



HAL
open science

DIAGRAMMES SYMBOLES ET MARQUES.

François Conne

► **To cite this version:**

| François Conne. DIAGRAMMES SYMBOLES ET MARQUES.. 1997. halshs-01133329

HAL Id: halshs-01133329

<https://shs.hal.science/halshs-01133329>

Preprint submitted on 19 Mar 2015

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

DIAGRAMMES SYMBOLES ET MARQUES.

François Conne

1997

RESUME

Episode 5/5¹ de la série « Des dénombrements à la division euclidienne ó Activités numériques élémentaires à l'école primaire » diffusée par la revue Math-Ecole, invitant le lecteur à suivre le fil des montages symboliques accompagnant ces apprentissages à l'école et caractériser les activités scolaires selon les dispositifs associés (Conne 1987, 1988).

Dans l'épisode précédent la notion de diagramme était proposée (inspirée d'une distinction faite par M. Gardner dans son ouvrage : *L'étonnante histoire des machines logiques*. À partir de là, exposé complet des régimes de traitement symboliques dans les calculs assistés par un diagramme en colonnes et en particulier sur la distinction fonctionnelle entre symboles numériques et marques, ou traces laissées par le calculateur au cours de son calcul. Conséquences que cela a sur le traitement des erreurs en classes, et sur la gestion de règles de calculs et d'explications de différents niveaux tous susceptibles d'aider les élèves à maîtriser ces techniques.

MOTS CLES

mathématiques, didactique, dénombrement, comptage, calcul, traitements symboliques, dispositifs formels, diagrammes, symboles, marques, analyse de productions d'élèves, algorithme, opérations

INTRODUCTION

a. À rédiger

Portée très générale, apports spécifiques, tous les savoirs-faire, du pliage du linge, au tango, en passant par le vélo, le ski, le tour du potier, l'usage de logiciels, etc. Pas d'étude fouillée de ce qui se passe dans calculs en colonnes.

b. Projet

Dans l'idée de décrire le fil des diverses opérations numériques, je serai amené à rendre visible bien des aspects implicites des calculs assistés par un diagramme. Il y a sans doute une nécessité à ce qu'ils soient implicites dans le calcul et par conséquent cette explicitation n'est pas destinée aux élèves. Mon analyse va en quelque sorte à contre-courant du processus que l'on promeut en classe. C'est en fait ici que réside la principale difficulté à décrire les algorithmes. Ceux-ci sont en effet tout construits, pour rendre les opérations les plus *automatiques* possible. Mon propos est ici de décrire ce qui se noue à leur propos et non pas d'amorcer une description possible de leur acquisition. De plus, adopter un point de vue prescriptif dans cette description, ce serait décrire un automate, ce que le sujet ne sera jamais. Ici au contraire, je cherche à rendre compte des tribulations que le sujet doit traverser avant d'être seulement comparable à cet automate (le pauvre). J'en suis arrivé aux considérations qui vont suivre lorsque j'ai voulu comprendre l'impact et voir les limites de tels apprentissages sur la constitution et la formation des connaissances numériques.

Les calculs assistés présentent une différence qualitative avec les calculs moins formels (calcul mental ou calcul réfléchi, etc.) dans le fait que le régime symbolique s'y enrichit notablement. Certains symboles y représentent l'organisation même des actions à entreprendre,

¹ Ce cinquième épisode fût annoncé dès 1988, période de publication des épisodes précédents. Il est repris plusieurs fois et prend sa version actuelle en 1997.

d'autres, les données à traiter, et d'autres y figurent enfin comme des marques jalonnant le cheminement que le calcul représente. En particulier ces derniers, marques ou traces du calcul, qui ne sont finalement que des témoins de l'action transformatrice des données, prennent un relief tout particulier pour les explications. Elles servent en effet de repères aux actions qu'il s'agit de justifier. Dans l'échange didactique, les marques ont donc le double statut de traces des actions effectives et d'indices pour l'intervention didactique. Les marques prennent donc une valeur particulière qui va bien au-delà de leur utilité dans le calcul. Ce phénomène se manifeste dans le foisonnement de systèmes de marquages dont font preuve les pratiques enseignantes et tel qu'on peut le voir dans les manuels, dans les cahiers ou encore sur les copies des élèves et les annotations des maîtres.

Formellement, on peut soutenir que les marques restent liées à l'action et n'ont pas à prendre de signification intrinsèque. C'est la façon la plus économique au regard de l'action, le calculateur gardant pour lui, c'est-à-dire sans en donner de signe explicite, ce qu'elles signifient. Il résulte de cette idée que, dans les nombreuses études sur les calculs écrits et en particulier sur les erreurs, on ne porte pas d'attention suffisante aux notations et traces laissées par les élèves. Mon expérience montre qu'elles sont très informantes des pratiques de ce que le sujet a tenté de faire, et je conseille à tout enseignant d'apprendre à les interpréter. Elles sont encore plus informantes sur les pratiques d'enseignement, car dans tous les cas que je connais l'enseignement du calcul opte pour un traitement tout autre que purement formel. Pour bien comprendre ces traces il faut aussi bien connaître les notations préconisées par les enseignants. Ces notations, avec leur part de convention, varient fortement selon les lieux et les époques. Pourtant, si on examine ce qu'elles cherchent à rendre, on retrouve de grandes constantes. Leur importance réside aussi dans le fait qu'elles nous indiquent comment les enseignants ont fait le lien entre le montage d'actions à apprendre et les explications données aux élèves. Ainsi, il n'est pas rare que l'on demande aux élèves de suivre des règles de marquage rigoureuses, en particulier on est attentif à ce que ces signes réfèrent le plus possible à des nombres.

Voilà comment, en classe, les marques et les symboles laissés par le calculateur renvoient tout autant au déroulement du calcul qu'à l'explication de la méthode. Tout se passe comme si, quelles que soient les données, donc les circonstances du calcul, le calculateur devait pouvoir expliciter et justifier chacune de ses actions. Cette insistance que l'enseignement met à promouvoir un usage rigoureux des marquages contraste fortement avec l'indifférence des enseignants et des chercheurs à interpréter exactement les traces des calculs de leurs élèves. Il m'a paru donc nécessaire d'étudier cette question avec soin.

I. DIAGRAMMES

a. Extension d'une base de calculs

C'est à un niveau très élaboré d'actions et d'écritures que nous invitent les calculs en colonne, ou selon que j'aime à les appeler, les calculs assistés d'un diagramme. Pour bien comprendre cela, faire une analogie avec la numération est éclairante.

Au niveau élémentaire, un important changement est marqué dans les modes de désignation des nombres et des quantités lorsqu'on passe à un système de numération cohérent et rigoureux (comme la numération chiffrée), qu'il s'en suit que ce mode de désignation s'impose comme général pour l'écriture des nombres, et que par conséquent, on ne cesse de s'y référer. C'est, pour les calculs cette fois, un même passage qui mène de la foison des calculs numériques aux calculs en colonnes. Tout comme dans l'écriture chiffrée, où les symboles et leurs arrangements assument tous les aspects du nombre, le diagramme de calcul en colonne prend en charge tout le calcul quel qu'en soit le déroulement effectif.

b. Diagramme

Définition² de l'encyclopédie Larousse : « *Diagramme* : *graphique représentant l'évolution, les variations d'un phénomène, d'un processus déterminé.* »

Ici donc le processus est bien le calcul et son déroulement. Le diagramme est le symbole du calcul. Rétrospectivement, depuis l'invention des calculateurs, nous pouvons considérer que le diagramme est une machine logique ou numérique. En ce sens, je reprends la proposition que faisait M. Gardner dans son ouvrage : *L'étonnante histoire des machines logiques* (Gardner 1964). Dans notre cas, je dirai qu'un diagramme est une image schématique inachevée, qu'il s'agit de compléter en fonction de l'opération indiquée et des données inscrites. Le diagramme sert de support aux diverses opérations élémentaires à effectuer et dans ce sens il représente la dynamique de l'effectuation de ce calcul. Dans l'étagement des activités numériques élémentaires, et dans la hiérarchie des symboles associés, je considère le diagramme comme le symbole du calcul pris dans son entier déroulement.

Cette idée de faire du diagramme un symbole revient à considérer que les éléments traités et le programme sont de même nature. Je rejoins ici ce qu'écrit J. Arzac à propos de Von Neumann, dans son livre intitulé : *Les machines à penser* (Arzac 1987). Je cite : « Une firme américaine demanda au mathématicien John Von Neumann de proposer un schéma de machine à calcul extrêmement puissante. Il prit pour guide le fonctionnement même du cerveau humain, qui a deux fonctions essentielles : mémoriser des informations, les traiter. L'ordinateur devait donc être organisé avec une mémoire et une unité de traitement. L'idée fondamentale de Von Neumann fut que le programme commandant le fonctionnement de la machine devait être enregistré dans la mémoire (...). Toutes les machines ont été construites sur ce schéma. De très nombreux chercheurs ont dénoncé les faiblesses des machines de Von Neumann et cherché autre chose. Aucun n'a encore réussi, quarante ans après. »

c. Remarques

1. Le diagramme est lui-même objet de traitement. Par exemple, de la part du pédagogue qui présente, selon une séquence voulue, les quatre opérations arithmétiques, inscrites dans des diagrammes voisins. Autre exemple, on fait faire aux élèves de 5P et 6P des reconstitutions de calculs et de leurs données, à partir de diagrammes partiellement complétés. Troisième exemple, les énigmes que sont les cryptogrammes, du type :

$$\begin{array}{r} \text{SEND} \\ + \text{MORE} \\ \hline \text{MONEY} \end{array}$$

Dans tous ces cas, les diagrammes sont à considérer non seulement comme supports d'effectuation, mais sont à prendre comme représentant un calcul à reconstituer.

2. La relation diagramme-calcul est conventionnelle mais pas totalement arbitraire, puisque l'organisation du calcul doit en faciliter l'effectuation et le contrôle. Il y a donc plusieurs diagrammes possibles pour une même opération, et on peut très bien effectuer une opération sur le diagramme d'une autre. Le lecteur pourra s'exercer à calculer une multiplication sur un diagramme de division, ou vice et versa.

² Dans ses recherches sur l'algèbre, années 90, G. Vergnaud a quant à lui proposé le terme de *script - algorithme*. Je ne vois pourtant aucune raison de recourir à un tel néologisme lorsque nous disposons dans la langue courante d'un terme technique aussi approprié.

3° Toutes ces analyses ont un caractère général qui dépasse l'exemple des calculs en colonnes. Ainsi pour les algorithmes sur boulier, le diagramme est le boulier, avec la transformation successive des configurations de boules, et les tables seront différentes, car elles engloberont diverses relations d'échanges : trois, par exemple sera représenté tantôt par 3 boules tantôt par (10-3) boules. Pour le boulier chinois, ce répertoire s'enrichit encore des combinaisons avec 5.

4° Dans des calculs sur des égalités, numériques ou algébriques, l'équation peut être considérée comme un diagramme. Le lecteur curieux de vérifier sa compréhension de mes propos pourra se demander par exemple quel est le statut des parenthèses.

II. ACTIONS ET SYMBOLES EN JEU DANS UN CALCUL ASSISTÉ PAR UN DIAGRAMME.

a. Ecriture et lecture

Dans les calculs assistés par un diagramme, la référence à l'organisation du calcul et à sa dynamique vient prendre une place primordiale. On peut dire que le diagramme est le support d'un processus univoque de constitution d'un calcul par des calculs élémentaires de base. L'algorithme analyse donc le calcul en opérations élémentaires et, à partir d'une donnée complexe, indique de manière univoque quoi faire avec les données et dans quel ordre procéder. Il devient alors primordial pour le calculateur de savoir où il en est, c'est-à-dire de repérer ce qu'il vient de faire, ce qui lui reste à faire. Ceci attribue aux symboles une triple valeur, selon les fonctions qu'ils jouent dans le diagramme :

donnée à lire : fournir les données des opérations élémentaires ;

résultat à inscrire : fournir les résultats de l'opération ;

curseur des actions : fournir les **indices** de la succession des actions à effectuer. Et ceci :

- tantôt en tant que donnée, en indiquant l'action à effectuer (par exemple une retenue) ;

- tantôt en tant que résultat, en indiquant que l'action prescrite a bel et bien été effectuée.

Cette triple (ou quadruple) valeur (fonction, signification) du symbole, est fort bien révélée par la multiplicité des symboles représentant zéro. On observe en effet pour ce nombre un éclatement symbolique tout à fait particulier selon ses différentes interventions dans le calcul : *0*, *blanc*, *point*, *trait*, *décalage vers la gauche*, etc. Autre exemple, l'ambiguïté des coches (traits) qui peuvent se lire comme de simples marques ou comme des unités, ou comme le signe 1.

Lorsqu'il remplit la fonction de curseur, le symbole se réduit à n'être qu'une marque ou une trace de l'action. Les symboles des nombres en jeu (données, résultat) jouent ce rôle, mais parfois aussi des symboles auxiliaires, comme par exemple une coche utilisée pour se souvenir, une retenue, une *ration* (i.e. une trace qui biffe un chiffre), etc.

b. Les trois moments du calcul

Le calcul assisté d'un diagramme commence par l'inscription, la pose ou l'organisation des données dans le tableau. Les conditions d'utilisation sont alors définies (par exemple, respecter l'alignement vertical, en colonne des chiffres de même position dans les nombres de la donnée). Le calcul assisté se termine par un indice de fin non ambigu, correspondant au fait que l'ensemble des données aura été pris en compte, et que le tableau sera entièrement complété. Le

fait que cet indice puisse être implicite - par exemple : le nombre de chiffres du résultat est implicitement déterminé par le nombre des chiffres des données ou par le nombre de décimales prescrites - ne diminue en rien la clarté de l'indice de fin. Bien entendu cet indice doit pouvoir être correctement identifié. Cela suppose un apprentissage de la part du futur utilisateur.

