorique par la moyenne empirique. Ses conditions sont rigoureuses : grand nombre d'observations (de même loi), tirages indépendants, absence d'influence prépondérante d'une ou plusieurs observations dans le lot (l'importance de cette condition sera rappelée au XX^e siècle).

En elle-même, la convergence vers la loi normale n'intéresse que le théoricien qui est le seul à croire à l'infini. Le praticien s'arrête avant la limite jusqu'à considérer n relativement petit. La courbe résultante est presque normale. Cette approximation facilite l'approche de la loi exacte à laquelle obéit une population. La moyenne d'un gros échantillon aléatoire suit une loi normale.

Aucun phénomène concret n'est vraiment gaussien, mais bon nombre d'entre eux sont dus à la superposition de causes nombreuses, plus ou moins indépendantes. La loi normale les représente de manière raisonnablement efficace. Le droit des Lumières n'échappera pas, à sa façon, à la règle (le constitutionnalisme traite de phénomènes statistiques).

¹ Pierre-Simon Laplace, *Essai philosophique sur les probabilités*, Paris, 1814, p.90.

² Carl Friedrich Gauss, *Méthode des moindres carrés. Mémoire sur la combinaison des observations* [1809], in Michèle Armatte, « La théorie des erreurs (1750-1850), Enjeux, problématiques, résultats ». V. *Histoires de probabilités et de statistiques*, op.cit., pp.152-153.

§ 36.- LA PORTE ETROITE DU DROIT

(Résumé XXIX)

① Le droit des Lumières érige des barrières entre lesquelles l'écart se rétrécit petit à petit pour indiquer une direction.

Le constitutionnalisme moderne rejette l'interdiction a priori, mais refuse la liberté sans retenue. Il n'opte ni pour l'uniformité imposée à tous, ni pour la possibilité offerte à chacun de se conduire totalement à sa guise. Se vêtir comme tout le monde ou se balader nu dans la rue ? Placer la barre entre ce genre d'extrêmes, parmi d'autres, est arbitraire. Que décider ? La barre est-elle trop haute ou trop basse ? La fixation d'un prétendu juste milieu ne manque pas de créer des injustices. Les négociations infinies aboutissent à des compromis boiteux et fragiles. La solution juridique est la création d'un intervalle, laissant aux individus une marge d'appréciation et aux autorités une part de discrétion.

Ici encore, le droit est proche des mathématiques. La réglementation de la liberté de presse en Angleterre rappelle l'encadrement d'une fonction. La liberté de presse consiste *in laying no previous restraints upon publications*, mais la liberté d'échapper à la censure (*freedom from censure*) n'apparaît pas acceptable *for criminal matter*.¹

② Le mérite de la délibération en politique est d'encadrer le commandement dans les bornes de l'intérêt général en resserrant l'espace des décisions entre un seuil et un plafond. La règle de la majorité simple, absolue ou qualifiée, s'impose. On encadre l'évolution des discussions comme on encadre une fonction ou borne sa dérivée. La dérivée de la fonction logarithmique donne une idée de la manière dont la société tend vers le consensus ; la représentation de la fonction elle-même décrit combien il faut consacrer du temps et de l'attention pour convaincre un grand nombre de gens.

③ Les hommes sont libres mais leurs comportements doivent être régulés. Cependant, selon Montesquieu, les législateurs ne sauraient confondre les principes qui gouvernent les individus. Il y a lieu de distinguer les lois (explicites) et les mœurs (implicites). La liberté se porte mieux en obéissant aux lois plutôt qu'aux mœurs. **Les lois se contentent d'interdire, alors que les mœurs enlacent les comportements avec minutie. Les lois proscrivent, les mœurs prescrivent.** Les lois ont, néanmoins, besoin des mœurs en appui, et celles-ci ont besoin des lois de l'Etat en soutien.

En coopérant avec les mœurs, les lois deviennent supportables. Lois et mœurs canalisent conjointement les comportements. L'effet des unes compense les effets des autres. Les effets peuvent s'additionner, mais le processus de resserrement peut aboutir au *n^{ième}* tour de vis à un désencadrement ... Des comportements contraires émergent, ou de la colère explose ! Lois et mœurs divergent jusqu'à s'opposer frontalement. La révolution américaine est le produit d'un excès d'encadrement légal qui ne correspondait pas à l'idée que les Américains se faisaient d'eux-mêmes. Cette révolution est la fille des révolutions hollandaise et anglaises du XVII^e siècle. La révolution française fut causée par une tension similaire entre les lois et les mœurs nouvelles :

L'assiette traditionnelle de l'impôt exemptait les nobles de la taille. Elle n'était pas vécue seulement comme injuste. Toute une pensée réformatrice du siècle rêve de l'impôt foncier unique, proportionnel au revenu, mais le roi refuse de sacrifier « sa » noblesse. La crise financière de l'ancien régime prend sa dimension véritable : une crise de société.²

¹ W. Blackstone, *Commentaries on ...*, Bk IV, ch.2, § 13, p.151.

² F. Furet et D. Richet, *La Révolution française*, op. cit., p.23. Texte allégé.

§ 37.- L'ENCADREMENT EN MOYENNE

(Résumé XXX)

① De tous temps, les hommes ont une idée intuitive de la moyenne en considérant ce qui est au-dessus, en dessous et au milieu (ou à droite, à gauche et au centre). La moyenne est une 1^{re} façon de rassembler l'information pour ne pas s'y noyer. (ex. $(11+7+8+13+16+12)/6 \rightarrow$ moyenne $\approx 11,17$).

Lorsque les observations ont des poids différents, le procédé de moyennisation diffère légèrement. La moyenne est obtenue en additionnant le produit de chaque poids par la valeur correspondante, divisé par le poids total. (ex. : $(7 \times 11) + (2 \times 7) + (6 \times 8) + (2 \times 13) + (3 \times 16) + (5 \times 12) / (7+2+6+2+3+5) \rightarrow$ moyenne $\approx 10,92$). La moyenne pondérée, mêlant des sommes et des multiplications, détermine un centre de gravité, un barycentre. A l'âge des Lumières, elle prend la forme d'une moyenne espérée. Les poids sont interprétés comme des probabilités d'apparition d'un événement. Le poids total des probabilités, jouant le rôle de coefficients, égale 1.

En répétant N fois l'expérience qui génère un événement aléatoire (par ex., en lançant N fois une pièce de monnaie), la loi des grands nombres prédit qu'en moyenne il faut s'attendre à 50 % de pile (ou de face). La fréquence d'un cas ou de l'autre est égale à $\frac{1}{2}$. La moyenne des résultats obtenus tend à se rapprocher de la *moyenne espérée* ($p_1x_1 + p_2x_2 + \dots + p_nx_n$, avec $n \rightarrow \infty$).

② La loi des grands nombres n'a qu'une valeur asymptotique. Lorsqu'on procède à un nombre fini d'expériences, des écarts apparaissent par rapport au comportement moyen attendu. Le *théorème central limite* permet de prévoir leur répartition statistique. L'écart, dans la loi des grands nombres, suit approximativement une courbe en cloche.

La loi des grands nombres, la loi normale et le théorème central limite sont connus dans leurs principes, sinon dans leurs développements, dès le XVIII^e siècle. Ces résultats sont fondamentaux dans le calcul des probabilités. Ils le sont autant dans le constitutionnalisme des Lumières.

Les institutions sont des moyennes d'un grand nombre d'individus. Le tracé de la loi normale éclate par exemple le comportement moyen de chacune des deux chambres législatives qui composent le Congrès aux Etats-Unis. Le contrat social, envisagé par Locke, relève du raisonnement probabiliste. La courbe des décisions publiques laisse apparaître chez Rousseau une loi normale de moyenne nulle (la somme des écarts, par rapport à la décision conforme à la volonté générale, est égale à 0). Condorcet raisonne aussi selon la loi normale en s'efforçant d'élever le niveau d'éducation.

③ Les hommes comme les choses obéissent à la loi normale s'ils sont distincts, indépendants et en grand nombre. La courbe en cloche aurait, dans ces conditions, une portée aussi universelle que la loi des grands nombres. Pareille régularité statistique conduisit un savant inconnu du XVIII^e siècle, qui inventorierait des naissances et des décès, à croire à un ordre divin régissant le monde humain autant que matériel.¹ Cette opinion, de nature religieuse, ne fut guère partagée par la majorité de ses collègues des Lumières. Ces penseurs supputèrent que la loi normale, si présente soit-elle à travers le monde, souffre aussi des exceptions. On s'y attendra davantage en droit.

Les institutions sont des moyennes d'un grand nombre d'individus. Le tracé de la loi normale éclate par exemple le comportement moyen de chacune des deux chambres législatives qui composent le Congrès aux Etats-Unis. Le contrat social, envisagé par Locke, relève du raisonnement probabiliste. La courbe des décisions publiques laisse apparaître chez Rousseau une loi normale de moyenne nulle (la somme des écarts, par rapport à la décision conforme à la volonté générale, est égale à 0). Condorcet raisonne aussi selon la loi normale en s'efforçant d'élever le niveau d'éducation.

¹ Susmilch, *Die goettliche Ordnung in den Veränderungen des menschlichen Geschlechts* [1740], in Joseph Lottin, « La statistique morale et le déterminisme », in *Revu néo-scolastique*, n°57, 1908, p.48.

Résumé XXX (suite)

Bien que distincts, les individus ne sont pas toujours indépendants. La vie leur offre souvent l'occasion d'être interdépendants et de former des coalitions qui altèrent leurs jugements et modifient leurs décisions. La courbe de Gauss, et son allure symétrique autour de la moyenne, ne fait pas toujours la loi. La courbe de Poisson, et sa forme dissymétrique, montre déjà une sérieuse déviation. Pour éviter que le jeu des factions ne délite la société, Madison imaginera un procédé qui consiste, non pas à les éliminer illusoirement, mais à en multiplier le nombre et à les entrecroiser. Dans le cadre institutionnel américain, prédisposé à cette fin, aucune faction ne doit finir par l'emporter (définitivement) sur les autres, y compris la majoritaire sur la minoritaire dans l'Etat.

④ Sans nier le caractère volontaire d'une telle entreprise, il est un fait que la stratégie de Madison s'apparente au lancer d'une aiguille croisant éventuellement les lattes d'un plancher. Le modèle de Buffon génère un hasard dont les événements ne sont pas liés par une courbe de cloche. L'incertitude aboutit quand même à une certaine stabilisation, car on y retrouve π , présent dans la loi normale. Dans le modèle de Madison, la recombinaison de mille façons des groupes de pression devrait assagrir leur action, les individus et groupes se retrouvant au carrefour d'intérêts pluriels

En même temps que toute autorité dans la république fédérale des Etats-Unis découlera et dépendra de la nation, la nation elle-même sera divisée en un si grand nombre de parties, d'intérêts et de classes de citoyens, que les droits des individus ou de la minorité seront peu menacés par les combinaisons intéressées de la majorité. Dans un Etat libre [a free government], les droits civils doivent être défendus de la même manière que les droits religieux. Le moyen consiste, dans un cas, dans la multiplicité des intérêts, dans l'autre, la multiplicité des sectes.
(J. Madison, *Le Fédéraliste*, n° 51, p.433)

⑤ La séparation des pouvoirs vise à *diviser et à combiner [divide and arrange] les différentes factions de façon que chacun soit un frein pour l'autre [a check on the other]*. De façon aussi que *l'intérêt privé de chaque individu soit une sentinelle pour les droits publics*, considérait déjà Madison.¹ La multiplication des intérêts et leur combinaison répond à la même stratégie : diviser et combiner les factions pour en neutraliser les méfaits. Les factions doivent devenir moins des pouvoirs de nuisance que d'influence que l'autorité publique peut écouter avant d'agir. Des lobbies pacifiques doivent remplacer les factions civiles et religieuses qui complotaient contre l'Etat.

La stratégie du *checks and balances* est applicable autant aux factions qu'à la séparation des pouvoirs. Le *Fédéraliste* n° 51 regroupe opportunément les deux questions. Ce qui singularise toutefois le *checks and balances* propre aux factions est la part plus grande accordée au hasard. La séparation des pouvoirs laisse place à des arrangements variés, combinant les trois fonctions. L'aléa, l'imprévisible, s'imisce, que l'on le veuille ou non, dans ces arrangements, mais le contrôle des factions introduit à dessein, à plus grande dose, l'aléatoire dans la recherche des solutions.

Selon le *Fédéraliste* n° 1, il incombe aux Américains de se donner *un bon gouvernement par choix et réflexion* au lieu de recevoir leur Constitution *du hasard et de la force*.² Cette injonction demeure valable, mais la réflexion et le choix ne s'opposent toujours pas à l'*accident* (sic, dans le texte anglais). Après réflexion, on peut choisir le hasard, l'utiliser à bon escient, comme on peut utiliser, avec intelligence, la force dans la Constitution. Il existe un bon usage du hasard comme de la puissance. La lutte contre les factions en est une illustration éloquent. Cette politique rapproche, avec un pas de plus, la philosophie politique, et le droit public qui s'en inspire, de la science qui étudie la nature.

⑥ L'esprit de la science s'y déploie dans la comparaison implicite des factions et des ondes circulaires que créent des gouttes d'eau sur un étang. La surface frappée n'est plus toute plate, l'eau monte et descend. Chaque onde est une variation de la hauteur de la surface d'eau. Voilà que tombent un plus grand nombre de gouttes d'eau. Voici qu'interfèrent les ondes sur l'étang, soit en se renforçant (lorsqu'elles arrivent en phase), soit en s'annulant (lorsqu'elles arrivent en opposition de phase). L'interférence est constructive ou destructive. Le nombre de gouttes s'élève davantage sans que la pluie vire à la trompe d'eau. La surface de l'eau devient moins déformée paradoxalement. Les perturbations se sont neutralisées et l'étang redevient tranquille et placide.

La courbe de Gauss, qui gouverne les variations d'amplitude verticale, créée par l'onde circulaire autour d'une goutte d'eau sur une flaque d'eau, s'aplatit avec une hauteur moyenne tendant vers 0.

¹ *Ibid.*, p.431.

² A. Hamilton, *Le Fédéraliste*, n° 1, p.1.

Résumé XXX (suite et fin)

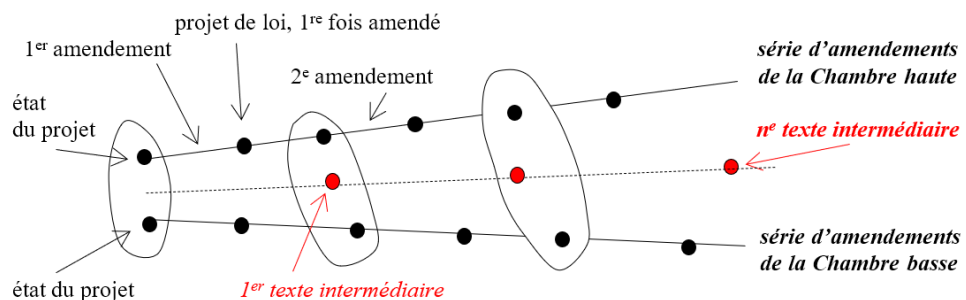
Le même effet de neutralisation s'observe avec la multiplication et le chevauchement des factions comme l'imagine Madison pour réguler leur action qui apparaîtrait plus nocive que bénéfique.

C'est l'exploitation du hasard qui doit permettre de trouver la solution constitutionnelle, comme c'est l'exploitation du hasard qui a permis de retrouver l'ordre de grandeur de π . Le jeu des factions était fatal dans l'histoire. Il fallait, pour le juguler, contrôler la tendance que révèle la diversité des expériences passées. La méthode de Madison (et d'Hamilton) évoque littérairement, la méthode de Monte Carlo d'aujourd'hui. Les deux publicistes se sont efforcés de construire un intervalle de confiance dans lequel l'effet du jeu des factions a toutes chances de se trouver. Le niveau de confiance de leur étude préparatoire était élevé, comme le sera, sur la base de leurs échantillons aléatoires, leur confiance de maîtriser enfin, dans le droit nouveau, les factions.

*Quatrième leçon***§ 38.- DE L'AUTO-ENGENDREMENT A L'AUTOREGULATION***(Résumé XXXI)*

① La transformation de l'auto-engendrement en autorégulation procure à l'auto- une destination.

A l'instar de la science des Lumières, le constitutionnalisme moderne s'efforce de faire aboutir la discussion. Des techniques annonçant le vote unique, le vote bloqué, le vote de confiance, la mise sur pied de commissions, l'adoption de règlements d'assemblée fixant un ordre du jour et un nombre limité de lectures, opèrent d'une manière qui rappellent les techniques mathématiques raccourcissant ou combinant les séries de nombres ou les séries algébriques.



② La balance des pouvoirs est le mode de séparation des pouvoirs le plus proche de cette tournure esprit, commune au droit et à la science.

§ 39.- LA MACHINE DE WATT CONSTITUTIONNELLE

(Résumé XXXI)

① La balance des pouvoirs est le mode de séparation des pouvoirs qui s'approche le plus du mode de fonctionnement de la machine de Watt.

Du point de vue de l'autorégulation, le modèle de l'horloge est apparu moins performant que celui de la machine à vapeur intégrant, dans sa conception, un volant d'inertie puis un régulateur à boules. La machine à double effet de Watt devient « une machine qui marche toute seule », grâce à la chaleur extraite d'un minerai et récupérée par un moteur adéquat. C'est manifestement un progrès. La chaleur, dans certaines conditions, se transforme en mouvement mécanique, et ce mouvement se reproduit tout seul. Il est automatique à condition d'alimenter la chaudière.¹

Le droit constitutionnel suit, en parallèle, le même cheminement de pensée. La courbe en S, que Verhulst appellera logistique au début du XIX^e siècle, se retrouve dans l'esprit des institutions, via la sigmoïde. En chacune des deux Chambres, on observe un déroulement similaire dans l'action des participants : d'abord une croissance lente, suivie d'une forte accélération, enfin un ralentissement précédant un point d'arrêt. Ce phénomène joue également entre les deux Chambres. L'une freine des quatre fers ce que l'autre avancerait précipitamment.

② Un lecteur dubitatif regimbera à l'idée d'envisager une sigmoïde en droit. Qu'il lise la littérature scientifique d'aujourd'hui !² On y montre, également en économie, comment la parabole de la Bible des 7 années grasses, suivies des 7 années maigres illustre le comportement des entreprises qui commencent à pénétrer lentement un marché, accélèrent ensuite fortement leurs ventes (si la demande du moins répond à leur offre innovante), avant que le marché se tasse et soit saturé. Pourquoi le droit public échapperait-il à cette loi de la nature aussi répandue que la loi normale ?

Quant à l'idée du volant d'inertie, nous verrons ci-après comment les mêmes entreprises mettent en pratique ce qu'un consultant aux Etats-Unis appelle de nos jours : le *flywheel effect*.³

③ D'autres lecteurs, jusqu'ici muets, pourraient à leur tour se demander en quoi la machine de Watt contient des raisonnements modernes. Mais comment ne pas voir que cette machine est le produit de divers raisonnements des Lumières qui ont été associés lors de sa fabrication ? Innover, c'est incontestablement combiner des pensées autant que des actions.

Intervient d'abord l'induction (Watt est un homme pratique, sensible à la méthode des trials and errors, et aux faits négatifs dont parle Bacon). Intervient aussi l'analyse (l'amélioration du rendement de la machine pousse son inventeur à en comprendre les conditions, calculs à l'appui). Ces raisonnements peuvent interférer. Par ex., si le volant d'inertie se révèle être une des conditions, quel doit en être le diamètre pour réguler au mieux le mouvement ? Dans quelle matière faut-il construire le même volant pour éviter que sa rotation n'entraîne son éclatement ? Le raisonnement par analogie, plus axé ici sur les différences que sur les similitudes, n'est pas non plus exclu. Watt n'a-t-il pas déposé un brevet de sa machine afin de la différencier de celles de Papin et de Newcomen notamment ? On pensera aussi au raisonnement dialectique, porté à voir l'utilité des oppositions et des contradictions (le mécanisme du double effet est une rétroaction).

¹ A. Gras, *Le choix du feu*, op. cit, p.146 et 166.

² Arthur L. Loeb, *Concepts & Images. Visual Mathematicis*, Boston, Birkhäuser, 1993, pp.162-163.

³ Jim Collins, *Good to great. Why some companies make the leap ... and others don't*, Collins Business, 2001, p.175.

Résumé XXXII (suite et fin)

④ Il manquera toujours un lecteur pour que tout le monde soit convaincu. Mettons-nous à sa place. Il pourra arguer, en citant Gaston Bachelard, qu'un instrument ne matérialise pas des modes de raisonnement mais une théorie. A ce titre, la machine de Watt ne serait nullement la référence de l'innovation radicale.¹ D'autres machines à vapeur l'ont précédée, et il reviendra surtout à Sadi Carnot de montrer par la suite que la chaleur se transforme en énergie motrice.

Nous avons en partie répondu au premier point. Un brevet protège par définition une invention nouvelle comme une marque un signe distinctif. Toutes les innovations brevetées ne sont pas des inventions radicales, mais elles consacrent une idée originale qui ne découle pas, de manière évidente, de l'état de la technique pour un homme de métier. Cette idée doit être susceptible d'une application industrielle. La machine de Watt satisfait ces critères.

Sur le second point, il est incontestable que Sadi Carnot a posé les bases d'une discipline entièrement nouvelle dans ses *Réflexions sur la puissance motrice du feu* et sur les machines propres à développer cette puissance, publiées en 1824. Le savant a démontré pour la première fois que partout où il y a une différence de température (i.e. partout où il y a un corps chaud et un corps froid), il est possible d'engendrer de la puissance motrice. Carnot a formulé la théorie du moteur thermique, mais on ne saurait oublier que Watt a eu l'intuition de matérialiser cette théorie dans une machine particulière avant que son principe de fonctionnement fut clairement exposé.

Une épistémè est moins un ensemble de théories élaborées que des modes de raisonnement qui concourent à les préparer. Bachelard évoquait les instruments scientifiques qui sont l'application de théorèmes. Les machines réalisent plutôt des processus qui sont en amélioration continue.²

⑤ L'alimentation de la chaudière constitutionnelle est à la fois vitale et dangereuse. L'apport d'énergie est nécessaire pour que le droit ne devienne un cadre vide. L'énergie est sans direction. Les révoltes, les manifestations, révèlent des manquements. Elles expriment aussi une violence qui peut dégénérer en insurrection et conduire au renversement des institutions.

Les révolutions hollandaise, anglaise(s), américaine et française des XVII^e- XVIII^e siècles ne furent pas un mal en soi. Leur violence fut le signe d'une colère lasse de gronder sans exutoire. Elles exprimèrent une indignation fatiguée de souffrir une absence de considération. Elles furent les témoins des sursauts de l'état de nature lorsque l'état de société n'est pas arrivé à maturité, ou n'a pas été perçu comme tel. La fonction de Dirac représente aujourd'hui ces accès de violence. Sa forme en pointe infiniment allongée est un rappel à l'attention : les hommes peuvent modifier, suivant leurs besoins, la Constitution. Ils ne peuvent, toutefois, faire fi de ses contraintes essentielles, telle qu'une séparation des pouvoirs effective, sous peine de retomber dans l'anarchie et la violence extrême. L'état de nature n'est jamais loin de l'état de société. Il en faut de peu pour que le fer rouille s'il n'a pas été traité et oxydé.

Car une chose sans bornes, défendue par des moyens sans bornes, n'est pas susceptible de limitation. L'arbitraire, combattant pour l'arbitraire, doit franchir toute barrière, écraser tout obstacle, produire, en un mot, ce qu'était la Terreur.³

o

SECTION 3 (suite)

LA CONSIDERATION DU PARTICULIER DANS LE GENERAL

B/ Le fait général n'est pas englobant

§ 40. – UNE NOUVELLE VISION DE L'OPTIQUE A L'AGE DES LUMIERES

¹ A. Gras, *Le choix du feu*, op. cit., p.166.

² *Les instruments ne sont que des théories matérialisées. Il en sort des phénomènes qui portent de toutes parts la marque théorique.* (G. Bachelard, *Le Nouvel esprit scientifique*, op. cit., p.1).

³ Benjamin Constant, *Cours de politique constitutionnelle* [1818-1820], Bruxelles, 3^e édit., p.492, googles books.

§ 41.- L'EXPERIENCE DE YOUNG ET SON RAPPORT AU DROIT

(Résumé XXXIII)

① La liberté politique a besoin d'un Etat pour se constituer. La constitutionnalisation est ce moyen, mais ce moyen ne saurait être une fin en soi englobant totalement ce pour quoi elle a été instituée. Le droit moderne demeure basé sur la différence plutôt que sur la ressemblance dans sa conception autant que dans son fonctionnement.

La différence, pour être utile, ne doit pas nécessairement se convertir en opposition, voire en contradiction comme il appert dans la séparation des pouvoirs, entrevue comme équilibre entre des forces ou des moments de force. Le contraste recherché peut être moins accusé.

Entre le noir et le blanc, existe toute une palette de valeurs qui jouent un rôle dans le tableau du droit constitutionnel. Déjà, malgré leur indépendance, les trois pouvoirs collaborent au niveau tant de leurs fonctions principales que de leurs fonctions exercées à titre secondaire. Agir de concert, et aller même de concert, de façon dynamique comme dans un système planétaire, est une première, mais le constitutionnalisme des Lumières a appris aussi à travailler avec plus de finesse.

② Au lieu que le contraste soit tranché, comme il peut être nécessaire parfois, l'opposition peut s'avérer être aussi utile en aussi en étant moins aiguë. En invitant les pouvoirs constitués à participer solidairement à la formation de la loi, le droit des Lumières a su introduire une autre forme de contraste ou d'écart comme le décalage.

De ce point de vue, le raisonnement du droit rencontre encore celui de la science naissante qui exhibe, dans la nature, d'autres lois qui prennent en compte des décalages dans l'espace et le temps. Le *déphasage*, aussi petit qu'il soit, ne joue nullement un rôle insignifiant dans les phénomènes vibratoires comme en témoigne l'expérience des deux fentes de Young. Sans un tel écart, un mini-écart, on ne pourrait comprendre les interférences destructrices ou constructives.

③ La différence de phase est patente avec la différence de trajets qu'emprunte la formation de la loi. La loi, certes, doit être votée en termes identiques par deux Chambres législatives, mais, pour y parvenir, chacune emprunte un chemin un peu différent en introduisant, chacune à sa façon des amendements, sous-amendements ou contre-amendements. A ces trajets peuvent s'en ajouter en parallèle ceux d'instances concurrentes (ex. commissions d'experts, comité de fonctionnaires).

Le contraste, en tant qu'influence partielle, prend le dessus sur l'influence écrasante ou la moyenne. L'interférence empêche que tout s'opère sur le simple mode de l'addition ou de l'annihilation.

④ Il est aussi possible, en droit, de multiplier les « fentes ». Mably imaginait plus que deux Chambres se partageant la fonction législative, mais un alourdissement de la procédure risque de se produire. Rousseau dénoncera l'illusion du système multi-Chambres de Genève qui ne profiterait qu'à une minorité patricienne en raison de l'emboîtement des institutions qui les noyautent toutes. Sous Bonaparte, l'installation d'une 3^e Chambre (le Sénat) renforcera la dictature du Premier consul.

⑤ En dehors de ces cas limites, on retiendra l'effet de moirage que produisent en droit les légers décalages qui autorisent la discussion sans que la clarté ne soit trop obscurcie par la grisaille.

Il importe toutefois de battre un peu en retraite. Un rapprochement trop prononcé entre la physique et le droit constitutionnel ne saurait faire fi du fait que les voies de construction de l'ex-droit par ex. communautaire, n'étaient pas aussi nettes qu'un chemin lumineux créant, à travers des fentes, un décalage. Le droit de l'Union européenne, reprenant à son compte ce droit, n'a pas changé la donne.

L'analyse de la formation du droit de cette Union montre l'existence d'une dissimulation réciproque entre ces approches à la fois concurrentes et complémentaires. L'observateur a du mal à voir « à travers » leur jeu. Il s'y mêle une captation du pouvoir de la Commission européenne ou des Etats membres qui ne veulent pas perdre leur souveraineté. Chaque acteur coopère pour le bien commun en veillant à favoriser son intérêt clandestin. On est bien, sans surprise, en droit des Lumières.

⑥ Il n'y a pas que l'expérience communautaire européenne qui fait un peu écho à celle de Young.

Tout fédéralisme, qui s'inscrit dans le constitutionnalisme moderne, vivent la même expérience, attendu que ces fédéralismes divers, - l'allemand, le suisse, l'autrichien, l'australien et le canadien - déploient ces approches alternatives du droit à partir d'une même source : la Constitution. En respectant ce type de contraste, rappelant l'optique, ils sont capables de produire des interférences constructives ou destructives entre l'approche fédérale et la confédérale grâce à leur tissage moiré.

§ 42.- LE CARACTERE PERTURBATEUR DE LA RESONANCE

(Résumé XXXIV)

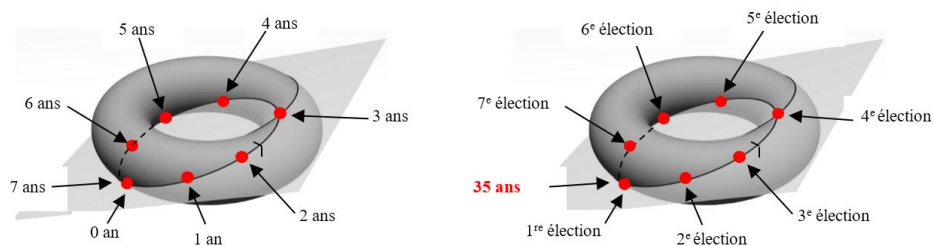
① La liberté politique a besoin d'un Etat pour se constituer. La constitutionnalisation est ce moyen, mais ce moyen ne saurait être une fin englobant totalement ce pour quoi elle a été instituée. Le droit moderne demeure basé sur la différence plutôt que sur la ressemblance dans sa conception autant que dans son fonctionnement.

De ce point de vue, le raisonnement du droit rencontre encore celui de la science naissante qui exhibe, dans les phénomènes naturels, non seulement des lois communes, mais aussi des décalages dans l'espace et le temps. Le *déphasage*, aussi petit soit-il, joue un rôle important dans les phénomènes vibratoires comme en témoigne l'expérience des deux fentes de Young. Sans un tel écart, on ne pourrait comprendre les interférences destructrices ou constructives.

② En sus de ses propriétés « mécaniques », découlant de notions rappelant celles de la physique nouvelle (force, accélération, masse, moment de force, moment d'inertie, etc.), la Constitution des Lumières apparaît aussi, par d'autres côtés, moins apparentée à un système solide que vibratoire. Sans trop faire eux-mêmes la relation, les penseurs en droit ont porté leur attention sur le bénéfice des déplacements par rapport à une position « normale ».

Cependant, il ne s'agit plus simplement ici d'être sensible à l'« écart-type » ou à la variance d'une courbe en cloche centrée sur la moyenne. L'écart en cause n'est plus noyé dans un ensemble plus vaste comme peut l'être la loi de répartition des erreurs de Laplace. L'écart joue un rôle plus spécifique à l'image déjà vue de la différence des chemins qu'emprunte un rayon lumineux avant de produire des franges lumineuses ou sombres. Le droit des Lumières a perçu combien importe la distinction *concordance de phase/opposition de phase* au sein de la balance des pouvoirs entre les pouvoirs législatif et exécutif ou entre les Chambres législatives dans un système bicaméral.

③ Les penseurs en droit ont accordé la même attention au maintien d'un décalage, non plus ici entre des chemins parcourus par des « ondes » de même fréquence, mais entre les fréquences elles-mêmes en certaines occasions. Le contrôle de la « résonance » institutionnelle répond à ce souci d'éviter d'amplifier outre mesure les majorités élues. Sans doute, la résonance politique a du bon lorsque différents pouvoirs doivent être sur la même longueur d'onde pour s'entendre et coagier, mais il y a aussi un danger à trop provoquer la rencontre de fréquences identiques. Il vaut mieux, pour le salut de chacun, que la périodicité des différentes élections soit décalée. Ne faut-il pas craindre que le Président, la Chambre haute et la Chambre basse soient élues en même temps ?



A supposer que l'élection du Président et celle des députés soient organisées au départ la même année, au bout de 5 ans par exemple, le Président aura achevé la 5^e année de son mandat de 7 ans et la législature clôtura le sien de 5 ans. Les différents points peuvent aussi représenter la rencontre des deux cycles sur une période de 35 ans (le *ppcm* de 5 et de 7 ans). Par ex., le 3^e point rouge indiquera le moment de la 3^e élection présidentielle (7 ans x 3 = 21 ans), et le début de la 5^e législature qui aura déjà siégé 1 an (5ans x 4 = 20 ans + 1). Au bout de 35 ans, l'élection du président et celle de l'Assemblée nationale coïncideront comme à l'origine.

Ici encore, il ne s'agit pas d'envisager globalement les fréquences des erreurs mais de considérer isolément les effets d'une légère ou grande différence entre les fréquences comme celle qui advient dans le rythme des délibérations d'un projet de loi par différentes Chambres. De ce point de vue, l'analogie avec le pendule est éclairante, sous réserve d'interpréter le décalage, non pas par rapport au temps (comme pourrait l'être une succession de oui ou de non), mais par rapport à la production des opinions (chaque Chambre *balance*, hésite, avant de se déterminer par un vote à la majorité).

Résumé XXXIV (suite et fin)

④ Les perturbations causées par la « résonance » entraînent parfois des conséquences incontrôlables lorsque la Constitution des Lumières présente de graves défauts d'organisation. Ces défauts ne sont pas à l'origine des événements, mais leur existence peut rendre la résonance des fréquences *non linéaire*. A la tempête du dehors peut s'ajouter une réaction propre du système, disproportionnée soit dans le trop peu (cf. la Constitution française de 1791) soit dans l'excès (cf. la Constitution française de 1793). Ayant voulu mieux adapter le droit aux situations, la Constitution française de 1795 ne réagira pas mieux en donnant l'occasion à un général de faire taire tout monde tant au sein du pouvoir législatif (formé de deux Conseils) que du pouvoir exécutif (le Directoire).

En contraste, la balance des pouvoirs anglaise, composée de deux sous-balances, l'une entre les deux Chambres, l'autre entre le Roi et son Cabinet, réagira mieux pendant la même période qu'elle ne le fit pour régler la question irlandaise. L'amiral Nelson, génial sur mer autant que Bonaparte (et Napoléon, jusqu'à un certain point) sur terre, n'eut ni l'occasion, ni la tentation, de conquérir le pouvoir tant la balance anglaise parvenait à résoudre par elle-même les problèmes les plus aigus.

⑤ Surchauffée, la Révolution française fut plus encline à créer du chaos que de l'ordre sans despotisme. De sporadiques micro-événements bousculèrent sans cesse les conditions initiales pour mettre en place un système constitutionnel qui tienne la route. La France attendit trop longtemps pour diviser le pouvoir et le contrebalancera d'une façon graduelle et apaisée. Le renforcement de la centralisation administrative de l'Ancien régime par la Révolution et l'Empire facilita le retour aux vieilles habitudes, néfastes autant à la liberté que pour l'initiative des individus.

§ 43.- RELATIVITE, DUALITE ET DISSYMETRIE AU BERCEAU DES PARTIS POLITIQUES

(Résumé XXXV)

① Avant son extension au XX^e siècle, le principe de relativité de Galilée revient à considérer que la réalité est relation.

*Par exemple, à bord d'un navire, nous évaluons notre vitesse par rapport au navire, et sur la Terre, nous évaluons cette vitesse par rapport à la Terre. Galilée s'était rendu compte que c'est la raison pour laquelle la Terre peut se mouvoir par rapport au Soleil sans que nous nous en apercevions directement.*¹

La vitesse est un concept relatif. La vitesse d'un objet n'existe pas en soi. La science moderne a compris que la vitesse n'est pas la propriété d'un objet isolé, mais une propriété du mouvement d'un objet par rapport à un autre objet.² De Montaigne à Pascal, de Swift à Montesquieu, la littérature contribue à rendre sensible au public que la vérité ne dépend d'aucune position privilégiée. La justice, le pouvoir politique même, n'y échappent pas. Comme la science moderne, le droit moderne a compris que le point de vue d'une autorité, quelle qu'elle soit, n'est pas absolue. Le principe de la séparation des pouvoirs implique celui de relativité, tant ils n'existent et n'agissent que relativement.

② La notion de dualité apparaît dans le sillage de la géométrie projective inaugurée au XVII^e siècle. La dualité est une forme de symétrie qui unifie une partie des mathématiques comme l'ont montré Gergonne et Poncelet au début du XIX^e siècle. On appelle principe de dualité la transformation d'un théorème en un autre en intervertissant les termes *droites concurrentes* et *points alignés*.³ Par cette opération, la version duale d'un théorème facilite le travail du géomètre pour démontrer ce dernier.

La dualité unifie également une partie du droit des Lumières si l'on songe aux rapports entre partis politiques naissants. La dualité introduit une forme d'imitation qui n'engloutit pas les différences. Le passage au dual facilite la vie institutionnelle lorsque chaque parti « dualise » en quelque sorte son programme lors de son accession au pouvoir.

③ Si subtile et utile qu'elle soit, la dualité des partis politiques ne saurait occulter une « symétrie de réflexion » plus simple entre les partis politiques tant sur le plan des idées, de l'organisation que du fonctionnement. Cette symétrie caractérise davantage le bipartisme anglais que l'américain qui s'inscrit dans un cadre constitutionnel qui entrave à dessein la formation de blocs rigides à forte discipline. Le chef de parti que fut Madison fut obligé de se soumettre aux règles qu'il avait édictées.

④ La symétrie, si parfaite soit-elle, présente des défauts qui la sauvent de l'immobilisme. A regarder de plus près, l'alternance des partis politiques ne se réduit pas à une simple reproduction de ce qui est opposé. On observe entre eux une dissymétrie quant à l'orientation. L'opposition « droite/gauche », pour reprendre des catégories françaises explicites, se traduit par un virage à droite ou à gauche à la façon d'un tire-bouchon à hélicité droite ou gauche. Le parti qui gagne les élections réalise le tournant désiré grâce à l'appui des électeurs qui lui ont accordé leur confiance.

L'alternance des partis au pouvoir s'accompagne d'un phénomène de bascule dans un contexte de bipartisme. Il s'avère que chaque parti tarde à assouplir son orientation quand l'opinion, confrontée à des options irréconciliables, change. Un modèle « catastrophiste » est à même de décrire les sauts. Un autre modèle, tiré de l'électricité et du magnétisme, affine l'idée de d'angle et de rotation en explicitant mieux l'alignement des partis dans telle direction

⑤ La dissymétrie « droite/gauche » met face à face des formations de taille comparable. Cependant, en marge de ce rapport frontal, la vie politique révèle des asymétries discrètes ou radicales différant des symétries axiales ou en miroir. Discrètes, lorsque la solution des problèmes passe par exemple par les tribunaux. Radicales, lorsque se pose sur la place publique des sujets de discussion qu'ignore ou refoule (parfois violemment) le jeu politique.

Tels étaient, dans l'arrière-cour, à l'âge des Lumières, l'éducation des enfants et l'égalité des droits entre hommes et femmes. Mis à part des penseurs comme Locke et Rousseau, attentifs au sort des enfants, et Olympe de Gouges et Mary Wollstonecraft, militantes pour une pleine reconnaissance du droit des femmes, on ne souciait guère de l'un et on combattait l'autre.

¹ Carlo Rovelli, *Par-delà le visible. La réalité du monde physique et la gravité quantique*, Paris, Odile Jacob, 2014, p.123.

² *Ibid.*, p.124.

³ B. Hauchecorne, *Les mots et les maths*, op. cit., p.79.

§ 44.- ANALYSE DE FOURIER EN DROIT POSITIF (RESUME XXXVI)

① Un piano sans sourdine effectue, sans même poser le doigt sur le clavier, une analyse de Fourier du bruit produit, advenu à ses côtés. Certaines de ses cordes vibrent sous le seul effet des ondes acoustiques perçues. Lorsque nous nous mettons à jouer sur le piano, l'analyse de Fourier ne continue pas moins d'opérer en décomposant le son en son fondamental et en harmoniques. Toute note émise contient différentes fréquences, flanquée chacune d'un coefficient qui en mesure l'importance relative dans une note d'ensemble en fait complexe.

Techniquement, l'analyse de Fourier consiste à combiner, sous forme d'addition, des courbes élémentaires, de forme sinusoïdale, d'amplitude variable. Quand le signal est périodique, cette combinaison « linéaire » se présente comme une somme discrète (série de Fourier). Lorsque le signal n'est guère périodique, la somme devient infinie. Nous sommes en présence d'une intégrale, dite transformée de Fourier, dont la transformée inverse redonne le signal initial.

Dans la série de Fourier, le signal temporel est converti en spectre de fréquences, pondérées par des coefficients. La transformée de Fourier transforme, elle, le signal temporel en un spectre continu de fréquences. Dans ces deux cas, l'analyse de Fourier met en œuvre deux opérations fondamentales de l'âge des Lumières: l'analyse et la synthèse modernes.

② Comme *microscope mathématique*,¹ l'analyse de Fourier s'applique autant à un son complexe qu'à une image, i.e. à une onde en deux dimensions, ainsi qu'à tout signal de façon générale. Cette analyse opère sans faute en acoustique. Elle parvient à discerner, dans une note jouée par un instrument ou chantée, les composantes dont les fréquences sont des multiples entiers de la fréquence fondamentale. La mesure de leur apport respectif est précise.

Le droit des Lumières ne « résonne » pas aussi exactement. L'interprétation du droit en vigueur est sa matière vibratoire. Le son entendu est loin d'être parfaitement harmonique, mais il serait excessif de rejeter l'idée que le droit positif est pourvu d'une fréquence fondamentale au motif que l'interprétation de base, qui gouverne le droit positif, et les autres niveaux d'interprétation qui y participent, ne sont pas toutes rigoureusement périodiques. Que le phénomène juridique soit plus ou moins périodique n'empêche pas que son fonctionnement obéisse en partie à la règle d'addition d'une composante principale et de plusieurs autres.

③ Un expert en onde peut finir par admettre du bout des lèvres que le droit oscille bien qu'il n'« ondule » pas proprement dit, mais il ne démordra pas de son idée qu'il est fort dommage que l'interprétation en droit ne soit ni ordonnable, ni encore moins mesurable...

Dans le sillage de Daniel Bernoulli au XVIII^e siècle, la science a démontré pourtant qu'il existait une possibilité de mesurer l'*utilité espérée* au moyen des probabilités. La gageure a voulu que la science elle-même a eu recours à des probabilités, non seulement objectives (à des *loteries* comme dans un jeu de dés), mais aussi subjectives (non des fréquences mais des croyances).

L'interprétation que nous appelons « espérée » est comparable sur ce point à l'utilité espérée. L'interprétation (la plus) espérée est celle qui est souhaitée par le juge, celle qu'il veut appliquer à une règle, à un jugement ou à un fait juridique comme un contrat. Une méthode similaire à celle de l'*espérance d'utilité* précise dans l'esprit l'interprétation choisie.

Le « calcul » consiste d'abord à situer l'interprétation considérée entre deux interprétations extrêmes, une haute (max.) et une basse (min.). Il consiste ensuite à ajuster la probabilité subjective p en tenant compte et de la haute et de la basse. Le calcul revient à maximiser une espérance mathématique, une moyenne espérée en combinant deux options et en pondérant l'interprétation préférée par la probabilité p et l'interprétation écartée par la probabilité $(1-p)$ suivant la « formule » (si on considère l'interprétation haute comme la préférée) :

$$I = (p. \text{interprétation haute } I_h) + ((1-p, \text{interprétation basse } I_b)$$

$$\text{soit : } I = p. I_h + (1-p). I_b,$$

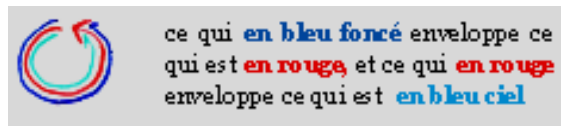
¹ B Burke Hubbard, *Ondes et ondelettes*, p.68.

Dans un graphique représentant en abscisse le temps et en ordonnée l'interprétation d'une règle, d'un jugement ou d'un fait juridique, l'interprétation devient mesurable. L'axe y prend un sens – ce n'est plus une entité abstraite. Il y a une unité dans l'intervalle [stricte, large] qui la mesure, et une équation qui détermine, via p , l'interprétation désirée comme « quantité ».

L'interprétation espérée par un juge est à la fois subjective et objective dans la mesure où le système juridique l'amène à prendre en compte les interprétations des juridictions placées à son niveau. Les interprétations des juridictions supérieures s'imposent, en outre, à lui. Ces interférences ont pour effet que les bornes d'encadrement [min, max] entre lesquelles oscille son interprétation sont en réalité des moyennes des interprétations validées par le système.

④ Une vue synoptique de l'évolution du droit des Lumières à nos jours laisse penser qu'il existe des « cycles » d'interprétation dans les droits positifs américain, anglais et français. Dans un graphique représentant l'interprétation, une interprétation large ou stricte semble se répéter, la large appelant, par ses abus ou à cause de ses limites, une stricte, et inversement.

Non seulement la durée d'un cycle d'interprétation peut varier autour d'une « période T » moyenne, mais on constate dans chaque pays un emboîtement de cycles d'interprétation. On est comme en présence de tables ou de poupées gigogne. Les fréquences d'interprétation de la Constitution, des lois et des décisions de justice et des faits juridiques s'emboîtent les unes dans les autres, la 1^{re} englobant par exemple la seconde, la 2^{de} la troisième, le phénomène se reproduisant entre les divers étages des juridictions



Un tel emboîtement rappelle celui d'une corde vibrante où chaque fréquence s'insère, dans le cadre d'une même période, dans une fréquence moins élevée, et ce jusqu'à la fondamentale. Il convient toutefois de ne pas oublier que le rapport des fréquences, en droit post-Lumières, est moins celui qui est défini dans une série de Fourier que celui qui existe entre des zones de fréquences d'une courbe continue ponctuée de bosses d'amplitude plus ou moins haute.

⑤ Aux Etats-Unis, la zone de fréquence fondamentale, celle qui embrasse toutes autres, est incontestablement celle de l'interprétation constitutionnelle. C'est elle qui donne la « hauteur » du son, la *common law* des lois et la *common law* des jugements et des faits en droit, contribuant, par leur interprétation respective, au « timbre » selon leurs diverses proportions.

Il reste à préciser, plus que nous l'avons fait, le rapport de leurs « amplitudes » par un relevé minutieux des différentes interprétations d'un niveau à l'autre. Bien que ces amplitudes soient représentées, dans un spectre fréquentiel, moins par des bâtons verticaux que par des hauteurs de zones de fréquences plus ou moins importantes, il vaut de serrer mieux leur rapport à partir de chroniques d'interprétation dûment établies.

En Angleterre, la zone de fréquence de l'interprétation constitutionnelle est quasi-inexistante. La *common law*, celle des lois et des règlements autant que des jugements et des faits juridiques, joue le rôle de premier plan. Son interprétation est au faite de la pyramide du droit. The *rule of common law* règne, malgré la souveraineté de principe du Parlement dont l'interprétation intervient à de rares occasions. Avec la nouvelle Cour suprême, l'ordre juridique peut changer.

En France, l'interprétation du Code civil domine largement celle des lois et des jugements. L'interprétation constitutionnelle est quasi-absente en raison du grand nombre de régimes politiques de la Révolution à la V^e République. Il faudra attendre cette dernière pour que l'interprétation constitutionnelle prévale, en pratique, sur les autres types d'interprétation.

Il incombe à nouveau de substituer au simple jugé une proportion plus exacte des différentes zones de fréquences d'interprétation, même si on ne peut considérer en droit une série de Fourier à forte périodicité. Le rapport de leur amplitudes, que nous avons continué d'appeler « coefficients » a_1 , a_2 et a_3 sans qu'elles soient des nombres entiers, mérite aussi d'être cerné par des données qui auront plus de titre à être traitées en « transformée de Fourier ».

§ 45.- FILTRAGE, CONVOLUTION ET ONDELETTES (*RESUME XXXVII*)

① Les différentes interprétations juridiques sont hiérarchisées afin qu'une certaine unité d'interprétation se dégage du droit. A cette fin, comme dans l'analyse d'un signal, le droit opère un *filtrage* passe-bas pour que l'interprétation de la plus basse fréquence prédomine avec plus ou moins de retard (déphasage inévitable entre les divers niveaux d'interprétation).

En jurisprudence par ex., les juridictions d'appel peuvent réduire l'importance de la contribution des juridictions inférieures en annulant ou rectifiant leur interprétation stricte ou large. Elles peuvent aussi, inversement, adopter ou conforter certaines de leurs interprétations. Elles peuvent enfin les décaler, en abaissant ou en augmentant leur fréquence d'apparition. Leur modification de phase permet d'en regrouper les effets ou de les neutraliser. Un tel filtrage de fréquences est loin d'être comparable à un simple tamis ou passoire trouée...

Le filtrage peut également s'opérer en superposant à un droit donné un autre droit pour en réduire les aspérités. Ce procédé rappelle, en théorie du signal, celui de la *convolution*. Tout pays connaît d'éventuelles discontinuités dans l'interprétation de son droit (des « dirac » juridiques, assimilables à une courbe « piquée » en une valeur donnée). Chacun a l'art de convulser ces parties hérissées avec une autre partie, ou courbe plus continue, qui les rabote. Une moyennisant en sort, comme dans une « courbe en cloche », relevant de la loi des grands nombres. Cette technique prépare les esprits aux grands arrêts de principe (*landmark decisions*). Le « produit » d'un tel filtrage rend le droit nouveau acceptable. On pensera aux Etats-Unis à l'amortissement du trouble créé par l'arrêt *MacCulloch v. Maryland* de la Cour suprême fédérale. On pensera aussi, en France, à la « démoralisation » de la responsabilité civile au bénéfice des victimes, et, en Angleterre, à la généralisation similaire du *duty of care*.

② Filtrer des interprétations consiste, comme en physique, à prélever, interrompre ou atténuer tout ou partie des composantes fréquentielles qu'il est souhaitable de favoriser ou empêcher. Cependant, il arrive qu'une analyse à la Fourier cache, comme en physique, certains aspects de la réalité. Une discontinuité, qui surgit à un moment, peut être toujours représentée par une superposition de toutes les fréquences possibles. On connaît le nombre de fréquences, mais on escamote leur instant d'émission. Une note de musique par ex. peut être suivie par une autre de façon très brève et brutale.

La transformée en ondelettes va plus loin dans l'analyse que la transformée de Fourier. Elle porte son attention sur les détails qui sont très distinctifs d'une musique comme d'un signal.

En mettant l'accent sur les différences, l'analyse en ondelettes est capable de saisir les discontinuités noyées dans la somme des sinusoïdes. Ce qui était enseveli se trouve dégagé d'une masse d'informations qui en brouillaient la vue (ou l'oreille). En faisant intervenir à nouveau des moyennes, la même analyse est aussi capable d'intégrer ces discontinuités afin de restituer au mieux un signal. La « compression » est réussie si elle a « débruité » le signal.

Le droit des Lumières s'était déjà efforcé avec Rousseau de « débruiter » la volonté générale de ses impuretés trop individuelles. Cette exigence continue de s'imposer lorsqu'il s'agit de consulter le peuple par référendum. Comment éviter que ce dernier ne vire trop au plébiscite personnel au détriment de la question posée ? La discontinuité qu'occasionne l'événement peut entraîner une rupture de régime. Tout l'art du droit est de saisir cette différence et de la moyenniser, sans la noyer, en réunissant des conditions qui impliquent le concours d'autres institutions. Depuis Condorcet, le droit d'initiative populaire a répondu à cette préoccupation comme on le voit aujourd'hui dans l'organisation des *ballot propositions* aux Etats-Unis.

Une fois de plus, les Lumières continuent de rayonner par-delà les siècles. Etonnamment encore, le droit constitutionnel demeure en osmose avec la science de son époque. La diffusion entre les parties poreuses du cerveau s'impose davantage que l'image leibnizienne des *monades* fermées sur elles-mêmes. Comme beaucoup de phénomènes naturels, le droit est comparable à un signal qui « ondule », tant bien que mal, avec des fréquences variables. Le constitutionnalisme moderne accompagne, sans trop le savoir, la science moderne où,

depuis le XVIII^e siècle, de nombreux mathématiciens étudient la représentation en fréquences des signaux. La technique des séries de Fourier constitue sans doute le point de départ de cette approche qui a abouti à l'analyse par ondelettes.

(Y. Meyer, S. Jaffard et O. Rioul, « L'analyse par ondelettes », op. cit, p.25)

§ 46. - LA SPECIFICITE DE L'INTERPRETATION CONSTITUTIONNELLE

(Résumé XXXVIII)

① L'interprétation constitutionnelle se distingue de l'interprétation juridictionnelle soumise à la hiérarchie du droit. Son fonctionnement, datant de l'âge des Lumières, laisse apparaître d'autres analogies de raisonnement, plus ou moins cachées, entre elle et la science moderne.

Plusieurs modes de pensée implicites sont en œuvre. Chaque mode révèle un aspect de l'interprétation de la Constitution par les trois pouvoirs législatif, exécutif et judiciaire, agissant ; et contre-agissant, au sein de la séparation des pouvoirs.

② Les premiers instruments intellectuels sont des modèles continus faisant appel à la notion de dérivée partielle. La philosophie naturelle de la fin du XVIII^e siècle et du début du XIX^e l'a introduite dans son étude notamment de la corde vibrante et de la diffusion de la chaleur dans une barre métallique. Les équations de d'Alembert et de Fourier furent un modèle du genre.

Le même cheminement mental, reposant sur la notion de dérivée partielle, parcourt l'interprétation constitutionnelle. Conformément au goût mathématique de l'époque et des suivantes, on verra surgir une matrice jacobienne d'interprétation à laquelle contribuent les trois pouvoirs qui ont un accès à la fonction (juridique) d'interprétation de la Constitution.

Sans prétendre en attendre un mode de raisonnement rigoureux, vérifiant toutes les propriétés attachées aux dérivées partielles premières et secondes, on ne peut qu'être frappé par le fait que l'interprétation globale résultante procède de la même manière du concours d'interprétations partielles. Ce qui rapproche également l'interprétation constitutionnelle d'un tel modèle est l'idée qu'il existe également, dans l'interprétation de la Constitution, des directions privilégiées de dilation ou de contraction de ces interprétations partielles suivant le jeu des rapports de force entre les trois pouvoirs dépendant plus ou moins des circonstances.

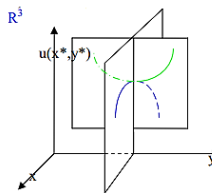
(Question toujours irrépressible)

- Si vous n'avez pas l'ambition de faire de vraies mathématiques, qu'y a-t-il donc lieu de faire ?

(Réponse non moins identique)

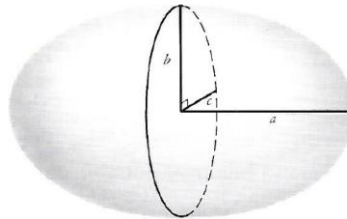
- Leur raisonnement s'applique. C'est une indication précieuse, qui peut guider la réflexion, faute d'un compas de navigation, même si elles n'interviennent pas rigoureusement en droit.

③ Lorsque le rapport des forces en présence est un jeu à somme nulle ou constante, il s'établit un équilibre interprétatif de point-selle, caractérisé par la rencontre en un col du minimum d'une courbe d'interprétation d'un pouvoir et du maximum d'une autre courbe d'interprétation d'un ou de deux pouvoirs (ou inversement).



Même dans un jeu à somme non constante, l'interprétation constitutionnelle n'est pas totalement dénuée de propriétés de stabilité. L'interprétation citée continue elle-même de s'encadrer. Les interprétations concurrentes se bornent entre elles en l'absence d'un pouvoir extérieur suprême. Il n'y a pas de Dieu réel ou imaginaire qui viendrait mettre un frein à la démesure éventuelle de l'un ou l'autre des trois pouvoirs exerçant la fonction d'interprétation de la Constitution. Chacun force l'autre à « mesurer » son interprétation, faute sinon, au pire d'être menacé d'être destitué, au mieux de ne plus être suivi ou écouté en d'autres occasions.

