



HAL
open science

LES FORMES DE LA DIFFUSION

Eric Daudé, Patrice Langlois

► **To cite this version:**

Eric Daudé, Patrice Langlois. LES FORMES DE LA DIFFUSION. Géopoint, Feb 2004, Avignon, France. halshs-01082643

HAL Id: halshs-01082643

<https://shs.hal.science/halshs-01082643>

Submitted on 14 Nov 2014

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Les formes de la diffusion

Daudé E., Langlois P.¹

¹ Laboratoire M.T.G., Université de Rouen, 76821 Mont-Saint-Aignan cedex.

Eric.Daude@univ-rouen.fr,

Patrice.Langlois@univ-rouen.fr

Abstract

A S-curve in the exploitation of data is often associated to spatial diffusion. Its assimilation with the logistic model is misleading, it leads to an amalgam which masks the diversity of the mathematical models making it possible to model very different phenomena of diffusion. Three models are presented, they are expressed by the same S-curve, which corresponds in fact to different models.

- the logistic model is most usually used whereas it is by construction independent of space. A spatialized and probabilistic version of this model is confronted with its analytical and deterministic form.

- contrary to the first, the model of "front diffusion" imposes a strong constraint of proximity. The diffusion depends then the length and on the form of the "front".

- the third model is complex, it integrates the total logistic dimension of the growth, the local dimension of the front of diffusion and the temporal dimension of the vector of diffusion.

Résumé

Une courbe en S dans l'exploitation de données est souvent associée à une diffusion spatiale. Son assimilation au modèle logistique est trompeuse, elle conduit à un amalgame qui masque la diversité des modèles mathématiques permettant de modéliser des phénomènes de diffusion très différents. Trois modèles sont présentés, ils s'expriment par une même courbe en S qui correspond en fait à des modèles différents.

- le modèle logistique est le plus couramment utilisé alors qu'il est par construction indépendant de l'espace. Une version spatialisée et probabiliste de ce modèle est confrontée à sa forme analytique et déterministe.

- à l'opposé du premier, le modèle de diffusion par front impose une forte contrainte de proximité. La diffusion dépend alors de la longueur et de la forme du front.

- le troisième modèle est complexe, il intègre la dimension logistique globale de la croissance, la dimension locale du front de diffusion et la dimension temporelle du vecteur de diffusion.

Il existe une confusion entre la courbe en S, le modèle logistique et les formes de la diffusion. Ceci nous conduit dans un premier temps à proposer une définition formalisée du concept de diffusion. Sont ensuite explorés, à partir de cette définition, trois types de modèles dont les résultats simulés produisent différentes formes spatiales de diffusion, mais dont les expressions temporelles ont une forme de développement en S.

I. Définition du processus de diffusion.

Cette définition propose que pour pouvoir parler de diffusion, il faut pouvoir expliciter deux types d'éléments, les *hôtes* et les *vecteurs*, sur lesquels opèrent deux processus qui interagissent : celui *d'acquisition* et celui de *propagation*.

Considérons un espace dans lequel est localisé un ensemble d'objets fixes appelé *population d'accueil* dont les éléments sont appelés *hôtes*, tous peuvent être aussi bien *émetteur* que *récepteur* du processus de diffusion. Les hôtes possèdent deux états (0 = non acquis et 1 = ayant acquis) qui ne sont pas symétriques : tout hôte peut passer de l'état 0 à l'état 1 mais pas le contraire. Les hôtes sont interconnectés dans un graphe orienté qui représente le *canal de propagation* du phénomène de diffusion. Les objets qui se propagent dans le canal sont appelés *vecteurs* de la propagation, ils concrétisent l'interaction entre hôtes et donnent sens au phénomène de diffusion.

Deux processus élémentaires opèrent sur les hôtes et les vecteurs :

- Le *processus d'acquisition* agit sur les hôtes (fig. 1). Il est représenté à chaque instant et pour chaque hôte par la *règle d'acquisition* qui décide du changement d'état d'un hôte en fonction de son état précédent et des vecteurs présents. On peut représenter globalement ce processus par la fonction donnant en sortie l'effectif d'hôtes ayant acquis. Ce processus est invasif. En effet, si le vecteur reste actif et compatible avec la règle d'acquisition, le processus tend à saturer la population.