Une fois le diagramme complété, une relecture des résultats partiels successivement inscrits livre le nombre cherché. Cette relecture est une opération à part entière que maints élèves omettent d'effectuer. En général, cette omission est parfaitement justifiée par la situation de l'exercice de calcul elle-même. À cette occasion en effet, on demande à l'élève de produire un résultat et on ne lui demande pas d'en faire quelque chose. Dans ce cas, le résultat est là pour permettre la sanction du maître, mais il n'a pas de valeur pour la situation de calcul elle-même. On comprend pourquoi, en première instance il sera négligé par le sujet au profit de la méthode de calcul elle-même qui a retenu toute son attention. Dans ce contexte scolaire, de toutes manières et quelle que soit la sanction, le résultat ne sera pris que comme l'indice d'un calcul (correct ou erroné).

Ces considérations suffisent amplement à justifier l'idée que le diagramme est bien le symbole du calcul pris globalement. Il convient maintenant d'examiner le rôle des symboles et des marques qui viennent s'y inscrire selon ce point de vue, et non plus seulement vis à vis de leur signification numérique. Le diagramme organise le déroulement qui va de la pose du calcul à la lecture du résultat, en passant par une suite assez strictement ordonnée de sous-opérations. Chacune de ces opérations est susceptible de recevoir une interprétation numérique per se. D'un autre côté, chacune de ces opérations prend une signification en regard du calcul dans son ensemble et du but poursuivi en premier. Nous verrons comment une explication établit l'équivalence entre les significations per se et les significations pour la méthode de ces opérations. Je dis bien **une** explication, car pour un même algorithme, il est possible d'en tenir plusieurs qui se recourent.

En résumé, le calcul en colonnes opère sur deux plans :

- au plan du traitement du nombre,
- au plan de la coordination des effectuations élémentaires.

Ces deux plans donnent des points de vue distincts pour l'interprétation des opérations en jeu, et par là des significations distinctes aussi. Il s'agit de dire non seulement à quoi sert la machine, mais encore de quoi elle est faite.

c. Un diagramme engage quatre types d'actions au moins.

Les considérations précédentes nous montrent que le calcul assisté d'un diagramme poursuit deux finalités :

- a) faire fonctionner le diagramme jusqu'à l'achèvement de son parcours ;
- b) déterminer les éléments partiels constitutifs du résultat final.

Quant au but général du calcul, il est complètement assuré par la méthode et le théorème mathématique qui la valide. Pour réaliser cela, les traitements symbolico-numériques associés sont de quatre types au moins.

1. Le parcours dans le tableau (diagramme)

Tout d'abord il y a un diagramme qui assiste le calcul. Cela implique un ensemble d'actions qui se rapportent à lui. (Dans le cas du calcul avec machine, le calcul numérique se limite à ces

opérations diagrammatiques : frappe des données, lecture de l'affichage.) Ces opérations se retrouvent d'un algorithme à l'autre. Ainsi :

- l'inscription des données et des résultats, lecture de colonne à colonne, etc. ;
- le découpage du nombre en colonnes de chiffres comme dans l'addition-soustraction ; avec une variante pour la multiplication, et différemment encore pour la division et la racine carrée ;
- l'abaissement des données dans le diagramme ;
- le décalage des produits partiels ;
- l'ordre des opérations ;
- les opérations de retenue ;
- l'inscription des résultats partiels ;
- etc.

2. Les mises en relation présidant à l'effectuation des calculs de base

Le second type d'actions en jeu consiste en des mises en relation des données numériques, découpées ou regroupées selon l'organisation diagrammatique, afin de déterminer si les conditions des sous-opérations de base sont réunies ou s'il convient au préalable d'apprêter ces données. Telles sont la comparaison des chiffres d'une colonne dans la soustraction, la comparaison du reste avec le diviseur dans la division, la mise en correspondance des positions des chiffres dans la multiplication ou dans la division, etc.

3. L'apprêt des données pour l'effectuation des sous-opérations

Le troisième type d'actions en jeu est celui qui porte sur une modification des données, soit en fonction des résultats antérieurement obtenus, comme c'est le cas de la retenue de l'addition, soit en fonction d'une transformation préalable de la *disposition* des données pour rendre le calcul colonne par colonne possible (en soustraction, on joue sur les dispositions de la numération se permettant d'inscrire un nombre à deux chiffres dans une même colonne, en division, on lit plusieurs colonnes à la fois). Du point de vue du calcul numérique, ces modifications (soit par modification par adjonction de symbole ou réécriture, soit par modification de ce qui est pris en compte dans la lecture) doivent être *franches*, c'est-à-dire qu'elles ne doivent pas affecter les nombres représentés par les données. Cette neutralité est assurée par le fait qu'il ne s'agit que d'un jeu d'écriture / lecture qui ne transforme pas les unités parce qu'elles sont compensées par des transformations exactement inverses. Les retenues, emprunts et autres, sont des actions de ce type.

Ces transformations portent soit sur la forme des écritures, soit sur leurs dispositions (figures) dans le diagramme, elles ne doivent pas altérer les nombres représentés. **Elles ne sont pas toutes visibles.** Ces actions peuvent être considérées comme des traitements de la numération. On peut en rendre compte selon différentes interprétations, et si pour les expliquer on peut effectivement les considérer comme des opérations numériques à part entière, elles n'ont cependant de sens que localement dans le cadre du parcours du diagramme. Je reprendrai ces considérations plus loin.

4. Les sous-opérations de base

Le quatrième type d'actions ce sont les calculs proprement dits, effectués sur chaque unité de découpage (en général colonne par colonne). Je les qualifierai de calculs de base de l'algorithme.

Par exemple, la soustraction en colonnes

Prenons la méthode dite des emprunts, expression à laquelle quelques québécois préfèrent le néologisme de *dégroupement*. On inscrit les données et décompose leur prise en compte, colonne par colonne, de droite à gauche (1er type). Les opérations de base (4ème type) sont des soustractions (ou complémentations) portant sur des nombres sis entre 0 et 19. Une comparaison préalable des chiffres inscrits en colonne, allant du haut vers le bas du diagramme, détermine s'il y a lieu ou non d'engager une transformation de la donnée du haut (2ème type). C'est donc une comparaison numérique qui indique la nécessité ou non d'un emprunt (3ème type). Enfin une fois le résultat déterminé, on l'inscrit et le lit de gauche à droite (1er type). Il faut bien comprendre que les opérations du 3ème type sont intermédiaires entre les opération de 1er et de 2ème type (par exemple la lecture de haut en bas, comparaison dans cet ordre des données) et les opérations du 4ème type (exécution des soustractions de base).

Remarques

1. Il y a risque de confusion entre tous ces types de traitements, et ce, d'autant plus que, pour des raisons de concision dans les calculs, c'est-à-dire d'économie de l'action, les algorithmes les font alterner. On verra que ces distinctions sont importantes pour la signification attribuée aux transformations effectuées.

2. Tous ces traitements sont sous le contrôle des traitements numériques qu'ils doivent faciliter. Cela veut dire que la validité de leur recours est limitée aux conditions que requièrent déjà les opérations numériques. Cette remarque mérite qu'on s'y attarde un petit peu.

Par exemple, dans une soustraction, lorsque dans la colonne traitée on se trouve avec un chiffre plus grand en bas qu'en haut de la colonne, on pourra recourir à un ajustement dit *d'emprunt*. Le contexte dans lequel s'inscrit ce recours assure qu'il ne prétertera pas la suite des calculs, par exemple en les rendant impossibles (impasse). Ainsi, aucun emprunt ne pourra occasionner un report infini sur la gauche du diagramme (même si rien n'empêche que ce report puisse être très long). Ce *garde-fou* est assuré par la condition générale à laquelle est soumise la soustraction, à savoir que le nombre inscrit en haut du diagramme doit être supérieur à celui qui est inscrit en bas. Dans ce cas, la première colonne du diagramme qui, depuis la gauche présente deux chiffres distincts, aura nécessairement le chiffre du haut supérieur au chiffre du bas. À ce point on est assuré que les emprunts cesseront (quand bien même ils n'auraient pas cessé avant).

J'ai développé cet exemple pour que le lecteur mesure bien ce que **implicite** veut dire. Permettez-moi d'anticiper ici sur ce que je développerai à propos des explications. Le fait que l'action de l'emprunt soit en tous les cas contrôlée par les conditions du calcul empêche de connaître cette action pour elle-même. Comment voulez-vous en effet que le sujet puisse se douter de l'éventualité d'un report **infini** de l'emprunt vers la gauche si les conditions de ses calculs l'excluent pour lui et si ces conditions font qu'au moment où l'emprunt est motivé, la suite de son calcul reste pour lui **indéfinie** ? Dit autrement, il faut, si on veut comprendre la nature de ces ajustements, sortir du cadre du calcul, c'est-à-dire en lever les conditions générales. Pour le sujet cela peut facilement prendre valeur d'arbitraire ou / et de transgression d'une règle. Le mot *transgression* n'est pas trop fort. Par exemple, c'est bien ainsi que le vivent les enseignants lorsque vous leur demandez de proposer aux élèves d'effectuer des calculs impossibles ou inusités.

On n'insistera jamais assez pour dire que tout ce contexte est quasiment donné au niveau le plus simple des actions requises. Ces conditions si difficiles à rendre en langage écrit ne sont que la conséquence du fait d'avoir bien inscrit au haut du diagramme le nombre le plus grand et

d'avoir respecté les alignements verticaux. Si cette simple disposition (numérale) est assurée, alors le calcul *marchera* et il ne sera pas nécessaire de connaître l'emprunt comme une opération en tant que telle. Le diagramme a bien le caractère d'une machine qui *fait les choses à notre place*.

3. Ces distinctions sont suffisamment générales, pour se retrouver dans d'autres traitements mathématiques, comme le calcul algébrique par exemple. La finalité du calcul est d'aboutir à une certaine simplicité des expressions mises en équivalence. On distinguera entre autres l'effectuation ou la mise en facteurs des expressions écrites d'un côté ou de l'autre du signe égal, qui n'altèrent que la forme de ces expressions, et les transformations de l'équation elle-même, qui laissent invariante l'égalité, mais altèrent les expressions mises en équivalence. Ces actions sont engagées à la suite de la détermination de configurations spéciales des écritures ou en vue d'obtenir de telles configurations. Là aussi, les sortes de traitements alternent.

d. Le parcours du calcul dans le diagramme n'est pas univoque.

Le diagramme de calcul en colonnes reste un support à l'action et aux relations qui l'accompagnent. Il s'y réalise un enchaînement d'opérations dès l'instant où les données y sont inscrites. Mais selon la forme des données et suivant les détours qu'elles imposeront au calcul, plusieurs parcours pourront en résulter. Le diagramme balise les points de décisions à prendre dans l'effectuation du calcul. Cette idée que le diagramme renferme potentiellement plusieurs déroulements du calcul, donc si on le veut plusieurs heuristiques, est fondamentale. C'est là-dessus d'ailleurs que se sont ancrées les premières recherches en problem solving de Newell et Simon (Simon 1974).

e. Le parcours du calcul dans le diagramme n'est pas linéaire.

Toujours sur l'exemple de l'algorithme de soustraction, on peut le représenter de deux façons, soit par une arborescence, c'est-à-dire que, ne pouvant effectuer qu'une seule opération à la fois, il est parfois nécessaire de geler une opération pour permettre d'achever une autre, soit par un parcours récursif (moyen de linéariser un parcours arborescent), comme a démontré Van Lehn (Van Lehn 1988). À chacune de ces représentations, une version classique pour expliquer et noter les calculs. La méthode dite des *emprunts*, d'une part, celle des *retenues* de l'autre. Il y a toutes les chances que le lecteur connaisse ces deux versions et les retrouve au détour des deux notations suivantes. Si ce n'était pas le cas qu'il consulte alors divers manuels scolaires d'hier et d'aujourd'hui.

$$\begin{array}{r}
 1 \\
 (2) \overset{1}{3} 8 \\
 - \underline{57} \\
 181
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 2 \overset{1}{3} 8 \\
 - \underline{157} \\
 181
 \end{array}$$

Dans le premier cas on apprête la seule donnée du haut, 238, en *échangeant* une centaine contre dix dizaines, on *prélève* une centaine des deux centaines de 238, et on *adjoint* à 3 dizaines pour en faire 13 dizaines. C'est la méthode dite (aujourd'hui) *des emprunts* qui définit un parcours linéaire des opérations, mais qui oblige le curseur à effectuer quelques navettes (boucles récursives) dans les colonnes du diagramme. La propriété mise en œuvre ici est la numération, soit la composition / décomposition d'un nombre en multiples de puissances de dix.

Le deuxième cas est appelé, méthode *des retenues* ou encore *par compensation*. Ici on se réfère à une propriété de la soustraction que l'on combine avec un jeu sur la numération. La

propriété est que si on ajoute aux deux termes d'une soustraction un même nombre, on n'altérera pas le résultat. Dans l'exemple ci-dessus, on a *augmenté* le nombre du haut de dix dizaines (comptabilisées dans les dizaines), tandis qu'on a *ajouté* une centaine à celui d'en bas (comptabilisée dans les centaines).