Ce sont de telles butées qui font que, dans le meilleur des cas, la rencontre des interprétations produit, dans l'espace de leur représentation, un volume de points qui sont loin d'être dispersés ou erratiques. Une forme de type ellipsoïde semble les envelopper. Le dessin rappelle au lecteur le rêve des Lumières, exprimé par la métaphore du système planétaire constitutionnel, d'empêcher que tout pouvoir ne soit ou ne devienne exorbitant (i.e. ne sorte littéralement de son orbite comme une planète dans le système solaire perçu au XVIII^e siècle).

Résumé XXXVIII (suite)

ellipsoïde avec ses axes principaux a , b et c , exprimant les paramètres d'extension ou de restriction des trois pouvoirs P_L , P_E et P_J selon leur interprétation hardie ou contrecarrée de la Constitution)

L'extension cachée de la physique et des mathématiques dans le droit (à une grande déformation près) est repérable également si on choisit, parmi les instruments d'investigation, des modèles discrets. Au lieu d'entrevoir un ellipsoïde, on verra un pavage cubique, ici encore dans le meilleur des cas. Sans doute est-ce une image tronquée ou trop parfaite de la réalité, mais cette image a l'intérêt d'éveiller l'attention du chercheur à la perception d'une forme autrement stable dans l'idéal, forme qui n'est pas toujours aussi éloignée du droit qu'on croit.

④ La dualité des raisonnements, concernant l'interprétation de la Constitution et la satisfaction qu'en retire le pouvoir qui réussit à imposer son interprétation, aide à traiter, sans trop de maladresse ni d'hypothèses simplistes, le problème du partage de l'interprétation constitutionnelle ainsi que celui des coalitions qui interfèrent et brouillent cette interprétation

Dans ce cadre, la notion de barycentre émerge à nouveau dans un triangle, complétée par d'autres notions comme le « cœur » (core) et la valeur de Shapley qu'ajoutent aujourd'hui, à l'analyse, la théorie des jeux coopératifs.

Ces notions s'efforcent de cerner la dynamique des interprétations et des coalitions qui se forment à leur sujet. La question des causes de la stabilité et ses limites, se pose une nouvelle fois, sans qu'une solution pérenne se dégage en toute certitude. L'interprétation globale de la Constitution peut être déstabilisée par la formation de coalitions entre les trois pouvoirs au sommet de l'Etat, mais les coalitions elles-mêmes peinent à se stabiliser dans un « cœur » qui puisse résister à toute autre association de rendement supérieur quant à l'utilité des joueurs.

Lorsque la coalition se transfigure en collusion entre deux ou trois pouvoirs au détriment de la nation, la volonté latente de cette dernière, que Rousseau qualifiait de générale, réagit, pacifiquement ou avec violence. Ce n'est plus la colère de Dieu qui gronde (ou que l'on croyait qui gronde), mais la colère de la cité en son entier qui n'est pas aussi extérieure que la volonté divine jugée transcendante au droit. Des raisons immanentes concordent davantage avec l'interprétation présente de la Constitution. C'est dire si l'interprétation constitutionnelle ne peut être trop coupée de l'interprétation de la plus grande coalition qu'est la cité en totalité.

Tout un apprentissage est nécessaire pour que les autorités constitutionnelles saisissent ces exigences profondes et ses nuances et la transforment en synthèse adaptée au sujet traité. Le réseau formel de neurones, imaginé de nos jours, est à même de fournir une description des différentes voies de passage ainsi que leurs relais. Des flèches conduisent l'opinion des gens du bas, éclatée en mille points de vue épars, à participer à l'interprétation de la Constitution à côté de celle, non moins fragmentée, des pouvoirs législatif, exécutif et judiciaire en place.

Bien que la notion de volonté générale fasse l'objet elle-même d'interprétations contestables de la part d'individus ou de groupes qui entendent la monopoliser, cette notion mérite une résurrection. Le modèle du réseau, avec ses entrées et ses sorties variables, en montre la complexité et la diversité sans en perdre l'idée. La moyenne pondérée des avis englobe à chaque étage les intérêts spécifiques de chacun dans des intérêts communs sans les effacer.

Via d'autres modèles, on continuera d'apporter à la volonté générale une meilleure justification.

§ 47.- LA MOYENNE (DES VOISINS) JURISPRUDENTIELLE

(Résumé XXXIX)

① La jurisprudence des agences américaines est le produit d'une interaction entre les trois pouvoirs suprêmes de l'Union qui cherchent à faire partager leurs vues d'ambition et d'intérêt. Les agences s'efforcent de jouer chaque pouvoir constitutionnel contre un autre (*to play off one against the other*). Elles manœuvrent entre.

Les tribunaux judiciaires fédéraux, subordonnés à la seule Cour suprême, sont paradoxalement plus libres dans la fabrication de leurs jugements. Ils sont protégés des incursions venant d'autres pouvoirs d'en haut, mais n'ouvrent pas pour autant dans le vide. Ils participent à un mode de raisonner qui fait penser en science à celui du laplacien dont la formule est composée des différentes variations d'un déplacement d'un objet dans l'espace.

② Le laplacien est, en mathématiques, un opérateur différentiel qui correspond à la divergence du gradient, c'est-à-dire du taux de variation instantané de chacune des composantes d'un quelconque déplacement. Le laplacien mesure la divergence, l'écart entre un point de l'espace, physique ou figuré (comme celui des densités d'une population), et la moyenne des points dans son voisinage (le territoire alentour s'il s'agit d'une population).

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad \text{Le laplacien correspond à la différence moyenne entre la valeur de } u \text{ au point considéré et sa valeur aux points voisins}$$

Par écart, il faut entendre une « anomalie » locale, mesurée par les dérivées partielles secondes (dans chaque direction de l'espace considéré). Le laplacien Δf (ou Δu) combine ces dérivées ($\partial^2 f / \partial x^2$, $\partial^2 f / \partial y^2$, $\partial^2 f / \partial z^2$) en une addition ($\Delta f = \partial^2 f / \partial x^2 + \partial^2 f / \partial y^2 + \partial^2 f / \partial z^2$) qui donne une idée de la courbure ou déviation moyenne locale. Cette idée est appliquée à une image dont on cherche à cerner le contour en observant le passage par zéro du laplacien. Elle l'est aussi à la température d'une pièce, dans laquelle l'équation de Laplace, $\Delta f = 0$, opère partout en moyennant tous les changements de la température qui se diffuse dans toutes les directions.

$\Delta f = 0$ signifie que les changements partiels se compensent.

Le $\Delta f = 0$ joue équivalamment en droit un rôle de réduction des disproportions entre les précédents lorsqu'un juge de *common law* construit sa propre décision qui amende à son tour les précédents. La fonction f , dans ce laplacien nouvelle manière, ou **pseudo-laplacien**, $\Delta f = 0$, agit sur des précédents qui ont déjà jugé eux-mêmes des précédents. La fonction f contre-balance leurs interprétations les plus diverses. Elle en tire une nouvelle interprétation susceptible de s'ajuster au cas à traiter.

③ Comme le romancier, décrit par le philosophe du droit, Ronald Dworkin, le juge fait œuvre littéraire en ajoutant quelques lignes, une section ou un chapitre, à l'histoire des interprétations. Il participe à une explication d'ensemble cohérente qui ne départit pas trop, en principe, de celle des autres juridictions. Dans cette longue suite de jugements, tout se tient, tout se soutient, tout contraste sans se contredire à la fin. Confirmant ici, infirmant ailleurs, la main du juge se doit d'être habile et savante pour équilibrer un tableau colorié.

En choisissant avec soin les cas voisins, le juge choisit en fait son graphe en respectant autant que possible les directions principales de la jurisprudence. Si le juge procédait à un calcul, ces directions seraient mises en lumière par les vecteurs propres d'une matrice. Chaque arrêt se voit attribuer un poids en fonction de son importance qui résulte d'autres arrêts qui s'y réfèrent. Tous les arrêts sont plus ou moins connectés entre eux. Certains entretiennent davantage de liens que d'autres en étant cités par plus d'arrêts, ou en se fondant eux-mêmes sur des arrêts dont ils contribuent, par ce biais, à en accroître la pertinence. Une étude collective sur la jurisprudence américaine en matière d'avortement illustre un tel réseau. Dans ce réseau, l'arrêt *Roe* (1973) est à la fois le plus relié (il possède plus de voisins que d'autres) et le plus connecté (à des sommets du graphe qui sont eux-mêmes connectés).

Résumé XXXIX (suite)

Si éclairant que soit ce type d'analyse, il importe de répéter ce qui est peu souligné : que les distances entre les arrêts sont appréciées telles quelles par le juge. Qu'elles ne s'imposent pas à lui, autrement dit, de façon objective. Que c'est lui qui en définit la « mesure », qui juge ce qui est proche ou lointain, à ses yeux, de son objet d'étude. C'est encore lui qui en dégage la « moyenne » ou l'« harmonie » entre des bords qui encadrent, en retour, son jugement.

④ Un juge de *common law* œuvre dans des limites qu'il n'est pas accoutumé à franchir. Ces limites sont les grands arrêts du droit en cause et les lois du Parlement ou du Congrès. Ce sont des bords qui régissent, non seulement le pourtour, mais aussi à l'intérieur du droit, comme un mécanisme qui crée un reflux immédiat en retour. La moyenne des points voisins requiert des points frontières comme une bulle de savon requiert à sa base, pour se former, un fil de fer. Comment jouer sur une membrane de tambour qui ne serait guère tendue autour ?

Comme le conseillait Hobbes, les conditions aux bords sont des conditions écrites qui délimitent l'emprise du droit dans l'espace et le temps. Il faut reconnaître que ces conditions ne sont pas aussi rigoureuses que les conditions aux limites de la science du fait notamment de la rétroactivité de certaines lois. Les conditions aux bords sont toutefois confortées par des principes d'interprétation des lois que la jurisprudence définit et s'emploie à respecter.

Même une bulle de savon évolue avant d'être lisse et prendre la forme optimale que nous admirons. Loin de conduire à une immobilité stagnante, l'équation de Laplace rabiboche en permanence le tissu du droit qui présente des aspérités ou des manques incessants. Le processus n'est pas seulement temporel mais dynamique à tous les étages de la jurisprudence : du sommet de la Cour suprême au niveau des juges de 1^{re} instance, confrontés, plus que les juges d'appel, à l'aléatoire plus qu'il n'en faut. Au plus près des justifiables, le laplacien, $\Delta f = 0$, opère sans relâche comme si les juges qui en ont la charge tâchaient de moyenniser des molécules de gaz plus agitées que dans un solide, voire un liquide.

A leur étage, les juridictions inférieures harmonisent une quantité de nuances nouvelles, venant du dehors. Les juridictions supérieures d'appel ou d'instance suprême, dont le droit est moins perturbé par le hasard, harmonisent une autre quantité de nuances nouvelles provenant des interprétations. Toutes innovent, prolongeant le roman à feuilletage du droit.

⑤ Les conditions aux bords bornent la vue du magistrat, mais les faits qui se présentent à lui ne sont pas toujours d'une ampleur aussi faible que celle qui est postulée dans la formulation du laplacien en science. De fortes perturbations dans l'interprétation peuvent créer des « plis » sur la surface du droit façonné autour de principes tels que le principe d'égalité hommes/femmes et celui du respect de la vie privée mis en lumière dans l'arrêt *Roe*. Une représentation géométrique illustre leur formation dans le fil des arrêts relatifs à l'égalité hommes Blancs/hommes Noirs. La notion mathématique de « fibré » aide à appréhender concrètement l'évolution de la *common law* américaine, prolongeant l'anglaise, en la matière.

Le droit constitutionnel s'efforce de desserrer les bords qui compriment trop l'espace des solutions, comme il appert dans les domaines autres de la force majeure et de la responsabilité. Dans le meilleur des cas, il y a un temps pour le pliage et un autre pour le dépliage, si l'interprétation n'est pas trop remuante, multipliée ou trop enflée, comme dans l'arrêt *Dred Scott* (1857) dont la rédaction alluma une guerre civile latente entre 1861 et 1865.

Dans les temps plus ordinaires, tout ne s'arrange pas non plus toujours. Le laplacien, $\Delta f = 0$, est censé aplanir les grosses vagues dérivant sous le vent et le courant, mais il n'opère plus en pareil temps quand le vent est celui de l'opinion publique et le courant celui des lobbies qui exercent une influence corruptrice. Les événements agrandissent la divergence des interprétations au lieu de la réduire presque à néant. La tempête peut même souffler à l'intérieur de la maison du droit. L'approche catégorielle de certains juges risque de miner celle du *balancing test*, plus apparenté dans la jurisprudence à la moyenne des voisins. L'interprétation n'en perdure pas moins en corrodant autant les catégories que les précédents.

Résumé XXXIX (suite et fin)

⑥ On garde la nuance, ou plutôt des nuances, et on tâche d'équilibrer le sens de l'une avec celui de l'autre sans en aplatir tout le contenu. Une difficulté de taille subsiste pourtant : celle de voir fracturer la connexité du réseau jurisprudentiel entier en des sous-ensembles séparés.

Il y a d'abord des juges qui ont le goût du risque et d'autres qui l'ont peu éveillé, réticents à s'aventurer dans une interprétation qui s'écarterait trop du « droit chemin ». L'échelle linéaire, qui « mesure » combien l'interprétation est stricte ou large, peut être mise à mal. On se console en estimant que toute autre échelle (par ex., la logarithmique) ne fonctionne qu'aux extrêmes.

Malgré des progrès notables, le manque d'expertise des interprètes d'un droit aussi spécialisé que l'antitrust emporte également ce dernier à devenir une composante non connexe de la *common law* américaine. Viendrait-on s'en plaindre, il existe, suggère-t-on, des isomorphismes plus ou moins parfaits entre différentes parties de la *common law*, voire avec le droit constitutionnel. La logique économique assure pareillement un passage en droit des affaires.

- De sorte qu'il n'y a pas lieu, en fin de compte, de dramatiser les coupures visibles du droit ?

– Si Shakespeare répondait à notre place, il insinuerait qu'il y a plus de choses dans le ciel et la terre que ce dont rêve le droit.¹ De bizarres apparitions peuvent survenir sur la surface de la jurisprudence qui ressemble parfois à un tore plat ou en révolution. Des drôles de chemin s'y dessinent potentiellement comme il est à craindre au sujet des thèmes de la ségrégation raciale ou l'avortement aux Etats-Unis. La moyenne des voisins risque de tourner en rond dans le monde de la justice comme de la politique, si aucune négociation sur les conditions ne parvient à se substituer à une querelle sans fin sur le terrain de principes qui se contredisent.

Un « fibré », évoquant à nouveau le tire-bouchon, montre des voies de sortie vers de multiples solutions. Doit-on abandonner l'idée qu'il en existe qu'une seule comme pourrait la trouver un Hercule en droit ? Non, *a careful judge, a judge of method*, selon l'expression de Dworkin,² ne peut coffrer la moyenne des jugements voisins dans une unique bonne réponse. Les jugements, assortis de sanctions, sont *context-dependent*, ce qui conforme au droit américain.

*Cinquième leçon:***La souveraineté individuelle et la volonté générale au cœur l'une de l'autre**

¹ *There are more things in heaven and earth, Horatio, than are dreamt of in your philosophy* (Hamlet, Acte I, sc. 5, vers 167-168).

² R. Dworkin, *Law's Empire*, op. cit., p.240.

§48.- L'EXTENSION NON ARCHIMEDIENNE DE LA SCIENCE ET DU DROIT DES LUMIERES (Résumé XL)

① L'axiome d'Archimède parcourt la science et le droit jusqu'à l'âge des Lumières. Cet axiome mathématique de continuité interdit de comparer ce qui n'est pas comparable, l'infiniment petit et l'infiniment grand. Entre eux, ne serait définie, ni la relation « = », ni celle « < ».¹

Avec Leibniz cependant, on commence à entremêler des grandeurs ordinaires (finies) et des grandeurs infinitésimales. Le passage à la limite assure la jonction. Pareille extension non archimédienne s'immisce dans le droit qui s'efforce de régler la politique.

On le constate chez Hobbes, Locke et Rousseau, pour ne parler que des principaux propagandistes du contrat social, censé fonder l'Etat rationnel. Le passage à la limite devient passage à l'action. Nous partons de l'individu pour aboutir à Léviathan, infiniment grand mais mieux « ficelé », depuis Locke, par la séparation des pouvoirs.

② La démarche non archimédienne s'enrichit d'une démarche complémentaire qui révèle les propriétés du tout par rapport à la partie. Il est question d'un autre « non- », celui de la non-linéarité (ou *suradditivité*, comme en matière de coalition), de réorganisation avec boucles de rétroaction, et de plasticité du tout facilitant notamment la révision de la Constitution.

La plasticité est une des caractéristiques principales du vivant. Elle se manifeste en droit constitutionnel par la capacité des institutions de se remodeler plus ou moins en profondeur.

③ Esprit ô combien singulier parmi Les lumières, Rousseau ne se contente pas d'outrepasser l'axiome d'Archimède. Certes, il rapproche les extrêmes, l'infiniment petit et l'infiniment grand, l'individu et l'Etat, mais il entrevoit une discrète dualité entre leurs propriétés respectives : ce qui agite ou modifie l'un agite ou modifie l'autre. Plus le moi se déleste de ses particularités, plus le moi commun devient commun - générique - et tend davantage vers l'intérêt général. Il fut être un vagabond pour la percevoir à distance.

La dualité est telle que l'on a le sentiment que Rousseau ne raisonne plus en infini potentiel, mais en infini réel (*en acte*) entre deux ensembles infinis dont les termes un à un se correspondent. Le tout et la partie ne se touchent pas seulement ; ils s'égalent.

④ Chez Madison, comme chez les autres fondateurs, la dualité entre l'individu et la communauté opère de toute autre façon. La dualité est moins stricte que « consonante ».

Hobbes distinguait les individus par leurs talents. L'individu conserve en Amérique toutes ses particularités. Les talents, les vanités et les passions sont en jeu et Madison n'entend pas, par réalisme, détruire un tel jeu. Il s'efforce au contraire de croiser le plus possible les particularités des individus comme on croiserait des plans différents. (*fig a*, avec deux plans)

fig.a

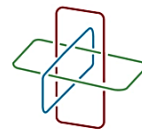
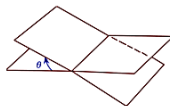


fig.b

La même stratégie opère au niveau de la séparation des pouvoirs avec un degré de complexité plus élevé. Il ne s'agit plus seulement d'intersection, mais d'interconnexion via la mise en place de « nœuds » qui favorise la collaboration et la stabilité des liaisons. Le nœud borroméen répond le mieux à ces deux préoccupations en dépit de ses déformations. (*fig.b*) Cette stratégie de nouement n'est pas non plus totalement absente dans la lutte contre les factions, attendu qu'il y a un art de démenteler les mauvais nœuds qui agglutinent les factions en sacs de nœud étouffant toute expression. Compliquer à dessein un tel nœud peut aider la parole à en sortir.

Au lieu d'être délesté, l'individu est ainsi placé au carrefour de toutes les influences et défenses d'intérêt. On multiplie et on chevauche les hétérogénéités au sein d'un même individu qui se voit appartenir aux groupes les plus divers. Le recouplement incessant a pour effet de dégager dans l'individuel le général, l'un et l'autre finissant par se correspondre à l' ∞ .

⑤ Les moyens de Rousseau et de Madison diffèrent. L'un privilégie le semblable, l'autre le différent, mais le résultat espéré est le même : créer un mouvement, sinon homogène, du moins unidirectionnel, une volonté d'ensemble, qu'elle soit qualifiée de *volonté générale* chez Rousseau, ou de *volonté de la communauté* chez Madison. Tout se recompose sans que chaque individu ne soit perdant, ni perdu, dans l'état de société.

La philosophie actuelle de John Rawls emprunte aux deux pensées en y mêlant du Kant.

¹ Jean Toussaint Desanti, *Les Idéautés mathématiques*, Seuil, Paris, 1968, p.152

§49.- LA CONSERVATION DE LA PARTIE AUTANT QUE DU TOUT PAR LE CONTROLE DES LOIS (*Résumé XLI*)

① Le constitutionnalisme des Lumières est soucieux de conserver l'individu que l'Etat nouveau est chargé de protéger, quitte à annuler certaines actions de ce dernier pour que la loi demeure générale et nullement au service d'un seul ou de catégories sociales privilégiées.

Il y a dans cette idée une notion de groupe mathématique qui émerge en science moderne. L'approche est perceptible dans les réarrangements géométriques par exemple du triangle équilatéral ou du carré qui ne sont rien d'autre que des permutations de leurs sommets laissant leur figure invariante.

Le groupe mathématique possède comme première propriété une loi de composition interne agençant les éléments d'un même ensemble. Cette loi est associative : $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ dans tous les cas. Elle possède un élément neutre, e , tel que $a \cdot e = e \cdot a = a$ pour tout a (comme 0 pour l'addition et 1 pour la multiplication). **Cet élément neutre signifie le retour de départ, autrement dit à l'identité, pour toute composition**, attendu que chaque symétrique d'un élément a est un élément b qui restaure la configuration initiale, sachant que $a \cdot b = b \cdot a = e$. L'élément symétrique est l'opposé dans l'opération d'addition et l'inverse dans celle de la multiplication. Si la loi de composition interne s'avère, en outre, commutative, c'est-à-dire que $a \cdot b = b \cdot a$, le groupe mathématique qui regroupe les quatre propriétés précitées, est dit commutatif ou *abélien*.

La notion de groupe en dehors du cadre géométrique fut entreprise par Lagrange à la fin du XVIII^e siècle et dégagée par Galois au début du XIX^e. Son extension, au cours du même siècle, fut l'œuvre notamment de Cayley qui établit des *tables de multiplication*, obéissant à des contraintes particulières et dans lesquelles peuvent être vérifiées les quatre opérations.

② La notion de groupe peut déjà être tracée au cœur de la philosophie politique invitant le droit à réguler la politique. L'individu abstrait, sans épaisseur, acquérant par le droit de propriété une « masse », acquiert par là même une invariance sous les habits les plus divers. Le soin qu'il apporte à sa conservation (son bien propre le plus indétachable), qui correspond au principe d'inertie en physique, est du même ordre. Il en est aussi de son accélération vers la corruption quand le même individu accède au pouvoir dans l'Etat, ce que nous avons nommé la « loi de Locke », plus ou moins équivalente à la loi d'accélération constante dans le vide selon Galilée, les « frottements » jouant également en politique comme en physique).

③ Le droit positif n'est pas en reste. Il est frappant de constater que les principes juridiques sur lesquels repose le constitutionnalisme moderne semblent pouvoir être regroupés dans une table de multiplication à la Cayley. Au nombre de ces principes figure en premier la liberté, et la propriété capable de la réaliser, enfin l'égalité et la citoyenneté dans l'esprit des Lumières. Bien que considérée comme *sacré*, le droit de propriété est quelque peu refoulé en France, à l'instar de la volonté générale dans le nouveau monde. Leur refoulement n'implique aucunement leur inexistence. Quant à la fraternité, son équivocité pose problème.

*- Mais qu'il y a loin encore à ce que l'on espère des lois
et combien peu « le groupe » fait impression sur elles !*

④ C'est vite dit. Le triangle équilatéral de participation des trois pouvoirs à la confection des lois est une première indication qu'un groupe mathématique est en œuvre. Les permutations des sommets n'altèrent en rien une telle confection. Les % de participation restent les mêmes. Le nombre de sommets qui occupent les sommets apparaît être un nombre premier dont le rôle n'est pas sans incidence sur la solidité de l'ensemble, même si la stabilité s'avère aussi une question de placement du barycentre (il ne faut pas trop s'éloigner du « centre de gravité » des pouvoirs qui collaborent tout en s'opposant ; chacun cherche à tirer la couverture à soi : « c'est bonne guerre »). Les nombres premiers ne sont pas étrangers à la théorie des groupes.

Résumé XLI (suite)

⑤ Parmi les structures algébriques possibles, le groupe mathématique paraît le candidat idoine pour comprendre le fait de l'annulation des lois par une cour constitutionnelle ou un conseil constitutionnel. En droit, toute loi ne se voit pas opposer une loi symétrique, mais **toute loi peut faire l'objet d'une « symétrisation » par la voie d'une annulation**. L'ensemble des lois doivent notamment respecter les principes de liberté et d'égalité, déclinés sous diverses formes en chaque domaine particulier. Ces principes sont les éléments neutres que le contrôle des lois doit retrouver sous peine de voir la Constitution bafouée. L'ensemble des lois forme elle-même un *groupe quotient* composé de toutes les classes d'équivalence dans lesquelles sont regroupées, comme sous-groupes, les diverses sortes de lois (civiles, pénales, etc.).

Il en est ainsi du groupe des lois de la concurrence (*competition law*), appelées à lutter contre tout excès de concentration de pouvoir sur les marchés. Comme en droit constitutionnel, dont l'*antitrust law* est à cet égard, plus que tout autre droit, un prolongement direct, on ne veut point voir deux classes distinctes d'entreprises, les sur-dominantes et les demi-serves. A cette fin, le contrôle des lois revient à interdire certaines ententes ou regroupements, ce qui n'est pas sans rappeler, à l'occasion, *le groupe de Klein* réglant certains rapports de mariage en ethnologie. La quête de stabilité de la société moderne est non seulement la même, mais les structures mathématiques ne sont pas si éloignées. La conscience des règles est cependant plus explicite (sans l'être tout à fait) dans la société éclairée par la science des Lumières.

Ce *groupe de Klein*, composé de deux oppositions binaires, est en tout état de cause manifeste dans le cadre de la négociation des lois qui s'efforce de trouver un équilibre entre, d'une part, les principes qui les animent (par ex. entre le droit à l'avortement ou son contraire) et, d'autre part, les conditions, plus ou moins restrictives, qui en règlent l'application dans des circonstances concrètes et le temps.

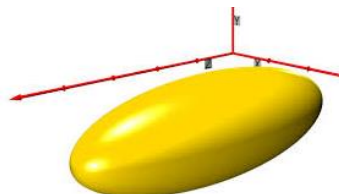
- Lorsque vous envisagez de pseudo-groupes mathématiques, est-il certain que cette notion soit applicable à l'interprétation constitutionnelle dont la matière est plutôt « continue », tant l'interprétation produit des effets très voisins des précédentes ?

⑥ Il me semble. La certitude en droit n'existe que dans l'idéal. Nous ne sommes pas en mathématiques, mais plus proches de la physique si éloignée soit-elle de la nature plus insaisissable de l'humain.

Un groupe de Lie, donc continu, est pareillement perceptible quand on considère les isoquantes jurisprudentielles. Chacune « iso-jurisprudence » combine différentes motivations pour aboutir à une même conclusion ou arrêt. Sa forme convexe ne change guère avec l'introduction d'un progrès technique comme l'intelligence artificielle (IA), à l'instar des courbes d'isocompétence collective à la Condorcet qui subissent un semblable effet neutre. On attend, dans les deux cas, une amélioration de la qualité des décisions juridiques sans que soit mise en cause l'idée d'iso-quelque chose combinant divers facteurs de « production ».

⑦ S'il est difficile de réduire la volonté générale à un pseudo-groupe en raison de son horizon indéterminé et à jamais ouvert (bien que son modèle rappelle un peu celui de l'IA), il demeure que le droit constitutionnel donne prise au groupe fini en d'autres endroits précis. Que l'on se souvienne du modèle décrivant les liens inter-citationnels entre les arrêts de la Cour suprême américaine. Les notions de valeurs propres et de vecteurs propres donnent une idée des directions privilégiées dans un champ jurisprudentiel donné. La valeur propre $\lambda = 1$ joue le rôle d'élément neutre pour jauger l'ampleur de la dilation ($\lambda > 1$) ou de la contraction ($\lambda < 1$) dans ces directions, annonçant, par réaction, un éventuel revirement jurisprudentiel.

⑧ La « matrice jacobienne » de l'interprétation jurisprudentielle, si tant est que l'on puisse la construire au moins sur le papier décrit les variations d'interprétation globale de la Constitution résultant des variations partielles concurrentes des pouvoirs législatif, exécutif et judiciaire. Chaque point de rencontre est représentable dans un volume dont l'enveloppe a la forme d'un ellipsoïde, grâce à l'existence de butées sur chaque axe d'interprétation. La conservation de la *variété*, continue et différentiable, de l'ellipsoïde est assurée par un groupe.

Résumé XLI (suite et fin)

⑨ L'idée de groupe, fini ou continu, empêche, somme toute, que tout s'efface, les événements effaçant les événements. Ce qui est conservé est, en droit constitutionnel, la souveraineté collective autant que l'individuelle, à savoir la liberté de chacun dans un Léviathan aux lois constitutionnellement contrôlées. Invisibles, des groupes agissent en droit pour qu'il perdure.

A toutes les périodes historiques, il existe un esprit-principe. En ne regardant qu'un point, on n'aperçoit pas les rayons convergeant au centre de tous les autres points ; on ne remonte pas jusqu'à l'agent caché qui donne la vie et le mouvement général, comme l'eau ou le feu dans les machines.

(Chateaubriand, *Mémoires d'outre-tombe*, op. cit., Liv.5, chap.1. Nous soulignons)

§50.- L'EFFET DE POUVOIR D'UN EXCES DE CONTROLE (*Résumé XLII*)

① Avant le XVII^e siècle, on considérait que, parmi les quatre éléments, seuls l'eau et la terre avaient du poids. On estimait que le feu et l'air étaient dépourvus de masse. Il a fallu attendre les expériences de Torricelli puis de Pascal pour admettre le vide et découvrir le poids de l'air.¹

En droit, on ne savait que trop que le pouvoir unique pesait comme une puissance absolue exerçant ses effets sans frein, mais on n'imaginait guère que chaque pouvoir de la séparation des pouvoirs pouvait peser, comme beaucoup d'argent, son comptant. Chacun reçoit au départ des attributions qu'il s'efforce d'étendre au point parfois de devenir omnipotent. L'Assemblée, sous la Révolution française, en fut une preuve patente. Elle s'arrogea tout.

② La puissance d'un pouvoir dépend de ses compétences plus ou moins définies et de l'avantage que lui procure sa position pour agir. Un pouvoir est d'autant plus puissant qu'il est doté de compétences élargies, qu'il a réussi à agrandir, et de l'appui de l'opinion publique qui a voté pour lui, ou qui, depuis, se tourne vers lui. Des partis et des *lobbies* peuvent aussi soutenir sa politique. Une alliance avec un autre pouvoir accroît pareillement sa puissance.

La croissance hors contrôle du Parlement sous la III^e République française illustre ce fait, sans tomber toutefois dans les excès du début de la révolution française. La création d'une dénivellation considérable entre la position du Parlement et celle du Président de la République a abouti à déformer passablement le triangle équilatéral de participation des pouvoirs à la confection de la loi. A l'avantage du pouvoir législatif, le triangle a pris une forme non convexe, privé du barycentre classiquement attendu. Le barycentre, pondérant des avis multiples, a disparu au profit d'un avis qui a imposé ses vues sur les lois et la Constitution.

③ Il ne fut pas aisé de voir que le pouvoir judiciaire pouvait aussi chausser des bottes de sept lieues dans son interprétation des lois comme de la Constitution. Aux Etats-Unis à la fin du XVIII^e siècle et en France au XX^e, la surprise fut totale avant de l'être aussi un jour, avec la même ampleur, en Angleterre. Le pouvoir judiciaire a su tromper son monde. On a cru tant qu'il se contenterait de dire « la vérité » dans toute son étendue, sans aucun déguisement, alors qu'il a avancé ses pions sous la précision apparente de ses jugements. La parole législative s'inclina devant un discours qui révéla la haute importance du juge suprême.

Comme Descartes, le pouvoir judiciaire a su, à tous les niveaux, *avancer masqué* dans la bataille qui l'oppose aux autres pouvoirs sans que sa dissimulation ne soit qu'une simulation qui induirait en erreur. Comme l'écrivit La Bruyère, dans la France du XVII^e siècle, *celui qui a la mémoire fidèle et une grande prévoyance est hors du péril.*²

④ Le juge anglais est parvenu à grandir en statut en accroissant son rôle d'unification de la loi commune du royaume (*common law*). On parlerait moins, à son sujet, de stratégie, que de tactiques coutumières d'interpréter les lois du Parlement, la tête respectueusement baissée. Par ce si subtil détour, son aura n'a fait que briller, au cours des siècles, en prestige, et en pouvoir, sans le dire, dans tout le pays. Son institution est perçue comme la plus honorable.

Par contraste, le juge américain y est allé plus franchement, sous couvert, toutefois, de la Constitution, principalement fédérale, dont il se proclame le plus fidèle gardien. Outre des stratégies d'écriture et de raisonnement remarquables depuis l'arrêt pionnier *Marbury v. Madison* (1803), les membres de la Cour suprême des Etats-Unis usent savamment, à côté de la *ratio decidendi* qui décide, de l'*obiter dictum* qui canalise, selon leurs vues, l'avenir. Prudente, la Cour sait cependant tenir compte de la position de pivot de certains *lawmakers* qui pourraient aller à l'encontre de ses décisions. Les coalitions bloquantes entre le législatif et l'exécutif ont aussi la vertu de tempérer **son ardeur** à outrepasser par ses arrêts l'admissible.

¹ <http://www.meteofrance.fr/prevoir-le-temps/observer-le-temps/parametres-observees/pression>

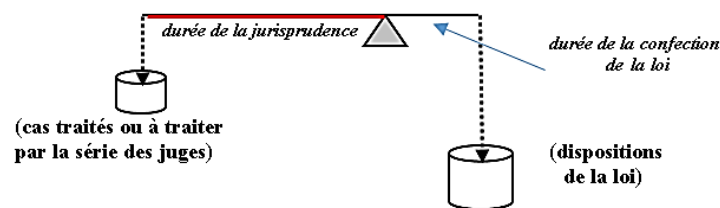
² La Bruyère, *Les Caractères*, op. cit, p.289.

Résumé XLII (suite)

Quant au juge français, c'est un peu tout cela, et ce n'est pas cela. Un peu tout cela sous l'ancien régime et après la Révolution jusqu'à nos jours, mais point cela durant la Révolution.

Sous la Révolution, les juges sont sommés de ne pas interpréter la loi. L'interprétation est réduite à celle des contrats, et encore faut-il suivre les règles du Code civil dont Bonaparte a conduit les travaux au pas de charge. Davantage que sous l'ancien régime, l'interprétation est vécue comme hérésie, une usurpation de la volonté générale dictée par le législateur. Au cours des XIX^e et XX^e siècles, les juridictions françaises, tant civiles qu'administratives, apprennent à desserrer les bornes étriquées qui leur sont prescrites par des assemblées qui se proclament souveraines. Elles apprennent, elles aussi, à emprunter des chemins détournés ou de traverse sous une feinte modestie. Le Conseil constitutionnel héritera de cette prudence de sioux. *Hâte-toi lentement, mais ne t'arrête jamais*, disait-on déjà dans le monde ancien.

⑤ Dans tous les cas, on retiendra, parmi les diagrammes qui décrivent diverses situations, l'équilibre éventuel entre le « moment » de l'intention du législateur et le « moment » de l'interprétation par le juge. Ce schéma n'est pas sans rappeler l'équilibre des « moments de forces » entre le roi réel et le roi d'apparat, dans le haut moyen âge en France et dans l'Angleterre victorienne et actuelle.



⑥ Il résulte de toutes ces considérations que le juge, particulièrement constitutionnel, juge en droit et en opportunité avec une conscience aiguë des limites à ne pas franchir trop allègrement. Comme l'écrit le mathématicien René Thom, *it seems that the social mind has a fragmentary character very similar to that of the animal mind: society finds its identity only in the face of an urgent threat, like war, where its existence and stability are threatened.*¹

De ce point de vue, tout pouvoir, au sein de la séparation des pouvoirs, n'agit pas tant avec la conscience de ses devoirs qu'avec la conscience vive de ne pas trop en faire pour en pas subir de rétorsion de la part des autres pouvoirs. Gare ! la menace de représailles, qui plane sur chacun, peut s'exercer contre lui, d'autant que l'excès de son action peut être, sinon mesuré, ou du moins senti, par ses effets de déformation sur le système institutionnel. La morale n'a guère de place en cette occasion. On pourrait soutenir, avec Michel Troper, que les actions constitutionnelles, qui comportent toujours une interprétation de la Constitution,

*sont des choix tenus pour nécessaires. Ils peuvent être expliqués par la situation dans laquelle se trouvent les acteurs dans la configuration du système politique. Les acteurs ne peuvent faire autre chose que ce qu'ils font.*²

⑦ Le pire, cependant, peut advenir. Il existe des suggestions de loi ou d'amendement à la Constitution qui leur paraît impossible d'adopter. Les acteurs ne font plus rien bien qu'un fléau social sévisse. Tous préfèrent ne pas agir sous l'empire de *lobbies* qui paralysent toute initiative qui porterait atteinte à leurs intérêts. L'état de tension ne peut que monter à un point inégalé.

Il y a ici comme un angle mort du constitutionnalisme des Lumières. Dans un contexte politique de très haute tension qui échappe à la vision, se profile une révolte sourde qui peut gravement ébranler les institutions. Rien ne garantit que la volonté générale, qui souffre méconnue, puisse s'exprimer de façon claire et rationnelle. Le droit constitutionnel ne peut ignorer un tel environnement d'incertitude qui dépasse la mesure s'il ne répond pas aux aspirations des citoyens. Comme se lamentait un Américain, devant le drame irrésolu des *mass shootings* aux Etats-Unis : *we do not know yet what the worst is. It's out of our reach.*

Les pouvoirs législatif, exécutif et judiciaire doivent se souvenir qu'ils agissent déjà, en *modulo incertitude*. Fermer les yeux, ou jouer l'autruche, pour ne pas résoudre une crise majeure, revient à agir en *modulo immense incertitude*. Il y a lieu de craindre une nouvelle guerre civile, non pas des citoyens contre un Léviathan redevenu sauvage, mais de tous contre tous, d'autant qu'aux Etats-Unis, à la différence du Léviathan de Hobbes, les individus n'ont pas déposé toutes leurs armes létales après la conclusion tacite d'un *social compact*

¹ René Thom, in A. Woodcock and M. Davis, *Catastrophe Theory*, op. cit., p.119. Nous soulignons.

² Michel Troper, *Pour une théorie juridique de l'Etat*, op. cit., p.139.

CONCLUSIONS DU CHAPITRE I

(Résumé XLIII)

① Diagrammes et dialogues répondent au besoin d'images, de discussions et de controverses qui manquent aux mots. La prose a besoin de gestuelle et de théâtre pour le lecteur actuel saisisse vivement ce qui se trame dans le droit moderne qui propulse un individu sans épaisseur en pleine lumière.

Une telle dramaturgie éclaire l'idée de barycentre dans le triangle équilatéral des pouvoirs qui définit l'ossature même de la Constitution des Lumières. En recourant à la topologie, elle donne aussi une idée de la volonté générale comme volonté d'un ensemble ouvert irréductible à une description à la volonté de tous, censée s'en approcher comme volonté de la majorité.

Proposer des images à la pensée : quelle bonne idée vous avez eue ! réagira-t-on peut-être.

② La notion de volonté générale, décrite par les Lumières, est cependant équivoque. Tantôt, du côté de Rousseau, elle paraît être associée au mode de séparation des pouvoirs qu'est la spécialisation des organes qui prône l'action plutôt que l'équilibre assimilé à du statu quo. Tantôt, du côté de Madison, elle est aussi, comme *the will of society*, au fondement de la balance des pouvoirs, soucieuse que cette volonté ne vienne pas perturber par trop la stabilité. La balance des pouvoirs équilibre le pouvoir pour que la liberté ne soit plus au final menacée.

A la différence des mots qui désignent la volonté générale, correspond une philosophie politique hardie ou mesurée quant au droit constitutionnel à instaurer pour régénérer la société.

Par-delà cette différence sémantique, il importe de ne pas s'en tenir, à l'excès, à ce premier niveau de signification. Ce serait, autrement, méconnaître l'essence même du contrat social, malgré ses variations de sens, que de ne pas voir dans la volonté générale voir l'intuition profonde des Lumières de tenter de saisir ce qui contribue, au plus profond, à la dynamique de la société moderne. On ne peut comprendre l'évolution, et les soubresauts du constitutionnalisme des Lumières, sans s'y référer en dernière analyse.

Même la dynamique des factions et des coalitions demeure secondaire par rapport à elle. On y reviendra. C'est elle qui donne *le la* à la politique et au droit.

③ L'*épistémè* n'est ni un tissu d'images statiques excitant les sens, ni une Idée surplombant tout le savoir des Lumières et l'action qui s'en inspire. L'*épistémè* ne se présente pas comme une collection de raisonnements systématique et totalisante. Elle est seulement une étiquette commode pour désigner des bonnes pratiques et des réflexions utiles, communes au droit constitutionnel et à la science. C'est un savoir qui permet au droit constitutionnel de survivre et de se développer sur le modèle des idées de la science qui croît, plus ou moins, en parallèle.

La notion d'*épistémè* signifie seulement – et c'est beaucoup – que nous avons toutes raisons de penser que le droit a su tirer de l'intelligence du nouveau savoir, sans trop sans douter, un art de soutenir la liberté politique et individuelle. Quoique la copie ne fût qu'analogique, pas toujours aussi fidèle et précise que l'édition princeps, le droit des Lumières a permis en *feed-back* d'éviter que la science ne soit elle-même dévoyée au service de la tyrannie comme on l'observe encore, çà et là, dans d'autres régimes.

Autant le droit constitutionnel moderne a su se réformer à la lumière de la science moderne, autant la science moderne a pu ne pas devenir elle-même affolante à la lumière du droit constitutionnel moderne. La science a rendu service au droit, et le droit a jugulé la science.

(*un quidam*)

- J'ai beaucoup de peine à suivre parfois vos avancées, mais ce va-et-vient ne me paraît pas complètement insensé. Pour parler en vos termes, il y a encore là comme un mouvement pendulaire, même si la périodicité n'est pas exacte mais comporte de nombreux déphasages.

(*soupir de soulagement, à défaut d'approbation franche*)

RESUMES DU CHAP. II :
La place de la science et la portée de sa contribution

SECTION 1
DES SAVANTS SUR UN PIEDESTAL

A/ Une révolution submergeant la planète entière

§51.- DE LA DIABOLISATION A LA RECONNAISSANCE

§52.- DE LA RECONNAISSANCE AU RETOUR A LA CRAINTE

(Résumé XLIV)

① Depuis l'antiquité, le monde a changé de visage. On est passé de la cosmogonie à la cosmologie vis-à-vis du ciel, et de la magie au savoir rationnel sur terre, basé sur l'observation des faits. Mais la liberté de penser a très vite été perçue comme une *libido sciendi* qui troublerait la paix publique. Elle deviendra *condamnable, sous le christianisme, au même titre que les autres concupiscences*.¹ L'astronomie devient une cause de conflit dans l'Antiquité, et davantage à l'aube des temps modernes. Cependant, par ses succès, la nécessité mécanique, excluant la finalité, finira par imposer le respect. Les savants seront reconnus.

*Mon ami, disait-il souvent au savant,
Vous vous croyez considérable,
Mais dites-moi, tenez-vous table ?
Que sert à vos pareils de lire incessamment ?
Ils sont tous logés à la troisième chambre,
Vêtus au mois de juin comme au moins de décembre,
Ayant pour seul laquais leur ombre seulement,
La République a bien affaire de gens qui ne dépensent rien.*

L'autre finit pourtant par recevoir quelque faveur nouvelle.

Laissons dire les sots ; le savoir a son prix.

(La Fontaine, *L'avantage de la science*)²

② Un savant comme Newton devient une personne de haut mérite, malgré la condescendance des « Grands » et la suspicion des Eglises, tant la catholique que certaines des protestantes. Dans les deux ordres de la société, le mépris, mêlé d'anxiété, cède sous la pression de la société, emportée par la bourgeoisie qui a fait sienne la science pour son plus grand avantage.

¹ L. Rougier, *La religion astrale des Pythagoriciens*, op. cit., p.19.

² Jean de La Fontaine, *Fables*, second recueil [1678], Liv. VII, https://fr.wikisource.org/wiki/L'Avantage_de_la_Science

§53.- PARTIR DU « TOUT » VERS LA PARTIE

(Résumé XLIV)

① La perpétuité du mouvement d'une machine construite par les hommes a toujours été leur obsession, fatigués qu'ils sont de se battre continuellement pour survivre. Cette obsession a été relevée

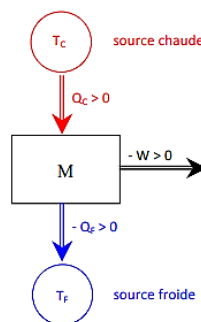
On appelle dans les mécaniques le mouvement perpétuel, un mouvement qui se renouvelle de lui-même et sans cause externe, comme si on avait trouvé le moyen de faire qu'une horloge se remontait toute seule, et allait toujours sans qu'on y touchait. Le mouvement perpétuel est un problème fameux que tous les savants mathématiciens ont cherché depuis deux mille ans.¹

Cet espoir fut douché définitivement au début du XIX^e siècle par la thermodynamique devint une nouvelle branche de la physique. On ne parle plus depuis, sous son empire, de « produire » de l'énergie, mais d'en modifier seulement la forme. L'énergie ne peut advenir ex nihilo. Elle est invariable. On ne la crée pas, on la transforme. La thermodynamique n'est que la science des transferts d'énergie.

② Au cours de son évolution, un système thermodynamique échange de l'énergie avec l'extérieur. Ce transfert d'énergie donne lieu à un travail, lorsqu'il est associé à une force, et à de la chaleur dans le cas contraire. Ces deux modes de transfert n'excluent pas que l'énergie se conserve. Le premier principe de la thermodynamique affirme précisément leur équivalence.

Le travail peut se convertir en chaleur, mais la chaleur peut moins facilement se muter en travail. Une irréversibilité apparaît dans la transformation inverse. L'énergie se conserve pendant l'évolution, mais un problème de bilan énergétique se pose. Le rendement des machines à vapeur est inférieur à 1. Le deuxième principe de la thermodynamique confirme l'irréversibilité des phénomènes physiques, en particulier lors des échanges thermiques. Ce principe introduit la notion d'entropie. Il affirme que l'entropie d'un système isolé augmente.

Le second principe affirme en outre que le rendement des moteurs thermodynamiques ne dépend que des températures des sources. *Il est impossible de créer du travail à partir d'une seule source de chaleur (par ex., un bateau ne peut avancer uniquement avec le réservoir d'énergie qu'est la mer).²* Cf. infra un schéma illustratif, en désignant par M le système :



On se sert du transfert naturel de la chaleur pour récupérer un peu de travail

③ Le mode de penser de l'approche thermodynamique dans les affaires humaines transparaît dès que l'on considère le premier principe de conservation de l'énergie. Le transfert de la chaleur en travail peut être interprété comme celui de la délibération législative en pouvoir d'agir. Les élus s'excitent, et excitent leur esprit à produire un texte de loi dans l'enceinte législative. Malgré la léthargie et des débats inutiles, le texte parvient à la fin à sortir. L'énergie dépensée est bien conservée sous les deux formes d'un travail réalisé et d'une agitation inutilisable. La comptabilité constitutionnelle à partie double, convertissant la formation de la loi (ressources) en son exécution (emplois) confirme également le principe de conservation.

¹ A. Furetière, *Dictionnaire universel*, op. cit., t.3

² https://physique-chimie.enseigne.ac-lyon.fr/spip/IMG/pdf/Les_Machines_Thermiques_.pdf

Comme en thermodynamique, il existe différents chemins pour passer de l'état initial, qu'est la 1^{re} version d'un projet de loi, à son état final qu'est sa réalisation et promulgation. Par ces voies diverses que sont le passage dans l'une ou l'autre des deux Chambres, l'étude par un comité d'experts ou celle de hauts fonctionnaires dans un ministère, la loi finit par être construite de différentes manières et par des travaux que l'on peut quantifier au moins en nombre d'heures. La solution est grossière, objectera-t-on, mais elle n'est pas sans intérêt.

Le même esprit, rétif à toute analogie, pensera que ces pseudo-rapprochements ne sont que l'ombre de la vérité. Il n'est pas sûr qu'une telle ombre soit privée de réalité. On voit encore la fécondité potentielle de l'approche thermodynamique dans l'appréhension des mêmes affaires humaines du point de vue du second principe de dégradation de l'énergie.

④ Sous la lumière de ce second principe, il n'est pas absurde de penser que la révolution industrielle anglaise a été alimentée, comme un moteur, par la pratique des *enclosures* que consacra la conversion des *bills* anglais en *Acts*. Un *cycle de Carnot*, avec ses quatre moments, peut être identifié par l'historien sans prétendre, ici encore, « mesurer, à une unité près, ce qui tient le rôle de la pression, de la température et du volume d'un gaz ou de la vapeur d'eau dans ce transport métaphorique du niveau de la physique au niveau juridique.

La source chaude fut l'activisme entrepreneurial de la bourgeoisie anglaise. Par l'accroissement de la puissance de ses machines, cette bourgeoisie industrielle ouvrit un espace plus grand de travail aux nouveaux déshérités de la terre dont le désœuvrement général, à l'opposé, une source froide.

Le second principe n'a pas qu'un versant noir, bien qu'un groupe social plus puissant et mieux organisé « exploite » un autre groupe social sans autre pouvoir que de mendier. S'arrêter à pareil constat revient à ne pas saisir le ressort profond de toute société moderne qui a besoin d'un écart d'intensité pour fonctionner, comme le soulignera l'ethnologue Lévi-Strauss au XX^e siècle. Il ne s'agit pas de justifier un tel écart mais de comprendre que la société moderne n'aurait pu être autrement en son absence, dût-elle être sous la *rule of law*.

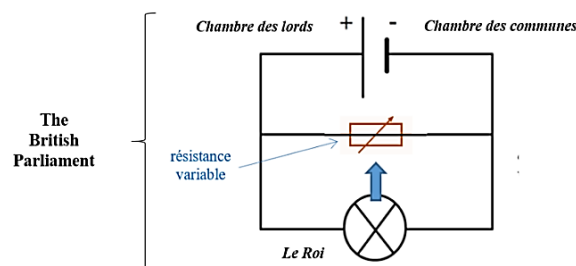
Le second principe pourrait décevoir également car le rendement de toute machine n'est jamais égal à 1 ou à 100 %, que ce soit celle des industriels ou la constitutionnelle à l'échelle étatique. Le bilan est un peu désastreux. Un exemple parlant, pour le lecteur d'aujourd'hui est celui du rendement de la voiture, qui serait seulement de l'ordre de 30 %. On pourra se demander si le rendement de l'activité de l'Etat, quelle que soit sa forme, est du même ordre...

La machine constitutionnelle, qui paraissait aussi belle que celle de Watt, s'essouffle presque autant. Elle produit des lois, elle défend des droits, mais aussi, malgré elle, de la dégradation et du désordre. Les frottements, particulièrement insistants, en sont la principale cause. Ce ne sont plus ici, dans l'enceinte du droit, l'incurie, la paresse ou l'indifférence à s'occuper des lois qui consommaient inutilement peu de chaleur. Ce sont ici de vives oppositions qui se dressent contre l'idée de soumettre une nouvelle loi au Parlement. Quand l'approbation ne va plus de soi, l'échauffement monte beaucoup plus d'un cran. Le freinage peut, cependant, avoir pour vertu, en certaines occasions, d'amender un projet de loi. Il peut aussi avoir pour vice, en d'autres occasions, de retarder, voire de saboter le projet sur lequel les élus sont invités à débattre. La part du travail législatif en sort moins bonifiée que fortement diminuée.

Aucun des modes de séparation des pouvoirs, censés contenir la corruption du pouvoir, n'est épargné par l'usure. Non seulement pour confectionner des lois, mais aussi tout simplement pour agir. Dans la spécialisation des organes, basée spécifiquement sur les frottements, le gouvernement peut pâtir de certains qui ne sont pas toujours bienvenus. Dans la balance des pouvoirs, basée spécifiquement sur l'inertie, l'inertie peut se durcir en blocage. Quel que soit le mode plus ou moins séparé du pouvoir, l'Etat, dans l'ensemble, est inexorablement amené à dégénérer en suivant une pente que des penseurs comme Montesquieu, Gibbon et Rousseau considéraient comme naturelle. Le déclin de la Rome ancienne frappait les esprits du XVIII^e.

⑤ Sans doute faut-il nécessairement conserver un écart entre une source chaude (la chaudière de la machine de Watt) et une source froide (par laquelle la chaleur, qui ne donne pas du travail, finit par être rejetée). La chaude serait, en droit, le forum de discussion des lois, et la froide les palabres qui s'échappent de la salle sans résultat, à part d'être consignées sur le journal de bord de l'assemblée. Sans doute faut-il aussi que l'écart entre ces deux sources soit significatif pour récolter plus de travail (il est bien connu, en passant, des géologues que *de l'eau chaude souterraine est une source d'énergie d'autant mieux exploitable qu'elle est à température élevée*)¹. Mais, quoi qu'on y fasse, malgré les économies d'énergie réalisées (comme une amélioration de la procédure législative qui en augmenterait la productivité), rien n'empêche l'énergie ordonnée initiale de se dégrader insensiblement. Elle ne peut que se transformer pour partie en énergie de basse qualité comme la chaleur dans une machine à vapeur. De simples frottements suffisent toujours à la créer.

Le modèle du circuit électrique montre toutefois comment dans la monarchie anglaise du XVIII^e siècle le Roi lui-même pouvait jouer un rôle dans la défense du système constitutionnel qui avait pourtant, un siècle auparavant, borné sa puissance. Certaines de ses interventions ont fini par renforcer la capacité du Parlement, dont il est membre, à surmonter les différends entre les deux Chambres. L'idée d'une résistance variable était en fait pensée en droit avant la lettre.



⑥ Il y a pis, ajoutera-t-on, malgré ce genre d'événement.

L'entropie, qui mesure le désordre, la défection d'une structure, fait appel à des probabilités. Certes, *il est agréable de définir une fonction comme l'entropie* qui caractérise dans un gaz un nombre « innombrable » d'états ou de configurations microscopiques, sachant que *cette fonction n'augmente pas trop quand le nombre d'états double, et que cette fonction est additive en étant la somme des fonctions des états constituants*.² On reconnaît là l'usage des logarithmes grâce auxquels Boltzmann a établi sa formule de l'entropie : $S = k \ln N$. Mais, il y a un autre mais : la notion d'entropie, qui est de nature statistique, ne semble plus renvoyer à une réalité purement objective. Ses propriétés n'existeraient, pour certains, que quand on effectue une mesure. **L'entropie ne dépendrait même pas de l'habileté de l'expérimentateur.**

La question se pose en physique, et plus encore en politique. L'entropie n'est peut-être pas tout à fait « anthropocentrique », mais elle l'est incontestablement en partie. Son caractère est à la fois objectif et subjectif. L'entropie est une réalité et une perception. Le droit constitutionnel connaît ce mélange qui unit inmanquablement dispositions et interprétation.

La conversion d'un état de fonctionnement normal des institutions en *état d'exception* illustre on ne peut mieux ce double aspect de l'ordre gravement perturbé par des *circonstances exceptionnelles*. L'article 16 de la Constitution de la V^e République française, prévu à cet effet, est déclenché par le Président de la République à sa discrétion. Cependant, d'autres autorités constitutionnelles surveillent son action pour éviter que son pouvoir discrétionnaire ne devienne arbitraire, hors de tout contrôle. Ces interactions mêlent l'objectif et le subjectif, mais aussi le réel et le virtuel (l'agitation d'une menace). Ensemble, elles constituent un cycle de rétroaction visible dans la matrice jacobienne de l'interprétation de l'article 16 en question.

