



HAL
open science

Réalisme mathématique, réalisme logique chez Bolzano

Hourya Benis Sinaceur

► **To cite this version:**

Hourya Benis Sinaceur. Réalisme mathématique, réalisme logique chez Bolzano. Revue d'Histoire des Sciences, 1999, 52 (3-4), pp.457-477. 10.3406/rhs.1999.1365 . halshs-01119620

HAL Id: halshs-01119620

<https://shs.hal.science/halshs-01119620>

Submitted on 23 Feb 2015

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Réalisme mathématique, réalisme logique chez Bolzano

Hourya SINACEUR (*)

RÉSUMÉ. — La plupart des spécialistes de Bolzano présentent sa doctrine des propositions et représentations en soi, doctrine du sens objectif, comme une pièce maîtresse de son réalisme philosophique. Le but de cet article est de montrer les difficultés d'une interprétation trop monolithique de ce réalisme. La théorie logique de Bolzano est en fait plus nuancée qu'on ne le reconnaît généralement. Certes, les propositions en soi constituent un univers de significations objectives, douées d'une réalité propre, distincte à la fois de la réalité psychique et de la réalité physique. Mais les propositions en soi ne sont pas, à strictement parler, des *objets* logiques ; elles sont *matière*, et non objet, de pensée. Quant au réalisme mathématique de notre auteur, il ne laisse pas d'être affecté par un certain empirisme, manifeste surtout dans le statut accordé aux nombres entiers.

MOTS-CLÉS. — A posteriori - a priori ; arithmétisation ; concept ; conséquence ; démonstration ; empirique ; ensemble ; idéal ; infini ; intuition ; nombre ; objet ; proposition en soi ; raison ; réalisme ; réel ; signification ; troisième monde ; vérité.

SUMMARY. — *The majority of Bolzano's scholars present his theory of propositions and representations in themselves – a theory of objective sense – as a paradigm example of his philosophical realism. Goal of this article is to show the difficulties encountered by too monolithic an interpretation of this realism. Bolzano's logical theory is in fact more nuanced than it is generally appreciated. Surely, the propositions in themselves constitute a universe of objective significations with their own reality, which is different from psychological and physical reality. But the propositions in themselves are not, strictly speaking, logical objects ; they are matter, not object, of thought. As for Bolzano's mathematical realism, it is affected by a certain empiricism, which is evident especially in his account of the natural numbers.*

KEYWORDS. — A posteriori - a priori ; arithmetization ; concept ; consequence ; proof ; empirical ; set ; ideal ; infinite ; intuition ; number ; object ; proposition in itself ; reason ; realism ; signification ; third world ; truth..

(*) Hourya Sinaceur, Institut d'histoire et philosophie des sciences et des techniques (IHPST), 13, rue du Four, 75006 Paris.

Les découvertes mathématiques de Bolzano s'inscrivent dans le cadre d'une réflexion logique et épistémologique sur la notion de vérité, sur la notion de démonstration et sur le fait, selon lui, que la démonstration fournit un fondement objectif et rigoureux à la science. Bolzano a souligné dans la préface à son *Rein analytischer Beweis* (1) le lien intime entre ses résultats mathématiques et sa réflexion sur la science. Il a insisté sur la parenté et la correspondance entre sa démarche de praticien, vouée à la recherche de démonstrations rigoureuses, et sa démarche de théoricien focalisée sur le rôle constitutif de la démonstration dans la science. Bolzano a ainsi pensé la philosophie de la science comme une discipline capable de reconnaître et de traiter de l'intérieur de la science les questions philosophiques qui se posent à son propos. En même temps il a affirmé l'utilité de cette discipline pour l'avancement de la science et son rôle possible dans la découverte scientifique.

S'agissant des mathématiques, cette interaction de la science et de la philosophie est particulièrement sensible. Pour Bolzano, mathématiques et philosophie sont toutes deux des connaissances purement conceptuelles, c'est-à-dire procédant exclusivement par concepts et sans recours à l'intuition. Ici et là, la méthode est la même : elle consiste en la recherche des raisons (*Gründe*) et des conséquences (*Folgen*), en la mise au jour de la connexion objective des vérités (2). Cette identité de méthode est si forte que Bolzano tantôt considère la mathématique comme « branche de la philosophie et moyen de s'exercer à penser juste (3) », tantôt définit la philosophie comme une réflexion « sur et dans chaque science », sur et dans les mathématiques en particulier (4). Toute science comporte une part de philosophie, qui consiste à la fois à chercher les raisons des conséquences et à réfléchir sur ce lien de raison à conséquence. La différence entre mathématique et philosophie tient seulement (selon les *Beyträge* (5)) à ce que la première, au sens le plus général, est la science *a priori* des formes d'objets possibles ; quand la seconde cherche à déduire *a priori* l'existence réelle

(1) Bolzano, 1817. (Les références complètes se trouvent en bibliographie en fin d'article.)

(2) Bolzano, 1849, 3-4, 6.

(3) Bolzano, 1810, préf. ou § 19.

(4) Bolzano, 1849, 6-7.

(5) Bolzano, 1810.

d'objets particuliers comme la liberté de Dieu ou l'immortalité de l'âme (6). Par « formes », Bolzano entend les lois générales qui régissent nécessairement les conditions de possibilité de tout objet. La mathématique répond à la question : « Quelles propriétés appartiennent nécessairement aux choses qui doivent être possibles ? » Science *a priori* des formes d'objets possibles, science des lois de « tout ce qui en général peut être objet de notre faculté de représentation », la mathématique est en quelque sorte une ontologie formelle, ainsi que l'a relevé Husserl (7). Se souvenant de Leibniz, Bolzano considère l'ensemble de ces lois comme la mathesis générale, mais il ne se contente pas d'en désigner extensivement les parties, l'arithmétique et la combinatoire essentiellement ; il caractérise la mathesis générale comme théorie de la liaison en pensée et de la mise en relation de choses distinctes (8). Penser ensemble et reconnaître des relations (« chaque chose se trouve dans une certaine relation avec chaque autre chose ») constituent les deux lois essentielles de la mathesis générale.