Les deux méthodes ont leurs adeptes. On pourrait croire que la première est la plus simple, parce que sa justification paraît plus à la portée des enfants. Mais les exemples de calculs inventés par des élèves novices, tels que les rapportent Madell (Madell 1978) et Labinowicz (Labinowicz 1985) sont plus proches de la seconde méthode. Peu importe ces discussions oiseuses. Je me contenterai ici de montrer que chacune des méthodes peut devenir délicate à utiliser selon le type de données. Comparez donc :

$$\begin{array}{r}
 1 \quad 9 \quad 11 \\
 (2) \quad (10) \quad (2) \quad 15 \\
 - \quad \quad \quad 2 \quad 8 \\
 \hline
 1 \quad 9 \quad 9 \quad 7
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 2 \quad 10 \quad 12 \quad 15 \\
 - \quad 1 \quad 12 \quad 8 \\
 \hline
 1 \quad 9 \quad 9 \quad 7
 \end{array}$$

Le lecteur se rend bien compte des télescopages occasionnés par les marques d'emprunt dans la première méthode, alors que les retenues de la seconde suivent toujours le déplacement des colonnes. Mais voici maintenant un cas plus favorable à la première méthode :

$$\begin{array}{r}
 1 \quad 9 \quad 11 \\
 (2) \quad (10) \quad (2) \quad 15 \\
 - \quad 1 \quad 9 \quad 9 \quad 7 \\
 \hline
 \quad \quad \quad 2 \quad 8
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 2 \quad 10 \quad 12 \quad 15 \\
 - \quad 1 \quad 19 \quad 19 \quad 7 \\
 \hline
 \quad \quad \quad 2 \quad 8
 \end{array}$$

La difficulté, dans le second cas, consiste à penser que : *neuf et je retiens un c'est dix*, et que la fin du calcul peut se dire : *1 de dix à deux, je ne peux pas ; de dix à douze, deux, je retiens un ; neuf et je retiens un, dix ; de dix à zéro, je ne peux pas ; de dix à dix, zéro, je retiens un ; un et je retiens un, deux ; de deux à deux, zéro ; 1*

Remarque

Les expressions qui accompagnent ces calculs selon ces méthodes sont très éclairantes de l'atmosphère du calcul. L'expression *j'emprunte* indique bien une dette, que cette opération sera compensée, elle est prononcée à l'occasion d'un report d'une colonne à une autre. L'expression *je retiens* indique plutôt une mise en mémoire momentanée de quelque chose.

f. Les symboles associés aux calculs en colonne : tableau, chiffres, marques et traces

Les symboles que l'on inscrit dans le diagramme reflètent à la fois ce qui est mis dans la machine et les transformations qu'elle opère. Alors que les actions numériques de base sont signalées par leur résultat, c'est-à-dire les nouveaux symboles numériques qu'elles ont permis de *calculer*, les actions intermédiaires (que j'ai parfois qualifié de numérales) sont, pour une part, invisibles lorsque, par exemple, il s'agit d'une opération de lecture, et pour une autre part manifestées par un marquage du diagramme. En fait lorsqu'on examine des calculs effectués par des sujets, on voit des marques, des traits, des simples points laissés par le stylo se surajouter aux grilles du diagramme et aux chiffres des nombres en jeu (données et résultats). Ces signes sont soit de simples traces laissées par le parcours du calculeur, soit des marques à fonction

mnésique inscrites afin de se repérer, ou de ne pas oublier une action à faire plus tard - *une retenue* - ou encore d'indiquer un apprêt effectué préalablement à un calcul.

Ainsi pour reprendre l'exemple de la soustraction en colonnes, la marque de l'emprunt n'a pas valeur d'explicitation mais seulement de manifestation lorsque l'on estime nécessaire de rendre visible cette opération, une sorte de *lampe témoin inscrite au tableau de bord*.

Lorsque je parle de *marque*, j'ai en tête les techniques de marquage en physiologie, par exemple, lorsque l'on veut tracer le cheminement de telle ou telle substance dans un organisme. Ici le mot *marque* pourra avoir tantôt le sens de *marque* pour une action à venir ou de *trace* d'une action passée.

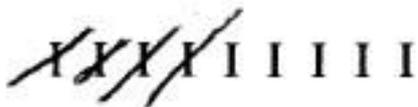
Ici intervient une particularité qui requiert une attention soutenue de la part du calculateur (ou de celui qui veut interpréter le calcul écrit par quelqu'un d'autre). J'ai déjà mentionné que certaines actions n'étaient pas *visibles*, c'est-à-dire ne s'accompagnaient pas de traces ni de marques. Or dans le cas des aménagements des données (actions de 3ème type), on se contente souvent de ne **marquer qu'une seule des deux transformations qui se compensent**. Par exemple, dans l'addition en colonne de deux nombres, le couple de transformations compensées consiste en *couper le résultat à deux chiffres obtenu pour ne garder que le chiffre des unités d'une part, et reporter le chiffre des dizaines (en général 1) de ce résultat au-dessus des données de la colonne suivante (à gauche) d'autre part*. La première opération n'est pas marquée, elle ne laisse pas de trace, tandis que la seconde est marquée par une *retenue*.

Remarque

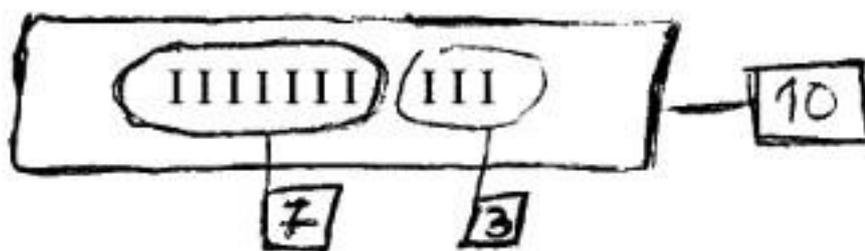
La distinction *marque* / *symbole* est essentielle pour qui veut décrire et comprendre les activités en classe élémentaire de mathématiques. Je l'ai montré dans mon travail de thèse (Conne 1981). Dans leurs opérations spontanées, les élèves en viennent très facilement (quasi naturellement) à y recourir. Il n'y a par ailleurs aucune difficulté à leur faire adopter les signes proposés par l'école. Par contre, il est plus rare de les voir s'en servir pour exprimer ou fixer des relations, et pour y appuyer leurs recherches. À ce titre l'observation qui m'a le plus frappé, fut de voir avec quel naturel des enfants de 7 ans utilisaient des coches pour leurs comptages, additifs ou soustractifs. Par exemple avec entourage



pour exprimer et calculer $7+3$ et obtenir 10 ; ou encore



pour exprimer et calculer $9-4$ et obtenir 5. Mais au même moment ils devaient apprendre à utiliser le diagramme ensembliste,



et ne se l'approprièrent pas. Pourtant, et c'est ici que je m'étonnais, toutes ces notations sont totalement équivalentes.

g. Les symboles associés au calcul en tant qu'objets d'actions ou de mises en relation, et marques ou traces du calcul

Dans des constructions aussi élaborées que les calculs en colonnes, le même symbole peut selon les moments de l'effectuation remplir différentes fonctions. En ce qui concerne les chiffres des données, ils sont soit pris en compte pour des mises en relation (ou examen de configuration, par exemple en division), soit pris en compte pour des transformations (calcul de base ou apprêt des données). D'autre part, les chiffres trouvés comme résultats d'une des opérations partielles sera, relativement à cette sous-opération, d'abord un résultat numérique : élément du répertoire auquel le calculateur aura référé cette opération élémentaire (quantité de coches comptées, configuration de doigts obtenue dans le comptage, élément de la table numérique rappelée, mais aussi quantité incrémentée ou décrémentée, ou quantité dont on cherche le correspondant à la dizaine) - mais ensuite il jouera aussi un rôle cursif : indice sans valeur numérique indiquant que cette étape de la résolution a bel et bien eu lieu (la case est remplie, la retenue est faite). Enfin, soit à titre d'élément constitutif de la formation du résultat final du calcul, soit à titre de résultat intermédiaire devenant donnée pour un calcul ultérieur, il endossera à nouveau une valeur numérique.

Exemple de la soustraction : qu'en est-il des retenues ?

Comme je l'ai expliqué, en ce qui concerne le calcul et son effectuation, les retenues jalonnent son parcours et ont valeur de marque d'une action d'apprêt. Tant que l'enjeu est l'exactitude du résultat et l'efficacité du calcul il en sera ainsi. Par contre dès le moment où l'on associe à ce calcul une explication, voire une démonstration, on va attribuer une valeur numérique à ces marques, et de là elles seront écrites en symboles numériques. Ainsi cela se manifeste souvent par de petits changements dans ces marques, on n'écrit plus seulement des traits (cursifs), ou des bâtons (à mi-chemin entre un trait et un nombre), mais on écrit distinctement le chiffre 1, ou encore 10, etc. Lorsqu'enfin l'enjeu en classe est de contrôler que l'élève non seulement a réussi, mais encore que sa performance témoigne vraiment de sa compréhension (de l'explication), on lui demande d'écrire ses retenues lisiblement, en les alignant bien, ou encore sous la forme de symboles numériques (10 inscrit au-dessus du chiffre de donnée est préféré à 1 écrit devant ce chiffre, c'est-à-dire à sa gauche). Ces marques ont donc une valeur hybride car elles sont référées aux deux modèles mis en présence : celui du diagramme qui opère et celui des explications qu'il comprend (*elles font le pont* entre ces deux modèles).

III. SIGNIFICATIONS DANS LES CALCULS EN COLONNES.

L'algorithme réalise une extension d'effectuations partielles et élémentaires de l'opération, portant sur des données simples (de base). Une telle extension n'a en principe pas d'autre limite que la finitude des pas de calcul (colonnes). Je parle d'extension pour souligner que cette description suit l'ordre de constitution des connaissances, et par là des significations.

a. Les actions numériques de base ont un sens global.

Ce n'est pas fortuitement que j'ai utilisé l'expression *de base* pour qualifier ces opérations. Il ne s'agit bien entendu pas exactement de la base de numération. Mais il y a entre les deux une évidente filiation. La base de numération est le réservoir de symboles (chiffres) dans lequel on puise pour écrire tous les nombres (selon le principe de numération de position). La base de l'algorithme est le répertoire de résultats élémentaires connus dans lequel on puise pour effectuer tous les calculs (selon le principe de l'algorithme). Bien entendu, le principe de l'algorithme exploite le principe de numération de position. Il en découle donc que la base pour l'algorithme est la table de l'opération, c'est-à-dire le répertoire des calculs sur les chiffres de la base de la numération³.

L'effectuation des opérations numériques de base se fait hors diagramme. Si nous représentons le parcours du calcul comme une arborescence, nous dirons que nous nous trouvons maintenant à l'extrémité des branches. Lorsque le calcul est confié à un automate, ces sorties se font par simple appel de mémoire à une table numérique préenregistrée. Si l'on veut programmer le calcul proposé aux élèves comme Van Lehn a pu le faire pour la soustraction dans sa modalité emprunt (Van Lehn 1988), on recourra comme opération de base à la table des soustractions des nombres de 19 à 0, des actions de remplacement d'un nombre à un chiffre par son *correspondant à la dizaine* (au nombre à un chiffre : N, on fait correspondre le nombre $10+N$) et les actions de *décrément* des chiffres (par lesquelles on associe à tout chiffre non nul son prédécesseur, et à 0, le chiffre 9 - cette dernière opération étant particulièrement délicate à expliquer à l'élève et occasionnant de nombreuses erreurs). Les tables sont des répertoires de relations numériques qui sont listées comme des données indépendantes les unes des autres. Formellement donc, les calculs assistés par un diagramme font appel à un régime mnésique pauvre.

Remarques

1. Le sujet humain devra mémoriser ces tables, et ceci ne se fera pas tout seul. Les observations courantes montrent que pour réaliser ceci l'apprenti recourt à un répertoire bien plus large et structuré que ne le stipulerait la simple nécessité formelle.

2. Toujours en ce qui concerne les opérations numériques de base, pour l'automate comme pour le sujet humain, rien n'empêche de substituer une procédure de calcul adéquate à cet appel des tables numériques. Pour l'apprentissage, cela joue un rôle essentiel de présentation, d'ancrage dans les pratiques acquises, et d'explication. Ce recours aux tables est plus à considérer comme une **épuration** de la procédure que comme une procédure de base se complexifiant. L'apprentissage va vers une économie des opérations et abrège autant les opérations numériques que numérales. Voilà pourquoi l'ordre de l'apprentissage n'est pas l'ordre formel le plus trivial. Le développement des habiletés comptables va vers une forme toujours plus épurée (rodée) par le biais d'une différenciation toujours plus forte des faits numériques évoqués. **Ainsi donc, du point de vue cognitif, et didactique, c'est la diminution de ses confusions, et non l'augmentation de ses performances qui est l'indice le plus significatif de la progression de l'apprentissage d'un sujet.**

³ Le cas de la division est intéressant. En effet ses opérations de base ne sont pas des divisions, mais les trois autres opérations : 1. les multiplications, 2. les additions qui leur sont associées, et 3. les soustractions / compléments pour déterminer les *restes*.

b. Les mises en relation et les actions d'apprêt ont un sens local et spécifique.

Les symboles numériques inscrits dans le diagramme seront *analysés* au cours du calcul. De même que pour calculer avec des nombres relatifs, on calcule séparément le signe du résultat et sa valeur absolue, de même le diagramme, distinguant dans l'écriture des nombres les coefficients (chiffres) et leur position, effectue séparément le calcul de la *position des chiffres du résultat* (par les alignements et les reports entre colonnes) et de la *valeur des chiffres à inscrire en telle position*. Cette analyse des symboles numériques implique que l'on apprête les données. Cela fait que les symboles numériques ne prendront pas exactement la même signification selon qu'on les considère au cours du processus de calcul ou en dehors de lui, c'est-à-dire avant ou après que le calcul ait été effectué. Par exemple, le chiffre 2 inscrit dans l'écriture d'une donnée ou du résultat sera interprété et lu : *deux, vingt, deux cent*, etc., selon la place qu'il occupera. Pourtant, lorsqu'il sera considéré comme une donnée ou un résultat d'une des sous-opérations, il sera considéré comme *deux*, et seulement *deux*. Si l'on apprête les symboles numériques dans le but de décomposer le calcul, on n'apprête bien entendu pas les opérations d'apprêt, ni les marques qui les signifient. Voilà pourquoi les opérations d'apprêt de la donnée (par exemple soustraction) ou du résultat (addition) ont une signification univoque et locale. Leur rapport avec l'opération à effectuer est aussi moins évident que celui qu'entretient l'opération globale avec les sous-opérations de base.

Par exemple, voulant calculer 305 moins 48, dans le cadre du diagramme, et seulement là, on se permettra de réécrire 305 en 2/10/5, voire en 2/9/15. Peu importe ici de respecter les règles de l'écriture de position puisque ni 305, ni aucun de ses transformés ne seront plus à lire comme un nombre. Cette notation est spécifique de la soustraction par emprunt.

En effet, voilà qui apparemment est en flagrante contradiction avec ce qui est prescrit (et dans l'ordre des apprentissages de l'élève, avait été prescrit) pour l'addition.

$$\begin{array}{r} 257 \\ + \underline{48} \\ \hline 2915 \\ 2105 \\ 305 \end{array}$$
$$\begin{array}{r} 2915 \\ 2(10)5 \\ (3)05 \\ - \underline{48} \\ \hline 257 \end{array}$$

En effet, si dans l'addition, il ne faut pas inscrire 2/9/15, ni 2/10/5, c'est que cette écriture ayant valeur de résultat, on ne pourra pas la lire.

