



HAL
open science

Armonía Dialógica: tonk, Teoría Constructiva de Tipos y Reglas para Jugadores Anónimos

Shahid Rahman, Juan Redmond

► **To cite this version:**

Shahid Rahman, Juan Redmond. Armonía Dialógica: tonk, Teoría Constructiva de Tipos y Reglas para Jugadores Anónimos. *Theoria: An International Journal for Theory and Foundations of Science*, 2016, 31 (1), pp.27-53. 10.1387/theoria.13949 . halshs-01226205

HAL Id: halshs-01226205

<https://shs.hal.science/halshs-01226205>

Submitted on 9 Nov 2015

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Armonía Dialógica: *tonk*, Teoría Constructiva de Tipos y Reglas para Jugadores Anónimos.

Shahid Rahman* y Juan Redmond†

(Accepted paper for THEORIA, submitted 2015, to be published, 2016)

Abstract: Recent literature on dialogical logic discusses the case of *tonk* and the notion harmony in the context of a rule-based theory of meaning. Now, since the publications of those papers, a dialogical version of constructive type theory (CTT) has been developed. The aim of the present paper is to show that, from the dialogical point of view, the harmony of the CTT- rules is the consequence of a more fundamental level of meaning characterized by the independence of players. We hope that the following paper will contribute to a better understanding of the dialogical notion of meaning.

Keywords: meaning, pragmatics, inference, games, constructivism, dialogical logic, types.

Resumen: En la bibliografía reciente se estudia el caso de *tonk* y el concepto de armonía en el contexto de una teoría del significado basado en reglas. Ahora bien, desde la publicación de esos textos la teoría dialógica ha sido vinculada con la Teoría Constructiva de Tipos (CTT). El objetivo principal del presente artículo es mostrar que, desde la perspectiva dialógica, la armonía de las reglas de la CTT es consecuencia de un nivel más fundamental de significado en el que las reglas se formulan independientemente del jugador que las aplica. Esperamos que el presente trabajo contribuya a una mejor comprensión del concepto dialógico de significado

Palabras clave: significado, pragmática, inferencia, juegos, constructivismo, lógica dialógica, tipos.

1 Introducción:

Según el inferencialismo, las expresiones lingüísticas ganan su significado en virtud de las normas que rigen su uso.² Las expresiones lógicas en particular obtienen su significado a partir de reglas de introducción que especifican los fundamentos para afirmar aquellas proposiciones que las contienen, y de reglas de eliminación que especifican lo que se puede inferir a partir de ellas. Así, por ejemplo, las siguientes bien conocidas reglas de la Deducción Natural al estilo Gentzen establecen, desde el punto de vista inferencialista, el significado de " \wedge ":

Introducción	\wedge	Eliminación
A		$A \wedge B$
B		----
----		A
$A \wedge B$		B

* Université de Lille, UMR: 8163 STL, ADA-MESH (NpdC)

† Instituto de Filosofía, Universidad de Valparaíso

² Como ha señalado Peter Schröder-Heister (1984, 2005), Karl Popper (1947a, b, 1949) fue uno de los primeros en explorar las posibilidades de vincular *significado como uso* con reglas de inferencia a fin de desarrollar una semántica inferencial para las expresiones lógicas.

Michael Dummett (1973) generaliza la noción de reglas de introducción y eliminación para construir un marco general inferencialista para toda expresión lingüística:

Aprender a utilizar una afirmación de una forma dada implica. . . aprender dos cosas: las condiciones justifican una tal afirmación; y aquello que constituye la aceptación de la misma, es decir, las consecuencias de la aceptación de la misma. (Dummett (1973, p. 453).

Arthur Prior (1960) confronta el inferencialismo con un contraejemplo notable, que a su entender muestra que una tal teoría del significado de las expresiones lógicas (o como él lo llamaba: la perspectiva de la "validez analítica") es un desatino. Su objeción tomó la forma de la postulación de una nueva conectiva llamada "*tonk*",³ regida por reglas que combinan la (mitad de) las reglas de introducción estándar para la disyunción con la (mitad de) las reglas de eliminación estándar para la conjunción. La primera regla autoriza la inferencia de *AtonkB* a partir de *A* y la segunda de *B* a partir de *AtonkB*:

Introducción	<i>tonk</i>	Eliminación
<i>A</i> ----- <i>AtonkB</i>		<i>AtonkB</i> ----- <i>B</i>

Ahora bien, enlazando ambas reglas tenemos lo que Prior llama "*runabout inference ticket*" ("billete para hacer inferencias de modo ilimitado"), que, dadas dos proposiciones arbitrarias, permite inferir una de la otra (en ambos sentidos). En otras palabras si agregamos *tonk* a un sistema estándar de deducción natural toda proposición se puede inferir de cualquier otra. Podríamos, por ejemplo, inferir $\sim a$ a partir de *a* (y viceversa).

La idea principal de Prior es que el ejemplo muestra que primero tenemos que tener a nuestra disposición los significados de las conectivas antes e independientemente de reglamentar el uso de tales conectivas en la inferencia, porque solo entonces podremos decidir si tales reglas son válidas o no. Se podría añadir que parece como si este contraejemplo también pusiera en peligro el proyecto de una teoría inferencialista general del significado.⁴

Los inferencialistas, obviamente, no pueden responder al desafío de Prior haciendo uso de una teoría semántica veritativo-funcional (al menos no en el mismo estilo que el desarrollado en la teoría de modelos). Sin embargo, los inferencialistas encontraron una salida mediante la introducción de una condición llamada *armonía*, que norma la coordinación de las reglas de introducción y eliminación: en breve, las reglas de *eliminación* no deben regular ni más ni menos que lo que justifican las reglas de *introducción*. Este concepto de armonía fue implementado por Dag Prawitz (1965, 1971, 1994) mediante la generalización y desarrollo de lo que Paul Lorenzen (1955) llamó el *principio de inversión*. La Teoría Constructiva de Tipos (CTT) de Per Martin-Löf, el desarrollo más reciente en el enfoque inferencialista del significado, agrega a las reglas de introducción y eliminación un conjunto de normas de

³ Schröder-Heister (1984, p. 89, f. 13) hizo la observación, y con razón, de que esta conectiva es muy cercana a una concebida por Popper (1947a, b).

⁴ Para una discusión sobre la pertinencia de *tonk* para una teoría general del significado desde el punto de vista inferencialista ver Brandom (2000, pp. 66-76).

igualdad que implementan, en el nivel de lenguaje objeto, la condición de armonía mencionada más arriba.

En varios artículos sobre lógica dialógica de Rahman et *alii* se estudia el caso de *tonk* en el marco de una teoría donde el significado como uso es implementado como un sistema de reglas de interacción y donde tales reglas no se reducen a reglas de inferencia. Ahora bien, desde la publicación de esos textos la teoría dialógica ha sido vinculada con la Teoría Constructiva de Tipos (CTT) la cual posee sus propios medios para responder a *tonk*. El objetivo principal del presente artículo es mostrar que, desde la perspectiva dialógica, la armonía de las reglas de la CTT es consecuencia de un nivel más fundamental de significado en el que las reglas se formulan independientemente del jugador que las aplica (de ahora en adelante llamaremos a ese tipo de reglas *reglas para jugadores anónimos*). Más precisamente, las reglas de conversión β y η , ambas responsables de la armonía de las reglas de inferencia de CTT, resultan, en el marco dialógico, de una sola regla de igualdad para jugadores anónimos (una tal regla de igualdad por cada constante lógica).

Esperamos que el siguiente artículo permita entrever el papel crucial que tienen las reglas con jugadores anónimos en el marco de una teoría donde el significado como uso está ligado a la noción de interacción.