Une telle conversion d'un « régime d'énergie » juridique à l'autre est réalisée sans que le droit constitutionnel perde sa ligne de conduite. S'il y a rupture dans les circonstances extérieures, le droit qui fait face ne se fissure pas pour autant. Le droit constitutionnel a l'art de convertir la hachure des événements en un fil qui ne cesse de protéger la liberté publique et individuelle.

¹ J.F. Le Bourbis, *Une histoire de la physique*, p.14, sur internet.

² *Ibid.*, p.15.

§53.- PARTIR DU « TOUT » VERS LA PARTIE

Résumé XLV (suite et fin)

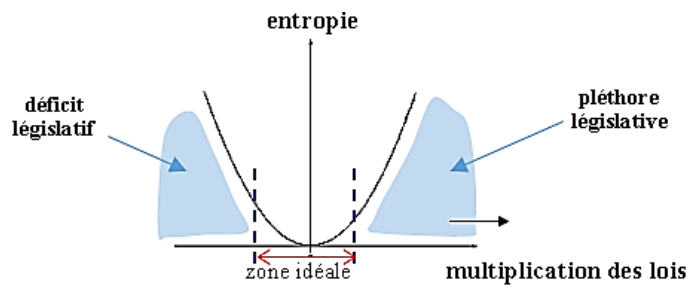
⑦ Sensible à la cohérence des propos, le lecteur pourrait s'étonner que l'on puisse adjoindre au droit et à la science des Lumières la thermodynamique qui leur succède. Quoi ! son mode d'évaluation de la réalité ne diffère-t-il radicalement des précédents ? Aurais-je donc perdu de vue la distinction posée au début entre l'âge des Lumières et un âge plus mûr qui en contesterait l'unité par des principes qui s'avèrent tout autres que ceux de la mécanique ? Hé, le droit constitutionnel moderne ne se modelait-t-il pas jusqu'ici sur la physique classique ?

Nous ne nous trahissons pas : la thermodynamique énonce ce qui se mijote dans les machines à vapeur de la révolution industrielle. L'*épistémè* des Lumières est une notion indispensable pour commencer un travail d'étude sur une période donnée, mais elle se révèle imparfaite. Sans erreur de point de vue en point de vue, l'*épistémè*, comme savoir général sous différents savoirs, évolue en suggérant elle-même des idées qui la font partir de sa matrice originelle.

Comme l'écrit Paul Valéry dans une version du thème de Faust qui veut percer les ténèbres, *rien ne démontre plus sûrement la puissance d'un créateur que l'infidélité ou l'insoumission de sa créature. Plus il l'a fait vivante, plus il la fait libre.*¹ L'*épistémè* des Lumières n'a pas seulement adjoint, au mythe de Faust, celui de Frankenstein. Elle a engendré de nouveaux modes de raisonnement qui devinrent, après elle, des instruments encore plus propres à pénétrer la matière. Délivrés en partie de l'état d'esprit qui avait réussi à libérer la pensée d'hier, ils débordent à leur tour le contour d'une *épistémè* qui embrasse en fait plus que trois siècles.

Malgré leur extension et approfondissement, les productions du droit et de la science modernes continuent d'apparaître, par-delà leur indépendance, plus ou moins parallèles. Leur correspondance frise la résonance comme si la nature et l'action entonnaient le même chant.

Ce chant n'est pas toujours plaisant à nos oreilles. Les lois se répandent, et le droit s'altère. La multiplication des textes de portée générale, leur enchevêtrement, l'éclatement de leur sens à tous vents, aggrave l'entropie du droit moderne dont les Lumières attendaient tant. La comparaison avec ce qui en ressemble en science ne manque pas de surprise désagréable.



¹ Paul Valéry, « *Mon Faust* » [1946], Gallimard, Paris, 2007, Au lecteur de bonne foi e de mauvaise volonté, p.7.

§54.- RAISONNER EN « HAUTEUR »

Résumé XLVI (et nouvel éclaircissement)

① Nous ne reprendrons pas, dans ce résumé, la notion de *potentiel* ou de *fonction potentielle* qui a été suffisamment présentée, mais nous reviendrons sur les raisons d'avoir entremêlé en droit, à cette occasion, quelques aperçus tirés de la théorie de la relativité d'Einstein.

② *La notion d'espace-temps.* Dans la théorie einsteinienne, les notions d'espace et de temps sont intrinsèquement liées. Elles l'ont été en fait depuis toujours, même chez Galilée et Newton, puisque le temps pouvait se transformer en espace.

Comme l'écrit un physicien d'aujourd'hui : *c'est une constatation fort banale que la spatialité puisse être affectée par la temporalité.* Il suffit de penser à un exemple concret : *si vous êtes sur un quai de gare, et montez dans un train immobile, puis attendez cinq minutes sans bouger, du temps s'est écoulé mais votre position dans l'espace n'a pas changé. Par contre, si vous sautez dans un train en mouvement et attendez cinq minutes (toujours sans vous déplacer dans le train), vous n'êtes plus au même endroit : le temps écoulé, en raison du mouvement du train, s'est transformé en déplacement spatial.*

Qu'est-ce qui est donc novateur dans la théorie einsteinienne de l'espace-temps ? Réponse apportée par le physicien : *c'est la réciproque*, le fait de transformer l'espace en temps. *C'est le fait que la temporalité soit affectée par la spatialité.*¹ On peut s'en assurer en considérant, dans un système de coordonnées, l'axe de temps comme ordonnée et non comme abscisse.

- Mais si l'espace-temps est aussi un *fibré* en physique avec comme espace de base le temps, qu'en est-il en droit ?

- Il existe, selon nous, un espace-temps en droit constitutionnel, celui de l'interprétation juridique et politique.

Cet espace-temps est un espace-temps feuilleté comme l'est celui de la jurisprudence nord-américaine en matière d'égalité raciale. Chaque « fibre » est un espace de droit, un état de la jurisprudence constitué de tous les arrêts de justice rendus dans une même période donnée. Chaque fibre se projette sur un axe de temps en ordonnée. La jurisprudence est une « section » qui relie les différentes fibres, i.e. les différents états ou étapes de la jurisprudence.

L'espace-temps jurisprudentiel croise le droit positif et le droit naturel comme dans une négociation où l'on s'efforce d'affiner un principe, de manière explicite ou implicite, car il est bon parfois de ne pas en faire une question de principe. On évite d'essayer d'entraîner un refus d'en parler ou de provoquer en pleine réunion une rupture (*a breakdown*) malencontreuse. Pour ne pas braquer la discussion, une négociation doit plutôt porter indirectement, au cours du temps, sur les conditions d'élargissement ou de restriction du principe qui est en jeu.

- Vous avez envisagé l'espace du droit. Y a-t-il un temps du droit qui différencierait du physique ?

- Oui, l'interprétation des acteurs du droit (pouvoirs d'Etat, groupes de pression, opinion) s'insinue partout. Leur perception est troublée par leur interprétation du droit ou de la politique à mener en votant tel ou tel projet de loi. L'interprétation n'évolue pas seulement dans le temps physique. Elle opère dans un temps propre, relatif à chaque acteur. **L'interprétation n'est pas en fait l'effet mais la cause de ce temps propre. Elle le crée en arbitrant le présent et le futur.**

Prenez par ex. le débat sur le meilleur régime de retraites à adopter du point de vue de la justice et de l'équilibre du régime entre les cotisations prélevées sur les actifs et les versements aux retraités. Gouvernement et syndicats débattent sur la question de savoir s'il faut un « âge d'équilibre » (disons 64 ans) ou augmenter plutôt les cotisations pour équilibrer les comptes. Chacun a son point de vue sur l'avenir, le gouvernement étant plus sensible à l'équilibre à moyen terme, les syndicats aux versements à court terme pour leurs adhérents actuels et, accessoirement, au bénéfice des nouveaux entrants et de leurs propres enfants. (Officiellement, les syndicats défendent tout le monde ; ils disent qu'ils ne sont pas des lobbies, mais a-t-on vu des groupes d'intérêt qui n'agissent pas pour le seul intérêt général ?)

¹ Jean-Marc Lévy-Leblond, *De la matière relativiste, quantique, interactive*. Seuil, Paris, 2006, p.49.

Résumé XLVI (suite)

Dans un moment critique d'accélération de la détérioration du climat, un scientifique considèrera que les deux parties en conflit *ne voient pas plus loin que le bout de leurs nez*. Chacun est dans son horloge, plus attentif en plus aux minutes qu'aux heures, alors que Sa perception plus objective se projette à long terme en estimant ironiquement, au vu d'un spectacle qui lui paraît affligeant, que demain il ne sera même plus question de retraites... Personne ne sera plus là pour arbitrer entre le temps t_0 et t_n , l'espèce humaine ayant disparue.

③ *La relativité de la simultanéité et des durées*. N'est-ce pas la conséquence des différences d'actualisation du temps ? Ici encore, les différences prévalent sur les similitudes supposées.

Revenons d'abord à Galilée. Vous vous souvenez peut-être de sa description d'un voyage en bateau dans la cabine duquel voltigent des mouches, des papillons et autres petites bêtes qui volent. (§43 1/a-i). Nous avons coupé cet épisode pour qu'il ne soit pas trop long, mais il vaut de continuer cet extrait pour comprendre ce qu'implique ce qui nous apparaît « commun ». Le bateau poursuit son mouvement uniforme, sans balancement dans un sens ou dans l'autre :

[...] Les gouttelettes tomberont comme auparavant dans vase du dessus sans tomber du côté de la poupe [l'arrière du bateau], et pourtant, pendant que la gouttelette est en l'air, le navire avance de plusieurs palmes ; les poissons dans leur eau ne se fatigueront pas plus pour nager vers l'avant que vers l'arrière de leur récipient [...] ; enfin, les papillons et les mouches continueront à voler indifférents dans toutes les directions, jamais vous ne les verrez se réfugier vers la paroi du côté de la poupe comme s'ils étaient fatigués de suivre la course rapide du navire [...] Si tous ces effets se correspondent, cela vient de ce que le mouvement du navire est commun à tout ce qu'il contient.¹

Galilée conclura : *le mouvement, là où est commun, est comme s'il n'était pas*. En clair, si le mouvement paraît exister, c'est qu'il n'est pas commun. *Commun* est à entendre comme appartenant à un même système (de coordonnées) *galiléen* ou *d'inertie* se mouvant uniformément (comme un bateau ou un train pour celui qui préfère une image concrète plus contemporaine). Mais, si l'on considère deux systèmes galiléens, il s'avère déjà que les choses apparentes changent un peu. Certes, les lois de la nature concernant la distance, le changement de vitesse, la force sont valables dans n'importe quel système galiléen qui se meut uniformément par rapport à un autre système galiléen, mais, dans la relativité galiléenne, les vitesses relatives et les positions des deux systèmes diffèrent. Il faut, comme il est précisé dans le §43, des règles ou lois de transformation pour passer d'un système de calcul à l'autre.²

Dans la relativité einsteinienne, les choses se gâtent davantage par rapport à nos évidences si nous considérons maintenant le temps propre d'un observateur intérieur à un système galiléen et le temps propre d'un observateur extérieur, attaché à un autre système galiléen.

Dans la physique classique, nous avons une seule horloge, un seul flux du temps pour tous les observateurs dans les systèmes galiléens. Le temps et, par conséquent, les expressions telles que « simultanément », « plus tôt », « plus tard », avaient une signification absolue indépendante d'un système galiléen quelconque. Deux événements qui se sont produits au même moment dans un système galiléen, se sont produits nécessairement d'une façon simultanée dans tous les autres systèmes galiléens. Mais qu'arrive-t-il quand les deux systèmes, qui se meuvent uniformément l'une par rapport à l'autre, sont dotés d'une horloge distincte, dûment synchronisées au départ ? La théorie d'Einstein conclut que chaque horloge en mouvement change son rythme, l'une n'indiquant plus le temps de l'autre, apparaissant en avance ou en retard par rapport à l'autre.

Des événements simultanés pour un système galiléen S ne le sont pas. Pour un autre système galiléen S' ou S''. La simultanéité a seulement une signification relative à un système d'inertie déterminé.³

¹ G. Galilei, *Dialogue sur les deux grands systèmes du monde* [1632], 2^e journée, op. cit., p.317. Nous soulignons.

² Albert Einstein, Leopold Infeld, *L'évolution des idées en physique* [1936], Flammarion, Paris, 1983, pp. 149-154.

³ Stamatia Mavridès, *La relativité*, Puf, Paris, 4^e édit., 2000, p.35.

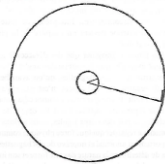
Résumé XLVI (suite)

Il n'y a pas de doute que le droit constitutionnel moderne n'est nullement étranger à ce mode de raisonnement quant à la relativité de la simultanéité et des durées. Nous prenons tous nos décisions en fonction de notre anticipation du futur. Les différences d'actualisation selon l'interprétation du temps à venir démontrent, s'il en est, que les acteurs, qui façonnent ou perturbent le droit, ne vivent pas un même temps commun. Les durées attendues s'allongent ou raccourcissent suivant que leurs vues, qu'ils croient subtiles, portent plus ou moins loin. D'où les incompréhensions et les difficultés de trouver les règles de passage d'un temps propre à l'autre. Les blocages institutionnels jusqu'à l'usur, e et l'épuisement réciproque, en sont une conséquence manifeste. Sourds par principe, ils ne veulent écouter ni trêve ni paix.

- Ne pensez-vous pas qu'il y ait, dans cette thèse qui succède à tant d'autres, un petit problème qui me paraît, à moi, énorme ! Question de perspective, diriez-vous. Dans la théorie einsteinienne, la relativité de la simultanéité et des durées ne tombe pas du ciel, si j'ose dire, même si elle s'y applique. La constance de la vitesse de la lumière, c , y joue un rôle fondamental.¹ Dans l'équation $x = vt$ où v est la vitesse, x la longueur et t le temps, si $v = c = \text{cste}$, x et t ne peuvent que varier comme vous l'aviez vous-même signalé. La longueur peut se rétracter ou s'allonger, le temps se dilater ou se rapetisser, **au lieu qu'en droit constitutionnel, on ne voit pas quelle quantité invariante obligerait les durées et les longueurs à changer.**

- Bonne question. J'ai une idée sur la question. Je pense à une vitesse qui serait un taux de variation psychologique qu'un économiste a présenté dans son étude « relativiste » de la demande de monnaie. C'est une bonne intuition qui n'a eu nulle suite. Je l'exposerai dans un § suivant. Supposons pour le moment que la question soit résolue sans l'esquiver en rien.

④ *La relation entre la vitesse d'un corps et la gravitation.* Que l'on imagine à nouveau comme Einstein un grand disque sur lequel sont tracés deux cercles concentriques, l'un étant très petit et l'autre très grand. Ils ont, si vous vous en souvenez, un centre commun qui coïncide avec le centre du disque. **Ici encore, ce qui est commun est trompeur.** Il est vain d'espérer un accord entre des perceptions distinctes dans la mesure tant des vitesses que des longueurs.



Sur le disque est situé un observateur, animé d'un mouvement de rotation rapide relativement à un observateur extérieur. On pose par hypothèse que ce dernier procède à des mesures à partir d'un système de coordonnées galiléen (i.e. d'un système d'inertie en mouvement rectiligne et uniforme, qui conserve sa vitesse à la différence d'un système accéléré).

Si l'observateur extérieur procède à la mesure de la longueur de la circonférence du grand cercle, la géométrie euclidienne, qui nous est familière, lui permet de s'acquitter de cette tâche sans peine. En revanche, si l'observateur sur le disque effectue, d'où il est situé, la mesure, le résultat créera une surprise. *La règle placée sur la circonférence dans la direction du mouvement paraîtra contractée à l'observateur extérieur s'il la compare à sa règle au repos.*²

Plaçons maintenant une horloge, non seulement sur la grande circonférence, mais sur la petite. Le système de coordonnées de l'observateur sur le disque, qui est en rotation rapide sur le disque, n'est toujours pas inertiel, mais accéléré. L'horloge sur la petite circonférence lui apparaît avoir une très petite vitesse, la même que celle que constate l'observateur extérieur sur son horloge. Mais l'horloge, placée sur la grande circonférence subit une vitesse considérable relativement à l'horloge de ce dernier, par conséquent par rapport aussi à l'horloge placée sur la petite circonférence. Les deux horloges en rotation ont des rythmes différents.

Que retenir ?

¹ A. Einstein, L. Infeld, *L'évolution des idées en physique*, p.171 et 175.

² *Ibid.*, p.215.

Résumé XLVI (suite)

D'abord, que la géométrie euclidienne n'est plus valable dans un système de coordonnées accéléré. Il faut, de façon générale, une géométrie non euclidienne, pouvant s'appliquer, comme chez Gauss, aux surfaces courbes, voire, comme chez Riemann, aux univers courbes à n dimensions. *La géométrie sur le disque ressemble en rotation à celle sur une surface courbe. [...] Dans la théorie de la relativité générale, il ne s'agit pas du continuum bidimensionnel, mais du continuum quadridimensionnel, mais les idées sont les mêmes.* (Nous reviendrons sur ces points en droit constitutionnel quand la nécessité se fera sentir.)

Ensuite, que la différence de vitesses sur le disque est due à l'influence d'un autre phénomène fondamental : celle de la gravitation, qui agit sur le disque. *Le champ de gravitation, dirigé vers l'extérieur du disque, déforme les [longueurs] et modifie le rythme des horloges.*¹ Plus on s'éloigne du centre, plus cela va vite. C'est comme si, en évoquant le champ magnétique au lieu du gravitationnel, on observait, à l'expérience, que plus on s'éloigne d'un aimant, moins on subit la force de son champ dont l'intensité décroît en partant de sa source.

Dans le domaine politico-juridique, un leader charismatique attire beaucoup de gens dans ses *lignes de force* comme les appelait Faraday en électricité. Ces « lignes de champ », qui convergent vers lui, sont de nature psycho-physique. Plus on quitte l'entourage d'un chef qui apparaît numineux, moins on en reçoit l'influence, bienfaisante pour certains, malfaisante pour d'autres. A peine est-on sorti de son aura que l'on se sent libre. L'initiative revient. Le charme est rompu, mais d'aucuns pleurent encore le guide suprême qui les aliénait.

On est toujours dans les lignes incurvées. Dur d'y retrouver sa propre boussole ! Il faut garder en mémoire l'idée de Locke : que chacun est le meilleur juge de sa conservation, pas le voisin.

Traduisons davantage cette vérité au plan institutionnel.

Soit un très gros pouvoir, hyperconcentré au point de rendre la séparation des pouvoirs plus irréaliste que réelle. Plus les individus s'en approchent, ou plus le pouvoir se porte au-devant d'eux, moins les individus sont libres d'agir à leur guise. La liberté marchande y perd son allant, ainsi que l'esprit de négociation qui l'accompagne, sachant que pour vendre (il faut savoir se mettre dans les chaussures de l'autre, et ne point lui imposer une peinture arbitraire, ni encore moins lui marcher dessus) Dans cet Etat boursoufflé, le marché offre moins d'opportunités du fait des réglementations excessives et de la fiscalité abusive. Quel grand effort ne doit-on pas faire pour s'en départir ! Les individus sont pris dans les rets du pouvoir. Les voilà rendus, sans plus bouger dans la direction que l'Etat leur a choisie sans leur demander leur avis, même, s'il est vrai, les individus ont aussi besoin de services publics.

Dans une situation pareille, c'en est fini du lien entre le pouvoir et le talent. Le pouvoir a mis son propre talent à fait disparaître celui d'autrui à son profit. Le bénéfice va à ceux qui ont su lui arracher des rentes par esprit courtisan, ou en raison de leur position de force dans l'Etat. Leur statut les autorise à faire du chantage sur la population qui est victime de leur action. La démocratie est grossièrement déformée par un pouvoir qui s'apparente à la tyrannie sous couvert de la servir. On retrouve la critique de ces phénomènes néfastes chez Montesquieu, Ricardo, Benjamin Constant et bien d'autres :

Quelle heureuse place que celle qui fournit dans tous les instants l'occasion à un [pouvoir] de faire du bien à tant de milliers d'hommes ! quel dangereux poste que celui qui expose à tous moments un [pouvoir] à nuire à un million d'hommes !²

Il y a un art d'esquiver l'action d'un « champ » en l'équilibrant par d'autres. Les agences fédérales nord-américaines savent jouer de leur position au croisement des pouvoirs législatif, exécutif et judiciaire pour échapper à une tutelle trop exclusive. Elles occupent, en droit constitutionnel, des sortes de *points de Lagrange* légèrement instables à l'instar d'un pendule inversé qu'il faut adroitement contrôler. C'est l'art du gyroscope qui sert à maintenir une direction donnée quelles que soient les variations qui l'affectent en tous sens. La machine de l'Etat ne peut que s'en trouver allégée en voyant son emprise se réduire sur tout ce qui vit.

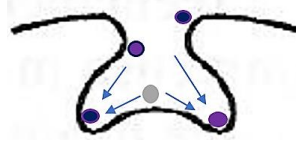
¹ *Ibid.*, pp.218-221.

² La Bruyère, *Les caractères* [1688], op. cit., *Du souverain ou de la République*, p.209.

Résumé XLVI (suite et fin)

Dans le corps du texte, le lecteur a pu découvrir un autre thème qui ne coexiste pas avec le premier, mais s'y entrelace étroitement : celui de la stabilité des institutions qui va de pair avec celui des différences d'actualisation entre les acteurs politico-constitutionnels. Chacun anticipe, de son côté, ce qu'il pourrait avoir par rapport à ce qu'il a présentement. Ces différences d'interprétation du temps expliquent les blocages institutionnels pouvant aller jusqu'à la guerre d'usure, si ce n'est parfois, de façon plus tragique, à la guerre civile. La continuité du droit constitutionnel s'use avec la guerre d'usure, si rien n'y remédie en avant.

Les écarts d'interprétation des espérances à venir rend illusoire et factice la simultanéité des perceptions faisant croire à l'existence d'un temps psychologique commun. Ne se forment au plus que des îlots de stabilité, regroupant en l'un une partie de l'opinion, et en l'autre la partie manquante. La société est clivée et globalement instable comme si elle se trouvait prise au piège d'un *potentiel associé à des parois « en falaise »* pour parler comme René Thom :

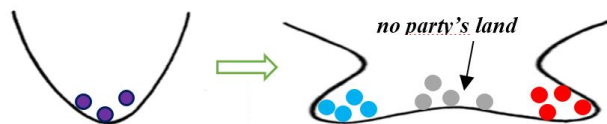


(Depuis la falaise de « gauche, la bille tombe dans un puits de potentiel brusquement. Elle est stable localement. Depuis la falaise de droite, la bille tombe pareillement et se stabilise autant. Entre les deux, il y a un *no party's land* instable, penchant vers la gauche ou vers la droite.)

La nécessité de coordonner les temps propres irréductibles est un fait à prendre en compte comme en physique. Nul à court terme n'en a cure, nul n'éprouve le besoin de s'en inquiéter outre mesure, sauf les esprits qui voient que les circonstances pressent pour un changement. La confection d'une Constitution durable offre un cadre capable de transformer les mésententes en entente, ou au moins en dialogue permanent, sans risquer de fendre à nouveau le tissu social, si difficile à coudre, ou à recoudre, comme dans une queue d'aronde

- Mais que devient dans ce cadre la tendance au bipartisme qui polariserait trop la société ?

- Dans la partie finale de la queue d'aronde qui s'arrondit en cuvette, le *no party's land* des *people*, indépendants des partis, a vocation à s'élargir pour former, comme aux Etats-Unis, près d'un 1/3 des électeurs. Les autres électeurs sont partagés entre sympathisants Démocrates ($\approx 30\%$) et sympathisants Républicains ($\approx 30\%$). Des électeurs du centre peuvent passer d'un bord à l'autre et permettre la bascule gauche/droite, mais l'essentiel du centre demeure plus stable dans la durée (il est moins, dirait-on, en équilibre métastable (*Annexe X*).



Entre ces deux seuils d'excitation, il y aurait un no man's land, zone d'optimalité et d'équilibre indifférent pour la régulation.

(R. Thom, *Apologie du logos*, op. cit, p.208 ; *Structures cycliques et sémiotique*, in J. Petitot, R. Thom, *Sémiotique et théorie des catastrophes*, Presses univ. de Limoges, 1983, pp.46-47).

Nous ne sommes plus dans le schéma queue d'aronde. Le caractère structurellement stable, à l'échelle globale de la Constitution fédérale américaine, n'est plus mis en question. Sans détruire les horloges respectives des partis, la Constitution a son horloge propre sur laquelle s'efforcent de s'ajuster les uns les autres dont les rythmes possèdent un tempo différent, tant la synchronisation des rythmes n'est plus une évidence.

La Constitution des Etats-Unis reste, il faut le reconnaître, un modèle du genre. Elle a su conserver jusqu'ici, contre vents et marées, le rythme de croisière qui est le sien, vivifié qu'il fut, dès le départ, par l'accord fondamental des Pères fondateurs. On comprend que cette pléiade d'auteurs hors pair demeure honorée jusqu'à nos jours par toute la classe politique et l'ensemble de la population.

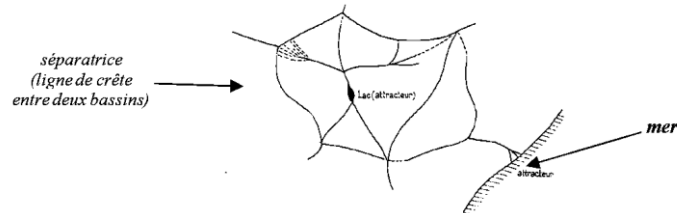
§55.- MODELISER EN TERMES D 'ATTRACTEUR

(Résumé XLVII)

① En mathématiques, un attracteur est un ensemble qui attire dans son voisinage toutes les trajectoires qui y passent. L'attracteur est, en général, structurellement stable : il résiste à des perturbations, si du moins elles demeurent faibles. La région de l'espace où réside l'attracteur offre, au système dynamique considéré, l'opportunité d'être en équilibre. L'équilibre est local ou global. Cet équilibre peut être réduit à un point, à une courbe, voire à une surface vers où convergent les trajectoires avoisinantes. Ces trajectoires sont des chemins que l'on parcourt d'un point à un autre.

② Une métaphore géologique donne une image pour représenter cette notion fondamentale : celle d'un relief où les trajectoires d'un mouvement soumis à une force constituent plus que des chemins : des lignes de pente. Dans cette configuration, les attracteurs sont assimilés à des lacs de montagne vers lesquels se précipitent, plus ou moins vite, le long de telles lignes, de multiples ruisseaux, torrents, rivières.

Dans le schéma infra, le lac est un attracteur local comparativement à la mer, située à une altitude beaucoup plus basse, qui représente un attracteur global. Le lac constitue un bassin d'attraction, mais celui de la mer (est de plus grande ampleur). Toutes les rivières et fleuves s'y jettent.



③ La Constitution représente assurément un attracteur dont le bassin est assimilable à celui de la mer (le droit international, s'il était respecté, serait celui de l'océan). Dans ce bassin interagissent les attracteurs locaux que sont le législatif, exécutif et judiciaire. Ces pouvoirs s'affrontent, à coup d'interprétations les plus variées de la Constitution.

Grâce à cette passe d'armes, les interprétations usuelles, ou rebattues, bougent. Une interprétation novatrice de la Constitution peut en ressortir. Or, il est clair que sortir du distinct (ou apparemment distinct) produit de l'indistinct, voire de l'obscur, comme l'éprouvent les juges qui hésitent entre une interprétation large ou stricte de la Constitution ou des lois. Cette confusion, cette hésitation, ne risque-t-elle pas d'être destructrice de la société qui exige que l'action soit entreprise sans trop attendre ? La justice peut être frappée d'acrasie. Balancer trop revient à paralyser les talents qui sont par ailleurs utiles pour la sauvegarde du bien public, incluant la liberté politique.

¹ C. Bruter, *Topologie et perception*, op. cit., t.1, p.188.

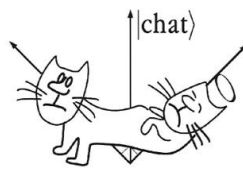
§56.- « REDUIRE » L'INDECISION EN DECISION

(Résumé XLVIII)

① Dans une décision (ou une négociation), on ne peut, de toute façon, avoir le beurre et l'argent du beurre, *to have the cake and eat it*. Face à ce dilemme, l'esprit a intérêt à définir, en maintes occasions, une « stratégie mixte » combinant diverses options auxquels sont associées diverses probabilités de réalisation. La moyenne espérée donne une idée, si grossière soit-elle, de l'avenir. Sans être optimale, elle écarte le pire.

② L'interprétation quantique de l'expérience de Young est instructive sous ce rapport. Cette expérience était destinée à l'origine à montrer le caractère ondulatoire de la lumière. Elle aboutit au constat de ne pas voir très bien par quelle fente la particule est passée de la source à l'écran. La vérité est que l'électron ne suit aucune trajectoire. Il ne peut être localisé. *Il est virtuellement présent dans tout l'espace, et « passe » par les deux trous à la fois*. Ce comportement revient à dire que l'électron interfère avec lui-même, sans que l'on puisse considérer qu'il se scinde en deux ou plusieurs parties.¹

La particule est partout potentiellement. Pour illustrer cette idée, Schrödinger conçut en pensée un chat qui est en même temps mort et vivant tant que l'on n'a pas ouvert la boîte dans laquelle il a été placé. Cette conception étrange n'exclut pas l'humour dans les livres d'initiation à la mécanique quantique qui recourt au formalisme de Dirac :



③ Ce dessin ne saurait, cependant, que faire sourire au plus certains mathématiciens et physiciens, et non des moindres comme René Thom et Roger Penrose. Cette présentation ne relierait que superficiellement des états opposés. Il « expliquerait » sans faire comprendre.

Pour Thom, une particule, qui s'étend dans tout l'espace, possède en chaque point très peu d'énergie. On devrait dire par conséquent qu'un tel objet ne signifie pas grand-chose. On devrait le négliger. *C'est paradoxal : un objet énorme du point de vue spatial qui peut en même temps avoir une énergie quasi nulle ; c'est scandaleux pour l'esprit !*

Penrose est également insatisfait. L'alternance de l'évolution de la fonction d'onde, qu'il désigne par U, et de sa réduction, qu'il désigne par R, renvoie à des procédures si différentes qu'elle semble fort étrange comme comportement de l'univers. [...] *Peut-être existe-t-il bel et bien une équation mathématique plus générale, ou un principe d'évolution inédit qui admettrait comme approximation à la fois U et R. Ce type de modifications de la théorie quantique a de grandes chances de se révéler correct.*³

④ N'en déplaise à ces deux esprits que nous admirons, et qui ne cessent d'inspirer tant de monde, il faut reconnaître que le modèle de la mécanique quantique, si incomplet fût-il, est déjà très éclairant pour l'étude du droit constitutionnel. Pour qui s'interroge sur le passage de l'indécision à la décision, le caractère holiste de la « fonction d'onde » et son effondrement sont fort parlants. Toutes les options possibles s'évanouissent dès que l'on se décide d'agir au profit d'une seule.

Ce phénomène est intelligible en droit.

Le oui et le non, la droite et la gauche, peuvent flotter dans la tête de l'électeur hésitant, mais il arrive un moment où il doit prendre ce qui lui semble le bon tournant. Ne pas voter revient à ne contempler que la bifurcation et son offre déroutante. Voter blanc revient à la refuser, ce qui peut se comprendre, mais quelle action proposer à la place ?

¹ Alain Boutot, *L'invention des formes*, Odile Jacob, Paris, 1993, p.124.

² C. Gougoussis et N. Poilvert, *Mes premiers pas en physique quantique*, op. cit., dessin de couverture.

³ R. Thom, *Prédire n'est pas expliquer*, op. cit., p.84 ; R. Penrose, *A la découverte des lois de l'univers*, op. cit., p.512.

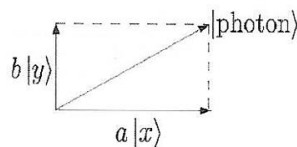
(suite)



Certes, *quel est le son d'une seule main qui applaudit ? souffle un koan japonais*, mais il en est un autre qui murmure autant à l'oreille : *Pour savoir si l'eau est chaude ou froide, il faut y mettre le doigt... Il ne sert à rien de discuter.*¹

⑤ Les expériences en mécanique quantique sur une onde polarisée sont édifiantes de ce point de vue pour sortir de l'impasse.

Le système, constitué d'un photon, peut avoir plusieurs états quantiques qui sont toutes les directions de polarisation. Une direction de polarisation quelconque est la somme d'une composante polarisée selon x et d'une composante polarisée selon y, ce que traduit la notation du vecteur d'état : $|\text{photon}\rangle = a|x\rangle + b|y\rangle$, où les coefficients a et b dépendent de l'état de polarisation du photon. Si le photon est polarisé selon x, alors a = 1 et b = 0, et si le photon est polarisé selon y, alors a = 0 et b = 1. L'équation $|\text{photon}\rangle = a|x\rangle + b|y\rangle$ est vectorielle. Elle peut être représentée comme suit :



Les vecteurs ne sont pas ici des vecteurs de l'espace qui indiquent des directions. Ce sont des vecteurs d'un espace abstrait, celui des états quantiques, l'espace de Hilbert.²

Une lumière, d'une seule couleur, ou fréquence, est polarisée linéairement et dirigée vers un filtre polarisant. Lorsque la lumière est polarisée selon x et filtrée selon x, elle passe. En revanche, si l'onde est polarisée selon x et filtrée selon y, elle s'arrête. Inversement, si l'onde est polarisée selon y et filtrée selon y, la lumière passe, mais si l'onde est polarisée selon y et filtrée selon x, elle s'arrête.

⑥ Ce fait décrit en droit, en faisant les changements nécessaires, la tendance à la polarisation de l'opinion par les partis politiques dans le cours habituel de la vie politique. Les partis, dans leur structure même, concourt à cette polarisation du fait déjà de leur essai d'orientation de l'opinion qui évite sa dispersion dans diverses directions. (se rappeler notre comparaison avec le phénomènes du ferromagnétique in §43,3/c)ii), consacré à la bipolarisation de la vie politique). Le résultat n'était pas toujours à la hauteur, d'où l'idée de recourir à des techniques similaires à des techniques de polarisation proprement dits pour inciter l'opinion d'aller voter suivant telle orientation.

Le droit américain offre un modèle de ce qu'il faudrait faire avec l'instauration de primaires qui n'étaient pas prévues par la Constitution fédérale. Cette présélection singularise les candidats tout en adoucissant leurs programmes au terme d'une course où il faut gagner les voix de son camp, mais aussi la majorité des voix du corps électoral. L'issue des primaires devrait davantage aider les électeurs à se décider.

⑦ Ce qui est fort surprenant, en physique, est l'expérience consistant à intercaler entre deux filtres polarisants une série d'autres. Si les polarisateurs successifs ne sont pas à axes perpendiculaires, il reste toujours une probabilité de passage qui dépend de l'angle. Il est possible de faire tourner la polarisation en faisant subir chaque fois à l'angle une petite rotation. Mais, - surprise ! Au lieu de constater une lumière colorée plus sombre, qui aurait dû augmenter avec le nombre de filtres, la lumière détectée s'éclaircit ...

¹ [https://fr.wikipedia.org/wiki/Koan_\(bouddhisme\)](https://fr.wikipedia.org/wiki/Koan_(bouddhisme)); <http://www.goshinbudokai.fr/koan2.html>

² C. Gougoussis et N. Poilvert, *Mes premiers pas en physique quantique*, op. cit., pp.22-23.

(suite et fin)

La mécanique quantique rend compte du phénomène. Elle parvient même à calculer les probabilités de passage qui ne se révèlent pas toujours proportionnelles aux divers angles de rotation de la polarisation (par ex. : à 0°, 100 % passent ; à 22,5°, 85 % passent, et non 75 % ; à 45°, 60 % passent).¹

Cette absence de proportion a peut-être aussi un sens en droit constitutionnel. On attend le chercheur qui en dira plus sur le sujet.

D'ores et déjà, on voit que les différentes étapes des primaires des partis politiques jouent le rôle de filtre apparenté à celui de polarisateurs successifs de la lumière. Il résulte de leur mise en œuvre que l'opinion finit par rejoindre le vœu unanime, sinon du public, du moins des 50%+1 voix nécessaires pour élire le candidat d'un parti qui deviendra le chef de l'Etat. Chaque parti doit savoir, lors des primaires, mettre de l'eau dans son vin pour boire à la santé de tous, d'autant que l'exercice du pouvoir enivre...

57.- DRESSER UN MUR A LA MAXWELL (*Résumé XLIX*)

① Le mur de Jefferson peut au plus arrêter le droit qui irait trop à l'encontre de la séparation des Eglises et de l'Etat. la loi française de 1905, séparant l'Eglise et l'Etat, pas davantage. Des « plantes pariétales » percent çà et là la muraille au risque toutefois d'en agrandir les failles.

② En outre, bien que séparé des Eglises, le droit positif demeure imprégné de la religion dont l'héritage est trop séculaire pour espérer le voir complètement disparaître. La tradition protestante et la catholique perdurent, parfois avec ostentation, là où elles se sont épanouies. Le droit moderne n'en est pas l'esclave, mais demeure souvent, peu ou prou, sous influence.

¹ *Bell's Theorem: The Quantum Venn Diagram Paradox*, 13 sept.2007, <https://www.youtube.com/watch?v=zcqZHYo7ONs>

§58.- DISOLÂTRER A LA BENTHAM
(Résumé L)

① La danse entre la partie et le tout a pour maître-danseur Bentham qui s'est y porté candidat après les théoriciens du contrat social dont il rejette l'expérience mentale trop fictionnelle. Comme le droit des Lumières, Bentham part de l'individu pour finir toutefois par le subjuguier. Ce n'est pas en réalité un maître-danseur, mais un dresseur devenu redresseur de torts.

Bentham ne rejoint pas davantage des penseurs comme Montesquieu ou Hume qui n'avaient pas pourtant retenu l'outil de pensée qu'est le contrat social. L'un et l'autre entendaient réformer la société plus en douceur. Bentham les estimera trop conservateurs. En revanche, il reprendra à son compte, sans apparemment s'y référer, la théorie des *idoles* de Francis Bacon. Il en retiendra surtout, pour les développer, les idoles du langage qu'il appelle *fictions*.

② Les investigations que mène Bentham transforment son libéralisme initial en radicalisme tournée particulièrement contre les fictions des *sinister ruling few*. Bentham les accuse de manipuler, à leur profit, le peuple par le langage. Ce virage à 180° degré, en faveur du plus grand nombre, fait de lui un nouvel adepte du mode de séparation des pouvoirs qu'est la spécialisation des organes. Bentham considère que ce mode est plus apte à défendre les intérêts du plus grand nombre par sa capacité à mener des réformes ou à les accélérer.

Le principe de souveraineté populaire est une fiction juridique qui lui apparaît, cependant, éminemment utile. S'il ne croit pas au contrat social conclu entre un grand nombre d'individus, il croit au règne du plus grand nombre sans le moindre contrat comme solution pour réaliser le bonheur des individus qui le composent. Alors que Hobbes se défie de la multitude, Bentham parie sur ses vertus. L'opinion publique ne serait pas informée. Il y aurait *un tribunal de l'opinion* pouvant contrecarrer l'excès du pouvoir. Le grand nombre juge souverainement.

③ Dans son entreprise de correction des mots, Bentham commet deux erreurs d'interprétation relatives au principe de souveraineté populaire et à la notion de bonheur.

Bentham identifie le principe de souveraineté populaire à l'idée du plus grand nombre, caractérisé par une identité d'intérêts plus ou moins homogènes. Tous les individus sont censés chercher les mêmes satisfactions et fuir les mêmes peines. Cette vision irénique, pour ne pas dire idyllique, n'était guère partagée en Amérique quand on sait combien Madison était frappé par l'hétérogénéité des intérêts.

Bentham veut rendre les gens heureux sans trop leur demander leur avis. Le redressement du langage aboutit à celui des comportements considérés comme déviants et à une surveillance généralisée autour d'un centre de haute vigilance. Au XX^e siècle, Michel Foucault dénoncer un tel panoptique. Son analyse fait de Bentham le garde-chiourme épigone de la société moderne. Si la critique est excessive, il n'en demeure pas moins que la conception benthamienne du bonheur jure, par sa simplicité et radicalité, dans le contexte des Lumières.

La recherche du bonheur, que proclame par exemple la Déclaration d'indépendance américaine, ne confie pas au législateur le soin de définir lui-même le bonheur des citoyens. Sa tâche ne consiste qu'à faciliter les conditions du bonheur que chacun juge bon pour lui-même. Nous sommes dans l'idée de Locke que chaque individu est le meilleur juge des moyens de sa conservation. Le bonheur est comme la liberté : il appartient à chacun de décider ce qui lui paraît bon ou non.

Bentham fustige sur de nombreux points Rousseau, mais Rousseau, sur le bonheur, a une conception plus en accord avec la liberté individuelle. Cette fidélité sur ce point aux Lumières n'empêche pas le philosophe genevois d'être sceptique sur la réalisation d'un tel bonheur. Comment serait-il possible dans une société qui ne chercherait qu'à flatter des désirs inutiles et vains ? Le bonheur en rime pas avec des satisfactions factices, sans l'ombre du sentiment.

§59.- REPENSER LA VOLONTÉ GÉNÉRALE
EN TERMES DE NŒUDS ET EN TERMES VECTORIELS (*Résumé LI*)

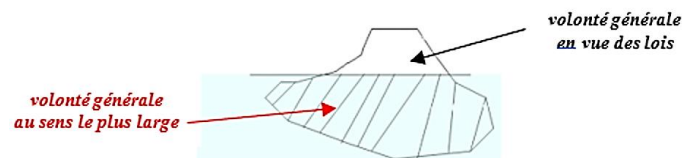
① Si le plus grand nombre peut approximer la volonté générale, si l'Etat peut concrétiser, par cette démarche, l'intérêt commun, la volonté générale ne saurait se confondre avec ce qui continue de n'être que la volonté de tous. La volonté générale est la volonté de tous *et* de chacun. Elle implique un enlacement réciproque du bien de tous et du bien de chacun.

Deux types de nœud peuvent aujourd'hui figurer cette idée composite promue chez Rousseau et Condorcet : le nœud de Hopf, et le nœud de Whitehead, entrevus l'un et l'autre au XX^e siècle.

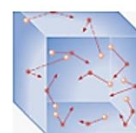
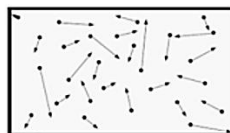
L'entrelacs de Hopf comprend deux ronds. Il noue le progrès ou la perfectibilité individuelle et le progrès ou la perfectibilité sociale. Les deux progrès vont dans le même sens pour Condorcet. Ils virent dans le sens opposé pour Rousseau, si aucune socialisation du sentiment individuel n'advient au cœur du citoyen. L'entrelacs de Whitehead comprend aussi deux nœuds disjoints. Cette figure entrelace davantage le sujet (de droit) et l'objet (des lois) au profit du sujet de droit. Ce nœud paraît également approprié pour représenter entrelacées la volonté de tous et la volonté de chacun, au bénéfice, là encore, de la volonté la plus humble.

Comme dit Bachelard, à propos des figurations diverses du théorème de Pythagore, l'intérêt de recourir à des diagrammes est de situer la réflexion *dans un temps logique qui n'a plus les lenteurs de la réelle chronologie*. Ce temps est *un laps de temps très court* permettant d'atteindre *l'intuition du discursif*.¹ Les diagrammes nous font penser vite.

② En dépit de son entrelacement dans un nœud à deux composantes inséparables, la volonté générale de Rousseau ne semble pas épuiser les profondeurs de son propre concept, pour parler à la façon de Hegel. La générale ne peut se réduire à celle qui s'exprime dans les lois. Elle n'est que la partie visible d'un iceberg dont la partie basse dépasse largement l'émergée.



Comme dans une enceinte contenant des millions d'atomes, ou de molécules agitées en tous sens, comme l'envisagera Maxwell en science, la partie basse de la volonté générale recèle des millions de volitions individuelles vibrant çà et là. Cette partie basse, ou la plus large, aide à mieux comprendre pourquoi la partie haute de la volonté générale demeure un ensemble ouvert. Son objet-sujet, non délimité par un bord, est moins un fait qu'un horizon de réalité.



③ Les diagrammes de Bergson, relatifs à l'étude de la mémoire, semblent particulièrement adaptés à décrire les deux « natures » de la volonté générale. L'inconscient mémoriel, fait de souvenirs multiples et épars, resurgit à la surface lorsque certains s'avèrent utiles à l'action. Telle est, en deux mots, la thèse, de Bergson. Tels sont, en droit pareillement, des volitions individuelles, plus ou moins obscures, qui n'aspirent aussi qu'à voir le jour. La volonté générale rationnelle active et filtre, en surface, celles qui sont nécessaires. Des directions s'esquissent sous la forme d'idées-force appelées à se convertir en règles positives nouvelles.

L'actualité, du mois de juin 2020, illustre ce point de vue. Les « nouvelles » montrent un mouvement d'une ampleur inédite contre le racisme et les violences policières, non seulement aux Etats-Unis, mais aussi en Europe et en Australie. Cette mobilisation internationale a pour conséquence *d'avoir ouvert des problématiques qui sont encore tabous dans nos sociétés*.²

¹ G. Bachelard, *Le rationalisme appliqué*, op. cit., p.96.

² François Dupaire, historien des Etats-Unis, *Une mobilisation sans précédent dans l'histoire*, in *Le Parisien* du 7 juin 2020, p.5.

La volonté générale du jour a soif d'enrichir celle d'hier qui a confectionné les lois. L'intérêt de l'officielle est de s'y adapter si elle ne veut pas subir le naufrage du Titanic qui n'a prêté attention qu'à la partie visible de l'iceberg. Elle ne peut longtemps négliger la partie invisible. Il est suicidaire, pour la société, de restreindre le droit constitutionnel à l'étude de la seule volonté rationnelle.

Résumé LI (suite)

④ Sous ce rapport, l'analyse scientifique en composantes principales éclaire le mécanisme de transformation du passage de la volonté générale « irrationnelle » à la volonté générale « rationnelle ». La machinerie matricielle, qui en est l'outil, métamorphose la 1^{re} en la dernière.

Cette analyse est en œuvre, sans le dire, en droit.

Avant de l'entreprendre, on doit admettre en pensée que la volonté générale la plus large est représentable au départ par une « matrice unitaire » de millions de données n'indiquant aucune direction particulière. Ces données sont à nouveau les volitions individuelles, bonnes ou mauvaises, morales, immorales ou amoraux, qui circulent au fond de la société. (Les gens d'en haut diraient les « bas-fonds ».) Elles prospèrent ou désespèrent, mûrissent ou dépérissent. Leur comportement échappe au regard du pouvoir légal en place, obnubilé par les intérêts de sa majorité, à peine ballotée par les remous qui rident l'onde paisible du droit.

Un raisonnement du type analyse en composantes principales n'hésite pas à se pencher sur ce monde grouillant et désordonné de volitions individuelles, vivant pêle-mêle. Il s'efforce d'en dégager les orientations plus prononcées, vouées peut-être un jour à régénérer la société.

Il appartenait au législateur anglais d'entendre outre-Atlantique ces voix indistinctement mêlées, inaugurant, sans trop le savoir elles-mêmes, la puissance métamorphosante du nouveau monde. On accusa, à l'époque, le gouvernement de sa Majesté d'être malavisé au lieu d'écouter les conseils anglais et américains de rénover le droit à partir des revendications qui s'étaient exprimées en Amérique (*representation and consent, constitution and rights*). S'il est vrai qu'on ne s'avise jamais de tout, il est aussi vrai qu'il est dangereux de ne vouloir rien entendre du tout. Une nouvelle idée-force comme celle de *sovereignty* se fraya un chemin dans les consciences avant de passer à l'action sans le canal ni l'aval du Parlement anglais.

La voie légale était bouchée. Ne restait que celle de la Révolution comme dans les Provinces-Unies contre l'Espagne catholique et absolutiste au XVI^e siècle, bien que la nouvelle et la vieille Angleterre furent toutes deux protestantes, la nouvelle protestant plus fort que jamais.

Ces messieurs du pouvoir qui gouvernaient alors la France ne firent pas mieux sous la monarchie. Ceux de la Révolution commirent d'autres erreurs de compréhension, au regard notamment de la religion. L'incompétence de l'Etat fut patente en cette matière sulfureuse.

§60.- RAISONNER EN UTILITARISTE ET EN INFERENCE BAYESIENNE

(Résumé LII)

- ① Les motifs pour et contre l'utilitarisme établissent une balance qui oscille en permanence.

Les *pour* se vantent de justifier l'utilitarisme au vu de ses conséquences pour le bonheur de la société. Les *contre* considèrent que l'utilitarisme est fondé sur la notion fourre-tout d'utilité qui justifie les choses les plus disparates, voire contradictoires, comme utiles. Il y a, cependant, de part et d'autre, des nuances qui adoucissent le portrait pur et dur de ceux qui s'en réclament et de ceux qui s'y opposent.

L'utilitarisme de Bentham, qui entend améliorer le sort du plus grand nombre, n'est pas, cependant, au bout de ses peines.

- ② Certes, le raisonnement bayésien, qui prend en compte l'information nouvelle pour affiner les probabilités a priori des événements, peut dégrossir le conséquentialisme, inhérent à l'utilitarisme.

Il en va ainsi de l'analyse des stratégies politiques, à information asymétrique, assimilable au jeu de poker, comme celle qui opèrent aux Etats-Unis, au niveau fédéral, entre le Congrès et la Cour suprême. *La formule de Bayes*, en théorie des probabilités, peut guider l'observateur à y voir clair, même si le raisonnement, qu'elle présuppose en droit, demeure qualitatif. Elle ne fournit, dira-t-on, que des indices numériques un peu fantaisistes, mais, répondra-t-on, ces indices, basés sur des enquêtes ou des renseignements de première main, auront plus l'apparence de la certitude que de simples hypothèses.

- ③ Le raisonnement bayésien ne saurait, cependant, racheter complètement le conséquentialisme de l'approche benthamienne comme de toute approche de la même veine. L'idée de se contenter de sommer les utilités individuelles reste problématique à la réflexion.

Peu de temps avant la Révolution française, le paradoxe de Borda prêtait déjà à discussion. Ce paradoxe portait sur les notations des candidats à une élection. Borda entendait en faire la moyenne pour permettre de sélectionner l'heureux élu, mais le classement devient un casse-tête lorsque le nombre des candidats est au moins égal à trois. Le maximum de satisfaction attendu peut provoquer des insatisfactions parmi les électeurs ! Condorcet en reprendra l'analyse en ne considérant plus que les préférences des mêmes électeurs. Le paradoxe a-t-il disparu ? Non, au contraire, il apparaît encore plus têtue que prévu. L'effet paradoxal est toujours là. La satisfaction du plus grand nombre, que recherchera Bentham peu après, est frustrée. Et celle de la majorité, qui s'en approche plus, ne l'est pas moins !

- ⑤ Le théorème d'impossibilité d'Arrow confortera l'idée de Condorcet qu'il n'existe pas de solution assurée pour déterminer un choix collectif à partir de choix individuels. Cette idée est conforme à celle de Rousseau qu'Arrow cite particulièrement sur la volonté générale. Sauf erreur, nous n'avons pas vu, dans les commentaires divers de ce théorème, cette relation de première importance entre Arrow et Rousseau.

Certains se désolent de la conclusion négative de ce théorème, d'autres s'en réjouissent, mais aucuns n'en voient l'intérêt pour mieux comprendre Rousseau et sa théorie de la volonté générale. Beaucoup continuent encore à assimiler la volonté générale de Rousseau à une volonté mystique et totalitaire.

L'impossibilité de déduire, à partir des avis individuels, un avis collectif, démontre, si besoin est, que la volonté générale est un au-delà que personne, ni un groupe quelconque, ne peut s'arroger pour justifier son pouvoir en s'en réclamant directement. Un monopole d'interprétation, en son nom, n'est pas non plus recevable, lorsqu'on prétend lire la Constitution de façon unilatérale et définitive. L'individu esseulé, ou un groupe minoritaire trop rejeté, qui n'est ni écouté ni reconnu, conserve toujours une chance d'être vu et entendu.

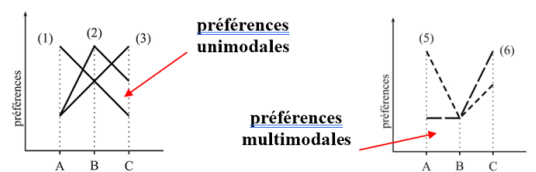
Ces remarques n'excluent nullement la possibilité d'approcher en pratique la volonté générale par des majorités simples ou qualifiées. Il faut toutefois garder à l'esprit que ce n'est qu'une approximation provisoire, comportant une marge d'erreur plus ou moins grossière. Toute volonté estimée devrait être sujette, à défaut d'un check-up continu, à une révision relativement périodique, ou de temps en temps ponctuelle, selon les nécessités du moment.

Résumé LII (suite)

⑥ Le jeu des coalitions est un autre obstacle de taille sur la voie de la réalisation de la satisfaction du plus grand nombre.

Il est illusoire de croire qu'il existe une cour de justice, composée de juges professionnels ou de jurés, qui soit proprement impartiale du fait de la multimodalité favorisant un tel jeu. Un jury d'assises ou de recrutement pour un poste quelconque, ne l'est pas plus qu'une assemblée politique. Les préférences, parmi les membres du jury, divergent par nature et se coalisent par factions en lutte les unes contre les autres pour emporter la décision.

La divergence, ou « multimodalité » des préférences, est illustrée par des graphes affichant plusieurs sommets, et non un seul en raison de la variété irréductible des ordres de préférences individuels. La multimodalité produit l'effet paradoxal de Condorcet. L'imposition d'une motivation unique, à l'appui d'une décision, unimodalisant de façon forcée ces ordres de préférence, n'est en fait qu'une façade. D'aucuns diront tout bas une farce bien que la forme de ce rendu de la justice soit prisé par un certain droit positif au prétexte qu'il préserverait l'unité du droit et l'autorité des cours de justice. Le roi de France, autrefois, dans sa sagesse, alléguait la même « raison d'Etat » pour rendre une telle justice sous son chêne.



⑦ La Constitution fait également écran lorsque son étude prétend n'y voir qu'une pure mécanique, indépendante du jeu des coalitions qui l'actionnent et l'interprètent. Des mécanismes indubitablement existent et contraignent les acteurs, comme nous nous sommes efforcés de le montrer jusqu'ici dans notre travail. Sous ce rapport, le droit constitutionnel moderne s'est construit sur un certain modèle de la nature où l'application de forces a remplacé celui des bonnes intentions. Mais cette *épistémè*, commune au droit nouveau et à la science nouvelle, en dépit de différences plus ou moins grandes, ne saurait rester dans la hauteur où flottent des concepts désincarnés. L'étude du droit doit descendre dans l'*hypogée* pour comprendre les échecs et les réussites du constitutionnalisme des Lumières. Il faut s'aventurer en deçà de son socle imaginaire qu'ont construit moult philosophes et historiens.

En élargissant ainsi la perspective, le constitutionnalisme moderne n'apparaît plus aussi éloigné du constitutionnalisme ancien du point de vue de la pratique malgré de fortes variations dans la conception de la politique. Il est fait qu'hier, comme aujourd'hui, s'élevaient *des alliances, tant pour nuire à l'adversaire que pour se les attacher à soi-même*. La politique était déjà *une activité compétitive* dans les cités grecques et la République romaine

où ni les alliés et rivaux à l'intérieur de l'élite ni le peuple n'étaient des spectateurs passifs.

C'étaient des gens qu'il fallait interpellé, consulter, manipuler, manœuvrer et contre manœuvrer. Bref, c'était des gens qui, de différentes manières, étaient politiquement concernés.