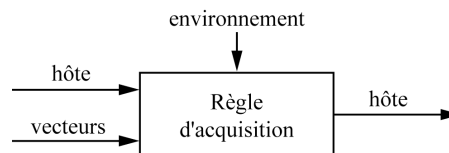


figure 1 : le processus d'acquisition

- Le *processus de propagation* concerne les vecteurs (fig. 2). Il est représenté par la *règle de propagation* qui détermine les vecteurs sortant de chaque hôte, en fonction de son état et des vecteurs présents. On peut représenter globalement ce processus par la fonction donnant à chaque instant, l'effectif de vecteurs en activité dans le canal.

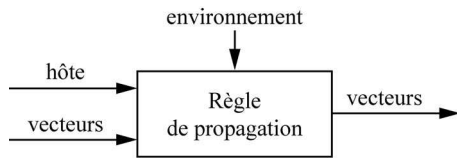


figure 2 : le processus de propagation

Comme on le voit, les deux processus interagissent pour donner la dynamique de la diffusion (fig. 3). Dans la pratique, on privilégie souvent l'un des deux processus pour la modélisation.

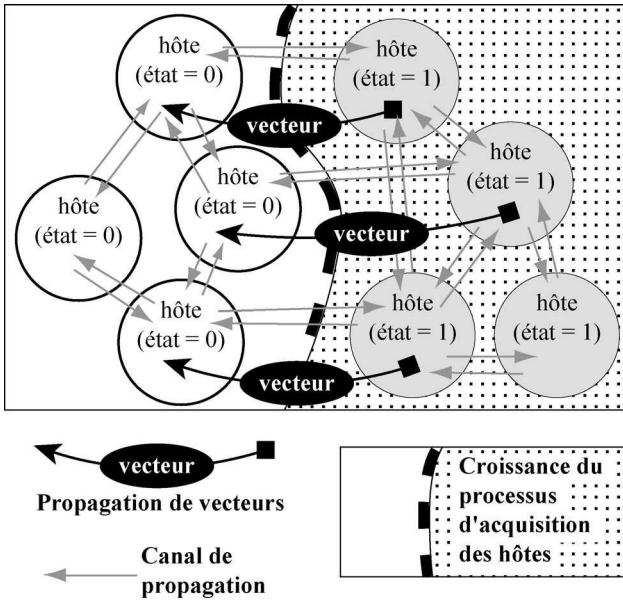


Figure 3 : les deux processus de la diffusion

II. Exemples de diffusion selon un schéma acquisition-propagation

A. Diffusion d'un nuage toxique.

La totalité d'un composé toxique - le vecteur - est produite dans un court laps de temps et localisé en une source unique, la quantité totale de produit est conservée (vecteur conservatif). Le processus d'acquisition concerne ici l'espace qui peut être pollué ou non par ce nuage : Il faut définir la densité de produit dans l'atmosphère à partir de laquelle chaque lieu est considéré comme pollué par le produit, selon la quantité qui se dépose au sol, c'est la règle d'acquisition. De même en chaque lieu et à chaque instant, il faut définir comment le produit se dissipe dans les lieux voisins, en fonction de la densité du produit restant, de la vitesse du vent, etc., c'est la règle de propagation.

B. Diffusion d'une épidémie.

L'acquisition concerne les individus (hôtes) qui sont contaminés ou pas, les vecteurs sont les agents infectieux. Le processus de propagation est la contagion, mais contrairement au cas précédent, la quantité d'agents infectieux (vecteur) n'est pas conservative. Au contraire, dans un premier temps, elle se reproduit activement au

sein des hôtes, donc s'accroît et envahit de plus en plus d'hôtes par contagion, pour décroître ensuite et disparaître ou rester endémique.

C. Diffusion d'une innovation agricole

L'hôte (le fermier) est toute personne susceptible d'acquérir le produit (une subvention), le vecteur de propagation est constitué de messages, tels les contacts verbaux (réseau familial ou professionnel), les observations (champs des voisins). Le processus de propagation peut évoluer comme un effet de mode, l'engouement initial diminuant avec le temps (Daudé E. 2004).