Comenzaremos presentando muy brevemente la idea de armonía de Dummett, luego la solución de CTT y finalizaremos mostrando cómo están ligados en el enfoque dialógico el concepto de armonía y la noción de regla con jugadores anónimos.

2 Sobre Gentzen y Armonía

En su histórico artículo de 1935 sobre deducción natural, Gerhard Gentzen señaló:

*Las introducciones representan, por así decirlo; las "definiciones" de los símbolos referidos, y las eliminaciones no son más, en el análisis final, que la consecuencia de estas definiciones.*⁵ (Trad. de los autores)

La idea detrás de la observación de Gentzen es que una regla de introducción de la deducción natural exhibe el fundamento para la afirmación de una proposición que contiene la constante lógica en cuestión, y que el resultado de la utilización de la regla de eliminación correspondiente muestra exactamente esos componentes de la proposición que la regla de introducción especificó como suficientes para su afirmación. Las reglas de la conectiva *tonk*, justamente, disuelven la necesaria coordinación íntima entre ambas reglas que sugiere Gentzen en su comentario. Dummett llama *armonía* a tal coordinación. En breve y haciendo uso de la formulación de Stephen Read (2008, p. 291, nota 5), una regla de eliminación es armónica si esta regla no hace más que explicar las consecuencias del significado conferido por la regla de introducción.

⁵ *The introductions represent, as it were; the 'definitions' of the symbols concerned, and the eliminations are no more, in the final analysis; than the consequence of these definitions.* Gentzen (1935, trad. 1969, p. 80).

Por ende la respuesta de Dummett a *tonk* consiste en imponer el requerimiento de armonía entre las reglas:

"el error [. . .] se encuentra [. . .] en el fracaso para apreciar la interacción entre los diferentes aspectos de "uso" y el requisito de armonía entre ellos. Crudamente expresado, siempre hay dos aspectos de la utilización de una determinada forma de frase: las condiciones en que el enunciado de esa frase es apropiado, que incluye, en el caso de una frase asertórica, lo que cuenta como un fundamento aceptable para afirmarla; y las consecuencias del enunciado de la misma, que comprenden tanto el compromiso del hablante al enunciar y la respuesta adecuada por parte del oyente, incluyendo, en el caso de la afirmación, lo que él tiene derecho a deducir de ella si él la acepta." Dummett (1973, p. 396).

Es importante señalar que, como ha subrayado Stephen Read (2008, p. 289), aunque Gentzen parece dar cierta prioridad a las reglas de introducción esto no es necesario. De hecho, como ha señalado Dummett, las reglas de introducción y eliminación necesitan ser ambas armónicas ya que ambas son suficientes para explicar el significado de las expresiones afectadas por ellas

"Lo que hemos estado considerando son dos formas alternativas de explicar el significado de las oraciones de un lenguaje: en términos de cómo las establecemos como verdaderas; y en términos de aquello que está involucrado al aceptarlas como verdaderas. Son alternativas en la medida en que cualquiera de las dos es suficiente para determinar el significado de una oración única. Dado que cada una de ellas es suficiente para determinar el significado tiene que haber una armonía entre esas dos formas de uso" Dummett (1993, p. 142).

Si comenzamos con las reglas de introducción, una manera de ver la contribución del concepto de armonía a la solución del problema suscitado por *tonk*, es que mientras las reglas de introducción muestran cómo *sintetizar*, a partir de ciertas premisas, una expresión que contiene una constante lógica dada; la regla de eliminación muestra cómo analizar la expresión en juego mostrando exactamente aquellos componentes que son requeridos por las reglas de introducción para afirmar esta expresión. Lo que hay de malo en $A \text{tonk} B$ es que la regla de eliminación establece que la componente relevante para el significado inferencial de $A \text{tonk} B$ es B , pero la regla postulada para la introducción de *tonk* requiere A . Si seguimos la regla de eliminación de *tonk* – y las prescripciones codificadas en la regla de introducción correspondiente – no vamos a encontrar la componente de la cual está hecha $A \text{tonk} B$.

Ya en 1932 Gentzen señaló que si a una introducción, por ejemplo del tipo $A \wedge B$ que se infiere a partir de A y de B , sigue la eliminación correspondiente que afirma que A , la expresión $A \wedge B$ constituye entonces un máximo local o una cúspide que puede ser eliminada.

A	B	
		\wedge -introducción
$A \wedge B$		
		\wedge -eliminación
A	B	

Gentzen llama tales cúspides o máximos locales *desvíos*, y lo que ahora se llama *normalización* suprime pares de pasos introducción-eliminación redundantes. Esto provee otro aspecto de la armonía llamado por Dummett (1991, p. 248) *armonía intrínseca* y está

vinculado con el trabajo de Dag Prawitz (1965, 1971)⁶ quien aísla aquellos pasos necesarios para llevar a cabo la supresión de los pares redundantes de introducción-eliminación mencionados previamente. En relación con el caso de *tonk*, el punto es que sus reglas no se pueden reducir a una forma normal. De hecho, la siguiente cadena de inferencias no lleva a una reducción, ya que el último paso no contiene las premisas de la regla de introducción. El análisis llevado a cabo por la regla de eliminación no lleva los componentes que fueron usados para sintetizarlos:

A	
-----	<i>tonk</i> -introducción
AtonkB	
-----	<i>tonk</i> -eliminación
B	

El procedimiento de normalización de Prawitz-Lorenzen proporciona los medios técnicos para comprobar si las reglas de una constante lógica dada son o no armónicas en el sentido intrínseco.⁷ Sin embargo, en las presentaciones estándar de los sistemas de deducción natural el requerimiento de armonía para las reglas no está incluido en el lenguaje objeto. El proceso de normalización que regula la coordinación entre las reglas de introducción y eliminación se expresa como una verificación llevada a cabo en el metalenguaje. Precisamente esto es lo que implementa el enfoque de la teoría constructiva de tipos.

3 La explicitación de la armonía: las reglas de igualdad de CTT

3.1 Algunos postulados relevantes de la Teoría Constructiva de Tipos

En la teoría constructiva de tipos de Per Martin-Löf's (1984, CTT de ahora en adelante) las constantes lógicas son interpretadas a través de la correspondencia Curry-Howard entre proposiciones y conjuntos. Una proposición se interpreta como un conjunto cuyos elementos representan las pruebas de la proposición. También es posible visualizar un conjunto como la descripción de un problema y sus elementos como las soluciones al problema de una manera similar a la explicación de Kolmogorov del cálculo proposicional intuicionista. Además, en CTT los conjuntos se entienden también como tipos, de modo tal que las proposiciones pueden ser vistas como datos o tipos de prueba.

La idea filosófica general está enlazada con lo que ha sido llamado el enfoque de interpretación total (*fully interpreted approach*)⁸ donde se presta especial atención a:

[...] evitar mantener contenido y forma aparte. En vez de esto tendremos al mismo tiempo ciertas formas de juicio e inferencia que son utilizadas en pruebas matemáticas y las explican semánticamente. Por lo tanto, hacemos explícito lo que se suele tomar por sentado implícitamente. Martin-Löf (1984, p. 3).

⁶ Prawitz sigue aquí una idea seminal de Paul Lorenzen (1955), quien es además el creador de la lógica dialógica.

⁷ Hay otra concepción de armonía que Dummett (1991) llama *armonía total*, cuyo origen se encuentra en la noción de *extensión conservadora* de Nuel Belnap (1962) y que propone la idea de que las nuevas normas no deben interferir con la práctica de las más antiguas. No discutiremos aquí la noción de extensión conservadora — para una crítica de una tal noción de armonía ver Prawitz (1994, p. 375) y Brandom (2000, pp. 66-76), una discusión más detallada se encuentra en Sundholm (2000).

