



HAL
open science

De la logique philosophique à la logique mathématique. Introduction

Michel Bourdeau, Anastasios Brenner

► **To cite this version:**

Michel Bourdeau, Anastasios Brenner. De la logique philosophique à la logique mathématique. Introduction. *Revue d'Histoire des Sciences*, 2014, De la logique philosophique à la logique mathématique, 67 (2), pp.175-183. halshs-01100159

HAL Id: halshs-01100159

<https://shs.hal.science/halshs-01100159>

Submitted on 8 Jan 2015

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

DOSSIER

De la logique philosophique à la logique mathématique

Introduction

Michel Bourdeau¹ et Anastasios Brenner²

Que l'on date le renouveau de la logique de la parution des *Lois de la pensée* de George Boole (1854), ou de celle la *Begriffsschrift* de Gottlob Frege (1872), la logique a connu, dans la seconde partie du dix-neuvième siècle et au début du vingtième, une profonde transformation, qui apporte un démenti flagrant à Emmanuel Kant, pour qui Aristote avait déjà donné à la discipline sa forme achevée. Qu'il s'agisse, avec Boole, de mathématiser la logique ou, avec Frege, de logiciser les mathématiques, l'évolution s'est faite dans le sens d'un rapprochement avec les mathématiques, d'où le terme logique mathématique, introduit dès 1894 par Giuseppe Peano, dans son *Formulaire de mathématique*, et qui a prévalu. Une fois son indépendance acquise, les progrès se sont poursuivis, entre les deux guerres, principalement sous l'impulsion de David Hilbert et de son programme, qui ouvrait de nouvelles perspectives, comme celle qui touche à la calculabilité. Le développement de l'informatique n'aurait pas été possible sans la logique et il y a tout lieu de penser que c'est elle qui sert aujourd'hui de moteur au développement de cette dernière.

La mutation qui s'est opérée autour de 1900 a constitué un événement majeur pour l'histoire de la philosophie au vingtième siècle. Qu'on le qualifie de positivisme ou d'empirisme, le trait distinctif du Cercle de Vienne, c'est la décision de développer la logique de la science ou, pour parler comme Willard Van Quine, de philosopher d'un point de vue logique. Une telle décision n'a pas été sans créer des problèmes, liés à la question de savoir quelle place il convient d'assigner à la logique dans le cursus philosophique. La logique est traditionnellement une des branches de la philosophie. Jusqu'au renouveau qui fait l'objet de ce dossier, c'est là, et uniquement là, qu'elle s'enseignait, comme si c'était à la philosophie qu'il appartenait de prendre soin de la logique. Et pourtant, qui pourrait nier que beaucoup de philosophes ne savent pas qu'en faire, et adoptent tacitement le jugement de René Descartes, qui n'y voyait qu'un moyen de « parler sans jugement des choses qu'on ignore » ?

Bien que les travaux sur l'histoire de la logique moderne ne manquent pas³, la matière est si riche qu'il reste encore beaucoup à découvrir, notamment dans le domaine français, laissé jusqu'à ce jour assez largement inexploré. Le présent dossier, qui entend contribuer à combler cette lacune, et qui trouve son origine dans un symposium organisé en mai 2011 dans le cadre du Congrès de la Société française d'histoire des sciences et des techniques, s'en tient à la question suivante : dans quelle mesure est-il possible d'interpréter la mutation opérée autour de 1900 comme le passage d'une logique philosophique à une logique mathématique ?

La première difficulté concerne la terminologie, qui a longtemps été flottante et n'est d'ailleurs toujours pas totalement fixée. Logique mathématique s'est peu à peu imposé, au

¹ Institut d'histoire et de philosophie des sciences et des techniques, (IHPST ; CNRS-Paris1-ENS)

² Centre de Recherches Interdisciplinaires en Sciences Humaines et Sociales CRISES, Université Paul-Valéry Montpellier.