Remarques

1. Il s'agit donc en quelque sorte de recoller les ordres d'unités qui, au cours du calcul, ont été disjoints (en général à la faveur d'un simple découpage de lecture, donc d'une opération numérale ne laissant pas de trace). Bien entendu ce recollement peut se faire à divers moments, soit dans la foulée du calcul, comme on l'enseigne classiquement, soit en fin de calcul. Ceci est spécifique de la souplesse de l'écrit, comparé à ce qu'il en est dans des manipulations de dispositifs matériels (diagrammes matériels), comme par exemple un boulier.

2. Ceci devrait justifier les retenues en addition. Or, si on se rappelle l'observation courante selon laquelle les élèves ne lisent pas leur résultat de calcul, car rien ne le motive, dans l'exercice de calcul, on se rend compte du peu de portée de cette justification.

3. Ainsi donc un rapprochement superficiel entre addition et soustraction laisse entrevoir une incohérence.

4. Si on examine un peu plus avant la situation de l'élève on s'aperçoit que ce n'est pas tout. En effet, le sujet est totalement livré aux calculs qu'il a effectués. Le diagramme ne lui indiquera pas, de manière directement visible, si le résultat qu'il aura inscrit sera correct ou non. De plus il n'a pas les moyens pour se convaincre de la justesse de l'algorithme lui-même, sa preuve ne lui est pas accessible. Le voilà donc obligé de faire confiance à ce que l'enseignant lui indique, et peut-être en sa capacité à bien le comprendre. On s'imagine alors très bien qu'il en vienne à obéir aux prescriptions, sans se soucier de leur caractère arbitraire, croyant même d'emblée toutes les explications qu'on voudra lui donner. On comprend aussi qu'il trouve commode de cloisonner ses différents apprentissages afin de s'éviter tout ennui. Il n'a tout simplement pas les moyens de les surmonter.

Exemple: la soustraction en colonnes

Revenons aux actions d'emprunt et de reports (retenues). Elles portent sur les données déjà dissociées par le diagramme, elles ont valeur d'opération numérique transformant ces données, et elles sont commandées par des opérations numériques de base combinées à des comparaisons. Si on admet que le sujet laisse des marques (comme des ponctuations) pour des opérations qui concernent le parcours du diagramme, et qu'il laisse des symboles pour tout ce qui concerne la détermination du résultat calculé, on voit donc que les retenues sont des marques du calcul, mais des symboles pour les opérations qu'elles signifient. Ceci est manifeste pour qui analyse avec un tant soit peu de finesse les traces écrites laissées par les calculateurs (débutants ou non). On voit des chiffres, des points, des petits traits, des signes pas toujours clairs. Tantôt ils signalent une opération déjà effectuée (exemple a), tantôt ils rappellent une opération à faire (exemple b) :

exemple a

$$\begin{array}{r} 2 \quad 9 \\ (3) \quad (10) \quad 15 \\ - \quad \underline{2 \quad 7} \end{array}$$

exemple b

$$\begin{array}{r} 3 \quad 0 \quad 15 \\ - \quad \underline{12 \quad 7} \end{array}$$

La disposition même de ces marques peut avoir une signification: 15 écrit en haut, voudra dire quinze (numération), tandis que 12, écrit en bas, voudra dire 3 (addition). On retrouve ce véritable jeu se permettant même de transgresser les règles de représentations numériques. Ces marques s'accumulent et encombrant les diagrammes, et il va falloir apprendre tantôt à les prendre en compte, tantôt à les ignorer. Dans certains cas, le sujet devra apprendre à s'en passer (pour la division, par exemple, les marques des soustractions).

Je répète que les marques ne servent qu'à apprêter les données en vue de l'effectuation des calculs de base. Elles sont des indices des transformations en cours qui, lorsqu'ils doivent être expliqués, reçoivent une signification numérique locale et univoque. Nous voyons le risque de confusions pour qui n'aurait pas saisi la distinction à faire, en matière de calcul écrit, entre opérations numériques de base et opérations d'apprêt et il les prendrait pour ce qu'elles ne sont pas. Cette question nous ramène à une autre : les apprêts sont-ils de pures opérations figuratives, ou bien sont-ce des calculs numériques à part entière ?

Comme je l'ai dit, ces opérations vont par paires d'inverses, assurant ainsi l'inaltération des nombres des données et des résultats. En fait elles sont comme ces actions d'écartement ou de resserrement dans la célèbre épreuve de conservation du nombre (Piaget), simplement à un niveau symbolique tout autre. Ceci montre que des opérations que l'on peut interpréter numériquement peuvent pourtant être tout aussi franches que des réorganisations de jetons. Ainsi additionner dix à une colonne se fait en *accolant le signe 1 devant le chiffre considéré* et en lisant cela comme une *écriture à deux chiffres* et augmenter cette colonne d'une dizaine se fait en *augmentant de 1 le chiffre de la colonne sise directement à gauche de la colonne considérée* (prendre le suivant dans la liste des chiffres, ou en jargon anglicisé: incrémenter ce chiffre). Ces actions sont très simples à effectuer et même tellement simples qu'elles peuvent revêtir un caractère faussement mystérieux ou magique. Il y a aussi le passage délicat, lorsqu'il s'agit bien sûr de prendre le successeur de 9, soit 10, ce qui répercutera l'incrémenter deux colonnes plus loin. Ici, l'interprétation numérique de ces opérations numériques peut s'avérer nécessaire pour expliquer la manœuvre.

Remarques:

1. Dans le cas de la méthode de soustraction par retenue - comme dans l'exemple donné tantôt, 2025 moins 1997, passer de la donnée 9, en bas, à son incrémentée : 10 - place le calculateur devant la situation exceptionnelle de devoir opérer avec un nombre à deux chiffres dans le bas et l'oblige, *passer à la dizaine* avec le chiffre d'en haut de la colonne correspondante. Cela l'oblige à une retenue dans la colonne suivante, en bas. La situation devient franchement bizarre lorsque le chiffre d'en haut est lui-même un zéro. Dans ce cas, l'opération de base sera dite : *de dix aller à zéro, je ne peux pas ; de dix aller à dix, zéro, et je retiens 1* ; La trivialité de l'opération de base n'empêche pas qu'il faille faire une retenue.

Dans le cas de la méthode de soustraction par emprunts, comme dans l'exemple donné tantôt, 2025 moins 1997, un chiffre 0 en haut finira par être remplacé par un 9, mais pas avant que l'on ait puisé dans la colonne précédente (à gauche), c'est-à-dire que l'on ait diminué sa donnée de une unité (décrémenté).

2. Ces opérations qui peuvent devenir de simples jeux d'écriture sont donc facilement automatisables. À ce titre elles peuvent se confondre avec les actions de base les plus élémentaires comme : ajouter ou soustraire 0, qui reviennent chacune à réécrire la donnée, ou comme : ajouter ou soustraire 1, qui reviennent respectivement à écrire le successeur ou le prédécesseur de la donnée. Il en est strictement de même pour la multiplication et la division. Par exemple, dans la multiplication, il s'agit de ne pas confondre l'opération d'écriture décalée des multiples partiels avec une multiplication par zéro, pour la division, de ne pas oublier d'inscrire au quotient les zéros intercalaires ou finaux, ni les résultats trop évidents. Pour des exemples, nos articles sur le sujet (par ex. Brun & Conne 1991).

En résumé

Les opérations d'apprent sont **franches**, et ce, à trois titres au moins :

- a) en tant que compensées, elles n'amènent aucune altération et ne nécessitent entre elles (entre opérations compensées) aucun ordre strict ;
- b) en tant qu'effectuées sur des registres d'opérations très simplifiées, augmentation ou diminution de 1, réécriture de données, décalages, etc., elles sont facilement assimilables ;
- c) certaines ne donnent lieu à aucun marquage et ne laissent aucune trace dans le diagramme.

Remarque

Pour l'algèbre, on passera encore un niveau plus élevé puisque les opérations d'apprêts des équations laisseront intactes les égalités, mais altéreront les termes de celles-ci. Les opérations sont en effet distribuées (au sens de *la distributivité*) de chaque côté de l'égalité. Cela suffit à assurer la compensation des transformations opérées. Ces opérations peuvent être considérées soit comme de simples écritures, soit comme des calculs auxiliaires (aux opérations de base).

IV. EXPLICATIONS DES CALCULS EN COLONNES.

a. Explication externes ou internes au diagramme

Le calcul assisté d'un diagramme combine différents types d'actions et porte sur des objets symboliques de différents statuts. Ici je ne m'intéresse pas seulement à l'explication de la méthode de calcul mais encore à l'ensemble des explications qui jalonnent leur présentation et leur apprentissage en classe. Il est en effet patent que les explications fournies durant la présentation de la méthode ne suffisent pas et que le maître est obligé d'y revenir à maintes reprises lors des leçons ultérieures.

Le but de l'apprentissage est que le sujet sache calculer, c'est-à-dire manipuler directement les symboles numériques pour effectuer les opérations requises. On vise donc des actions portant sur des objets spécifiques (des symboles) et s'organisant selon ses propres critères. Cet apprentissage exige une phase d'installation qui nécessite de lier les actions promues à des actions déjà connues de l'élève. Certaines explications visent essentiellement à établir ces étayages. L'apprentissage exige aussi une phase d'entraînement au calcul durant laquelle le sujet se centre sur les actions promues et leurs objets. Certaines explications visent à articuler et rendre solidaires les montages d'actions que cela représente. Les explications elles-mêmes comportent une part de verbalisations qui sont des actions langagières devant rendre compte des actions du calcul.

Cela dit, je considérerai deux types d'explications selon qu'elles lient les actions promues à des actions d'un autre registre ou qu'elles lient les actions promues entre elles (lors de deux ou plusieurs calculs effectués avec des données particulières). Je désignerai les premières par l'expression: *explications externes au diagramme*, **parce qu'elles réfèrent essentiellement à un modèle distinct du calcul**, par exemple, au traitement de quantités groupées, mais aussi à d'autres modalités de représentations, par exemple, d'autres façons d'écrire les calculs, etc.

Développons le premier exemple. Pour donner une signification moins formelle aux actions d'apprêt, on procède classiquement à des explications recourant par exemple à une interprétation numérique de ces derniers. Ceci n'a de valeur qu'à titre de modèle, ramenant le calcul des nombres écrits à des actions sur des quantités plus ou moins matérielles (de jetons, de blocs multibase, de boulier, etc.) et recourant pour ce faire à des dénombrements. Mais dans ces modèles aussi, hélas, apparaissent des actions de types divers (et au moins des 4 types décrits ci-dessus). Par exemple lorsque l'on procède à des groupements (regroupements en dizaines, par ex.) que l'on fait ou défait ou encore lorsque l'on recourt à des échanges. Ces traitements de l'organisation des quantités (jetons, blocs-barres-plaques du matériel multibase, boules-rangée du boulier, etc.) sont les **correspondants matériels** des actions écrites. Certains d'entre eux n'altèrent pas non plus les quantités manipulées mais seulement leurs dispositions. (On se contente de montrer que ça marche sans dire pourquoi.) Une raison que l'on peut avancer est que l'ordre dans lequel on groupe les éléments (*qui sont mis ensemble*) n'affecte ni la quantité ni son code. Ceci permet d'ordonner comme on veut les actions d'addition (plus généralement les transformations des quantités) et les actions de groupements (plus généralement les actions

permettant de dénombrer les quantités en présence). Pour beaucoup d'élèves mis en situation de grouper et coder, cela va de soi, du moins dans l'action. (Nous avons là ce que Vergnaud appelle un *théorème en acte*.)

Je désignerai le second type d'explication par l'expression *explications internes*, **parce qu'elles renvoient au diagramme lui-même**. Par exemple, les explications visant à situer les points où la méthode achoppe. Ainsi en addition lorsqu'on obtient pour une même colonne un résultat à deux chiffres, que l'on ne peut reporter sur le diagramme, et qui nécessitera une *retenue sur la colonne voisine, à gauche*. Ainsi encore en soustraction, lorsque dans une colonne le *chiffre du haut* étant inférieur au *chiffre du bas*, on explique le fait que l'on doit recourir à un emprunt (ou une retenue), ou encore lorsque l'on explique qu'*on n'a pas le droit de soustraire le chiffre du haut de celui du bas*. Ainsi enfin en division, lorsque l'on explique que faire au cas où le premier découpage du dividende serait inférieur au diviseur, etc.

On peut dire que les explications externes justifient les actions symboliques que le calcul écrit a trouvées, et visent à étayer le calcul en lui faisant correspondre une situation jugée plus élémentaire (selon le jargon pédagogique plus *concrète*) qui vient justifier la première. Et dire, en contraste que les explications internes décrivent les circonstances qui se présentent au calculateur et les problèmes qu'il va rencontrer - problèmes pour lesquels l'algorithme propose une solution ou impasses dues à des erreurs du calculateur, peu importe et que les explications internes régulent (régularisent) les actions promues en méthode tout en en élargissant le domaine d'application. L'étayage dit ce que l'on peut faire et la régulation dit comment le faire. On peut aussi observer, en particulier, que toute action d'apprêt (3ème type) trouve une double justification, l'une, interne - qui expose en quelque sorte le problème à résoudre - l'autre, externe - qui justifie la solution adoptée.

b. Les court-circuits par le recours à l'action

Il convient ici de faire une remarque importante. Je considère qu'un montage symbolique comme le diagramme d'une opération en colonne opère un *court-circuit* par rapport à d'autres pratiques de calcul (s'appuyant sur d'autres supports tels jetons, mains, abaques, bouliers, matériels multibases, etc.). En effet, on peut désormais calculer directement sur les quantités chiffrées (transcrites dans un système de numération de position) sans passer par toutes les actions requises par tel ou tel autre dispositif (comme ceux que j'ai évoqués ci-dessus). Je préfère le terme *court-circuit* aux termes presque synonymes de *raccourci*, *résumé* et même *schéma* car le calcul écrit, comme tout instrument, met en œuvre quelque chose qui lui est original. Bien sûr on peut lui faire correspondre les autres machines à calcul que l'on a pu inventer, mais on ne trouvera pas plus qu'une analogie de différents modèles. En tant que modèle, un diagramme ne reconduit pas tous les aspects de l'action matérielle, mais par ailleurs **il produit des actions et des aspects propres à lui-même**. Il n'y a donc pas seulement une réduction d'une certaine réalité aux commodités des transformations que l'on veut opérer mais aussi création et enrichissement.

