



HAL
open science

Entre comptage et calcul.

François Conne

► **To cite this version:**

| François Conne. Entre comptage et calcul.. Math-Ecole, 1987, 130, pp.11-23. halshs-01048667

HAL Id: halshs-01048667

<https://shs.hal.science/halshs-01048667v1>

Submitted on 11 Feb 2015

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Entre comptage et calcul

Une deuxième étape d'un périple menant des dénombrements aux calculs en colonne

par François Conne

1. Introduction

Dans le numéro 128 de Math-Ecole, j'ai présenté un article (Comptage et écriture des égalités dans les premières classes d'enseignement primaire) qui proposait, au sujet des opérations numériques élémentaires, une terminologie personnelle. Dans cette deuxième partie je vais poursuivre mon cheminement et montrer comment ce cadre de référence peut rendre compte d'observations de classe à propos des calculs numériques. Ici les exemples seront tirés de deux recherches, l'une américaine de Madell [2] et l'autre de moi-même sur les égalités lacunaires [3, 4]. Je projette, lors de prochains articles, de poursuivre mon périple en examinant la question des calculs assistés par un algorithme, c'est-à-dire les calculs écrits en colonne.

Je rappelle, sans les développer ni donner ici d'exemple, les définitions que je proposais dans mon précédent article. Le lecteur pourra s'y référer pour des exemples relatifs aux comptages, ou alors attendre un peu pour la présentation de plusieurs exemples de calculs numériques variés.

1.1 Définitions

Dénombrement: Une collection d'éléments étant présente, le dénombrement est une opération permettant de déterminer la quantité numérique qui lui est associée. Cette opération consiste à coupler l'énumération des éléments de la collection à celle des signes numériques (en particulier les noms de nombres organisés dans la comptine). Le dernier signe énuméré représentera la quantité.

Calcul: Opération traitant les transformations des signes numériques reflétant les transformations et les comparaisons des quantités.

Calcul – comptage: Ici le calcul se fait par le recours à un enchaînement de dénombrements. La donnée du signe numérique est préalable à celle de la quantité qui n'est qu'un auxiliaire au calcul. Différents types de figurations des quantités peuvent être utilisées.

Calcul numérique: Calcul ne comportant pas de dénombrement mais opérant au niveau même des signes numériques. Une telle opération se fait par le recours à un ensemble de relations numériques codifiées (répertoire d'opérations élémentaires, table des opérations) ainsi qu'à des règles de numération présentées.

Sous forme de règles de disposition et d'écriture des signes et de leurs transformations et dérivées des propriétés numériques élémentaires: associativité, commutativité, distributivité, inverses, éléments neutres.

Nous verrons par la suite que les calculs numériques se scinderont encore en deux classes: les calculs numériques symboliques et les calculs numériques assistés par un diagramme. Ceci sera à peine esquissé dans cet article mais fera l'objet du troisième épisode.

1.2 Deux idées à retenir

1. Deux idées président à toute cette construction. La première est celle de **diriger l'étude des activités numériques par celle des échafaudages symboliques** qui leur sont associés. En effet, ce qui fait la distinction entre dénombrement, comptage et calcul, ce sont les objets que l'on traite (manipule): des objets concrets, réels, pris pour eux-mêmes ou représentant une quantité (pensez à la jolie expression française: «Quelle quantité cette collection d'objets représente-t-elle?». Le mesuré venant à représenter le mesurant) ou des signes numériques de toutes sortes, organisés en dispositions plus ou moins élaborées.

Cette idée est exprimée dans mon premier article comme une clause de présentation alors qu'elle est plus. En effet, elle représente pour moi une clé de synthèse entre différents aspects de nos travaux genevois, J. Brun et moi-même.

Analyse de manuels (méthodologies et fiches d'élèves), observation de classe, recueil de protocoles de leçons, de productions d'élèves lors d'entretiens ou de travaux écrits, observation des maîtres au travail, de leur propres productions didactiques telles que: explications, moyens d'assurer la réussite, etc. et enfin gestion de situations mathématiques; pour tout ceci, la référence aux signes et symboles associés fournissait un solide point de repère.