N'importe quelle chose peut être ajoutée à n'importe quelle autre *en pensée*, et cette loi qui ne se rapporte pas aux choses elles-mêmes ni à leur existence, mais seulement à la représentation que nous en avons, est une loi mathématique. On trouve une forme particulière de cette loi dans la conjonction par le mot « et » de deux concepts. Réunir *A* et *B* en pensée est toujours possible, même si *A* et *B* n'ont rien à voir l'un avec l'autre : le résultat de la réunion est de l'ordre de la pensée, et non pas de l'ordre de la réalité. Les lois de possibilité des objets sont des lois de la pensée, laquelle se règle sur les objets et non l'inverse comme chez Kant, et les lois de la pensée sont donc des lois mathématiques.

Bolzano fixe ainsi dès 1810 l'expression formelle de la définition ultérieure, dans *Les Paradoxes de l'infini* (9), d'une collection comme conjonction d'éléments quelconques. La conjonction de coordination « et » est un des concepts les plus simples de notre entendement. L'opération de pensée correspondante trouve une version mathématique dans le concept de collection (10). La définition des nombres comme collections d'unités permet alors de préci-

(6) *Ibid.*, § 8.

(7) Husserl, 1929, § 26.

(8) Bolzano, 1810, 2^e cah., sect. I, § 3, 29-41 ; sect. II, § 30.

(9) Bolzano, 1851.

(10) *Ibid.*, § 3.

ser l'articulation de l'arithmétique et de la combinatoire sur une théorie des ensembles, qui apparaît comme la partie la plus générale de la mathesis générale.

I. — LE « SEMI-RÉALISME CONCEPTUEL » DE BOLZANO

Bolzano pense, en accord avec Kant, que toute connaissance se fait par intuition ou par concept. Mais pour lui, concept et intuition forment un couple de notions dont chacune est l'exacte négation de l'autre. Le concept n'est rien d'autre que ce que nous pensons d'un objet ; penser c'est penser par concepts. Les concepts sont des représentations générales, qui peuvent subsumer plusieurs objets, et qui entrent à titre de composantes dans des jugements *a priori*. L'intuition est une représentation simple (non composée) et singulière, qui résulte de l'affectation de la conscience par un objet réel, c'est-à-dire situé dans l'espace et le temps. La modification de la conscience est *cause* immédiate de cette représentation, qui est ainsi antérieure à tout raisonnement.

Représentation singulière d'un objet perçu, l'intuition ne peut faire partie que d'un jugement *a posteriori*. *A posteriori* est un jugement de perception (ou jugement de réalité) comme par exemple « je perçois *X* », *a priori* tous les autres. La raison d'un jugement *a posteriori* est dans le réel, en partie dans ma faculté de perception et en partie dans les choses extérieures qui agissent sur cette faculté, mi-subjective donc et mi-objective. La raison (*Grund*) d'un jugement *a priori* est logique et non pas réelle (non pas causale), et elle est totalement objective. Je ne peux la trouver ailleurs que dans l'analyse des concepts de sujet et de prédicat qui composent le jugement.

La même séparation radicale passe entre *a priori* et *a posteriori* qu'entre concept et intuition. Tout concept est *a priori* comme composante d'une proposition *a priori* ; toute intuition est empirique, même en mathématiques ; et les concepts ne sont pas abstraits des intuitions, ils représentent des rapports entre elles. Appréhension d'un donné singulier, l'intuition ne peut contenir de concept, par quoi est donné non un objet mais une *propriété* d'objets.

Le concept ne dépend donc pas du sujet et il se distingue de l'objet. Le concept, source d'universalité, et donc d'objectivité, ne reçoit sa validation ni des objets extérieurs du monde sensible ni des processus psychiques en œuvre dans la saisie et la pensée de ces objets. Le concept a son propre univers de validation : l'objet de l'intuition et l'intuition en tant qu'activité psychique du sujet appréhendant un objet ne peuvent rien pour lui.

L'univers propre du concept, qui constitue la réalité propre de la science, a pour support ce que Bolzano appelle les « propositions en soi ». Une proposition en soi ou « proposition objective » est le sens objectif exprimé par une proposition prise au sens des grammairiens. Le sens objectif entretient un rapport étroit avec la vérité : il ne peut être que vrai ou faux.

« J'entends par proposition dès que je remarque que ce n'est pas pour moi ce que les grammairiens appellent une proposition, à savoir l'expression verbale, mais uniquement le *sens* de cette expression, lequel, nécessairement et toujours, ne peut être que vrai ou faux : une *proposition en soi* ou une *proposition objective* (11). »

Une proposition en soi ne se confond ni avec la proposition pensée, qui existe dans l'esprit de celui qui la pense (c'est le sens subjectif), ni avec l'expression linguistique, orale ou écrite, située dans le temps et l'espace, qui la signifie – et signifie en même temps la proposition pensée (12). Elle n'a donc de réalité ni psychique ni matérielle, mais elle a une réalité propre, constituée par son objectivité, c'est-à-dire son identité pour tous en tout temps. Cette objectivité est le support du vrai et du faux. On ne peut en effet placer le lieu de la vérité dans des actes de pensée ou d'expression, contingents, changeants dans le temps et selon les individus qui les accomplissent. La vérité, qui est une et invariable, a besoin d'un siège objectif : ce sont les propositions en soi, qui ne sont pas quelque chose de réel, mais qui sont quelque chose et non rien.

Bolzano retrouve la doctrine stoïcienne du sens comme existant incorporel et médiation obligée entre le monde et la pensée. Nous ne pensons pas les choses, mais leur sens. Notre connaissance ne porte pas directement sur les choses, inaccessibles de façon immédiate (Bolzano rejoint à la fois Kant et les stoïciens sur ce point), mais sur le sens en soi des choses. Connaître c'est connaître la rela-

(11) Bolzano, 1992, 17.

(12) Bolzano, 1837, vol. I, § 19.

tion d'une propriété à une chose, et cette relation objective est signifiée dans une proposition en soi dont la vérité est indépendante de la conscience du sujet qui l'énonce. Le sens « existe » en soi, et c'est par lui que s'établit notre rapport aux choses. Mais il ne faut pas confondre le sens avec les choses. C'est précisément une caractéristique de l'idéalisme, souligne Bolzano (13), que la confusion entre « ce qui est pensé en soi [...] avec l'objet », et par idéalistes il désigne Kant, Fichte, Schelling, Hegel, mais aussi et déjà Leibniz.