Ainsi par exemple, la *retenue* dans l'addition est une action sur l'écrit qui peut être expliquée de diverses manières : en la référant à un regroupement d'éléments occasionné par la réunion de deux quantités groupées ; en la référant à l'échange sur un boulier de boules entre deux tiges adjacentes ; etc. La retenue est cependant une action d'une toute autre nature que les actions qui l'expliquent (extérieurement). C'est à proprement parler un jeu d'écritures (comptables). On peut lui attribuer la signification de *retenir une dizaine*, ou celle plus générale de *reporter une unité supplémentaire à comptabiliser dans la colonne adjacente à gauche*. Ces expressions décrivent la solution mais n'expliquent pas encore grand-chose, car dire la solution n'est pas dire quel est le problème. Celui-ci provient du découpage diagrammatique qui opère *colonne par colonne* et qui stipule que les données et les résultats considérés dans cette sous-opération sont réduits à la taille

d'un chiffre. Il se présente lorsque le résultat de l'addition est *un nombre à deux chiffres*. D'emblée on voit qu'une telle explication interne (au diagramme) nécessite la comparaison de diverses circonstances de calcul, rien moins que la prise en compte de la situation de calcul pour elle-même et pas seulement pour l'action.

La méthode de calcul écrit est un moyen commode de court-circuiter par des actions relativement simples et peu coûteuses les actions requises par les manipulations de quantités de jetons ou encore celles des boules sur les tiges d'un boulier, etc. Hélas, on voit qu'il n'en est pas de même pour les explications internes à développer. On n'évite pas un certain travail pour introduire l'élève à cette nouvelle réalité. L'analyse didactique des pratiques enseignantes montre alors qu'elles recourent à l'étagage (explications externes) dans l'espoir d'économiser les explications internes et cherchent à ce que les modèles d'actions puissent porter l'apprentissage. Nous avons donc affaire à un nouveau court-circuit d'ordre didactique cette fois.

Examinons par exemple ce qui se passe lorsqu'on recourt au modèle d'étagage des quantités groupées et codées (matérielles ou figurées par des *éléments* et des *groupes* - marqués par des croix que l'on entoure), comme le fait la méthode préconisée dans l'enseignement en Suisse Romande. On présente des quantités groupées que l'on réunit (addition) ou dissocie (soustraction) et l'on inscrit leurs codes dans un tableau. On transcrit dans ce tableau de code les différentes transformations que la réunion ou la dissociation des quantités comptabilisées impriment aux codes. (La description précise de ces actions et de leur ordre n'importe pas ici, bien qu'il existe plus d'une façon de procéder. Se pose bien entendu l'incontournable problème symbolique de représenter sur un même plan le tout et les parties.) Avec une telle introduction au calcul écrit, la retenue ne se présente plus comme la solution apportée à un problème issu du calcul écrit (en l'occurrence son découpage en colonne), mais elle se manifeste comme la trace, sur le code, des actions de réorganisation des quantités réunies (addition) ou dissociées (soustraction) : il est soit apparu un nouveau groupement (à partir des jetons isolés réunis), soit un groupement aura dû être défait dans la séparation du tout (d'où l'expression québécoise de *dégroupement*). De cette manière l'explication externe représente un court-circuit parce qu'alors la retenue est découplée des sous-opérations élémentaires (actions du 4ème type) du calcul écrit. En effet, la manipulation (des jetons ou des croix) les a rendues inutiles. Bien entendu, ce raccourci ne dispensera pas le futur usager de devoir apprendre à reconnaître directement sur le diagramme les conditions déclenchant l'action de retenue, mais selon la logique de cet enseignement, il ne lui restera qu'à apprendre à identifier les indices de la retenue, et non pas comprendre pour lui-même ce type d'action et les actions qui la conditionnent. L'analyse opérée par l'explication externe (cette dissociation que je viens de mentionner) fait perdre le lien fonctionnel entre la comparaison des données de la colonne (action de 2ème type), la retenue (action de 3ème type) et le calcul élémentaire (action de 4ème type) : on a abandonné l'idée d'un apprêt pour celle d'une banale comptabilisation (du nouveau groupement apparu ou de celui que l'on aura dû défaire).

Bien sûr ce lien fonctionnel devra nécessairement se (re)mettre en place au niveau des actions de calcul écrit, c'est-à-dire sur le diagramme. L'élève *ne perd rien pour attendre*, et il devra bien l'apprendre lorsqu'il s'y exercera. Et il le réapprendra encore s'il se trouve en posture de devoir l'expliquer à d'autres (en tant que répétiteur, parent, enseignant, etc.). On n'a donc fait que de repousser le problème selon une sorte de dérive explicatrice. Celle-ci provient d'un problème didactique extrêmement banal. Il s'agit de rendre le calcul intelligible pour le novice : expliquer est avant tout un appel à l'évidence. Estimant ne pas pouvoir se gagner les faveurs de cette dernière sur la base d'une explication interne, on glisse vers une explication externe qui se donne pour plus concrète. Je développerai ce point plus loin.

Soulignons alors l'aspect paradoxal de ce retournement didactique. Dans les représentations communes que l'école se fait de l'enseignement du calcul écrit, le modèle externe d'étagage, qui

n'est qu'un appel à l'évidence, est présenté et considéré comme un **retour à l'origine du savoir à enseigner**. Il suffit de restituer l'ordre historique de ces créations culturelles pour voir qu'il y a là un abus de langage. Il y a très longtemps, plusieurs siècles, certains inventeurs mathématiciens mettent au point *une* méthode originale de calcul écrit. (Cela a animé à son époque des débats entre abacistes et algoristes.) Bien plus tard, les didacticiens imaginent un (ou des) modèle externe d'explication. Ce (ou ces) modèle est une création ultérieure qui n'a jamais existé en tant que telle avant l'invention du calcul écrit. Certes une des fonctions du modèle est de rappeler les pratiques qui, suppose-t-on, sont à l'origine de ces techniques, mais sa fonction essentielle n'est pas là car on cherche avant tout à rendre la méthode évidente aux élèves, ou du moins à maintenir les enseignants dans l'illusion qu'un tel appel à l'évidence ne peut que réussir. On a affaire à ce que Y. Chevallard appelle une *naturalisation* de la méthode. Derrière cette idée, il y a une théorie psychologique (non dénuée de fondements, j'y reviendrai). L'invention didactique consiste donc en quelque sorte à *traduire à nouveau le diagramme* en une méthode dérivée, non pas méthode de calcul, mais méthode d'enseignement du calcul, une sorte d'algorithme explicatif. Ce nouveau dispositif vient court-circuiter à son tour la méthode de calcul promue, ou plutôt les explications qu'elle nécessite. C'est un bel exemple d'une de ces *boucles étranges* chères à R. Hofstatter.

Là en effet vient le paradoxe que C. Kamii (Kamii 1994) a parfaitement saisi. Si ce concret est si commode aux enfants pourquoi donc leur enseigner le calcul écrit ? Une telle question suffit à faire s'écrouler tout le *château de cartes* didactique. Rappelons quel était le sens de la manœuvre. On se donne le projet didactique d'introduire et faire exister le diagramme pour les élèves, c'est-à-dire les initier à de nouveaux objets et de nouvelles actions. Parmi les moyens développés pour cette entreprise, on préconise un certain type de références externes. **L'étayage par des modèles d'actions a pour fonction de porter l'élève d'un concret à un autre concret et non pas à le faire passer d'un concret (matériel ou iconique) à un abstrait symbolique qui ne ferait que le reprendre.**

Certes l'action, mais aussi l'évidence, ou encore l'intuition, toutes ces entités sont premières, mais elles le sont toujours quel que soit le niveau d'élaboration (certains disent abstraction) où l'on se place. Elles sont toujours là en première loge. Associées à tout, elles accompagnent forcément les origines, mais elles ne sont pas elles seules à l'origine des choses. C'est cette confusion entre primat de l'action et origine des savoirs qui produit le paradoxe.

Remarque

Ma description est incomplète. En effet, jusqu'ici, je n'ai pas encore mentionné un autre modèle d'action que représente celui des **verbalisations des actions demandées aux élèves**. Souvent d'ailleurs on confond ce dernier modèle avec les explications. Or une verbalisation, si elle peut remplir une fonction explicatrice, n'est d'abord que le compte-rendu des actes par une description en termes par ailleurs et par avance convenus. Une façon de dire un calcul ne l'explique pas encore. Il s'agit d'un autre registre symbolique encore que ceux que j'ai mentionnés qui se rattache ainsi aux calculs, et qui dès lors remplit tous les rôles que j'ai mentionnés à propos des symboles du registre écrit. Je ne développerai pas plus avant ce point, conscient du fait qu'ici ma description restera non achevée. Notons enfin que langage comme l'action s'immisce partout, par conséquent il est souvent difficile de départager dans ces verbalisations ce qui serait référence interne ou référence externe.

c. Les modèles d'actions assurent la conviction de l'apprenant, ça marche ! Comment ? Pourquoi ?

Un peu de déconcertation : je propose au lecteur d'imaginer ce que devient une division si on l'effectue *de droite à gauche*. Tous ceux à qui j'ai soumis cet exercice l'ont trouvé amusant. Ils étaient intrigués de voir si *ça allait marcher*. (Pour qu'une telle suggestion d'activité porte ses fruits, il suffit que pour son destinataire, elle prenne valeur de transgression. C'est un truc connu des matheux qui sont passés maîtres en matière de transgression et de déconcertation.) Le lecteur rencontrera un autre exemple plus loin dans le texte.

Je veux illustrer par cet exemple quelque chose de paradoxal : cette intrigue justement. Les personnes les plus intriguées par des méthodes alternatives de calcul semblent être celles qui ont le plus intériorisé un mode d'explication. C'est comme si leur surprise se mesurait à l'aune de la conviction qu'ils ont en leur propre méthode. Rien de surprenant me direz-vous, et jusque-là je vous le concède. Considérez cependant que leur compétence n'aura favorisé chez eux que leur étonnement à voir une autre méthode fonctionner et qu'elle ne leur aura pas fourni directement l'accès à d'autres façons de faire généralement très voisines (réduites parfois à n'être qu'une simple variation de diagramme ou de l'ordre des actions). Or ces mêmes personnes ne se contentent pas d'un seul savoir-faire, mais savent encore expliquer leur méthode. L'affaire n'est donc pas si banale. Nous devons nous demander d'où ces personnes tirent leur conviction. Et je répondrai : de l'action bien entendu. Ces personnes savent que *ça marche* et savent aussi *comment*, c'est-à-dire comment organiser leurs actes pour que *ça marche*, enfin, elles savent en rendre compte, soit directement, soit en se référant à des modèles externes. Leur déconcertation provient du fait qu'elles sont persuadées que les choses doivent se présenter comme elles en ont l'habitude pour que *ça puisse marcher*. Leur doute et leur étonnement proviennent du fait qu'elles ne reconnaissent pas ces conditions, leurs indices de contrôles sont négatifs. Elles pêchent donc par une sorte d'abus d'inférence. Peut-on dire qu'elles savent pourquoi leur méthode aboutit ?

Revenons sur les explications que l'on donne, par exemple à propos de telle ou telle action intermédiaire. On se contente de montrer sa compatibilité avec le calcul sans aller plus loin et dire ce qu'elle est (une action sur des symboles, en vue, ou en conséquence, d'un découpage du calcul). Dans le contexte du diagramme (explications internes), ces traitements sont pris pour des ajustements techniques, qui n'ont pas de valeur ni de signification au-delà de l'action. Ainsi sur l'outil de calcul on se contente d'une preuve pragmatique, par l'usage. On réserve en général la validation de la méthode à des modèles explicatifs non effectifs (explications externes). Faire ainsi n'épuise pas l'explication puisqu'il faudrait justifier le passage du modèle explicatif au modèle d'action, c'est-à-dire prouver qu'il est bien fidèle (qu'il a un caractère homomorphique). Les choses se corsent bien sûr lorsque des enseignants bien intentionnés veulent enseigner ces modèles explicatifs externes et qu'ils les font *agir par les élèves*, par exemple lorsqu'ils inventent les activités de *grouper / coder* des collections de jetons. Comment vont-ils alors expliquer l'explication ?

L'objectif est que l'élève développe un certain savoir-faire, et qu'il contrôle suffisamment sa performance. Cela nécessitera de sa part un certain entraînement. Comme je l'ai dit, on ne se privera pas d'explications pour gagner l'évidence et la conviction à la cause de ce processus. L'appel à l'action fait donc porter l'effet de conviction sur ce que G. Vergnaud appelle les *théorèmes-en-acte* des élèves. Et en ce sens, cette conviction sera bien réelle et motivée. Elle restera bien entendu soumise aux conditions qui président à l'action. De là le non transfert si souvent observé. On ne peut pas attendre non plus que le sujet reconnaisse d'emblée la valeur de ses propres *théorèmes-en acte* (il serait en général bien emprunté d'en rendre compte) et moins encore de les formuler comme tels.

Aller plus loin que l'acquisition de tels savoirs-faire, et les explications ad hoc de ces derniers, reviendrait à demander au sujet d'être capable de fournir une preuve de l'algorithme. Nous savons la difficulté que cela représente, au point qu'aujourd'hui, nous sommes forts surpris de voir que dans son manuel de calcul (Condorcet 1789), Condorcet propose aux néophytes de

telles preuves pour chacune des quatre opérations en colonnes. L'intérêt de ce texte réside cependant dans le fait que cela n'est pas donné tout seul, mais accompagne une véritable initiation des élèves à la démonstration. Condorcet y discute donc de cet appel à la conviction qui, tantôt viendra de ce que l'on fera remarquer aux élèves, tantôt viendra de l'expérience acquise en calcul. De nos jours, l'école a tout versé du côté de l'entraînement, c'est-à-dire du côté des activités que l'on propose aux élèves et des commentaires et explications que cela suscitera de la part des enseignants. Beaucoup de pédagogues sont persuadés qu'un appel à l'action **sur des objets matériels** (réellement mis à disposition pour manipulation ou seulement évoqués) entraînera cet effet d'évidence. Soit disant les manipulations d'objets matériels seraient plus proches de l'action. (À mon avis, le fait qu'il arrive que des élèves IMC arrivent à apprendre le calcul fournit un démenti à cette idée.)