⁸ Ver Sundholm (1983a, 1997, 2001, 2013)

En relación con la tarea de explicitación, se trata de poner en el nivel del lenguaje objeto características que determinan el significado y que se formulan usualmente en el nivel meta. De acuerdo con el punto de vista lógico de la CTT, las premisas y la conclusión de una inferencia lógica no son proposiciones sino juicios:

Una regla de inferencia se justifica explicando la conclusión bajo el supuesto de que las premisas son conocidas. Por lo tanto, antes de que una regla de inferencia pueda ser justificada, debe explicarse qué es lo que hay que saber para tener el derecho de hacer un juicio sobre cualquiera de las diversas formas en que las premisas y la conclusión pueden tener. (Martin-Löf 1984, p. 4).

Otros dos principios básicos de la CTT son los siguientes:

1. Ninguna entidad sin tipo
2. Ningún tipo sin identidad

En consecuencia, podemos tomar la afirmación de que un individuo es un elemento del conjunto A como la afirmación de que dicho individuo instancia o ejemplifica el tipo A . Un conjunto se define en CTT especificando sus elementos canónicos, y aquellos, los no-canónicos, de los que se puede mostrar, usando algún método prescrito de transformación, que son iguales (en este conjunto) a uno canónico; esto último es lo que prescribe el segundo principio básico y que, en otras palabras; consiste en la introducción de una relación de equivalencia en un conjunto. Así, si A es un tipo y tenemos un objeto b que satisface las condiciones correspondientes entonces b es un objeto de tipo A , que se escribe formalmente $b : A$.⁹ En consecuencia,

$b : A$

puede ser leída como:

b es una prueba de la proposición A	A es verdadera
b es un elemento del conjunto A	A tiene un elemento
b satisface con las expectativas de A	A es satisfecha
b es una solución al problema A	A tiene una solución

Es esencial distinguir entre el *elemento de prueba* b (*proof-object*), el tipo A y el juicio $b : A$, que establece, en este ejemplo, que b es un elemento de prueba para la proposición A (si A es del tipo proposición). En lógica estándar, que hay una prueba para una proposición dada se expresa en el nivel de metalenguaje. El hecho de que haya algo (un elemento) b que fundamenta la proposición de que *Primus le debe 100 monedas a Secundus* (lo que supondría la afirmación correspondiente) se da en el análisis habitual a nivel metalenguaje. En CTT, el fundamento de una afirmación se formula en el nivel de lenguaje objeto por medio de la afirmación de que hay un elemento-prueba de la proposición correspondiente.

Siempre que en CTT se introduce una nueva expresión se lo hace por medio de lo que se llama una *explicación semántica*. En el caso de la introducción de un nuevo tipo, la

⁹ Martin-Löf usa el signo " \in " con el fin de indicar que algo, por ejemplo a , es de tipo B ; incluso sugiere que se puede entender como la cópula "es". Nordström, Petersson y Smith (1990) también hacen uso de esta notación, mientras que otros autores, como Ranta (1994), utilizan el doble punto "·". Granström (2011) distingue el doble punto del épsilon, donde el primero se aplica a los elementos no canónicos y el segundo a los canónicos. Nosotros vamos a utilizar el doble punto.

explicación semántica consiste en (1) describir sus objetos canónicos, (2) proporcionar un algoritmo para reconocer si un objeto no canónico es o no de ese tipo y (3) dar las condiciones que permitan establecer la identidad (o no) de dos objetos respecto a ese tipo. El punto 3 se entiende como la tarea de definir una relación de equivalencia apropiada. De este modo, aserciones de la forma $a = b : A$, afirman que los dos objetos a y b satisfacen la relación de equivalencia definida para el tipo A . La aserción $a = b : A$ es también llamada una *aserción de igualdad definicional*, dado que por mediante de ella se introducen definiciones explícitas – por ejemplo de funciones (ver sección 3.2). Una tal igualdad se trasmite entonces por reflexividad, simetría y transitividad, y por sustitución de iguales definicionales. (cf. Ranta (1994), p. 52).

Debido a limitaciones de espacio no vamos a ser capaces de dar una descripción detallada y precisa del sistema aquí. En la próxima sección nos limitaremos a transmitir los puntos relevantes para los objetivos del presente trabajo. Para más información sobre esta perspectiva ver Martin-Löf [1984], Ranta (1988, 1994), Nordström et al. (1990), Primiero (2008) y Granström (2011).

3.2 Elementos de prueba, igualdad y armonía

El ejemplo más claro de interacción entre proposiciones y elementos de prueba en un sistema de inferencia es el caso de la conjunción.¹⁰ La proposición $A \wedge B$ (o el conjunto $A \times B$) se explica, estableciendo que un elemento canónico de $A \wedge B$ es un par de elementos de prueba (a, b) donde $a : A$ y $b : B$ - es decir, donde a es un elemento de prueba de A y b de B :

$$\begin{array}{l} a : A \quad b : B \\ \text{-----} \quad \wedge\text{-introducción} \\ (a, b) : A \wedge B \end{array}$$

Con el fin de definir \wedge -eliminaciones vamos a hacer uso de cierto tipo de operadores llamados *selectores*, a partir del cual se pueden definir nuevas funciones que extraen aquellos componentes que constituyen un elemento de prueba complejo c (como por ejemplo $c = (a, b)$). En el caso de la conjunción los selectores son la función de proyección p y q que tiene como valor el lado izquierdo y derecho del par de elementos de prueba respectivamente. Por lo tanto, si c es un elemento de prueba para la conjunción, entonces $p(c)$ nos da el componente izquierdo de c y $q(c)$ su componente derecho.

$$\begin{array}{l} c : A \wedge B \\ \text{-----} \quad \wedge\text{-}p\text{-eliminación} \\ p(c) : A \end{array} \qquad \begin{array}{l} c : A \wedge B \\ \text{-----} \quad \wedge\text{-}q\text{-eliminación} \\ q(c) : B \end{array}$$

Si sabemos que $c = (a, b)$, entonces $p(c)$ restaura el componente izquierdo de c (obtenido por la regla de introducción) esto es: $p(c) = p((a, b)) = a$, tal que $a : A$, análogamente $q(c)$ restaura el componente derecho:

$$\begin{array}{l} a : A \quad b : B \\ \text{-----} \quad \wedge\text{-}izq\text{-}\beta\text{-igualdad} \end{array} \qquad \begin{array}{l} a : A \quad b : B \\ \text{-----} \quad \wedge\text{-}der\text{-}\beta\text{- igualdad} \end{array}$$

¹⁰ Cf Sundholm (1986).

$$p((a, b)) = a : A$$

$$q((a, b)) = b : B$$

Aquí tenemos ejemplos claros de cómo usar la noción de igualdad definicional mencionada anteriormente: las funciones de proyección p y q se definen explícitamente por medio de una regla de inferencia de modo que, dados los elementos de prueba a y b , la proyección q de (a, b) es definicionalmente idéntica a b , respecto a la relación de equivalencia que define el tipo B , y análogamente se introduce la proyección p .

También se puede introducir una regla dual, llamada η , y que puede ser definida de la siguiente manera:

$$\frac{c : A \wedge B}{(p(c), q(c)) = c : A \wedge B} \quad \wedge\text{-}\eta\text{-igualdad}$$

Estas reglas de igualdad definicional, como ha señalado Sundholm (1997 p. 200) no son más que versiones lineales de las etapas de normalización de Prawitz mencionadas anteriormente. En nuestro contexto estas reglas pueden ser vistas como aquello que asegura que las reglas son armoniosas. Es decir, si la conjunción ha sido compuesta por (a, b) entonces ambas reglas de eliminación proveen un análisis del elemento de prueba c del que resultan los componentes a y b . Si aplicamos reglas de igualdad al caso de *tonk* es claro que la regla de eliminación para *tonk* no restaurará el componente por los mismos medios por los cuales la regla de introducción sintetizó $A \text{tonk} B$ a partir de A . En efecto, si asumimos las funciones selectivas *tonk-intro* y *tonk-elimin* tales que si $a : A$, *tonk-intro* $(a) = a$, y si $b : B$, *tonk-elimin* $(c) = b$, entonces las reglas de Prior para *tonk* pueden reescribirse de la siguiente manera:

Introducción	<i>tonk</i>	Eliminación
$a : A$		$c : A \text{tonk} B$
----- <i>tonk-intro</i> $(a) : A \text{tonk} B$		----- <i>tonk-elimin</i> $(c) : B$

Pero ellas son incoherentes. De hecho, *tonk-elimin* (c) no será igual a *tonk-intro* $(a) = a = c$, y por ello no se pueden definir reglas de igualdad razonables.