Le sens objectif d'une proposition n'est rien de réel (*nichts Wirkliches*). Cependant il est coextensif à la proposition grammaticale : il est composé de parties, les représentations en soi, qui correspondent aux constituants de la proposition grammaticale. Dans la proposition « Cajus est mortel », à chacun des mots « Cajus », « est », « mortel » correspond un élément du sens en soi de la proposition, et ces éléments Bolzano les appelle « représentations en soi ». Une représentation en soi est donc le contenu objectif d'une représentation subjective, un élément de sens objectif. Les éléments de sens « existent » par eux-mêmes, indépendamment de ma pensée et des mots qui les incarnent, et distincts des objets qu'ils signifient.

La considération des significations objectives comme support de vérités objectives est une innovation non seulement logique mais aussi métaphysique. Car il ne s'agit de rien de moins que de la laïcisation de la notion de vérité, lucidement accomplie par un prêtre-philosophe. Pour Bolzano, en effet, la vérité a un siège objectif qui n'est pas Dieu et n'a pas besoin de la garantie divine. Les vérités en soi

« ne sont établies par personne, même pas par l'entendement divin. Quelque chose est vrai non parce que Dieu sait qu'il en est ainsi ; au contraire Dieu sait qu'il en est ainsi parce qu'il en est ainsi (14) ».

Ni œuvre humaine, ni œuvre divine, la vérité est antérieure à l'une comme à l'autre. Même Leibniz n'était pas allé si loin. De l'idéalisme kantien, la doctrine de l'autonomie du sens et de la vérité rejette certes le subjectivisme, mais assume la rupture opérée par une théorie de la connaissance indépendante de la garantie divine.

(13) Lettre à Zimmermann, citée in Sebestik, 1992, 144.

(14) Bolzano, 1837, vol. I, § 25.

La philosophie contemporaine reconnaît largement l'autonomie de la sphère du sens, l'ayant héritée non directement de Bolzano, mais de Frege et de Husserl, qui a d'ailleurs, le premier, souligné ce trait fondamental de la pensée de Bolzano. Cet héritage, grâce auquel l'analyse sémantique s'est imposée comme instrument essentiel de la théorie de la connaissance, continue d'être agité par deux problèmes. Le premier est de savoir quel statut donner à la « réalité » du sens, le second est de savoir comment on y accède.

Pour Bolzano, le sens a une réalité idéale, c'est-à-dire hors du temps et de l'espace, et logiquement antérieure à celle de la pensée ou du jugement dont elle fournit la matière (*Stoff*) et à celle de l'expression dont elle constitue le sens. On peut bien dire que la doctrine du λεκτόν stoïcien, qui distinguait le sens de l'expression et de la pensée, mais affirmait en même temps leur solidarité et leur simultanéité, est réinterprétée par Bolzano à la lumière de l'en-soi platonicien. Le sens n'est pas seulement distinct de la pensée et de l'expression, il est en outre indépendant d'elles et leur préexiste. Comme l'explique bien Jacques Laz, les objets sont toujours déjà subsumés sous un sens objectif avant que nous les pensions (15). Car tout objet a une propriété, ne serait-ce que d'être quelque chose, et cette propriété que je pense ou énonce n'est cependant produite ni par la conscience ni par le langage. Bolzano tient à se démarquer avec insistance de la conception idéaliste d'une subjectivité créatrice (qu'assumeront des mathématiciens aussi divers que Dedekind, Poincaré, Brouwer) ; mais il se démarque tout autant de l'empirisme dont procédera plus tard l'analyse des effets de langage dans le processus de la connaissance (Wittgenstein, Dummett dans une certaine mesure) : sa théorie du sens n'est pas une théorie du langage. Pour lui comme pour Frege, les vérités en soi constituent un « troisième monde », un univers intelligible séparé de l'univers psychique et séparé de l'univers sensible (qui est l'univers des choses mais aussi des signes linguistiques). Par un premier aspect, le « réalisme » de Bolzano est seulement un antiréductionnisme : il consiste à reconnaître l'autonomie de la sphère du sens par rapport à la réalité, que cette réalité soit subjective ou extérieure. Par un deuxième aspect, ce réalisme consiste non en la seule subsistance du sens une fois là, mais en son antériorité par rapport à son appréhension contingente : c'est un anticonstructivisme.

(15) Laz, 1993, 118 *sqq.*

Comment alors le sens est-il appréhendé ? – c'était là le second problème. Nous avons vu que l'intuition est saisie d'un objet réel, singulier. Le sens en-soi ne peut certainement pas être appréhendé par intuition, car premièrement il est idéal et non réel, deuxièmement il est matière, et non objet, d'un jugement. Il faut bien noter que le sens n'est pas hypostasié en un objet qui serait *donné* dans une intuition non empirique. Comme dirait Michael Dummett (16), le sens ne se présente pas à la pensée comme un objet d'observation. Il apparaît (*erscheint*), saisi dans un jugement, par le biais duquel il « représente ce qui dans la conscience n'apparaît jamais : l'objet, tel qu'il est représenté (17) ». Les objets sont seulement tels qu'ils sont représentés dans le discours ; le discours exprime les *propriétés* des objets, non les objets eux-mêmes ; et le discours scientifique exprime les propriétés *objectives* des objets, qui ne deviennent pas à leur tour des objets. Le sens se manifeste donc non dans une intuition mais dans une connaissance discursive. Il n'est pas un contenu de conscience éveillée par la présence perçue d'un objet. C'est un contenu objectif de connaissance, que nous découvrons à travers des jugements. Le sens est déjà là avant que nous le saisissons, mais il n'est pas là comme objet. Il n'est pas objet mais matière de pensée. Si bien que l'autonomie et l'antériorité du sens ne font pas franchement basculer Bolzano dans un réalisme des objets. Je voudrais souligner ici que le « réalisme platonicien », pour lequel les entités abstraites sont des *objets* idéaux d'un « troisième monde », convient moins exactement à la théorie du sens en soi de Bolzano qu'à sa théorie des entités mathématiques élémentaires (sur laquelle je reviendrai en analysant comment Bolzano répond à la question : « Qu'est-ce qu'un nombre ? »). En effet, les propositions en soi ont l'existence d'un quelque chose qui n'est pas rien, mais qui n'est pas un objet au sens propre : c'est plutôt un ensemble de représentations structuré par certaines relations, qui ne peut être dit objet qu'« au sens le plus large » du terme (18). Dans le troisième monde de Bolzano, l'existence du sens ne se mue pas en réalité intellectuellement saisissable, intuitionnée d'une manière analogue à ce qui se passe dans la perception (comme il arrive dans

(16) Dummett, 1991.