C'était là le prix à payer pour que fonctionne le système de la cité-Etat, avec sa composante de participation populaire.²

Le jeu des coalitions cesse d'opérer lorsqu'une coalition réussit à entrer dans la zone de stabilité du *cœur* en l'emportant sur toutes les autres. Ces dernières sont incapables de la fragmenter en débauchant ses membres. Même ses sous-coalitions n'ont aucun intérêt à la quitter. Ce n'est donc pas la visée de la satisfaction du plus grand nombre qui prime, mais celle du *cœur* pour les individus qui cherchent d'abord à se regrouper en factions comme on disait autrefois, ou en coalitions comme on dit aujourd'hui. Ce moyen semble mieux satisfaire leur besoins et intérêts. Le *cœur* est atteignable, si du moins le nombre de partis politiques par ex. n'est pas lui-même trop grand.

¹ Préférences unimodales et multimodales, <https://www.researchgate.net/figure/>

² M. I. Finley, *L'invention de la politique*, op. cit., chap.3 : Politique, p.100, 102 et 109.

Résumé LII (suite)

⑧ Aristote pensait que l'émergence d'une classe moyenne suffisait à stabiliser une société, conformément à sa théorie du « juste milieu ». Ce lieu entre parviendrait à relier et à tenir en respect les extrêmes. Pareille notion, si belle soit-elle en éthique, ne fait qu'obscurcir en fait l'analyse du droit et de la politique. La classe moyenne était peu nombreuse à Athènes. Ce n'est pas en fait une classe plus ou moins homogène qui « assagit » la cité. C'est le jeu des coalitions qui permet aux gens ordinaires d'être mêlés aux « gens de mérite » ou qui se croient tels.

En formant une coalition nouvelle contre une autre qui détient le pouvoir, les individus espèrent des gains politiques qui amélioreront leur situation en termes de droits et d'avantages matériels. Des individus, appartenant à une couche aisée, peuvent avoir intérêt à s'allier avec des individus, appartenant à une couche moins favorisée, s'ils se voient refuser l'accès à certaines fonctions ou certains honneurs réservés à un cercle fermé de privilégiés.

Même des aristocrates, d'un esprit plus large, peuvent trouver intérêt à mélanger les groupes les plus divers pour sécuriser la cité à plus long terme. Ce fut le cas de Clisthène à Athènes en 510 av. J.-C qui tenta, non sans succès, à supprimer le pouvoir du petit nombre sur le grand. Il « inventa » un système artificiel et ingénieux qui consista à créer, sur une base territoriale, des structures nouvelles (*les dêmes*) dans lesquelles coexistèrent des individus puissants et des individus de plus humble condition. L'effet de ce mélange fut de rompre les liens qui attachaient les individus aux factions aristocratiques qui dominaient trop la cité.

Comme le décrit Aristote lui-même : le but de la stratégie de Clisthène fut de mélanger tous les individus afin de détruire leurs associations antérieures.

Les individus faibles socialement pouvaient ainsi moins chercher, pour survivre, la protection des plus puissants. L'atténuation de la relation « patron/client » leur ouvrait davantage la participation aux affaires publiques. Sous la République romaine, le mélange des groupes sociaux ne sera pas non plus totalement absent. Une certaine dose de participation populaire existera à la base au gouvernement bien que le régime fût plus oligarchique qu'à Athènes après la réforme de Clisthène. Cette réforme ainsi que la participation populaire, même limitée à Rome, n'auraient pas eu, selon Moses I. Finley, de précédent dans l'histoire.

Ce furent une initiative très neuve. Tout exposé sur la politique en Grèce et à Rome doit mesurer correctement l'importance de cette innovation radicale.¹

Clisthène avait accompli son mixage social et politique en considérant le *dème* comme une unité de voisinage à partir de laquelle la lutte pour le pouvoir put s'affranchir des grandes maisons aristocratiques. De même, à la fin du XVIII^e siècle, Madison entreprit, un mixage un peu similaire en mélangeant les intérêts les plus divers sur une base notamment territoriale. La différence d'échelle spatiale entre Athènes et les Etats-Unis ne mine pas la comparaison.

⑨ Il ne suffit pas, dans une négociation, que la menace soit brandie pour qu'elle soit effective. Il faut qu'elle soit précise et concrète, certes, mais pour que la menace soit crédible, il faut encore plus. Pour qu'on y croie, il faut assortir la menace d'une sanction, d'une contrainte qui oblige l'autre partie à tenir sa promesse. La promesse en politique, sans elle, est sans effet.

Un Léviathan, censé gouverner des êtres libres, n'est qu'une vue de l'esprit s'il n'a pas en main une épée qui blesse ou tue de façon légitime. Sans cette épée de Damoclès, qui ne reste pas toujours en l'air, mais peut s'abattre si nécessaire, la théorie du contrat social ne saurait être crédible sans armer Léviathan. Il ne suffit pas de le concevoir, il faut lui donner une réalité.

La séparation des pouvoirs, digne de ce nom, n'est pas non plus autre chose que des menaces unilatérales ou mutuelles, assorties de crédibilité plus ou moins certaine. Ce n'est aussi que par leur crédibilité que les coalitions nouvelles font bouger le droit naturel moderne dans le sens de leurs intérêts.

¹ *Ibid*, chap.1 : Etat, classe, pouvoir, p.39.

Résumé LII (suite et fin)

L'adjectif *crédible* en français n'est pas exempt, il est vrai, d'ambiguïté. Crédible veut dire que l'on peut croire, et il laisse entendre autant qu'une parole ou un engagement est assuré d'être réalisé. Le détour par l'anglais lève la confusion. *Credible* diffère, dans cette langue, de *reliable*. L'adjectif *credible*, dans par ex. *credible elections*, signifie *you can believe them alors que l'adjectif reliable signifie*, en ce qui concerne une personne par ex., *you can count on him*. Ainsi, *this man is credible but not reliable*, i.e. *he is unreliable/untrustworth : tomorrow he can change his mind*).

La *menace crédible* en droit, comme en théorie jeux, suppose à la fois les adjectifs *credible* et *reliable*, mais pas seulement aussi en anglais. Il importe d'avoir confiance et de pouvoir compter sur un cocontractant, mais ce sentiment doit être renforcé par le fait que la menace, insérée dans le contrat, est exécutable ou susceptible d'avoir un effet. La promesse *would have a significant effect on/a bearing on/ an impact on, even if the other party changes one's mind !*

La crédibilité implique l'existence d'un mécanisme objectif, à savoir des *sanctions to ensure compliance*. On ne se contente pas, en droit constitutionnel, des seules dispositions, si incantatoires soient-elles. Il est bon, parfois, *to come up with new law*, mais il est bon surtout d'en assurer l'application. Cette exigence appartient à la phase de *test* des options possibles dans toute négociation.

Können Sie das belegen/beweisen? Pourriez-vous le prouver, le mettre à l'épreuve ? dit-on encore en allemand.

§61.- ELARGIR LA LOGIQUE EN TRANSFORMANT LE CARRE DES OPPOSITIONS EN HEXAGONE

(Résumé LIII)

① Il faut se méfier en droit constitutionnel du mot « fiction ». Des esprits, comme Bentham, ne pourront que réagir aux écrits juridiques qui comportent par trop un halo de flou ou d'imprécision. Nombre d'affirmations, protestent-ils à raison, se parent abusivement en évidences.

De tels esprits, cependant, tombent eux aussi dans le piège, d'endosser avec excès l'habit d'inquisiteur dans le langage juridique. On retrouve ce rigorisme, au début du XX^e siècle, dans la philosophie du Cercle de Vienne qui voudra enserrer toute réflexion dans l'étau de la logique formelle. Même en science, les atomes qu'on considérait comme des fictions apparaissent aujourd'hui à la perception. Boltzmann l'avait compris dans la deuxième moitié du XIX^e siècle, mais il a fallu en physique Jean Perrin pour lui rendre justice au début du siècle suivant. (§53)

② La logique formelle ? Eh bien, parlons-en. Celle qui exclut le tiers exclu trouvait également que cet intrus était une fiction. Le tiers exclu, qui prétendait être un tiers inclus, paraissait aussi étrange que celui que tenta de valoriser la logique de Hegel à l'encontre de celle d'Aristote. La logique hégélienne n'a pas su, cependant, ériger des barrières contre elle-même alors que l'aristotélécienne s'en avisa avec ses principes de non-contradiction et du tiers exclu.

Et pourtant, les notions de droit constitutionnel ne naissent, ni ne coexistent, dans la léthargie ou l'ennui. Beaucoup se trouvent en tension avec leurs opposées sans toutefois les expulser.

L'hexagone logique coiffe le carré des oppositions, sans non plus en abolir la structure. Les partisans de la *rule of people* et ceux de la *rule of law* ne se plaisent guère à cohabiter, mais ils apprennent à « faire avec » ce qui semble contraire à leur intention première. Les uns trouvent que les adversaires ont tort, et les autres trouvent que ceux qui leur résistent ont également tort. Il n'empêche qu'ils parviennent ensemble à s'accorder bon gré mal gré. Des procédés de démocratie directe et de démocratie indirecte sont présents dans le même cadre constitutionnel. Les Etats-Unis, l'Angleterre et la France ont réussi à l'admettre, comme d'autres pays acquis aux idées des Lumières, quelque imparfaite que soit leur Constitution.

③ L'utilité a sans doute joué un rôle dans cette régulation conflictuelle, puisqu'il est de haute utilité que l'individu comme la société survivent dans l'épreuve des oppositions. La notion d'utilité a l'avantage d'être applicable à tout le monde. Chacun est capable de sentir, dans sa peau, ce qui lui procure du plaisir et de la peine. L'approfondissement du constitutionnalisme des Lumières implique cette conception démocratique de la satisfaction, quitte à amender la sensation par le sentiment, capable aussi d'être vivement ressenti par le plus grand nombre.

L'utilité présente cet autre intérêt de donner prise à une certaine mesure, aussi réductrice soit-elle, quand Bentham, et l'utilitarisme en général, veut la sommer ou en établir une moyenne. L'utilité s'y prête mieux qu'une idée purement abstraite. Elle tente de peser les infortunes des hommes et ce qu'ils qualifient de bonheur. Apprécier, à partir d'une règle, leurs douleurs comme leurs joies sur terre, est incontestablement une première. Bien qu'elle soit subjective, la justice comme *fairness* apparaît plus appréhendable et graduable qu'une justice idéale.

④ L'accent sur l'utilité comporte néanmoins un revers, comme toute notion de droit ou d'économie susceptible de figurer dans l'hexagone des oppositions. On n'a jamais autant vu ni ouï que l'argent donne de la valeur et de la puissance à l'individu. C'est comme si les nantis avaient toujours plus de mérite, ou exercé toujours mieux leurs talents, que les déshérités.

Sans doute, avoir des biens, même en quantité superflue, ne messied pas à l'individu qui veut s'affranchir des contraintes de la vie matérielle, mais les seuls biens de ce monde ne peuvent se ramener à la richesse et à la détention du pouvoir. Conformément au postulat de Hobbes (et de Locke), l'argent (et la propriété) donne du poids à l'individu qui émerge dans la société moderne, mais l'argent asservit le même individu autant qu'il l'enrichit. L'utilitarisme ne pose pas à tort la question de savoir si la liberté politique, à laquelle l'individu nouveau aspire, n'est pas devenue, via le souci exclusif de l'utilité, davantage un moyen qu'une fin en elle-même.

Résumé LIII (suite)

D'aucuns se plaignent par ex. que l'éducation soit de plus en plus fonctionnelle au détriment de sa vocation originare de former le jugement des citoyens contre l'arbitraire. Mais, dit-on, l'individu jouit, à défaut d'être épanoui. Rien ne peut lui plaire d'autre que les satisfactions transférables sur un marché grâce à la monnaie. Avec elle, on peut tout s'offrir, mais la monnaie, avertissent d'autres, risque de pervertir ce qu'elle touche. Tout se monnaie et, de là, tout se dévalue jusqu'à la caricature. L'utilité ne s'y retrouve plus. Elle se transforme, elle aussi, en son opposé, la désutilité, dans une société dont le sentiment d'unité se défait à terme.

Dans la Grèce ancienne, les citoyens étaient fiers de ne pas plier le genou devant un homme, fût-il le roi des Perses. Dans le monde issu des Lumières, il y a lieu de craindre que l'individu plie le genou devant la satisfaction la plus immédiate ou ce qui est le plus rapidement rentable.

⑤ - Allons, ce ne sont là que les symptômes d'une passion excessive. Tout le monde n'en est pas atteint. La théorie des jeux coopératifs montre également que l'individu n'est pas qu'un animal solitaire, poursuivant sans vergogne ses appétits de richesse et son appétence pour le pouvoir. L'individu interagit avec ses semblables, il doit compromettre sans toujours se compromettre. Ses adversaires peuvent devenir des demi- partenaires dans une négociation qui génère une satisfaction collective optimale dépassant les stricts intérêts personnels.

On the strategy of pure conflict – the zero-sum games – game theory has yielded important insight and advice. But on the strategy of action where conflict is mixed with mutual dependence – the nonzero games involved in wars and threats of war, strikes, negotiations, criminal deterrence, class war, race war, and blackmail ; maneuvering in a bureaucracy or in a traffic jam ; and the coercion of one's own children – traditional game theory has not yielded comparable insight or advice.

These are the "games" in which, though the element of conflict provides the dramatic interest, mutual dependence is part of the logical structure and demands some kind of collaboration or mutual accommodation – tact, if not explicit – even if only in the avoidance of mutual disaster.

These are also games in which, though secrecy may play a strategic role, there is some essential need for the signaling of intentions and the meeting of minds.

Finally, they are games in which what one player can do to avert mutual damage affects what another player will do to avert it, so that it is not always an advantage to possess initiative, knowledge, or freedom of choice.¹

¹ Thomas C. Schelling, *The strategy of conflict*, op. cit., ch.4 : Onwards a theory of interdependent decision, p.83. Nous soulignons.

§62.- OUVRIR AUSSI LA LOGIQUE A D'AUTRES FORMES PERIPHERIQUES (*Résumé LIV*)

① Nous nous concentrerons ici sur ce qui apparaît inédit dans le droit constitutionnel hérité des Lumières : l'accroissement de la puissance d'un pouvoir par une élévation sensible de sa fréquence d'intervention qui se manifeste, moins dans l'action, que dans la communication.

Sans chercher une exacte équivalence entre la physique et le droit, il est tentant de rapprocher à nouveau l'électricité et la branche du droit qui étudie les phénomènes constitutionnels. Le comportement de Trump, sous sa Présidence, donne l'occasion de proposer une grille de lecture inspirée de cette comparaison.

② La Présidence de Trump ne cessa, de façon compulsive et très fortement répétitive, d'intervenir dans les media pour vanter ses mérites et désigner ses adversaires comme des ennemis. Par ses nombreux tweets, courts et incisifs, il sut garder un lien avec ses partisans. Il enflamma leur colère et suscita en eux une hostilité redoublée contre d'autres groupes qui ne correspondaient pas à l'image idéale traditionnelle d'une Amérique blanche et chrétienne.

Le flux et le reflux de toutes ses sorties intempestives semèrent la discorde dans tout le pays. D'aucuns objecteront que Trump n'a fait que prendre la température d'un pays déjà en ébullition. Qu'il n'en est pas la cause mais l'effet, mais cet effet, répondront d'autres, fut lui-même amplificateur. Trump a fait monter de beaucoup la température. En disant à ses sympathisants *I am your voice*, et en crachant sur les habitants qui ne s'y retrouvent pas. Le Président devint lui-même, par-delà sa propre emphase, un entrepreneur de la haine. Il prit un malin plaisir à l'attiser, à fracturer l'espace public et altérer le goût de tous à vivre ensemble.

③ Comment les institutions réagirent-elles contre un tel populisme et une vulgarité sans pareil qui a fasciné tant de gens ? La comparaison avec la physique offre une nouvelle ressource de penser ce phénomène qui n'est pas tout à fait éloigné, ici encore, des phénomènes naturels.

L'impédance en physique mesure l'opposition d'un circuit électrique au passage d'un courant alternatif. Le mot vient du verbe anglais *to impede* signifiant « retenir », « faire obstacle à ». Le verbe dérive lui-même du latin *impedire*, « entraver ». ¹ L'impédance est une généralisation de la loi d'Ohm, $R = U/I$, au courant alternatif. Elle est l'équivalent de la résistance pour les courants continus. Elle représente la résistance totale que présente par exemple un câble au courant électrique qui le traverse. L'impédance mesure l'opposition d'un circuit à un courant oscillant.

En droit constitutionnel, la sensibilité à la fréquence n'est pas un fait complètement nouveau à l'âge des Lumières. Montesquieu raisonnait en ces termes pour différencier les temps d'action des différents pouvoirs. Le souci d'éviter les phénomènes de résonance, générant un abus de majorité, inquiétera aussi les Pères fondateurs américains au plus haut point. Compte tenu des techniques de l'époque, ces penseurs n'imaginaient pas, cependant, qu'un pouvoir eût la capacité de transformer sa fréquence d'intervention en très haute fréquence...

Des messages répétés à n'en pas finir, faisant fi de toute vérité, transforme un pouvoir, comme celui de Trump, en une puissance de nuire sans équivalent. Le droit ne fait plus face à un pouvoir qui s'accroît ou décroît plus ou moins dans le temps. Tous les autres pouvoirs, fédéraux ou des Etats, sont le coup d'une fréquence frénétique qui les bombarde jour et nuit. Les citoyens n'en sont point non plus exempts.

④ Certes, l'oscillation des messages n'est pas aussi régulière que celle d'une sinusoïde, mais les mots ressassés d'un Président qui se prétend le porte-voix des « oubliés » ont des conséquences. Celle notamment de fragiliser les élections en dénonçant sans fondement la fraude. Des mensonges répétés gonflent en rumeurs qui finissent par toucher sans raisonner. Ils créent une atmosphère délétère qui empoisonne petit à petit le pays qui ne voit plus clair.

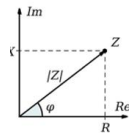
Le courant alternatif, en électricité, est induit par la rotation d'une spire dans un champ magnétique ou par le déplacement d'un aimant au-dessus d'une bobine physique. A chaque passage de l'aimant, dans ce dernier exemple, on assiste à une alternance de tension, comme l'indique à un expérimentateur un voltmètre. A chaque fois, le courant change de sens. La bobine joue le rôle de conducteur électrique, et l'aimant celui de champ magnétique variable.²

¹ [https://fr.wikipedia.org/wiki/Impédance_\(électricité\)](https://fr.wikipedia.org/wiki/Impédance_(électricité))

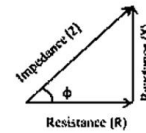
² BapLab, *Produire du courant électrique avec une bobine*, 12 nov. 2016, <https://www.youtube.com/watch?v=I32FhAFfpD4>

Résumé LIV (suite)

L'électromagnétisme montre un phénomène d'impédance qui réunit deux résistances au passage d'un courant alternatif : la résistance classique, qui réagit au courant comme s'il était continu, et la réactance qui réagit à la fréquence propre à la composante alternative du courant. La résistance est exprimée par un nombre réel, car la tension aux bornes est en phase avec le courant (la résistance ne provoque pas de déphasage). La réactance, en revanche, est exprimable par un nombre complexe dont le module mesure l'amplitude et son angle le déphasage (i.e. la différence de phase entre les deux phénomènes alternatifs de même fréquence que sont le courant et la tension aux bornes).



Une impédance Z peut être représentée comme la somme d'une partie réelle Re et une partie imaginaire, Im



La réactance, seule, agit en fonction de la fréquence. Ainsi, si la fréquence d'un courant varie, la réactance variera de façon proportionnelle. L'augmentation de la fréquence implique une augmentation de la réactance. Une diminution de la première implique, inversement, une diminution de la seconde. La réaction dans un circuit crée un impact sur l'impédance. Comme l'impédance change par contre-coup, la tension à la sortie dépend, au final, de la fréquence.

⑤ Comment le droit constitutionnel a-t-il réagi lui-même à une élévation sensible de la fréquence en coups de poings du pouvoir exécutif d'un Trump durant son mandat ? Comment a-t-on pu contrer cette agitation désordonnée, venant frapper comme des vagues successives, les valeurs libérales et démocratiques de l'Amérique ? A-t-on réussi à échapper à ces effets ?

Les butées traditionnelles de la séparation des pouvoirs (le fameux *checks and balances*) ont paru sans prise. Faute de mieux, la stratégie *name and shame* semble avoir été privilégiée par l'opposition et les media diabolisés par Trump. On n'a pas cessé de compter les *tweets* de l'intéressé, ni de démontrer leur fausseté. A la fréquence des messages de l'intéressé a été opposée la fréquence des contre-messages de ses adversaires, y compris ceux télévisés de la minorité des Républicains anti-Trump. Mais cette stratégie rencontra vite ses limites. Leur « réactance », consécutive au sentiment d'être menacé dans leur liberté, n'a pu qu'aggraver le conflit au lieu de le résoudre. Un individu, enivré du pouvoir, qui se dit ou se sent persécuté, et qui est contré, ne peut qu'en faire davantage. Il se croit encore plus justifié pour continuer.

Les soutiens de Trump se sont fermés comme des huîtres devant les arguments prononcés contre leur idole. *Toute secte, dit Voltaire, paraît le ralliement de l'erreur.*¹ On ne combat pas les préjugés par la seule raison. Quand l'esprit est courbé, combien il apparaît difficile de ne le rectifier que par des idées. De ce point de vue, couper la parole du Président en suspendant ses comptes *tweeter* et autres comme le décidèrent les géants du numérique eut plus d'impact bien que le procédé troublât ceux qui pensent que ce pouvoir aurait dû être exercé par l'Etat. Une délibération publique serait plus en droit de réguler la liberté que des entreprises privées.

Combattre le vertige, périodiquement alimenté en accéléré, par la raison, dût-elle se répéter, n'est pas une mince affaire. La stratégie consistant à mobiliser davantage le sentiment et les intérêts semble avoir été plus payante auprès de la partie du corps électoral qui n'a pas tendance à voter. Ce fut celle de l'ancien Président Obama qui sut éveiller l'attention des jeunes Noirs à aller voter. Ce fut aussi celle du candidat Biden qui sut parler à nouveau aux ouvriers et aux pauvres qui avaient été déçus par Trump. Le Président sortant avait trop confondu le fait de battre campagne périodiquement et le fait de gouverner qui exige recul et sérénité. Mal lui en a pris. Comme le dit un autre bel esprit des Lumières, le subtil La Bruyère,

*Ne songer qu'à soi et au présent, [est une] source d'erreur dans la politique.*²

⑥ Fut-ce suffisant pour assurer la défaite électorale de cet être « brut de décoffrage » qui occupait la Maison Blanche ? On peut en douter, tant son soutien demeurait vif et net, et constant, dans une grande partie de l'opinion. La santé florissante de l'économie et de l'emploi plaidait pour lui. Avant l'apparition de la Covid-19, il y avait de grandes chances qu'il soit réélu.

¹ Voltaire, *L'ingénu* [1767], op. cit., chap. 14, p.277.

² La Bruyère, *Les caractères* [1688], Des jugements, p.290.

Résumé LIV (suite)

L'électromagnétisme montre un phénomène d'impédance qui réunit deux résistances au passage d'un courant alternatif : la résistance classique, qui réagit au courant comme s'il était continu, et la réactance qui réagit à la fréquence propre à la composante alternative du courant. La résistance est exprimée par un nombre réel, car la tension aux bornes est en phase avec le courant (la résistance ne provoque pas de déphasage). La réactance, en revanche, est exprimable par un nombre complexe dont le module mesure l'amplitude et son angle le déphasage (i.e. la différence de phase entre les deux phénomènes alternatifs de même fréquence que sont le courant et la tension aux bornes).

Le danger fut d'autant plus réel que l'empire de presse, qui appartient à Murdoch, est toujours là pour appuyer ses dires et ses méfaits, via la chaîne de télévision Fox News. Grâce au documentaire d'Arte en Europe, intitulé *Murdoch, le grand manipulateur des media*, coproduit par la BBC, on apprend que Trump dut en fait son élection grâce aux manigances de cette télévision¹. Pendant la campagne électorale de 2016, Fox News l'interviewa après avoir lui avoir communiqué les questions. L'interview était truqué. Sans Murdoch, Trump n'aurait pu passer la rampe. Pendant le mandat de Trump, la chaîne s'employa à diffuser, en toute complicité, les fausses nouvelles divulguées par ce dernier. Elle leur donna plus de crédit.

C'est le même empire de presse qui contourna la loi anglaise sur les monopoles en rachetant plusieurs journaux et media. C'est lui qui empêcha l'entrée du Royaume-Uni dans l'euro, et qui fit le succès du Brexit, par ses tabloïdes comme *The Sun* et *New of the World* et ses relations étroites et douteuses avec les Premiers ministres de sa Majesté comme Tony Blair et Cameron. *The Sun* soutint également Boris Johnson dans sa volonté de rompre avec l'Union européenne. L'élite britannique, sortie d'Eton, n'a eu aucun scrupule à se laisser influencer.

Ce constat est d'autant plus désolant que le gouvernement et la police n'ignoraient nullement que ce groupe avait aussi mis sur écoute de nombreuses personnalités du monde politique et du showbiz qui ne pas partageaient ses vues. Certaines révélations gênantes les concernant parurent dans les journaux du groupe. Lors d'une audition à la Chambre des communes, la commission d'enquête qualifia de mafieux le comportement du magnat de presse qui fit semblant de faire amende honorable. Un tel contexte n'a pu que ternir fortement l'image d'un pays qui donna tant l'exemple à l'âge des Lumières sous le rapport du droit constitutionnel.

⑦ Il est à craindre qu'un tel empire de presse ne finisse, par son action, à désunir le Royaume-Uni en conséquence du Brexit. L'île risque d'être une étoile qui implose. Comme faiseur de roi et en cajolant l'élu sur le trône, Murdoch a réussi à dégrader autant le constitutionnalisme des Etats-Unis.² Les gens de ces deux pays qui admirent tant Shakespeare doivent entendre le pauvre Lear, déchu, gémir : *c'est le malheur des temps que les fous guident les aveugles*.³

Le virus fut le David qui terrassa Goliath.

La Covid-19 révéla la totale inaptitude de Trump à gérer la crise sanitaire. L'invitation à marcher sur le Capitole n'a pas arrangé les choses. Trump fut battu, non sans avoir, cependant, augmenté le nombre de ses « supporters ». Le 2^e procès en *impeachment* répondit à la nécessité du pays de ne pas fermer les yeux sur cet encouragement à la sédition contre d'autres autorités établies, mais ce procès donna à nouveau l'occasion à Trump de se poser en victime. Son acquittement en fit même un héros, pesant à nouveau lourd dans la politique.

Il faut espérer que ses outrances, malgré leur fréquence, soient beaucoup moins impactantes. La « réactance » institutionnelle et de l'opinion a jusqu'ici peiné à résister au flot oppressant. Les colères à répétition, les rumeurs, peuvent à nouveau plonger le pays dans l'amertume.

¹ <https://www.arte.tv/fr/videos/RC-020704/murdoch-le-grand-manipulateur-des-medias/>

² <https://theconversation.com/can-fox-news-survive-without-trump-in-the-white-house-155298>

³ Shakespeare, *Le roi Lear*, [1606], Acte IV, scène 1. *T'is the time's plague when madmen lead the blind.*

§62.^{bs}- OUVRIRE AUSSI LA LOGIQUE A D'AUTRES FORMES PERIPHERIQUES

(Résumé LV)

*Les mots qui vont surgir savent de mieux
ce que nous ignorons d'eux (René Char)*

- ① Le très dans le langage exprime l'idée que *le mieux est l'ennemi du bien* en droit constitutionnel.
- ② Un matroïde est une structure mathématique accordant une place centrale à la notion d'indépendance linéaire comme les vecteurs colonnes linéairement indépendants d'une matrice. La représentation de la séparation des pouvoirs par un triangle partage cette inspiration en raisonnant en termes de combinaison linéaire entre des pouvoirs indépendants. L'enchevêtrement d'espaces juridiques différents est manifeste dans le tracé d'un tétraèdre aplati. La notion de barycentre revient, à l'occasion, au premier plan.
- ③ Un sous-ensemble flou permet de graduer l'appartenance d'un élément à un ensemble. La théorie des sous-ensembles flous décrit également un tel enchevêtrement dont on a du mal à imaginer l'articulation. Paradoxalement, l'introduction en droit d'un pareil flou en clarifie le réseau d'ensemble sans en figer la construction. Les « acteurs » continuent d'y évoluer.

§62.^{ter}- OUVRIRE AUSSI LA LOGIQUE A D'AUTRES FORMES PERIPHERIQUES (Résumé LVI)

- ① Comme les flots de la logique booléenne pénètrent tant de domaines de la science nouvelle, comme la logique quantique continue, silencieuse, d'y mêler ses eaux souterraines, comme la logique bivalente, par son aspect bimodal, submerge le champ du savoir sous la même onde, ainsi s'agite et se structure pareillement le droit constitutionnel moderne en réponse.
- ② Nous ne reviendrons pas sur le narratif qui déploie de telles comparaisons. Elles nous paraissent avoir éclairci l'essentiel. Il n'y aura pas à proprement parler de conclusion. En revanche, le lecteur n'a pu manquer de remarquer, à nouveau, combien les diagrammes suggèrent et renforcent les rapprochements. Ces diagrammes, associés à des dialogues, n'ont pas pour but de créer des images obsédantes. Elles ne font que stimuler l'imagination pour qu'elle complète et fasse vivre les raisonnements sous-jacents. En le parcourant du regard, un diagramme fait penser.
- ③ Comme l'écrivait Ferdinand Gonseth, professeur de mathématiques à l'Ecole polytechnique fédérale de Zurich,

les idées de « schéma » et de « correspondance » servent de base à nos explications. Le plan d'une ville, par exemple, est un schéma, un schéma descriptif dont nous connaissons bien l'efficacité. S'agit-il d'une description parfaitement fidèle ? Non ! Vous n'y trouverez ni la flèche de la cathédrale, ni la boutique du marchand. Le plan renonce à tout décrire ; il choisit un certain nombre d'objets spécialement dignes d'attention ; les rues, les places, les églises, etc. et néglige le reste. La description qu'il nous donne est donc simplifiée, sommaire.

Rues, places, églises, etc. ne sont, d'ailleurs, indiquées que par des signes plus ou moins conventionnels, par des symboles qu'il faut savoir interpréter : la description est donc symbolique.

Un plan n'indique jamais tout. Mais, en principe, rien n'empêche de le compléter à volonté. Il est toujours inachevé.

Sommaire, symbolique, inachevé, ce sont les caractères essentiels de tout schéma.

Ce que le plan prétend décrire, la ville dans sa réalité propre, peut être appelé la signification extérieure du plan. Mais, considéré comme objet autonome, sans aucun égard à ce qu'il peut signifier, il possède également une certaine réalité propre : nous parlerons de sa structure intrinsèque.

Les lignes de tramway, par exemple, apparaissent sur le plan comme un réseau de lignes rouges. Rien n'empêche d'envisager celui-ci comme une figure de géométrie. à propos de laquelle on peut se poser et résoudre maints problèmes. Il est souvent utile de le faire. En raisonnant ainsi intrinsèquement dans un schéma, on le détourne de sa signification naturelle. C'est souvent pour y revenir plus tard avec plus d'efficacité.¹

¹ Ferdinand Gonseth, *Logique et philosophie des mathématiques*, Hermann, Paris, nle édit, 1998, chap.7, p.67. Nous soulignons.

§62. quater - OUVRIR AUSSI LA LOGIQUE A D'AUTRES FORMES PERIPHERIQUES (*Résumé LVII*)

① Les théories du droit du XX^e siècle ne sont nullement à la traîne, au regard des métathéories formelles conçues à l'époque, en mathématiques avec Hilbert, et en logique avec Gödel.

Celle de Kelsen sur la pyramide des normes est une théorie cohérente pour saisir la spécificité de la validité juridique. Les normes sont des règles ou des devoir-être. La pyramide en laisse paraître à tous les étages. La validité juridique ruisselle sur elles à partir de celle qui est qualifiée de *fondamentale*. Cette norme est présumposée par les acteurs du système juridique.

Celle de Troper déborde celle de Kelsen. Elle diversifie la pyramide des normes sous l'effet de l'interprétation des acteurs. Ces acteurs opèrent également à tous les niveaux. L'interprétation devient particulièrement impactante au sommet de l'édifice qui s'avère être à têtes multiples, « attendu » - sans qu'on s'y attende vraiment - que les trois pouvoirs constitutionnels sont davantage libres d'interpréter la Constitution, les lois et les décrets.

La théorie de l'interprétation de Troper est déjà réaliste de ce point de vue. Elle l'est d'autant plus que Michel Troper la complète par une théorie des contraintes juridiques qui permet de comprendre que la liberté d'interprétation n'est pas sans limites réelles. Les autorités constitutionnelles interagissent. Via leurs argumentations, appuyées au besoin par des forces politiques, elles sont tour à tour agissantes et contrariantes, ou indifférentes selon le sujet traité. Chacune a la maîtrise plus ou moins le tempo dans le cadre de butées mutuelles.

② Les théories du droit relèvent moins de la logique formelle que de la logique sémantique qu'ont exploré, également au XX^e siècle, le « second » Wittgenstein et Tarski. Wittgenstein identifia le sens et l'usage, et Tarski l'analysa sous l'angle de la logique extensionnelle. Cependant, même au plan sémantique, la validité logique n'est pas transmutable en validité juridique. La validité logique est la qualité d'une proposition, évaluée sur la base d'une « table de vérité », alors que la juridique n'est pas celle d'une simple norme ou règle. Elle est un devoir-être (un *tu dois*) qui découle de l'appartenance d'une norme à tout un système juridique.

Malgré ces différences, les propriétés de consistance, de complétude et d'indécidabilité, développées en logique formelle, conservent une pertinence dans l'étude du droit qui s'attache au sens, à la signification des énoncés qu'exprime leur énonciation ou interprétation.

③ Dans un cadre mathématique, le passage de la formalité au sens passe par la modélisation. *Le point de départ n'est pas un problème concret qu'on cherche à traduire en termes mathématiques. Non, la démarche part au contraire d'une abstraction pour découvrir quelle(s) réalité(s) elle modélise.*¹ Le modèle retenu discrimine les énoncés entre les vrais et les faux.

Si une proposition d'une théorie est « vraie » (ou vérifiée) *dans tous ses modèles*, alors elle est démontrable (ou déductible) dans la théorie. Celle-ci est *complète*. Le système logique de la théorie ne contient pas de propositions indécidables. C'est ce qu'affirme le théorème de complétude de Gödel. En revanche, selon le même théorème, une proposition d'une théorie qui s'avère vraie dans un modèle, et fautive dans un autre, est « indécidable » en ce 1^{er} sens.

Michel Troper n'a cessé d'illustrer sa théorie du droit par de multiples modèles dans l'histoire constitutionnelle anglaise, américaine et française de l'âge des Lumières à nos jours. Ces modèles ont pu mettre en évidence les fausses interprétations des doctrines dominantes.

④ Tout autre est le sens de l'indécidabilité du (second théorème d'incomplétude de Gödel. L'indécidabilité n'est pas tout à fait différente, mais radicalement renforcée. *En 1931, Gödel prouva dans un article fracassant, libérateur et destructeur, que même pour un fragment des mathématiques aussi pauvre que la théorie élémentaire des nombres, il était impossible de construire un système déductif complet.*² Il n'est plus question de vérité mais d'impossibilité.

¹ G. Godefroy, *Les mathématiques, mode d'emploi*, op. cit., chap.4 : De la logique avant toute chose, p.122.

² W.V. Quine, *Quiddités. Dictionnaire philosophique par intermittence [An Intermittently Dictionary of philosophy, 1987]*, Seuil, Paris, 1992, p. 229. *Intermittent* : qui s'arrête et reprend par intervalle.

Résumé LVII (suite)

Gödel a prouvé qu'aucun système d'axiomes, ou appareil déductif, ne pouvait englober toutes les vérités exprimables à l'aide d'une notion minimale numérotant chaque caractère typographique d'un système formel – chiffres, lettres, signes logiques, parenthèses - pour en fabriquer un nombre correspondant. Ce nombre, dit de Gödel, ne peut être décomposé que d'une seule manière en produit de facteurs premiers. Via ce codage arithmétique, ou gödelisation, l'énoncé d'un système formel affirme indirectement sa propre indémontrabilité.

⑤ L'étude du droit constitutionnel n'est pas en reste dans la formalisation. Il existe déjà une forme d'algébrisation de l'acte de concrétisation d'une norme. Y entreraient, selon Eric Millard, la personnalité du juge (P), les stimuli qu'il reçoit (S) et la norme ou règle en question (N). Nous avons cru bon de prolonger cette réflexion sur le modèle de la fonction de Cobb-Douglas en économie. Cette fonction, transposée en droit, décrirait la décision (D) d'un juge ou de toute autorité publique habilitée à interpréter le droit. Elle aurait pour expression :

$$D = P^\alpha \cdot S^\beta \cdot N^\gamma, \text{ avec } \alpha + \beta + \gamma = 1, \text{ ou plus précisément } D = k \cdot P^\alpha \cdot S^\beta \cdot N^\gamma,$$

k étant le coefficient d'ajustement entre la combinaison des facteurs de production et la décision D. Ce coefficient permet de tenir compte des particularités d'un droit positif donné.

⑥ Comme méta-énoncé, i.e. comme énoncé sur des énoncés, la théorie de Kelsen apparaît cohérente. Elle ne démontre pas à la fois un énoncé et sa négation. Elle est, en d'autres termes, consistante ou non contradictoire. La théorie est à même d'expliquer la validité juridique qui s'écoule en cascade d'une norme fondamentale supposée aux normes les plus individuelles. La fondamentale est elle-même logiquement justifiée par *une méthode de descente infinie* qui consiste à déduire, de toute solution, une autre solution qui soit strictement plus petite, et ce jusqu'à épuiser toutes les solutions possibles. On aboutit à une contradiction, car il n'existe pas une « suite » de validités juridiques infiniment décroissantes. La théorie de Kelsen prouve par l'absurde l'absence de solutions. Ultime et une, la norme fondamentale arrête la descente.

La théorie de l'interprétation réaliste de Troper se révèle être un métalangage qui enveloppe celui de Kelsen dans une boîte où l'indécidable chez Kelsen devient décidable chez Troper.

La conception de Kelsen que l'interprétation porte sur des normes repose sur *une confusion entre, d'une part, un texte (ou, plus précisément, un fragment de texte, un énoncé) et, d'autre part, une norme. Or, l'interprétation ne peut porter que sur un énoncé.* Car interpréter, c'est déterminer la signification de quelque chose, non la signification prescriptive d'une norme qui préexisterait au sens, mais le sens de l'énoncé que l'on se fait de cette norme. Il appert effectivement qu'un même texte peut faire l'objet de plusieurs significations. Un texte peut donc exprimer plusieurs normes. C'est l'interprétation qui dicte la norme, et non le contraire.¹

La validité juridique, perçue par Kelsen, donne l'illusion de ruisseler de façon « continue » d'un étage à l'autre de la pyramide. Il n'y aurait ni lacune ni rupture. Les interprétations des organes habilités comme celles des juges, les agences, des administrations, rentreraient toutes dans le rang. Or, au gré de l'interprétation, certaines ne cadrent pas toujours dans le système. Elles émergent, sans nécessairement correspondre aux intentions « cachées » du législateur. Elles risquent donc d'être perçues comme rétives, rebelles, presque « hors la loi ».

D'où l'apparition de bifurcations, voire des discontinuités dans l'interprétation dominante. Des bifurcations, au sein par exemple de la jurisprudence. Des discontinuités, quand on pense par ex. à l'interprétation, qui souleva des vagues en 1962, de l'art. 11 de la Constitution de 1958 par de Gaulle pour permettre l'organisation d'un référendum sur l'élection du Président au suffrage universel direct. L'art. 89 pour réviser la Constitution était, hurlera-ton, court-circuité.

Sous ce rapport, nous pourrions comparer, ce que nous n'avons pas fait dans le corps du texte, l'extension du champ de la validité juridique, entrevue par la théorie de l'interprétation, au passage en mathématiques des fonctions continues à celles de fonctions plus générales. Les premières répondaient à l'adage *la nature ne fait pas de saut*, comme disait Leibniz, tandis que les secondes seront appelées à tenir compte, dans le profil de leurs courbes représentatives, d'éventuelles coupures, d'un effondrement, d'explosions et d'autres effets.

¹ M. Troper, *La philosophie du droit*, op. cit., pp.105-106 ; *Pour une théorie juridique de l'Etat*, op. cit. chap.5 : La théorie de l'interprétation et la structure de l'ordre juridique, p.87.

Résumé LVII (suite)

Gödel a prouvé qu'aucun système d'axiomes, ou appareil déductif, ne pouvait englober toutes les vérités exprimables à l'aide d'une notion minimale numérotant chaque caractère typographique d'un système formel – chiffres, lettres, signes logiques, parenthèses - pour en fabriquer un nombre correspondant. Ce nombre, dit de Gödel, ne peut être décomposé que d'une seule manière en produit de facteurs premiers. Via ce codage arithmétique, ou gödelisation, l'énoncé d'un système formel affirme indirectement sa propre indémontrabilité.

La théorie des contraintes juridiques complète cette description d'une validité juridique qui fait irruption, sans crier gare, hors des lieux qui devaient la cantonner. La liberté d'interprétation n'est pas infinie, mais relativement bornée. Outre les limites qui tiennent au caractère collectif de l'interprétation, l'exigence de cohérence des interprétations s'impose à ces autorités, particulièrement à celle qui coiffe l'activité judiciaire. La cohérence et la constance de ses arrêts prennent souvent le pas sur les préférences des juges au risque sinon de dérouter les autorités concurrentes et l'opinion. Cette contrainte, ajoutée aux rapports de forces entre ces autorités, explique que les revirements de jurisprudence soient assez rares.

⑥ Rien n'interdit toutefois qu'une nouvelle théorie du droit englobe aussi à l'avenir la théorie tropéenne. Le second théorème d'incomplétude de Gödel en donne la raison formellement. On sait, par ce théorème, que l'absence d'autocontradiction est impossible à démontrer. Une théorie et incapable de prouver sa propre cohérence. Ami de Gödel avec qui il se lia d'amitié à Princeton, où l'un et l'autre trouvèrent refuge, Einstein aurait traduit, en évoquant la physique, clairement la quintessence de ce théorème :

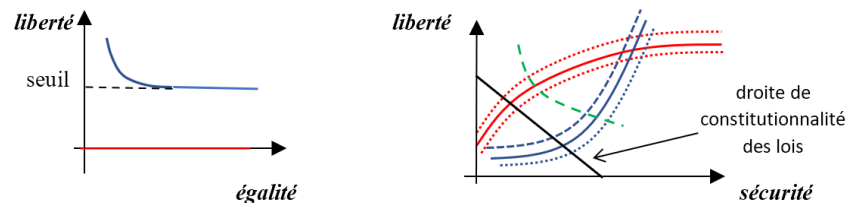
*No problem can be solved from the same level of consciousness that created it.*¹

⑦ Dans l'attente (illusoire) d'une solution définitive, la théorie du droit ne vit pas que dans la chimère. Le flambeau des Lumières n'est pas éteint ou devenu pâle pour autant. Des logiques analogues, qui ont fait jusqu'ici leur preuve, viennent conforter la description réaliste du droit.

Une logique de situation comme la théorie des jeux, enrichie par une théorie plus fine des joueurs, montre comment le jeu de l'interprétation en droit éclaire, on ne peut mieux, le fonctionnement réel du droit constitutionnel. Un jeu d'échecs, plus sophistiqué que l'habituel, prend en compte, non seulement les règles constitutives, non seulement les situations possibles, mais aussi les requalifications des pièces tant l'interprétation paraît souveraine.

Une logique de structure appuie aussi la théorie du droit, quand celle-ci entend au surplus mettre en lumière des contraintes qui s'imposent tout de même à l'interprétation des autorités, hautement placées. Des contraintes plus invisibles viennent renforcer les contraintes argumentatives et interactives. On ne retiendra ici que la (pseudo-) structure de groupe algébrique des droits fondamentaux des Lumières qui continue d'agir pour faire respecter la prévalence de la liberté sur l'égalité à l'instar de celle de la liberté sur la sécurité.

La combinaison de la liberté et de l'égalité, comme celle de la liberté et de la sécurité, fait penser en premier à une hyperbole dans le plan objectif des biens. En premier jet seulement, car il convient d'introduire dans ce plan la droite de constitutionnalité des lois qui joue le rôle, à adaptation près, d'une droite budgétaire en économie. Ici encore, la courbe ne renvoie pas à une fonction continue : *un effet de seuil* apparaît, lorsque le législateur éventuel entend par ex. ne pas trop baisser le niveau de la liberté. En outre, une cour suprême, si elle est instituée et ose en plus assumer sa fonction de gardienne de la Constitution, peut exiger, dans toute loi, la sauvegarde d'un minimum de liberté, tant au regard de l'égalité qu'au regard de la sécurité.



(fig. de gauche : la courbe d'indifférence se heurte à un effet de seuil, à la différence d'une hyperbole et de son asymptote qui ne se rencontrent dans aucune région finie du plan, mais « convergent » vers l'infini dans la même direction²; fig. de droite : la pente de la droite de constitutionnalité varie suivant l'enjeu et le droit en cause)

¹ <https://www.quora.com/Did-Albert-Einstein-ever-say-write-that-We-cant-solve-problems-by-using-the-same-kind-of-thinking-we-used-when-we-created-them-If-so-where-and-when-did-he-say-write-so>

² Alexandre Moatti, *Les indispensables mathématiques et physiques pour tous*, Odile Jacob, Paris, 2006, p.72.

Résumé LVII (suite et fin)

⑧ Un instant de répit et de sagesse, pour ceux qui ont l'impression d'avoir été assommés par le second théorème de Gödel.

Ce théorème énonce, répétons-le, qu'on ne peut pas démontrer, à l'intérieur de l'arithmétique, que l'arithmétique ne contient pas de contradiction. Cette formulation a toutes chances d'être applicable à toute autre théorie qui se veut cohérente, y compris celles qui étudient le droit constitutionnel.

Proposons aux anxieux qui attendent une réponse définitive à leur inquiétude de vivre, une histoire yiddish, telle que rapportée par l'écrivain Elie Wiesel :

Dans un petit village juif d'Europe centrale et de Russie d'autrefois [shtetl], un jeune homme épuisé vient confier sa peine à son rabbin : il n'en peut plus et songe à en finir avec la vie. Le rabbin lui répond : mourir n'est pas une solution ! L'adolescent poursuit : « Bien, Rabbi, mais alors comment dois-je vivre ? » La réponse vient : Vivre n'est pas une solution ! » Le jeune homme, interloqué, dit enfin : « Rabbi, je ne comprends pas, quelle est donc la solution ? » Et le rabbin de conclure : « Mais qui te dit qu'il y a une solution ».¹

Pauvres de moi, ou pauvres de nous, s'écrieront les insatisfaits. Il n'y a donc pas de monde idéal auto-suffisant qui compenserait, ici-bas, un monde réel où opèrent souvent des faux-semblants. Ah, comme les gens de peu, et les « hommes de conséquence », se ressemblent ! Les Lumières exigent par définition la lucidité. Il n'y a ni vérité, ni liberté, sans elle. Il faut s'en remettre. Les Lumières se disputent toujours avec l'ombre, sans être une lumière sombre.

Est-ce qu'on peut dire tout ce qu'on sent ? Ceux qui le croient ne sentent guère, et ne voient pas apparemment que la moitié de ce qu'on peut voir.²

¹ cité in G. Godefroy, *Les mathématiques, mode d'emploi*, op. cit., p.124.

² Marivaux, *Le paysan parvenu*, op. cit., 3^e partie, p.201.

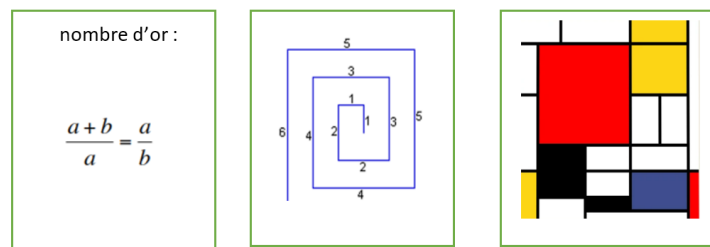
§63.- DECELER LE NOMBRE D'OR EN DROIT CONSTITUTIONNEL

(Résumé LVIII)

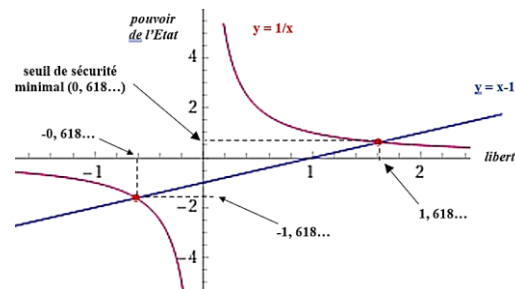
① Qu'il est dangereux et bizarre de soupçonner la présence du nombre d'or partout, et encore plus singulier d'y attacher une valeur magique ou sacrée ! Soit on y croit, soit on n'y croit pas, il n'y aurait pas d'autre voie. Les uns ignorent les mathématiques du nombre d'or, les autres lui accordent une trop haute idée en espérant que sa réalisation dépasse son observation limitée.

Nous ne tombons, ni dans le premier travers, ni dans le second. Notre thèse ne cherche nullement à se remplir d'une religieuse ferveur. Il nous semble cependant que la notion, au moins virtuelle, du nombre d'or peut se poser en droit quand on pense les rapports entre la sécurité et la liberté. Le droit des Lumières est né de l'inquiétude d'ajuster de tels rapports.

Il est inutile de répéter ce que nous en avons assez dit au cours des premières pages. On retiendra simplement la définition du rapport $(a+b)/a = a/b$, de son approche par la suite de Fibonacci 1, 2, 3 5, 8, ..., et l'effet du nombre d'or dans un tableau de Mondrian peint en 1921.¹



Contempler un tel nombre n'implique pas d'y mêler un mysticisme et un subjectivisme faciles, mais il est étonnant que ce nombre puisse idéalement jouer un rôle en droit constitutionnel, ainsi que le suggère la figure suivante combinant deux fonctions mathématiques :



Suivant Hobbes et les philosophes des Lumières, la conservation de la liberté dans un climat de sécurité est l'aiguillon et la tâche première du constitutionnalisme moderne. Il existe, en théorie, un point où la balance entre ces deux droits atteint dans l'Etat un équilibre idoine. En pratique, les régimes libéralisés ne peuvent que s'efforcer d'y tendre..., tel Sisyphe, dans la pensée grecque, poussant une pierre, au sommet d'un rocher, qui finit toujours par retomber.

② Pour tâcher d'y tendre indirectement, un tétraèdre constitutionnel, dont les faces représentent les quatre droits fondamentaux de la Déclaration française des droits de l'homme de 1789, peut se « topologiser » en une boule fermée et en un fuseau convexe pour convertir ces droits naturels en droit positif.

Ces droits sont la liberté, l'égalité, la propriété et la sécurité.

La « boule » serait la société civile, et le fuseau l'Etat moderne, plus allongé et endurci pour pénétrer le réel. La mise en œuvre est possible grâce à la transformation du tétraèdre en son dual orthogonal. C'est cette mutation qui finit par donner au tétraèdre son aspect fusiforme. La société civile devient ainsi, par l'Etat, plus « armée » pour répondre au besoin de liberté de chacun en assurant en même temps à tous la sécurité. On pensera, à nouveau,

¹ <http://www.mathematische-basteleien.de/spiral.htm> ; <https://sites.google.com/site/boiteamaths/ressources-eleves/le-nombre-d-or>

Résumé LVIII (suite)

à la liberté religieuse, et à celle corrélative du culte, permises par le maintien de l'ordre public.

Peut-être que le tétraèdre constitutionnel des quatre droits fondamentaux ne suffit-il pas à combler les vœux des individus devenus, par le biais de l'Etat rénové, des sujets de droit. Peut-être est-ce aussi nécessaire d'y ajouter, comme les penseurs du droit y ont songé, le droit de résister comme ultime recours. Un pentaèdre peut compléter le tétraèdre. Aux quatre droits précités, il faut adjoindre le droit de dire non, si le Léviathan se révèle trop monstrueux. Le chef de l'Etat peut être « hors de lui », malgré le contrat social et la division des pouvoirs.

Le tétraèdre et le pentaèdre, assimilables par déformation à une sphère topologique, apparaissent en droit constitutionnel des matroïdes en évolution. Cette diagrammatisation montre à nouveau que tout n'est pas ineffable au royaume du droit qui règle l'Etat. Des dessins, fussent-ils abstraits, puisés dans la géométrie et la théorie des graphes, peuvent apporter une fraîcheur, et une clarté inconcevable, à des analyses littéraires qui brouillent parfois la lucidité du chercheur. A trop demeurer dans le détail, on en épuise vite la finesse.

Une image, dynamisée par des flèches en mouvement, et par le passage continu d'une forme dans une autre, vaut encore mieux qu'une simple image qui vaut déjà mille mots.

③ C'en est trop sans doute si on ambitionne aussi d'y trouver des caractéristiques invariantes comme celle d'Euler applicable aux polyèdres convexes : $S-A+F=2$, dont la formule sera généralisée par Poincaré. Ce serait une si belle occasion de lever l'obscurité du secret, sinon de la pérennité des institutions nouvelles, du moins de leur longévité.

Ne semblent-elles pas avoir tenu le coup malgré de si nombreux vents contraires ? Les institutions américaines, érigées en 1787, ont accusé le choc malgré une violente guerre civile au milieu du XIX^e siècle ; la République française a résisté depuis 1875 au scandale de l'affaire Dreyfus, au déclenchement de la 1^{re} guerre mondiale, aux suites de la crise de 1929, à la 2^e guerre mondiale et à l'Occupation, enfin aux guerres coloniales.

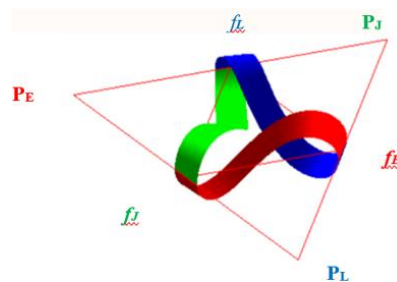
Un Etat est plus qu'une carapace pour protéger la société et agir. Il lui faut aussi une ossature.

Il est peu sûr cependant que la caractéristique d'Euler puisse être transposée en droit constitutionnel pour espérer y trouver la clé qui contribuerait à en expliquer l'endurance. Nous en avons proposé une illustration sans beaucoup de conviction. On dira que c'est du rafistolage plutôt qu'une secrète merveille. Entre l'indulgence trop aimable (y compris la sienne) et l'extrême sévérité (qui peut sévir autant en soi-même), il existe peut-être une idée qui fera son chemin. Des pistes s'ouvriront, ou on en démontrera la nature trompeuse. Comme l'écrivit Chateaubriand, que je cite à décharge sans augmenter en moi une consolation:

*Cependant qu'avais-je appris jusqu'alors avec tant de fatigues ?
Rien de certain parmi les anciens, rien de beau parmi les modernes.*

*Le passé et le présent sont deux statues incomplètes :
l'une a été retirée toute mutilée des âges ; l'autre n'a pas encore reçu sa perfection de l'avenir.¹*

Dans cette exploration où l'on s'est peut-être agité pour rien, nous avons toutefois posé le pied sur un terrain fertile : celui du triangle équilatéral dont les sommets représentant en mémoire les trois pouvoirs législatif, exécutif et judiciaire. La tricoloration des fonctions étatiques principales correspondantes n'est pas seulement reliée par un nœud de trèfle que l'on peut inscrire dans un triangle. La tricoloration s'affiche sur une bande de Möbius.



¹ Chateaubriand, *René* [1802], Gallimard, Paris, 1971, p.151.

Résumé LVIII (suite et fin)

Cette surface non orientable illustre l'idée que ces fonctions sont en tension autant que les pouvoirs qui les exercent à titre principal. L'une tire dans un sens, en matière par ex. d'interprétation des lois, tandis que les deux autres tirent chacune dans leur propre direction.