Deux confirmations sont venues ensuite à ce choix. Tout d'abord l'élaboration théorique de Gérard Vergnaud, dont le lecteur pourra lire avec profit un article consacré aux notions de concepts et schèmes [5]. Dans l'enseignement des mathématiques on ne s'occupe pas tant des schèmes de pensée que des concepts, dûment identifiés dans une construction scientifique (les mathématiques). Comme le fait remarquer G. Vergnaud (p. 249) «le terme conceptuel est restrictif parce qu'il suppose un usage explicite de signifiants». Tel est donc le critère qui distingue concept et schème et il est donc normal, dans le cadre d'études didactiques, de s'appuyer sur les signifiants et leurs montages. Une confirmation seconde vient alors en droite ligne de ces considérations, mais elle se situe à l'autre extrémité de la chaîne, à savoir les observations que nous avons pu faire du travail en classe. Il s'avère en effet que de larges pans du travail effectif des élèves échappent à l'observation des enseignants. Je l'ai montré dans mon travail de thèse [6]. Or ceci est étonnant car, il faut le dire, l'observation et la récolte de faits originaux sont choses faciles! Or il semble bien que le point décisif qui conditionne de tels recueils d'observation tient à l'intérêt que l'on portera aux signes et aux significations que les élèves (et les maîtres) leur attribuent ou s'essayent à leur attribuer. Ce que nous rappellent les psychologues tels G. Vergnaud, c'est qu'il ne faudrait pas préjuger du caractère arbitrai-

re et conventionnel des signifiants pour méconnaître qu'ils sont l'objet d'un enjeu essentiel. Mais ici la *fonction psychologique* vient se heurter à l'idée qu'on se fait communément de la *fonction didactique*. L'enseignement vise à instituer des significations communes et prédéfinies par la discipline enseignée, son histoire et les usages actuels qui en sont faits dans la société. Donc l'échange pédagogique risque toujours de se crispier sur les signifiants pris comme des termes objectifs, à signification univoque et invariante, auxquels on aura alors tôt fait de faire jouer le rôle de critères d'acquisition.

Une attitude opposée visant à tout ramener à des significations concrètes et ne jamais considérer les signes comme des objets en soi, faisant partie du monde extérieur, revient finalement au même puisqu'à la crispation sur des thèmes on substitue leur dissolution sous «le concret». L'harmonisation des fonctions psychologiques et didactiques conférée aux signifiants demande donc plus qu'une décentration des enseignants, elle demande que leurs regards (et leur rôle) soient reconsidérés.

2. La seconde idée précise ceci sur l'exemple des calculs numériques. Il est bien clair que le nombre et les transformations numériques procèdent des quantités concrètes. Ceci assure qu'étant donnés des signes numériques, il est toujours possible de leur associer des collections concrètes. Mais ceci n'entraîne en aucun cas que les **traitements numériques eux-mêmes soient une émanation directe des traitements des quantités concrètes.**

Ces calculs par exemple sont pour la plupart des traitements numériques spécifiquement adaptés aux signes sur lesquels ils opèrent (les systèmes de signes associés aux calculs sont eux-mêmes multiples et hiérarchisés). Certes on peut, nous l'avons vu, recourir à des dénombrements auxiliaires pour effectuer tel ou tel calcul (ce sera alors un comptage), certes on peut aussi montrer, avec des quantités concrètes, des modèles concrets de ces opérations symboliques. Le modèle des bases et des opérations groupe et code en est un exemple fameux. Mais alors, le modèle est forcément aussi élaboré, si ce n'est plus que ce qu'il modélise, **l'illustration concrète ne permet pas de remonter l'échelle des complexités et de l'élaboration.**

Que le lecteur ne s'effraye pas trop vite de cette introduction abstraite, les exemples viendront à l'appui de ces considérations. Je voulais simplement esquisser les grandes lignes du point de vue adopté dans toute cette série d'articles.

Des exemples, j'en ai déjà fourni un certain nombre à propos de recherches personnelles. Je reprendrai ici deux aspects de la question pour vous introduire à la distinction nouvelle que je ferai à propos des calculs numériques, distinction qui fera l'objet des articles suivants. Mais auparavant je désire discuter ici les interprétations d'autres chercheurs, américains, Labinowicz et Madell.