En résumé, ce que l'on vise dans l'enseignement des algorithmes de calcul à l'école primaire n'est pas une démonstration de ceux-ci, mais seulement une compréhension suffisante de la part de l'élève basée sur la conviction. Démontrer l'algorithme nécessiterait que l'on considère les différentes actions pour elles-mêmes. Pour arriver à se défaire ainsi de l'action, il faut pouvoir se dégager du contexte dans lequel sa nécessité est apparue, et lever les conditions initiales du calcul. C'est ici que le point crucial réside, à mon sens, au recours à des modèles d'action (matérielle ou non). Dans l'enseignement traditionnel du calcul en colonne, on glisse toujours vers l'action : soit on arrive directement à enseigner le calcul par l'entraînement aux actions propres au calcul écrit ; soit (en cas de difficulté de l'élève ou s'il perd le fil des actions écrites, ou encore pour toute autre raison) on emprunte un chemin moins direct par la présentation d'un modèle d'action prétendument plus concret (généralement à support matériel).

d. Le caractère secondarisé des explications: reprendre, renouer, repriser.

Toute mon analyse part de l'idée que **dans l'interaction didactique**, l'explication est toujours seconde, elle est motivée par une difficulté rencontrée par l'élève dans ses actions (soit telle qu'elle se présente effectivement à l'enseignant, soit telle qu'il l'anticipe). Elle vise à restituer les conditions de l'action, éventuellement en réorientant l'activité sur d'autres modèles d'action qu'elle présentera comme associés. L'explication en ce cas n'a pas fonction de preuve, même si elle vise à gagner la conviction. L'enseignement veut promouvoir un développement de l'élève par l'action, pourtant lorsqu'il recourt à l'explication, il procède comme à rebours à la recherche d'un palier d'action sur lequel pourra s'amorcer l'apprentissage visé. Faisons bien attention de ne pas réduire l'explication à un simple acte de redite car il s'agit de bien plus que cela, à savoir une mise en référence de différents éléments. Dit autrement, l'action est toujours présente, et dans l'explication pas moins qu'ailleurs. Si pour l'enseignant, l'explication est une reprise, il n'en va pas de même pour l'élève qui est censé réactualiser les éléments qui lui permettront de reprendre le fil de son action. **Expliquer c'est donc reprendre, renouer, repriser.**

Cette question est pratiquement éludée dans l'enseignement parce qu'il se donne la fiction d'opérer **un développement, une construction progressive, une genèse, etc.** L'idée que l'on peut atteindre un commencement au développement de ces activités numériques ou que du moins elles s'étagent en paliers successifs devrait en effet pouvoir concilier les deux plans de l'action et de l'explication (relation). On parie donc que la régression des explications ne sera pas sans fin et qu'à défaut d'atteindre l'origine de tout, on aboutira du moins à un de ces paliers, une base suffisamment solide et concrète sur laquelle on pourra amorcer. Cette idée implique qu'il y aurait bel et bien un ordre entre les explications et qu'il y aurait quelque part un niveau élémentaire atteignable. Les autres modèles seront alors considérés comme des dérivations, voire des illustrations sur des plans différents présentant des abréviations commodes pour les besoins des traitements mathématiques. Du point de vue de l'explication cela suppose qu'une explication serait toujours fidèle à la chose expliquée, et qu'il n'y aurait pas lieu de justifier le rapport entre le

modèle explicatif et le modèle expliqué. Celui-là ne ferait que dévoiler des aspects cachés ou peu visibles de celui-ci.

Ainsi pour reprendre l'exemple des calculs en colonne, on présentera un modèle concret de collections de jetons groupés en base dix. On codera ces groupements. Opérant avec les jetons que l'on manipule, on montrera comment ces transformations matérielles affectent les groupements et les codages des quantités en jeu. Le calcul ne sera que le tableau de ces transformations des codes. On montrera comment on peut opérer directement sur ces écritures de manière fidèle, c'est-à-dire de sorte qu'il soit possible en quelque moment que l'on soit de revenir au modèle matériel. En d'autres termes on se contente de croire que pour le sujet tout commence avec les actions matérielles et que par conséquent l'écrit n'est **qu'une transcription fidèle et commode** d'actions requises par le modèle matériel. Le caractère naturel ainsi concédé aux écritures justifie à lui seul qu'il puisse être expliqué **sans autre** par le modèle matériel.

Rappelons, après tant d'autres, que s'il nous était effectivement donné de connaître l'origine ultime des opérations numériques, nous serions assurés de ne pas régresser sans fin d'une explication à une autre. Cela supposerait aussi qu'il y ait **un ordre univoque** entre modèles explicatifs qui ne seraient que des produits d'une unique dérivation. Et l'enseignement n'aurait qu'à suivre ce chemin tout tracé. Mais considérez donc que si tel était le cas, si le chemin était ainsi à sens unique, alors non seulement il n'aurait à être parcouru qu'une seule fois par chacun, mais encore il ne pourrait être reparcouru par personne. L'enseignement serait alors une entreprise inutile et impossible. C'est ce que nous disent les constructivistes radicaux qui auraient été bien inspirés de lire sur ce point la réfutation de cette idée par F. Gonseth. On voudrait donc faire de l'explication (de l'enseignant) une construction (de l'élève). (Si cela était possible, quelle sorte de mutant - de la pensée - créerions-nous ?)

Je le répète, les deux niveaux sont inconciliables et on ne peut considérer les explications et leur agencement que comme un accompagnement du processus d'enseignement et d'apprentissage, mû par les principes de l'action et de son organisation. L'ordre et la genèse fictive du savoir sont pour l'enseignement une explication de second ordre, une suite d'explications, donc une explication de l'explication. Aucun enseignant n'a besoin de la reconnaître (car il la connaît implicitement) pour produire des explications qui lui viendront spontanément et intuitivement dans le feu de l'action. Il suffit pour cela qu'il soit convaincu de leur évidence. La nécessité de cette idée de progression, de programme, disons-le, est de penser et d'organiser l'enseignement. C'est une commodité qui permet à l'école de ne pas se perdre dans la question de la régression sans fin des modèles explicatifs. Pratiquement il faut bien commencer quelque part et s'arrêter aussi lorsque l'on passe en revue les prérequis. Il s'agit sans doute d'une illusion efficace dans l'action didactique, une stratégie didactique visant à jouer l'économie dans les explications. Il s'agit de montrer comment on va porter l'élève plus loin. (Lui il faudra qu'il se laisse porter. Alors, lorsqu'il en sera arrivé là, il aura tout loisir, rétrospectivement de considérer autrement les choses, de trouver d'autres explications encore.) Mais dire ceci, c'est dire aussi que cela ne vaut pas plus, et l'enseignant ne devrait pas prendre pour une vérité ce qui n'est qu'une nécessité pratique. En particulier il est naïf de croire que cette commodité d'organisation de l'enseignement sera à même de prévenir les difficultés ultérieures d'apprentissage (et d'enseignement lorsqu'il s'agira de contribuer à ce que l'élève dépasse ces difficultés). Il est bien sûr plus conforme à la réalité de considérer que toute explication ajoute à la chose expliquée, ne serait-ce que parce qu'elle est toujours une reprise de quelque chose qu'elle ne peut remplacer puisqu'on ne peut totalement effacer ce qui a été préalablement fait. (Liée à cela, la valeur didactique incontestable et incontestée de l'explication par l'élève lui-même de ce qu'il a fait.)

e. L'explication comme lien entre *justification* locale des transformations et *logique* globale du calcul.

Comme nous l'avons vu, les marques ne répondent pas qu'aux nécessités de l'action, mais aussi à celles de l'explication ; et l'enseignement vise généralement les deux choses à la fois. Les marques deviennent alors l'objet d'interprétations qui leur conféreront une valeur numérique (du moins partiellement). La signification des opérations de base ne pose pas de problème, puisque, à l'exception de la division, elles sont les mêmes que l'opération globale qu'il s'agit d'effectuer. Par contre, les opérations d'apprêt n'ont qu'une signification locale. Pour les justifier, il s'agira donc de les introduire, de les expliquer, ceci afin de montrer leur signification au regard du calcul global.

Il suffira ici que je reprenne l'exemple des deux méthodes de soustraction en colonnes. Pour le cas de la division, le lecteur pourra se reporter à nos articles (par ex. Brun & Conne 1991). J'ai déjà mentionné la propriété qui préside à la méthode des *retenues*, elle s'écrit en langage algébrique :

$$\text{quels que soient } a, b, \text{ et } c \quad a - b = (a + c) - (b + c)$$

On ne l'utilise ici que pour le cas où $c = 10$, ou une de ses puissances, a et b étant les **nombres** donnés (et pas leurs chiffres). Puis on ramène ceci aux opérations de base, sur des *nombres à un chiffre*, en procédant à une première extension à quelques opérations entre *nombres à deux chiffres*. Enfin, on joue sur la valeur de position en opérant les retenues de façon décalées : sur les chiffres du haut de la colonne, ajout de *dix unités* ; sur ceux du bas de la colonne adjacente à gauche, ajout de *une unité*. Donc on ajoute ces dizaines ou puissances de dix sur des composantes bien choisies des nombres a et b . Notons pour terminer que cette explication justifie qu'un ordre assez strict, mais naturel, soit suivi dans les retenues, et cet ordre est celui du parcours de l'algorithme, de droite à gauche et de haut en bas. Le déclenchement de la paire de retenues s'opère toujours à partir de la droite. Ainsi l'ordre des retenues est directement couplé à celui du curseur dans le diagramme.

Dans le cas de la méthode dite des *emprunts* (ou *dégrouperments*), la justification est différente. Elle consiste à opérer la même compensation : *plus 10 vaut : moins 1 dizaine*, mais cette fois sur un seul de nombres donnés, celui du haut. La propriété générale sur laquelle on se fonde est la suivante, notée algébriquement :

$$\text{quels que soient } a, b, \text{ et } c \quad a - b = (a - c + c) - b$$

Cette méthode nécessite quelques fois des *emprunts en chaîne*, comme dans les exemples déjà donnés. Les opérations d'emprunt apparaissent de même nature que les opérations de base ou que des opérations plus élémentaires relatives au comptages, soit avec des jetons, soit sur des bouliers, soit sur des unités organisées en groupements selon une base donnée (celle de notre numération de position, ou une autre peu importe). En ce sens, et sous cette forme, l'explication externe de l'algorithme paraît plus élémentaire avec l'idée des *emprunts* qu'avec celle, plus abstraite, des *retenues*. Par contre du point de vue interne, le parcours des *emprunts* suit un ordre strict, qui est de *parcourir* les colonnes *vers la gauche*, puis de *redescendre* sans *sauter*, c'est-à-dire sans éluder aucune des colonnes *intermédiaires*. Ce parcours peut être long, mais surtout, il ne suit pas aussi directement (et simplement) le curseur du diagramme que ne le faisait la méthode des *retenues*. À ce titre nos observations sur les erreurs des élèves de 3P et 4P primaire, en Suisse Romande, montrent que cet ordre n'est que rarement respecté, du moins dans le calcul effectif. (Lorsque l'on demande à l'élève d'accompagner, ou de redire son calcul en l'assortissant d'une explication détaillée, cela suffit généralement à ce qu'il restitue cet ordre.) Je connais même une institutrice de 3P et 4P qui achoppe régulièrement à cette difficulté.

f. Encore des explications

Les considérations précédentes amènent à une question. Peut-on même dire que ces deux algorithmes sont différents ? Je ne vais pas ici discuter des critères qui permettraient de répondre à cette question. Je préfère considérer qu'ils sont très voisins. L'équivalence des apprêts des données est garantie par l'associativité et la commutativité de l'addition : un simple jeu de parenthèses et de déplacements du facteur c rendent les deux formules algébriques équivalentes :

$$a - b = (a + c) - (b + c) \Leftrightarrow a - b = (a + c - c) - b$$

Je préfère donc considérer qu'il s'agit de deux modalités de traitement, et d'explications. D'autres modalités sont encore envisageables, par exemple, en ramenant la méthode des emprunts à celles du boulier, ou à celle des groupements. En ramenant celle de compensation à un calcul numérique plus heuristique, jouant sur l'invariance de l'écart $(a-b)$ sous des transformations additives ou soustractives conjointement opérées sur a et de b Etc. Pour des exemples : Madell 1978, Labinowicz 1985, Kamii 1985, Conne 1987, Conne 1988

Pour qui ne serait pas convaincu qu'il s'agit là de variantes du même algorithme, voici un argument tiré de l'observation des erreurs des élèves.

Je vous propose donc de considérer une troisième méthode qui repose sur un recours encore différent de la même propriété. Par exemple, voulant calculer :

$$\begin{array}{r} 23258 \\ - \underline{1976} \end{array}$$

on procédera comme suit, en trois étapes. D'abord, on formera à partir du nombre à soustraire, ici 1976, un nombre formé des compléments à 9 de chacun de ses chiffres, ce qui donne ici, 8023. On additionne alors ce nombre au nombre du haut, ici 23258, ce qui donne 31281. Il suffira alors, pour obtenir la réponse cherchée, de diminuer d'une unité le premier chiffre de ce résultat intermédiaire (ici le 3 de 31281 devient 2), et conjointement d'en augmenter d'une unité le dernier chiffre (ici le 1 de 31281, qui devient 2). La réponse sera donc **21282**.

Pour ma part, et sans me souvenir que c'était une méthode de calcul avec les logarithmes (les co-logarithmes), je l'ai redécouverte lorsqu'en examinant une erreur d'élève, j'ai tenté de la valider par une sorte d'extrapolation. J'avais en effet remarqué que de nombreux élèves, dans leur emploi de la méthode des emprunts, tentaient d'anticiper ceux-ci et de les effectuer, une fois pour toute sur la donnée du haut. Par exemple, devant calculer :

$$\begin{array}{r} 23258 \\ - \underline{1976} \end{array}$$

qui demandera un emprunt à deux reprises (sur les 2 centaines de 23258, pour pouvoir opérer 15 moins 7 - dizaines - et sur les trois milliers du même nombre, pour pouvoir opérer 11 moins 9 - centaines), ces élèves préfèrent emprunter *partout* (soit sur les 2 dizaines de millier aussi) quoique ce ne serait pas nécessaire. Certains peuvent même essayer de le faire avant d'opérer quel calcul que ce soit, c'est-à-dire qu'ici, avant même de calculer 8 moins 6 (unités), qui pourtant ne requiert aucun emprunt, ils vont alors jusqu'à opérer 18 moins 6 (unités). Cette façon de faire se retrouve analogue pour la division écrite, lorsque le sujet doit décider *combien de chiffres au dividende il doit prendre* pour amorcer sa division (Brun & Conne 1991).