III. Le modèle logistique discret

A. Formalisation mathématique.

Ce modèle (Verhulst P. 1838) décrit un processus global d'acquisition qui croît proportionnellement au nombre de liens émetteur-récepteur, $u(t) \cdot (u_{\max} - u(t))$ dans une population de u_{\max} hôtes, dont $u(t)$ hôtes ont acquis à l'instant t . Le processus de propagation sélectionne une proportion r de ces liens qui génère une acquisition. On obtient le modèle itératif en temps entier, appelée suite logistique :

$$\begin{cases} u(0) = u_0 \\ u(t+1) = u(t) + r \cdot u(t) \cdot (u_{\max} - u(t)) \end{cases}$$

Remarquons que cette suite ne se superpose pas à la courbe en S représentative de la fonction logistique continue, solution de l'équation différentielle (fig. 4) :

$$\frac{du}{dt} = r \cdot u(t) \cdot (u_{\max} - u(t))$$

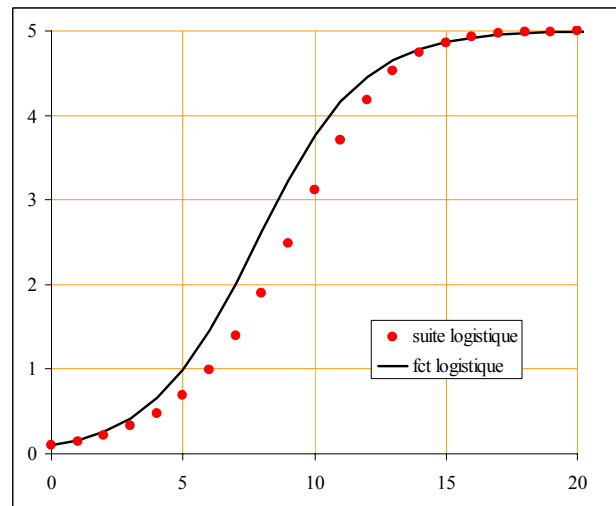


Figure 4 : distinction entre courbe et suite logistique ($u_{\max} = 5$ et $u_0 = 0,5$ et $r = 1$)

Le modèle logistique (discret ou continu) est souvent utilisé par les géographes pour modéliser la diffusion, même s'il est, par construction, non spatial.

B. Une simulation spatialisée du modèle logistique discret.

L'espace n'intervient ici que comme support de localisation de la population d'hôtes (fig. 5) et les hypothèses de la fonction logistique sont respectées : les hôtes disposent d'une même information (u_{max} et $u(t)$) et ont une règle d'acquisition identique et non symétrique ; le graphe d'interconnexion est complet ($u_{max}-1$ contacts possibles) ; une proportion k de ces contacts transmet le vecteur et la probabilité qu'un hôte i soit infecté à chaque instant t est donnée par la loi logistique :

$$P(s_i = 1) = \frac{ku(t)}{u_{max} - 1} \cdot \frac{u_{max} - u(t)}{u_{max}} = r \cdot u(t)(u_{max} - u(t))$$

avec
$$r = \frac{k}{u_{max}(u_{max} - 1)}$$

Dans ce modèle, les règles de propagation et d'acquisition sont interdépendantes.

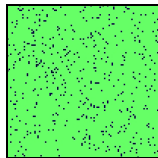


figure 5 : Localisation aléatoire des hôtes ($S_i = 1$) à l'état initial ($u_0 = 497$), domaine de 101×101 ($u_{max} = 10201$ hôtes).

L'algorithme s'exprime alors comme suit. Pour tout hôte i entre 1 et u_{max} , si i est sain ($s_i = 0$), on fait un tirage aléatoire uniforme d'un nombre entier n entre 1 et $u_{max} - 1$, si $n \leq r \cdot u(t)$ l'hôte i devient infectée ($s_i = 1$) sinon il reste sain. La figure 6 montre une séquence de diffusion pour une simulation.

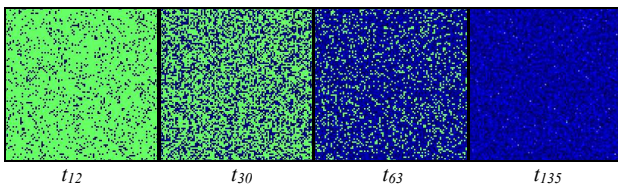


Figure 6 : Simulation spatialisée de la fonction logistique probabiliste.

La figure 7 montre alors la bonne correspondance entre une série de simulations probabilistes et la suite logistique déterministe.

L'absence de forme spatiale de la diffusion du modèle logistique ainsi simulé est contenue dans les hypothèses du modèle. Il en ressort que les vagues de diffusion (Morill R. 1968) qui caractérisent le processus de propagation par front ne renvoient pas nécessairement au modèle logistique.