(17) Laz, 1993, 122.

(18) Bolzano, 1975, II, § 3. Cette nuance invite à ne point épouser l'interprétation de Morsher, 1973, qui a trop tendance à figer l'univers du sens en *objets* logiques.

l'intuition des essences de Husserl, mais aussi chez Gödel pour les grands cardinaux). Bolzano est très cohérent avec lui-même : il n'a pas critiqué à grand bruit le recours à l'intuition, empirique ou *a priori*, qui confond nos concepts avec leurs objets, pour, tacitement, y revenir en transformant nos concepts en objets, ou, pour le dire autrement, en identifiant la saisie du sens à une intuition des essences. Et c'est en vertu de cet « irréalisme » foncier du sens que les propriétés mathématiques ne peuvent jamais, selon lui, être transformées en objets, tandis qu'à l'inverse les « objets » du mathématicien sont quasiment des choses.

En émigrant de la sphère des choses à la sphère du sens, l'en-soi a quitté, avec Bolzano, l'ontologie pour la logique. En contrepartie, la logique retrouve l'inspiration stoïcienne, selon laquelle elle n'est pas seulement théorie de l'inférence, mais aussi théorie du sens. Le seul en-soi dont parle Bolzano est celui des propositions et de leurs composantes, les représentations, régies par les lois objectives de la logique. L'accès au sens objectif passe donc par la logique. Mais Bolzano ne cède pas à cet aspect du réalisme qui consiste à transformer le sens en essence et à chosifier les entités logiques. La conséquence naturelle d'une position de ce type, mais qui n'a été aperçue que plus tard, est la distinction entre objectivité et réalité, où « réalité » est non seulement la *Wirklichkeit*, mais aussi la « réalité irréelle », la réalité en soi, hors du temps et de l'espace. Je reviendrai sur cette conséquence dans ma conclusion.

II. — CONCEPTS ET OBJETS EN MATHÉMATIQUES : LE RÉALISME ARITHMÉTIQUE

1 / *L'arithmétisation des mathématiques*

Il ne suffisait pas qu'en philosophe Bolzano montre la contradiction intrinsèque de la notion kantienne d'intuition pure. Il fallait encore qu'en mathématicien il montre l'intuition absente de la construction raisonnée des sciences purement conceptuelles. Ce n'est pas seulement en arithmétique et en analyse que l'intuition n'a aucun rôle, mais aussi en géométrie, qui n'est pas la science de l'espace, mais la science du concept d'espace. Bolzano est le seul

mathématicien de son temps à dissocier la géométrie de l'intuition et de l'expérience, et à dire clairement que l'espace géométrique est un concept mathématique et non la représentation de l'espace sensible. La géométrie est une science appliquée par rapport à l'arithmétique et à l'analyse, c'est-à-dire moins générale qu'elles ; mais elle est néanmoins une science *a priori*, purement conceptuelle, science de relations et non science des objets de l'espace sensible. Un objet de l'espace sensible est un objet physique réel ; un objet géométrique est un système de points. Les propositions géométriques portent non sur des objets réels mais sur des systèmes de points, expriment non des vérités intuitives ou d'expérience mais des vérités purement conceptuelles sur les propriétés ou les relations de ces systèmes (19).

C'est pourquoi la géométrie est, autant que toute autre science purement conceptuelle, bâtie sur la recherche du lien démonstratif, qui est pour Bolzano lien de raison (*Grund*) à conséquence (*Folge*). Un théorème géométrique peut bien être *évident*, il n'en a pas moins besoin d'être démontré. Dans certains cas la démonstration se réduit à une déduction immédiate à partir d'un théorème plus général ou, mieux, le plus général possible. La reconstruction déductive des sciences mathématiques a nécessairement pour corollaire leur arithmétisation, qui n'est que la mise en évidence du lien de subordination du particulier au général.

L'arithmétisation de l'analyse implique une construction des nombres réels. Bolzano l'a tenté, mais d'une manière qui soulève trop de difficultés pour que nous puissions l'exposer simplement ici. L'arithmétisation débouche aussi sur la conceptualisation ensembliste. En effet, arithmétiser l'analyse n'est pas seulement arithmétiser la notion de continuité, mais aussi et d'abord les notions de fonction et de variable. L'idée de variation, en elle-même, a besoin d'être débarrassée de l'imagerie auxiliaire du mouvement et du temps.

« Ce que les mathématiciens appellent une *grandeur variable*, observe-t-il de manière tout à fait remarquable, n'est pas, à proprement parler, une grandeur, mais tout simplement le concept, la pure *représentation* d'une grandeur, et précisément telle qu'elle ne représente pas seulement une grandeur unique, mais un ensemble infini de grandeurs différentes les unes des autres (20). »

(19) Voir Sebestik, 1992, 36-38, 57.

(20) Bolzano, 1851, § 12.

Variable, en mathématiques, ne désigne pas une grandeur variant effectivement dans l'espace et le temps, mais un *concept* de grandeur, qui indique la possibilité de substituer à un même symbole x n'importe laquelle des valeurs d'un ensemble prédéterminé, et généralement infini comme il arrive en théorie des fonctions de variable réelle. Une variable x représentant ainsi un ensemble de grandeurs, une fonction $f(x)$ de cette variable représente une dépendance entre grandeurs de deux ensembles, ainsi que le dit la *Funktionenlehre*, publiée pour la première fois seulement en 1930 (21). Ces définitions conduisent naturellement à envisager des ensembles infinis de points, de valeurs, d'éléments.

En effet, la logique de l'arithmétisation pousse d'un côté à supprimer le langage de l'infini potentiel, qui est aussi celui du mouvement : on n'a plus besoin de supposer des grandeurs qui *deviennent* infiniment petites ou infiniment grandes (22). Simultanément, l'arithmétisation pousse à forger un langage de l'infini actuel, car l'ensemble de définition d'une fonction de variable réelle est constitué d'une infinité de valeurs, même s'il consiste en un très petit intervalle.