En conclusión, el ejemplo de Prior muestra que, si tenemos dos conjuntos de reglas, debemos cuidar que se coordinen armoniosamente. Pero, dado que, como mencionamos anteriormente, un solo conjunto de reglas es suficiente, cómo definir armonía para el caso que haya un solo tipo de reglas? Tal vez, la armonía resulta de un nivel más básico de significado establecido por un solo tipo de reglas fundamentales. Esto nos lleva a la siguiente sección en la que afirmamos que el enfoque dialógico es el único que ofrece un solo tipo de reglas de significado, que Kuno Lorenz (2001) llama la *piedra fundamental* del significado, y que, si son formuladas como reglas para *jugadores anónimos*, proveen reglas de estrategia (o inferencia) armónicas.

4 *Tonk* desde el punto de vista dialógico

4.1 Algunas nociones básicas de Lógica Dialógica

La Lógica dialógica fue iniciada a finales de la década de 1950¹¹ por Paul Lorenzen y luego desarrollada por Kuno Lorenz.¹² Inspirado por la noción de Wittgenstein de significado como uso, la idea básica del enfoque dialógico de la lógica es que el significado de las constantes lógicas está dado por las normas o reglas para su uso y estas reglas se entienden como formas específicas de estructuración de la interacción argumentativa. Esta característica argumentativa subyacente a la dialógica a menudo lleva a clasificarla como una teoría pragmática del significado.

Más precisamente: las reglas que fijan el significado pueden ser de más de un tipo, y ellas determinan la reconstrucción de una práctica argumentativa y/o lingüística que una cierta forma de juegos de lenguaje llamado diálogos proporciona. Como se mencionó anteriormente el enfoque dialógico de la lógica no es una lógica, sino un marco de significado pragmático en donde diferentes lógicas pueden desarrollarse, combinarse o compararse. Sin embargo, aquí vamos a restringirnos a las versiones dialógicas de la lógica clásica y la intuicionista (véase el apéndice I).

En un diálogo dos partes discuten sobre una tesis respetando ciertas reglas fijas. El jugador que afirma la tesis se llama Proponente (P), su rival, que pone en tela de juicio la tesis se llama Oponente (O). En su forma original, los diálogos fueron diseñados de tal manera que cada una de las partidas termina después de un número finito de movimientos con solo un jugador ganador, mientras que el otro pierde. Acciones o movimientos en un diálogo a menudo son entendidos como elocuciones o como actos de habla. En otras palabras, la idea es que las reglas del diálogo no se aplican a expresiones aisladas del acto de elocución en que fueron proferidas (en el contexto del desarrollo de un juego dialógico). Las reglas se dividen en reglas de partículas o reglas para las constantes lógicas (*Partikelregeln*) y reglas estructurales (*Rahmenregeln*). Las reglas estructurales determinan el curso general de un juego dialógico (también llamado *diálogo*), mientras que las reglas de partículas regulan aquellos movimientos que constituyen *peticiones* o *requerimientos* (a los movimientos del

¹¹ De hecho, la lógica dialógica desarrollada por Paul Lorenzen y Kuno Lorenz, fue el resultado de una solución a algunos de los problemas que se suscitan en la Lógica Operativa de Lorenzen (1955) - para una discusión sobre las ideas y las deficiencias de la Lógica Operativa ver Schröder-Heister (2008).

¹² Los principales trabajos originales se recogen en Lorenzen / Lorenz (1978). Para una visión histórica ver Lorenz (2001). Otros trabajos se han recogido más recientemente en Lorenz (2008, 2010a, b). Una relación detallada de los acontecimientos recientes desde Rahman (1993), se puede encontrar en Rahman / Keiff (2005), Keiff (2009) y Rahman (2012). Para la metalógica subyacente ver Clerbout (2013, 2014A, b). Para las presentaciones de libros de texto: Lorenzen / Schwemmer (1975), Redmond / Fontaine (2011) y Rückert (2011). Para el papel clave de la dialógica en la recuperación de la relación entre la dialéctica y la lógica, véase Rahman / Keiff (2010). Los artículos de Keiff (2004a, b, 2007) y de Rahman (2009), contienen un estudio de lógica dialógica modal. Fiutek et al. (2010) estudian el enfoque dialógico de revisión de creencias. Clerbout / Gorisse / Rahman (2011) estudian la lógica de los Jainas en el marco dialógico. Popek (2012) desarrolla una reconstrucción dialógica de las *obligaciones* medievales. Rahman / Tulenheimo (2009) estudian los vínculos entre el GTS y lógica dialógica. Otros libros son Redmond (2010) - que discute el tema de la ficción en el contexto dialógico - Fontaine (2013) - que enlaza intencionalidad, ficción y diálogos - y Magnier (2013), que desarrolla en un marco dialógico, aplicaciones de la lógica epistémica dinámica para el razonamiento jurídico. Rahman y sus colaboradores comenzaron recientemente a estudiar el enfoque dialógico de la CTT - ver Clerbout / Rahman (2015), Rahman / Clerbout (2014, 2015), Rahman / Clerbout / Jovanovic (2014), Rahman / Jovanovic / Clerbout (2015), Rahman / Redmond (2014).

rival) y aquellos que son *respuestas* (a esas peticiones). Crucial para el enfoque dialógico son los puntos siguientes:

1. La distinción entre significado local (reglas para las constantes lógicas) y significado global (incluido en las reglas estructurales)
2. Reglas para jugadores anónimos para el significado local
3. La distinción entre el nivel de partida (trunfo local o triunfo de una partida) y el nivel estratégico (existencia de una estrategia ganadora).
4. Una noción de validez que equivale a estrategia ganadora para P.
5. La noción de triunfo en una partida formal, en lugar de estrategia ganadora en un modelo.

4.2 Lógica Dialógica y Significado

Significado local de las constantes lógicas

En lógica dialógica, las reglas de partículas establecen la *semántica local*: lo que está en juego es solo la *petición* y la *respuesta* correspondiente a la afirmación de una constante lógica determinada, y no se tiene en cuenta el contexto en el que ocurre dicha constante lógica. La terminología estándar hace uso de los términos *desafío* o *ataque* y *defensa*. Sin embargo es importante observar que en el nivel local (el nivel de las reglas de partículas) ataques y defensas se definen independientemente de su rol estratégico.

La tabla siguiente presenta las reglas de partículas para la conjunción y la disyunción donde X e Y son cualquiera de los dos jugadores **O** y **P** (para las restantes reglas ver el Apéndice)¹³

\vee, \wedge	Ataque	Defensa
$X - A \vee B$	$Y - ?_{\vee}$	$X - A$ o $X - B$ (X elige)
$X - A \wedge B$	$Y - ?_{\wedge L}$ o $Y - ?_{\wedge R}$ (Y elige)	$X - A$ respectivamente $X - B$

- **Nota:** Las reglas de partículas son reglas para jugadores anónimos en el sentido de que el defensor puede ser tanto **P** como **O** (por eso también se las llama *reglas simétricas*). Por eso están formuladas con la ayuda de variables que pueden ser substituidas (uniformemente) por **P** u **O**. No sería razonable basar un enfoque lúdico-teórico del significado de las constantes lógicas en un sistema de reglas que determine que una constante tal tiene un significado diferente, cuando es jugada por un jugador diferente. Esto haría de cualquier interacción un sinsentido.