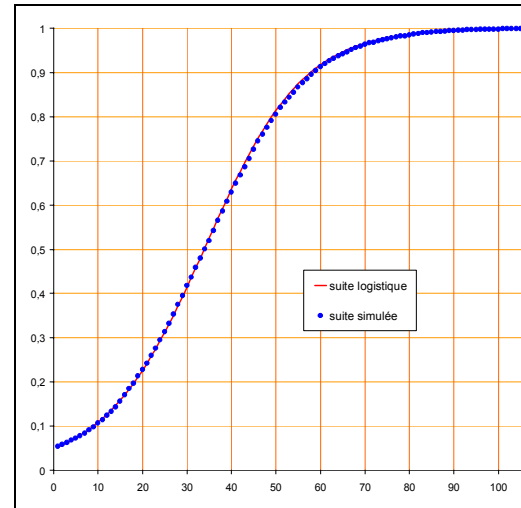


Figure 7 : Comparaison entre la suite logistique déterministe et probabiliste ($u_{max} = 10201$, $u_0 = 497$ et $r = 0,9$).

IV. Un modèle de diffusion par front

Nous nous plaçons dans un espace continu et utilisons la métaphore de l'incendie de forêt. Si le foyer démarre en un point C , (ou formant un petit cercle de rayon R_0 autour de C) dans un espace homogène et sans vent, la propagation s'effectue alors au voisinage immédiat des flammes dans les parties non brûlées. Le front est circulaire et se propage à une vitesse constante v autour du centre C .

A. Formalisation mathématique

Le rayon de ce cercle est de la forme $R(t) = vt + R_0$ et la surface brûlée $S(t)$ à l'instant t est donc la surface du cercle : $S(t) = \pi R(t)^2 = \pi v^2 t^2 + 2\pi v R_0 t + \pi R_0^2$ qui est donc de la forme : $S(t) = at^2 + bt + c$. Ce modèle de croissance n'est donc pas du tout de type logistique, sa **forme est parabolique** (polynôme de degré 2).

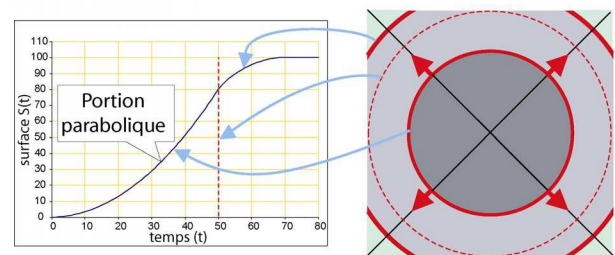


Figure 8 : la forme temporelle de la diffusion par front.

La croissance est ici proportionnelle à la longueur

$L(t)$ du front :
$$\frac{\partial u}{\partial t} = kL(t)$$

Evidemment lorsque l'incendie atteint les limites du domaine, cette croissance se ralentit pour s'arrêter lorsque tout est brûlé, donnant ainsi une courbe de croissance en forme de S , mais qui n'a plus rien à voir avec la fonction logistique. Dans l'exemple (fig. 8) d'un domaine carré de

côté d , le front circulaire atteint le domaine progressivement.

B. Un modèle de simulation déterministe de la diffusion par front

Ce modèle décrit la propagation de vecteurs par contact direct entre hôtes, à l'instar d'un incendie. La règle d'acquisition est déterministe : tout hôte i passe de l'état 0 à l'état 1 si au moins un de ses 4 voisins est à l'état 1. La figure 9 montre une séquence de la simulation à partir d'une configuration initiale où les hôtes situés au centre du domaine sont à l'état 1.

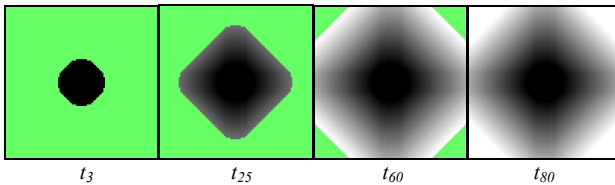


figure 9 : Une forme déterministe de diffusion par front ($u_0 = 497$).

La population infectée augmente à chaque itération en proportion de la longueur du front, ce qui se traduit par une courbe parabolique pendant les premières phases de la diffusion (fig. 8).