④ Le tétraèdre constitutionnel est en mouvement, ou plutôt en variation de mouvement, pour penser comme Galilée attentif au changement de mouvement par rapport au mouvement inertiel. L'application de la théorie des matroïdes aide sans conteste à en saisir leur complexité croissante. Cette étude ne décompose pas seulement les objets en éléments plus simples (le droit naturel en droits fondamentaux, l'Etat en pouvoirs constitués). Elle rend aussi plus intelligible certaines métamorphoses du droit constitutionnel en exhibant différentes formes.

En deçà cependant, gît un autre objet qui bouscule et alimente le 1^{er}. La volonté générale est un bruit de fond, susceptible de devenir une lame de fond instable et des plus rebelles. Ses manifestations sont évanescentes, et toujours renouvelées, quoique très épisodiquement.

Le mouvement des gilets jaunes en France en 2018-2019 en fut une lame récente. Elle semble s'être déroulée, malgré son irruption abrupte, et son évolution désordonnée, selon un schéma quasi-mathématique. Une sinusoïde amortie, qu'approche la fonction $y = (\sin x)/x$, ainsi qu'un processus de surenchères inversées, en éclairent la phénoménologie, sans prétendre en justifier ou en condamner les raisons. Ce qui a manqué à un pareil mouvement, c'est un raisonnement en *treillis* qui aurait introduit, dans les actions et les idées, une relation d'ordre.

⑤ Aurait-il réussi, la volonté générale qui l'emportait, si partielle fût-elle au regard de celle du pays entier, aurait débouché sur des axes de revendication comme dans une analyse en composantes principales. Ces axes auraient pu être une base de discussion avec le pouvoir en place afin d'accommoder le droit positif existant à des réalités vécues autrement. Il est toutefois facile d'accabler le gouvernement. A-t-il pris trop à la légère ces préoccupations, ou était-il soumis à des priorités plus pressantes ? Le distinguo est difficile.

Il demeure que la volonté générale ne saura jamais se réduire à un quelconque droit positif, même en voie de réformation. La volonté générale est une « boule » ouverte. La notion de boule généralise la notion de sphère qui peut ne pas être ronde, et être même un cube. Par ex., en \mathbb{R}^2 , la sphère peut avoir l'une des trois allures suivantes (la boule ouverte est la partie verte, sans son contour). Une boule ouverte ne connaît pas, en toute direction, de frontière.



La volonté générale ne peut que rendre instable, à l'occasion, la bordure du droit public, enserré dans des limites définies. Des volitions semi-existantes, respirant à peine à l'état virtuel, en sont exclues. La parole des dirigeants et leurs programmes éventuels ne pourront jamais assouvir sa force d'évocation qui détonne comme un poème effervescent. Sa capacité de suggestion est sans pareil. Son souffle, son « âme », oserait-on dire, incite le droit constitutionnel à ne pas s'assoupir ou à se reposer sur ses lauriers. Ils risquent de s'enflammer.

La volonté générale est une boule ouverte multidimensionnelle, tant les dimensions du droit foisonnent au cours du temps. Son être est comme le soleil dans l'allégorie de la caverne Platon. Les hommes, plongés dans le droit positif, ne voient que les ombres des objets du monde que le soleil « projette » sur les murs de leur caverne.¹ Comme si un objet en 3D se rapetissait en 2D sur une feuille en papier, tel un code des lois, ou une jurisprudence relatée sur un grimoire incompréhensible aux non-initiés. Ce n'est pas seulement une question de géométrie projective. C'est une vision sociale qui se projette dans l'espace-temps du droit.

Tout est pesé, tout a un prix, en ce bas monde. Tout est analyse en pleine lumière, ce qui est un progrès par rapport aux ténèbres nourrissant les superstitions et les doctrines délétères. On ne pourra jamais changer une vie de tristesse et de larmes en une vie de joie et de bonheur, mais, comme l'écrivait en prison un penseur marxiste non stalinien, Antonio Gramsci,

*le pessimisme de l'intelligence ne doit pas desservir l'optimisme du cœur et de la volonté.*²

¹ Platon, *La République*, VII, 514 a - 519 e, Pléiade, p.1101 et suiv.

² Antonio Gramsci, *Cahiers de prison*, Lettre à son frère, le 19 déc. 1929, Gallimard, Paris, 1978-92

§65.- L'EXPERIENCE DE PENSEE MODERNE (Résumé LIX)

① - Le *contrat social* ? Peuh ! Des balivernes. Une hypothèse de philosophie politique que l'on voudrait nous faire prendre pour une démonstration en droit constitutionnel ! Les sciences humaines sont plus averties. Elles partent du terrain sans divaguer dès le départ.

- Réponse de Claude Lévi-Strauss, plus pénétrant et circonspect que cette position a priori :

On aimerait pouvoir montrer l'appui considérable que l'ethnologie contemporaine apporte aux thèses des philosophes du XVIII^e siècle. Sans doute, le schéma de Rousseau diffère-t-il des relations quasi contractuelles qui existent entre le chef et ses compagnons. Rousseau avait en vue un phénomène tout à fait différent, à savoir la renonciation, par les individus, à leur autonomie propre au profit de la volonté générale.

Il n'en reste pas moins vrai que Rousseau et ses contemporains ont fait preuve d'une intuition sociologique profonde quand ils ont compris que des attitudes et des éléments culturels tels que le « contrat » et « le consentement » ne sont pas des formations secondaires, comme le prétendaient leurs adversaires et particulièrement Hume : ce sont les matières premières de la vie sociale, et il est impossible d'imaginer une forme d'organisation politique dans laquelle ils ne seraient pas présents

[...]

A Rousseau, nous devons de savoir comment, après avoir anéanti tous les ordres, on peut encore découvrir les principes qui permettent d'en édifier un nouveau.¹

Lévi-Strauss accorde sans doute trop à Rousseau le mérite de la distinction entre état de nature et d'état de société, mais quand on voit les incompréhensions dont Rousseau, plus que d'autres, fait l'objet, on comprend que l'ethnologue veuille rétablir la balance et honorer une pensée hors pair à l'époque.

- Mais, pour ce philosophe, l'homme n'est-il pas né naturellement bon et l'ordre social n'a-t-il pas dévoyé cet état en corruption ?

- Réponse à nouveau de Claude Lévi-Strauss : Jamais Rousseau n'a idéalisé l'homme naturel au point de croire qu'il aurait réellement existé en dehors de la société.

Il sait [comme les autres théoriciens du contrat social] que ce dernier est inhérent à l'homme, mais il entraîne des maux : la seule question est de savoir si ces maux sont eux-mêmes inhérents à l'état. Derrière les abus et les crimes, on recherchera la base inébranlable de la société humaine. [...] Rousseau pensait que le genre de vie que nous appelons aujourd'hui néolithique en offre l'image expérimentale la plus proche. Je suis assez porté à croire qu'il avait raison. Au néolithique, l'homme a déjà fait la plupart des inventions qui sont indispensables pour assurer sa sécurité.

[...]

La pensée de Rousseau, toujours en avance sur son temps, ne dissocie pas la sociologie théorique de l'enquête au laboratoire ou sur le terrain, dont il a compris le besoin. L'homme naturel n'est ni antérieur, ni extérieur à la société. Il nous appartient de retrouver sa forme immanente à l'état social hors duquel la condition humaine est inconcevable, donc, de tracer le programme des expériences qui « seraient nécessaires pour parvenir à connaître l'homme naturel » et de déterminer « les moyens de faire ces expériences au sein de la société ».²

¹ Cl. Lévi-Strauss, *Tristes tropiques*, op cit., chap.29, p.374. Nous soulignons.

² *Ibid*, chap.38, p.470. Les crochets sont nôtres.

Résumé LIX (suite)

② Rousseau ne se réfère pas qu'à « l'homme du néolithique ». Il mentionne aussi, dans l'*Emile*, Robinson Crusoé, ce héros mythique romanesque dans lequel les individus, aspirant à se libérer, se reconnaissent. Robinson est isolé dans son île, comme si la une société était mise entre parenthèses. La description des expériences qu'il entreprend démontre qu'il est apte à survivre seul. Il est donc capable d'endosser, quelle que soit son origine dans la société, des responsabilités économiques et politiques.

Cette dénaturation de l'homme naturel en citoyen est l'effet d'une double symétrisation par rotation et réflexion en laquelle consiste le contrat social. Cette composition de mouvements de pensée peut être figurée par une surface minimale sans bord rappelant celle de Gergonne.

③ L'originalité de Rousseau ne réside pas réellement dans l'idée de contrat social. Cette idée, en germe chez Grotius, sera développée chez Hobbes puis Locke. Son contrat, pas de volonté générale qui en sort. Comme l'écrit Hegel, *Rousseau a le mérite d'établir à la base de l'Etat un principe [...] qui est de la pensée, et même est la pensée, puisque c'est la volonté.*¹ Entendons, une pensée et une volonté collective qui est plus qu'une simple réunion d'ensemble. Elle est inaliénable par quiconque, et concevable comme un ouvert topologique qui n'admet pas de frontière. Tout le monde a droit d'y participer, aussi discret et faible qu'il paraisse, car cette volonté ne saurait exclure, comme pourrait le penser Hegel, la pensée et volontés individuelles. La volonté individuelle appelle la générale et la générale l'individuelle.

La conception de Rousseau, cependant, glorifie l'universel sans universalisme. Elle révèle la difficulté créée par la volonté générale qui ne s'en tiendrait qu'aux droits d'un homme non situé. Après avoir déterritorialisé la volonté générale qui appartiendrait à un groupe déterminé, après avoir scindé toute interaction entre individus, fussent-ils nouveaux dans la société, Rousseau sent la nécessité de ré-territorialiser la volonté générale pour qu'elle devienne un ensemble semi-ouvert, et non complètement ouvert au monde et à tout venant.

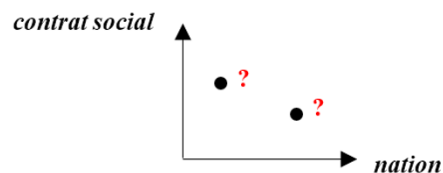
Le groupe social doit être « borné » par certains côtés, sans l'être au sens psychologique.

La volonté générale, certes, ne peut pas être figée et immuable, mais elle ne peut pas non plus se déformer et se distendre sans fin. Pour Rousseau, elle doit se recentrer pour demeurer quelque peu « nationale ». Il y a risque sinon que le pays où elle fleurit ne se délite, perde sa spécificité, et finalement sa souveraineté (la compétence des compétences, *Kompetenz-Kompetenz*, pour reprendre une expression du juriste Georg Jellinek déjà cité en *Introd.gle*).

Qu'une nation soit chrétienne ne suffit pas non plus pour être une. *Elle manquerait de liaison*, écrit Rousseau. Or une déliaison trop forte diluerait l'intérêt commun.

En termes philosophiques, la volonté générale, dans le prolongement de la conception de Rousseau dans laquelle nous mêlons la nôtre, doit, à l'instar de la pensée moderne, pouvoir continuer de s'ouvrir à la « contingence ». Les choses peuvent toujours être autres qu'elles ne sont. Les choses humaines paraissent encore moins inertes. Ce sont des individus peu visibles, ou à venir, bref toute une multiplicité de singularités, qui viennent en permanence contester tout consensus, à peine serait-il séché sur le papier ou gravé dans les mentalités. Advient une intrusion de l'ailleurs, Rousseau ose ouvrir la porte. Il n'est pas contre une certaine instabilité, à ce qui est inattendu ou repoussé, mais il voit aussi les dangers d'une trop grande altérité qui met en danger la cité, si rien ne vient réduire l'embrasement du dehors.

Il existe donc une tension aigüe, chez ce philosophe, entre le contrat social, accouchant d'une volonté générale accueillant tout le monde, et la nation, soucieuse de préserver son identité face ce qui pourrait la dissoudre. Cette tension est devenue encore plus vive aujourd'hui, à l'heure du dérèglement climatique et des Etats voyous, ou faillis, qui font fuir leur population. Entre l'ouvert et le fermé, il convient de trouver un compromis, variable suivant les cultures et les traditions :



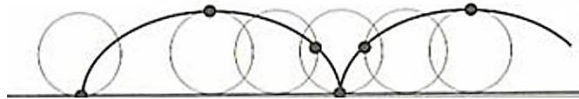
¹Hegel, *Principes de la philosophie du droit*, op. cit., §258, p.272).

Résumé LIX (suite)

④ Cette friction entre l'altérité et l'identité participe d'un va-et-vient entre la violence et la résistance. Le spectre de la violence va de la brutalité à la violence plus policée d'un affrontement qui n'aboutit pas au spectacle où l'humanité en vient à verser du sang. La violence est un écart, un pas de côté, qui bouscule l'ordre établi, social ou intellectuel, à tort ou à raison. La résistance, elle, est autant créatrice que conservatrice, voire réactionnaire.

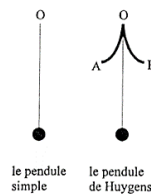
Il nous semble que cette dialectique participe elle-même à une forme d'action-réaction dont l'égalité n'entraîne pas nécessairement une égalité de puissance comme en physique newtonienne. (Le principe d'égalité entre l'action et la réaction entre une grande masse et une petite n'exclut pas que la grande masse entraîne, dans son propre mouvement, la petite.)

La dialectique de la violence et de la résistance a vocation à se répéter *ad vitam aeternam*. En simplifiant outrageusement le propos (qui est une façon d'en filtrer la clarté), ces allées-et-venues peuvent être imagé par une figure de pensée qui a attiré la curiosité de grands savants des Lumières, dont Huygens. Il s'agit d'une courbe, la cycloïde, que l'Encyclopédie de Diderot et de d'Alembert définit comme suit : *Elle est décrite par le mouvement d'un point A de la circonférence d'un cercle, tandis que le cercle fait une révolution sur une ligne droite. Quand une roue de carrosse tourne, un des clous de la circonférence décrit dans l'air une cycloïde.*¹



Galilée pensait que cette courbe serait la plus robuste pour construire un pont.² Ses propriétés ont surtout été exploitées au cours du XVII^e siècle pour tenter d'améliorer la justesse des horloges. On lit à nouveau, au siècle suivant, dans la même Encyclopédie :

*Si l'on veut qu'un pendule fasse des vibrations inégales en des temps exactement égaux, il ne faut point qu'il décrive des arcs de cercle mais des arcs de cycloïde. Si l'on développe une demi-cycloïde, en commençant par le sommet, elle rend par son développement une autre demi-cycloïde semblable et égale, et l'on sait quel usage M. Huygens fit de des demi-proprétés pour l'horlogerie.*³



Ce sont ces *propriétés singulières* (sic) de régularisation par d'autres arcs de cycloïde qui permettent à cette courbe de se déployer sans sortir de l'ornière. Son évolution est effectivement celle d'une roue qui tourne comme un cycle qui se déplace le long d'une trajectoire. Une telle évolution fait de la cycloïde, à nos yeux d'aujourd'hui, le modèle idéal du cycle violence-résistance observable dans le fonctionnement du droit constitutionnel moderne. Ce cycle est contrasté à chaque rebond, comme si, à une période de dilatation, succédait une période de contraction, et inversement.

Cet aller-retour, dans le temps, d'un blocage et d'un déblocage est manifeste autant en droit positif que dans le savoir. Nous parlions à propos de Rousseau de sa réticence à ouvrir trop les vannes. Comment aurait-il réagi, de nos jours, devant le déplacement de larges populations au plan international ? Face à un pareil afflux, réel et en partie imaginaire (certains parlent d'*invasion* et de *grand remplacement*), on peut subodorer qu'il aurait pensé que l'autorité nationale doit chercher, autant que possible un équilibre entre les droits de l'homme, dont le droit d'asile, et le souci de ne pas inquiéter, outre mesure, le pays d'accueil. Une balance est à trouver entre la venue des « étrangers » en danger dans leur patrie et le sentiment de peur des autochtones d'être submergés. L'enjeu est d'éviter une réaction « droitiste » extrême qui ferait basculer l'opinion à refuser la moindre hospitalité, voire à chasser tout « immigré ».

¹ Encyclopédie de Diderot et de D'Alembert, art. « cycloïde », t.4, Paris, 1954, p.590. L'article a été écrit par d'Alembert.

² <http://villemin.gerard.free.fr/Construc/Cycloïde.htm>

³ Encycl. de Diderot et ..., art. « cycloïde », p.590 : André Stell, *La cycloïde*, <https://numerisation.univ-irem.fr/ST/IST95025/IST95025.pdf>

Résumé LIX (suite)

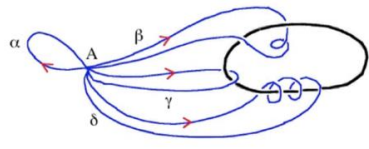
Le rythme plus ou moins cadencé entre, au fond, deux pas en avant et un pas en arrière n'est pas sans relation avec les rythmes fondamentaux de l'existence. Comme l'écrivait à la fin du XVIII^e siècle la peintre Elisabeth Vigée Lebrun : *sans ce court et léger repos, dont j'ai conservé l'habitude, je n'existerai pas.*¹ Un désir de vivre qui s'effrite un jour en nous revient souvent le lendemain matin. Ces exemples peuvent faire sourire, tant ils sont anodins. Ils peuvent même subir la critique, car ce cycle générique, qu'on évoque trop facilement, *ça marche en petit temps, mais ça ne marche pas toujours en gros temps.*

Le constitutionnalisme moderne n'est pas dépourvu de dispositions qui le rendent apte à affronter la tempête. Il arrive, toutefois, que la roue dérape comme celle de la fortune. Nous ne sommes pas qu'en mathématiques, mais dans la vie réelle moins parfaite. Les outrances, du côté de la violence comme de la résistance conduisent, au sein d'un même pays, à des outrages et à des actes difficilement réparables. Il faut attendre, malheureusement, que le feu de l'incendie s'éteigne pour reconstruire ce qui a été dévasté en ville et dans les campagnes. Les familles, tirillées, ont éclaté de tous côtés. Les gens se sont entretués. La mémoire collective s'est fracturée. Il n'y a plus de cycle, même irrégulier. Tout est désolé, aplati.

⑤ D'autres figurations dynamiques aident également à éclairer le droit des Lumières et ses suites jusqu'à l'heure actuelle. La théorie des nœuds a encore des choses à dire puisque la balance des pouvoirs, initiée au XVIII^e siècle, se révèle être une balance borroméenne avec pour effet d'auto-stabiliser le système institutionnel. La liberté politique demeure la direction privilégiée, nonobstant les tiraillements des trois pouvoirs suivant leurs propres directions.

On peut parler à juste titre, à cet égard, d'un effet gyroscopique constitutionnel qui fait équilibre à beaucoup de dérives qui menaceraient, au sein du pouvoir d'Etat, une telle liberté.

⑥ La théorie des jeux permet aussi de contempler visuellement, dans l'espace complémentaire des nœuds, des classes d'homotopie interprétatives. L'on y passe d'une interprétation à une autre de façon continue, sans rupture, comme on étirerait ou contracterait un élastique dont les deux extrémités seraient fixées en un point commun, A.



Dans l'espace complémentaire du nœud trivial [le cercle usuel], le chemin α est homotope au chemin constant. Les chemins β et γ sont homotopes, alors que les chemins α et β ne le sont pas puisque le nœud fait obstacle à la déformation continue du chemin α en le chemin β . Le chemin δ n'est homotope à aucun des chemins α , β et γ .

L'ensemble des chemins d'origine et d'extrémité A, considérés à homotopie près, forme le *groupe fondamental* A. Comme dans tout groupe algébrique, il existe une loi de composition interne de composition des lacets, dotée des propriétés habituelles dont l'existence d'un élément neutre unique et d'un élément inverse pour tout élément. Les chemins homotopes sont des interprétations juridiques qui se composent en respectant ces propriétés (dont également l'associativité) sans sortir de l'ensemble du droit positif considéré.

Une interprétation neutre, qui a la forme d'un lacet neutre, serait celle qui ne fait pas débat, acceptée par tous les participants. Une interprétation (ou lacet) inverse irait à l'encontre d'une interprétation qui s'écarterait trop d'un possible compromis entre toutes les autres.

L'interprétation porte sur toute réglementation, dont les lois, voire la Constitution. L'invariance constitutionnelle, qui résulte de l'action d'un « groupe » d'interprétations relative à telle disposition (ayant trait à toutes les déclinaisons de la liberté politique) n'est pas toujours au rendez-vous. L'un des trois pouvoirs peut, à l'occasion, déraiper de, mais il serait excessif d'affirmer qu'il n'y a que violence dans le droit, régulé par l'Etat, comme dans l'état de nature. A nouveau, il y a de la résistance, pensée et organisée, ex ante ou ex post, dût-elle être décalée.

¹ E. Vigée Lebrun, *Souvenirs*. 1755-1842, op. cit., p.182

² <http://iml.univ-mrs.fr/~lafont/rencontres/COLLROUSSE-Pichon.pdf>. Pour plus de détails, l'auteur renvoie à son propre ouvrage : *Éléments de topologie algébrique*, Hermann, Paris, 1971.

Résumé LIX (suite)

⑦ Les conjectures sont plausibles si elles ont pour elles une analogie qui n'est pas totale, mais partiellement étayée. Quoiqu'il paraisse subtil d'y arriver par le raisonnement, le retournement de l'amour de soi en amour propre ainsi que celui de l'amour propre en amour de soi, peuvent faire l'objet d'une représentation lisible par un ruban de Möbius. Sur une surface unilatère, l'intérêt de l'individu fait deux tours complets comme si, lors de sa rotation, l'angle ou la phase de son intérêt, au regard de la société, variait comme en théorie physique de jauge (l'équivalent sommaire du champ de jauge serait celui des pressions sociales sur l'individu).

La torsion s'invite ainsi à nouveau en philosophie constitutionnelle dans le cadre d'un espace fibré. Une telle figuration souligne la profondeur de vue de Rousseau qui percevait, dès le XVIII^e siècle, combien l'amour de soi n'est pas contraire à l'amour d'autrui.

La psychologie du XXI^e siècle confirme que l'amour de soi est indispensable pour l'affirmation de soi (il faut s'aimer pour se construire et prendre soin de ses intérêts réels) et pour l'attention qu'on doit accorder comme à soi-même (ou presque).¹ L'amour-propre n'est qu'une inversion perverse qui emprisonne le moi qui ne voit dans l'autre qu'un être à abattre, ou dont il faut monopoliser le regard vers soi. L'éducation du sentiment doit permettre, selon Rousseau, de renaturer, par une inversion d'inversion, ce qui a été dénaturé par la société.

⑧ La notion d'espace fibré n'a pas tout dit en droit, loin de là. Elle offre l'occasion de montrer en droit américain, par un simple dessin, une « connexion » entre les « fibres » qui représentent les différentes jurisprudences des treize cours fédérales. La « connexion » joint des principes ou standards communs. La projection du fibré, sur l'espace de base, donne une idée de la trajectoire de la jurisprudence de la Cour suprême en droit.

Le transport parallèle permet de déplacer des vecteurs le long des courbes de sorte qu'ils restent « parallèles » à la connexion. L'angle de rotation demeure constant. Il en va ainsi du transport parallèle sur une sphère.

Qu'on remonte jusqu'aux lois, ou que l'on descende jusqu'aux mœurs, qu'on envisage la religion, l'éducation, les idéaux comportements, la pratique du sport, les campagnes d'information, les canaux de divertissement, toujours on trouvera du « transport parallèle » qui s'efforce d'aligner les conduites individuelles dans la société. Un plan tangent (et plus généralement un espace tangent) est un plan (ou un espace) qui épouse au plus près une courbe ou une surface lisse plus ou moins ondulée. Tantôt le transport, suivant des plans tangents successifs, est direct, comme dans une armée ou conformément à la loi, tantôt il est indirect ou souple, comme un effet psychologique agissant sur les mentalités. La diversité des formes de régulation des armes à feu et celles de lutte contre le tabac en est une illustration.

Qui peut savoir, toutefois, ce qui se passe en tout point sur une surface comme la sphère ? Un théorème le sait : celui de la boule chevelue (*hairy hair*) qui démontre que sur mon crâne, si du moins ma tête était au-dessus couverte intégralement de cheveux, il existe au moins un point de discontinuité ou de non tangence. Oui, un épi. Voudrait-on l'aligner coûte que coûte sur les autres cheveux que l'on n'y arrivera jamais. Ce théorème semble appuyer le sentiment que, dans une société, il y a toujours un individu ou un groupuscule qui se lève pour dire non, quand bien même la résistance à la violence, fût-elle extrême, diminuerait dramatiquement. Cet homme, ou ces hommes ou femmes, osent affronter l'horreur et la mort pour l'honneur de l'humanité sans la liberté de laquelle l'humaine condition perd celle de sa dignité.

⑨ La connexion du système américain, à travers les étages du fédéralisme, est un spectacle étonnant que l'œil contemple rarement en droit. Tous les niveaux institutionnels sont comme des niveaux d'énergie dans un fibré, le plus haut étant situé au sommet de l'Etat fédéral dont l'action est bien plus ample et énergique que celles des niveaux inférieurs. Dans ce feuilletage, chaque classe d'intérêt soit accepter le plus souvent un certain compromis, avec une ou plusieurs autres classes d'intérêt, pour faire passer son idée ou son interprétation d'un projet de réglementation. La stratégie madisonienne d'entrecroiser les intérêts, - de les nouer au moins un temps, - est assurément une « connexion avant la lettre visant à épurer et à élargir l'esprit public, comme l'espérait par un autre biais Rousseau en Europe.

¹ <https://www.psychologies.com/Moi/Se-connaître/Estime-de-soi/Articles-et-Dossiers/Comment-s-aimer-soi-meme/Pourquoi-l-amour-de-soi-est-indispensable>

Résumé LIX (suite)

Ce qui étonne vraiment l'observateur est que cette « connexion », parcourant et unifiant toutes les strates du droit américain, rappelle la forme d'une bobine torique en électromagnétisme. Cette analogie rend la vue plus perçante, sans que l'on doive s'en enflammer pour autant. Le lecteur – y compris nous-même qui le découvrons – a la surprise de retrouver en topologie le tore, enveloppant lui-même le tore des élections échelonnées. Celui-ci révélait déjà un raisonnement soucieux de prévenir une trop forte résonance glissant vers l'abus de majorité.

La stratégie madisonienne, qui toujours actuelle aux Etats-Unis, ne se réduit donc pas à croiser aléatoirement des classes d'intérêt différentes, même si, tactiquement, elle a intérêt elle-même à introduire du hasard dans leurs rencontres. Son objectif de réformer les abus des groupes de pression répond à une logique plus profonde : celle d'éveiller l'esprit public grâce au jeu des intérêts privés obligés de s'accommoder aux contraintes constitutionnelles. Sans ce passage obligé, les groupes de pression demeurent des intérêts purement particuliers, disjoints et peu bénis par la légalité.

Les Pères fondateurs ont mis en place dans la Constitution un mécanisme complexe de gouvernement, afin de mieux traduire dans des politiques rationnelles la volonté populaire qui se dégage de la délibération publique.¹

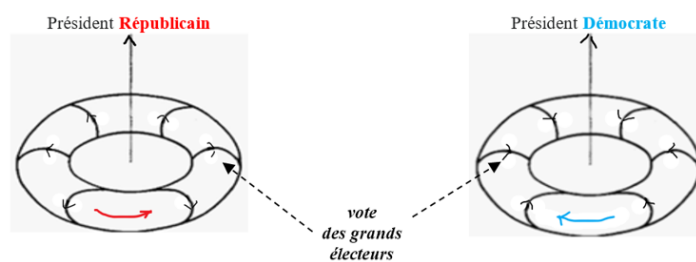
⑩ La constitution fédérale américaine a paré la dissolution du nœud institutionnel en « borroméens », non seulement la séparation des pouvoirs au niveau fédéral, mais aussi celle des Etats. Le système en place évoque ingénieusement, de nos jours, une bobine torque électrique reliant les séparations des pouvoirs des 50 Etats. Cette bobine peut être le modèle, non pas d'un seul tore électoral, mais de plusieurs si l'on songe aux élections des gouverneurs ou à celle, unique et indirecte, du Président de la République au sein du Collège électoral.

Le tore électoral, décrivant les élections des gouverneurs, présente, soit des décalages dans la date même des élections, soit des écarts dus au poids des candidats à ces élections. On retrouve le soin des Pères fondateurs d'éviter d'augmenter dangereusement la résonance d'une majorité qui apparaîtrait trop homogène, et sans une opposition réelle, à travers le pays.

Le tore électoral, portant sur l'élection du Président de la République par le collège électoral, a l'intérêt de faire surgir, du même modèle électromagnétique, le candidat sur qui se porte le plus grand nombre de voix des grands électeurs. L'heureux élu n'est pas nécessairement celui ou celle qui a remporté le plus de voix au suffrage universel direct. D'aucuns aujourd'hui le regrettent, mais les Pères fondateurs, ici encore, ont voulu conjurer un raz de marée populaire qui pourrait ébranler, ou carrément renverser, le système institutionnel.

Vox populi, vos dei, ne fut l'adage prisé dans l'esprit de la jeune Amérique jusqu'à aujourd'hui.

Le choix du Président des Etats-Unis par les grands électeurs opère comme un « ultra-filtre » au terme d'un emboîtement de voisinages de plus en plus étroits. Le nom du Président émerge comme un champ magnétique « poloidal » par rapport au champ magnétique toroïdal où se situeraient les *electors*. La couleur politique du Président dépend des voix des délégués dans le Collège électoral.



L'élection la plus haute qui fabrique la légitimité du Président américain

¹ S. Breyer, *Pour une démocratie active*, chap. 6, p.139.

Résumé LIX (suite et fin)

⑪ Le modèle de la bobine torique doit être complété par l'idée que chaque spire représente en fait un nœud regroupant, en une spire circulaire, trois anneaux borroméens. Le nœud enlace, dans chacun des 50 Etats, les pouvoirs législatif, exécutif et judiciaire. Le borroméen empêche d'être manichéen. Cette structure ternaire subtile force les pouvoirs à converser.

Tout au long du solénoïde toroïdal peut être tracée, dans l'espace complémentaire de chaque nœud borroméen, une ligne d'influence du pouvoir fédéral sur les Etats. Cette influence, comme toute influence, est indirecte, compte tenu de l'autonomie des Etats vis-à-vis du fédéral. Celui-ci ne peut se mêler de tout, sauf à coanimer, soutenir ou contrarier au plus les mesures étatiques. The *Big government* n'est roi que chez soi, pas dans les Etats.

L'impact du fédéral est aussi variable suivant la couleur politique dominante du fédéral et celle des Etats. Le tracé d'influence du fédéral peut traverser ou pas, ou plusieurs fois, tout ou partie des 50 Etats. L'inclination d'un tel tracé longitudinal dans l'espace complémentaire du nœud borroméen des Etats est une indication du degré d'incidence du fédéral dans les Etats.

Trois expériences ont été rapportées au sujet de cette éventuelle empreinte d'un niveau institutionnel sur des sous-niveaux. Elles portent sur l'immigration, la Covid-19 et la peine de mort. Ces cas suggèrent qu'il est bien question d'une influence, et non d'un réel pouvoir du fédéral sur les Etats.

Au vu de ces disputes vives et ces querelles à n'en pas finir, certains pensent que tout aujourd'hui aux Etats-Unis va de mal en pis, comme si les institutions politiques, tant fédérales qu'étatiques, ne cessent de se vicier et de se démembrer au fil des années. Ah, autrefois, c'était mieux ! soupirent-ils. D'autres sont d'avis contraire qu'un autre fil, celui d'Ariane du fédéral, continue de subsister et d'insuffler le tout à travers le labyrinthe borroméen des Etats.

Nous laissons au lecteur, ou plutôt à l'avenir, le soin de décider si cette influence est factice et passagère, ou durable dans les expériences précitées. En dépit des événements troublants et des agitations pénibles, doit-on conserver une foi inébranlable en l'Amérique ? Un pays, toutefois, a beau résoudre des nœuds compliqués, un fonctionnement serein et pérenne n'existe guère en droit. Le constitutionnalisme des Lumières a ses taches de soleil. Il adoucit le tragique de la vie politique, qui se rajoute à celui du privé, mais ne le fait pas fondre au soleil.

SECTION 2**UNE CONTRIBUTION MAJEURE EN EVOLUTION****A/ L'épistémè des Lumières en mutation**

§66.- LES LUMIERES : UN PHENOMENE NITESCENT QUASI-PHYSIQUE

(Résumé LX)

① Plus vous voyagez, et plus vous aurez lieu de vous convaincre qu'il y a des choses à réformer là où vous résidez habituellement. Savoir par cœur, ou par recette, n'est pas savoir, en politique comme en science. *Fâcheuse suffisance, qu'une suffisance purement livresque !* s'exclamait Montaigne, homme des Lumières s'il en est au XVI^e siècle. L'auteur des *Essais* daubait ceux qui veulent instruire notre entendement sans l'ébranler ni l'exercer à juger.

A tout prendre, poursuit Montaigne, tout ce qui se présente à nos yeux doit nous servir à aller de l'avant. *La malice d'un page, les sottises d'un valet, un propos de table, sont autant de nouvelles matières* pour notre curiosité. Y compris la malice des fats et les sottises de ceux qui croient tout savoir, ou le font accroire à tout le monde. Soyons généreux avec nous-mêmes. Il faut embrasser large pour sortir de soi. Il y a, partout, des épis à ramasser.

*Pour frotter et limer notre cervelle contre celle d'autrui, [nous avons besoin] du commerce des hommes [en visitant des pays étrangers], non pour en rapporter seulement les modes, mais les humeurs des nations et leurs façons [de penser]*¹

② Les voyages dans la connaissance, du droit vers la science, ou dans l'autre sens, permettent au droit assurément de voir plus clair dans son propre fonctionnement. La connaissance de l'électromagnétisme de Maxwell ouvre inmanquablement l'esprit du droit constitutionnel à ce qu'il ignore ou n'imagine même pas. Nous ne reviendrons pas sur les équations de Maxwell elles-mêmes, dans les détails desquelles nous sommes un peu entrés pour en faire comprendre la richesse et la complexité. Il est certain que le constitutionnaliste qui s'aventure à en pénétrer les arcanes en revient changé. Il est à parier que leurs lumières font vibrer l'œil du juriste, peu habitué à s'intéresser à la science en dehors de sa spécialité.

③ *Maxwell a montré que la lumière peut être comprise dans la catégorie générale des perturbations électroniques. Par cette vue géniale, il a absorbé toute l'optique dans la théorie électromagnétique.*² Cette théorie montre incidemment que le droit constitutionnel moderne peut en tirer le plus grand profit pour qui entend saisir différemment comment les Lumières progressent, quoi qu'en disent les sceptiques. Qui rêverait aujourd'hui, en Occident, d'un régime à la Poutine qui piétine la liberté publique et civile, viole la souveraineté d'autres pays et assouvit son *ubris* au détriment de son pays ? Entre l'anarchie et la servitude, il y a le droit.

Les composantes électrique et magnétique de l'onde électromagnétique peuvent être génériquement interprétées comme les composantes individuelle et sociale dont les actions et réactions ourdissent, entre elles, un nouement sans y perdre leur autonomie.

La composante individuelle est la créativité de l'individu, tant en science qu'en droit, qui affronte et secoue un paradigme de vérité ou de justice en place. *Insist on yourself ; never imitate*, écrira Emerson au XIX^e siècle. *Where is the master who could have instructed Franklin, or Washington, or Bacon, or Newton ? Shakespeare will never be made by the study of Shakespeare*, s'exclamera toujours Emerson. Mais la composante sociale finit par apporter son appui. C'est elle qui aide à répandre les solutions inédites envisagées, estimera Auguste Comte. *Toute science [et tout droit constitutionnel] ne consiste-t-elle pas dans la coordination des faits ? Si les observations étaient entièrement isolées, il n'y aurait [ni] science [ni droit].*³

La mention du droit dans les crochets précédents est nôtre, car le sociologisme de Comte n'est pas de nature à comprendre le droit constitutionnel moderne. *Le mot droit, écrira-t-il, doit être autant écarté du vrai langage politique que le mot cause du vrai langage philosophique [...] Il ne peut exister de droit véritable qu'autant que les pouvoirs réguliers émaneront de volontés sumaturelles [...]. Dans l'état positif qui n'admet pas de titre céleste, l'idée de droit disparaît irrévocablement. Chacun a des devoirs et envers tous, mais personne n'a aucun droit proprement dit. Nul ne possède plus d'autres droits que celui de toujours faire son devoir.* Ce refus de faire prévaloir les droits sur les devoirs est à l'opposé du constitutionnalisme des Lumières. Les droits, certes, doivent être reconnus et garantis par l'Etat, mais les obligations que l'Etat impose peuvent être que des réactions à des excès.

¹ Montaigne, *Essais* [1580], Gallimard, *Pléiade*, Paris, 1962, Liv.1, chap.26, pp.151-152. Texte abrégé. Nous soulignons.

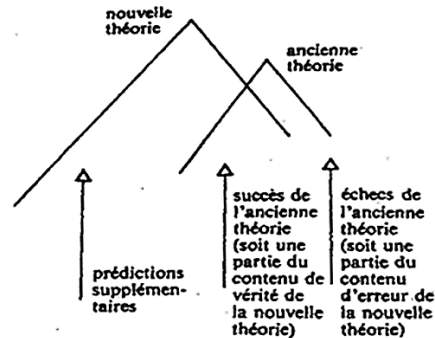
² L. De Broglie, *Matière et lumière*, op. cit., p. 136.

³ Emerson, *Self-reliance*, art. cit, p. 161 ; A. Comte, *Cours de philosophie politique*, Extrait, 3^e leçon, Delagrave, Paris, 1926, p.90.

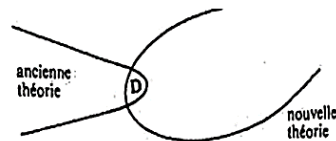
Le publiciste français Léon Duguit fera sienne certaines des idées de Comte en critiquant le droit subjectif des Lumières au profit d'un « droit objectif » *impliquant pour chacun l'obligation sociale de remplir une certaine mission et le pouvoir de faire les actes qu'exige l'accomplissement de cette mission.*¹

L'individualisme excessif, et son opposé sociologique (qui dépasse aussi la mesure), sont deux tendances indépendantes. L'une ne compte que sur le moi, et l'autre compte sur le nous.

④ De multiples schémas en épistémologie ont tenté de représenter l'interaction du moi, à l'avant-garde d'une théorie, et du nous, qui se tient en arrière-garde. Le moi fait des prédictions supplémentaires, et le nous en assure le succès final, mais avant d'aller plus loin, le nous traîne les pieds. Leurs champs d'action se chevauchent, comme le schématise Feyerabend :

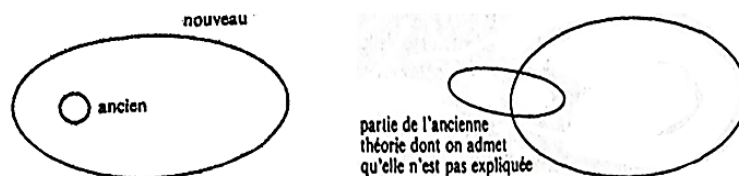


Le combat d'arrière-garde du nous et sa capitulation aboutit à la consécration du couple moi-nous que schématise encore le même auteur :



Le domaine D représente les problèmes et les faits de la théorie ancienne dont on se souvient encore et qui ont été déformés pour s'ajuster dans le nouveau cadre.

La dialectique du talent individuel, profitant à l'occasion des circonstances fortuites, et du nous, qui « paradigme » la réussite avant de la figer, ne cesse de se développer *ad infinitum*. Ce nouveau diagramme de Feyerabend, entrecroisant des courbes sans contour, évite les diagrammes fermés d'Euler qui s'emboîteraient comme suit :



⑤ Il nous semble que la représentation de Feyerabend, où figure le domaine D, ne souligne pas suffisamment l'idée d'indépendance « orthogonale » du moi et du nous ainsi que l'indépendance du résultat de leur confrontation. Ce résultat emprunterait une direction « orthogonale » par rapport aux composantes du moi et du nous. L'auteur est très sensible à la *liberté* (sic) et à sa fébrilité dans la quête du savoir, mais il n'entrevoit pas que cette liberté, qui développe une méthode d'esprit originale, débouche sur un dépassement « vertical » du savoir. Le savoir déjà socialisé, qui a fait ses preuves, résiste à toute innovation provoquante, mais il finit par en élargir lui-même la portée en acceptant de lui donner une valeur d'ensemble.

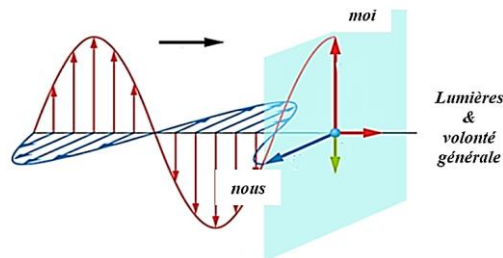
Le talent individuel, tant célébré par les Lumières, et l'organisation sociale, qu'elles entendent régénérer grâce à la reconnaissance de ce talent, s'opposent d'emblée s'opposent un temps de avant de s'admettre un autre temps en se modifiant radicalement sous leur mutuelle influence. Le moi et le nous s'élèvent vers une direction nouvelle en acquérant une nouvelle dimension à laquelle ni l'une ni l'autre ne sont capables de parvenir : celle d'une manière spéciale, et inédite, de penser, de voir, de comprendre, de juger et d'agir en conséquence.

¹ Stéphane Pinon, « Le positivisme sociologique : l'itinéraire de Léon Duguit », in Revue interdisciplinaire d'études juridiques, 2011/2, vol.67, pp.69-93. Sur internet ; Léon Duguit, *Le droit social, le droit individuel et la transformation de l'Etat* [1908], cité dans l'article précédent.

² P. Feyerabend, *Contre la méthode*, op. cit0, 190 et 194.

Résumé LX (suite)

Le moi se plaît à être dans un contexte de découverte, tant du savoir que de l'action, alors que le nous se sent à l'aise dans un contexte de justification et de légitimation. Le savoir est celui d'un progrès des Lumières, et l'action, celle du renouvellement de la volonté générale. Lumières, et l'action, celle du renouvellement de la volonté générale.



*L'un compte sur la promptitude des dégagements
et des substitutions libres son esprit.*

*L'autre, sur sa puissance de conservation
à travers les transformations successives.*

L'un se défend par ses variations ; l'autre par ses permanences. ¹

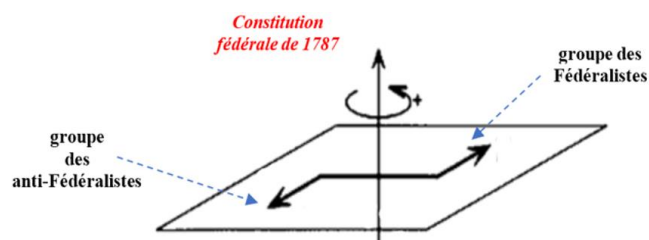
⑥ Est-il besoin de préciser que ce genre de diagramme n'est qu'une image fortement idéalisée de la réalité. L'idée d'un cycle, créant alternativement des rotations en direction du moi et du nous, ne décrit point en droit un mouvement aussi régulier qu'une onde électromagnétique comme la lumière. Quant à la 3^e direction, celle de la propagation de l'interaction résultante, son émergence n'est pas non plus aussi assurée. Il peut y avoir des régressions, un dé-progrès vers l'obscurantisme et le despotisme. On le voit actuellement en Russie après sa libéralisation lors de l'effondrement de « l'Union » des Républiques socialistes soviétiques.

Certains trouveront qu'un tel schéma masque beaucoup d'inexploré. Il éblouirait les yeux au lieu de les éclairer. Jamais, ô jamais, vous n'arriverez à fixer les nuances du droit comme en science. Que les Lumières se répandent, soit, mais le comment n'est pas assez expliqué.

On répondra que nous ne prétendons pas dévoiler l'essence intime et inconnue d'un tel domaine. Il n'est question que d'un pressentiment confus d'une réalité juridique qui ne serait pas si étrangère à la physique. Nous ne revendiquons pas l'objectivité pure et simple, ni ne courrons après le rêve d'une correspondance parfaite. Nous restons dans le possible, le subjonctif, et ne voyons le probable, l'indicatif, que de loin. Au mieux, nous sommes dans la brume un peu lumineuse, ensoleillée du matin. Nous tâchons seulement de mettre en page l'intuition d'une force créatrice, moins irrésistible que latente, travaillant la science et le droit.

I only surmise what has happened.

⑦ Ceux ou celles qui rechigneraient à nous suivre accepteraient peut-être une image plus instantanée en droit constitutionnel d'une « onde » pseudo, ou pas purement, « électromagnétique ». Au lieu de considérer la dialectique trop générale entre le moi et le nous dans la connaissance et la politique occidentales, on retiendra, sous forme de diagramme, trois exemples illustrant la riche contrariété entre des groupes d'opposants et sa fécondité en droit des Lumières. Le 1^{er} a trait au « moment » Philadelphie des Etats-Unis :



L'adoption de la Constitution démontra le sens « élevé » de l'intérêt public des constituants.

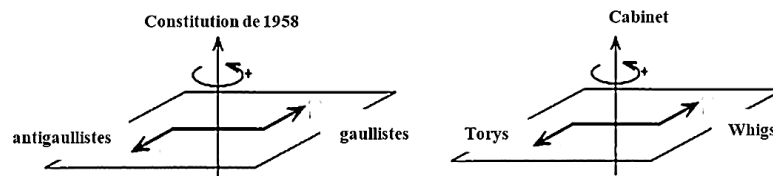
¹ Paul Valéry, *Mélanges* [1939], Rivages poche, Paris, 2019, p.179.

Résumé LX (suite)

Ce *snapshot* d'une onde, qui se prolongera dans la durée, atteste qu'un dialogue n'est pas toujours impossible, si dure que soit la négociation entreprise. Pareille esquisse n'exclut pas le va-et-vient du moi et du nous qui commandait et orientait les débats. Que l'on pense à l'inspiration centrale de James Madison à Philadelphie en 1787. Le *bootstrapping* suggère un peu l'idée d'auto-soulèvement, mais la métaphore est plus littéraire que scientifique. Elle ne décrit pas plus avant, et plus finement, la dynamique en jeu à la lumière de la physique.

Autant que l'on s'en souvienne, l'individu joue un rôle décisif dans l'histoire des Lumières. En science, un individu comme Newton découvre, et la communauté, sur cette base, s'efforce d'en tirer une utilité pratique. En droit, Madison les fondements du constitutionnalisme américain. L'un et l'autre ont eu des prédécesseurs, mais leur apport individuel fut décisif.

Le même schéma retrouve des couleurs en France lors de la naissance de la V^e République, avec toutefois une impression d'ensemble plus violente du fait de la guerre d'Algérie. La vive dissension entre les partisans de l'Algérie française et de ses adversaires risquait d'entraîner la métropole dans une guerre civile. Dans ce contexte, l'énergie exceptionnelle et pacifique, d'un individu comme de Gaulle jouera aussi un rôle central. Il sera prendre de la hauteur.



En Angleterre, le pays n'a cessé, depuis le XVIII^e siècle, de connaître un « moment » similaire de couple forces opposées, grâce auquel l'institution d'un Cabinet émergea du bipartisme politique au Parlement. La puissance de l'individu ne fut pas non plus effacée. En arrière-plan, William Pitt le Jeune se signalera par sa résistance et sa ténacité face à Napoléon. Et que dire de Churchill, face à Hitler, dont l'entreprise de domination de l'Europe, et du monde, sera la plus folle et criminelle de l'histoire par son idéologie raciste et antisémite la plus extrême.

Que ce soit sous la forme d'un pseudo « rayonnement électromagnétique », ou d'un « couple de forces » mécaniques, la composition des mouvements réalisés ne renvoie plus à l'idée de **parallélogramme des forces**. Non que cette idée soit surannée et expulsée de nos rapprochements premiers, mais son champ d'application apparaît limité pour penser le soulèvement qualitatif du droit constitutionnel moderne et de la société entière qui y adhère.

⑧ Rien ne prouve que tout converge vers un objet-limite qui se situerait au-dessus d'un plan d'interactions immanentes. Un accord entre les attentes et les constatations est plus incertain encore en droit qu'en science. L'*épistémè* des Lumières rassemble un grand nombre d'approches qui ne sont que des analogies partielles entre des niveaux de réalité différents.

La relation du droit constitutionnel avec la nature pourrait faire espérer une adaptation de celui-ci à celle-là, mais la régularité de celle-là n'est pas toujours au rendez-vous au-delà d'une certaine précision (notre §42 a déjà fait allusion à la théorie du chaos, et le §56 à l'indéterminisme de la mécanique quantique). Surtout, l'adoption de l'*épistémè* des Lumières est tributaire en droit du jeu des coalitions, une situation que nous avons appelée l'*hypogée*.

Le mot *hypogée* possède deux sens qui ne sont pas exactement équivalents. L'un désigne une construction située en dessous du sol (*hypo-gée*, *gée* signifiant terre en grec ancien). L'autre désigne, en parlant d'un organisme animal ou végétal, quelque chose de vital et de vivant qui se développe sous la surface du sol, dans les grottes ou les eaux souterraines.¹

¹ <https://www.lalanguefrancaise.com/dictionnaire/definition/hypogee>

Résumé LX (suite et fin)

L'image d'un édifice, comme une cave, n'est pas adéquate au pugilat des forces politiques et sociales qui gronde dans un hypogée. Si on s'entêtait à le croire, on en reviendrait à l'idée marxiste d'une infrastructure économique au regard d'une superstructure juridique et culturelle. Or cette interprétation ignore notamment que l'idéologie est présente à tous les étages et assure la cohésion de l'édifice pour un temps.¹ Il n'est pas sûr non plus que le niveau économique soit l'origine du politique, - du phénomène du pouvoir en tant que tel. C'est *l'oppression politique qui détermine, appelle, permet l'exploitation* plus que le contraire,² répondra-t-on au vu des régimes qui se veulent égalitaristes comme les Etats communistes.

Dans le droit naissant des Lumières, il y a de l'économique, mais pas que. La Terreur en France ne fut pas qu'un phénomène de lutte des classes pour l'appropriation des richesses. La Terreur participe d'un phénomène global qui ne se réduit pas à cet aspect parcellaire. Tout pouvoir est déjà, en lui-même, abus par nature, car son action doit l'emporter sur la réaction. Mais l'abus est un processus sans fin. Le goût du pouvoir, son appétit démesuré et sa corruption sont inhérents à sa possession. Comme le montre aujourd'hui Poutine en Russie, tout titulaire, agrippé follement au pouvoir, est victime de sa propre dérive. Il y a, ici aussi, un moment, mais celui-ci est un pas de trop, surtout si le droit n'y oppose aucune butée effective.

En voulant aller jusqu'au bout, Poutine est tombé dans le trou. On a cru longtemps en Europe et en Amérique que la politique était soluble dans l'économie. On néglige particulièrement la manipulation du nationalisme russe par un dictateur devenu de plus en plus euphorique au vu des premières conquêtes territoriales visant à reconstituer la grande Russie. C'était oublier qu'Hitler avait perdu, pour les mêmes raisons, tout contact réel avec le monde extérieur. La Russie soviéto-poutinienne, comme l'Allemagne hitlérienne, coalisera contre elle davantage d'ennemis, mais cette éventualité alimentera sa paranoïa au lieu de l'arrêter.

Comme en jugea dès 1933 le physicien allemand Max Planck après un entretien avec le Führer,

Hitler ressent ce que dit son interlocuteur au mieux comme un bavardage importun, et il lui coupe aussitôt la parole en déclamant toujours les mêmes phrases sur la décomposition de la vie spirituelle au cours des quatorze dernières années, sur la nécessité d'arrêter cette décomposition à la dernière minute, etc.

On a d'ailleurs l'impression qu'il croit lui-même à ces absurdités, et qu'il se donne la possibilité d'y croire précisément en éliminant, pour ainsi dire par la force, toutes les influences extérieures. Il est ainsi obsédé par ses idées personnelles, inaccessible à toute objection raisonnable.

Il entraînera l'Allemagne dans une catastrophe épouvantable. ³

S'il fallait donc choisir entre deux acceptions radicalement différentes, nous opterons pour l'hypogée comme germination. Une sorte de sol forestier, propice à la lutte entre des groupes de pression, appelés autrefois factions. Ces groupes de pression sont mus par des intérêts et des passions (le nationalisme en est une). Leur matière est constamment changeante et peut expliquer, selon les circonstances et les rapports de force, l'adoption par exemple, au XVIII^e siècle, d'un mode de séparation des pouvoirs : la balance des pouvoirs, par des groupes conservateurs, soucieux de modérer le pouvoir, ou la spécialisation des organes, par des groupes, désireux d'établir au galop des réformes, sans trop de discussion ni d'opposition.

Dans le 1^{er} mode, les concepteurs sentent qu'aucune institution ne s'auto-contrôle tant qu'elle n'est pas contrariée. Dans le second, ils virent la nécessité d'une force extérieure pour bousculer son inertie. Ce sont deux modes d'interprétation complémentaires de la séparation des pouvoirs qui ne s'accordent pas, ou s'accrochent difficilement dans une harmonie supérieure et apaisante. Dans ces deux modes purs de l'art du pouvoir de se diviser, la liberté, plus ou moins appuyée par l'égalité, demeure au centre du système chargé de la réaliser.

Je t'aime liberté dans les hypogées (Guillaume Apollinaire, *Calligrammes*, 1918)

¹ M. De Coster, *L'analogie en sciences humaines*, op. cit., p.36.

² P. Clastres, *La société contre l'Etat*, op. cit., p.173.

³ Max Planck, in W. Heisenberg, *La partie et le tout*, op. cit., p.260.

§67.- LE RAJEUNISSEMENT DE L'ÉPISTEME DES LUMIÈRES

(Résumé LXI)

Les obstacles n'arrêtent qu'un temps les individus, car l'épreuve peut relancer leur mouvement autrement.

Pour éviter de trop répéter ce qui avait été annoncé au seuil du §67, on retiendra surtout la revitalisation, au XX^e siècle, de l'idée de contrat social dans la théorie de la justice de John Rawls. Force est de constater que cette expérience de pensée n'a pas perdu sa raison d'être, même si l'interprétation par Rawls en est en partie critiquable, car la liberté individuelle perd trop par rapport à l'égalité. Son idée de contrat social ne reflète pas totalement celle ressentie, de façon informulée, par les gens. Leur idéal de justice déborde celui de Rawls trop idéaliste.

Les obstacles n'arrêtent qu'un temps les individus, car l'épreuve peut relancer leur mouvement autrement.

Pour éviter de trop répéter ce qui avait été annoncé au seuil du §67, on retiendra surtout la revitalisation, au XX^e siècle, de l'idée de contrat social dans la théorie de la justice de John Rawls. Force est de constater que cette expérience de pensée n'a pas perdu sa raison d'être, même si l'interprétation par Rawls en est en partie critiquable, car la liberté individuelle perd trop par rapport à l'égalité. Son idée de contrat social ne reflète pas totalement celle ressentie, de façon informulée, par les gens. Leur idéal de justice déborde celui de Rawls trop idéaliste.

② Cette conception rationaliste, propre aux Lumières, contraste avec celle de Pareto pour qui *les hommes donnent pour volontaires des actes qui ne le sont pas, pour logiques des actions non-logiques. Ils puisent bizarrement dans leur imagination des raisons pour lesquelles ils se trompent et trompent les autres sur les véritables causes de leurs propres agissements.* L'utopie libérale ne trouve pas davantage grâce, à ses yeux, que la socialiste, car les hommes agissent en aveugles : *ils se dépouillent les uns les autres, au moyen de la loi.*¹ Point de lumière, mais du camouflage au profit de ceux qui sont moins frappés de cécité.

Il y a chez cet auteur un paradoxe : n'est-ce pas lui qui a repris, et développé, la notion de courbe des contrats résultant de la rencontre entre des courbes d'indifférence de deux ou plusieurs individus ? N'est-ce pas là une vision optimiste qui contredit son pessimisme déclaré ? Il nous appartient de démêler chez Pareto ce qui est positif et désabusé dans son œuvre. L'économiste sociologue ne se défie pas de tout : il croit du moins à l'efficacité en économie, à défaut de se bercer d'espoirs sur l'équité, - la juste répartition sociale du surplus.