Significado Global:

¹³ Para una presentación detallada ver Clerbout (2014a, b). Véase también la entrada "lógica dialógica" en la Stanford Encyclopedia of Philosophy y Redmond / Fontaine (2011).

Como se mencionó anteriormente, el sentido global se define por medio de reglas estructurales que determinan el desarrollo general de las partidas, especificando quién empieza, cuáles son los movimientos permitidos y en qué orden, cuándo finaliza una partida y quién gana y cuándo (véase el Apéndice I). Las reglas estructurales incluyen lo siguiente:

(SR 2) (*Regla formal*): P no puede afirmar una proposición elemental a menos que O lo haga primero. Las proposiciones elementales no pueden ser atacadas.

Esta regla es una de las características más sobresalientes de la lógica dialógica. Como se discute en Marion / Rückert (2015), se remonta a la reconstrucción de Aristóteles de la dialéctica platónica: la idea principal es que, cuando una proposición elemental es desafiada (atacada), entonces –desde el punto de vista puramente argumentativo– la única respuesta posible es apelar a las concesiones del oponente (es decir, sin hacer uso de una autoridad más allá de los movimientos presentados durante la interacción argumentativa). De hecho, uno podría ver la regla formal como la implementación de un tipo de estrategia del *copión*: mis razones para afirmar tal proposición son exactamente las mismas que las tuyas cuando concedió Ud. la misma proposición.¹⁴

Ahora bien, si los fundamentos últimos de una tesis dialógica son proposiciones elementales y si esto se lleva a cabo mediante el uso de la regla formal, entonces los diálogos son en este sentido necesariamente asimétricos. De hecho, si ambos contendientes estuvieran restringidos por la regla formal jamás ser pronunciada jamás ninguna proposición elemental. Por lo tanto, implementamos la regla formal mediante el diseño de un jugador, llamado el proponente, cuyas afirmaciones de proposiciones elementales están restringidas por esta regla. Es el triunfo del proponente el que proporciona la noción dialógica de validez. Más precisamente, en el enfoque dialógico validez se define a través de la noción de *estrategia ganadora*, donde *estrategia ganadora* para X significa que para cualquier elección de movimientos de Y, X tiene al menos un movimiento posible a su disposición tal que él (X) gana:

Validez (definición): Una proposición es válida en un determinado sistema dialógico si y solo si **P** tiene una estrategia ganadora formal para esta proposición.

4.3 Reglas para jugadores anónimos y la dualidad de las reglas de Introducción y Eliminación

La formulación de los dos tipos de reglas para las estrategias ganadoras que definen validez se explican por:

- a. la *simetría* del nivel local de significado (independencia de jugadores),
- b. la noción de elección, y
- c. la noción de validez como estrategia ganadora para **P**.

En efecto, ¿cuándo existe una estrategia ganadora para el Proponente, por ejemplo, al afirmar una conjunción? Cuando él puede responder a los dos ataques del Oponente acorde a los dictaminado por la regla local. Dado que, según esto último, es **el atacante el que puede elegir la izquierda o la derecha**, y el atacante es en este caso el Oponente, el Proponente tiene una estrategia ganadora para la conjunción si y solo si él puede ganar afirmando ambos componentes de la conjunción - solicitados por su rival.

¹⁴ Cf. Clerbout / Keiff / Rahman (2009) y Rahman / Keiff (2010).

Por ende, desde la perspectiva dialógica, la regla de introducción nos dice que el Proponente tiene una estrategia ganadora para su afirmación de una conjunción a condición de que la afirmación de ambas componentes resulte en juegos dialógicos ganados por **P**.¹⁵ De manera dual se puede argumentar para el caso en que el oponente afirma una conjunción. Esto es, el Proponente tiene una estrategia ganadora si **P** puede ganar cuando **O** afirma al menos uno de las componentes que el Proponente tiene derecho a solicitar (cuando **O** afirmó una conjunción). De esto tratan las reglas de eliminación. Más generalmente: la regla de introducción de una constante lógica de la deducción natural corresponde en la dialógica a una regla que describe la condiciones requeridas para que el Proponente tenga una estrategia ganadora respecto a una aserción afirmada por él mismo, en la que ocurre esa misma constante lógica. Esas condiciones se desprenden de los ataques posibles de **O**. Una manera de ver la relación entre deducción natural y reglas estratégicas es que las últimas de cierto modo se desarrollan en sentido inverso respecto a la deducción natural. En efecto, las reglas que determinan una estrategia de ganancia, determinan que si, por ejemplo, **P** afirma una conjunción, **P** tiene una estrategia ganadora sii **P** tiene una estrategia para toda componente de esa conjunción requerida por **O**:

Deducción Natural	\wedge	Estrategia Dialógica
A B ----- $A \wedge B$		$\mathbf{P} A \wedge B$ ----- $\mathbf{O} ?_{\wedge L}$ $\mathbf{P} A$ $\mathbf{O} ?_{\wedge R}$ $\mathbf{P} B$

Dualmente la regla de eliminación de una constante lógica corresponde en la dialógica a una regla que describe la condiciones requeridas para que el Proponente tenga una estrategia ganadora respecto a una aserción afirmada por el Oponente, en la que ocurre esa misma constante lógica. Esas condiciones se desprenden de los ataques posibles de **P** y constituyen respuestas de **O** contra al menos una de las cuales **P** tiene que tener una estrategia ganadora: Ejemplo:

Deducción Natural	\wedge	Estrategia Dialógica
$A \wedge B$ ----- A		$\mathbf{O} A \wedge B$ ----- $\mathbf{P} ?_{\wedge L}$ $\mathbf{O} A$
$A \wedge B$ ----- B		$\mathbf{O} A \wedge B$ ----- $\mathbf{O} ?_{\wedge R}$ $\mathbf{P} B$

¹⁵ Para la prueba de que las reglas de introducción (y eliminación) corresponden a estrategias ganadoras de **P** donde **P** (**O**) afirma la proposición que contiene la constante lógica en juego, ver Rahman / Clerbout / Keiff (2009), Clerbout (2014a,b), Clerbout / Rahman(2015).

Nótese que la regla local se utiliza en ambos casos, y es por eso que las reglas resultantes para el nivel estratégico (nivel de validez) son armónicas: **las elecciones posibles que el Proponente tiene derecho a realizar** en las reglas de eliminación son exactamente **los mismos que el Oponente tiene derecho a realizar en el contexto de las reglas de introducción**. En consecuencia, es fácil ver que las reglas para *tonk* no se corresponden con ninguna regla local posible. La regla local para *tonk* debería ser formulada como una regla para jugadores anónimos (es decir, como una regla *simétrica*). Pero esto no es posible si queremos que coincida con las reglas de inferencia postuladas por Prior. Una regla para un jugador independiente, debe tener una de las siguientes formas:

X-AtonkB
Y- ?tonk
X-B

En este caso la regla de eliminación de Prior será incongruente con la pretendida regla de significado local. Dado que, según la regla de eliminación de Prior, **O** afirmará *A*, aunque debería afirmar *B*. Debe quedar claro que la segunda opción tampoco funciona bien:

X- AtonkB
Y- ?tonk
X- A

Aquí es la regla de introducción de Prior la que no coincide con la regla local. Dado que en este caso **P** debiera responder *A* y no *B*. Hemos supuesto aquí que el defensor no tiene realmente otra opción. Si asumimos en su lugar que el defensor puede optar por una de las componentes, no se explica por qué la regla de introducción fija *A* y no *B* y por qué en la regla de eliminación solo se considera la respuesta *B* de **O** (si **O** puede elegir acaso pudiese elegir *A*, pero entonces la estrategia ganadora debiera incluir ambas posibilidades). Por lo tanto, estas posibilidades se desmoronan de inmediato. Avancemos ahora un paso más en el asunto.

