



**HAL**  
open science

## Numérisation de la suite des nombres et faits numériques.

François Conne

► **To cite this version:**

François Conne. Numérisation de la suite des nombres et faits numériques. : Des dénombrements à la division euclidienne - Activités numériques élémentaires à l'école primaire - ÉPISODE 3. Math-Ecole, 1988, 132, pp.26-31. halshs-01048692

**HAL Id: halshs-01048692**

**<https://shs.hal.science/halshs-01048692>**

Submitted on 11 Feb 2015

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Numérisation de la suite des nombres et faits numériques

par François Conne, Genève  
Troisième épisode

## 1. Introduction: deux idées-germes

Me voici donc au troisième épisode de mon feuilleton à propos des activités numériques élémentaires. J'en suis resté, dans mon périple aux calculs numériques. Voici ce que j'en disais dans l'introduction de mon premier épisode [1]:

«Les **calculs numériques** traitent eux aussi des opérations en recourant à des supports symboliques variés (matériels ou images) (...) mais ne recourent pas à un compteur (à la récitation de la comptine par exemple). A ce niveau, c'est la connaissance de la structure de la suite des nombres qui intervient, à la fois au travers de la mémorisation des tables des opérations numériques (addition, multiplication) et au travers de l'application des règles de numération (dérivées des axiomes structurels numériques (...)). Ces règles de numération ne sont pas connues en tant que telles mais sont représentées par le biais de règles de transformations des symboles. **Ces traitements symboliques (...) permettent de substituer à une opération de calcul une autre ou une séquence d'autres opérations plus élémentaires mais équivalentes.**»

Longtemps j'ai hésité, dans mon plan de rédaction entre deux voies à emprunter: soit donner des exemples illustreurs de cette description (qui dans mon second article s'est muée en définition, cf [2]), soit au préalable expliciter le cadre, la perspective générale dans laquelle cette formulation prend son sens. Finalement, et parce qu'il m'importe de transmettre les idées-force qui président à mon étude, j'ai opté pour la description préalable du cadre, repoussant au quatrième épisode, le traitement d'exemples de calculs numériques.

Ma fresque à propos des calculs est organisée, je le rappelle, selon l'analyse des systèmes symboliques utilisés, comme contenu et comme supports aux activités numériques. C'est en fait une analyse hiérarchique dont il est question et il convient de parler en terme de niveaux symboliques et de complexité des opérations engagées, qui à leur tour marquent des niveaux de réalité, de traitement et de représentation mentales. Telle est la conclusion à tirer de l'exposé succinct que j'avais fait en guise d'introduction à mon deuxième épisode [2]. Revenons-y sous un angle plus fondamental.

Partons, si vous le voulez bien, de deux idées-germes autour desquelles ont pris ma réflexion et mon étude.

**1. L'aspect producteur des systèmes formels.** C'est ainsi qu'on pourrait le formuler. Pour moi son germe a été dans l'observation-étonnement suivante: *écrire une suite de chiffres peut à elle seule produire un nombre et ce, déjà chez des*

élèves de première primaire qui par ailleurs ne maîtrisent pas la numération et seraient parfaitement incapables de savoir ni de dire de quel nombre il s'agit. Ainsi par exemple, sans ambiguïté aucune pour eux, la suite 143857 sera considérée être un nombre, un nombre grand mais plus petit que 1438576, etc. Une forme d'écriture reconnue *fait* le nombre. Bien entendu, vu ainsi le concept n'est pas bien riche! Mais c'est assez sérieux quand même pour se voir affublé de certaines propriétés numériques caractéristiques des nombres que le sujet connaît et maîtrise. Ce petit fait va même plus loin, puisqu'on le voit, les règles de la numération écrite ne sont ici aucunement nécessaires à la production du symbole et à la reconnaissance de ses caractères généraux. Alors on pourrait presque tenir la boutade suivante: *l'enjeu de l'écriture des nombres est le contrôle par le sujet qu'il a bel et bien écrit le nombre voulu*, ou encore: *la lecture correcte du nombre, ce sont plus les règles de la numération orale, via le prononcé des écritures, qui vont être traitées à ce niveau de l'apprentissage*. Donc *écrire pour mieux parler!* Tout ceci m'a amené à réfléchir à ce côté producteur, et maintes autres observations et analyses s'y sont greffées. Par exemple, la distinction dénombrement/comptage (cf [1]) ou encore certaines observations de résolutions de problèmes arithmétiques élémentaires [3]. Mais cette réflexion a un jour trouvé un écho inattendu dans une définition de dictionnaire signée F. Le Lionnais [4]:

#### *Algorithme*

Le mot *algorithme* vient de Al Khwarizmi, surnom du mathématicien arabe Muhammad Ibn Musa (IX<sup>e</sup> siècle), né à Khwarizem, en Ouzbekistan. Son sens a changé plusieurs fois avant d'en arriver à ses significations actuelles. Un algorithme est une suite finie de règles à appliquer dans un ordre déterminé à un nombre fini de données pour arriver avec certitude (c'est-à-dire sans indétermination ou ambiguïté), en un nombre fini d'étapes, à un certain résultat et cela indépendamment des données. Un algorithme ne résout donc pas seulement un problème unique mais toute une classe de problèmes ne différant que par les données mais gouvernés par les mêmes prescriptions. C'est ainsi que l'on distingue des algorithmes dits *numériques*, des algorithmes de jeux, des algorithmes de recherche d'un chemin dans un labyrinthe, des algorithmes de détection de l'équivalence des mots dans un calcul algébrique ou logique, etc.

Parmi les algorithmes numériques le plus simple est celui qui, pour l'addition de deux nombres exprimés dans le système de numération décimale, donne le processus à suivre: addition des chiffres des unités, inscription du chiffre de cette somme, retenue éventuelle, etc., jusqu'aux chiffres des classes les plus élevées. Une formule, au sens courant de ce terme, est un algorithme.

Par exemple:  $x', x'' = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ , donnant le moyen de calculer les solutions de l'équation:  $ax^2 + bx + c = 0$ , en fonction des coefficients de cette équation. Voir également l'algorithme d'Euclide.

L'usage des algorithmes s'est imposé dans la programmation du calcul automatique surtout lorsqu'ils recourent à des opérations répétitives. Un programme

informatique est un algorithme rédigé dans un langage compris par l'ordinateur. Mais les temps de calculs nécessaires pour appliquer un algorithme sont souvent démesurément grands; s'introduit alors une notion d'*efficacité d'un algorithme*, à l'origine des travaux susceptibles d'avoir de nombreuses applications pratiques.

L'hypothèse fondamentale de la théorie des algorithmes est que chaque algorithme peut être réalisé par une machine de Turing particulière et aussi, par conséquent, par une machine de Turing universelle. Malheureusement, tous les problèmes des mathématiques et de la logique mathématique ne sont pas nécessairement algorithmiquement résolubles. C'est le cas notamment du problème de la décision de la déductibilité (Church). Il n'est pas possible de construire un algorithme permettant de démontrer qu'un autre algorithme est ou n'est pas possible; c'est un problème indécidable. Il en résulte que les mathématiques ne se réduisent pas à la construction d'algorithmes et que la découverte en mathématique ne peut pas être complètement automatisée.

Cependant, alors que les mathématiciens sont divisés, sur le plan philosophique, par la question de l'«existence» des objets mathématiques, ils sont unanimes à **reconnaître l'importance des algorithmes, en raison de leur caractère constructif.** (C'est moi qui souligne).

2. Mais une autre idée vient alors se greffer. On peut la formuler ainsi: «**en regard des calculs, les symboles sont traités comme des objets**». Cette idée est défendue avec éclat par G. Vergnaud (toujours lui), mais elle a eu pour moi une aventure amusante. C'est une recherche (non publiée) qui m'aura mis la puce à l'oreille. Je demandais à des élèves de 1P de comparer deux collections de jetons arrangés figuralemment et leur indiquais dans ma consigne *de ne pas compter*. Certains élèves ont suivi cette consigne et ont cherché des moyens de traitement figuratifs (réorganisation des figures). D'autres, au contraire, ont préféré outrepasser la consigne et ont compté. Avec dans les deux cas plus ou moins de bonheur mais rencontrant alors des problèmes très distincts, d'autres *événements* se produisant. La nécessité de décrire cette différence m'a alors amené à utiliser le mot de *traitement*, la seule description des *procédures* ne suffisant manifestement plus. Un autre moment dans le cheminement de cette idée venait de l'analyse du travail effectif de la classe, au-delà du projet pédagogique mis en avant et masquant les pratiques scolaires. Par rapport au travail des élèves, ceci a été le souci de rendre compte de la *réalité* à laquelle ils étaient confrontés. Tandis que du côté du maître et des activités de classe, ceci a été l'analyse de la manière dont cette *réalité* était organisée. Au *traitement* venait s'adjoindre les *tâches* et leur analyse. Dans cet ordre d'idées, il apparaissait que les calculs algébriques recouraient à des opérations analogues à des manipulations d'objet: pose, agencement, réorganisation, etc. Vint à un autre moment encore, la discussion à propos du *concret* avec la critique de l'empirisme qui découle de la conception et l'usage des matériels pédagogiques spécifiques, comme par exemple le matériel Dienes (cf. [5]): les objets que l'école croit mettre en jeu sont déjà des symboles (des objets symboliques ou encore des symboles *maté-*