En fait, je profite de ce que M. Ed. Labinowicz a publié l'an passé un ouvrage très intéressant à propos de l'enseignement des activités numériques élémen-

taires en 1P, 2P, 3P, 4P. Livre dont je vous conseille la lecture (si vous lisez l'anglais) [7]. En effet, ses deux principales qualités sont: a) La présentation de beaucoup de données d'observation et de recherche. b) Les exemples et contre-exemples nombreux présentés et commentés par l'auteur permettant à l'enseignant d'apprendre à s'entretenir et à questionner les élèves, d'une manière adéquate pour l'observation.

J'ai alors eu l'idée qu'il serait bon de présenter ici un passage de cet ouvrage, tout en réexaminant les interprétations de Labinowicz selon le point de vue que j'ai adopté.

2. Les observations de Madell telles que les rapporte Ed. Labinowicz

Dans son livre Ed. Labinowicz consacre une large place aux problèmes de l'enseignement de la numération et des calculs en colonne. Il note les difficultés que ces derniers représentent pour des élèves de 1P, 2P et note aussi que bien des variantes existent à ces calculs. Dans cette perspective, il s'intéresse aux observations faites par Madell dans une école où justement ces méthodes de calcul standard ne sont pas enseignées et où on peut voir des élèves travailler « spontanément », à leur manière, les calculs élémentaires. Labinowicz rapporte alors les conclusions principales des travaux de Madell [3]. Examinons-les tour à tour.

1. Dans leurs raisonnements précoces (spontanés) les élèves ne procèdent pas colonne par colonne. Voici deux exemples de Labinowicz:

ADDITION	Problème présenté avec du matériel	Mise en ordre des cubes																																	
Elève de 6 ans		<table style="border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="text-align: center;">10</td> <td style="text-align: center;">20</td> <td style="text-align: center;">30</td> <td style="padding-left: 10px;">□ 31</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;"> </td> <td style="text-align: center;"> </td> <td style="text-align: center;"> </td> <td style="padding-left: 10px;">□ 32</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;"> </td> <td style="text-align: center;"> </td> <td style="text-align: center;"> </td> <td style="padding-left: 10px;">□ 33</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;"> </td> <td style="text-align: center;"> </td> <td style="text-align: center;"> </td> <td style="padding-left: 10px;">□ 34</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;"> </td> <td style="text-align: center;"> </td> <td style="text-align: center;"> </td> <td style="padding-left: 10px;">□ 35</td> </tr> </table>	10	20	30	□ 31				□ 32				□ 33				□ 34				□ 35	<table style="border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="text-align: center;">10</td> <td style="text-align: center;">20</td> <td style="padding-left: 10px;">□ 21</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;"> </td> <td style="text-align: center;"> </td> <td style="padding-left: 10px;">□ 22</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;"> </td> <td style="text-align: center;"> </td> <td style="padding-left: 10px;">□ 23</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;"> </td> <td style="text-align: center;"> </td> <td style="padding-left: 10px;">□ 24</td> </tr> </table>	10	20	□ 21			□ 22			□ 23			□ 24
10	20	30	□ 31																																
			□ 32																																
			□ 33																																
			□ 34																																
			□ 35																																
10	20	□ 21																																	
		□ 22																																	
		□ 23																																	
		□ 24																																	
 <p data-bbox="435 1249 730 1308">Il y a 35 enfants dans la classe de Johnny et 24 dans celle de Suzy. Combien y a-t-il d'enfants en tout?</p>																																			

EN TOUT ?

10 20 30

Il compte à nouveau le premier terme et continue un à un le comptage du second terme

L'enfant ne compte pas les dizaines à partir de 30 comme le voudrait un traitement en colonne. En fait, en présence de 59 objets, aurait-il compté les 50 premiers par dizaines avant de passer aux unités ?

SOUSTRACTION

48 - 14

élève de 7 ans

La quantité de départ est placée.

Plutôt que d'enlever un groupe de 10 l'enfant fait un échange

Résultat de l'échange

Maintenant 14 unités sont enlevées.

Les élèves de 1^{re} et 2^e primaire sont généralement incapables de penser les quantités de la seconde dizaine (de 11 à 19) comme une dizaine plus quelques unités.