Pour Bolzano, l'infini actuel est un concept mathématique parce qu'il découle *originellement* de notre pouvoir de penser (*Kraft des Denkens*). C'est originellement que nous pouvons lier en pensée n'importe quelle chose à n'importe quelle autre, et lier le résultat ainsi obtenu à une autre chose encore, et ainsi de suite indéfiniment. Ce pouvoir de conjonction se traduit en mathématiques par la formation de collections et d'ensembles, qui sont des collections indifférentes à l'ordonnance de leurs parties (23). Collections ou ensembles conduisent tout droit à l'infini actuel. Car je peux penser ensemble les éléments d'une collection infinie, les ramasser en une unité conceptuelle, les penser d'un coup sans m'épuiser dans leur énumération successive. Pour concevoir un ensemble infini, je n'ai pas besoin en effet de me représenter isolément chacun de ses éléments et d'ajouter ensuite les uns aux autres ces représentations. Cela, je ne le fais même pas pour un ensemble fini, celui des habitants de Prague ou de Pékin par exemple. Quand je dis que

(21) Voir aussi Bolzano, 1975, 231.

(22) Bolzano, 1851, § 37.

(23) Noter que pour former une collection ou un ensemble, il faut au moins deux éléments. Pour Bolzano il n'y a ni ensemble vide ni ensemble ne contenant qu'un unique élément.

l'ensemble des habitants de Prague atteint tel chiffre, je ne m'amuse pas à me représenter un par un les individus constituant cet ensemble. Je forme le *concept* qui réunit tous les habitants de Prague et exclut tout autre individu, c'est-à-dire le concept correspondant à l'expression « l'ensemble des habitants de Prague (24) ». Toute collection, finie ou infinie, est pensée par un « concept générique » qui en subsume tous les éléments et rien d'autre. C'est le propre du concept que ce « pouvoir penser ensemble divers éléments », qui n'est donc pas à interpréter subjectivement. Ce pouvoir est une loi objective de la pensée. L'infini actuel, c'est-à-dire la pensée d'une collection infinie comme totalité achevée, a droit de cité en mathématiques parce qu'il s'agit d'un concept et non d'une chose, et que les difficultés traditionnellement attachées à ce concept peuvent être résolues par une analyse conceptuelle convenable. Ainsi, la mathématisation de l'infini actuel est, du point de vue de Bolzano, une conséquence de la distinction fondamentale entre concept et objet. Elle n'aurait donc pu advenir dans une perspective idéaliste-subjectiviste (qui confond concept et objet). Pourtant elle est également solidaire du rejet, et non de l'assomption, d'une conception bravement réaliste des entités mathématiques, puisque le concept est ce par quoi je pense la liaison des objets, sans être lui-même proprement un objet. C'est pourquoi on ne peut vraiment déceler, chez Bolzano, l'affirmation de ce que plus tard on appellera « un réalisme des concepts », désignant par là une position prise par Cantor et par Gödel. On notera, en passant, que le réalisme des concepts fait très bon ménage avec l'idéalisme, dont il est un sous-produit.

Se démarquer tant du réalisme des entités mathématiques que de l'idéalisme subjectiviste est sans doute moins nécessaire pour des concepts aussi familiers au mathématicien que celui de nombre entier que pour des concepts paradoxaux comme celui d'infini. C'est précisément en discutant le statut du nombre entier que Bolzano cède franchement au réalisme dont il a su se garder aussi bien dans sa logique que dans son traitement de l'infini actuel. Avant de caractériser plus précisément de quel type de réalisme il s'agit, voyons ce que sont les nombres entiers pour Bolzano.

(24) Bolzano, 1851, § 14.

2 / Les nombres de l'arithmétique pure (Reine Zahlenlehre)

Bolzano considère les deux couples d'opposés : nombre abstrait/nombre concret et nombre pur/nombre appliqué. Comme il y a des nombres concrets et purs, qui fournissent sa matière à l'arithmétique pure, les deux dichotomies ne se recouvrent pas. Les nombres concrets purs constituent l'étiquette bolzanienne sous laquelle il faut ranger par exemple « le concept désigné par le mot trois », et plus généralement tous les concepts de nombres impliqués dans les propositions exprimant des opérations arithmétiques, par exemple la proposition : « $2 + 3 = 5$ ». Ce sont les nombres en soi de l'arithmétique pure. 3 est le sens en soi du signe « 3 », la représentation objective associée à ce signe et à l'objet qu'il désigne. Mais quel type d'objet peut correspondre à un nombre en soi ? Si le nombre est un concept (non vide), la question se pose de savoir à quoi se réfère le sens ou contenu sémantique des signes numériques. Certainement pas à telle ou telle collection particulière, par exemple trois pommes ou trois points. « Trois points » est l'expression d'un nombre concret appliqué, « trois » ou « 3 » l'expression d'un nombre concret pur. Il est clair que l'arithmétique en tant que science *a priori* pure n'a pas affaire aux nombres appliqués, qui servent dans les sciences appliquées, la géométrie (trois points) ou la chronométrie (trois minutes). Elle n'a pas affaire non plus aux nombres abstraits qui « représentent des propriétés appartenant aux nombres concrets auxquels ils se rapportent », parce qu'on ne peut additionner, soustraire, multiplier, etc., des propriétés. Ce sur quoi portent les opérations arithmétiques ne peut être des propriétés. Qu'est-ce donc ? Logiquement il n'y a qu'une réponse possible : ce sont des objets. Quelle sorte d'objets alors ? Mais reprenons le fil des cheminements de Bolzano.

Les nombres concrets purs de l'arithmétique sont des nombres en soi, c'est-à-dire des significations, donc idéales. Fidèles à la théorie de Bolzano, où le sens n'est pas objet au sens propre et en tout cas pas une chose, nous cherchons à en déterminer les objets de référence.

« Le sens de l'équation $2 + 3 = 5$, écrit Bolzano, est correct si par 2, 3, 5, on entend des nombres concrets, *i.e.* de véritables collections ou ensembles d'unités (*wirkliche Inbegriffe oder Menge von Einheiten*) (25). »

(25) Bolzano, 1976, 23.