③ La courbe des contrats d'Edgeworth, si originale et utile soit-elle pour comprendre la genèse d'un accord, n'offre pas, de ce fait, le concept nécessaire pour cerner le besoin de justice des individus en société. La « volonté générale » de Rousseau est sans équivalent pour y répondre. Sans doute, cette notion a continuellement fait l'objet d'interprétations erronées en confondant son essence et son exercice. La volonté générale est ouverte en principe, sans restriction, à quiconque. En pratique, cependant, le droit positif se doit recourir à des procédures d'approximation serrée qui convertissent la générale en volonté de presque tous.

(question impromptue)

Un criminel, ou un prisonnier, aura-t-il voix aussi au chapitre ? Si oui, la volonté générale risquerait de devenir une auberge espagnole, mêlant à table, aux bons invités, ... l'interlope !

La réponse est affirmative. Il importe de connaître les motifs d'un criminel (les procès ont cette fonction, via notamment sa voix, amplifiée par celle de l'avocat). Il importe autant de connaître le point de vue d'un prisonnier au cours de sa détention. La relation de son vécu peut aussi signaler des angles morts qu'il convient à l'Etat de traiter pour éviter de nourrir la haine contre la société. Il en est de même, soit dit en passant, du vécu des *beurs* dans les « cités périphériques » – le comble pour une cité ! - dont les parents furent d'anciens colonisés.

Il y va de l'intérêt général de ne pas ignorer ceux qui s'en détournent, comme il est utile de connaître les ressorts cachés de ceux qui proclament commander de façon très désintéressée.

¹ Vilfredo Pareto, *Traité de sociologie générale*, extrait cité in L Bourcier de Carbon, *Essai sur l'histoire de la pensée économique et des doctrines économiques*, op. cit. t., p.173 ; *Les systèmes socialistes* [1901-1902], ibid, p.149.

Résumé LXI (suite et fin)

- Comment, dans ces conditions, pouvez-vous identifier la volonté générale et la soif de justice si, parmi les assoiffés, certains n'en ont que faire, tandis que d'autres se plaisent à la piétiner ?

- La volonté générale, issue d'un contrat social hypothétique, dont le postulat s'avère nécessaire, est l'expérience de ce besoin de justice de qui que ce soit dans la société. Cela dit, la volonté générale est comparable à une musique d'ensemble, mezzo voce, ou forte si la colère gronde et prend le dessus. Il y a, comme dans toute musique, des discordances, quelquefois incommodes, et parfois très irritantes, voire dangereuses pour le maintien d'un ciment minimal. Mais moins on les entend, plus elles ont des chances de toucher ou de contaminer davantage de gens en souffrance. Des forfaits peuvent cacher des frustrations, des humiliations, qu'il faut écouter sans devoir approuver les idées et les comportements.

④ Ces circonstances avertissent qu'il ne faut jamais sous-estimer les situations en politique et en droit. Dans ce contexte, il n'est point absurde d'assimiler la volonté générale à celle de la justice, si vague soit-elle, même pour ceux qui sont *in the fringe*, dans les marges, en lisière, quelle qu'en soit la raison. La volonté générale, alias la volonté de justice, n'est pas seulement indéfinissable. Elle est indéconstruible pour déconstruire, si besoin est, le droit positif, et le reconstruire de façon à réduire le mal-être, faute de pouvoir maximiser le bonheur commun.

On peut soulager la douleur de vivre, mais la joie de vivre, la joie de l'être, est plus du ressort de chacun. Le droit ne remplace pas la philosophie personnelle, mais la volonté générale, qui relève de la philosophie politique, est une image abstraite mobilisatrice qui entraîne ceux ou celles qui s'évitent, s'ignorent, ou ne se fréquentent pas, à s'entraider le cas échéant.



§67^{bis} - LE RAJEUNISSEMENT DE L'ÉPISTEME DES LUMIÈRES

(Résumé LXII)

① C'est à la lueur encore de la science moderne des mathématiques et de la physique que l'on découvre comment représenter, de façon modestement qualitative, certains phénomènes de droit constitutionnel inspirés par les Lumières européennes et américaines.

② Les géométries non euclidiennes ont – qui l'aurait cru ? – un mot à dire dans un domaine si éloigné de leurs préoccupations premières. Il est étonnant pour l'esprit de voir la séparation des pouvoirs pouvoir être diagrammatisée sur une sphère grâce aux grands cercles qui la parcourent. Les angles qu'ils forment signalent le degré de séparation entre les pouvoirs.

La stratégie madisonienne d'inciter les factions à tendre vers un intérêt social commun fait également sens sur une demi-sphère où convergent vers un pôle tous les méridiens. C'est dire si la structure même de l'espace-temps constitutionnel peut jouer un rôle aussi inattendu qu'en géométrie sphérique sans qu'aucune force soit nécessaire pour les « tirer » vers le pôle. Factions, laissez-vous conduire par les procédures de négociation avec l'administration, et tout ira bien. Les procédures in-forment l'espace du droit constitutionnel et son déroulement.

La géométrie hyperbolique, sous la forme d'une pseudosphère, œuvre pareillement en soubassement. Elle aide à comprendre comment, de façon dynamique, les mouvements extrêmes en politique peuvent être amenés à se transformer en partis de gouvernement.

③ La géométrie elliptique (généralisant la sphérique) et l'hyperbolique (aux points selle) cohabitent sur un tore où il est également loisible de représenter le triangle équilatéral de la séparation des pouvoirs. Ce mode d'expression plus souple permet de rendre plus visible les façons de lever, ou de contourner, les obstructions. Le « triangle torique » des pouvoirs ajoute, dans le jeu parlementaire, un ou plusieurs degrés de liberté à leurs mouvements (négociation en sous-main, usage d'un article permettant d'adopter un texte sans vote, etc..)

Un tore renversé verticalement, conformément à la théorie de Morse, jette de même une lumière sur les chemins alternatifs dont dispose un gouvernement pour négocier avec, soit la Gauche (ou le parti Démocrate), soit avec la Droite (ou le parti Républicain). Des compromis éventuels peuvent être obtenus en des « points critiques » ou clés, avant de satisfaire l'une ou l'autre clientèle électorale. Toute négociation ne se réduit pas à dire, ou à penser, ce qui est à moi est à moi et ce qui est à toi, ou vous, est négociable. Il faut « faire avec » l'autre.



Les points ou surfaces critiques sont repérables par des changements de forme des niveaux d'eau qui monte ou qui descend au sein d'un tore posé verticalement

Le même schéma demeure suggestif pour illustrer géométriquement l'application du principe de subsidiarité dans l'Union européenne (ou dans l'Union américaine, clairement fédérale).

④ Le disque de Poincaré est un modèle qui stimule assurément la pensée. Nous revenons à l'hyperbolique pur. Le disque « visualise » on ne peut mieux les lignes d'univers jurisprudentielles ou législatives qui s'y croisent sans se couper. Même si l'on concède qu'en droit constitutionnel on n'a affaire, au plus, qu'à des quasi-géodésiques, on peut, grâce à leur degré de courbure, « mesurer » un tant soit peu leur convergence ou leur divergence.

Le disque sans bord de Poincaré précise aussi l'idée de volonté générale comme ensemble ouvert. L'horizon est bien l'infini, même s'il n'est jamais perdu de vue en droit constitutionnel.

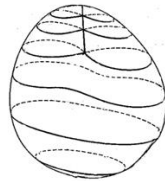
Le disque de Poincaré nous apparaît commode pour saisir la nécessité, dans une négociation, de ne pas se retrancher dans des positions initiales (principes, chiffres, symboles, etc.). Il y a, au-dessus de la droite réelle, par ex. des enjeux financiers dans un espace hyperbolique où des options alternatives enrichissent et débloquent la discussion. Dans cet espace de satisfaction des intérêts, des « nœuds hyperboliques » comme le 8, peuvent être diversement interprétés en droit (accord pour un gouvernement d'union nationale par ex. ; structure possible du « core », robuste aux menaces de scission en théorie des jeux de coalition).

Résumé LXII (suite)

⑤ Avec le plan projectif, on retourne à la géométrie euclidienne à laquelle il faut y ajouter toutefois une « droite projective ». Nous sommes en présence d'une surface non orientable. Le plan projectif peut être défini comme une bande de Möbius accolée à un disque ou à une calotte sphérique.

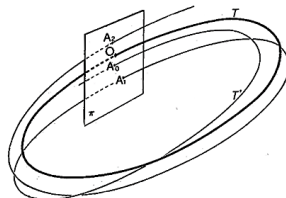
Cette combinaison conduit à l'idée d'une sphère pourvue d'un *cross-cap* susceptible de représenter en droit constitutionnel une inversion assimilable à une exception particulière à une règle générale (par ex. : la motion de censure dans la procédure parlementaire de la V^e République française, la présomption d'innocence reconnue dans tout le constitutionnalisme des Lumières). L'alternance politique au pouvoir relève aussi de ce type d'inversion.

Pousser trop une telle exception trahit cependant, le droit et contraire son action. L'extension abusive de la Möbiusation risque de désorienter tout l'espace social. Cette contagion peut être fatale, à l'instar de la poutinisation de la société russe qui avait commencé à se relibéraliser. Cet exemple, en œuvre sous nos yeux, est affligeant pour ce pays et le monde avoisinant.



⑥ La section de Poincaré est une façon de rendre simple ce qui a l'apparence d'être très compliqué. La simplification consiste à oublier tout le reste des trajectoires entre deux valeurs périodiques. On prend une photo à un instant donné. Sinon, à trop voir, on ne voit sinon plus rien. Une « section » est une coupe transversale à un ensemble de trajectoires plus ou moins périodiques courant sur un tore. La section de Poincaré repère leur passage et re-tour en 2D.

En considérant la jurisprudence en moyenne (c'est-à-dire sans chercher à la décomposer en une pseudo-série de Fourier avec toutes ses composantes), on peut en pénétrer les conclusions d'une seule vue en un point d'impact précis sur la section. Aucune jurisprudence sérieuse ne se contente d'être un ensemble de faits disparates et d'interprétations juxtaposées. On est en présence d'un récit qui donne sens (ou tâche d'en donner un). Ce sens a vocation à être répété plus ou moins fidèlement, comme une trajectoire quasi-périodique sur un tore. (cf. ↓ des trajectoires quasi-périodiques au voisinage d'une trajectoire périodique T)



- Si tout était devenu simple, ça se saurait, dirait un quidam. Quoi ! on n'aurait plus besoin de recourir à ce machin qu'est le tore ? Hélas, non, La section de Poincaré révèle aussi en science des trajectoires « homoclines ». Non sans grandes difficultés, elles partent d'un point d'équilibre et y reviennent en s'enroulant autour de trajectoires périodiques. Les « solutions homoclines » sont considérées comme la première description d'un comportement chaotique dans la mesure où elles peuvent se croiser et rendre le problème plus compliqué.

Chaotique, c'est-à-dire aperiodique.

Nous savons qu'un pendule simple, oscillant dans un plan vertical, peut être décrit dans un *espace de phase* dont les axes sont la position et la vitesse angulaire, i.e. sa dérivée par rapport au temps. Nous avons appris que ce modèle est représentatif des « oscillations » observables en droit constitutionnel entre la source et l'objet des lois, entre les Chambres législatives, et entre le gouvernement et chacune d'elles. La tension du fil du « pendule » est la contrainte salutaire qu'impose la Constitution pour que de tels balancements demeurent.

Il appert (voici *le hélas !*), avec un pendule double, que le résultat s'avère « non linéaire ». Nous l'avons aussi appris. Les balancements ne s'additionnent pas sagement entre eux. Leur comportement d'ensemble, peut devenir chaotique. Et nous ne parlons de l'action intrusive des *lobbies* qui perturbent les trajectoires législatives, plus ou moins périodiques, sur un tore ! (au moment par ex. des budgets annuels). Une section de Poincaré d'un tore, bien conçue dans l'étude du droit, en exhibe les déformations.

¹Référence de deux figures : <http://www.personal.psu.edu/axk29/Lecture20.pdf> ; Ivar Ekeland, *Le calcul, l'imprévu*, Seuil, Paris, 1984, p.57.

Résumé LXII

(suite)

⑦ Cet enseignement négatif ne saurait négliger l'utilité, avérée en science, de l'outil topologique qu'est le tore pour l'étude du droit constitutionnel. Comme « un étranger », né et venu d'ailleurs, il n'en continue pas moins de rendre des services au droit pour articuler visiblement les périodicités différentes comme celles de la loi et du règlement. Il en est aussi de la « bifurcation » qui se révèle, comme en science, un instrument non moins utile pour éclairer l'histoire constitutionnelle et son comportement parfois erratique jusqu'au tragique.

Le droit politique n'est aucunement protégé contre des épisodes de « turbulence ». Chacun l'a éprouvé dans sa propre cité. Comme dans la nature, il est devenu apparent à tous qu'il a y a comme des « attracteurs étranges ». Il suffit de voir, pour rester presque dans l'ordinaire, le caractère auto-générateur des normes. Ce processus à n'en plus finir porte atteinte au fonctionnement du droit et à son respect. Dans ses annales, Tacite observait déjà, dans la Rome ancienne : *Jamais les lois ne furent plus multipliées que quand l'Etat fut le plus corrompu*. Dans le Livre III ses *Essais*, Montaigne s'en plaindra autant à la Renaissance :

Qu'ont gagné nos législateurs à choisir cent mille espèces et faits particuliers, et y attacher cent mille lois ? Ce nombre n'a aucune proportion avec l'infinité diversité des actions humaines. La multiplication de nos inventions n'arrivera pas à la variation des exemples. [...] Nous avons en France plus de lois que tout le reste du monde ensemble. (in E. Mackaay, *L'inflation normative*, op. cit.)

Aujourd'hui, en France, mais aussi aux Etats-Unis et en Angleterre, la goutte a débordé le vase. On reconnaît presque dans ce phénomène l'action d'une *suite logistique* $x_{n+1} = r \cdot x_n (1 - x_n)$, la lettre r indiquant le taux de croissance de la « population » des normes. Le phénomène ressemble étrangement à celui de l'eau qui coule quand on ouvre par trop le robinet d'eau.

⑧ L'approche physico-mathématique de la stabilité alimente également la réflexion sur celle éventuelle en droit constitutionnel.

A la fin du XVIII^e siècle, Laplace croyait, dit-on, au déterminisme universel. Cette interprétation est partiellement erronée. Le savant croyait moins à la nécessité stricte qu'à la probabiliste. Poincaré sera plus radical : ses travaux montreront que l'instabilité du système solaire est la règle, la stabilité l'exception. Le problème de 3 corps l'atteste déjà : le système n'est pas *intégrable* au sens où on ne trouve guère d'équation différentielle exacte qui en régente la trajectoire (sauf de façon approchée par des séries, ou dans des configurations particulières).

Certaines parties du droit constitutionnel ne sont pas non plus, à leur façon, « intégrables ». Sans que l'esprit des Lumières en soit entièrement menacé, le jeu politico-institutionnel s'apparente parfois à un jeu de billard, non pas régulier mais chaotique. La métaphore, dans une gravure, perçait déjà au XVIII^e siècle. On a cru un temps que l'équilibre international, par ex., résultait de la rencontre entre des égoïsmes nationaux, luttant pour le pouvoir afin de survivre. Il a fallu déchanter, comme il l'a fallu aussi dans l'ordre interne, au vu de certains comportements politiques (Trump qui voulut renverser en haut la table aux Etats-Unis) ou sociaux (les gilets jaunes qui rêvèrent de tout mettre à terre, mais à partir du bas, en France).

Les exemples cités entre parenthèses étaient bien de nature quasi-périodiques. Trump et ses partisans répétaient à l'envi, avant et après l'élection présidentielle américaine, qu'elle est truquée, et les gilets jaunes espéraient refaire, tous les samedis, la Révolution française dans ses pires moments (certains chantèrent même la Carmagnole). Une section de Poincaré aurait été bienvenue pour démontrer l'évolution de ces deux manifestations d'hystérie collective.

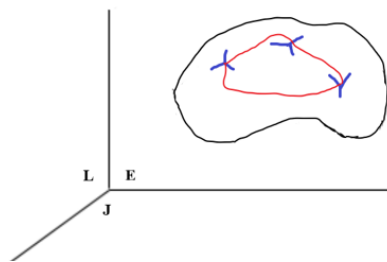
⑨ La géométrie du tore et ses coupes transverses n'étaie pas que des déconvenues. Sur la surface du « tore résonant » on observe des phénomènes non-exorbitants. De même, le chaos n'apporte pas seulement du trouble, comme se plaisent à le dire les Cassandre. Il ouvre aussi sur le futur. Face à lui, le droit constitutionnel doit éviter d'avoir une mentalité d'assiégé. On doit rectifier une perception fallacieuse qui assimile trop rapidement le chaos à la destruction pure et simple. Créer, c'est perturber. Sous les coups de butoir d'une volonté générale en renouvellement et renouvellement incessant, le droit constitutionnel est appelé à se réformer. L'invite n'est pas toujours aimable, mais elle doit s'imposer pour secouer l'inertie du droit.

Résumé LXII (suite et fin)

Pourquoi d'ailleurs trop s'inquiéter, et s'arc-bouter devant le désordre qui défie l'ordre ? Il existe, en droit constitutionnel comme en science, des éléments de stabilité fort résistants. Les objets du monde humain, comme ceux du naturel, possèdent une certaine permanence.

En science, de tels objets ne sont pas toujours dépendants d'un système de coordonnées. Ils portent en eux de l'intrinsèque, voire du contrariant qui inverse et compense tout effet covariant. Leur mouvement obéit aussi au principe de moindre action qui entend réduire l'écart entre deux énergies antagonistes, la cinétique d'un pouvoir et la cinétique d'un autre pouvoir, soit constitué, soit exercé par un groupe de pression, soit surgi dans la rue.

Le droit constitutionnel connaît une forme d'autonomie et de résistance un peu similaire. Quelles que soient leurs interprétations les plus variées, la liberté, la propriété et l'égalité conservent dans le constitutionnalisme des Lumières une pertinence certaine. La pyramide des normes juridiques est toujours debout, malgré des interprétations multiples, et parfois contradictoires, au sommet de l'Etat. La notion même de « tenseur » en science peut également être transposée pour rendre compte ce qui demeure à peu près invariant dans l'évolution de la séparation des pouvoirs d'un pays à travers le temps (cf. infra). De fortes contraintes perdurent en dépit des aléas.



L'invariance est à son comble avec la notion de groupe algébrique de transformations. Qui dit groupe, dit opération inverse qui symétrise tout élément du groupe d'un ensemble. Cette notion n'est pas non plus étrangère au droit constitutionnel. La symétrisation est présente en en maintes régions du droit constitutionnel dont les droits de l'homme (qu'on se rappelle les « groupes » que forme la liberté, l'égalité et la propriété avec leurs propriétés d'associativité, d'existence d'un élément neutre – la liberté – et de symétrie). La liberté elle-même a l'allure d'un groupe, si étant libre, j'accepte, comme sujet actif, de me contredire pour le rester. La *faculté d'empêcher* dans la séparation des pouvoirs à la Montesquieu est une symétrie miroir.

⑩ Stabilité, symétrie, invariance, tout ce cortège d'idées confortent l'idée de conservation, non seulement de l'individu mais de l'Etat des Lumières, que chacun a fondé avec ses pairs. L'Etat réel, modelé sur cet esprit, n'en est pas complètement éloigné malgré tous ses défauts. Quelle image contrastée n'offre-t-il pas aujourd'hui, avec un droit constitutionnel relativement stable, coexistant avec son contraire, un droit constitutionnel instable, presque dérayant !

Ce qu'il faut souhaiter à l'étude du droit constitutionnel est la même amphibologie. L'objet du droit constitutionnel est à lire doublement : la liberté dans la stabilité, et la liberté contre la stabilité, bien que la liberté ne soit pas toujours bonne conseillère. De même, l'étude du droit constitutionnel doit laisser place dans ses textes, comme au XVIII^e siècle, à des dialogues qui interrogent, ainsi qu'à des dessins dynamiques qui interpellent et géométrisent son contenu.

La vie, et ses formes changeantes, doivent passer davantage dans la théorie du droit politique, comme elle s'y invite, sans solliciter d'avis, dans le système constitutionnel, nonobstant les la présence de contraintes institutionnelles qui s'avèrent aussi nécessaires contre tout abus.

Invasion des images ? Non, s'agissant de l'image abstraite que sont les diagrammes dont la structure et le mouvement interne jette un pont entre des domaines qui « se parlent ». Elle incite à voir des rapports de correspondance là où les mots sont aveugles à raisonner en solo.



Correspondance

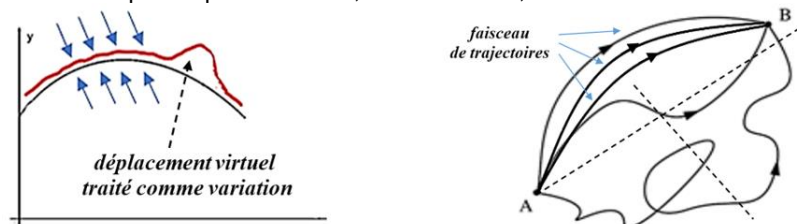
B/ Une action efficiente mais circonscrite

§68.- LA PART DE L'EMPIRE DE LA NECESSITE ET DU PROBABLE (*Résumé LXIII*)

① Nous nous attarderons seulement en ce résumé sur l'éclairage que pourraient apporter à l'étude du droit constitutionnel des outils aussi exotiques en la matière que le lagrangien, l'hamiltonien et le flow de Ricci sans que la lecture en soit freinée par un appareil érudite.

Qu'est-ce que le lagrangien et l'espace de configuration qui lui est associé ? qu'est-ce que l'hamiltonien et l'espace des phases qui l'accompagne ? Qu'est le flow de Ricci, qui est la cerise sur le gâteau, puisqu'aucun d'eux n'a eu à ce jour droit de cité en théorie du droit ?

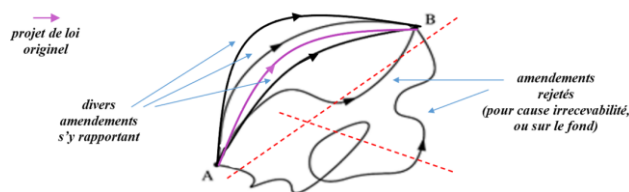
② Le lagrangien vise la paix dans la famille des déplacements virtuels en tâchant de réduire leur différends, ou variations, au minimum. L'exemple de la chute libre d'un corps en physique en est une illustration dans ce qu'on appelle *un espace de configuration*, proche de l'observation. Pour que le riffi soit le plus réduit, une compétition de solutions est ouverte entre un point de départ et un point d'arrivée entre lesquels un mouvement doit se dessiner. La courbe finalement retenue est celle qui répond au principe de moindre action, assorti d'un principe variationnel. C'est ce dernier qui compare et choisit, dans la nature, l'heureuse élue.



Dans un espace 3D, on pourrait suivre le chemin sélectionné sur une surface 2D courbée en passant d'un plan tangent à l'autre.

Fort de ses ressources, assimilables à une énergie potentielle, le pouvoir exécutif s'efforce de mettre en œuvre une politique, assimilable à une énergie cinétique, afin de s'ajuster au changement d'environnement. Cette énergie ne peut que rencontrer une autre forme d'énergie cinétique comme celle de l'Opposition au Parlement mobilisant ses propres ressources, ou énergie potentielle, à déposer amendement sur amendement à travers des commissions et/ou en séances plénières. Ces amendements jouent le rôle de variations du projet de loi présenté.

Le modèle lagrangien est appelant pour qui veut comprendre déjà visuellement les diverses voies d'action qui s'offrent à un gouvernement qui désire que son projet soit le moins dénaturé possible. Le principe de moindre action est, cependant, icelieu, moins un principe qu'une tendance, voire un art politique consommé. Le résultat en droit n'est jamais acquis d'avance !



③ L'hamiltonien, lui, ne s'encombre pas de démêler, parmi les divers chemins, celui qui emportera la mise. Sa cible directe est la constante de l'énergie sur une trajectoire, appelée *intégrale première* de l'équation différentielle qui gouverne cette dernière.

Si donc la stabilité est ce qui est recherché avant toute chose, comme dans l'oscillation d'un pendule non amorti, c'est que derrière se profilent nombre de phénomènes qui se déroulent en conservant leur mouvement. Cette conservation peut être décrite dans *un espace de phases* entre des variables conjuguées, dont l'une est la dérivée de l'autre, comme la position et la vitesse (la quantité de mouvement plus exactement). Dans cet espace abstrait figurent toutes les courbes à énergie constante possibles, invisibles dans l'espace de configuration.

Si donc la stabilité est ce qui est recherché avant toute chose, comme dans l'oscillation d'un pendule non amorti, c'est que derrière se profilent nombre de phénomènes qui se déroulent en conservant leur mouvement. Cette conservation peut être décrite dans *un espace de phases* entre des variables conjuguées, dont l'une est la dérivée de l'autre, comme la position et la vitesse (la quantité de mouvement plus exactement). Dans cet espace abstrait figurent toutes les courbes à énergie constante possibles, invisibles dans l'espace de configuration

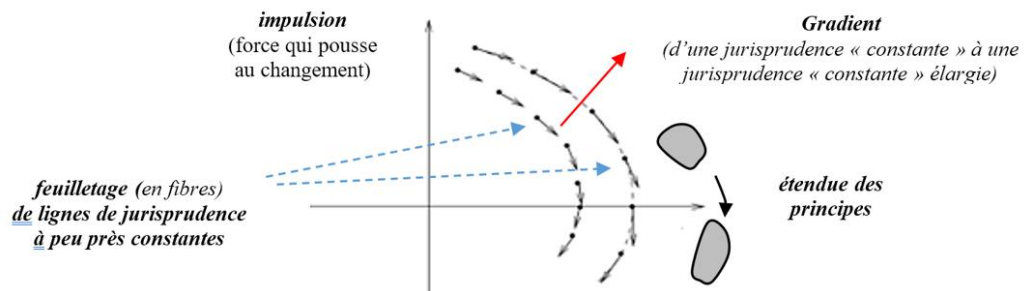
Résumé LXIII (suite)

Un tel espace est aussi fibré. Sur les fibres peuvent être dessinés, non des vecteurs tangents mais cotangents, ou covecteurs. La géométrie qui s'applique à ce *fibré cotangent* est dite *symplectique*. Cette géométrie est caractérisée essentiellement par la propriété d'antisymétrie : $\forall x, y, (xRy \text{ et } yRx \Rightarrow x = y)$, ce qui explique que toute transformation peut revenir au départ comme dans un groupe algébrique. Un *groupe de Lie* à structure symplectique invariante permet la conservation attendue.

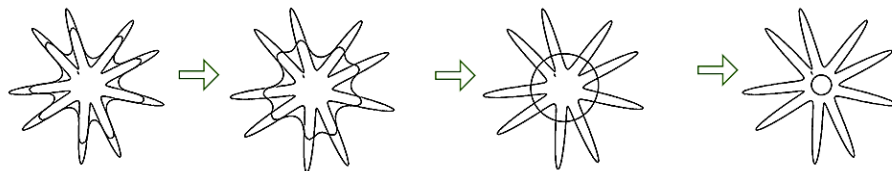
Si tel est l'hamiltonien en science, espère-t-on l'introduire en droit, mais peut-on s'en réjouir sans brouiller davantage l'étude des lois ? De l'étude des décisions de justice, certainement pas, les constitutionnelles autant que les ordinaires. Quel domaine du droit, quel ordre de phénomènes ne se prête-t-il pas mieux à une transposition possible du raisonnement hamiltonien que la jurisprudence qui, par nature, recherche à se conserver tant bien que mal ?

Dans cet espace de phases juridique, on peut imaginer un système de coordonnées, dont l'un des axes serait l'impulsion (la « quantité de mouvement » qui pousse le droit au changement), et l'autre, l'étendue des principes constitutionnels, ce qu'en France on appelle le bloc de constitutionnalité (l'ensemble des *fundamental principles* ou *constitutional core principles*).

L'idée de bloc renvoie en fait plus à l'idée d'un solide indestructible ou incassable qu'à un « volume » abstrait constant plus ou moins déformable. Comme tel, il rassemble des règles qui se pérennisent davantage que d'autres règles dont le sens change plus souvent. On y retrouve l'idée d'un groupe (pseudo-)algébrique, agissant sur cet ensemble dont les éléments sont la liberté, l'égalité et la propriété. La relative invariance de sens de chacun découle de la rencontre de leurs interprétations qui jouent le rôle en droit des covecteurs ou formes linéaires dans le formalisme hamiltonien. Autant les covecteurs, appliqués aux vecteurs, produisent un nombre, un scalaire, autant les interprétations donnent ou redonnent du sens aux droits.



④ Autre « flot » que l'hamiltonien : le flow de Ricci, dont le mouvement fait converger une surface fermée quelconque vers une surface convexe à forme sphérique. Ce flot déplace chaque point d'une telle surface fermée dans la direction perpendiculaire à la courbure en ce point. Là où la courbure est grande dans un sens, là où elle est petite, dans l'autre sens. Sur une courbe fermée quelconque, le processus peut transformer par ex. la forme d'une étoile en un cercle ; ce cercle peut lui-même se réduire en un cercle de plus en plus petit :



Avec le flot de Ricci, c'est la courbure de la forme qui évolue. Certaines parties enflent, d'autres rétrécissent, jusqu'à ce que la forme soit celle d'un ballon. Les bosses et les creux s'uniformisent au point de simplifier grandement la forme initiale. Le mouvement est régi par une équation différentielle à dérivées partielles non linéaire, car la vitesse change quand la courbure évolue, à la différence de l'autre phénomène de diffusion qu'est la chaleur qui se propage dans un volume (son équation diff. décrit un mouvement linéaire ou proportionnel)

Qu'est-ce donc que le flot de Ricci en droit ? La question est saugrenue pour qui pratique le droit, constitutionnel en l'occurrence, en ignorant un phénomène qui le piloterait au fond.

Le lecteur doit n'avoir garde d'oublier que, dans notre thèse, la volonté générale est présentée comme un « ouvert » en topologie, i.e. un fermé dont la limite ... est repoussée à l'infini. Son approximation par la volonté de tous (la majorité plus ou moins grande d'une nation) prend la forme quelconque d'un fermé, vraiment fermé, représentatif du droit positif du moment. La volonté générale ébranle un tel droit sous la poussée d'un sentiment d'injustice vécu par des groupes sociaux les plus divers. Ce sentiment peut être plus ou moins vif ou endormi selon ce que ressent tel ou tel groupe situé au pourtour de « la forme » fermée du droit en vigueur.

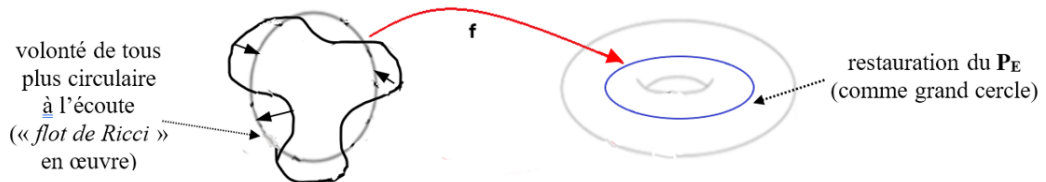
Les volitions nouvelles de la volonté générale entendent ainsi modifier les lois existantes, jugées trop injustes à certains plus qu'à d'autres. Il s'agit d'une demande d'uniformisation du droit, cherchant à le rendre du moins plus cohérent. Elle s'exprime, venant de tous côtés à des « vitesses » très différentes, selon les désirs plus ou moins pressants de chacun, individu ou groupe. Tous aspirent à une législation qui coïnciderait avec ce qu'ils estiment la « justice ».

Il est possible d'illustrer cette volonté de détordre, dénouer et de simplifier le droit en vigueur qui serait, aux yeux de beaucoup, trop difforme. Il y a comme un flot de Ricci dans l'air qui se mettrait en mouvement dans toutes les couches de la population à des degrés variables. quoique certaines n'ont pas parfois intérêt à ce que la législation change (la courbure, au point où elles se situent au bord de la surface cabossée du droit positif présent, serait quasi-plate).

Nous ne retiendrons en ce résumé-dispositif que deux exemples, portant moins sur le sentiment d'injustice que sur celui d'insatisfaction des institutions. Ce second sentiment peut toutefois nourrir le premier, devant l'incapacité de l'Etat à faire face aux exigences de justice.

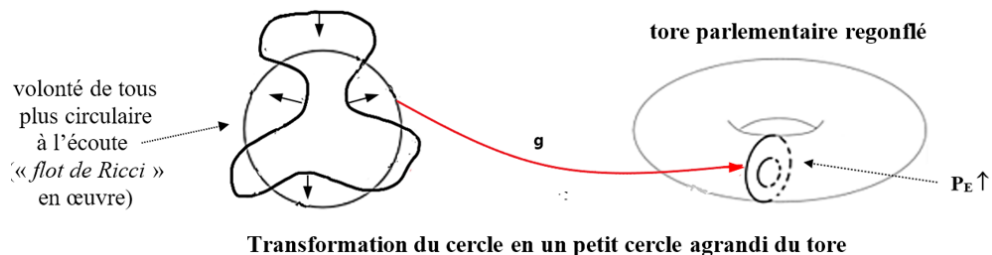
La 1^{er} exemple porte sur la volonté d'une population lassée par l'instabilité gouvernementale. Elle aspire à voir restaurer le pouvoir de l'exécutif au regard du Parlement. Les réformes institutionnelles entreprises, particulièrement en France en 1958 et 1962, consistaient à adoucir la difformité politique résultant de l'omnipotence du Parlement depuis des décades.

L'idée revenait au fond de redonner à l'exécutif un rôle accru, sur le tore d'étude à un trou représentant le lieu d'intrication des actions législatives du Parlement et du gouvernement. Les référendums constitutionnels restituèrent le pouvoir exécutif au sein du Parlement sur le grand cercle au lieu d'être relégué en pratique sur le petit cercle à répéter grosso modo la même politique sous moult gouvernements aussitôt nommés, et recomposés, que renversés.



Le 2^e exemple porte sur la volonté de la même population, via leurs représentants élus, réunis en Congrès en 2008, de rééquilibrer les institutions en faveur cette fois, en retour, du Parlement qui aurait perdu « trop de plumes » en France après les réformes de 1958 et 1962.

L'action législative du pouvoir législatif s'inscrit toujours, dans le modèle d'étude du tore, sur le petit cercle, mais le rayon de celui-ci a augmenté, comme si un autre flot de Ricci, sur le tore, avait évolué à l'envers, tout en contrôlant la courbure pour ne pas revenir trop en arrière.



Résumé LXIII

(suite et fin)

En conséquence de ces deux moments de réforme majeurs, les transformations f et g ont pu être « composées », comme deux « fonctions » pourraient l'être en mathématiques. Le tore parlementaire en France a repris des couleurs en retrouvant une forme plus habituelle, le pouvoir législatif et le pouvoir exécutif se parlant, dans l'enceinte, davantage. Il serait excessif de croire, cependant, que l'amélioration de leur communication implique que leurs actions soient toujours corrélées, d'autant que leurs lacets sur le tore ne sont pas « homotopiques ».

⑤ Dans l'étude du hasard, la science moderne a montré paradoxalement des processus stables, ou invariants par addition. C'est le cas du processus gaussien, mais aussi celui plus général du *processus de Lévy* qui révèle combien le maximum d'une somme de variables aléatoires, à accroissements indépendants, peut perturber fortement cette dernière. A côté de petits sauts en toutes directions, observables dans un mouvement brownien ordinaire, surgissent de grandes enjambées, à vitesse également aléatoire comme sur la fig. ci-dessous :

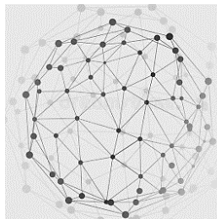


Des arrêts de justice marquants ont le même effet que celui d'individus cruciaux (du point de vue par ex. de la fortune détenue) dans une somme (celle de la fortune totale dans une population considérée d'une ville comme New York). Cet effet est non-linéaire. **On pensera aussi, en politique, à l'opinion de certains individus qui ont le pouvoir de changer l'opinion générale.** ¹

La jurisprudence constitutionnelle n'est pas exempte de si grands sauts. Non pas que tous les arrêts volent de l'un à l'autre, mais les arrêts de principe, ou les *landmark decisions* de la Cour suprême fédérale américaine, cheminent, de temps en temps, en faisant de tels bonds. Ces décisions de justice, où les juridictions suprêmes « stationnent » comme en de véritables arrêts, constituent des « pièges » dans la mesure où la pause observée peut sembler, à certains, trop longue. Pour d'autres, le statu quo, ou presque, leur paraît heureux ou avantageux.

⑥ Avec le modèle percolation, simple ou de 1^{er} passage, il est aisé de voir que, grâce également aux probabilités, un phénomène de propagation se diffuse et se répand dans différentes directions.

Une *transition de phase*, autour d'une valeur critique, p_c , fait son apparition. A défaut toujours de connaître le temps de propagation, on est en mesure de définir une forme limite en fin de processus. L'étude du droit constitutionnel peut s'en inspirer pour comprendre plus finement son fonctionnement sous d'autres angles.



¹ Werner Wendelin, « Bruit blanc, bruit noir », in Colloque déjà cit. *Maths à venir*, à La Mutualité, Paris, les 1-2 décembre 2009.

**§69.- L'APPORT VIVIFIANT DE LA SCIENCE
SUSCEPTIBLE DE RENOUVELER L'APPROCHE DU TEMPS**

(Résumé LXIV)

① L'essai de rapprocher le droit constitutionnel moderne et la théorie de la relativité, restreinte et générale, n'est pas le fruit d'un amalgame entre deux domaines hétérogènes. C'est plutôt un dialogue entre deux modes de raisonnement qui ont des idées à échanger, sans se départir de leurs singularités. En tant qu'hommes, nous sommes l'un et l'autre, quoique divisés en pensée pour des raisons d'efficacité. Chacun d'entre nous doit se spécialiser pour éviter de parler pour ne rien dire. On ne peut être spécialiste du général sans s'être frotté à du spécifique le plus varié, tant au plan de la connaissance que de l'action.

- S'il y a un risque de rester un individu façonné uniquement par la société, n'y en a-t-il pas un autre de tomber dans une métaphorisation forcenée ? On peut rester formater en mésusant en droit les concepts de la connaissance scientifique qui colportent également une rigidité.

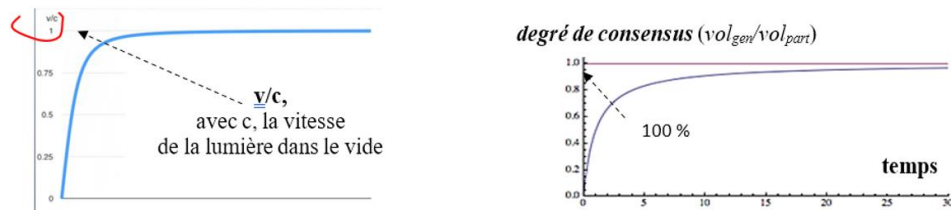
- Le risque d'enlèvement existe, si on mélange superficiellement par ignorance des concepts sans aucun lien, même caché, entre eux. En restant approximatifs, hâtifs, légers, les conclusions ne peuvent être qu'équivoques, scabreuses et erronées. D'où la nécessité d'entrer dans la mécanique des théories, comme on entre dans celui des traités internationaux spécifiant les conditions, le suivi et la logistique d'application. De là aussi la longueur inévitable de l'analyse qui ne peut faire fi des développements et de certaines démonstrations.

Sans ce travail de bénédiction laïque, le dialogue ne peut que dépérir, faute de bois à brûler !

② Le dialogue peut se résumer, ici, en diagrammes qui ont été sélectionnés comme suit :

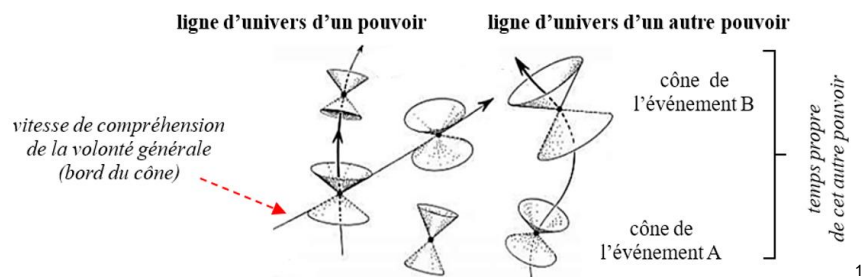
a) au regard de la relativité restreinte

** L'idée de vitesse de compréhension de la volonté générale,
à l'image de la vitesse constante de la lumière, c*



Le degré de consensus est « mesuré » par le rapport de la vitesse de compréhension de la volonté générale à la vitesse de compréhension de cette volonté par une volonté particulière, V_{gen}/V_{par} . Chaque individu, ou groupe, peut saisir diversement l'intensité de l'intérêt général.

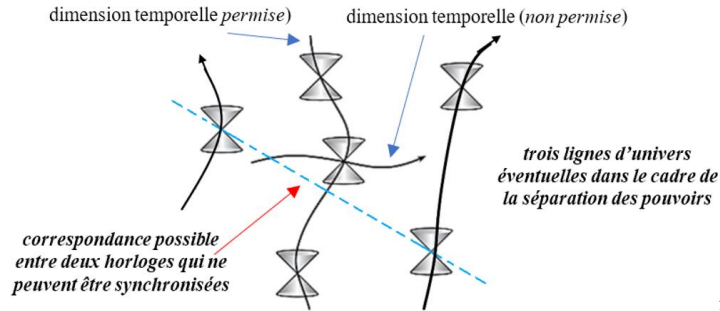
** L'idée de ligne d'univers d'un pouvoir constitutionnel*



¹ Diagramme inspiré d'un dessin évoquant la théorie de la relativité restreinte, 6 juin 2023 : <https://www.climate-policy-watcher.org/coarse-graining/spacetime-null-cones-metrics-conformal-geometry.html>

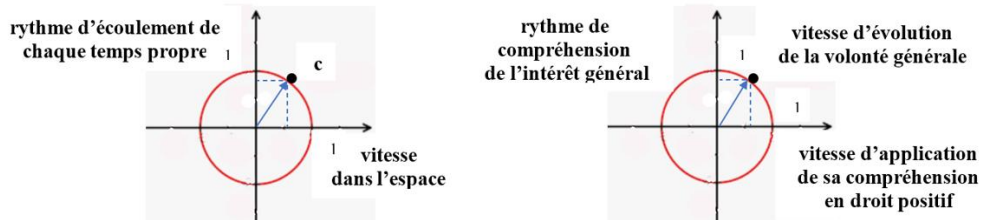
Une ligne d'univers relie divers événements vécus par un pouvoir. (Par ex., le pouvoir législatif, ou du moins une de ses Chambres, peut participer à la confection ou à l'interprétation de telle ou telle loi, organiser des auditions, publiques ou à huis clos, monter une commission d'enquête, refuser de voter un budget qui lui paraît trop déficitaire, censurer le gouvernement si la Constitution l'autorise, etc.) En aucun cas, sa vitesse de compréhension de la volonté générale ne peut épuiser totalement la saisie de l'intérêt général véhiculé par cette dernière.

* L'idée d'une correspondance possible entre horloges, malgré l'absence de synchronisation dès lors qu'elles sont séparées et enfermées dans leurs temps propres

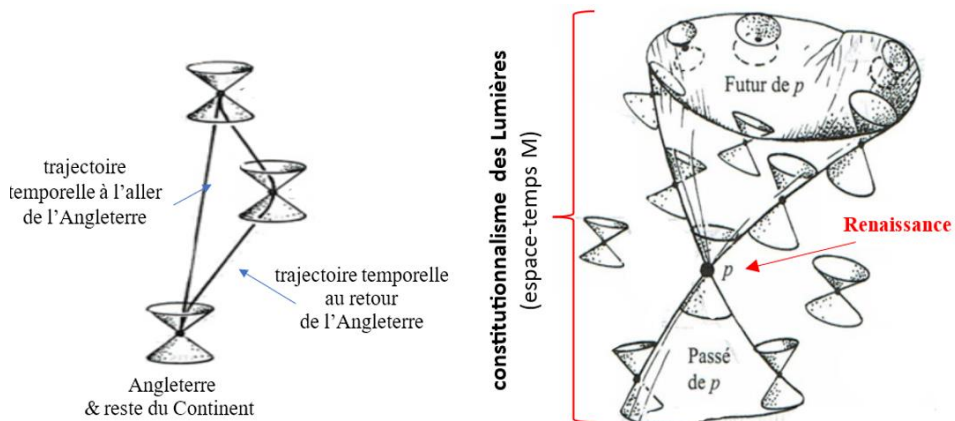


Chaque individu, groupe ou pouvoir, constitutionnel ou disséminé dans la société, se déplace dans son temps propre, non sans influencer, ou être influencé par les autres. Ce peut être à l'occasion de discussions, voire d'accords conclus entre intérêts partiellement différents.

* L'idée d'une décomposition de la vitesse de compréhension de la volonté générale, en composante spatiale (en se convertissant en droit positif) et en composante temporelle (en s'inscrivant dans un droit naturel, toujours en mouvement et critique de lui-même)



* Une comparaison des trajectoires gémeilles temporelles de l'Angleterre et du Continent à l'âge des Lumières, et la structure causale relativiste du constitutionnalisme moderne



¹ Diagramme inspiré d'un dessin évoquant la théorie de la relativité restreinte, Sean Carroll, *In truth, only atoms and the void*, <https://www.preposterousuniverse.com/blog/2016/11/24/thanksgiving-11>

Les bords des cônes individuels, ou de pouvoir, représentent la vitesse de compréhension de la volonté générale à des moments donnés différents. Une telle vitesse est toujours une vitesse limite, vers laquelle individus ou groupes ne peuvent que tendre asymptotiquement.

Par ailleurs, la symétrie temporelle a été brisée entre l'Angleterre et le reste du Continent européen. Outre-Manche, on ne vit plus la même simultanéité. L'Histoire s'est accélérée en Angleterre qui a gagné en avance grâce à sa révolution institutionnelle, instaurant la séparation des pouvoirs, et sa révolution industrielle. Tard-venus, d'autres pays l'ont rejointe.

b) au regard de la relativité générale

* *L'idée d'une profonde similarité entre la gravité et l'accélération*

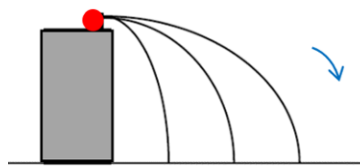
Le principe d'équivalence einsteinienne modifie radicalement la nature de la gravitation newtonienne. La gravité n'est plus identifiée à une force, mais à son effet : l'accélération. La force gravitationnelle peut même être éliminée dans le contexte d'un corps en chute libre, dont le mouvement est assimilable à un mouvement inertiel sur lequel le total des forces, non gravitationnelles, est nul (la force gravitationnelle est elle-même réduite à zéro).

De ce point de vue, les mouvements inertiels, d'après Einstein, ne sont pas inertiels au sens de Newton. Le fait de rester immobile n'est pas un mouvement en chute libre : *la force gravitationnelle agissant sur une personne au repos est compensée par la résistance exercée par le sol (une force dirigée par le haut), mais ces deux forces ne sont pas nulles séparément, comme l'impose, Einstein.*¹

Le principe d'équivalence était déjà entrevu par Galilée pour qui, dans un même champ gravitationnel, tous les corps, quel que soit leur poids, subissent la même accélération (pour autant que la résistance de l'air ne perturbe pas les mesures). Cette propriété est particulière au champ « gravitationnel ». Le principe d'équivalence d'Einstein finit d'éclairer le fait que *la masse gravitationnelle (passive) est la même (ou proportionnelle) que la masse inertielle. Le fait que la gravitation puisse être compensée par l'accélération en est une conséquence.*

En clair, les lois physiques sont les mêmes dans un système accéléré que dans un système soumis à la gravité. Par ex., les effets de l'accélération d'une fusée et ceux d'un champ gravitationnel sont rigoureusement identiques. Qui dit enfin champ gravitationnel dit courbure, et qui dit courbure dit déplacement géodésique dans l'espace-temps.²

Le principe d'équivalence einsteinienne, esquissé chez Galilée au début du XVI^e siècle, se retrouve, de façon non formulée, chez Locke, à la fin du même siècle. Le pouvoir politique est d'abord perçu à travers l'accélération qui entraîne tôt ou tard les gens qui le détiennent, ou y accèdent. Leur champ d'action local est pareillement uniforme. Tous subissent la même accélération qui les corrompt inévitablement. La corruption doit être entendue au sens large, et pas que par rapport à l'argent. Cette accélération fatale courbe, également, tout l'alentour.



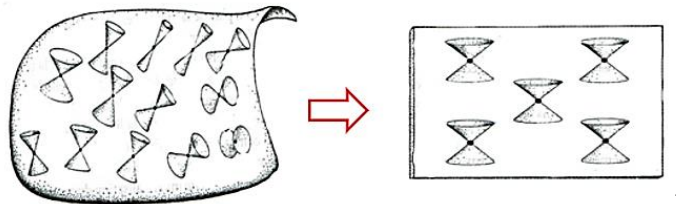
Pour Locke, le pouvoir politique, qu'il soit petit ou grand, a toujours tendance à s'accroître suivant quasiment la même loi. Il « tombe » pareillement, au fur et à mesure qu'il grossit. **Non séparé et contrarié, il « chute librement », par ses excès, en accélération quasi- constante...**

The people are generally and wrongfully ill-treated on any occasion (Second Treaty of government, §224)

¹ R. Penrose, *A la découverte des lois de l'univers*, op. cit. p.381.

² *Ibid.* p.380 ; <http://chaours.rv.pagesperso-orange.fr/physique/Grelat/grelat3.htm> ; Trinh Xuan Thuan, *Le chaos et l'harmonie*, op. cit., p.217.

Les hommes au pouvoir, particulièrement les dictateurs, ne s'arrêtent jamais ; il faut que quelque chose les arrête. Ils sont condamnés, à un moment ou à autre, à franchir la ligne rouge au-delà de laquelle ils finissent souvent par rencontrer une résistance à leur propre déformation. Laisse à lui-même, et bien que rationnel, le Léviathan de Hobbes régente à l'excès tout l'espace social et la diversité de ses mouvements. Tout se passe comme si, dans ce domaine, la répartition irrégulière des cônes de lumière, dans l'espace-temps de la relativité générale, redevenait une répartition uniforme comme dans l'espace-temps plat de Minkowski.



**L'idée de la gravité n'est pas que de la géométrie, même non euclidienne.
L'espace est courbé par la gravité*

Le mouvement d'un corps inertiel suit une géodésique. C'est entendu, il n'y pas lieu d'y introduire la gravitation en plus pour en rendre compte. Mais ce serait trop dire que la gravitation est totalement absorbée par la géométrie, fût-elle riemannienne ou pseudo-riemannienne en considérant l'espace-temps.

La chute d'un corps sur la Terre ne dépend, certes, que de la courbure autour de la Terre, mais cette courbure est créée par notre planète. On ne peut pas aller jusqu'à conclure que la gravité est seulement la courbure, ou est due à la courbure. Même si le champ gravitationnel est caractérisé, comme tout champ, par des lignes de champ, la gravité demeure une force, comme le demeure un corps électriquement chargé qui génère un champ électromagnétique.

Ce qui joue, en relativité générale, un rôle semblable à la charge d'un corps électrique est sa masse inertielle. Bien que tous les corps accélèrent au même taux dans un champ gravitationnel, la grandeur de la force agissant sur un corps est proportionnelle à sa masse. On ne saurait donc affirmer que la gravité n'est qu'une affaire de maths, quand bien même la théorie de la relativité générale utilise à haute ose une géométrie inhabituelle encore à beaucoup.

Le tenseur énergie-impulsion est dans la théorie d'Einstein l'équivalent du vecteur charge-courant J de la théorie de Maxwell. La grandeur T peut être vue comme décrivant la source de la gravitation, de même que J est la source d'électromagnétisme.²

En droit, l'égalité courbure = masse ne veut pas dire non plus que la courbure (la déformation de l'espace-temps constitutionnel) explique la masse (le pouvoir politico-juridique en l'espèce). La matière du pouvoir courbe l'espace public. Malgré l'existence de lignes d'interprétation du droit, on ne peut en droit faire l'économie du phénomène du pouvoir en retrait.

Il en est ainsi du pouvoir exécutif dont l'énergie est saluée et recommandée, de Machiavel à Alexander Hamilton. Lui seul est capable de modeler l'espace social qui ne peut être aussi inchangeable que l'espace de la mécanique classique, dynamique certes (et le droit moderne fut à cet égard à la bonne école), mais pas susceptible de se déformer sous l'action d'un pouvoir. En s'appliquant à modeler l'espace par son énergie et quantité de mouvement, l'exécutif impulse le mouvement dans la société qui rechigne à bouger. Machiavel entendait libérer l'Italie de puissances étrangères, et Hamilton constituer un Etat fédéral américain fort.

Locke partagera aussi l'idée de Hobbes de la nécessité d'un *puissant Léviathan*. Mais, dans l'Etat, le pouvoir qui a vocation à s'imposer le plus à son entourage devrait, selon lui, être le pouvoir législatif en ce qu'il possède à titre principal la fonction législative suprême. On le voit, sans conteste, aux Etats-Unis avec le pouvoir du Congrès. Sa position dominante entre, il est vrai, en concurrence accrue avec la Cour suprême qui prétend en sanctionner les abus.

- Mais précisez davantage, de grâce, en quoi ces divers pouvoirs courbent l'espace du droit !

¹ Les diagrammes, ont été tirés R. Penrose, *A la découverte des lois de l'univers*, p.390 et 395. Les diagrammes étaient séparés.

² R. Penrose, *A la découverte des lois de l'univers*, p.449.

- Avant même de courber le droit, ces différents pouvoirs entrent déjà dans le « champ gravitationnel » de la Constitution qui apparaît, de ce point de vue, comme un pouvoir. Sa matérialité n'est qu'un parchemin de papier qui introduit, toutefois, des contraintes scellées dans un pacte social hors du commun. En vertu de cette Constitution, les pouvoirs législatif, exécutif et judiciaire doivent emprunter les voies procédurales indiquées, même si celles-ci sont sujettes, de leur part, à interprétation.

Ces pouvoirs constitutionnels sont eux-mêmes des masses susceptibles d'exercer une « influence gravitationnelle » sur toute autre pouvoir à proximité, immédiate ou pas. Ils exercent d'abord cette influence entre eux en confrontant leurs interprétations. Malgré leurs lignes d'univers propres, leur séparation finit par dessiner la forme finale du droit dont les pouvoirs infra-constitutionnels ne peuvent que suivre les voies de raisonnement prescrites.

Pour faire court, le « champ gravitationnel » en droit constitutionnel est le champ procédural qui impose certaines trajectoires pour qui veut dire son mot ou agir dans l'Etat. Pour qui veut se plaindre même en justice, il existe aussi une technique processuelle à respecter. Des droits particuliers, sans procédures associées, sont des droits substantiels formels, mais non réels.

** La stratégie madisonienne revisitée de façon relativiste*

Dans la masse totale du système institutionnel, entrent aussi celle des groupes de pression, les lobbies, Ce sont aussi des pouvoirs, visibles dans leurs bureaux de représentation autour des lieux où se fabriquent les lois et la réglementation (Washington DC, Londres, Paris, Bruxelles). Ils sont aujourd'hui, à Washington DC plus de 35.000, et à Bruxelles plus de 25.000.

Leur influence est plus discrète. Elle s'exerce dans le postscenium, l'arrière-cour du proscenium constitutionnel, ce que nous appelons d'un mot commode l'*hypogée*. Par leur action souterraine, ils s'ingénient aussi à courber ou à contrecourber, à leur avantage, les lignes d'action et d'interprétation du droit positif dessinées par les pouvoirs publics.