³ Voir notamment Dov Gabbay et John Woods : *Handbook of the history of Logic* (Amsterdam : Elsevier, 2004-) ; tout particulièrement : vol. 3, *The Rise of Modern Logic: from Leibniz to Frege* (2004) et vol. 5, *Logic from Russell to Church* (2009) ; en français, on se reportera à Marcel Guillaume : *La logique mathématique en sa jeunesse*, in Jean-Paul Pier (éd.), *Development of Mathematics 1900-1950* (Basel-Boston-Berlin : Birkhäuser, 1994), 185-368.

détriment de logique symbolique, de logistique, d'algèbre de la logique, ou encore de pasigraphie. De toute façon, le corps de savoir dont il s'agit aujourd'hui est maintenant assez clairement délimité : il comprend essentiellement la logique élémentaire (logique des propositions et logique du premier ordre, encore appelée calcul des prédicats), que viennent compléter d'une part les logiques d'ordre supérieur, de l'autre les logiques dites non-standard (logiques modales, logique intuitionniste, logique linéaire...). — La question posée suggère que cette logique mathématique serait issue de la logique philosophique, ou du moins lui aurait succédé. Dans le cas de cette dernière toutefois, la situation n'est malheureusement pas aussi claire, le terme pouvant s'entendre de différentes façons. La première se contente de rabattre l'opposition qui nous occupe sur celle de l'ancien et du nouveau ; ce serait par exemple la position de Rudolf Carnap dans « Die Alte und die Neue Logik »⁴. Logique philosophique renverrait alors à un certain état de la logique, correspondant à ce qui s'enseignait à la fin du dix-neuvième siècle, et dont le noyau continuait à être emprunté à Aristote. C'est d'abord en ce sens que l'expression doit être entendue dans le titre du dossier. Mais le terme peut encore être pris comme équivalent de philosophie de la logique, désignant alors une discipline ayant pour objet les problèmes philosophiques posés par la logique, comme il y a une philosophie des mathématiques. Il peut encore s'entendre comme la logique appliquée à résoudre des problèmes philosophiques. Dans ces deux derniers cas, rien n'exige que la logique philosophique précède la logique mathématique et un travail comme celui de Bertrand Russell ou de Quine repose sur la conviction que le surgissement de cette dernière rendait possible un renouveau de la logique philosophique.

Il convenait ensuite de délimiter plus précisément le domaine à étudier. Chronologiquement, la période couverte commence dans les années 1880 pour s'achever au milieu des années vingt, quand le programme de Hilbert oriente les recherches dans de nouvelles directions. À l'intérieur du cadre ainsi tracé, il a fallu s'en tenir à quelques études de cas. Rien n'est dit par exemple des logiques philosophiques qui, comme celles de Wilhelm Wundt, fleurissaient dans l'Allemagne de Bismarck ; rien n'est dit non plus de ce qui se passait en Italie autour de Peano, dont on sait pourtant qu'il a profondément influencé Russell. Dans leur grande majorité, les articles qui composent ce dossier s'attachent à décrire la réception, souvent plus que réservée, des idées nouvelles dans la communauté philosophique. Qu'il s'agisse des désaccords qui ont opposé John Cook Wilson et Lewis Carroll, Henri Poincaré et Russell, Edmond Goblot et Louis Rougier, ou encore Russell et Ludwig Wittgenstein, chacun illustre à sa manière les résistances, les tâtonnements voire les confusions qu'il a fallu surmonter.

Nous avons suivi autant que possible l'ordre chronologique, sachant que les auteurs ont généralement porté leur attention sur la durée, afin de mettre en évidence les évolutions de pensée et la progression des débats. Cet ensemble de textes s'ouvre par un article portant sur la situation de la logique en Angleterre, à la fin du dix-neuvième siècle. Le propos de Mathieu Marion et Amirouche Moktefi est d'examiner à nouveaux frais l'œuvre de Lewis Carroll à la lumière de son débat avec Wilson au sujet de la logique symbolique. Si Wilson est tombé dans l'oubli, il a exercé une forte emprise en tant que titulaire de la prestigieuse chaire Wykeham, et son influence s'étend jusqu'à des penseurs majeurs de la philosophie du langage ordinaire, tels que Gilbert Ryle et John Austin. En revanche, Carroll, Charles Dodgson de son vrai nom, *lecturer* en mathématiques, mettait à part ses travaux de logique, qu'il signait de son pseudonyme. Les critiques que Wilson lui adressa révèlent les réticences que soulevaient à l'époque la logique symbolique : le rapprochement avec les mathématiques conduisant à un relâchement de lien avec la philosophie et à une remise en cause de la généralité de la logique. Carroll a eu le mérite de susciter une réflexion sur la nature des hypothétiques et celle des

⁴ Ekenntnis, I (1930) 12-26; trad. fr., *L'ancienne et la nouvelle logique* (Paris : Hermann, 1933).

inférences en formulant des paradoxes ; cependant, il n'a pas rompu avec la logique traditionnelle ni n'a cherché à remplacer la langue naturelle.