Bolzano reprend la définition d'Euclide, mais en plaçant les nombres dans le cadre plus général des ensembles. Jusque-là tout va bien : on semble rester dans le cadre de la théorie propositionnelle du sens appréhendé comme système d'éléments. Mais voilà : le point de vue du mathématicien ne coïncide pas tout à fait avec celui du logicien. Car les nombres du mathématicien, les nombres en soi de l'arithmétique pure,

« ne sont pas des concepts mais des choses (des unités isolées ou des ensembles de plusieurs unités) que nous concevons comme subsumées sous des concepts déterminés (26) ».

Il y a une vraie difficulté dans la double conception bolzanienne du nombre comme concept et comme chose. Notre solution est la suivante : l'analyse (logique) des propositions arithmétiques telle « $2 + 3 = 5$ » fait voir le nombre comme concept, ce qui est conforme au fait qu'il s'agit de propositions *a priori* purement conceptuelles. Mais la considération des opérations arithmétiques et de la structure inductive de la suite des entiers naturels qui fonde ces opérations implique de voir dans les nombres les choses auxquelles s'appliquent cette structure et ces opérations. Bolzano est ainsi conduit à un réalisme arithmétique caractérisé, alors qu'il s'est gardé de considérer les objets sémantiques ou logiques comme des objets au sens propre. Dans le troisième monde de Bolzano, il n'y a d'objets logiques qu'en un sens très large du terme « objet », mais il y a bien des objets mathématiques « concrets », qui ne se réduisent pas, comme ce sera le cas chez Frege, à des objets logiques – Bolzano n'est pas logiciste, si logicisme signifie la réduction des concepts mathématiques primitifs à des concepts logiques. Les nombres sont des « choses de pensée » (*Gedankendinge*) ayant une existence idéale (*ideales Dasein*) (27).

Cette discordance, que nous constatons, entre philosophie logique et philosophie mathématique chez Bolzano résulte de l'absence de raccord, bien vue par Husserl, entre théorie des propositions et théorie des formes mathématiques.

Pour le mathématicien donc un nombre entier positif est :

- un ensemble non ordonné d'éléments homogènes ;
- un élément de la suite récurrente obtenue à partir de l'unité par additions successives d'une unité.

(26) *Ibid.*, 21.

(27) Bolzano, 1810, 2^e cah., III, § 2.

L'appartenance à une suite déterminée est encore plus décisive que le fait de constituer un ensemble non ordonné. Car c'est cette appartenance qui fait le lien entre le nombre-chose et le nombre-concept. Complétons la citation donnée plus haut :

« Les nombres ne sont pas des concepts mais des choses (des unités isolées ou des ensembles de plusieurs unités) que nous concevons comme subsumées sous des concepts déterminés. Car nous n'appelons nombre une chose (une unité isolée ou une collection de plusieurs unités) que dans la mesure où nous nous représentons ces choses comme termes de la suite en question. »

Les nombres-choses sont subsumées par des relations qui dérivent toutes de la structure inductive de la suite des entiers naturels. Les nombres de l'arithmétique ne sont pas des concepts, mais ne sont nombres que parce qu'ils sont subsumés sous des concepts de relation.

Les vrais nombres-concepts sont les nombres abstraits qui, répétons-le, ne sont pas les nombres de l'arithmétique pure. Un nombre abstrait est en effet

« la propriété, grâce à laquelle chacun des termes de la suite devient un nombre [concret pur] (et qu'il conserve pour tout changement des objets eux-mêmes choisis pour unités) ».

Un nombre abstrait est, en somme, la propriété qui transforme un nombre concret appliqué en nombre concret pur, c'est-à-dire qui transforme une collection de choses en collection d'unités. C'est la propriété en vertu de laquelle je subsume sous le même nombre concret pur, 3, trois pommes, trois points, trois bâtons, etc. – notons au passage que le référent de 3 peut être réel (pommes) ou non réel (points). Bolzano est assez près de la notion d'équinuméricité mais très loin de l'élaboration précise de Frege qui définit le nombre en général comme extension de concept, avant de définir les nombres particuliers que sont 0, 1, 2, etc. : 0 est l'extension du concept « non identique à soi-même », 1 est le nombre du concept « identique à 0 », c'est-à-dire l'extension du concept « équinumérique au concept "identique à 0" » (seul 0 tombe sous le concept « identique à 0 »), etc. Bolzano a bien l'idée d'une distinction entre concept de nombre et nombres particuliers ou individuels, mais il ne s'agit pas de la distinction frégréenne. En fait, il n'a pas le concept de nombre *en général*, c'est-à-dire la réponse à la question posée par Frege de savoir ce qu'est le concept de nombre. Ce qu'il

a, ce sont des nombres-concepts en aussi grand nombre que les nombres-concrets dont ils sont un simple reflet dans le miroir de l'abstraction. Les nombres abstraits sont « abstraits » comme propriétés des nombres concrets, et en tant que *simples propriétés*, ils ne subsistent pas indépendamment de leurs supports. Ils ne peuvent à leur tour être transformés en objets de calcul. L'arithméticien opère sur des nombres, qui sont concrets en tant qu'ils sont *objets* d'opérations et purs en tant qu'ils ne sont que cela, totalement désengagés du monde, le monde réel des pommes et des chaises, mais aussi le monde non réel des points, droites, angles, vecteurs, vitesses, forces et autres concepts de mathématique appliquée. Les nombres de l'arithmétique pure sont de véritables *objets idéaux*.