Pour ne pas se laisser, toutefois, trop influencer par ces pouvoirs périphériques, la stratégie madisonienne avait pour objet de multiplier et de croiser les groupes de pression afin d'en atténuer leur puissance qui peut s'avérer nocive. La géométrie courbe, à laquelle recourt la théorie de la relativité générale, fait mieux voir la technique procédurale de cette stratégie.

En sus de leur enregistrement officiel, les groupes de pression doivent se conformer à des règles de fixation de rendez-vous, d'audition ou de de consultation auprès des pouvoirs législatif, exécutif et judiciaire. Ces règles sont des chemins balisés, des « couloirs » tracés à l'avance, et en toute transparence, par les pouvoirs publics. Ces trajectoires obligent les intéressés à négocier entre eux une plateforme commune, combinant des intérêts privés hétérogènes, qui porte moins atteinte à l'intérêt public. Comme un opérateur laplacien, la stratégie madisonienne moyennise ainsi leurs demandes. La sphère, avec ses multiples méridiens qui convergent vers un pôle, est une bonne image de la courbure mise en place par telle stratégie qui invite, sans forcer ni menacer, les groupes à « généraliser » leurs intérêts.

Une distance minimale entre les couloirs « méridienisés » est requise pour éviter de voir regrouper des intérêts trop similaires. Des autorités de la concurrence surveillent les ententes.

Tout n'est pas, toutefois, contrôlable. Les groupes de pression peuvent continuer d'exercer, sous le manteau, des forces « non gravitationnelles », pareils à des aimants cherchant à perturber, freiner ou accélérer, le balancement normal entre les pouvoirs de l'Etat. Ces actions, qui ne sortent nullement de l'ombre, se manifestent aussi dans les media, ou à travers le financement ou l'encouragement de certaines manifestations de masse. Il serait naïf d'ignorer celles qui représentent des courants idéologiques ou soutiennent des puissances étrangères.

Compte tenu de cette situation extra-étatique, la stratégie madisonienne présente des limites, même dans l'espace courbé qu'elle a subtilement conçu au sein du droit constitutionnel.

** La marque de la gravité sur le temps*

La théorie de la relativité générale nous enseigne que plus la gravité est faible, moins les objets pèsent. Plus elle est grande, plus les objets deviennent lourds. Plus la gravité est grande également, plus le temps ralentit pour celui ou celle qui est au plus près d'elle. Ce n'est plus l'espace qui est malléable, déformable et modelable par la gravité. Comme la vitesse, la gravité. Comme la vitesse, la gravité modifie le temps.

C'est le temps lui-même qui en subit l'effet. Pour des personnes restées au pied d'un immeuble de grande hauteur, le temps s'écoule plus lentement que pour celles situées à son sommet, mais la différence, dans le quotidien, est quasi-imperceptible.

En droit constitutionnel, une telle différence n'est pas négligeable. L'effet des politiques entreprises tarde à se faire sentir comme des signaux lumineux très espacés. Les gens au bas de la société, en proie aux besoins les plus immédiats, éprouvent une vie plus lourde et des journées qui s'étirent à n'en plus voir le bout... Sans être toujours indifférent à leur sort, le pouvoir politique a souvent d'autres préoccupations à penser. Il est aux prises avec des difficultés propres à son niveau d'action qui s'inscrivent dans une autre durée (problèmes macro-économiques comme la dette publique à rembourser, l'inflation à maîtriser, le chômage à réduire, l'investissement à relancer, la modernisation des armées à programmer, etc.).

La hauteur de vue, qu'exige tout gouvernement, s'accompagne souvent d'un manque de lucidité pour traiter des situations locales comme la gestion quotidienne des villes et l'intégration en leur sein des populations allogènes. Une décentralisation de l'action peut atténuer cette tension, au risque toutefois de négliger, à son tour, les impératifs globaux.

② La flèche du temps est remontée sur l'arc de la connaissance, et son trait ne semble plus revenir à son point de déclenchement.

Des esprits en oublient le déterminisme et en célèbrent l'irrecevabilité due aux fluctuations et autres perturbations. Mais ils oublient aussi que la trajectoire de la flèche doit obéir à une certaine loi, même si l'atteinte de la cible n'est pas toujours assurée. Un bon tireur peut échouer de temps en temps, mais il ne tire pas quand même tirer n'importe où, moins souvent en tout cas qu'un tireur inexpérimenté.

Cette historiette résume la querelle du déterminisme dont les partisans, dignes successeurs d'Apollon et de Platon, réagissent contre les partisans de Dionysos, dansant à demi-éméchés au point de tituber comme le *clinamen* d'Epicure dont la déviation contrarie l'ordre de la nature.

Si on se place au plan du droit, il faut admettre qu'un droit sans règle ni contrainte n'est pas un droit, mais il faut aussi admettre qu'un droit qui va toujours droit ne pourrait se renouveler et prospérer au milieu des « bruits » dont il ne saurait tirer profit de certains, aussi gênants qu'ils soient. Dans sa définition même, le droit constitutionnel moderne aime la contradiction, y compris contre lui-même. Sans elle, il en sera fini de ses Lumières si elles étaient privées de la source d'énergie qui les nourrit. Le déterminisme de la nature que s'efforce d'intérioriser, souvent à son insu, le constitutionnalisme n'exclut pas, chez lui, une dose d'indéterminisme.

③ Le temps véhicule autant l'ordre que le désordre dans la nature et le droit. Certes, il y a, au cours du temps, des étincelles qui embrasent la forêt, mais le feu ne se propage pas n'importe comment. En sus des conditions météorologiques, il y a des contraintes géométriques qui expliquent et orientent la progression de l'incendie ou son arrêt. C'est dire si, au cœur du désordre, un ordre caché opère en silence sous le « bruit » et le crépitement du bois.

Ces propos métaphoriques éclairent d'autres aspects discrets du fonctionnement du droit constitutionnel. L'étude d'un tel droit tâche encore de saisir le déterminisme qui sous-tend son évolution. Il y a toujours lieu de penser qu'il existe, à son niveau, des lois naturelles qui œuvrent de concert avec les lois civiles. La flèche du temps révèle un peu ses secrets.

L'égalité du taux d'oubli et du taux d'actualisation en est un, dans le cadre d'un temps psychologique collectif invariant, nonobstant la diversité des temps psychologiques. Ordinaires. Ces temps ne s'écoulent pas, de manière uniforme, ils sont notoirement élastiques (*une minute d'ennui ou d'effroi prend de allures d'éternité, tandis qu'un moment de bonheur semble passer en un clin d'œil ; d'autre part, plus nous vieillissons, plus le temps semble passer vite*, Trinh Xuan Thuan *Vertige du cosmos*, op. cit., p.381). Cette égalité complète l'approche relativiste, d'inspiration einsteinienne, mettant en rapport des temps propres différents aussi bien entre des pouvoirs installés qu'entre des acteurs politiques en société.

La Constitution définit des règles de passage entre les pouvoirs législatif, exécutif et judiciaire malgré l'absence d'une simultanéité absolue entre leurs points de vue. Des règles de liaison plus générales opèrent aussi entre les volontés particulières. La composition de leurs vitesses de compréhension de l'intérêt général leur permet de tendre vers une meilleure compréhension de la volonté générale du moment sans jamais espérer égaler cette dernière.

§70.- DE L'HORREUR DU VIDE A SON ACCEPTATION SUR TERRE ET AU CIEL

(Résumé LXV)

① La question du vide surgit à l'âge des Lumières qui substituent, à l'horreur du vide, son admission. La science moderne fut la première à « tolérer » le vide dans la nature. Des philosophes comme Descartes, Hobbes et Spinoza s'y opposaient, en raison d'un malentendu. Par vide, ils crurent entendre un vide absolu, un néant en quelque sorte, ce qui n'était pas, en fait, l'opinion de Boyle, de *la Royal society*, qui ne voyait dans le vide qu'un vide relatif.

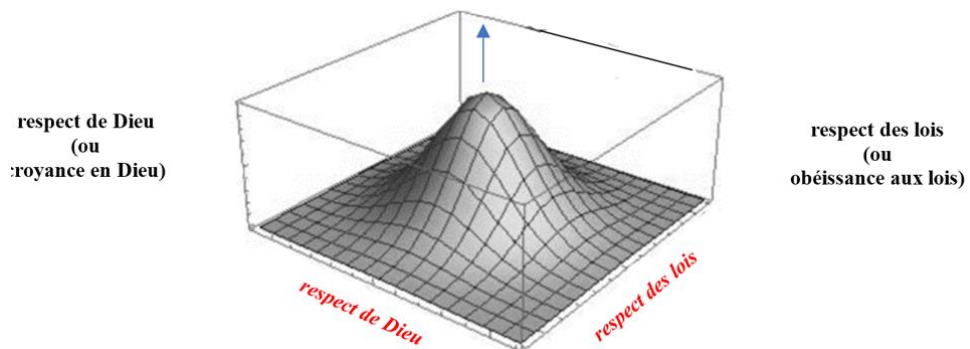
② La découverte du vide dans un tube, par Torricelli, Pascal et Boyle, révèle, à l'occasion, une logique des forces entre une masse gazeuse, l'air, et une colonne liquide, comme celle du mercure dans un tube. Un « équilibre des liqueurs » s'établit. Il annonce celui des poids et contrepoids dans une balance des pouvoirs. L'épistémè des modes de raisonnement communs est ci patente pour qui douterait qu'il n'en existerait même pas un spécimen.

En surface, c'est séparé ; en profondeur, c'est uni. Une lecture d'ensemble est perceptible.

③ La « tolérance » dans l'esprit et dans la société fut introduite par un penseur rejeté par l'intolérance d'une croyance absolue qui ne souffrait pas que l'on puisse s'y soustraire. Le paradoxe de Bayle, formulé à la fin du XVII^e siècle, ose dire qu'une société d'athées et de libres penseurs est imaginable. Elle peut être stable, et même plus durable qu'une société de purs chrétiens, censés tendre la joue plutôt que de répliquer et de se défendre avec la force armée.

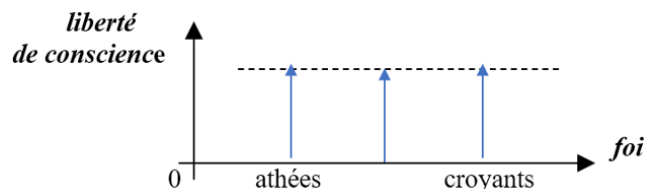
Au XVIII^e siècle, un homme éclairé comme Montesquieu verra dans ce paradoxe un danger pour l'ordre de la société. Montesquieu se place sur le plan de l'utilité. Il ne discourt pas en théologien. Rousseau s'insurgera autant du même point de vue. Au XIX^e siècle, Durkheim ne peut concevoir un autre fondement à la société qui ne soit religieux ou simplement sacré.

Une courbe de Gauss, de notre cru, semble donner raison statiquement à ces penseurs, en songeant surtout au XVIII^e siècle où la déchristianisation en Europe n'avait guère commencé.



L'axe vertical indique la fréquence ou le % des individus. La fréquence la plus élevée est autour de la moyenne.

Cependant, un autre diagramme, également de notre cru, permet de mieux comprendre la position de Bayle qui, en son fond intérieur, demeure chrétien. Bayle ne fut, toutefois, pas prosélyte, ce qui est une exception dans le christianisme qui s'efforce de convertir autrui :



Le trait en pointillé ne suggère pas un plafond, mais une égalité d'accès.

④ A l'âge des Lumières, d'autres penseurs ont ambitionné au contraire de « visiter » la pensée de Dieu pour montrer à tous combien la place était occupée. Pour Pascal, la voie recommandée pour y accéder est celle du « cœur ». En soutien, il fait appel au calcul des probabilités, qu'il a initié, susceptible de plaire aux esprits intéressés comme peuvent l'être des individus attirés par le gain dans les jeux de hasard. En lisant entre les lignes ses *Pensées*, on se demande si sa croyance est aussi ferme qu'il l'affirme. Sa croyance en Dieu, via le canal de Jésus-Christ, donne l'impression de coexister avec la croyance d'un vide absolu dans l'univers qui l'effraie.

Miserere de moi ! comme en écho de la plainte dans la Bible, ancienne et nouvelle : *Seigneur, Seigneur, pourquoi m'as-tu abandonné ?* Combien la vie humaine est pitoyable, pour Pascal.

⑤ Une autre tradition religieuse justifie Dieu comme source du général, et non des miracles relevant de l'exceptionnel à peine croyable.

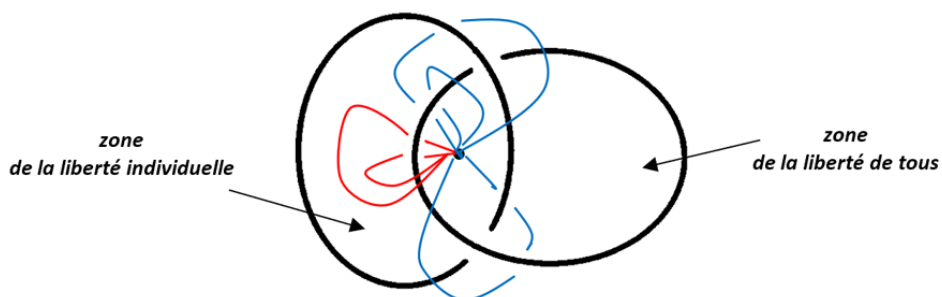
Au XVII^e siècle, le philosophe Malebranche appartient à cette tradition qui veut que Dieu sauve tous les hommes sans exception. Montesquieu fut fortement influencé par ce philosophe, à la fois savant, théologien et prêtre. La marque distinctive de la loi dans l'*Esprit des lois* est précisément la généralité de son objet, au contraire des actes du pouvoir exécutif ou des décisions de justice. Dieu, certes, n'est pas, pour le croyant, un objet, même en idée (on peut-être entrer dans la pensée de Dieu, sans pouvoir l'analyser, comme si on était, à l'extérieur, devant un objet), mais Montesquieu attribue à la loi, quant à son objet, une visée générale.

Chez Rousseau, la source de la loi relève, autant que son objet, du général. Tous les individus doivent être considérés comme acteurs de la loi bien qu'il ne faille pas confondre la volonté générale et la volonté de tous. La volonté générale est enfouie dans le plus intime de l'homme, dans sa volonté individuelle et pas seulement particulière. Elle est au cœur de soi et en même temps la plus distante. Comme Dieu, elle est le tout proche et le tout autre. La volonté générale ne peut pas être perçue ou mesurée à l'aune d'une majorité quelconque. Elle est nécessaire pour vitaliser la société, mais demeure furtive et connaissable que par des rares moments.

- Cet alinéa est un peu obscur : est-ce que c'est général, ou est-ce ce que le moi sent en lui ? Voulez-vous dire que le *je* individuel peut sentir en soi le sens général de la volonté générale ?

- Oui, parfois, en pensant à autrui, aux moins chanceux que lui, à ceux qui ne sont pas libres, etc. En pensant à l'autre, *je* suis dans le juste. La pensée de la justice ne peut pas être que tournée vers soi, même si je vis personnellement une certaine injustice. Le vrai sentiment de justice me transporte au-delà de moi. Je suis dans le général. On comprend qu'Aristote considérait, dès l'antiquité, que la justice soit la plus grande vertu. C'est la plus difficile. La justice, *la plus parfaite des vertus*, est un état de choses et un état d'âme, *une disposition*.¹

La volonté générale ravive la foi dans les Lumières en aidant le moi à avoir des droits. Aide-toi, [le Ciel de] la volonté générale t'aidera, certes, mais on ne devient pas soi-même tout seul. La volonté générale est une composante de la dialectique entre sujet de droit et loi de l'Etat.



En termes de liberté, la volonté générale entrelace la liberté individuelle et la liberté de tous. Dans l'espace complémentaire du nœud, peuvent être visualisées différentes classes d'homotopie ou de lacets représentant chacune en droit une classe d'intérêts.

- La propriété de généralité, que cerne en « Dieu » la théologie, tombe-t-elle donc du Ciel ?

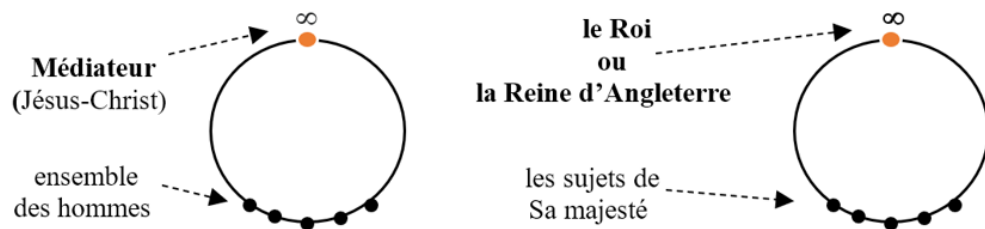
¹ Aristote, *Ethique à Nicomaque*, V, 1129b ; 137a. V. pour un commentaire : Richard Bodéüs, « La justice, état de choses, état d'âme », Cairn, 2003, <https://www.cairn.info/aristote-bonheur-et-vertus--9782130523734-page-133.htm>

- Pas vraiment. Sans vouloir alarmer les pieux dévots, il faut reconnaître que le sens du général se trouve déjà dans le constitutionnalisme ancien. L'*agora*, à Athènes, était le lieu même où se discutait et de discernait le général. L'expression de *res publica* à Rome indique le souci de l'intérêt commun. Les Lumières modernes ont retrouvé cette façon de penser via la théologie rationnelle, mais il s'agit plus d'un prêt, pour un rendu, du Ciel que d'une manne céleste...

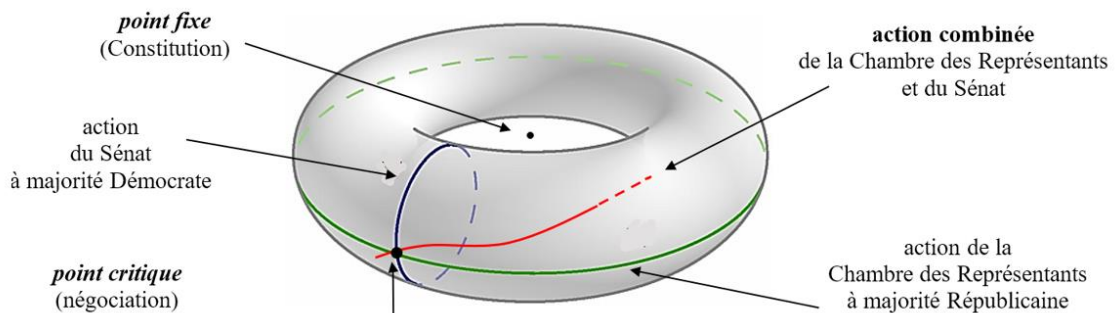
⑥ D'autres tentatives de combler la vacuité du Ciel se sont inspirées des notions mathématiques émergeant à l'âge des Lumières. On a imaginé Dieu comme un point fixe ou un point de fuite unique, sans que les propriétés des notions se prêtent aisément à ce traitement. Pascal et Leibniz s'y ont essayé, mais le résultat n'est pas à la hauteur de leur espérance.

⑦ Le raisonnement consistant à « compactifier » une droite infinie, en un cercle comportant un point ∞ , est clairement apparent dans le Ciel des théologiens.

Il est incontestable qu'est discernable un tel mode de pensée dans le christianisme qui voit dans le Dieu fait homme, qu'est le Christ, une médiation possible entre le monde divin et le monde humain. Le Christ serait le Médiateur qui entend mettre fin au conflit interminable, « infini », entre les enfants de Dieu. Mais ce raisonnement n'est en rien sacré par nature. Il est présent, par ex., en droit constitutionnel anglais sans que l'on songe à le déduire de l'Évangile. Ce qui est sûr, en revanche, est que les deux compactifications sont formellement identiques en étant, en pratique, séparables au point de ne pas pouvoir faire tomber leur lien sous le sens.



Il vaut incidemment de constater que les Juifs, dans l'ancien régime, remplissaient *la fonction sociale à l'égard des pauvres que les Chrétiens au pouvoir n'étaient pas disposés à remplir eux-mêmes*. **L'écart entre le pouvoir politique et les pauvres était incommensurable.** Les Juifs servaient de médiateurs entre les hommes de pouvoir et les couches de la population qui avaient besoin de leurs services. Ils occupaient une situation similaire au Christ. Un tel rapprochement était trop scandaleux pour être pensé comme tel par les Chrétiens. Les Juifs ne pouvaient qu'en subir le contrecoup. Ils attiraient à la fois l'hostilité que les misérables éprouvaient vis-à-vis de leur pouvoir, et le mépris et la peur qu'éprouvaient les classes aisées à leur égard comme couche supérieure des exclus. A l'image du Christ, situé entre le pouvoir romain et la foule galiléenne, ils étaient honnis et sacrifiés des deux côtés. ¹



Les partis Démocrate et Républicain américains se situent aux deux bords d'un cylindre, à distance peu joignable en temps de crise. En recollant les bords en un tore au sein du Congrès, ils deviennent à même d'avoir une action concertée.

Dieu comme point fixe ou comme point de fuite sont deux idées de Dieu qui ne paraissent pas convaincre tous les Terriens qui voient certains de leurs modes de raisonnement transvaser dans le Ciel, sans que l'on en respecte les propriétés variées. Ces propriétés ne se réduisent pas à l'unicité, fût-elle divine.

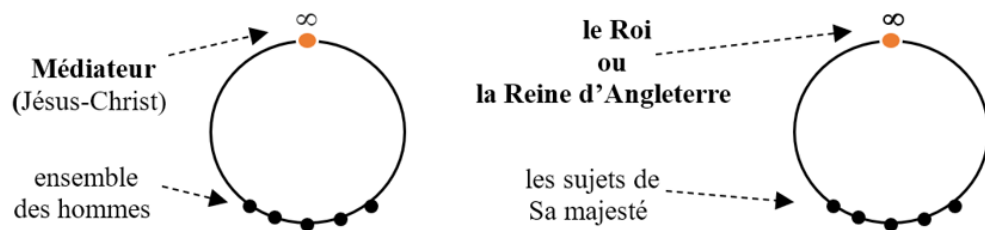
¹ Le rapprochement est nôtre, mais les citations sont tirées de Robert Bonfil, *Les Juifs d'Italie à l'époque de la Renaissance.. Stratégies de la différence à l'aube de la modernité*, L'Harmattan, Paris, 1995, p.96.

Résumé LXV (suite)

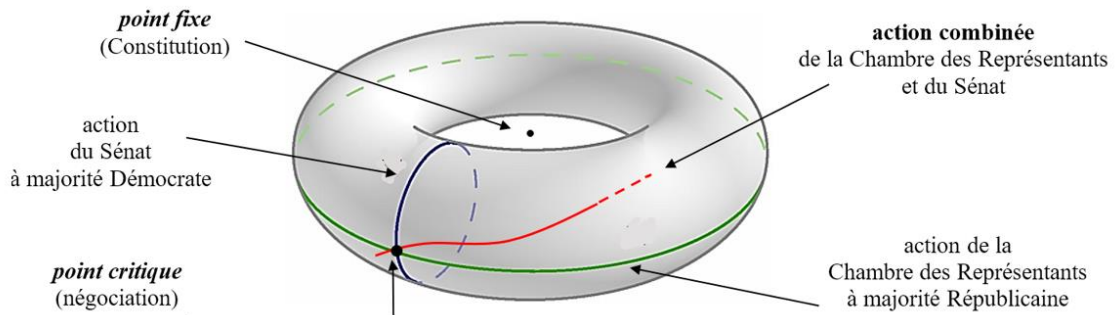
⑥ D'autres tentatives de combler la vacuité du Ciel se sont inspirées des notions mathématiques émergeant à l'âge des Lumières. On a imaginé Dieu comme un point fixe ou un point de fuite unique, sans que les propriétés des notions se prêtent aisément à ce traitement. Pascal et Leibniz s'y ont essayé, mais le résultat n'est pas à la hauteur de leur espérance.

⑦ Le raisonnement consistant à « compactifier » une droite infinie, en un cercle comportant un point ∞ , est clairement apparent dans le Ciel des théologiens.

Il est incontestable qu'est discernable un tel mode de pensée dans le christianisme qui voit dans le Dieu fait homme, qu'est le Christ, une médiation possible entre le monde divin et le monde humain. Le Christ serait le Médiateur qui entend mettre fin au conflit interminable, « infini », entre les enfants de Dieu. Mais ce raisonnement n'est en rien sacré par nature. Il est présent, par ex., en droit constitutionnel anglais sans que l'on songe à le déduire de l'Evangile. Ce qui est sûr, en revanche, est que les deux compactifications sont formellement identiques en étant, en pratique, séparables au point de ne pas pouvoir faire tomber leur lien sous le sens.



Il vaut incidemment de constater que les Juifs, dans l'ancien régime, remplissaient la fonction sociale à l'égard des pauvres que les Chrétiens au pouvoir n'étaient pas disposés à remplir eux-mêmes. **L'écart entre le pouvoir politique et les pauvres était incommensurable.** Les Juifs servaient de médiateurs entre les hommes de pouvoir et les couches de la population qui avaient besoin de leurs services. Ils occupaient une situation similaire au Christ. Un tel rapprochement était trop scandaleux pour être pensé comme tel par les Chrétiens. Les Juifs ne pouvaient qu'en subir le contrecoup. Ils attiraient à la fois l'hostilité que les misérables éprouvaient vis-à-vis de leur pouvoir, et le mépris et la peur qu'éprouvaient les classes aisées à leur égard comme couche supérieure des exclus. A l'image du Christ, situé entre le pouvoir romain et la foule galiléenne, ils étaient honnis et sacrifiés des deux côtés. ¹



Les partis Démocrate et Républicain américains se situent aux deux bords d'un cylindre, à distance peu joignable en temps de crise. En recollant les bords en un tore au sein du Congrès, ils deviennent à même d'avoir une action concertée.

Dieu comme point fixe ou comme point de fuite sont deux idées de Dieu qui ne paraissent pas convaincre tous les Terriens qui voient certains de leurs modes de raisonnement transvaser dans le Ciel, sans que l'on en respecte les propriétés variées. Ces propriétés ne se réduisent pas à l'unicité, fût-elle divine.

¹ Le rapprochement est nôtre, mais les citations sont tirées de Robert Bonfil, *Les Juifs d'Italie à l'époque de la Renaissance. Stratégies de la différence à l'aube de la modernité*, L'Harmattan, Paris, 1995, p.96.

*Résumé LXV**(suite et fin)*

⑧ Malgré sa déconstruction depuis Spinoza et autres penseurs des Lumières, l'idée de Dieu est demeurée présente dans le constitutionnalisme moderne sous sa forme minimale de déisme. Le dogme de la Trinité n'a nullement convaincu les juristes de l'introduire en droit public. L'idée de Dieu est présente dans les Déclarations des droits américaine et française, et les 50 Constitutions des Etats des Etats-Unis. Le Roi en Angleterre reste le Chef de l'Eglise établie.

On peut dire que la croyance en Dieu est comme une force psychique moyenne qui continue de faire pression sur l'esprit des individus, particulièrement dans le monde anglo-américain. A y regarder de plus près, on peut toutefois douter de la cohérence d'une telle croyance.

- Pas clair, comme fin de résumé !

- Davantage encore que Malebranche qui mêlait en pensée théologie et science moderne, il appert, pour en rester aux penseurs, que certains peuvent avoir plusieurs croyances en même temps : croire ou ne pas croire, comme Pascal, ou, au sein du croire, être catholique, libre-penseur et de sensibilité protestante comme Montesquieu. Ils peuvent aussi, comme Rousseau, épouser plus ou moins alternativement la foi protestante, la foi catholique, la foi déiste et promouvoir, en soutien de celle-ci, une religion civile, sans clergé séculier ni régulier.

Sur le plan du contenu des croyances, cet aperçu donne une idée que le tableau est complexe. Le paysage est diversement coloré, voire bigarré, avec dans le Ciel des trouées de vide, et sur Terre des espaces de liberté, permis par le droit constitutionnel, à ne pas vouloir, comme dans tout croire, penser avec des émotions, mais en raison sans que celle-ci sorte trop du sillon.

§71.- Le triangle croire-savoir-incertitude (*Résumé LXVI*)

① Le triangle équilatéral des pouvoirs participe à une *forma mentis* qui pénètre et unifie diverses conceptions, qu'elle soit terrestre ou tournée vers le Ciel. Dans cette triade géométrique, un pôle est occupé par un vide, non pas absolu, mais sceptique, voire incrédule.

② Dans l'histoire religieuse occidentale, le judaïsme a tenu ce rôle vis-à-vis du christianisme, en opposant une résistance à ce dernier qui voulait l'évangéliser à coup de persécutions répétées. Ce faisant, le judaïsme a permis à l'espace mental européen de demeurer ouvert à la périphérie, au risque sinon d'être comblé par une homogénéité étouffante et totalisante. La Réforme protestante a ajouté, par la suite, d'autres hétérogénéités salvatrices sous ce rapport.

Des penseurs, libres de préjugés comme David Hume, ont osé dépasser les dissensions religieuses pour introduire le doute au cœur de toute croyance, nonobstant la propension de chacun à croire. La méthode humienne consista à ressusciter le dialogue à trois voix, pratiqué en philosophie de l'antiquité, de Platon à Cicéron. La 3^e voix est celle qui pèse et soupèse les partisans du oui à l'existence de Dieu et les partisans du non en affirmant son inexistence.

Cette forme mentale dubitative est très présente dans la littérature des Lumières, ainsi que dans la science nouvelle chez Galilée. Voltaire l'emploie dans le conte, et Rousseau dans l'*Emile*. La philosophie constitutionnelle n'est pas en reste avec la triade triangulaire que Rousseau exhibe, sans la forme sous-jacente : *droit positif, volonté de tous, volonté générale*.

③ La *forma mentis* ternaire comprend des oscillations permanentes qui perdurent sans fin. Si résolution il y a, elle serait tout au plus temporaire, et toujours contestable. Ces oscillations rappellent, sans que l'époque en ait conscience, la série numérique de Grandi dont le terme général ne cesse de balancer entre +1 et -1 au regard d'un tiers qu'est le mathématicien.

Cette série intriguait tout le XVII^e siècle, à commencer par Leibniz. On la retrouve, sans en avoir idée également, dans la *Critique de la raison pure* de Kant. Il y expose différentes « antinomies de la raison pure » en montrant qu'elle ne peut trancher définitivement l'énigme.

④ Au XX^e siècle, la *forma mentis* triangulaire ne revêt plus une allure géométrique ou numérique. Elle qui sous-entend le vide en un pôle critique, voilà que le débat porte précisément sur l'existence même d'un tel vide comme fondement de l'être. Le philosophe Badiou l'assimile à l'ensemble vide, \emptyset , de la théorie des ensembles, tandis que le philosophe Deleuze substitue à l'idée du vide celle de virtuel qui s'actualiserait à la surface des choses.

Certaines de leurs vues sont éclairantes. Chez Badiou, la notion de *multiple générique* caractériserait la volonté générale. Chez Deleuze (et Guattari), la distinction *territorialisation/re-territorialisation* peut être applicable en matière de droits de l'homme. En dehors de ces vues, le débat paraît « hors sol » au regard tant d'autres aspects du droit constitutionnel que de la physique quantique. Ces conceptions prétendent ratisser trop large.

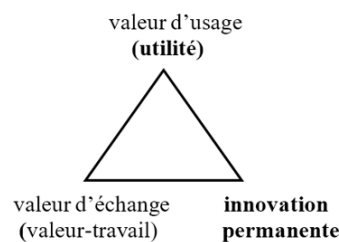
On ne comprend pas, par ex., des « événements » tels que le procès de Bobigny, qui advint en France en 1972 dans un contexte particulier dont, ni le résultat, ni la suite législative décriminalisant l'avortement, n'étaient sûrs. Le courage et la stratégie ingénieuse de l'avocate M^e Gisèle Halimi furent décisifs. Il n'y avait, au fond de cette histoire, ni l'ensemble vide, \emptyset , ni une quelconque convergence, encore moins uniforme, du virtuel au réel qui ne ferait qu'un.

Parlant du vide et du virtuel, aucune des deux conceptions ne renvoie, curieusement, aux découvertes fondamentales de la mécanique quantique qui ont tant bouleversé le XX^e siècle. Le vide que cette physique révèle est un vide plein de poussées virtuelles, qui apparaissent et disparaissent (aussitôt, pour nous) au gré du hasard. C'est le « vide » énergisant qui crée par paires les « événements ». C'est lui, mutatis mutandis, qui suscite aussi l'événement aux niveaux d'organisation et de cohésion supérieurs dans la nature, dans l'esprit et la société.

Résumé LXVI (suite)

Il n'y a pas, par exemple, dans l'esprit, de thèse sans antithèse (au moins dans celui du voisin). Il n'y a pas, non plus, dans une société, où la liberté peut exister, de majorité sans minorité, de richesse sans pauvreté, d'orthodoxie sans hérésie. La liste n'est pas close, loin s'en faut.

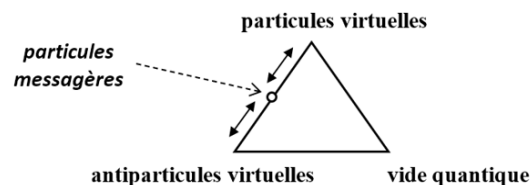
On pensera encore, en économie, à la valeur d'usage et à la valeur d'échange, ce que Karl Marx appelait *la nature bifide de la marchandise*.¹ Un objet doit être utile et être travaillé pour répondre au besoin, mais pas seulement. Il faut aussi simplifier l'objet pour exciter le besoin et en faire un objet désiré. Steve Jobs soignait, par ex., l'esthétique et la maniabilité d'un ordinateur portable à cette fin. Ainsi, contrairement à Marx, la valeur d'échange ne repose pas *que* sur le temps du travail ; elle dépend aussi, et surtout, de la capacité d'innovation de l'entreprise en beaucoup de domaines (en leadership, en management, en organisation et gestion du personnel, en savoir technologique, en marketing, en négociation contractuelle).



L'entreprise naît grâce à l'innovation (une *start-up* crée son marché en traitant un problème particulier) et disparaît faute d'innovation. Introduire du nouveau requiert le goût du risque et savoir surmonter les échecs. On n'est pas entrepreneur qu'une fois.

On pensera également en droit constitutionnel au couple : *opinion majoritaire/opinion dissidente(s)*, ou décision de la Cour/*obiter dictum (ou dicta)* interrogatif ou perplexe comme opinion étrangère aux motifs de l'arrêt, mais affectant l'interprétation de sa portée éventuelle. Il en est aussi du couple droit naturel/droit positif, volonté de tous/volonté générale, ainsi que des liens entre ces deux couples : le droit perçu comme naturel alimente la volonté générale, et le droit positif est confectionné et appliqué par la volonté de tous ... sous l'œil de la générale (la volonté de tous, et encore moins celle d'un petit groupe, voire d'un seul, ne peut s'abriter derrière une mythologique « volonté du peuple » trop souvent utilisée comme slogan).

⑤ *La destruction créatrice* par l'innovation de Schumpeter en économie est une variante de la plénitude du vide en création et destruction permanente. Il en est de même de la volonté générale d'un moment qui peut être contestée par la volonté générale d'un autre moment. Ces variantes se font écho entre elles comme elles font écho à celle, plus fondamentale, en physique quantique, qui laisse transparaître telle partie de l'être sous forme de particules virtuelles et telle autre sous forme d'antiparticules virtuelles. Entre elles, opèrent des « particules messagères » comme le photon, associées à chacune de leurs interactions.

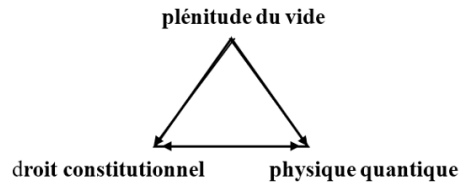


Les « particules messagères » font œuvre, pourrait-on croire, de « médiation » entre contraires, à l'image et à la ressemblance d'une médiation entre parties en dehors d'un procès.

Qu'on le regrette ou non, le droit constitutionnel est apparenté partiellement à la physique quantique, à l'instar de *l'homme microscopique* qu'un ouvrage envisage aujourd'hui philosophiquement.² Sans pousser la comparaison en tout point, on devinera par soi-même, en un tel droit, des mécanismes, sinon similaires, mais approchant, comme l'effet tunnel, les relations d'incertitude, la réduction de la fonction d'onde et le principe d'exclusion de Pauli.

¹ Sur le caractère de *double face* de la valeur chez Karl Marx, v. *Le Capital*, Liv. I, chap.1, §2, Gallimard, Paris, 1965, Pléiade, t.1, p.568.

² L'auteur Pierre Auger a travaillé en physique atomique, en physique nucléaire et sur les rayons cosmiques. Il a mis en évidence un effet qui porte son nom, *l'effet Auger*. (https://fr.wikipedia.org/wiki/Pierre_Auger)



On rétorquera que, dans la nature, il y a des lois fixes, alors que les lois du droit positif sont sujettes à variation. Il n'est pas sûr, en réalité, que les lois de la nature soient aussi rigides que l'on affirme jusqu'à maintenant. Comme l'a écrit, en franc-tireur, le physicien Lee Smolin,

si l'on jette une pierre dans un lac par un matin tranquille, elle provoquera de petites ondulations qui ne dérangeront que très peu la surface de l'eau ; il sera alors facile de penser que les idées se déplacent sur un fond fixe donné par cette surface. Mais quand les vagues sont fortes et turbulentes, comme près d'une plage lors d'une tempête, cela n'a aucun sens de les considérer comme des perturbations de quelque chose de fixe.¹

⑥ La notion de vide est plus transgressif que le plein à vrai dire. Elle occupe, sous des formes diverses, une place singulière dans le triangle équilatéral générique que l'on trouve, un peu partout, en pensée. Le vide est le lieu où agit un opérateur, *l'opérateur du doute*. Cet opérateur applique le doute sur toute autre notion qui peut faire l'objet d'une réflexion. **Un tel opérateur est caractéristique des Lumières. Il en est le moteur. C'est lui qui est à la base du « progrès ».**

Les Lumières se répandant en dépit des poursuites et des censures, les gens éclairés, ou à demi, ne sentent plus le besoin de dépendre d'un Pape pour assurer leur salut au Ciel, ni d'un Roi de droit divin pour assurer, sur Terre, leur conservation. Le doute a fait effet dans l'esprit.

Il fait effet aussi en droit constitutionnel. De même qu'il n'y a pas de cour suprême en mathématiques qui résoudrait définitivement tout indécidable, il n'y a pas d'instance suprême, y compris une cour de justice, qualifiée telle, qui prétendrait clore un débat. Une telle cour, qui se voit « grand prêtre ou pontife », ne peut décrypter seule, comme les haruspices antiques, les augures ou tout autre signe.

Certes, un général à Rome n'avait pas le droit de prendre les auspices. C'était une pré-séparation des pouvoirs entre le religieux et le militaire, mais le religieux ne pouvait pas non plus trop empiéter la sphère politique. La compétence des prêtres, en ce temps, restait spécifique. Elle se limitait à l'interprétation du droit sacré, ce qui n'empêchait pas le Sénat romain d'interférer dans le domaine non profane et d'y prendre des décisions d'importance.²

⑦ Les exposés « pour et contre », en présence d'un tiers, seront toujours d'actualité. Les uns diront que... ; les autres que ..., et un troisième parti en jugera peut-être autrement, au point d'accroître la discordance et de mettre tout le monde dans l'embarras.

En dehors du droit même, les modes alternatifs de résolution des conflits (ADR dans le contexte américain), ne peuvent trancher le moindre doute et terminer les dissensions en croyant lier à jamais tel point de vue à tel autre, via l'arbitrage, la médiation, la conciliation, le droit collaboratif (*collaborative law*), sans parler de la négociation du style Harvard school.

En philosophie, le *cogito* est sujet à caution avec sa prétendue séparation avec le corps. La compréhension des maladies neurodégénératives jette un autre soupçon, pour certains, sur l'immortalité de l'âme, ce que d'autres contestent, considérant que seul le réceptacle du corps est détérioré pour demeurer en contact avec l'âme. Ni l'existence de Dieu ni son inexistence n'est démontrée. Même l'infinité du monde n'est ni prouvée ni infirmée. Le doute s'infiltré partout. Il est parfois libérateur, et parfois cause d'anxiété. Le stress d'un acteur, avant d'entrer en scène, peut être mobilisateur, mais un manque excessif de confiance en soi peut paralyser la créativité, si douée que soit la personne qui doute d'elle-même de ne pas y arriver.

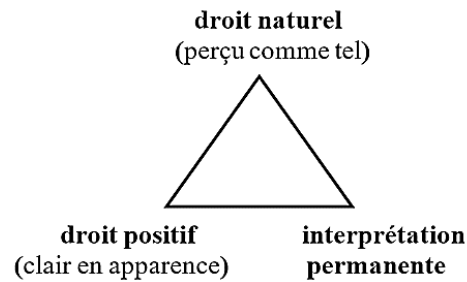
Les dispositions du droit constitutionnel n'en sont pas exemptes. Elles feront toujours l'objet de plusieurs hypothèses de lecture, comme celles en histoire devant un document inédit ou un monument ancien. Un conflit entre des pouvoirs institutionnels, autant qu'un conflit entre des Etats en guerre, peut être interprété différemment, de façon plus ou moins erronée.

¹ Lee Smolin, *Rien ne va plus en physique !* Dunod, Paris, 2007, Préf. d'Alain Connes, chap.6 : La gravité quantique : la bifurcation, p.129.

² Cicéron, *La nature des dieux*, op. cit., n.15 du Liv.3, de la traductrice Clara Auvray-Assayas, p.201 ; Françoise Van Haepen, « Cultes publics, agents culturels et pouvoir à Rome », Pallas. Revue d'études antiques, 2019/111, <https://journals.openedition.org/pallas/18462>

Résumé LXVI (suite et fin)

L'interprétation juridique est une « mesure » qui ne saurait être davantage passive qu'une mesure en mécanique quantique. Aucun acteur du droit, même au niveau le plus bas, n'enregistre simplement des données. L'interprétation est une sorte d'innovation qui corrode sans cesse, dans un sens favorable ou défavorable, et le droit naturel et le droit positif.



Le droit positif apparaît limpide comme l'eau de roche pour ses rédacteurs, bien qu'il fasse souvent, l'objet de compromis qui en affadissent ou obscurcissent la « compréhension ».

Avec l'interprétation, l'on passe d'éruption en irruption dans le droit, positif ou naturel, menacés l'un l'autre, à tour de rôle, dans leur stabilité placide, par de nouvelles éruptions...

Le droit constitutionnel, hérité des Lumières, fait d'autant plus l'objet d'interprétations diverses qu'il est un droit qui postule, et repose, sur la liberté, d'appréciation en l'occurrence. L'appréciation d'un bord à l'autre est rarement longtemps convergente. Tout jugement varie. Tôt ou tard, le doute, qui surgit du vide, réapparaît. Le sens devient, à nouveau, sens dessus dessous. Vide de sens et sens du vide. Sens de l'humour étrange, d'un mystérieux pourquoi.

Le mot sens est à la fois banal et obscur. Lui seul loue ses services à tout autre mot du dictionnaire. Il s'y dissout pour réapparaître au mot suivant. Son nom emplît la bouche de tout le monde et ne satisfait au fond personne. Quel mot de la langue peut se flatter d'éclairer l'esprit et le laisser autant dans l'expectative ?

(Alain Laraby, « La quête du sens », in revue *Sarrazine*, n°8, 29 nov. 2005)

*Septième leçon des Lumières***§72.- LE FEEDBACK DU DROIT CONSTITUTIONNEL SUR LA SCIENCE MODERNE***(Résumé LXVII)*

① La science moderne, mal appliquée, est réduite dans sa richesse, sa curiosité et sa complexité. Elle n'est qu'une caricature de la science renaissante des Lumières.

Des techniques surpuissantes risquent de mécaniser l'homme au centuple, sans qu'il puisse les mettre à la raison. La raison n'est même plus capable de se gouverner, sans une éthique scientifique qui ne peut être, ni absolue, ni sujette à un relativisme extrême. L'éthique doit faire l'objet de discussion entre d'inévitables interprétations, comme toute norme, dans le constitutionnalisme des Lumières, est soumise à confrontation entre diverses interprétations.

② Il est bon de rappeler, à ce sujet, les deux théorèmes d'incomplétude de Gödel en logique.

Le 1^{er} théorème d'incomplétude démontre qu'une théorie cohérente est nécessairement incomplète en ce qu'il subsiste des énoncés qui ne sont ni démontrables, à partir des axiomes de la théorie, ni réfutables au sens où il n'est pas possible non plus de déduire leur négation. Le 2nd théorème d'incomplétude en est le corollaire. Il peut être résumé par la phrase simple qu'une théorie cohérente n'est pas capable de sa propre cohérence.

Pourquoi un système d'éthique, quel qu'il soit, échapperait-il à la transposition de ces idées ?

③ Faute de trouver des arrangements, fussent-ils partiels, changeants et provisoires, il faut craindre un retour du bâton d'une idéologie religieuse radicale qui surfera sur les peurs irraisonnées d'une population se voyant de plus en plus dépassée et manipulée.

Le paradoxe est que la science, qui est censée *nous rendre maîtres et possesseurs de la nature*, nous rend victimes et esclaves du mésusage de la technique qu'elle crée dans son sillage.

Science sans conscience n'est que ruine de l'âme. Aie suspect les abus du monde. Ne mets pas ton cœur à vanité, car cette vie est transitoire.

(Rabelais, moine et médecin, *Pantagruel* [1532], chap.8)

CONCLUSION GENERALE

Bibliographie

Une quantité sans nombre de références figurent dans les trois volumes en contrefort de la thèse. Le lecteur comprendra que nous nous contenterons d'établir ici une bibliographie ne retenant que l'essentiel du sujet traité.

Nous supposons également connues les œuvres des auteurs « classiques » de l'âge des Lumières, celles par exemple de Machiavel, de Hobbes, de Locke, de Montesquieu, de Blackstone, de Hume, de Rousseau, de Diderot, de Voltaire, d'Adam Smith, de Condorcet, de James Madison, d'Alexander Hamilton, de John Marshall, de Bentham, et de bien d'autres, jusqu'à au moins Tocqueville au XIX^e siècle et Raymond Aron au XX^e siècle.

Il en sera de même des autres « classiques » en philosophie ancienne (comme Platon, Aristote, Thucydide), et moderne (comme Spinoza, Kant, Hegel, Marx et Nietzsche). La même chose va sans dire en science, avec Descartes, Pascal, Leibniz, Huygens, Newton, Lagrange, Laplace, Gauss, Maxwell, jusqu'à l'époque d'Einstein.

Les références les concernant sont données à chaque occasion de leur apparition, soit dans le Volet I (comprenant deux volumes), soit dans le Volet II (réduit à un volume sur des aspects plus pointus de la science).

On retiendra les sources utilisées, en raison leur importance et de leur fréquence, dans le cadre des réflexions suivantes :

Données et réflexions d'ordre général (I), 806

Réflexions plus spécifiques (II) :

- . en philosophie ou théorie du droit; 808
- . en philosophie des sciences; 810
- . en négociation et en économie, particulièrement en théorie de jeux. 813

Réflexions propres au présent auteur (III), 814

o

I.- Données et réflexions d'ordre général

1/ « Données » historiques (sans prétendre à l'objectivité pure)

- Attali (J.), *Histoires du temps*, Fayard, Paris, 1982.
- *Les Juifs, le monde et l'argent. Histoire économique du peuple juif*, Fayard, Paris, 2002.
- Badinter (R.), in *Libres et égaux... L'émancipation des Juifs (1789-1791)*, Fayard, Paris, 1989.
- Badinter (E. et R.), *Condorcet (1743-1794). Un intellectuel en politique*, Fayard, Paris, 1988.
- Bagehot (W.), *The English Constitution* [1867], Fontana/Collins, Glasgow, 1963.
- Bonfil (R.), *Les Juifs d'Italie à l'époque de la Renaissance. Stratégies de la différence à l'aube de la modernité*, L'Harmattan, Paris, 1995.
- Châtelet (F.), *Une histoire de la raison. Entretiens avec Emile Noël*, Seuil, Paris, 1992.
- Cobban (A.), *Le sens de la Révolution française*, Paris, Julliard, 1963.
- Cottret (B.), *Histoire de l'Angleterre*, édit. Tallandier, 2015.
- Crouzet (F.), *De la supériorité de l'Angleterre sur la France. L'économie et l'imaginaire : XVII-XX siècle*, Paris, Librairie académique Perrin, 1985.
- Dictionnaire européen des Lumières*, sous la dir. de Michel Delon, Puf, Paris, 1997.
- Ehrard (J.), *L'idée de nature en France dans la première moitié du dix-huitième*, Paris, E.P.H.E., 1963.
- Finley (M.), *Démocratie antique et démocratie moderne*, Payot, Paris, 1990.
- *L'invention de la politique*, Poche, Paris, 2011.
- Furet (F.) & M. Ozouf (M.) *Dictionnaire critique de la Révolution française*, Flammarion, Paris, 1988.
- Furet (F.) & D. Richet (D.), *La Révolution française*, Hachette, Paris, 1994.
- Halévy (E.), *L'Angleterre en 1815* [1^{re} édit., 1913], Paris, Hachette, 1973.
- *La formation du radicalisme philosophique* [1901], Puf, Paris, 1995.
- Higonnet (P.), *Sister Republics. The Origins of French and American Republicanism*, Harvard Univ. Press, 1988.
- Lentz (Th.), *Le 18 Brumaire*, Paris, édit. Perrin, 1997.
- Manent (P.), *Histoire intellectuelle du libéralisme*, Calmann-Lévy, Paris, 1987.
- Rémond (R.), *Histoire des Etats-Unis*, Paris, Puf, 1959.
- Renouard (Y.), « Affaires et hommes d'affaires dans l'Italie du moyen âge », Paris, Annales, 1948, vol.3, n°3.
- Risset (J.), *Dante*, Flammarion, Paris, 1995.
- Romilly (J. de), *Les grands sophistes dans l'Athènes de Périclès*, Paris, Ed. de Fallois, 1988.
- *La loi dans la pensée grecque*, Les Belles lettres, Paris, 1971.
- Russell (B.), *Histoire de la philosophie occidentale* [1946], Paris, Gallimard, 1952.
- Shama (S.), *Citizens. A chronicle of the French Revolution*, Penguin Books, London, 1989.
- *A History of Britain, the British Wars, 1603-1776*, BBC Worldwide, London, 2001A. Siegfried, *Les Etats-Unis d'aujourd'hui*, Paris, Armand Colin, 1931.
- The Blackwell companion to the Enlightenment*, edit. by John W. Yolton, 1995.
- Tulard (J.), Fayard (JF.) et Fierro (A.), *Histoire et dictionnaire de la Révolution française, 1789-1799*.
- Vernant (J-P.), *Les origines de la pensée grecque* [1962], Puf, Paris, 2020.

2/ Biographies et commentaires sur des œuvres particulières

- Althusser (L.), *Montesquieu, La politique et l'histoire*, Paris, Puf, 1959.
- Attali (J.), *Pascal ou le génie français*, Le livre de poche, Paris, 2002.
- Baker (KM) *Condorcet. Raison et politique*, Hermann, Paris, 1988, p.154
- Bensaude-Vincent (B.) et Bernardi (B.), *Rousseau et les sciences*, L'Harmattan, Paris, 2009.
- Binoche (B.), Cléro (J.-P.), *Bentham contre les droits de l'homme*, Puf, Paris, 2007.
- Bredin (J.-D.), *Sieyès. La clé de la Révolution française*, édit. de Fallois, Paris, 1988.
- Chabut (M.-H.), *Denis Diderot. Extravagance et génialité*, édit. Rodopi, Amsterdam, 1998.
- Densmore (D.), *Newtpn's Principai : The central argument*, Translations and diagrams by William H. Donahue, Green Lions Press, Santa Fe, New Mexico, 1996.
- Dérathé (R.), « La dialectique du bonheur chez Jean-Jacques Rousseau », *Revue de Théologie et de Philosophie*, Droz, 1952.
- *J.J. Rousseau et la science politique de son temps*, Vrin, Paris, 1979.
- Durkheim (E.), « La contribution de Montesquieu à la constitution de la science sociale » [1892], in *Montesquieu et Rousseau. Précurseurs de la sociologie*, Paris, Rivière, 1953.
- Ehrard (J.), *L'esprit des mots : Montesquieu en lui-même et parmi les siens*, Droz, Genève, 1998.
- Eisenmann (Ch.), « Deux théoriciens du droit : Duguit et Hauriou », *Rev. Philo. de France et de l'étranger*, 1930.
- « Politique religion chez J.-J. Rousseau », in *Histoire des idées et idées sur l'histoire. Etudes offertes à Jean-Jacques Chevallier*, édit. Cujas, Paris, 1977, p.73 ; « La Cité de Rousseau », in *Pensée de Rousseau*, Seuil, Paris, 1984, p.98.
- Gauthier (D.), *The logic of Leviathan. The moral and political theory of Thomas Hobbes*, Oxford Univ. Press, 1969.
- Grofman (B.) and. Feld (Sc.), « Rousseau's General Will: A Condorcetian Perspective », *The American Political Science Review*, vol.82, n° 2 (Jun. 1988).
- Israel (J.), *Les Lumières radicales. La philosophie, Spinoza et la naissance de la modernité*, Paris, édit. Amsterdam, 2005.
- Kerjan (L.), *George Washington*, Gallimard, Paris, 2015.
- R. Ketcham (K.), *James Madison, A Biography*, Univ. Press of Virginia, 1990.
- Marshall (T.), « Perception politique et théorie de la connaissance dans l'œuvre de Jean-Jacques Rousseau », *Revue des sciences politiques*, vol. 29, 1979.
- « John Locke et la philosophie constitutionnelle », *Revue de synthèse*, n° 118-119, avril-sept. 1985.
- Macpherson (C.B.), *La théorie politique de l'individualisme possessif. De Hobbes à Locke*, Gallimard, Paris, 2004.
- McCullough (D.), *John Adams*, Simon & Schuster, New York, 2002.
- Paty (M.), *D'Alembert*, Les Belles lettres, Paris, 1998.
- Philonenko (A.), *Jean-Jacques Rousseau et la pensée du malheur*, Paris, Vrin, 1984.
- Riley (R.), *The General Will before Rousseau. The Transformation of the Divine into the Civic*, Princeton Univ. Press, 1986.
- Romilly (J. de), *L'invention de l'histoire politique chez Thucydide*, Paris, édit. Rue d'Ulm, 2005.
- Spector (C.), « Montesquieu et la crise du droit naturel moderne », *Revue de métaphysique et de morale*, 2013/1, n° 77.
- « Coutumes, mœurs, manières », in *Dictionnaire Montesquieu* [en ligne], ENS de Lyon, septembre 2013.
- « La bouche de la loi ? Figures du juge dans l'Esprit des lois », *Montesquieu Law Review*, n°3, oct.2015, p.6.
- Starobinski (J.), *Jean-Jacques Rousseau. La transparence et l'obstacle*, Gallimard, Paris, 1971.
- *Montesquieu*, Paris, Seuil, 1994.
- *Hobbes et la pensée politique moderne*, Puf, Paris, 2012.
- Serres (M.), Présentateur et un des annotateurs *du Cours de philosophie positive I* d'Auguste Comte, Paris, Hermann, 1998.
- Le système de Leibniz et ses modèles mathématiques*, Puf, Paris, 2007.
- Troper (M.), « Montesquieu », in F. Châtelet, O. Duhamel, E. Pisier, *Dictionnaire des œuvres politiques*, Paris, Puf, 1986.
- Zarka (Y. Ch.), *La décision métaphysique de Hobbes*. Vrin Paris, 1987.