Je ne suis pas étonné de ces exemples. Mais j'aimerais les interpréter selon les termes que j'ai définis. S'attendre à ce que les élèves procèdent colonne par colonne ou comptent séparément les barres de dix et les cubes unités, ce serait s'attendre à un calcul de la part de l'élève portant sur ces symboles (la disposition barres/cubes selon le matériel Dienes). Or ce que font les élèves, c'est ceci: Une première quantité symbolisée (représentée) avec des barres de dix et des cubes unités. Puis l'autre est ajoutée, ou ôtée, en énumérant un à un des cubes unités (selon la comptine), c'est-à-dire au moyen d'un comptage. Ici les cubes sont plus un support pour le comptage (qui permet à partir des nombres de dénombrer une quantité) que la représentation des quantités: 24 (élèves à ajouter), 14 (à soustraire). Les problèmes sont donc ramenés à des dénombrements. Ce sont des collections de jetons que les élèves traitent **en premier lieu**,

puis, ensuite, secondairement, ils les symbolisent (ils représentent ces quantités) en barres et cubes. Dire ceci, est alors dire que dans le contexte de cette tâche, **rien n'obligerait ni même n'engagerait l'élève à ne pas compter, mais à calculer directement**. Ceci illustre donc très bien la seconde idée exposée ci-dessus. Et montre qu'il n'y a pas de passage simple (direct) entre procédure traitant un niveau symbolique et procédure traitant un autre niveau symbolique. On ne devrait donc pas s'attendre à ce que spontanément les élèves viennent à procéder séparément colonne par colonne.

2. Comment faire alors que des procédures élaborées de calcul viennent à se substituer aux comptages ?

Il y a bien des façons de faire, et la plus simple de celles-ci semble bien être de mettre les élèves en situation de ne pas pouvoir s'appuyer sur des dénombrements. Mais le second exemple de Madell est alors très instructif. Voici comment Labinowicz le présente :

« Même quand l'élève procède dans son calcul colonne par colonne, c'est sans exception de gauche à droite. »

$\begin{array}{r} 36 \\ + 46 \\ \hline 72 \\ 8 \end{array}$	<p>La somme de la colonne des dizaines est inscrite avant de passer aux unités.</p> <p>Cette méthode peut exiger une modification du chiffre écrit en premier lieu.</p>	<div style="border: 1px solid black; border-radius: 50%; padding: 5px; display: inline-block; margin-bottom: 5px;">7 diz.</div> $\begin{array}{r} 36 \\ + 46 \\ \hline \end{array}$ <p>→</p>	<p>La somme des dizaines est retenue de tête jusqu'à ce que la colonne des unités soit examinée pour voir s'il y a une dizaine en sus.</p>
---	---	--	--

La Méthode « naturelle » la plus efficace.

$\begin{array}{r} 36 \\ + 46 \\ \hline 8 \end{array}$	<p>Les unités sont d'abord estimées et toute dizaine en sus est introduite dans la somme des dizaines. Puis on revient aux unités.</p>
---	--

Ce niveau n'est atteint que par peu d'enfants. Aucun enfant n'a montré une procédure systématique de droite à gauche quand il travaille de lui-même.

Ce qui est intéressant dans cet exemple, c'est qu'il met en évidence le fait qu'une partie du travail se fait mentalement, alors que, dans le cadre d'un calcul standard de droite à gauche on en ferait l'économie. Ici l'élève s'appuie sur le

découpage du nombre en colonne, et il traite son calcul à ce niveau (il l'organise selon). Nous n'avons donc plus affaire à un comptage mais à un calcul numérique. Mais ce découpage en colonne semble supporter le découpage oral du prononcé des nombres plutôt que d'être traité pour lui-même. Ainsi donc, ici, l'élève traite les signes numériques (critère pour un calcul numérique) mais se ramène aux noms des quantités, à la numération orale, et pas tellement à la numération écrite. Or la numération orale procède bien à ce découpage qui va des «grandes unités aux petites»: ... millier → centaine → dizaine → unité, et ceci correspond à l'écriture gauche → droite, et au sens de la lecture. Si mon interprétation s'avère correcte (dans certains cas) on voit à nouveau que rien dans la situation présentée n'oblige les élèves à procéder selon l'algorithme standard. Et à ce propos une note de Labinowicz dit: «selon Levin (1981) [8], les techniques standards actuelles de calcul écrit telles que l'ordre droite → gauche et le système de retenue ont été développées afin d'éviter à avoir à barrer (ou effacer) des résultats intermédiaires partiels.» Par exemple, si on procède de droite à gauche dans 36 , on s'évite les corrections que présente le dessin