V. Vers un modèle générique de diffusion

L'objectif est de proposer un modèle générique basé sur un voisinage de taille donnée, capable de couvrir tous les cas intermédiaires entre le modèle logistique (voisinage global) et le modèle par front (voisinage local). A l'intérieur du voisinage, on a un fonctionnement de type logistique et à l'extérieur une diffusion sur un front non-local limité par la taille de ce voisinage (Coville J. 2003).

Le voisinage peut être uniquement spatial, ou bien spatio-temporel. Ceci est utile dans bien des cas : dans une épidémie la personne n'est contagieuse que pendant un certain temps, dans le feu de forêt l'arbre ne communique le feu que durant le temps où il brûle, dans le cas d'une nouvelle technologie, l'acquéreur n'envoie pas indéfiniment des messages pour louer les mérites de la nouveauté, etc.

Tout se passe alors comme si chaque vecteur, une fois transmis à un hôte, avait une durée de vie limitée à T itérations. Passé à l'état 1, l'hôte ne reste donc actif que pendant les T itérations suivantes. Ceci nécessite que chaque hôte possède non seulement une connaissance de son voisinage, mais aussi de son passé à travers une fonction $\tau_i(t)$ qui donne l'âge de sa transition depuis l'instant t_i de passage à l'état 1. Tant que l'hôte est dans l'état 0, la valeur de τ_i n'est pas définie (par exemple on la fixe à $\tau_i = -1$), lorsque son état passe à 1, τ_i prend la valeur 0, et sa valeur s'incrémente ensuite de 1 à chaque pas de temps, c'est-à-dire $\tau_i = t - t_i$. Dès que τ_i atteint la valeur seuil T , l'hôte devient inactif. L'activité de l'hôte i est représentée par la fonction de propagation (ou d'émission) $v_i(t)$ qui est définie par

$$v_i(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } \tau_i(t) \in [0, T[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

la transition à l'état 1 d'un hôte i dépend de la proportion d'hôtes actifs dans son voisinage spatio-temporel $V \times T$, qui est la moyenne de v dans ce voisinage, notée :

$$\langle v_i(t) \rangle_{V \times T} = \frac{1}{n_R} \sum_{j \in V(t)} v_j(t)$$

où n_R représente le nombre de voisins dans un rayon R . Dans une approche stochastique, la probabilité de transition à l'état 1 de l'hôte i est alors donnée par

$$P\left(\frac{s_i = 1}{s_i = 0}\right) = r \cdot \langle v_i(t) \rangle_{V \times T}$$

La règle de propagation du vecteur est donc importante, elle tend à diminuer la force du vecteur avec le temps et peut être plus ou moins complexe selon le phénomène étudié. La figure 10 montre des dynamiques différenciées de diffusions selon la durée de vie T des vecteurs.

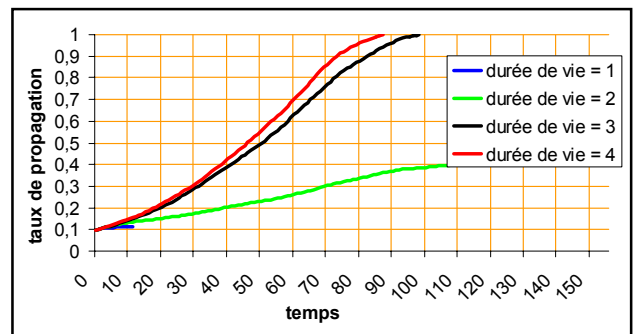


Figure 10 : Dynamique de diffusion selon une règle de propagation évolutive.

On constate que la règle de propagation a ici une forte incidence sur l'évolution de la diffusion. Une faible durée de vie du vecteur (fig. 10, courbe bleue) entraîne un arrêt rapide de la diffusion, bien avant la saturation du domaine (fig. 11, simulations 1 et 2), malgré une règle d'acquisition peu contrainte ($r = 1$). Au contraire, lorsque la durée de vie du vecteur est importante (fig. 10, courbe rouge), le modèle privilégie la règle d'acquisition et a un comportement proche d'un modèle stochastique de diffusion par front, le vecteur saturant presque le domaine (fig. 11, simulations 5 et 6). C'est dans des niveaux paramétriques intermédiaires (fig. 10, courbe verte) que le modèle produit ses formes les plus intéressantes, à l'instar des simulations 3 et 4 (fig. 11). Dans ce cas les règles d'acquisition et de propagation sont pleinement en interactions, la forme finale dépend en partie de la direction initiale prise par le front.