rialisés). Au détour de cette inversion de la relation entre objets et symboles, je ne me rendis pas tout de suite compte que, malgré tout, l'idée subissait une *réduction*. L'objet était pris comme un élément, une entité *pauvre* alors qu'en fait il est une *construction*, sa *permanence* est à gagner, et que dans l'affaire des représentations et des invariants opératoires sont engagés. C'était oublier que les objets font la réalité.

Mais de plus, faire ces rapprochements entre objets et symboles n'implique pas forcément une identification. Peut-on ainsi, sans autres, assimiler symboles et objets? Les symboles comportent une part d'arbitraire, ils ont cours dans certains champs d'activités bien précis, ils sont donc à référer à des cadres interprétatifs définis. A ce propos certaines recherches (dont [6]) tendent à montrer qu'il n'est pas dénué de fondement de recourir à l'hypothèse de l'existence d'**invariants interprétatifs**. Enfin, le fait qu'il faille envisager des niveaux symboliques distincts auxquels situer les activités et traitements des sujets n'est pas une objection, il en est ainsi de toute réalité, ces *niveaux de symboles* marquent bel et bien des *niveaux de réalité*.

Bien qu'il y ait donc à préciser certains aspects de ces questions, ces deux idées-germes sont d'ores et déjà exploitables, c'est ce que nous allons voir maintenant sur un exemple élémentaire.

## 2. La numérisation de la suite des nombres

**1<sup>er</sup> niveau:** Les premiers symboles numériques que je considérerai ici sont les noms de nombres. Ceux-ci sont organisés en comptine ou en fragments plus ou moins étendus de la suite numérique. Réciter la comptine c'est d'abord énumérer les noms des nombres (énumérer les nombres). Cette opération peut être couplée à une autre énumération d'autres objets ou symboles en établissant une correspondance terme à terme. Nous avons alors un dénombrement. Intervient dans l'apprentissage des noms de nombres une part de mise en mémoire. Mais ne sera retenu, à ce niveau (car ceci pourra être «oublié» ultérieurement) que ce qui est suffisamment sollicité. Ainsi la comptine même à ce premier moment n'est pas qu'une affaire de mémoire.

**2<sup>e</sup> niveau considéré:** Je me situe maintenant dans ce que j'ai appelé les calculs-comptages [2]. Rappelons que le sujet part du nombre et y associe une collection, qui peut se réduire à la comptine ou être une association entre la comptine et une ou plusieurs autres collections *concrètes* en général choisies pour ses (leurs) propriétés figurales. Ce qu'il importe de relever, c'est l'aspect médiateur de la comptine, c'est-à-dire, si on reprend l'idée n° 1 décrite en introduction, ce qu'elle produit: une collection à partir du nombre. Il se produit alors un premier *cycle* dans les niveaux symboliques, au moment où, pour compter, l'élève procède à un *comptage continué*. Je décris par là que l'élève compte jusqu'au premier nombre donné, puis compte au-delà, un nombre de

pas correspondant à la seconde donnée. J'ai utilisé dans mon premier épisode [1] les termes de *bornes* et *nombres de pas*. Mais ce que je retiens ici c'est la chose suivante: **la comptine, après avoir fourni une collection (d'objets) en vient donc à se compter elle-même!** Plus avant encore, fort de ceci, une première substitution dans la chaîne des opérations du comptage est envisageable. C'est-à-dire ne plus compter la première donnée mais *embrayer* le comptage à partir de ce même nombre. Un *fait numérique*, mis en mémoire est sollicité. Tout ceci demande de l'exercice et ne vient pas *du coup* pour que le sujet agisse correctement et contrôle son comptage. On notera ainsi que l'*automatisme* vient d'une substitution et non pas d'une accélération. A ce moment de l'apprentissage interviennent les difficultés de comptage bien connues et décrites partiellement dans [1]: jusqu'où compter, à partir de quel nombre, etc. C'est aussi à ce même moment que les sujets (enfants) ont coutume de *chosifier* les nombres, et parlent *du 1, du 8*, etc. Enfin notons que la relation nombre → successeur (prédécesseur) est utilisée pour elle-même, comme relation binaire, et est en quelque sorte désincarnées de la comptine. Il y a là, par l'usage qui en est fait, une différenciation dans les *faits numériques*, et corrélativement un *enrichissement* de la réalité numérique.