$$\begin{array}{r} + 46 \\ 82 \end{array}$$

de Labinowicz. Ceci revient à dire que certaines règles de calcul ne s'expliquent que relativement à un niveau symbolique donné, et donc qu'on ne saurait en retrouver ni la trace, ni la raison à un niveau inférieur. De nouveau, nous avons une illustration de la seconde idée présentée dans mon introduction. Ainsi donc l'ordre de calcul droite → gauche adopté par les algorithmes (+, - et x) standards ne peut pas vraiment s'expliquer à l'aide de jetons, ni à celle du recours à la numération orale. *Mais autre chose apparaît, c'est que généralement différents systèmes de signes sont présents ensemble.* Ici ce sont les signes écrits et les signes oraux du prononcé des nombres. Sous cet aspect, il convient d'examiner avec précision sur quoi portent les traitements effectifs du sujet. Mais de plus, c'est par le jeu entre différents systèmes de signifiants que s'opère le passage d'un type de traitement à un autre. Le lecteur se rappellera de quelques exemples que j'avais donnés dans mon précédent article [1] à propos du comptage.

3. L'exemple suivant que propose Labinowicz montre en outre que, selon la situation, selon les données, les procédés de calcul changent.

$\begin{array}{r} 58 \\ - 21 \\ \hline 3 \end{array}$ 	$\begin{array}{r} 53 \\ - 24 \end{array}$ 	$\begin{array}{r} 53 \\ - 24 \end{array}$ 
50 moins 20 c'est c'est 30 (mémorisé); 8 moins 1 c'est 7 (mémorisé)	53 moins 20 c'est 33; 33, 32, 31, 30, 29; retenue 29	50 moins 20 c'est 30; 30 moins 4 c'est 26; 26 + 3 c'est 29; ret. 29
Même élève répondant à des questions différentes		

53
-24

50 moins 20 c'est 30;
3, 4, c'est 1 de plus
à enlever; 30 moins 1
c'est 29; retenu 29

Labinowicz insiste en outre pour dire que ces procédures sont adaptées à la situation. C'est-à-dire que l'élève ne procède pas à une série invariable d'opérations comme le stipule un algorithme standard mais qu'il module en «choisissant» des relations variées et certaines complexes (ainsi: $53 - 24 = 29$ $50 - 20 = 30$, $30 - 4 = 26$, $26 + 3 = 29$, jeu de soustraction/addition).

Une adaptation particulièrement fréquente (d'après Madell) tient à ce que: «les méthodes des élèves dans la retenue et l'emprunt leur permettent d'éviter d'avoir affaire à des résultats partiels plus grands que dix.»

ADDITION

38
+ 26

8 et 2 font 10; alors je prends 2 de 6, et
ça me laisse une dizaine et 4 unités...
etc.

Cette méthode marche selon le principe d'aller à la dizaine supérieure puis continuer ce qu'il faut encore. Elle évite de chercher le résultat exact de 8 plus 6.

SOUSTRACTION

53
- 24

Comme 3 n'est pas assez je prendrai les 4 d'une dizaine. Ceci me laisse 6 unités plus les 3 avec lesquelles j'ai commencé.

Je prendrai d'abord les unités et ensuite, pour l'unité qui reste je devrai l'ôter d'une dizaine ce qui me laisse 9 unités.

De nouveau ici, ce sont peut-être les procédures de calcul mental qui prédominent. Mais ce qui est plus important à noter, c'est la variété de tels «trucs» de calcul numérique que l'on peut observer. Certains sophistiqués nous amenant à nous exclamer: «oups! c'est bien tordu!», d'autres au contraire forçant notre admiration: «fallait y penser!» Ainsi ces trucs se caractérisent-ils par le fait qu'ils ne sont pas aussi déterminés que dans le calcul en colonne. Car dans ce cas (algorithme standard) je ne peux pas effectuer l'opération 3 – 4 sans emprunter à la colonne adjacente toute une dizaine alors que je n'ai besoin que d'une seule unité. Je dois passer par 13 – 4 (et pas 10 – 1 → 4 – 4). Cette différence est notée par Madell. Il constate que ceci (le passage de 3 – 4 à 13 – 4) n'est pas nécessaire au résultat (c'est évident) et que les élèves trouvent d'eux-mêmes des façons de s'en passer (c'est évident mais pas assez reconnu). Labinowicz explique ceci de la façon suivante: «Pour des soustractions avec retenue, Madell constate qu'il n'a jamais vu un enfant qui, lorsqu'il travaillait pour lui-même, aurait effectué l'échange de dix, et prononcé: de 4 aller à 13, il y a 9. Ces enfants avaient des méthodes efficaces pour contourner la difficultés de l'échange ainsi que la nécessité de connaître toutes les décompositions (additions) des nombres de 11 à 19.»