Avec « Ernst Schröder on pasigraphy », nous assistons à un des tout premiers rapprochements entre algèbre de la logique et logicisme. En effet, Schröder a mobilisé les résultats récents de la logique pour répondre aux problèmes des fondements des mathématiques. Volker Peckhaus fait apparaître une évolution de pensée marquante : au début de sa carrière, Schröder cherchait à réformer la logique en recourant aux mathématiques. Inversant le mouvement au cours des années 1890, il s'efforce de développer un langage universel en partant de la logique. Ce qui nous conduit à une analyse serrée de son œuvre majeure, *Vorlesungen über die Algebra der Logik*. Cet effort de mathématisation de la logique est bousculé par l'algèbre des relatifs, que Schröder emprunte à Charles Peirce, et ses derniers volumes ne seront publiés que de façon posthume. Schröder parvient à appliquer son instrument à la théorie des ensembles de Georg Cantor. Entraîné par son succès, il en vient à regarder la logique comme la source de toutes les sciences mathématiques, et même les sciences mathématisées, susceptible de constituer une écriture universelle.

Au moment où Schröder disparaissait, le logicisme prenait une nouvelle forme avec Russell et Louis Couturat. Leurs formulations provoquèrent une réaction de la part d'Henri Poincaré. La résistance que la logique mathématique a rencontrée en France est souvent considérée comme le résultat du jugement porté par ce dernier. Anastasios Brenner procède à un réexamen de cette controverse, en l'inscrivant dans le contexte des idées philosophiques de l'époque. L'attitude de Poincaré vis-à-vis de la logique mathématique ne peut se comprendre que si on la replace dans le cadre de sa philosophie des mathématiques, en prenant en compte ses thèses au sujet de la géométrie. Si Poincaré admet une synthèse a priori, il s'écarte notablement de Kant, en développant une approche à la fois formelle et génétique, appuyée sur la psychologie expérimentale. Par là, il ouvre la voie à de nombreux penseurs. Partant d'une réflexion sur la notion de certitude en logique, Gaston Milhaud s'efforce d'intégrer les nouveaux résultats mathématiques en élargissant la logique traditionnelle. Édouard Le Roy élabore une épistémologie, qui, s'écartant du logicisme, souligne la spécificité de la pensée mathématique et met en relief son caractère opératoire.

1908 fut une année faste pour la logique puisque, outre l'article de Luitzen Egbertus Jan Brouwer ici traduit, furent également publiés « Mathematical logic as based on the theory of types », de Russell, et « Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre I », de Ernst Zermelo, c'est-à-dire les trois solutions proposées à la crise des fondements provoquée par la découverte des paradoxes ensemblistes. Comme le remarque Mark van Atten dans sa présentation, l'article de Brouwer passa largement inaperçu et il fallut du temps, et Arend Heyting, pour que l'on prenne la mesure de son impact sur la logique. Brouwer, comme Poincaré ou Borel, dont il se sentait assez proche, avait peu d'estime pour la logique ; à la différence de ceux-ci, toutefois, il avait reconnu que la source du problème se trouvait de ce côté-là et qu'il fallait la réformer. Bien plus, sur la question des rapports entre logique et mathématique, il prenait le contre-pied des logicistes : loin de fonder la mathématique sur la logique, il posait l'antériorité de la première, la logique se bornant toujours à codifier des raisonnements préexistants. L'article avait déjà été traduit en français⁵. La présente traduction, la première à être faite directement sur le néerlandais, tente de rendre le côté délibérément rugueux du style de Brouwer ; elle est précédée d'une longue introduction qui replace ce texte dans l'œuvre de Brouwer et s'arrête sur les points conceptuels mis en jeu.