Dans la *Reine Zahlenlehre*, Bolzano dit tantôt que les nombres concrets purs, en tant que représentations en soi, ne sont pas quelque chose de réel (*sind nie etwas Wirkliches*) et tantôt que ce sont des choses, de véritables collections d'unités (*wirkliche Inbegriffe oder Menge von Einheiten*). L'usage répété de l'adjectif « *wirklich* » pour qualifier les nombres purs est troublant, quand on sait que Bolzano réserve généralement ce qualificatif aux choses réelles, situées dans l'espace et le temps et causes matérielles d'un effet. Pour débrouiller l'obscurité, il faut se souvenir que Bolzano emploie aussi l'adjectif comme épithète, et non comme attribut, lorsqu'il parle de « *wirkliche Zahlen* », et alors c'est dans un sens complètement clair, pour distinguer les entiers de tout ce qui n'est pas eux : les fractions, les imaginaires, les irrationnels, zéro, les suites ou séries divergentes et plus généralement toute expression comportant une suite infinie de signes dont on ne sait pas *a priori* s'il y correspond un objet (qui peut être non réel) ou rien, si elle est *gegenständlich* ou *gegenstandslos*. Les entiers sont de véritables nombres, donc de véritables collections d'unités (28). Non seulement ce sont des concepts non vides, qui ont un référent, mais, de plus, ce référent, qui peut bien être non réel, a toutefois un correspondant dans la réalité au sens propre, la *Wirklichkeit*. 3 est un « véritable nombre », parce que je peux trouver trois cailloux ou trois pommes ou trois chaises ; 0, qui est l'expression du rien, n'est

(28) Mon interprétation actuelle corrige celle que j'avais avancée dans Sinaceur, 1975. Hormis sur ce point, cet article déjà ancien présente des vues conformes à celles exposées ici, et développe une comparaison minutieuse entre les conceptions du nombre de Bolzano et de Frege.

pas un véritable nombre, mais un concept vide ; un irrationnel peut être défini par une suite infinie d'entiers, ce n'est pas un concept vide mais aucun mathématicien n'ayant jamais vu un irrationnel incarné, il ne s'agit pas de véritable nombre mais seulement de grandeur (29).

Cette ambiguïté du terme « *wirklich* », qui n'a rien que de très normal dans la langue allemande, attire notre attention sur le genre d'idéalités que constituent pour Bolzano les nombres entiers. Ils ne sont certes rien de réel, mais premièrement ils existent « concrètement » en tant qu'objets idéaux d'un monde indépendant de notre faculté de connaître et antérieur à elle. Deuxièmement, cette existence concrète-idéale renvoie tout de même à la réalité au sens propre. Un véritable nombre est une signification idéale (nombre en soi), dont le référent est une collection d'unités (nombre-chose), et celle-ci est véritable parce qu'on trouve bien dans la réalité de telles collections de choses. A l'objectivité et à l'existence d'un être idéal se surajoute un certain rapport à la réalité empirique. Le troisième monde, s'il est distinct du monde réel, se voit, du moins pour certaines de ses régions, investi d'une réalité empruntée, qui lui vient de son rapport mimétique au monde réel. Le réalisme arithmétique de Bolzano est double, et il est à la fois platoniste et empiriste. D'abord l'en-soi mathématique est peuplé d'objets individualisés ayant une existence extérieure et antérieure à la pensée, et c'est à peu près ce que l'on entend généralement par réalisme (platonicien) aujourd'hui. Ensuite cet en-soi, pour sa partie la plus centrale, les nombres, est rapporté au monde réel, duquel en somme il n'est pas totalement coupé même s'il est nettement distingué de lui, et c'est là une attitude d'avant les géométries non euclidiennes, d'avant l'axiomatique formelle et les mathématiques abstraites de la fin du XIX^e siècle, qui ont instauré une coupure entre concepts mathématiques et réalité sensible. Ce deuxième type de réalisme, qui est en fait un empirisme (ordinairement professé pour la géométrie, par Gauss par exemple), s'explique chez Bolzano par l'époque et l'héritage, mais il ne laisse pas d'être surprenant chez un auteur qui a si totalement répudié l'intuition de la construction, purement conceptuelle, des mathématiques que même l'espace géométrique se trouve chez lui déréalisé.

(29) Voir dans mon introduction à la traduction de Bolzano, 1851, l'importance de la distinction entre grandeur et nombre. Voir aussi Sinaceur, 1996.

CONCLUSION

Le réalisme platonicien continue de séduire de nombreux philosophes des mathématiques désireux de justifier l'« existence » des entités abstraites : un ensemble infini, une structure de groupe, d'espace vectoriel, de filtre, etc., une gerbe, un faisceau ou tout simplement une ligne droite. Il a l'avantage de donner une assise philosophique à l'irrépressible réalisme spontané du mathématicien au travail. Il est difficile en effet de ne pas croire à l'existence d'entités ou constructions dans la familiarité desquelles on passe une vie ! Mais la commodité ou la croyance spontanée ne peuvent, sans plus ample examen, être transformées en nécessité philosophique. Et d'ailleurs, tous les défenseurs des entités et méthodes abstraites ne cèdent pas au réalisme. A preuve Hilbert, qui y a résisté tout en repoussant la position subjectiviste de Poincaré et de Brouwer.

Une alternative actuelle consiste non seulement à distinguer nettement, comme le faisait déjà Frege dans sa préface aux *Grundgesetze der Arithmetik*, entre objectivité et réalité au sens de la *Wirklichkeit*, mais encore à débarrasser l'objectivité de toute sorte de réalité que ce soit, et tout particulièrement de la « réalité idéale » de l'en-soi logique. Ce qui revient à montrer, comme le fait Michael Dummett mais déjà Cavailles (30), que l'hypothèse du troisième monde est inutile. L'objectivité de la pensée mathématique n'a pas nécessairement besoin d'être soutenue par la mythologie de l'en-soi ou de l'existence idéale. Les idéalités mathématiques constituent bien un univers spécifique, un univers de sens objectif, réglé et mouvant, mais il n'est pas philosophiquement nécessaire d'accorder à cet univers le statut d'un troisième monde et de prêter à ses éléments idéaux une existence autre que mathématique précisément. Exister mathématiquement c'est être conforme à certaines règles de construction, de cohérence, de déduction, etc., certaines règles de constitution du sens dans une région déterminée du savoir. Pour Cavailles, par exemple, l'objectivité mathématique se soutient d'elle-même, ou plutôt du fait de

(30) Le passage le plus clair sur ce point se trouve dans Cavailles, 1946.

l'activité continuée des mathématiciens (31), et non du fait de la supposée existence antérieure d'entités non situées dans le temps et l'espace. Pour Dummett l'analyse du langage, propriété publique et publiquement observable, a précisément pour but d'assurer l'objectivité de la pensée sans recourir au troisième monde. Supposer un troisième monde c'est supposer que « la pensée se présente à l'esprit comme un objet d'observation » ! Ce que Dummett aussi bien que Cavailles et d'autres penseurs contemporains remettent en question, c'est justement le présupposé fondamental de Bolzano de l'antériorité du sens par rapport à notre capacité de le saisir, de l'exprimer ou de le produire, qui se décline aussi comme antériorité de la vérité par rapport à la connaissance. Ce qui est rejeté c'est, en somme, la composante platonicienne de sa théorie du sens objectif, ou, pour employer le vocabulaire de Husserl, l'association à la logique de l'idée philosophique d'ontologie formelle et l'association aux mathématiques de celle d'ontologie matérielle.