4.4 Sobre la Armonía Dialógica

Mientras que la respuesta de la Deducción Natural para *tonk* se basa en la íntima coordinación entre reglas de síntesis y análisis, la respuesta dialógica se basa en la idea de que la coordinación entre las reglas de introducción y eliminación debe ser consecuencia de las prescripciones de composición especificadas por las reglas locales. Como se discutió en la sección precedente, si las reglas de introducción y eliminación se definen como emergiendo de estrategias ganadoras para **P**, contendrán necesariamente en su núcleo la misma noción de significado, es decir, la especificada por las reglas locales *simétricas*. En efecto, nótese que las estrategias se definen como un subconjunto de partidas constituidas por movimientos que despliegan la aplicación de reglas locales (véase el apéndice).

Una manera de hacer explícito el hecho de que la armonía entre las reglas de inferencia es, en la perspectiva dialógica, el resultado de reglas locales simétricas es mostrar que incluso las reglas de conversión β y η mencionadas anteriormente, se derivan ambas de la formulación de una sola regla de igualdad para jugadores independientes.

Con el propósito de realizar esto invocamos el enfoque dialógico desarrollado recientemente para CTT en Clerbout / Rahman (2015) y Rahman / Clerbout (2014a,b), según el cual una proposición se concibe como un conjunto de objetos lúdicos. La idea ahora es diseñar juegos dialógicos en los que las afirmaciones de los jugadores tienen la forma $c : A$. Las reglas estándar para el significado local nos dan la información necesaria de cómo atacar y defender una tal afirmación. Más precisamente la regla local proporciona la información básica sobre aquello en lo que consiste el objeto lúdico para una expresión dada:

- Un objeto lúdico c para $\mathbf{X} A \wedge B$ está constituido por dos componentes: la componente izquierda de c ($L^\wedge(c)$) y su componente derecha ($R^\wedge(c)$). Mientras que la componente izquierda de c provee un objeto lúdico para el elemento izquierdo de la conjunción afirmada por \mathbf{X} , y ambos, el objeto lúdico y el elemento izquierdo constituyen la nueva afirmación $\mathbf{X} L^\wedge(c) : A$. Análogamente la componente derecha de c provee un objeto lúdico para el segundo elemento de la conjunción y ello constituye la nueva afirmación $\mathbf{X} R^\wedge(c) : B$. De acuerdo a la regla local estándar para la conjunción, es el jugador \mathbf{Y} , el atacante, el que puede elegir entre demandar que se ejecute $L^\wedge(c) : A$ o $R^\wedge(c) : B$ (o uno después del otro).
- La regla para $\mathbf{X} A \vee B$ es similar a la de la conjunción excepto que ahora es el jugador \mathbf{X} quien puede elegir entre responder con $L^\vee(c) : A$ o con $R^\vee(c) : B$.

Esto genera la siguiente regla local para la conjunción:

$\vee, \wedge,$	Ataque	Defensa
$\mathbf{X} - c : A \wedge B$	$\mathbf{Y} - : ?_{\wedge L}$ \circ $\mathbf{Y} - : ?_{\wedge R}$ (\mathbf{Y} elige)	$\mathbf{X} - L^\wedge(c) : A$ respectivamente $\mathbf{X} - R^\wedge(c) : B$

En tal marco, es posible definir las reglas de igualdad (ver Clerbout / Rahman (2015)), que no solo identifican el objeto lúdico que constituye el componente prescrito por la regla local, sino que también aseguran que el objeto lúdico elegido es exactamente el que resulta de la consideración de la "historia" de la partida. La cuestión es entonces, que si tenemos reglas de igualdad para objetos lúdicos, en cada partida se puede determinar cuáles son las componentes que determinan el significado (local) de la constante lógica en juego. Vamos a ejemplificar estas reglas con el caso de la conjunción:

Si el jugador \mathbf{X} afirma que el objeto lúdico c_l constituye la componente izquierda del objeto lúdico c para la conjunción $A \wedge B$, (es decir, si durante la partida \mathbf{X} afirma $c_l : A$, habiendo afirmado antes $c : A \wedge B$ y $L^\wedge(c) : A$), entonces \mathbf{Y} puede pedir a \mathbf{X} que muestre la igualdad entre el objeto lúdico izquierdo de c y el objeto lúdico c_l elegido. Es decir, \mathbf{Y} puede pedir a \mathbf{X} que afirme la igualdad $L^\wedge(c) = c_l : A$.

Análogamente se define la igualdad de objetos lúdicos para el lado derecho de la conjunción. En total obtenemos la siguiente tabla:

	Ataque	Defensa
$\mathbf{Y} \text{-} L^{\wedge}(c) / ?$... $\mathbf{X} \text{-} c_1 : A$	$\mathbf{Y} \text{-} ?L^{\wedge}\text{-Eq}$	$c_1 = L^{\wedge}(c) : A$
$\mathbf{Y} \text{-} R^{\wedge}(c) / ?$... $\mathbf{X} \text{-} c_2 : B$	$\mathbf{Y} \text{-} ?R^{\wedge}\text{-Eq}$	$\mathbf{X} \text{-} c_2 = R^{\wedge}(c) : B$

Por lo tanto, en cualquier partida, siempre es posible invocar estas normas con el fin de comprobar si el objeto lúdico izquierdo (o derecho) proporciona o no el componente significativo adecuado prescrito por la regla local para la conjunción, independientemente de quién es el jugador que postuló la conjunción. Supongamos que \mathbf{X} es el Oponente e \mathbf{Y} el Proponente. Así, en cada partida donde \mathbf{O} propone la conjunción $A \wedge B$, \mathbf{P} puede pedirle que postule una (o ambas) de las dos igualdades posibles. Supongamos además que \mathbf{P} tiene una estrategia ganadora, entonces hay un conjunto de partidas (ganadas por \mathbf{P}), donde (al menos) una de las igualdades ocurrirá. Puesto que las igualdades son provocadas por la posición de una conjunción de \mathbf{O} , y como se mencionó anteriormente, en el nivel estratégico las reglas aplicadas a las aserciones de \mathbf{O} corresponden a las reglas de eliminación, resulta entonces una aplicación de la regla β . De hecho, vamos a escribir la regla para \mathbf{O} de la siguiente manera - donde nos saltamos los movimientos de sustitución que conducen a las afirmaciones de la parte izquierda y derecha de la conjunción (pero anotamos los componentes de c):

$\mathbf{O} \ c : A \wedge B$... $\mathbf{O} \ c_1 : A \quad \mathbf{O}! \ c_2 : B$ ----- $\mathbf{P} \ ?L^{\wedge}\text{-Eq}$... $\mathbf{O} \ c_1 = L^{\wedge}(c_1, c_2) : A$	$\mathbf{O} \ c : A \wedge B$... $\mathbf{O} \ c_1 : A \quad \mathbf{O} \ c_2 : B$ ----- $\mathbf{P} \ ?R^{\wedge}\text{-Eq}$... $\mathbf{O} \ c_2 = R^{\wedge}(c_1, c_2) : B$
---	--

A fin de obtener la forma completa de la formulación CTT de la regla β (como presentada en 3.2), todo lo que tenemos que hacer ahora es eliminar a los jugadores, el desafío, y sustituir L^{\wedge} con la proyección p y R^{\wedge} con la proyección q . Las dos reglas corresponden a las dos opciones de \mathbf{P} : puesto que asumimos que se trata de una estrategia ganadora de \mathbf{P} , solo una de las dos opciones podría ser requerida, es por eso que estas elecciones dan dos reglas diferentes.