Par construction et à la différence des modèles précédents, ces deux règles rendent possibles la non-saturation du domaine par le processus de diffusion. Ceci n'est pas lié à des règles d'acquisition différenciées selon les hôtes, ce qui est envisageable, mais au fait qu'un hôte peut se retrouver rapidement entouré d'hôtes infectés mais non contagieux, inactifs.

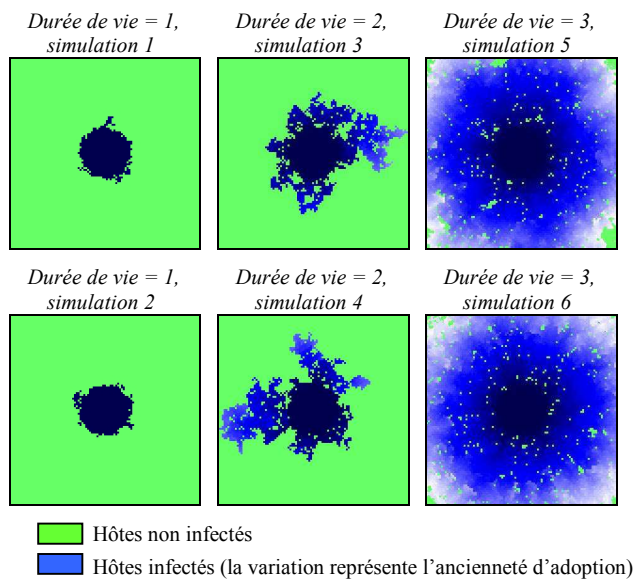


figure 11 : Différentes formes spatiales de diffusion selon la virulence du vecteur, après arrêt du processus ($u_0 = 497$, localisation au centre du domaine, $R = 1$)

VI. Conclusion

Nous n'avons fait ici qu'effleurer une théorie géographique de la diffusion, qui ne pouvait être approchée en si peu de mots. En particulier, nous nous sommes restreint à une vision binaire du processus de diffusion, c'est-à-dire un seul hôte par cellule. Ce choix exclut ici une approche discrète ou continue des processus par une représentation agrégée des entités dans un espace cellulaire discret. Nous n'avons pas voulu non plus traiter les approches du type réaction-diffusion, nécessitant un développement plus long et plus technique (Turing A.M. 1952).

Notre objectif a été d'abord de poser les jalons d'une formalisation du concept de diffusion comme étant la combinaison de deux sous-processus, l'acquisition et la propagation, et de deux niveaux d'entités, les hôtes et les vecteurs. Cette formalisation est parfaitement adaptée à l'utilisation des outils actuels que sont les automates cellulaires (Dubos-Paillard E. & alias 2003) et les systèmes multi-agents (Daudé E. 2004). Elle permet de simuler correctement les phénomènes classiques de la diffusion en géographie, tels que l'innovation ou les épidémies et devrait pouvoir s'appliquer avec succès aux autres processus spatiaux aussi bien naturels que sociaux.

Enfin, nous avons voulu faire entrevoir au lecteur la multiplicité des modèles géographiques qui se cachent derrière un mot « la diffusion » et une forme « la courbe en S ».

VII. Références bibliographiques.

- Coville J.**, 2003 - *Equations de réaction-diffusion non-locale*, thèse de mathématiques, université Paris 6
- Daudé E.** 2004 - Apports de la simulation multi-agents à l'étude des processus de diffusion. *Cybergeo : Revue européenne de géographie*, n°. 255, 15 p.
- Morill R. L.** 1968 - Waves of spatial diffusion. *Journal of Regional Science*, n° 8, p. 1-18.
- Saint-Julien T.** 1985 - *La diffusion spatiale des innovations*. Montpellier, RECLUS, coll. RECLUS modes d'emploi.
- Turing, A.M.** 1952 - The Chemical Basis of Morphogenesis. *Phil. Trans. Roy. Soc. B* 237: 37-72.
- Verhulst P.-F.** 1838 - Notice sur la loi que la population suit dans son accroissement. *Correspondance Mathématique et Physique*, n° 10, p. 113-121.
- Dubos-Paillard E., Guermont Y., Langlois P.,** Analyse de l'évolution urbaine par automate cellulaire, le modèle SpaCelle, *L'espace Géographique*, pp 257-378, vol 4, 2003