3/ Diverses vues sur l'âge des Lumières et post-Lumières

- Aron (R.), *Paix et guerre entre les nations*, Paris, Calmann-Lévy, Paris, 1962.
- *Démocratie et totalitarisme*, Gallimard, Paris, 1965.
- *Les étapes de la pensée sociologique*, Paris, Gallimard, 1967.
- *Mémoires*, Bouquins, Paris, 2010.
- Cassirer (E.), *La philosophie des Lumières* [1932], Paris, Fayard, 1966.
- Encyclopédie, de Diderot et d'Alembert, ou *Dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers* [1751-1772]
- Foucault (M.), *Les mots et les choses. Une archéologie des sciences humaines*, Paris, Gallimard, 1966.
- *L'archéologie du savoir*, Gallimard, Paris, 1969.
- *Surveiller et punir. Naissance de la prison*, Paris, Gallimard, 1975.
- Hazard (P.), *La crise de la conscience européenne 1680-1715*, Paris, Fayard, 1961.
- Serres (S.), *Hermès IV, La Distribution*, Paris, éd. de Minuit, 1977.
- *Le Tiers-Instruit*, Gallimard, Paris, 1991.
- *Eclaircissements*, Flammarion, Paris, 1994.
- Pomeau (R.), *L'Europe des Lumières*, Stock, Paris, 1991.

4/ Divers (miscellaneous)

- Attali (J.), *Les modèles politiques*, Puf, Paris, 1972.
- Auger (P.), *L'homme microscopique*, Flammarion, Paris, 1966.
- Badiou (A.) *L'être et l'événement*, Seuil, Paris, 1988.
- Bergson (H.), *Matière et mémoire* [1896], Puf, Paris, 1990.
- *La pensée et le mouvant* (1938), Puf, Paris, 1998.
- Bourdieu (P.), *La distinction*, édit. de Minuit, Paris, 1979.
- Deleuze (G.), Claire Parnet, *Dialogues*, Flammarion, Paris, 1977.
- *Différence et répétition*, op. cit. Puf, Paris, 1968.
- Durkheim (E.), *Les formes élémentaires de la vie religieuse* [1912], Puf, Paris, 1994.

- Euler (L.), *Lettres à une princesse d'Allemagne*, 1760-1762] ; Presses univ. romandes, 2003.
- Grimal (P.), Cicéron, Fayard, Paris, 1986.
- Guichard (J.), *L'infini au carrefour de la philosophie et des mathématiques*, Ellipses, Paris, 2000.
- Hofstadter (D.), *Gödel, Escher, Bach*, InterEditions, Paris, 1985.
- Hofstadter (D.), E. Sanders (E.), *L'analogie, cœur de la pensée [Surfaces and Essence. Analogy as the Fuel and Fire of Thinking]*, Odile Jacob, Paris, 2013.
- Houdé (O.), *Apprendre à résister*, Le Pommier, Paris, 2017.
- Husserl (E.), *Leçons pour une phénoménologie de la conscience intime du temps* [1905], Puf, Paris, 1964.
- *Méditations cartésiennes. Introduction à la phénoménologie* [1929], Vrin, Paris, 2014.
- *La crise des sciences européennes* [1935-1936], Gallimard, Paris, 2019.
- Jankélévitch (V.), *L'Imprescriptible. Pardonner ? Dans l'honneur et la dignité*, Seuil, Paris, 1986.
- Le Bon (G.), *Psychologie des foules*, Puf, Paris, 2013.
- Lévi-Strauss (Cl.), *Les structures de la parenté*, Mouton de Gruyter, Berlin, New York, 1967.
- *Tristes tropiques*, Pocket, Paris, 2001.
- *La pensée sauvage* [1962], Pocket, Paris, 2010.
- Interview, in Georges Charbonnier, *Les Belles Lettres*, Paris, 2010.
- Lévy-Leblond (J.-M.), « La méprise et le mépris », in *Les malentendus de l'Affaire Sokal*, Paris, La Découverte, 1998
- Pareto (V.), *Traité de sociologie générale* [1917] , Librairie Droz, Genève, 1968.
- Popper (K.), *La société ouverte et ses ennemis* [1962], Seuil, Paris, 1979.
- Prigogine et Stengers, *La nouvelle alliance – Métamorphose de la science*, Paris, Gallimard, 1979.
- Prigogine (I.), *La fin des certitudes*, Odile Jacob, Paris, 1996
- Stengers (I.), *Cosmopolitiques, t. 2 : L'invention de la mécanique*, Paris, La Découverte, 1997
- Quine, (W.V.), *Quiddités. Dictionnaire philosophique par intermittence* [1987], Seuil, Paris, 1992.
- Russell (B.) *Histoire de la philosophie* [1945], Paris, Gallimard, 1952.
- *Science et religion* [1935], Gallimard, Paris, 1971.
- Sander (E.), Bianchini (F.), « The central role of analogy in cognitive sciences », *Méthode. Analytic perspectives*, 2013, iss. 2.
- Sokal (A.), Bricmont (J.), *Impostures intellectuelles*, Odile Jacob, Paris, 1997.
- Strauss (L.) and Cropsey (J.), *History of political philosophy*, Univ. of Chicago Press, 3rd edit, 1987.
- Weber (M.), *L'éthique protestante et le capitalisme* [1904-1905], Paris, Plon, 1964.
- Weil (E.), *Philosophie politique*, Paris, Vrin, 1984.
- *Philosophie et réalité*, Beauchesne, Paris, 2003.

II.(a) - En philosophie ou théorie du droit

1/ Livres

a) « Données » historiques (sans prétendre à l'objectivité pure)

- Andrieu (K.), *La justice transitionnelle : de l'Afrique du Sud au Rwanda*, Folio Paris, 2012.
- Bailyn (B.), *The ideological origins of the American Revolution*, Harvard Univ. Press, 1992.
- Burdeau (G.), Hamon (F.), M. Troper (M.), *Droit constitutionnel*, LGDJ, Paris, 1999.
- David, (R.) *Le droit anglais*, Puf, Paris, 2001.
- Dorsen (N.), Rosenfeld (M.), Sajó (A.), Baer (S.), *Comparative Constitutionalism*, Thomson West, 2003.
- Dumont (L.), *Essais sur l'individualisme. Une perspective anthropologique sur l'idéologie moderne*, Seuil, Paris, 1983.
- Duverger (M.), *Constitutions et documents politiques*, Puf, Paris, 1978.
- Horwitz (M. J.), *The Transformation of American Law, 1780-1860*, Harvard Univ. Press, 1977.
- James (W.) [1892], *Précis de psychologie*, Les empêcheurs de tourner en rond, Paris, 2003.
- Maitland (F.W.), *The Constitutional History of England*, Cambridge Univ. Press, 1911.
- Pollock (F.) and Maitland, (F.W.) *The History of English Law* [1895], Indianapolis: Liberty Fund, 2010.
- Raynaud (Ph.), *Trois révolutions de la liberté : Angleterre, Amérique*, France, Puf, Paris, 2010.
- Rials (S.), *La Déclaration des droits de l'homme et du citoyen*, Hachette, Paris, 1988.
- Ricoeur (P.), art. « Volonté », in *Encyclopaedia Universalis*, Paris, 1968.
- The New Cambridge Modern History, VI : *The rise of Great Britain and Russia, 1688-1725*, Cambridge Univ. Press., 1971.
- The Records of The Federal Convention of 1787*, edit. by Max Ferrand, Yale Univ. Press, 1966.
- The Federalist Concordance*, The Univ. of Chicago Press, 1988.
- Viel-Castel (L. de), *Essais d'histoire parlementaire de la Grande-Bretagne* [1844], Revue des deux mondes, sur Wikisource.
- Villani (C.), *Immersion. De la science au Parlement*, Flammarion, Paris, 2019.
- Zoller (E.), *Le droit des Etats-Unis*, Puf, Paris, 2001.

b) Modèles d'interprétation (ou réinterprétant les précédentes)

i en français (ou traduction française)

- Arnaud, (A.J.) *Essai d'analyse structurale du Code civil français. La règle du jeu dans la paix bourgeoise*, Paris, LGDJ, 1973.
- Avril (P.), *Essais sur les partis*, Paris, LGDJ, 1986.
- Bacot (B.), *Carré de Malberg et l'origine de la distinction entre souveraineté du peuple et souveraineté nationale*, Editions du CNRS, Paris, 1985.
- Béal (Ch.), *Philosophie du droit. Norme, validité et interprétation*, Vrin, Paris, 2015.
- Carré de Malberg (R.), *Contribution à la théorie générale de l'État*, t.2, Paris, Sirey, 1922.
- Carbonnier (J.), *Essais sur les lois*, Paris, Répertoire du Notariat Défrénois, Paris, 1979.
- Carcassonne (E.), *Montesquieu et le problème de la constitution française au XVIII^e siècle*, Genève, Slatkine, 1978.
- Clausewitz (C. von), *De la guerre* [édit. poth. 1832-1834], Perrin, Paris, 1999.

- Delmas-Marty (M.) *Le flou et le droit*, Puf, Paris, 1986.
- *Libertés et sûreté dans un monde dangereux*, Seuil, Paris, 2010.
- Hauriou (M.), *Précis de droit constitutionnel* [2^e ed., Paris, 1929], Cnrs, Paris, 1965.
- Hayek (F. von), *La route de la servitude* [The Road to Serfdom, 1944], Puf, Paris, 1985.
- Jellinek (G.), *L'Etat moderne et son droit*, t. 1, Paris, éd. Fonteming, 1904.
- Jouvenel (B. de), *De la souveraineté*, Médicis, Paris, 1955.
- *De la politique pure*, Calmann-Lévy, Paris, 1964.
- *Du pouvoir*, Hachette, Paris, 1998
- *Du principat, et autres réflexions politiques*, Hachette, Paris, 1972.
- Kelsen (H.), *Théorie pure du droit* [1934], Dalloz, Paris, 1962.
- Mansfield (H.), *Le Prince apprivoisé* [Taming the Prince, 1989], Paris, Fayard, 1994.
- *Flexible droit*, Paris, LGDJ, 1995.
- Marshall (T.), *Vie et institutions politiques des Etats-Unis. Essais et conférences*. Univ. de Paris I -Sorbonne, 1980-1981.
- *Théorie et pratique du gouvernement constitutionnel*, éd. de l'Espace européen, Paris, 1992,
- *A la recherche de l'humanité. Science, poésie ou raison pratique dans la philosophie politique de Jean-Jacques Rousseau*, Leo Strauss et James Madison, Paris, Puf, 2009.
- Michels (R.), *Les partis politiques. Essai sur les tendances oligarchiques des démocraties* [1914], Paris, Flammarion 1971.
- Michaut, (F.), Woodland (P.), *L'équilibre et le changement des systèmes politiques*, Puf, Paris, 1977.
- Millard (E.), *Théorie générale du droit*, Dalloz, Paris, 2006.
- *La démocratie. Sa nature – sa valeur* [1920], trad. Ch. Eisenmann, Economica, Paris, 1988.
- Motulsky (H.), *Principes d'une réalisation méthodique du droit privé*, Paris, Dalloz, 2002.
- Ostrogorski (M.), *La démocratie et les partis politiques* [1902], Paris, Seuil, 1979.
- Philonenko (A.), *Jean-Jacques Rousseau et la pensée du malheur*, Vrin, Paris, 1984.
- Rawls (J.), *Théorie de la justice* [1971], Seuil, Paris, 1987.
- *Libéralisme politique* [1993], Puf, Paris, 2001.
- Rivero (J.), *Les libertés publiques*, Puf, Paris, 1983.
- Robert (J.), *Libertés publiques et droits de l'homme*, éd. Montchrestien, Paris, 1988.
- Schmitt (C.), *La notion de politique* [1932], Flammarion, Paris, 1992
- Strauss (Leo), *Droit naturel et histoire*, Paris, Plon, 1954.
- *La persécution et l'art d'écrire* [1952], Paris, Ed. de l'Eclat, 2003.
- *La cité et l'homme*, Le Livre de poche, Paris, 2005
- Théorie des contraintes juridiques*, sous la dir. de Troper (M.), Champeil-Desplats (V.) et Grzegorcryk (Ch.), LGDJ, Paris, 2005.
- Troper (M.), *La séparation des pouvoirs et l'histoire constitutionnelle française*, LGDJ, Paris, 1980.
- *Théorie générale des sources du droit constitutionnel*, Univ. de Paris Nanterre, Cours professé, 3^e cycle, 1983-1984.
- *Pour une théorie juridique de l'Etat*, Puf, Paris, 1994.
- *1789 et l'invention de la Constitution*, sous la dir. de Michel Troper et Lucien Jaume, LGDJ, 1994.
- *La philosophie du droit*, Puf, Paris, 2003
- *Terminer la Révolution. La Constitution de 1795*, Paris, Fayard, 2006.
- *Comment décident les juges*, sous la dir. de Michel Troper, Economica, Paris, 2008.
- *Le droit et la nécessité*, Paris, Puf, 2011.

ii en anglais

- Aiyah (P.S.) and Summers (R.S.), *Form and Substance in Anglo-American Law*, Oxford Univ. Press, 1991 Denning (lord), *What next in the Law*, London, Butterworths, 1982.
- *Landmarks in the Law*, London, Butterworths, 1984.
- Baker (T.E.), J. S. Williams, *Constitutional Analysis*, Thomson West, St. Paul, 2003.
- Berger (R.), *Government by Judiciary. The Transformation of the Fourteenth Amendment*, Harvard Univ. Press, 1977.
- Breyer, (S.) *Pour une démocratie active* [Active liberty, 2005], Odile Jacob, Paris, 2007.
- *La Cour suprême, l'Amérique et son histoire*, Odile Jacob, Paris, 2011.
- Cardozo (B.), *The Nature of the Judicial Process*, [1921], Yale Univ. Press, 1991.
- Cox (A.), *The Court and the Constitution*, Houghton Mifflin 1Boston, 1987.
- Davis (D.), *Original Intent: Chief Justice Rehnquist and the Course of American Church/State Relations*, Prometheus books, Buffalo, 1991.
- Dicey (A.C.), *The Law of the Constitution* [1885], Liberty Fund, Indianapolis, 1982.
- Dias (R W M) *Jurisprudence*, Butterworth, London, 1985.
- Dworkin (R.), *Law's Empire*, Fontana Press, London, 1986.
- *Taking Rights Seriously*, Duckworth, London, 1987.
- Ely, (J.H.) *Democracy and Distrust. A Theory of Judicial Review*, Harvard Univ. Press, 1980.
- Fuller (L.) *The morality of law*, 1969, Yale University, 1969.
- Hart (H.L.A.), *Liberty, and Morality*, Standford Univ. Press, 1962.
- *Essays in Jurisprudence and Philosophy*, Oxford Univ. Press, 1983.
- *The concept of law*, Oxford Univ. Press, 2nd edit., 1994.
- *Essays in Jurisprudence and Philosophy*, Oxford Univ. Press, 1985.
- Hamburger (Ph.), *Separation of Church and State*, Harvard Univ. Press, 2002.
- Holmes (O.W.), *The Common Law* [1881], Little & Brown, Boston, 1963.
- Jaffa (H.V.) *Crisis of the House Divided. An Interpretation of the Issues in the Lincoln-Douglas Debates*, The Univ. of Chicago Press, 1982.
- MacCloskey (R.G.), *The American Supreme Court*, The Univ. Chicago Press, 1960.
- McDowell (G.L.), *Equity and the Constitution*, The Univ. of Chicago Press, 1982
- Mansfield (H.), *America's Constitutional Soul*, The Johns Hopkins Univ. Press, 1991.
- Miller (M.) *Judicial politics in the United States*, 2015.
- Posner, (R.A.) *Law, Pragmatism, and Democracy*, Harvard Univ. Press, 2003.
- Prometheus, Buffalo, 1991.
- Rohr (J.), *Founding Republics in France and America. A study in constitutional Governance*, Univ. Press of Kansas, 1995.
- Rosen, (G.) *American Compact. James Madison and the Problem of Founding*, Univ. Press of Kansas, 1999.

- Strauss (Leo), *What is political philosophy ?* The Univ. of Chicago Press, 1959.
 Weber (M.), *Le métier et la vocation de l'homme politique* [1919], in *Le savant et el politique*, Plon, Paris, 1959.
 Wilson (W.), *Constitutionnel Government in the United States* [1908], Columbia Univ Press, 1961.
 Wolfe (Ch.), *The Rise of Modern Judicial Review* Basic books, New York, 1986.

2/ Articles

- Amselek (P.), « Réflexions critiques autour de la conception kelsénienne de l'ordre juridique », *Revue de droit public*, n 1976, n°1.
 - « Ontologie du droit et logique déontique », Journée d'Etudes sur Le raisonnement juridique, Paris, 1992, sous le patronage de l'Association Internationale du Droit et de Philosophie sociale, pdf.
 - « La part de la science dans les activités des juristes », *Rec. Dalloz*, 1997, 39^e cahier, chronique.
 Carbonnier (J.), « *Le Code civil des Français a-t-il changé la société européenne ?* », *Recueil Dalloz*, 1975, Chronique.
 Champeil-Desplats (V.), *Le principe constitutionnel de fraternité : entretien avec Patrice Spinosi et Nicolas Hervieu*, *Revue des droits de l'homme*, 15/2019.
 - *Nommer, mesurer, intégrer les marges sociales en droit*, *Revue des droits de l'homme*, 14/2018.
 - « Les écoles de pensée en droit », XV^e Congrès de l'Association internationale de méthodologie juridique. <https://www.youtube.com/watch?v=6OBW55yCcTA>, 5 avril 2019.
 Darcy (G.), « Unité et rationalité dans la construction révolutionnaire », in *Révolution et Décentralisation*, Colloque 1989, Besançon, Economica, Paris, 1990.
 Dupuy (J.-P.), « La loterie à Babylone. Le vote, entre procédure rationnelle et rituelle », in *Le Débat*, 2002/2, Gallimard, Paris.
 Eisenmann, (Ch.) « Le juriste et le droit naturel », in *Le droit naturel*, *Annales de philosophie politique*, III, Puf, Paris, 1959.
 - « L'esprit des lois et la séparation des pouvoirs », in *Mélanges Carré de Malberg*, Paris, Sirey, 1993.
 Elster (J.), "Constitutional bootstrapping in Philadelphia and Paris", in *Constitutionalism, Identity, Difference, and Legitimacy*, edit. by Michel Rosenfeld, Duke Univ. Press, 1994.
 Millard, (E.) « La hiérarchie des normes. Une critique sur un fondement empiriste », in *Revue de théorie constitutionnelle et de philosophie du droit*, *Revus.org*, 21/2013.
 Rials (S.), « Charles Eisenmann, historien des idées politiques ou théoricien de l'Etat ? », in *La Pensée de Charles Eisenmann*, Economica, Paris, 1986.
 Rosenfeld, (M.) « Bush contre Gore : trois mauvais coups portés à la Constitution, à la Cour et à la Démocratie », *Cahiers du Conseil constitutionnel*, n°13, Dossier : la sincérité du scrutin, janv. 2003.
 Segal (J.A.), Westerland (Ch.), Lindquist (S.), "Congress, the Supreme Court, and Judicial Review: Testing a Constitutional Separation of Powers Model", *American Journal of political Science*, vol.55, January 2011.
 Yasumoto, (M.), Stolleis (M.), Halpérin (J.-L.), *Interpretation of the law in the age of Enlightenment from the rule of the king to the rule of law*. Springer, Heidelberg, New York, 2011.
 - « Le principe d proportionnalité, principe national et principe d'internationalisation », in *Société de législation comparée, Regards croisés sur l'internationalisation du droit France- Etats-Unis*, p.138 et pp.131-133.
 Tribe, (L.) « The curvature of constitutional space : what lawyers can learn from modern physics », *Harvard Law review*, vol.103, Nov. 1989, n° 1.
 Troper (M), « Liberté, propriété et structures constitutionnelles dans la pensée du XVIII^e siècle », *Archives de philosophie du droit et de philosophie sociale*, Wiesbaden, Franz Steiner Verlag, 1978.
 - « La pyramide est toujours debout ! Réponse à Paul Amselek », *Revue de droit public*, n 1978, n°6.
 - « L'idéologie juridique », in *Analyse de l'idéologie*, Centre d'Etude de la Pensée Pol., Paris, Gallilée, 1980.
 - « Le concept de constitutionnalisme et la théorie moderne du droit », *Intervention au Sénat*, 17-19 sept. 1987, pp.1-2.
 - « L'interprétation de la Déclaration des droits. L'exemple de l'article 16 », in *La déclaration de 1789*, *Rev. franç. de théorie juridique*, Paris, Puf, 1988.
 - « En guise d'introduction : La théorie constitutionnelle et le droit positif », *Cahiers du Conseil constitutionnel* n°9 (Dossier : souveraineté de l'Etat et hiérarchie des normes, févr. 2001).
 - « L'interprétation constitutionnelle », in F. Melun-Souscramien, *L'interprétation constitutionnelle*, Paris, Dalloz, 2005.
 - « Le positivisme et les droits de l'homme », in Bertrand Binoche, Jean-Pierre Cléro, *Bentham contre les droits de l'homme*, Paris, Puf, 2007.
 Zoller (E.), « La pratique de l'opinion dissidente aux Etats-Unis », in *Mélanges Pierre avril*, LGDJ, Paris, 2001.

II.(b) - En philosophie des sciences

1/ Livres

a) « Données » historiques et commentaires sur œuvres particulières

- Belna, (J.-P.) *Histoire de la logique*, Ellipses, Paris, 2005.
 Borel (E.), *Le hasard* [1920], Ulan Press, Amazin.cc.uk
 - *Le jeu, la chance, et les théories scientifiques modernes*, Gallimard, Paris, 1941.
 - *L'évolution de la mécanique* [1943], Flammarion, Paris.
 Brunschvicg (L.), *Les étapes de la philosophie mathématiques* [1912], Librairie Blanchard, Paris, 2000.
 Charpentier (E.), Ghys (E.) et Lesne (A.), *L'héritage scientifique de Poincaré*, Belin, Paris, 2006.
 Cohen (IB), *Science and The Founding Fathers. Science in the Political Thought of Jefferson, Franklin, Adams and Madison*, New York, Norton company, 1997.
 Collette (J.-P.), *Histoire des mathématiques*, édit du Renouveau pédagogique, Vuibert, Paris, 1979.
 Dahan-Dalmedico (A.), Peiffer (J.) , *Une histoire des mathématiques. Roues et dédales*, Seuil, Paris, 1986.
 Dhombres (J.), *L'Ecole normale de l'an III. Vol.1. Laplace, Lagrange, Monge*, Paris, édit Rue d'Ulm, Dunod, 1992.
 Dugas (R.), *Histoire de la mécanique* [1950], Paris, Gabay, 1966.
 Duhem (P.), *L'évolution de la mécanique* [1903], Vrin, Paris, 1992
 Einstein (A.), Infeld (L.), *L'évolution des idées en physique* [1938], Flammarion, Paris, 1983.
 Gandt (F. de), « Mathématiques et réalité physique au XVII^e siècle », in *Penser les mathématiques*, Seuil, Paris, 1982.

- *Force and Geometry in Newton's "Principia"*, Princeton Univ. Press, 1995.
- Husserl et Gaillée. *Sur la crise des sciences européennes*, Vrin, Paris, 2004.
- Gindikin (S.), *Histoires de mathématiciens et de physiciens*, Cassini, Paris, 2000.
- Granger (G.-G.), *La mathématique sociale du marquis de Condorcet*, Puf, Paris, 1956
- Hacking (I.), *L'émergence de la probabilité* [1975], Paris, Seuil, 2002.
- Katz (V.J.) *A History of mathematics*, Addison-Wesley, New York, 2008.
- Koyré (A.), *Etudes newtoniennes*, Galimard, Paris, 1968.
- *Etudes d'histoire de la pensée philosophique*, Paris, Gallimard, 1971.
- *Etudes galiléennes*, Paris, Hermann, 1980.
- Kuhn (Th.), *La structure des révolutions scientifiques* [1962], Paris, Flammarion, 1972.
- La science des nœuds*, Belin. Pour la science, Paris, 2001.
- L'ordre du chaos*, Pour la science, Paris, 1989.
- Louis-Gavet (G.), *Comprendre Einstein*, Eyrolles, Paris, 2009.
- Shapin (S.) and Shaffer (S.), *Leviathan and the air-pump. Hobbes, Boyle and the experimental life*, Princeton Univ. Press, 1985.
- Taton (R.), *La science moderne. De 1450 à 1800*, Puf, Paris, 1995.
- Toth (I.), « La révolution non euclidienne », in *La Recherche en histoire des sciences*, Paris, Seuil, 1983.
- *Platon et l'irrationnel mathématique*, Paris, édit. de l'éclat, 2011.
- Thom (R.), « Biologie aristotélicienne et Topologie », in *Boletim da Sociedade de Matemática*, 32, 1995.
- Umberto Bottazzini, Poincaré. *Philosophe et mathématicien*, Belin. Pour la science, Paris, 2002.

b) Vues d'ensemble

- Bachelard (G.), *La Philosophie du non* [1940], Paris, Puf, 7^e éd., 1975.
- *Le nouvel esprit scientifique* [1934], Puf, Paris, 1941.
- Berthon, (M.-E.) *Les grands concepts scientifiques et leur évolution*, Paris, Publication universitaire, 2000.
- Berger (M.), *Géométrie vivante, ou l'échelle de Jacob*, Cassini, Prsi, 2009.
- Boutot (A.), *L'invention des formes*, Odile Jacob, Paris, 1993.
- Boyer (Carl B.), *A history of mathematics*, revised by Uta C. Merzbach, John Wiley, New York, 1989.
- Cléro (J.-P.), *Les raisons de la fiction. Les philosophes et les mathématiques*, Armand Colin, Paris, 2004.
- Dobson (K.), Grace (D.), Lovett (D.), *Physics*, Collins educational, London, 1998.
- Ekeland (I.), *Le calcul, l'imprévu*, Seuil, Paris, 1984.
- *Le meilleur de mondes possibles*, Seuil, Paris, 2000.
- Feynman (R.), *La nature des lois physiques*, Robert Laffond, Paris, 1970.
- *Mécanique 1* [*The Feynman lectures on Physics*, 1963], Dunod, Paris, 1999
- *Electromagnétisme 1* [*The Feynman lectures on Physics*, 1963], Dunod, Paris, 1999.
- Godefroy (G.), *L'aventure des nombres*, Odile Jacob, Paris, 1997.
- *Les mathématiques, mode d'emploi*, Odile Jacob, Paris, 2011
- Gonseth (F.), *Logique et philosophie des mathématiques*, Hermann, Paris, nlle édit, 1998.
- Heisenberg (W.), *Physique et philosophie* [1958], Albin Michel, Paris, 1971.
- *La partie et le tout* [1969], Flammarion, Paris, 1990.
- Jacquard (A.), *La science à l'usage des non-scientifiques*, Calmann-Lévy, Paris, 2001.
- *Tentatives de lucidité*, Stock, Paris, 2004.
- Jedrzejewski (F.) *Diagrammes et Catégories*, thèse 2007, Univ. Denis Diderot- Paris VII, 2007.
- Kane/Sternheim, *Physique*, Paris, InterEditions, 1986.
- Klein (E.), *La physique quantique*, Flammarion, Paris, 1996.
- *Discours sur l'origine de l'univers*, Flammarion, Paris, 2010
- Lachterman (R.-D.), *The ethics of geometry A genealogy of modernity*, Routledge, New York, 1989.
- Lehning (H.), *Toutes les mathématiques du monde*, Flammarion, Paris, 2020, p.173.
- Le Ru, (V.), *La science et Dieu entre croire et savoir*, Vuibert, Paris, 2010.
- Lévy-Leblond (J.-M.), *Impasciences*, Seuil, Paris, 2003.
- *Aux contraires. L'exercice de la pensée et la pratique de la science*, Paris, Gallimard, 1996.
- Lions (P.-L.), *Dans la tête d'un mathématicien*, Alpha/humensis, Paris, 2023.
- Lochak (G.), *La géométrisation de la physique*, Flammarion, Paris, 1994.
- Lochak, Diner, Fargue, *L'objet quantique*, Flammarion, Paris, 1989.
- Mavridès (S.), *La relativité*, Puf, Paris, 4^e édit., 2000.
- Morin (E.), *La méthode, 1-4*, Seuil, Paris, 1991.
- La querelle du déterminisme*, Gallimard, 1990, Paris.
- Poincaré (H.), *La science et l'hypothèse* [1902], Flammarion, Paris, 1968.
- *La valeur de la science* [1905], Flammarion, Paris, 1970
- *Science et méthode* [1908], Paris, Kimé, 1999.
- Perdijon, (J.) *La nature a-t-elle des principes ? Origine et destin des lois de l'univers*, Vuibert, Paris, 2010.
- Quine (WVO), *Logique élémentaire*, Vrin, Paris, 2006.
- Rittaud (B.), *Le fabuleux destin de $\sqrt{2}$* , Le Pommier, Paris, 2006.
- Sandori (P.), *Petite logique des forces. Constructions , et machines*, Paris, Seuil, 1983.
- Sautoy (M. de), *La symétrie ou les maths au clair de lune* édit. Héroïse d'Ormesson, Paris, 2012.
- Taleb (N.), *Le cygne noir*, Les Belles lettres, Paris, 2010.
- *Jouer sa peau. Asymétries cachées dans la vie quotidienne*, Les Belles Lettres, Paris, 2017.
- Trinh Xuan Thuan, *Le chaos et l'harmonie. La fabrication du Réel*, Fayard, Paris, 1998.
- *La plénitude du vide*, Albin Michel Paris, 2016.
- *Vertige du cosmos*, Flammarion, Paris, 2019.
- Ullmo (J.), *La pensée scientifique moderne*, Flammarion, Paris, 1969.
- Weyl, (H.) Temps, espace, matière [1918], Librairie Blanchard, Paris, 1958.
- *Philosophie des mathématiques et sciences de la nature* [1949], MetisPresses, Genève, 2017
- Yau (Shing-Tung) and Nadis (S.), *The shape inner space*, Basic books, New York, 2010.

c) Modèles

- Abraham (A.) and Shaw (Ch.), Dynamics. *The Geometry of Behaviour*, Addison-Wesley Publ. Co., 2nd edit., 1992
- Atlan (H.), *Entre le cristal et la fumée, Essai sur l'organisation du vivant*, Paris, Seuil, 1979.
- *Les étincelles de hasard*, t. 2, Paris, Seuil, 2003.
 - *Croyances. Comment expliquer le monde ?* édit. Autrement, Paris, 2014.
- Blanché (R.), *Structures intellectuelles. Essai sur l'organisation systématique des concepts*, Vrin, Paris, 1981.
- Bonnans (F.) & Rouchno (P.), *Commande et optimisation de système dynamiques*, Les éditions de l'Ecole polytechnique, Paris, 2005
- Bruter (C-P.), *Sur la nature des mathématiques*, Gauthier-Villars, Paris, 1973.
- *Les architectes du feu. Considérations sur les modèles*, Flammarion, Paris, 1982.
 - *Topologie et perception*, Maloine, Paris, 1986.
 - *Comprendre les mathématiques*, Paris, édit. Odile Jacob, 1996.
 - « La notion de singularité et ses applications, » *Revue Internationale de Systémique*, 3, 4, 1989.
 - « Géométrie et physique. Invariance, symétrie et stabilité, », édit. Espinoza, Strasbourg, 2000.
 - *Energie et stabilité. Eléments de philosophie naturelle et d'histoire des sciences*, Presses universitaires européennes, 2007.
 - *Energie et stabilité Eléments de philosophie naturelle et d'histoire des sciences*, Semiotics Institute on Line, 2007.
 - *The Principle of stability within the Pantheon of mother ideas*, Cambridge Univ. Press, 2022.
 - *Au-delà de l'entropie classique. L'évolution comme processus de création sous l'effet de la contrainte*, 2023, <https://www.openscience.fr/Entropie-thermodynamique-energie-environnement-economie>
- Einstein, *La relativité* [1956], Paris, Payot, 1989.
- Feyerabend (P.), *Contre la méthode. Esquisse d'une théorie anarchiste de la connaissance*, Seuil, Paris, 1979.
- Gunzig (E.), « Du vide à l'univers », in *Le vide. Un univers du tout et du rien*, Revue de l'Univ. de Bruxelles, édit. Complexe, 1998.
- Interview par Elisa Brune, *Relations d'incertitude*, Fédération Wallonie-Bruxelles, 2022.
- Heisenberg (W.), *La partie et le tout* [1969], Flammarion, Paris, 2016.
- Hubbard (J.), West (B.), *Equations différentielles et équations dynamiques*, trad. et adaptation Véronique Gautheron, Cassini, Paris, 1999.
- Klein (J.), *Lectures and Essays*, St. John's College Press, Annapolis, 1985.
- Kline (M.), *Math. thought from the Ancient to Modern Times*, Oxford Univ. Press, 1990.
- *La connaissance objective* [1972], Bruxelles, Complexe, 1978.
- Lachièze-Rey (M.), *Les avatar du vide*, Le Pommier, Paris, 2005.
- *Au-delà de l'Espace et du temps. La nouvelle physique*, Le Pommier, Paris, 2008.
 - *Voyager dans le temps. La physique moderne est la temporalité*, Paris, Seuil, 2011.
- Lakatos (I.), *Preuves et réfutations. Essai sur la logique de la découverte mathématique*, Hermann, Paris, 1984.
- Le Bihan (D.), *L'erreur d'Einstein. Aux confins du cerveau et du cosmos*, Odile Jacob, Paris, 2022.
- Lévy-Leblond (J.-M.), *De la matière relativiste, quantique, interactive*, Seuil, Paris, 2006.
- Longair (M.), *Theoretical Concepts in Physics. An Alternative View of Theoretical Reasoning*, Cambridge Univ. Press, 2003.
- Penrose (R.), *L'esprit, l'ordinateur et les lois de la physique*, InterEditions, Paris, 1992.
- *A la découverte des lois physiques*, Odile Jacob, Paris, 2007.
- Polya (G.), *Comment poser et résoudre un problème*, Gabay, Paris, 2000.
- *Les mathématiques et le raisonnement « plausible »*, Paris, Gabay, 2008
- Popper (K.), *La logique de la découverte scientifique*, Paris, Dunod, 1973.
- Ruelle (D.), *Hasard et chaos*, Paris, édit. Olivier Jacob, 1991
- Sossinsky (A.), *Nœuds. Genèse d'une théorie mathématique*, Seuil, Paris, 1999.
- Thom (R.), *Modèles mathématiques de la morphogénèse*, Paris, Union gl'e d'édits, 1974R. Thom, *Modèles mathématiques de la morphogénèse*, Paris, Union gl'e d'édits, 1974,
- *Stabilité structurelle et morphogénèse. Essai d'une théorie générale de systèmes*, Paris, Interéditions, 2^e édit., 1977.
 - « De quoi faut-il s'étonner ? » », Paris, Circé, 1978.
 - *Connaissance et métaphore*, Institut de France, Séance 24 oct. 1980.
 - *Paraboles et catastrophes*, Paris, Flammarion, 1983
 - *Exposé introductif*, in *Logos et Théorie des Catastrophes*, Genève, Patiño, 1988.
 - *Prédire n'est pas expliquer*, Paris, Eshel, 1991.
 - *Esquisse d'une sémiophysique*, Paris, InterEditions, 1991.
 - *Logos et Théorie des catastrophes*, Patiño, Genève, 1996.
 - « Modélisation et scientificité », in Actes du colloque *Elaboration et justification des modèles*, Maloine, Paris, 1996.
- Toth (I.), *Liberté et vérité. Pensée mathématique & spéculation philosophique*, édit. de l'éclat, Paris, Paris-Tel Aviv.
- Toussaint Desanti (J.), *La philosophie silencieuse ou critique des philosophies de la science*, Seuil, Paris, 1975.
- Zeeman (E. ch.), *Catastrophe Theory. Selected Papers, 1972-1977*, Addison-Wesley, London, 1977

2/ Articles

- Atlan (H.), « Les modèles dynamiques en réseaux et les sources d'information en biologie », in *Structure et dynamique des systèmes*, Sém. interdiscipl. du Collège de France, Maloine, Paris, 1976.
- Belanger (M.), « Le langage des catégories », Séminaire de logique, UQAM, 30 nov. 2006
- Bénabou (J.), « Le très, le presque et autres articulations du langage », 4 avril 2015, https://sites.google.com/site/logiquecategorique/autres-seminaires/ens/mamuphi/20150404_Bénabou
- Boi (L.), « The geometric foundations of contemporary physics, and some reflexions about the nature of space-time », XVII Congresso SIGRAV "General Relativity and Gravitational Physics", Cosenza, 22-25 Settembre 2008.
- *Morphologie de l'invisible*, Presses Univ. de Limoges, 2011.
 - « Plasticity and Complexity in Biology: Topological Organization, Regulatory Proteins Networks and Mechanisms of Genetic Expression », in G. Terzis & R. Arp (eds.), *Information and Biological Systems. Philosophical and Scientific Perspectives*, The MIT Press, 2011.
- Cartan (E.), « La théorie des groupes » [1944], in *Revue du Palais de la Découverte*, juil.-août 1989, vol.17, n°170

- Feynman (R.) [1980], in Pour la science. Feynman, *Les intégrales de chemin*, mai-août 2004, n° 19.
- Gonseth (F.), « Les conceptions mathématiques et le réel », in *Les sciences et le réel*, Archives de l'Institut international des sciences théoriques, série A, Problèmes de philosophie des sciences, 1948.
- Grothendieck (A.), « Introduction au langage fonctoriel », Fac. De sciences d'Alger, Département de mathématiques, Séminaire 1965-66, <https://webusers.imj-prg.fr/~leila.schneps/grothendieckcircle/GrothAlgiers.pdf>
- Khélif (A.), « Les catégories pour les nuls ». Université Paris Diderot. *Ideas in science*, Logique mathématique, <https://www.youtube.com/watch?v=LVHoROSF3KA>
- Lobos (C.), « Diagrams of time and syntaxes of consciousness: A Contribution to the phenomenology of visualization », in *When form becomes substance. Power of Gestures, Diagrammatical Intuition and Phenomenology of Space*, op. cit., Birkhäuser Cham, 2022, p.396.
- Toth, (I.), « Philosophie, éthique, politique », Diogène, n° 182, avril-juin 1998.

III.(c) - En négociation et en économie, particulièrement en théorie des jeux

a) Economie

- Allais (M.), *Economie et intérêt*, Imprimerie nationale, 1947.
- *Analyse économique, Monnaie et développement*, Ecole des Mines, Paris, sept. 1968.
- *Le taux d'intérêt psychologique*, Centre d'analyse économique de l'Ecole des mines de Paris, sept.1971.
- *Oubli et intérêt*, avril 1970.
- *The psychological rate of interest*, *Journal of money, credit and banking*, August 1974- *Classes sociales et civilisations*, in *Economies et sociétés*, Institut de science économique appliquée, 1974, série HS, n° 17.
- Areeda (Ph.), L. Kaplow (L.), *Antitrust analysis*, Boston, Little Brown company, 1988.
- Arrow (K.), *Choix collectif et préférences individuelles*, Calmann-Lévy, Paris, 1974.
- Boudon (R.) *L'analyse mathématique des faits sociaux*, Plan, Paris, 1970.
- Bourcier de Carbon (L.), *Essai sur l'histoire de la pensée et des doctrines économiques*, Montchrestien, Paris, 1979.
- Charreton (R.), *Economie politique*, édit Technip, Paris, 2000.
- Daniel (J.M.), *Le socialisme de l'excellence. Combattre les rentes et promouvoir les talents*, François Bourin éditeur, Paris, 2011.
- *Histoire vivante de la pensée économique. Des crises et des hommes*, Pearson, Paris. 2014..
- *8 leçons d'histoire économique*, Odile Jacob, Paris, 2015.
- Feldman (A.M.), *Welfare economics and social choice theory*, Kluwer, The Hague, 1986.
- Keynes (J. Maynard), *Théorie générale de l'emploi, de l'intérêt et de la monnaie* [1936], Payot, Paris, 1969.
- Dupuy (J.-P.), *Libéralisme et justice sociale*, Hachette, Paris, 1992
- Mandelbrot (B), *Fractales, hasard et finance*, Flammarion, Paris, 2009.
- Marx (K.), *Le capital* [1867], Paris, Gallimard, 1969.
- Nozick (R.), *Anarchie, Etat et utopie* [1974], Puf, Paris, 2008.
- Piketty (Th.), *Le capital au XXI^e siècle*, Seuil, Paris, 2013.
- Posner (R.) , *Economic Analysis of law*, Aspen publishers, New York, 2014.
- Proudhon (P.-J.), *Qu'est-ce que la propriété ?* [1840], Paris, Garnier-Flammarion, 1966
- Rueff (J.), *L'ordre social*, Librairie de Médecis, Paris, nlle édit., 1948.
- *Des sciences physiques aux sciences morales*, Payot, Paris, 1969.
- Schumpeter (J), *Capitalisme, socialisme et démocratie* [1951], Payot, Paris, 1984.
- Simon (LP.), L. Blume (L.), *Mathématiques pour économistes*, De Boeck, Bruxelles, 1998.

b) Négociation et lobbying

- Axelrod (R.), *Donnant, donnant. Une théorie du comportement coopératif*, Odile Jacob, Paris, 1992.
- Baird (D.), Gertner (R.), Picker (R.), *Game theory and the law*, Harvard Univ. Press, 1994.
- Bercoff (M.), Pomerol (J-C), Michel Rudnianski (M.), *Le grand livre sur la négociation*, Eyrolles, Paris, 2016
- Brams (St.), *Game and Politics*, Dover Publications, New York, 2003.
- Brett (J.M.), *Negotiating globally. How to negotiate deals across cultural boundaries*, John Wiley, San Francisco, 2007.
- Clamen (M.), *Le lobbying et ses secrets. Guide des techniques d'influence*, Dunod, Paris, 1995.
- Dehez (P.), *Théorie des jeux. Conflit, négociation, coopération et pouvoir*, Economica, Paris, 2017.
- Duncan Luce (R.), Raïffa (H.), *Games and decisions*, Dover, New York, 1985,
- Eber (N.), *Théorie des jeux*, Paris, Dunod, 2004.
- *Introduction à la microéconomie moderne. Une approche expérimentale*, De Boeck, Louvain-la-Neuve, 2016.
- Edgeworth, (F.Y.) *Mathematical psychics. An Essay on the application of mathematics to the moral sciences* [1881], Augustus M. Kelley Publishers, New York, 1967.
- Fisher (R.) and Ury (W.), *Getting to Yes* (1981), Penguin Books, New York, 2nd edit.1991.
- Fisher (R.) and Brown (WS), *Getting together*, Penguin Books, New York, 1988.
- Fisher (R.), Kopelman (E.), Kuffer Schneider (A). *Beyond Machiavelli*, Penguin Books, New York, 1996.
- Guerrien (B.), *La Théorie des jeux*, Economica, Paris, 2002.Kahneman (D.), *Thinking first and slow*, Penguin Books, UK, 2011.
- Lax (D.), Sebenius (J.), *Negotiation 3D*, Harvard Business school Press, 2006.
- Mérô (L.), *Les aléas de la raison. De la théorie des jeux à la psychologie*, Paris, Seuil, 2000.
- Moulin, (H.) *Théorie des jeux pour l'économie et la politique*, Hermann, Paris, 1981.
- Nelson (.) and Webb Yackee (S.), "Lobbying Coalitions and Government Policy Change : An analysis of federal agency rulemaking", *The Journal of Politics*, The Univ. Chicago Press Journals, vol.74, n°2, 2012.
- Raïffa (H.), *The Art and Science of Negotiation*, Harvard University Press, 1982.
- with John Richardson and David Metcalfe, *Negotiation Analysis. The science and art of collaborative decision making*, Harvard Univ. Press, 2002.
- Rasmusen, (E.) *Games and Information. An introduction to game theory*, Blackwell, Oxford, 1996.
- Schelling (Th.), *The strategy of conflict*, Harvard Univ. Press, 1981.
- Schmidt (Ch.), *La théorie des jeux. Essai d'interprétation*, Puf, Paris, 2001.

- « Sur quelques difficultés d'appréhender les croyances dans l'analyse économique et la théorie des jeux », *Revue d'économie politique*, 2002/5, vol.112.
 - « Du jeu aux joueurs : sur quelques extensions de la théorie des jeux », in *Psychotropes*, 2007/3-4.
 - « La neuroéconomie rend compte de cette métamorphose de l'agent au cours même du jeu de négociation », in *Négociation* 2008/2.
- Strafin (Ph.), *Game Theory and Strategy*, The Mathematical Association of America, 2002.
 Ury (W.), *Getting past No. Negotiating your way from confrontation to cooperation*, Penguin Books, New York, 1993.
 Yildizoglu (M.), *Introduction à la théorie des jeux*, Dunod, Paris, 2011.
 Young (M.), *Rational Games. A Philosophy of Business Negotiation from Practical Reason*, Quorum Books, Connecticut, 2001.

III.- Réflexions propres au présent auteur

1/ Livres

- Laraby (A.), *L'approche française de la justice transitionnelle* (en collaboration avec Arnaud Garcette), Ministère des affaires étrangères, Direction générale de la mondialisation, du développement et des partenariats, 2014.
- *New horizons for transitional justice. A French approach* (Report coordinated with Arnaud Garcette), Ministry of Foreign Affairs, Directorate-General of global affairs, développement and partnerships, 2014.
 - *Le facteur de production invisible*, Up' édition, 2015, distribué par Amazon.
 - *Tartufferie et misanthropie économique*, Up' édit., 2016, id.
 - *Breveter l'inhumain*, Up' édition, Paris, 2017. Id.
 - *L'innovation en politique étrangère. Tableaux, diagrammes et raisonnement en complément de la diplomatie d'autrefois*, Up' édition, Paris, 2017, id.

2/ Articles

a) en droit

- « The work of Benjamin Franklin, or How to break away with originality from English philosophy », Claremont Institute, California, July 19, 1983 (bourse d'étude).
- « L'éducation comme service public : Querelle des Anciens et des Modernes », Université de Paris-X-Nanterre, 31 octobre 1983.
- « Science et magie en concurrence dans le droit constitutionnel du 18^e siècle », *Cahiers SYSTEMA*, n°11, déc. 1983.
- La théorie de Toynbee et l'actualité politique internationale, Univ. Paris-X-Nanterre, 1984.
- « Analyse de deux ouvrages récents de Pierre Rosanvallon », Section d'études 1 du Conseil national de prévention de la délinquance, groupe 1 : Actions à entreprendre pour vaincre le sentiment d'insécurité, 12 janvier 1984.
- « Sentiment d'insécurité et notion de devoir public », Section d'études 1 du Conseil national de prévention de la délinquance, groupe 1 : Comment faire régresser le sentiment d'insécurité ? 19 avril 1984.
- « Amender moins le droit que la périphérie du droit, pour mieux préparer l'adolescent à sa liberté sexuelle et affective, Conseil supérieur de l'information sexuelle, de la régulation des naissances et de l'éducation familiale, 8 juin 1984.
- « Séparation des pouvoirs et contrôle législatif des actes administratifs en France et aux Etats-Unis » (texte écrit en qualité d'assistant parlementaire au Sénat), 15 juin 1985.
- « La longue grève des mineurs britanniques et ses leçons » (texte écrit sous la même qualité), 25 mars 1985.
- « Violence and English law », The London School of Economics and Political Science, July 25, 1985.
- « La pédagogie du droit : contenu et méthode », Conseil supérieur de l'information sexuelle, de la régulation des naissances et de l'éducation familiale, 25 août 1985 (écrit en partie au Château de Lourmarin dans le cadre d'une bourse de la Fondation Vibert)
- « Nominalism in the English language and British culture », University of Oxford (Extra-mural studies), bourse d'étude, 1990.
- « La notion de pouvoir exorbitant au seuil de la pensée moderne. Variations contrapuntiques », in *Passion des formes*, à René Thom, ENS éditions, 1994, t.1.
- « La mutilation comme œuvre de soi », *Revue de psychanalyse et clinique médicale*, n°1, automne 1997.
- « Le bénéfice de la maladie au prétoire (or how neither to win nor to lose) (sur la base d'expérience d'avocat), 19 févr. 1998.
- « "Oh ! là là – remboursez-moi !", ou du vain espoir de mettre un terme au caractère incommensurable de la douleur en droit », *Bulletin du RPH. Réseau pour la psychanalyse à l'hôpital*, n°4, automne 1999.
- « Conseiller-auditeur et arbitre : le rôle accru des personnalités tierces dans le contrôle communautaire des concentrations » (en collaboration avec Bernard Geneste), *Décideurs juridiques et financiers*, n° sur Fusions et acquisitions, 2001.
- Contribution à *Art et techniques de la médiation*, sous la dir. de S. Bensimon, M. Bourry d'Antin, G. Pluyette, Lexis/Nexis, 2004.
- « De la plénitude du vide » (en médiation), Ifomène (Institut de Formation à la médiation et à la formation, dont je fus en 1997 l'un des fondateurs avec Stephen Bensimon et Joseph Maïla), Institut catholique, 2006.
- « La plainte en droit », in *La plainte*, *Revue de psychanalyse et clinique médicale*, n°20, printemps 2007.
- « Church-State relations in France and in the United States », *Cardozo Law school LLM*, New York, May 20, 2006.
- « The role of the continental mindset in the making of an unified Europe », *Cardozo Law school LLM*, New York, Fall 2006.
- « The non-Archimedean notion of justice », *Cardozo Law school LLM*, New York, Dec. 15, 2006.
- « Fruitful mindlessness in negotiation and mediation », *Cardozo Law school LLM*, New York, 29 January 2007.
- « L'image de soi en soi », in *Image et société*, Société française des chirurgiens esthétiques plasticiens, Paris, 2011.
- « La défense des droits de l'homme : enjeu médiatique, enjeu diplomatique », Ministère des affaires étrangères. Centre d'analyse, de prévision et de stratégie, N/011-28, 7 avril 2011.
- « Afrique du Sud : Retour sur l'expérience de justice transitionnelle ». *Ibid.* Note DP/042 (DP = Direction de la Prospective), 3 février 2012.
- « La médiation américaine : un cadre d'entente en évolution constante », *Ibid.* DP/187, 25 mai 2012.
- « Réconciliation nationale et émergence économique : l'Afrique du Sud, de Mandela aux BRICS », *Ibid.* Note CAPS/170, 20 juin 2013.

- « Reconstruction de l'Etat et justice transitionnelle au Burundi », *Ibid.* Note DP/312, 26 octobre 2012. 2013.
- « Le vetting process des juges au Kenya : un enseignement pour la francophonie économique », Note CAPS/331, 3 déc. 2013
- *Paving the Way for Sustainable Development. Closing statement, on behalf of GreenPower 2020, Arab Sustainable Development Week (ASD Week) by Code95 Egypt Web Technologies, Cairo, 16 May 2017.*
- « La médiation nord-américaine : un cadre d'entente en évolution constante », *suivi de* « L'offre de négociation (ou médiation) en procédure civile anglaise », Archives de philosophie du droit, Paris, 2019, n°61.
- « La philosophie du droit des exilés. Du constitutionnalisme ancien au constitutionnalisme moderne », *Intentio* n°3, 2022 (dans le cadre du Centre de Gilles-Gaston Granger, de l'Univ. d'Aix-Marseille de l'Institut des sciences humaines et sociales du CNRS).

b) en sciences

- « La face cachée des mathématiques », Colloque au Centre Pompidou à Paris, *Magazine de mathématiques pures et épicées*, Paris n°53, juillet-sept. 2004, pp.3-4.
- « René Thom », *ibid.*, n°57, juillet-sept. 2005, pp.22-24.
- « Euler à l'IHES » (Institut des Hautes études scientifiques, à Bures-sur-Yvette), *ibid.*, n°66, oct.-déc..2007, pp.1-4.
- « Sophus Lie », *ibid.*, n°59, janvier-mars, 2006, pp.2-3.
- « Sculpture » (sur l'exposition *Ars mathematica*), *ibid.*, n°67, janvier-mars 2008, pp.2-5.
- « Promenades mathématiques » (Sur W. Döblin et Itô, et sur les propriétés des triangles de Pascal et de Sierpinski), *ibid.*, n°69, juil.-sept. 2008, pp.1-4.
- « Promenades mathématiques » (Sur Lucien Le Cam), *ibid.*, n°70, oct.-déc. 2008, pp.2-3.
- « Promenades mathématiques » (Sur Alan Turing), *ibid.*, n°71, janvier-mars 2009, pp.2-5.
- « Le truc de Sofia Kovalevskaja », *ibid.*, n°72, avril-juin 2009, pp.2-3.
- « Le dessous des cartes et la théorie des jeux » (à propos de Stephen Smale), *ibid.* n°73, juil.-sept. 2009.
- « La quête de sens chez Euler » (version abrégée), *ibid.*, n°74, oct.-déc. 2009, pp.2-4.
- « Mathématiques et imagination », *ibid.*, n°74, oct.-déc. 2009, pp.46-48.
- « De courbure en courbure » (de Gauss à Perelman), en passant par Riemann et le flot de Ricci », *ibid.*, n°77, juil. Sept. 2010.
- « Du dodécaphonisme aux relations de parenté (sur la théorie des groupes algébriques d'André Weil), *ibid.*, n°77, 2010.
- « Il y a un théorème et un théorème » (sur ceux de plongement de Nash) et les équations aux dérivées partielles (EDP), n°78, oct.-déc.2010, pp.4-5.
- « Un monde non gaussien » (à propos des mathématiques financières), n°79, janv.-févr. 2011.
- « Jouer avec les singularités », *ibid.*, n°80, avril-juin 2011, pp.5-7.
- « La diplomatie au service des mathématiques », n° 82, nov. déc. 2011, pp.2-5.
- « La caverne d'Ali Baba de l'IHP (sur les surfaces en 3D, exposées à Institut Henri Poincaré), *ibid.*, n°83, déc. 2011, pp.4-6.
- « La moyenne des voisins », *ibid.*, n°84, avril-mai 2012, pp.3-6.
- « Revivre l'apparis » (Sur Henri Poincaré), n° Hors-série, *ibid.*, nov. 2012, pp.103-111. Article repris en 2013 sur le site de l'IHP, et partiellement in *La Jaune et la Rouge*, Revue des anciens de l'Ecole polytechnique, Paris, n°679, nov. 2012, pp.30-34.
- « Analogie et machine calculatoire », *ibid.*, n°88, avril-juin 2013, pp.1-3.
- « Dans l'antichambre de l'esprit mathématique » (Sur Hadamard, version abrégée), *ibid.*, n°95, janvier-mars 2015, pp.16-18.

b) en philosophie générale

- « All future are rough ». A study of *The Turn of the Screw* by Henry James, University of Oxford, July 20, 1984. Bourse.
- « Some images of time in English literature at the turn of the XXth century, University of Oxford, August 13, 1984.
- « Une première dans les relations commerciales internationales : le jeu du marché contre le marché, le début discret de *Twin Trading* à Londres (en collaboration avec Didier Leschi), Paris, 16 mars 1985.
- « Rencontre avec un rabbin spinoziste, né par goût en Grèce antique », 20 décembre 1996, in *Liberté et négation. Ceci n'est pas un Festschrift pour Imré Toth*, Mélanges sous la supervision de Siegmund Probst (halshs-00004274v3)
- « La quête du "sens" », Revue Sarrazine, Paris, n°8 bis, nov. 2005.
- « Rigueur c/ exactitude », in Temps Marranes, Paris n°10-11, janv.-mai 2010.
- « La nuit transfigurée », *ibid.*, n°12-13, juil.-déc. 2010.
- « Mathématiques et littérature », *ibid.*, n°14, janv.-mars 2011.
- « Cantor, ou l'étude infinie... de l'infini », *ibid.*, n°17, janvier 2012.
- « Le charme », *ibid.*, n°20, juin 2012.
- « Breveter l'abject », *ibid.*, n°24, 9 mai 2014.
- « Le Canada : terre d'opportunité pour la francophonie économique », Ministère des affaires étrangères. Centre d'analyse, de prévision et de stratégie, CAPS/285, 6 octobre 2014.

c) Interview

Rencontre avec Alain Laraby, auteur du *Facteur de production invisible*, in Up-éditions, 15 oct. 2015. (A discussion with Alain Laraby, author of *The Invisible Factor of Production* by the Editor, translated by Yogev Lavie, Oct. 15, 2015), <https://up-magazine.info/decryptages/conversations/5057-rencontre-avec-alain-laraby/>