Volvamos ahora nuestra atención al caso en que \mathbf{X} es \mathbf{P} . Por un razonamiento análogo podemos concluir que \mathbf{P} (\mathbf{O} tiene las elecciones) tiene una estrategia ganadora si y solamente si puede ganar independientemente de las elecciones de \mathbf{O} . Así, la regla cubrirá ambas obligaciones de \mathbf{P} :

$$\begin{array}{l}
\mathbf{P} c : A \wedge B \\
\dots \\
\mathbf{P} c_1 : A \quad \quad \mathbf{O}! c_2 : B \\
\hline
\mathbf{O} ?L^{\wedge}\text{-Eq} \\
\dots \\
\mathbf{P} c_1 = L^{\wedge}(c_1, c_2) : A \\
\mathbf{O} ?R^{\wedge}\text{-Eq} \\
\dots \\
\mathbf{P} c_2 = R^{\wedge}(c_1, c_2) : B
\end{array}$$

Luego de eliminar los jugadores y los ataques, resta:

$$\begin{array}{l}
c : A \wedge B \\
\dots \\
c_1 : A \quad \quad c_2 : B \\
\hline
c_1 = L^{\wedge}(c_1, c_2) : A \\
c_2 = R^{\wedge}(c_1, c_2) : B
\end{array}$$

Si lo escribimos todo junto como una conclusión única obtenemos:

$$\begin{array}{l}
c : A \wedge B \\
\dots \\
c_1 : A \quad \quad c_2 : B \\
\hline
c = (c_1, c_2) = (L^{\wedge}, R^{\wedge}) : A \wedge B
\end{array}$$

que es la regla η .

De hecho, esta es una versión "computarizada" de la regla η , ya que dice exactamente cuáles son los componentes de c - mientras que la regla original solo transmite la información de que c se compone de un lado derecho y otro izquierdo. En efecto, en el enfoque dialógico, el uso de las reglas de igualdad en el nivel estratégico es el resultado de un nivel de juego donde los componentes ya se han especificado. Por lo tanto, a nivel de estrategias, ya tenemos la información de la "historia" de la composición de los objetos lúdicos para la proposición de que se trate.

El desarrollo precedente muestra que incluso aquellas reglas que hacen explícita la armonía, esto es, las reglas estratégicas, son, desde el punto de vista dialógico, el resultado de una regla local de igualdad única formulada como una norma argumentativa para jugadores anónimos. En este contexto las reglas de igualdad a nivel estratégico no son las productoras de armonía sino las que elucidan el vínculo entre la noción de regla para jugador anónimo y armonía.

Conclusiones

Un breve examen de la literatura más reciente en la filosofía de la lógica hará evidente que una gran parte de la investigación en esta área está dedicada al estudio de la interfaz entre los juegos, la lógica y la epistemología. Estos estudios proporcionan la base de las investigaciones en curso en la historia y la filosofía de la lógica, que va desde la India, Grecia, el mundo árabe, las *obligaciones* de la Edad Media y hasta los desarrollos más actuales en el campo de la informática teórica, la lingüística computacional, inteligencia artificial, el razonamiento jurídico y la modelización de la decisión racional en ciencias sociales. De hecho, un *giro dinámico*, como Johan van Benthem lo llama, está teniendo lugar donde los aspectos epistémicos de la inferencia se vinculan con enfoques lúdicos (*game theoretical approaches*) de la teoría del significado. Con respecto al nacimiento de este giro, podría colocarse alrededor de la década de 1960, cuando Paul Lorenzen y Kuno Lorenz desarrollaron la dialógica lógica, inspirada en los juegos de lenguaje de Wittgenstein y la teoría matemática de juegos, y cuando cierto tiempo después Jaakko Hintikka combinó la semántica de teoría de juegos con lógica epistémica (modal). Si tuviéramos que señalar una fecha específica, los inicios del giro dinámico podrían estar situado en el año 1958, con la conferencia "*Logik und Agon*" de Lorenzen.

La idea seminal de Lorenzen fue vincular la noción de significado como uso de Wittgenstein con un sistema de reglas de interacción argumentativa. Desde este punto de vista una teoría pragmática del significado no es solo un sistema de reglas de inferencia, sino un sistema de reglas de interacción que estructura diferentes niveles de significado por medio de diferentes niveles de reglas. De hecho, desde nuestro punto de vista, *tonk* amenaza enfoques pragmáticos en donde no se diferencian diferentes niveles de reglas. La armonía intrínseca es una respuesta de los teóricos de la prueba (*proof-theoreticians*) al desafío de Prior, y la distinción de CTT entre formación, introducción-eliminación, y reglas de igualdad, reconoce este hecho.

Sin embargo, nuevamente, si una teoría pragmática del significado se implementa como un sistema de reglas para la interacción argumentativa estructurada en distintos niveles, a saber, el nivel local, el nivel global y el nivel estratégico, entonces la armonía, que corresponde a la correlación entre las reglas que definen el nivel estratégico, resulta naturalmente de la simetría de las reglas del nivel más fundamental, es decir, el nivel local. En otras palabras las reglas locales formuladas como reglas para jugadores anónimos proveen no solo el fundamento del significado sino que son también responsables de la *emergencia* de reglas armónicas de estrategia (o inferencia).

Apéndice: Una Presentación Técnica Condensada de Lógica dialógica estándar¹⁶

Sea L un lenguaje de primer orden construido en base a conectivas proposicionales, cuantificadores, un conjunto numerable de variables individuales, un conjunto numerable de constantes individuales y un conjunto numerable de símbolos de predicado (cada uno con una aridad fija).

Extendemos el lenguaje L con dos etiquetas O y P que corresponden a los participantes del diálogo, y el signo de interrogación "?". Cuando la identidad del jugador no importa, utilizamos variables X o Y (con $X \neq Y$). Un movimiento es una expresión de la forma $X-e$, donde e es o bien una proposición A de L o una de las expresiones siguientes: $?_{\wedge i}$ ($i=L$ o $i=R$), $?_{\vee}$, $?_{[A(a/x)]}$, $?_{[A(a_1/x), \dots, A(a_n/x)]}$.

Hay dos tipos distintos de reglas llamadas reglas de partículas (que proveen el significado local) y reglas estructurales (que proveen el significado global). Comenzamos con las reglas de partículas.

Movimiento previo	$X-A \wedge B$	$X-A \vee B$	$X-A \rightarrow B$	$X-\neg A$
Ataque	$Y-?_{\wedge L}$ o $Y-?_{\wedge 2}$	$Y-?_{\vee}$	$Y-A$	$Y-A$
Defensa	$X-A$ resp. $X-B$	$X-A$ o $X-B$	$X-B$	--

Movimiento previo	$X-\forall xA$	$X-\exists xA$
Ataque	$Y-?_{[A(a/x)]}$	$Y-?_{[A(a_1/x), \dots, A(a_n/x)]}$
Defensa	$X-A(a/x)$	$X-A(a_i/x)$ con $1 \leq i \leq n$

En esta tabla, una expresión de tipo a_i es una constante individual y $A(a_i/x)$ expresa la proposición obtenida mediante la sustitución de cada ocurrencia de x en A por a_i . Cuando un movimiento consiste en una pregunta de la forma ' $?_{[A_1, \dots, A_n]}$ ' o de la forma ' $?_{\vee}$ ', el otro jugador elige una proposición entre A_1, \dots, A_n y la juega. Así, podemos —en términos de qué jugador tiene una opción— distinguir entre la conjunción y disyunción, por una parte, y la cuantificación universal y la existencial, por otra parte. En los casos de la conjunción y la cuantificación universal, el retador (o atacante) elige, mediante un ataque de la forma ' $?_{\wedge i}$ ' (para la conjunción) o de la forma ' $?_{[A(a/x)]}$ ' (para el universal) la proposición por la cual preguntar. Por el contrario, en los casos de disyunción y cuantificación

¹⁶ La siguiente presentación de lógica dialógica estándar ha sido resumida de Clerbout (2013, 2014) y ligeramente adaptada a la notación utilizada en el presente artículo.

existencial, el defensor es el único que puede elegir entre varias proposiciones. Obsérvese que no hay defensa en el caso de la regla de partículas para la negación.