**3<sup>e</sup> niveau considéré.** Mais la comptine, au départ, n'est qu'une succession de noms en nombres. A ce moment (niveaux 1 et 2) les règles de formation de ces noms de nombres passent grandement inaperçues, ainsi en est-il aussi des *rythmes* dans ces noms, ou encore l'organisation récurrente propre à la numération parlée (et moins évidente dans la numération écrite?). Une telle suite n'est alors que courte tant qu'elle est si peu structurée. Donc au travers *des rythmes* de la comptine perceptibles aux répétitions présentes dans les noms et à la succession des ordres d'unités, la comptine va à la fois s'agrandir et s'organiser (en une suite de nombres). De nouveaux faits vont émerger, être mis en mémoire, être sollicités comme éléments.

Si on considère bien les choses, on voit que l'on compte les dizaines comme les nombres, et ainsi de suite, c'est-à-dire que ces récurrences, ces rythmes sont très profondément numériques parce que les opérations mentales qui les sous-tendent, l'itération par exemple, sont celles-là même qui sont constitutives aux niveaux inférieurs des collections et des nombres. Qu'est-ce que cela signifie? Simplement que dans cette organisation, qui est une construction (puisque la suite s'élargit) et une stabilisation (puisque plus de faits sont interconnectés), dans cette organisation il faut voir une **numérisation de la suite des nombres**.

Remarquons en passant que d'autres numérisations de l'ensemble des nombres se font, par exemple, lorsque les nombres mesurent leurs propres *écarts* selon les relations d'ordre additives ou multiplicatives. On lira avec profit à ce propos un article de A. Henriques [7].

Retenons cependant le déplacement de niveau et que même analogues, les opérations de numérisation des collections (via les énumérations) et celles qui

numérisent maintenant les comptines, sont difficilement perceptibles car elles ne traitent pas les mêmes objets. On a aussi changé de *niveau de réalité*.

**Ainsi donc les nombres deviennent-ils de plus en plus «numériques»!** Ceci explique sans doute qu'une définition des nombres ou du numérique soient si malaisée à donner. On voit aussi quels problèmes posent le détour explicatif des collections pour rendre compte des règles de numérisation.

Mais, même sans changer aussi nettement de niveau de symbolisme, les comparaisons ne sont pas aisées. Ainsi le lecteur méditera-t-il avec profit la comparaison des numérations écrites ou parlées. Deux mémorisations proches mais pas identiques et portant sur des symboles très distincts (organisés de manière proche). Par exemple les opérations analogues, constitutives (itération, récurrence,...) ont bel et bien, malgré la proximité des niveaux une toute autre réalité qu'on soit sur le parlé ou sur l'écrit. Et sont porteuses d'autres germes. Exemples pour l'écrit: la table de Pythagore, le crible d'Eratosthène, etc. mais aussi les algorithmes de calculs en colonnes.

**4<sup>e</sup> niveau évoqué:** C'est celui des algorithmes. Nous verrons alors qu'au travers de ce que j'ai appelé diagramme associé à l'algorithme, c'est le calcul en lui-même qui est symbolisé, et, dès lors est organisé en cycles récurrents, nous pouvons dire, au même titre que précédemment, que **le calcul est numérisé!**

**Dernière remarque:** J'ai suivi un ordre par niveau. Il ne s'agit pas ici de stades dans l'apprentissage, ni même d'un ordre obligé, quoiqu'il soit fréquent. En fait, je n'ai ici fait que de suivre une des branches de la chaîne des assimilations, que l'on représentera ainsi:

...  collection  *comptine*  numération orale  numération écrite  
 algorithme de calcul en colonne  ...

Ces algorithmes se définissent sur la numération décimale de position, et ce, du moins, à cause du diagramme qui leur est associé. (Cette phrase sybilline trouvera une explication plus tard, au travers d'une comparaison entre algorithmes distincts: la multiplication à l'*italienne* – celle que nous apprenons à l'école – et la multiplication à l'*égyptienne*). Remarquons alors que tout comme les débuts de l'écriture des nombres à plusieurs chiffres vont *révéler* les règles de la numération parlée – en la dégageant de la récitation de la suite des nombres entre autres – , les algorithmes vont *révéler* les principes de la numération de position en base dix. (à suivre)