BIBLIOGRAPHIE

- BERG Jan
1973 *Theory of science*, trad. angl. de morceaux choisis dans les 4 vol. de *Wissenschaftslehre* (Dordrecht-Boston : Reidel).
- BOLZANO Bernard
1810 *Beiträge zu einer begründeteren Darstellung der Mathematik* (Prag) ; à paraître la trad. franç. de M. Baltzer (Paris : Vrin).
1817 Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, dass zwischen je zwey Werthen, die ein entgegengesetztes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege (Prag), trad. franç. de J. Sebestik, *Revue d'histoire des sciences*, XVII/2 (1964), 136-164.
1837 *Wissenschaftslehre*, 4 vol. (Sulzbach). On pourra consulter les extraits des deux premiers volumes édités in F. Kambartel, 1963, ou les morceaux choisis dans les 4 volumes, éd. en trad. angl. in Berg, 1973.
1849 *Was ist Philosophie ?* (Wien). Réimpr. in *Gesamtausgabe* des œuvres de Bolzano (Stuttgart-Bad Cannstatt : Frommann-Holzboog, 1969), ser. II, A 12/3 ; trad. franç. F. Macabrey (Québec, 1975), « Bibliothèque de philosophie », 3.
1851 *Die Paradoxien des Unendlichen*, ouvrage posthume éd. par Fr. Prihonsky (Leipzig) ; trad. franç. de H. Sinaceur avec introd. et notes (Paris : Seuil, 1993), « Sources du savoir ».

(31) Voir Sinaceur, 1994.

- 1975 *Einleitung zur Grössenlehre und erste Begriffe der allgemeinen Grössenlehre*, écrit posthume éd. par J. Berg, in *Gesamtausgabe* (Stuttgart-Bad Cannstatt : Fromann-Holzboog), ser. II, A 7.
- 1976 *Reine Zahlenlehre*, écrit posthume éd. par J. Berg, in *Gesamtausgabe* (Stuttgart-Bad Cannstatt : Fromann-Holzboog), ser. II, A 8.
- 1992 Propositions et représentations en soi, texte extrait de *Einleitung zur Grössenlehre und erste Begriffe der allgemeinen Grössenlehre*, trad. franç. de J. Sebestik, in *Logique et fondements des mathématiques : Anthologie (1850-1914)*, sous la dir. de Philippe de Rouilhan et François Rivenc (Paris : Payot), 15-19.
- CAVAILLÈS Jean
- 1938 *Remarques sur la formation de la théorie abstraite des ensembles* (Paris : Hermann), 32-34, 67-72.
- 1946 *Bulletin de la Société française de philosophie : La pensée mathématique*, 40^e année.
- 1947 *Sur la logique et la théorie de la science* (Paris : PUF) ; 2^e éd. (Paris : PUF, 1960), « Bibliothèque de philosophie contemporaine », 19-26.
- DUMMETT Michael
- 1991 *Les Origines de la philosophie analytique*, trad. franç. de Marie-Anne Lescourret (Paris : Gallimard).
- HUSSERL Edmund
- 1929 *Logique formelle et logique transcendantale*, trad. franç. de S. Bachelard (Paris : PUF, 1957), § 26.
- KAMBARTEL F.
- 1963 *Grundlegung der Logik*, extrait des deux premiers volumes de *Wissenschaftslehre* (Hambourg : Felix Meiner Verlag).
- KOLMAN Arnost
- 1963 *Bernard Bolzano* (Berlin : Akademie-Verlag).
- LAZ Jacques
- 1993 *Bolzano critique de Kant* (Paris : Vrin).
- MORSHER Edgar
- 1973 *Das logische An-sich bei Bernard Bolzano* (Salzburg-München : Anton Pustet).
- SCHOLZ Heinrich
- 1937 Die Wissenschaftslehre Bolzanos, in *Mathesis universalis* (Bâle-Stuttgart : Benno Schwabe & Co., 1961), 210-267.
- SEBESTIK Jan
- 1990 Article BOLZANO de l'*Encyclopædia universalis* (Paris : Encyclopædia universalis).
- 1992 *Logique et mathématique chez Bernard Bolzano* (Paris : Vrin), « L'Histoire des sciences ».
- SINACEUR Hourya
- 1973 Cauchy et Bolzano, *Revue d'histoire des sciences*, XXVI/2, 97-112.

- 1974 Les voies de l'analyse classique, *Critique*, 327-328, 697-715.
- 1975 Bolzano est-il le précurseur de Frege ?, *Archiv für Geschichte der Philosophie*, Band 57, Heft 3, 286-303.
- 1994 *Jean Cavailles : Philosophie mathématique* (Paris : PUF), « Philosophies ».
- 1996 Bolzano et les mathématiques, in *Les Philosophes et les mathématiques*, Maurice Caveing et Évelyne Barbin (éd.) (Paris : Ellipses-Marketing), 150-173.
- VAN ROOTSELAAR Bob
- 1970 Article BOLZANO, in *Dictionary of scientific biography*, éd. par Charles C. Gillispie (New York : Charles Scribner'son), vol. II, 273-279.

hps

Historical
Studies in
the Physical
and
Biological
Sciences

**A journal of the intellectual
and social history of the
physical sciences and
experimental biology since
the 17th century**

Subscriptions: Individuals, \$27; Institutions, \$63

Single issues: Individuals, \$15; Institutions, \$33

Send orders to: University of California Press,
Journals Division, 2120 Berkeley Way #5812,
Berkeley, CA 94720-5812

FAX MC/VISA orders to: 510/642-9917

Tel 510/643-7154 • E-mail: journals@ucop.edu

<http://www.ucpress.edu/journals>