Jean-Michel Roy interroge un épisode marquant dans l'histoire de la philosophie au vingtième siècle, la controverse qui a opposé Russell et Wittgenstein entre 1913 et 1922. Le problème de l'exception wittgensteinienne montre que les rapports entre logique philosophique et logique mathématique sont plus complexes qu'il ne paraît : celle-ci ne fait

⁵ Jean Largeault, *Intuitionnisme et théorie de la démonstration* (Paris : Vrin, 1993).

pas que succéder à celle-là et si son surgissement intéresse le philosophe, c'est notamment parce qu'elle a entraîné un renouveau de la logique philosophique. C'était la grande leçon de « On denoting » (1905) : la logique permet de résoudre des problèmes philosophiques et, un demi siècle plus tard, Quine continuera à philosopher « d'un point de vue logique ». Une fois la rédaction des *Principia mathematica* achevée, Russell s'était empressé d'utiliser l'outil qu'il venait de confectionner et d'en tirer les premiers bénéfices philosophiques. Or Wittgenstein, comme on sait, avait adressé à une telle entreprise des objections dévastatrices, qui laisseront Russell paralysé. Comment peut-on à la fois affirmer « la logique philosophique, cela n'existe pas » et écrire un *Logisch-philosophische Abhandlung*? Telle est la question à laquelle Jean-Michel Roy entreprend de répondre.

Avec « La logique à la croisée des chemins : la controverse Goblou-Rougier sur la nature de la démonstration et du raisonnement déductif (1907-1921) », on revient en France où le passage d'une logique philosophique à une logique mathématique a été particulièrement laborieux. Dans un *Traité* où, pendant un demi-siècle, les philosophes français ont appris la logique, Goblou (1858-1935) opposait une fin de non-recevoir aux efforts de ceux qu'on appelait alors les logisticiens. Parmi eux se trouvait un de ses meilleurs élèves, Rougier, un personnage clé pour qui veut comprendre la réception (ou plutôt la non-réception) du positivisme logique en France. Auteur de ce qui reste un des meilleurs livres sur la philosophie mathématique de Poincaré, co-organisateur avec Otto Neurath du grand congrès de philosophie scientifique qui s'est tenu à Paris en 1935, Rougier cherchait en vain à convaincre son ancien professeur qu'il n'était pas possible de s'en tenir à la syllogistique d'Aristote. Michel Bourdeau présente tour à tour les deux positions en présence ; il montre que notre idée de logique ne s'est dégagée que peu à peu, Rougier ignorant par exemple à peu près complètement l'apport de Russell pour s'en tenir presque exclusivement à l'algèbre de la logique, et faisant de la notion de construction un usage très différent de celui qui a cours aujourd'hui.

Le dernier article traite de Borel et l'approche probabiliste de la réalité. À diverses reprises, le mathématicien français a croisé l'histoire de la logique : au début de sa carrière notamment, quand il a eu à se prononcer sur l'infini nouveau introduit par Cantor, puis à nouveau à la fin de sa carrière, puisqu'il fut à l'initiative d'une des premières discussions de la logique de Brouwer⁶. C'est toutefois à un autre aspect de son œuvre que s'intéressent Laurent Mazliak et Marc Sage, puisqu'ils ont choisi de nous expliquer comment il est passé de la théorie descriptive des ensembles à la théorie des probabilités, puis de celle-ci à ce qu'ils proposent d'appeler une physique sociale. Le premier tournant, le plus décisif, s'est opéré autour de 1905, quand Borel se rendit compte que la notion de mesure d'un ensemble permettait de formuler mathématiquement des questions jusqu'alors inexprimables dans le langage du calcul des probabilités, comme : comment évaluer la probabilité d'obtenir un nombre rationnel en tirant au hasard un nombre réel entre 0 et 1 ? Des applications, à la physique (mécanique statistique) puis à la vie socio-économique, confirmèrent Borel dans l'idée que la réalité demandait à être abordée d'un point de vue probabiliste.