Bien que je ne me rappelle pas avoir rencontré de réponse suffisamment rigoureuse pour réussir ce calcul, il était alors naturel que je me demande ce qu'une telle procédure deviendrait,

si elle était systématiquement et rigoureusement appliquée. Dans l'exemple proposé ici, cette considération aboutit alors au fait qu'il suffit d'emprunter une dizaine de millier au nombre 23258, quantité que l'on répartira en 9 milliers, 9 centaines, 9 dizaines et dix unités, pour que, sans autre considérations, l'on soit assuré de la calculabilité de toutes les opérations de base requises par les données. Ceci permet alors de déterminer la réponse dès lors que l'on fait porter la soustraction de 1976 sur ce terme, équivalant 10000, et qu'on ajoute au reste obtenu, ce qu'il reste du nombre du haut, à savoir 13258. Ici on retrouve une méthode de soustraction préconisée par Condorcet (Condorcet 1789).

En relatant ce fait, je puis compléter le résultat de Madell (Madell 1978). Celui-ci a montré que des élèves pouvaient très bien s'inventer leur propre algorithme. Mais il n'a relaté, pour ce faire, que des exemples de réussites, qui, par feed-back de l'enseignement se sont trouvées sélectionnées. **Je montre que cette puissance d'invention se trouve aussi dans les erreurs, même dans des cas qui n'aboutissent pas, faute en général de reconnaissance par le système didactique mis en place.**

Mais il y a plus. **Il suffit de considérer algébriquement ce qu'on a fait pour voir que l'on est passé insensiblement de la version des emprunts à celle des retenues.** En effet le calcul s'écrit :

$$23258 - 1976 = (23258 - 9999) + (9999 - 1976). \text{ Ce qui s'écrit aussi:}$$

$$a - b = (a - c) + (c - b), \text{ ou, usant de la règle des signes : } a - b = (a - c) - (b - c)$$

En résumé, Pour ma part, je parlerai donc de **modulations d'un algorithme**, en me proposant alors d'élargir celles-ci jusqu'aux versions erronées qu'inventent les sujets apprenant à calculer.

g. L'explication ayant différentes fonctions, il vaut mieux considérer la multiplicité des explications que rencontrera le sujet dans son apprentissage.

Rien moins que la distinction entre une opération numérique et son calcul. **C'est donc une question de différenciation qui est en jeu et pas seulement d'assimilation.** Au départ, l'idée d'addition est assimilée à un dénombrement ou comptage, puis les deux plans se distinguent à la faveur qu'une addition donnera lieu à des comptages partiels d'ordre différents, le "schème de l'addition" s'est enrichi de comptabilisations diverses. Si de telles explications rendent plus "concrets" les calculs, si elles les illustrent, elles n'expliquent ni la raison des traitements numériques, ni les relations entre les deux versants du calcul, numérique et numéral. Pour que ce soit bien clair, je veux dire par là qu'en donnant le modèle d'un traitement de collection groupée, on présente le diagramme comme le résumé d'une suite d'actions concrètes, un schéma de ces actions. **Mais les actions sur le schéma ne sont pas, elles, les résumés des actions illustrées.** C'est en ce sens que l'apprentissage du calcul en colonnes passe par une reconstruction sur ce nouveau plan de réalité (symbolique) d'opérations proprement diagrammatiques, qui de ce point de vue sont des actions concrètes, des manipulations de symboles tout aussi construits que les objets matériels. À terme, ce plan viendra suppléer à celui des collections d'objets (matérielles ou figurées). Il y a donc des règles de ces actions sur la réalité diagrammatique et leur constitution nous est révélée par les erreurs des élèves et leur caractère systématique. Certes les règles de l'algorithme peuvent être dérivées de règles "d'autre nature", ayant cours sur d'autres plans de la réalité. Mais alors ce n'est jamais de manière univoque, il y a donc plus d'une façon d'en rendre compte. Ceci m'amène à considérer non pas une explication, ni un ensemble de règles mais bel et bien un système d'explications et un système de règles se répondant les unes les autres. L'enseignement du calcul consiste alors à parcourir ces systèmes. En matière de conception de manuels ou de formation des enseignants, on peut essayer non seulement de provoquer tel ou tel

parcours, mais encore de les organiser. Mais réduire cette organisation au simple exposé d'une dérivation paraît insuffisant et peu propice à répondre à la situation qui prévaut actuellement à l'école primaire.

V. USAGE: EXPERIENCES, REGLES D'ACTION, CONTROLES ET REGLES DE CONTROLE.

a. Expérience

Trois options, trois stratégies didactiques, pas nécessairement contradictoires, mais plus enchevêtrées que simplement complémentaires se présentent.

1. La première relie ces règles à la situation de calcul, à la faveur de la rencontre de cas un peu complexes, délicats ou problématiques. Cette option a pour avantage de présenter le lourd appareil qu'est l'algorithme comme méthode infaillible dans les cas difficiles. On peut les présenter comme des astuces techniques, visant à désengager le calculateur aux prises avec une opération trop complexe ou localement impossible. Le problème dans ce cas résidera que seuls certains cas nécessitent ces détours. Leurs règles n'ont alors pas de valeur générale, alors que l'algorithme serait à considérer dans toute sa généralité. De plus ces exemples ne délivrent pas les indices qui permettent de repérer ou d'anticiper ces cas plus délicats.

2. On peut établir ce lien avec l'expérience et l'entraînement au calcul. C'est ce que fait Condorcet dans son ouvrage (Condorcet 1789, édition 1989 chap. 7 et 8). On peut ainsi chercher à montrer qu'elles n'altèrent en rien les données et que leur valeur réside dans leur commodité. Ici le problème didactique réside dans le fait que ces règles pourront paraître *tomber du ciel*. De plus, l'effet escompté de commodité, ou de simplification a un prix : il va falloir apprendre la méthode. Difficile alors de convaincre d'emblée le débutant que cet investissement lui sera profitable.

3. On peut aussi tenter de donner une explication plus profonde, ce qui en fait en vient à reprendre, sous cette forme déguisée, la démonstration du caractère effectif de l'algorithme. La difficulté réside alors que l'algorithme n'est pas un montage anodin, mais use de façon assez subtile des propriétés des opérations, de la numération et des faits numériques. En d'autres termes, l'explication nous mène assez loin de la réalité de l'algorithme et du diagramme.

b. Contrôles

De manière générale, on peut dire que ce qui importe au calculateur lorsqu'il s'assiste d'un diagramme, c'est de s'assurer qu'il a fait ce qu'il y avait à faire plus que de savoir exactement ce qu'il fait. C'est pourquoi la méthode ne demande finalement que l'inscription de peu de symboles à la fois.

La troisième remarque ci-dessus prolongeait ce que j'avais dit des significations en jeu. Cette question est incontournable en didactique. Le calculateur, sujet, souvent élève, n'est pas un automate. Tout au plus, s'il a acquis une habileté suffisante, pourra-t-on le comparer à un automate, dans la mesure où sa maîtrise cache à l'observateur tous les détails des traitements qu'il effectue. Une telle analogie entre sujet expert et automate est une extrapolation. Par exemple, celle-ci consistera à oublier que les tables numériques auxquelles le sujet a recours, il a dû les apprendre, se les mettre en mémoire, et qu'elles ne sont qu'un noyau d'un répertoire bien plus vaste et connecté de ses propres connaissances numériques. Autre exemple, on omettra tout ce

qui fait le flair et l'intuition du calculateur, comme si c'était *un plus*, superflu, acquis relativement indépendamment du reste. Mais peut-on aussi sous-estimer l'assurance que ça lui donne ? Ou encore, parce que le calculateur sera toujours capable de reprendre son calcul, par retour en arrière, à tel ou tel branchement, sans que cela lui coûte un réel effort, on pourra croire, de l'extérieur, qu'il agit toujours selon l'ordre prescrit par la méthode formelle, etc. Mais quelle description pourrait inclure cette dimension non automatique ?

Revenons à l'enseignement et permettez-moi une évocation. Imaginons un instant la leçon d'interprétation musicale :

- "Voici comment on fait", dit le maître, et il interprète la partition. "à toi maintenant."

Mais ce n'est pas si simple pour l'élève, et, devant les difficultés, les problèmes particuliers que ce dernier rencontre, le maître se reprend :

"- Ah oui, ah oui, ça ... eh bien regarde comment je m'y prends, ... voilà essaye...ö

Et, ce faisant, le maître montrera son jeu, c'est-à-dire le jeu qu'il y a entre la prescription de la méthode, et sa propre exécution. Et ici, il sera donné à l'élève de connaître véritablement quelque chose.

En fait, l'exécution demande plus à l'élève qu'une simple effectuation. **Il doit contrôler son exécution.** Ceci seul lui permet de coordonner les différentes étapes du calcul. Et c'est bien cette exigence didactique qui nous empêche de nous contenter d'une description de règles prescrites. La méthode et sa description formelle sont donc à prendre comme des objets de transaction, et ce qu'elles suscitent les dépasse. L'enseignement lui non plus n'est pas un automate.

Un autre argument montre que la ressemblance à un automate est très limitée et réductrice. Les éléments sur lesquels nous nous basons pour reconnaître et engager nos calculs, ne se laissent pas aisément remplacer par d'autres formes (symboles, dispositions, etc.), et encore moins d'autres procédures. Pour les automates, il n'y a pas de problème de ce côté-là. Ils puisent leurs données en mémoire ; ils sont affranchis des significations ; substituer d'autres données, d'autres formes de données, remplacer d'autres procédures, pour eux, ce ne sont qu'une modulation dans un parcours de mémoire ; tout est découpé en opérations indépendantes, judicieusement ordonnées. Pour nous, au contraire, tout est noué aux concepts et représentations, que nous nous sommes forgés. Bien entendu, nous ne restons pas rivés aux significations premières qui ont été les nôtres, lorsque pour la première fois, on nous présentait ces méthodes. Naturellement, un travail s'est poursuivi parallèlement aux assimilations et aux développements de notre pensée. Ceci fait qu'au bout du compte, après maints exercices, nous avons constitué, spécifiquement pour ce type de tâche et la réalité qu'il recouvre, un système de significations propres, relativement autonome, qui nous dispense d'aller toujours rechercher jusqu'aux fondements ultimes des choses que nous traitons. Ceci n'en reste pas moins des connaissances bien signifiantes, dont nous gardons longtemps le souvenir.

c. Règles d'action et règles de contrôle

Les règles de calcul débordent largement les règles formelles de l'algorithme. En situation d'effectuer un calcul algorithmique, pour le sujet, les niveaux dégagés par mon analyse se présentent sur un même plan (cf. à ce propos aussi, ma thèse, Conne 1981). C'est une manifestation de son *non-automatisme*. Le niveau diagrammatique est si bien occulté qu'il faut de longues remarques, comme ici, pour en rappeler l'importance.

Un algorithme, par définition, se rapporte à toute une classe de *problèmes* qu'il résout. Du point de vue du symbolisme, qui est le nôtre dans toute cette étude, c'est le diagramme qui est le symbole, le représentant, le cadre de formulation même de ces problèmes. Par exemple : *trouver le résultat de 26 - 19* se reformule en un problème où on se demandera, entre autre, *comment ôter 9 de 6*, ou encore, *comment aller, dans la comptine, de 9 à 6*, et où la réponse sera : *on ôte 9 de 16* ou bien : *on va de 9 à 16* , mais préalablement à cela, il convient d'apprêter les données.

Si on entend par règle de calcul, toutes les règles que peut considérer un sujet en situation de calcul écrit, c'est-à-dire l'ensemble des règles qu'un sujet peut rencontrer, et générer, à la pratique de tel ou tel calcul en colonnes, alors il s'agit de distinguer les règles formelles, à valeur générale, des règles contextualisées. Dans une première approche des situations de calcul, on pourrait par exemple reformuler cette distinction comme suit :

- les règles d'application de la méthode, celles que l'enseignant lui prescrit de suivre ;
- la régularité des situations où il va se trouver. Ces règles peuvent ne rester que des règles d'action, ou être formulées, peu importe ici ;
- la régularité que l'élève s'impose de suivre ; etc.

Ce type de distinctions n'épuisera cependant pas la grande variété de règles que l'on peut observer. Non seulement tous les cas intermédiaires entre généralité et contextualité se présenteront, mais encore ces règles ne référeront pas toujours aux mêmes aspects de la situation, certaines présentant un fort caractère didactique, d'autres étant déjà plus dégagée du contexte d'enseignement. Enfin, il faudrait distinguer des règles *positives*, par exemple, dictant une prescription, de règles *negatives*, par exemple des interdits, et considérer encore toute la polysémie du vocable *negatif*. Une règle d'interdit n'est pas une règle d'évitement, etc.

Dans quelle mesure peut-on considérer qu'avec ces règles, il s'agit d'une connaissance numérique, ou que ceci serait du moins formateur de connaissances numériques ? Du point de vue de l'élève qui apprend, il part de la *réalité* présente. C'est-à-dire, qu'il se trouve plongé dans la classe de problèmes, au cœur du diagramme, il ne perçoit pas l'arbitraire de celui-ci. Les règles évoquées ci-dessus sont situées au *niveau manifeste* (cf. les deux articles du troisième épisode Conne 1988). En outre ce sont des règles de calcul, que l'on ne peut qualifier de numériques, qu'à condition de considérer que le calcul est nombre. Ce que je soutiens pour ma part. Mais pour le sujet, ce ne sont pas des règles numériques du genre de celles qu'il connaît, bien qu'elles renvoient de façon évidente à celles-ci.