Mais ces procédures adaptées peuvent être systématisées elles-mêmes et aboutir à un algorithme ¹. Madell rapporte ainsi le cas d'un élève de 2^e primaire qui procédait ainsi:

8371	8000 – 3000 = 5000
– 3754	700 – 300 = 400
	5000 – 400 = 4600
	70 – 50 = 20
	4600 + 20 = 4620
	4 – 1 = 3
	4620 – 3 = 4617

Cette formalisation est très simple, elle est fort intéressante car elle montre que ce qui pourrait être considéré comme une erreur (inverser le calcul dans 700 – 300 par exemple), si elle apparaissait au cours d'une résolution se voulant standard:

8371
3754
5423

peut aboutir au contraire très efficacement. Je reviendrai encore sur cet exemple.

¹ Le mot est utilisé ici dans un sens très restrictif de *procédure fixe* pour toutes les soustractions et non dans une acception générale qui verrait dans tout calcul un algorithme sous-jacent. Je ne m'arrêtera pas à une question de mots. Je veux seulement contraster entre les calculs «adaptés» selon les données et des calculs tout déterminés.

2.2 Conclusion de cette discussion

- a) La description que je propose en termes de *dénombrement, comptage, calcul numérique* est pertinente; de même, les idées exposées à ce sujet trouvent confirmation.
- b) Nous entrevoyons que les élèves développent des procédures adaptées de calcul, qui varient de cas en cas. Elles ne sont pas déterminées à l'avance comme les méthodes de calcul écrit standard mais reposent sur un ensemble de relations riches et variées pour traiter des difficultés qui se présentent.
- c) Pour ce faire, les élèves jouent sur plusieurs registres de présentations symboliques.
- d) Certains de ces calculs, lorsqu'ils sont systématisés et qu'ils trouvent une disposition type, produisent des «algorithmes» (procédure fixe et prédéfinie sur une classe de problèmes) non standard.

3. Exemples des classes en Suisse romande (la génération spontanée d'algorithmes en classe)

3.1 Calcul mental / calcul écrit, une mauvaise distinction

La distinction que j'ai laissée entrevoir est reconnue. Classiquement on l'attribue au calcul «mental», ce qui est peu satisfaisant. En effet, tout comme les procédures de calcul en colonne standard, les procédures de calcul mental peuvent être fixées, formalisées et dans ce cas la seule chose qui différencie «calcul mental» et «calcul écrit» c'est le registre symbolique sur lequel chacun s'appuie. Système de désignation orale des nombres, ou système de désignation écrit. Mais de plus, tous les calculs écrits ne sont pas standardisés, ni toujours prédéfinis. Par exemple un calcul comme $298 + 45 = 248 + \dots 95$ procède par transformation ad hoc d'écriture, qui est ici une bonne astuce.

Dans mon prochain article, je reviendrai très en détails sur la distinction entre deux types de calculs numériques: prédéterminés par un algorithme (explicite) ou non. Cette distinction a un caractère général, et je voudrais maintenant, pour terminer, le montrer sur des exemples moins familiers que ceux décrits auparavant. Dans l'observation du travail en classe, on peut «voir jouer» ces distinctions spontanément, c'est-à-dire sans qu'elles aient été prévues par le projet d'enseignement.