Nous avons voulu dans ce dossier réunir des historiens de la logique travaillant sur les années 1900, en les laissant libre de réagir à notre thème. Ces recherches ont mené à des discussions, qui, nous l'espérons, viendront enrichir le débat. Ainsi, par exemple, Jean Michel Roy, qui montre comment la position nette et catégorique adoptée par Wittgenstein vient miner le projet philosophique de Russell, a choisi de s'en tenir au moment de désaccord entre les deux penseurs. On pourrait ajouter que cette position sera remise en cause à son tour par

⁶ Voir la note VII, Pour ou contre la logique empirique, des *Leçons sur la théorie des fonctions* (3^e édition), (Paris : Gauthier-Villars, 1928).

les découvertes ultérieures de la logique. Il resterait alors à explorer les répercussions de cette tension au point de départ de la philosophie analytique. Les positivistes logiques, en donnant une interprétation du *Tractatus logico-philosophicus* que son auteur récuse, parviendront à incorporer notamment les résultats de Kurt Gödel. Par la suite, Quine n'hésitera pas à formuler une philosophie de la logique qui prenne en charge plusieurs questions laissées en suspens par la logique mathématique.

Le développement de la logique n'est ni linéaire ni cumulatif. Il procède par vagues successives : des tentatives multiples, distinctes, voire antagonistes. La mue de la logique s'est faite au prix d'incompréhensions, de reniements et de nouveaux départs. Son développement ne se conforme pas au modèle du changement scientifique tel qu'il a été formulé par les post-positivistes ; nous ne trouvons pas l'analogie du remplacement d'un paradigme ou programme de recherche par un autre, comme ce fut le cas en physique à la même époque. La logique n'emprunte pas pour autant la même voie que la psychologie, la sociologie ou la linguistique. Ces sciences humaines prennent naissance sans emprunter véritablement aux discours antérieurs ; elles restent des disciplines à faible régulation. En revanche, la logique a une histoire *sui generis*. Elle a incorporé la syllogistique — théorie restreinte mais rigoureuse — et a tissé un lien privilégié avec les mathématiques dans ses développements les plus récents, donnant substance à la prétention exprimée par Schröder et par Louis Couturat d'en faire une science exacte.

Trois articles portent sur la situation en France et ne manquent pas de soulever la question des raisons pour lesquelles les mathématiciens et les philosophes français ont si peu participé au développement de la logique mathématique. On invoque souvent l'héritage d'Auguste Comte, qui refuse à la logique une place parmi les sciences fondamentales. Il paraît ainsi renforcer l'hostilité à la logique affichée par Descartes dans son élaboration de la science moderne. En fait, Comte estime que la logique devrait être présente dans toutes les sciences, associée au plus près de la pratique scientifique. Car il se peut qu'en se rapprochant des mathématiques, la logique voit son lien avec les sciences expérimentales se distendre ; d'où peut-être les innombrables problèmes d'application de la logique en dehors des sciences formelles. Quoi qu'il en soit, certains des arguments de Comte vont resurgir dans le cadre de la reformulation du positivisme, opérée par Poincaré et ses continuateurs. Paradoxalement, l'attention prêtée aux sciences positives, la volonté de constituer une philosophie scientifique, ont pu constituer un frein au développement de la logique.

Mais il ne faut pas sous-estimer les résistances en dehors de la France. À Oxford, Wilson multiplie les objections à l'encontre de la nouvelle logique. Et la situation à Cambridge n'est guère plus favorable, avant l'arrivée de Russell, puis de George Moore et de Wittgenstein. En Allemagne, Schröder, prenant ses distances avec Frege, procure l'un des rares exposés de logique mathématique en langue allemande. Il influencera les mathématiciens de Göttingen et le Cercle de Vienne. On pourrait soupçonner une filiation conduisant à Alfred Tarski et à la théorie des modèles. En Hollande, Brouwer, se rapprochant des positions de Poincaré, met en évidence une option philosophique fondamentale qui se distingue du logicisme et du formalisme, à savoir l'intuitionnisme.

Sans doute les travaux les plus féconds ont-ils surgi au confluent de plusieurs traditions. Les recherches de Schröder prennent leur élan en faisant fond sur l'œuvre de Peirce. Wittgenstein fait l'intermédiaire entre Vienne et Cambridge. Mais le prix à payer est d'accepter de profonds remaniements philosophiques. Au cours de l'élaboration de son système logique, Russell abandonne ses premières positions philosophiques, jusqu'à désavouer le militantisme logiciste nourri de rationalisme leibnizien, affiché par Couturat. De même, Wittgenstein, parvenu à la conception du *Tractatus*, n'hésite pas à rejeter les conceptions russelliennes. La logique serait-elle comme Cronos qui dévore ses enfants ?