Ceci revient à nous demander: **qu'est-ce qu'une erreur** ? Prenons un exemple. Un élève répond :

$$\begin{array}{r} 26 \\ - 19 \\ \hline 13 \end{array}$$

L'erreur ne provient pas du fait d'avoir opéré 9-6, le résultat trouvé (3) en est d'ailleurs correct. De plus, sous certaines conditions, le recours à ce calcul serait pertinent. L'erreur est d'avoir inscrit le résultat de ce calcul dans la case du diagramme prévue pour le résultat de l'opération : 26-19 (et non pas 9-6). Il en irait de même pour :

$$\begin{array}{r} 24 \\ + 19 \\ \hline 313 \end{array}$$

Dans les deux cas, l'opération effectuée est pertinente en regard du problème posé. Dans le premier exemple, 9-6 sera bien l'opération qui serait effectuée sur un boulier, c'est-à-dire sur un autre dispositif diagrammatique. Dans le second exemple, on effectue de toute façon cette opération, mais on l'inscrit autrement dans le diagramme. Ce n'est que relativement à la méthode de résolution préconisée que ces opérations ne sont pas valables, même si elles sont justes et vraies en elles-mêmes.

Ce genre d'erreur est inévitable, parce que la méthode et les règles manifestes qui la constituent s'appuient sur un fond de connaissances numériques que j'ai naguère qualifié de *niveau inférieur* (cf. les deux articles du troisième épisode Conne 1988) et qu'aujourd'hui je qualifierais de *niveau sous-jacent*. Dans $26 - 19$, l'élève devra, à un moment donné, calculer 7 et l'inscrire au résultat, dans la case des unités. Dans $24 + 19$, il devra calculer 13 et l'inscrire dans son tableau en reportant la dizaine. Ce que l'élève doit apprendre, c'est les conditions du recours à ce fond de connaissances numériques. Par exemple en les faisant dépendre des comparaisons des chiffres en fonction de leur position dans le tableau :

$$\begin{array}{r} 26 \\ -19 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 29 \\ -16 \\ \hline \end{array}$$

On voit dans ces cas que le niveau de connaissances est supérieur puisqu'on est amené, de toutes façons et dans quel enseignement que ce soit, à comparer des conditions ou des figures *manifestes*. Toutefois, ces conditions ne sont pas prises globalement mais seulement ponctuellement, selon le découpage voulu par le diagramme. Tant que l'on en est là, et cela suffit pour apprendre à manier correctement l'algorithme, l'impact sur la formation des connaissances numériques est faible. En effet, tout est sous le contrôle du diagramme ; et le cadre qu'il fournit pour la formulation des problèmes qu'il traite s'est substitué à ces derniers. Dit autrement, il convient d'éviter que l'algorithme se referme sur lui-même, à défaut de quoi, on n'aura appris qu'à manier la machine, en abandonnant le souci de connaître ce qu'elle traite, ce à quoi elle sert en définitive.

Sortir de ce palier, réside dans les modalités de contrôle que devra développer tout sujet qui use de ce type d'outil. Jusqu'ici, j'ai décrit comment la méthode était assimilée aux connaissances numériques élémentaires sous-jacentes ; puis comment l'inscription dans le diagramme amène à accommoder ces connaissances pour tenir compte des dispositions des données et des calculs. Il en résulte que les connaissances numériques sont devenues des connaissances de calcul. Je pense que les procédures de contrôle ramènent ces connaissances de calcul au plan numérique. En effet, qu'est-ce qui, en définitive, fait apparaître que le calcul suivant est faux ?

$$\begin{array}{r} 24 \\ +19 \\ \hline 313 \end{array}$$

Plusieurs contrôles numériques le montrent. On peut savoir, par ailleurs, que **$24 + 19$ fait 43**. On peut savoir que *jamais de la vie*, **vingt** quatre plus **dix** neuf ne feront **trois cent**. On peut se rendre compte que **trois-treize** n'est pas un nom de nombre, etc. Tous ces contrôles vont confronter le résultat produit et manifeste au plan des connaissances sous-jacentes.

Remarques

1. Cependant, ceci n'épuise pas les contrôles. Il y a des contrôles par niveau supérieur, en quoi consistent, par exemple, les raisonnements par l'absurde.

2. Ces contrôles, décrits ici comme actifs, se thématisent soit en méthodes de contrôle, autres types d'algorithmes, soit au travers de l'examen de questions comme celles-ci : Comment les connaissances numériques élémentaires interviennent-elles dans le calcul ? Comment les élèves assimilent-ils le calcul à leurs connaissances numériques ? Ou encore, si on examine les choses en regard au niveau supérieur des connaissances : Comment l'algorithme met-il en œuvre les propriétés structurelles numériques, associativité, commutativité, distributivité ? Etc.

d. Contraintes

Exemple de confusion numérique / numéral chez un élève.

Un élève de 2P aborde l'addition en colonnes. Il doit effectuer la somme suivante :

$$\begin{array}{r} 61 \\ + 62 \\ \hline \end{array} \text{ et il trouve, après hésitation: } \begin{array}{r} 61 \\ + 62 \\ \hline 15 \end{array}$$

On pourrait croire qu'il a effectué le calcul: $6 + 6 + 1 + 2 = 15$, mais c'est plus compliqué que ça. L'examen de son hésitation, de ses gommages, de ses autres erreurs et de ses explications montre ceci. L'élève a commencé par la droite, en calculant : $1 + 2$ et en inscrivant 3 dans la case correspondante du résultat. Puis il a passé au calcul de $6 + 6$, trouvé 12. C'est à ce moment qu'il se trouve embarrassé, ne sachant pas où inscrire ce 12 dans le résultat. Soit qu'il ne l'envisage pas, soit qu'il s'y refuse, il n'inscrit pas ce 12 à la suite du 3, sur la gauche. Pour lui, il y a 12, et pas une centaine, ni 12 dizaines et encore moins 120 unités. Il opte alors pour inscrire 12 comme 12 unités, il efface son 3, le remplace par un 2, se ravise et additionne les unités : $3 + 2$, et trouve 5. Lorsque je lui dis que soixante-deux plus soixante-trois, ça ne peut pas faire seulement quinze, il est tout à fait d'accord. Mais il rajoute qu'il n'a pas écrit 15. Je lui demande de lire son résultat, le voilà embarrassé. Il cherche à m'expliquer ce qu'il a fait...

On voit bien dans cet exemple, que l'élève a compris les traitements numériques élémentaires, somme des chiffres d'une même colonne, qu'il a aussi compris qu'il s'agissait d'obtenir la somme de 61 et de 62 (qui ne peut pas faire 15), mais que, faute de comprendre les traitements numériques et les limites de leur signification, il ne contrôle pas le calcul global.

Bien entendu cet indice doit pouvoir être correctement identifié et appris. L'exemple d'erreur que j'ai donné ci-dessus illustre justement la question. Si l'on veut suivre l'élève, on se penchera sur la **contrainte que l'élève semble s'être donnée**, contrainte fautive qui lie la longueur de l'écriture du résultat à celles des données, par exemple, en assignant au diagramme la dimension (nombre de colonnes) de la plus grande des données du calcul (nombre de chiffres). Pour prendre un nouvel exemple, cela donne pour $732+547$, le résultat de 279, au lieu de 1279, comme si l'alignement des deux données à trois chiffres prescrivait un résultat à trois chiffres. Nous avons pu observer à plus d'une reprises ce type d'erreur, et sous différentes modalités (c'est-à-dire associées de façons diverses aux traitements). Nous connaissons d'autres exemples aussi pour la division.

VI. LES DEUX VOIES DE L'APPRENTISSAGE DU CALCUL.

Les *calculs numériques relationnels*, définis dans l'épisode précédent (Conne 1988) et que certains auteurs désignent sous le vocable de *calculs réfléchis*, réalisent, eux aussi, une extension de calculs numériques élémentaires, portant sur des données simplifiées. De même, ils mettent en œuvre des contrôles. Mais l'algorithme donne un **moyen univoque** de réaliser ceci. C'est un modèle standard de décomposition d'un calcul complexe en une séquence de calculs simples. Cette univocité permet une réduction à une forme, un moule, et opère un tri parmi les relations redondantes, réexploitables (mises à disposition) pour les contrôles. L'algorithmisation du calcul est une standardisation de la variété des opérations numériques, au travers d'une symbolisation plus élaborée. Pour le sujet, et du point de vue de la charge de mémoire, il s'opère alors un délestage. Non pas tant parce que la richesse globale des relations en jeu diminuerait, mais parce

qu'une grande part d'entre elles sont fixées (et figées) dans le diagramme, et n'ont plus à être recontextualisées par le calculateur. Elles adviennent localement et temporairement, au moment propice. Ainsi le sujet lie-t-il ses connaissances au dispositif (milieu), et son expérience des situations de calculs devient partie intégrée (intégrante) de ses connaissances.

Il y a donc bien une différence dans le régime numérique entre calculs symboliques et calculs assistés. Les calculs symboliques s'associent de relations connues, parmi lesquelles, selon la situation, le sujet choisit celles qui lui paraissent devoir lui simplifier ses données. Ces relations, nous l'avons aussi bien vu sont très riches, et descendent à des niveaux plus ou moins fins de symbolisme. Au cours de son apprentissage, le sujet se constitue un tel répertoire de relations numériques. En résumé, les calculs numériques symboliques prennent les symboles à plein et fonctionnent sur un très riche répertoire de relations numériques, variées, et dont les liens en font un véritable réseau de relations. Le sujet y puise et s'enrichit sans cesse, à chaque fois qu'il calcule.

Par contre le calcul assisté par un diagramme est un **calcul symbolisé**, traité en tant que tel, et s'appuyant sur un régime mnésique réduit à une série de tables de relations ponctualisées. Certaines relations du calcul sont même figurées par le diagramme. Un calcul assisté par un diagramme est donc un calcul cadré par celui-ci. Les données suffisent alors à en déterminer le parcours univoque. On peut désormais le formaliser et l'implémenter dans un automate. Les symboles qui lui sont attachés ne sont plus à prendre seulement pour eux-mêmes, pour ce qu'ils signifient, mais la position qu'ils occupent prend un sens. Comme pour l'écriture des nombres, les traitements de ces symboles sont localement univoques. Deux fonctions sont à assumer pour le calculateur, le parcours du diagramme d'une part et la détermination successive de résultats partiels en recourant à des opérations de base d'autre part.

Si du point de vue général, abstrait, et formalisé, les deux reviennent finalement au même, ne voyant là qu'une seule différence de degré dans l'élaboration des symboles, il m'a paru important de dégager ce qui liait justement ces niveaux. Ce n'est en effet que rétrospectivement, une fois le pas franchi, que l'on peut comprendre la filiation des méthodes. Répétons-le, la symbolisation est toujours une re-création, une reconstruction sur son propre niveau, avant même de pouvoir être considérée comme une image, une abréviation, une élémentarisation. Là encore, l'analogie est parfaite avec la différence de niveau que l'on dénote entre la numération parlée et la numération écrite chiffrée que nous connaissons. Là encore, c'est la plus formelle mais aussi la plus simple et la plus économique qui est pourtant élaborée en second.

TEXTES EVOQUES

Arsac J. (1987) *Les machines à penser*. Paris : Seuil.

Condorcet (1789) *Moyens d'apprendre à compter sûrement et avec facilité*. <http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k5828975s>. Paris : A.C.L. Les éditions du Kangourou, 1989, <http://www.mathkang.org/catalogue/condorcet.html>.

Brun J. & Conne F. 1991, *Analyse de brouillons de calculs d'élèves confrontés à des items de division écrites*. Proceedings of PME XV. International group for psychology of mathematics education, Assisi, Italy, 29 juin - 4 juillet 1991.

Conne F. (1981) La transposition didactique à travers l'enseignement des mathématiques en première et deuxième année de l'école primaire. Thèse de doctorat. Lausanne. Conne / Couturier - Noverraz, (publiée en 1986). 462p. <http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01066233>

Conne F. (1987) Comptage et écriture des égalités dans les premières classes de l'enseignement primaire (1^{er} épisode). *Math-Ecole*, 128, 2-12. http://www.ssr dm.ch/mathecole/crbst_96.html, <http://halshs.archives-ouvertes.fr/halshs-01027537>

Conne F. (1987) Entre comptage et calcul (2^{ème} épisode). *Math-Ecole*, 130, 11-23. http://www.ssr dm.ch/mathecole/crbst_124.html, <https://hal.archives-ouvertes.fr/halshs-01048667>

Conne F. (1988) Numérisation de la suite des nombres et faits numériques (3^{ème} épisode). *Math-Ecole*, 132, 26-31. http://www.ssr dm.ch/mathecole/crbst_93.html, <https://hal.archives-ouvertes.fr/halshs-01048692>

Conne F. (1988) Numérisation de la suite des nombres et faits numériques (3^{ème} épisode, suite). *Math-Ecole*, 133, 20-23. http://www.ssr dm.ch/mathecole/crbst_92.html, <https://hal.archives-ouvertes.fr/halshs-01048712>

Conne F. (1988) Calculs numériques (4^{ème} épisode). *Math Ecole*, 135, p23-36. http://www.ssr dm.ch/mathecole/crbst_90.html, <https://hal.archives-ouvertes.fr/halshs-01048720>

Gardner M. (1964) *L'étonnante histoire des machines logiques*. Paris : Dunod.

Kamii C., with DeClark, G. (1985) *Young children reinvent arithmetic*. New York: Teachers College Press.

Kamii, C. (1989). *Young children continue to reinvent arithmetic, 2nd grade*. New York: Teachers College Press. [This book has been replaced by a 2nd edition published in 2004.]

Kamii, C., with Livinston, S. J. (1994) *Young children continue to reinvent arithmetic, 3rd grade*. New York : Teachers College Press.

Labinowicz Ed. (1985) *Learning from children. New beginnings for teaching numerical thinking*. Addison Wesley Publishing Company.

Madell R. (1978) Addition and Subtraction - What do Children naturally do? Paper presented at the National Council of teachers of mathematics annual meeting, San Diego.

Simon H. A. (1974) *La science des systèmes*. Paris: Epi.

Van Lehn K. (1988) Toward a Theory of Impasse-Driven Learning, in Mandl E. & Lesgold A. (eds) *Learning Issues for Intelligent Tutoring Systems*. New-York: Springer Verlag.