3.2 Où une sur-notation crée un algorithme

Il est important d'examiner dans le travail de la classe les traitements symboliques. Par exemple, le maître veut expliquer quelque chose à ses élèves et il en vient à noter au-dessus des écritures de donnée quelques signes accompagnant son explication et qui devraient aider l'élève à retrouver ce qu'il doit faire et dans quel ordre. Prenons par exemple les tâches de calcul impliquant l'écriture

ture d'égalités incomplètes du type $a + b = c + \dots$ et $a + b = \dots + c$ (ou ce qui revient strictement au même, des étiquettes: $\boxed{a + b}$ $\boxed{c + \dots}$ et $\boxed{a + b}$ $\boxed{\dots + c}$) à compléter. J'ai déjà évoqué ceci dans d'autres publications [3, 6], mais je vais y revenir ici pour un aspect bien précis. On peut en effet donner un algorithme (explicite) pour résoudre toutes les questions de ce type:

1. effectuer la somme $a + b$
2. décomposer la somme obtenue selon c
3. inscrire le résultat trouvé en 2 dans la lacune.

Ce procédé marche toujours, avec bien entendu quelque lourdeur. Par exemple s'il s'agissait de résoudre le calcul: $298 + 45 = 95 + \dots$ Il ne serait pas très « malin » de calculer 343 par $343 - 95 = 248$ (même si on sait utiliser de tête les relations $100 - 2 = 98$, $100 - 5 = 95$, soit dit en passant type de relation systématiquement utilisé par le calcul avec boulier).

Les observations que j'ai faites en classe montrent que ces exercices sont difficiles pour les élèves de 1^{re} primaire. L'interprétation en termes de comptage les fait osciller entre diverses « lectures » et ils ne peuvent pas décider (ni comprendre) laquelle est correcte mathématiquement. Ainsi $3 + 5 = \dots + 2$ peut être compris comme la demande de la somme $3 + 5 + 2$ (la réponse inscrite sera alors 10) ou autrement, comme un calcul enchaîné $3 + 5 = 8. + 2$, voire d'autres encore (cf [3, 4]).

Les enseignants qui ont à faire à ce type de difficulté modifient d'eux-mêmes les notations. Ainsi par exemple $a + b = \dots + c$ devient $\bar{a} + \bar{b} = \dots + c$ (ou encore $\boxed{a + b} = \dots + c$, $\boxed{a + b} = \boxed{\dots + c}$, etc.) où tous ces nouveaux signes indiquent à l'élève quelle opération effectuer en premier, et quelles données prendre tout d'abord en compte ($a + b$). Cette « entrée » dans le calcul permettant alors de déterminer toute la suite du calcul.

Ces « trucs » d'enseignants sont tout à fait efficaces. Ils aident réellement bien des élèves à se fixer une interprétation univoque de l'écriture. Mais que devient-elle maintenant? Elle s'éloigne de son « origine mathématique ». Des signes qui n'ont pas cours hors de la classe sont introduits. De plus l'écriture sert à induire une certaine vocation (celle de l'algorithme); on indique quoi faire à quel moment, dans quel ordre et aussi à quels signes porter attention en premier dans la donnée. Cette écriture transformée devient alors nettement plus un *diagramme* qu'une simple relation mathématique fragmentaire à reconstituer.

En résumé: pour aider les élèves à fixer une interprétation parmi d'autres possibles, les maîtres transforment l'écriture d'égalité lacunaire en diagramme et indiquent par là même un algorithme de résolution qui garantit à tout coup la solution, malgré une lourdeur certaine. Bien entendu, ceci n'est pas très habile, didactiquement parlant car cela « souffle » à l'élève l'interprétation qu'il devrait trouver de lui-même.

3.3 Calcul et répertoire de relations

Voyons maintenant un autre aspect tout aussi intéressant. Dans ma recherche sur les égalités lacunaires j'avais proposé aux élèves des égalités «bi-lacunaires» $a + \dots = \dots$, $\dots + a = \dots$ et autres... [3, 4]. Dans ce cas les élèves doivent produire deux nombres pour leur réponse. Ceci donne une certaine marge pour la réponse. On pourrait penser que les élèves commencent par choisir un premier nombre qu'ils prennent comme donnée auxiliaire puis déterminent le deuxième nombre de la réponse:

Ex.: $3 + \dots = \dots$ $3 + .4. = \dots$ $3 + .4. = .7.$
ou $5 = \dots + \dots$ $5 = .3. + \dots$ $5 = .3. + .2.$

L'examen des réponses des élèves a cependant révélé autre chose. Les élèves ont tout d'abord déterminé (selon la place de la donnée numérique, ou/et selon la place du signe =) l'opération à faire (composition/décomposition). Puis leurs réponses se cantonnent dans un ensemble restreint de relations numériques qu'ils connaissent bien sans doutes: compositions/décompositions avec le nombre 1, doublons, nombres consécutifs. Ceci aurait réduit notablement les possibilités de réponse (on n'a pas par exemple: $5 + .12. = .17.!$) et bien entendu facilite la détermination de leur réponse.

Du point de vue du calcul on peut dire que les élèves ont réduit la classe des problèmes (des égalités) à résoudre. Ils pouvaient le faire, la consigne les laissait libres. Mais il y a plus, ces items ont bien révélé la façon dont les élèves envisagent l'écriture, et l'aspect séquentiel surtout. Ceci veut dire que, comme je l'expliquais dans mon article précédent [1], l'écriture est vraiment prise comme code d'un calcul effectué par comptage.

En résumé: la donnée de calculs non univoquement déterminés (une seule donnée numérique pour un calcul) aura révélé la façon dont les élèves interprètent l'écriture d'égalités ainsi que la référence dans l'accomplissement de leur tâche à un *répertoire* de relations numériques bien connues des élèves (leur facilitant la tâche).

4. Conclusion de cet épisode

Dans cet article, j'ai précisé la portée des définitions proposées précédemment. J'ai dégagé les idées centrales. Puis j'ai montré comment ceci pouvait servir de cadre d'interprétation et d'outil d'analyse pour divers résultats de recherche ou d'observations en classe. Ces exemples m'ont amené à introduire de nouvelles distinctions et de nouveaux termes: algorithme, diagramme, répertoire de relations numériques... termes que je définirai, illustrerai et commenterai abondamment par la suite.

Bibliographie

- [1] CONNE François, *Comptage et écriture des égalités lacunaires dans les premières classes de l'enseignement primaire*. Math-Ecole n° 128, Genève 1987.
 - [2] MADELL Robert, «*Addition and Subtraction - What do Children naturally do?*» Paper presented at the National Council of teachers of mathematics annual meeting, San Diego, 1978.
 - [3] CONNE François, *Une épreuve de calcul en première primaire*. Interactions didactiques, 1984, n° 6. F.P.S.E. Université de Genève.
 - [4] CONNE François, *Comptage et écriture en ligne d'égalités numériques*. A paraître.
 - [5] VERGNAUD Gérard, *Concepts et schèmes dans une théorie opératoire de la représentation*. Psychologie française, 1985, n° 30-3/4, pp. 245-252.
 - [6] CONNE François, *La Transposition didactique à travers l'enseignement des mathématiques en première et deuxième année de l'école primaire*. Thèse de doctorat F.P.S.E., Université de Genève.
 - [7] LABINOWICZ Ed. *Learning from children*. New beginnings for teaching numerical thinking. 1985. Addison-Wesley Pub. Company. Menlo Park California.
 - [8] LEVIN James, «*Estimation Techniques for Arithmetic: every-day Math and Mathematics Instruction*.» Educational Studies in Mathematics 12 (1981): pp. 421-34.
-

De l'arithmético-géométrie à la « Construction » d'une formule

par Lucia Grugnetti Cagliari (Trad. de l'italien par Tiziana Donatelli)

Introduction

A travers les nombres abstraits, les pythagoriens ont pu établir une liaison entre nombre et figure et entre deux des quatre branches parmi lesquelles ils avaient divisé la science; les nombres abstraits étaient, en effet, arithmético-géométrie.

A ce propos, Nicomaco de Gerasa (philosophe néo-pythagoricien, vivant près de Jérusalem vers la fin du premier siècle après J.-C.) dit, au chapitre XII de son second livre «*Introductio arithmeticas*»: «... la théorie de ces nombres est en outre en parfait accord et harmonie avec leur représentation géométrique.»

C'est à Diophante¹ et à son œuvre mineure «*sur les nombres polygonaux*» que nous devons le point final sur les connaissances acquises par les Grecs dans ce domaine, sans avoir la possibilité de pouvoir distinguer avec certitude quelle est la proportion de cette œuvre due à son auteur et celle due à ses prédécesseurs.

¹ Le plus grand algébriste grec ayant vécu au 3^e siècle après J.-C. Né à Alexandrie, son action principale est, à notre connaissance, l'Arithmétique, ouvrage à l'origine en 13 volumes, parmi lesquels nous avons reçu les 6 premiers.