Las reglas de partículas proporcionan una descripción abstracta de cómo se procede en el diálogo a nivel local: especifican el modo en el que una proposición puede atacarse y defenderse de acuerdo con su constante lógica principal. Decimos que tales reglas gobiernan el nivel local del significado. En rigor, las expresiones que aparecen en la tabla más arriba no son movimientos reales porque tienen proposiciones esquemáticas y los jugadores no están especificados. Además, estas reglas son indiferentes al rol de la proposición en las diversas variedades de diálogos en los que pueda intervenir: por ejemplo las reglas locales de las constantes lógicas no varían si los diálogos son clásicos o intuicionistas. Por este motivo decimos que la descripción dada por las reglas de partículas es en cierto modo abstracta. Las expresiones "ataque" y "defensa" son convenientes para prescribir ciertas interacciones entre movimientos. Tales interacciones pueden ser definidas con precisión de la forma siguiente. Sea Σ una secuencia de movimientos. La función p_Σ asigna una posición para cada movimiento en Σ , comenzando con 0. La función F_Σ asigna un par $[m, Z]$ para ciertos movimientos N en Σ , donde m denota una posición menor que $p_\Sigma(N)$ y Z es o bien \mathbf{A} (un ataque) o bien \mathbf{D} (una defensa). Es decir, la función F_Σ permite seguir la "historia" de las interacciones ataque-defensa que originaron un movimiento dado. Un diálogo (o partida) es una secuencia legal de movimientos, es decir, una secuencia de movimientos que observa las reglas del juego. La segunda clase de reglas que hemos mencionado, las reglas estructurales, dan las condiciones exactas en las que una oración dada genera un juego dialógico. Un juego dialógico para A , escrito $D(A)$, es el conjunto de todas las partidas con A como la tesis (ver la regla de inicio más abajo). Las reglas estructurales son las siguientes:

SR0 (regla de inicio) Sea A una proposición compleja¹⁷ de L . Para cada $\pi \in D(A)$ tenemos:

- $p_\pi(\mathbf{P}-A)=0$,
- $p_\pi(\mathbf{O}-n:=i)=1$,
- $p_\pi(\mathbf{P}-m:=j)=2$

En otras palabras, cualquier partida π en $D(A)$ comienza con $\mathbf{P}-A$. Llamamos A a la tesis de la partida y del juego dialógico correspondiente. Después de eso, el Oponente y el Proponente eligen sucesivamente un número entero positivo llamado *rango de repetición*. El papel de este entero es asegurar que cada partida termine después de un número finito de movimientos, de una manera especificada por la siguiente regla estructural.

SR1 (Regla Clásica)

- Sea $\pi \in D(A)$. Para cada M en π donde $p_\pi(M) > 2$ tenemos $F_\pi(M) = [m', Z]$ donde $m' < p_\pi(M)$ y $Z \in \{\mathbf{A}, \mathbf{D}\}$
- Sea r el rango de repetición del jugador \mathbf{X} y $\pi \in D(A)$ tal que
 - el último miembro de π es un movimiento de \mathbf{Y} ,
 - M_0 es un movimiento de \mathbf{Y} de posición m_0 en π ,
 - M_1, \dots, M_n son los movimientos de \mathbf{X} en π tal que $F_\pi(M_1) = \dots = F_\pi(M_n) = [m_0, Z]$.

¹⁷ Si la tesis es una proposición elemental, hay que implementar una pequeña modificación de la regla formal SR2, como detallamos más abajo.

Considérese la secuencia¹⁸ $\pi' = \pi * N$ donde N es un movimiento de \mathbf{X} tal que $F_{\pi}(N) = [m_0, Z]$.
 Tenemos $\pi' \in D(A)$ solo si $n < r$.

La primera parte de la regla establece que cada movimiento después de la elección de los rangos de repetición es o bien un ataque o una defensa. La segunda parte se asegura la finitud de las partidas mediante el establecimiento de un rango de repetición del jugador como el número máximo de veces que puede desafiar o defenderse de un movimiento determinado de otro jugador.

SR2 (Regla formal) Sea B una proposición elemental, N el movimiento \mathbf{P} - B y M el movimiento \mathbf{O} - B . Una secuencia π de movimientos es una partida solo si se cumple: si $N \in \pi$ entonces $M \in \pi$ y $p_{\pi}(M) < p_{\pi}(N)$.

Es decir, si el Proponente afirmó una proposición elemental, entonces \mathbf{O} la afirmó ya antes. En el caso de juegos en los que se permite que la tesis sea una proposición elemental, hay que reformular la regla formal de la siguiente manera:

SR2* (Regla formal modificada): \mathbf{O} puede atacar una proposición atómica si y solo si él mismo no la afirmó aun. Solo el oponente puede atacar proposiciones atómicas. El proponente se defiende de un ataque a una proposición atómica, mostrando que en el ulterior desarrollo del juego el oponente será forzado a conceder la proposición atómica atacada, digamos en el movimiento n . En cuanto \mathbf{O} jugó n , entonces \mathbf{P} , se defiende del ataque, respondiendo sic (n) (léase: acabas de conceder en n la proposición atómica buscada)

Decimos que una partida es terminal cuando no puede ampliarse en sucesivos movimientos legales. Decimos que es \mathbf{X} -terminal cuando el último movimiento en la partida es un movimiento del jugador \mathbf{X} .

SR3 (Regla de ganancia) El jugador \mathbf{X} gana la partida π solo si es terminal \mathbf{X} .

Considérese por ejemplo las siguiente secuencia de movimientos: \mathbf{P} - $Qa \rightarrow Qa$, \mathbf{O} - $n:=1$, \mathbf{P} - $m:=12$, \mathbf{O} - Qa , \mathbf{P} - Qa , que pueden ser escritas del siguiente modo:

	O			P	
				$Qa \rightarrow Qa$	0
1	$n:=1$			$m:=12$	2
3	Qa	(0)		Qa	4

Los números de las columnas externas son las posiciones de los movimientos en la partida. Cuando un movimiento es un ataque, la posición del movimiento desafiado se indica en las columnas internas, como ocurre con movimiento 3 en este ejemplo. Nótese

¹⁸ Usamos $\pi * N$ para denotar la secuencia obtenida agregando el movimiento N al juego π .

que este tipo de tablas llevan la información facilitada por las funciones p y F , además de representar la partida en sí.

Sin embargo, cuando queremos considerar varias partidas juntas –por ejemplo en la construcción de una estrategia– dichas tablas no proporcionan el medio de representación más adecuado. De hecho, cuando queremos representar la construcción de una estrategia usamos lo que se conoce como la *forma extensiva*. La forma extensiva del diálogo $D(A)$ es simplemente la representación del árbol del mismo, también a menudo llamado *árbol-lúdico*. Más precisamente, la forma extensiva E_A de $D(A)$ es el árbol (T, l, S) tal que:

- i) Cada nodo t en T está etiquetado con el movimiento que ocurre en $D(A)$.
- ii) $l: T \rightarrow N$ $l: T \rightarrow N$
- iii) $S \subseteq T^2$ donde:
 - Hay un único t_0 (la raíz) en T tal que $l(t_0)=0$, y t_0 es etiquetado con la tesis del juego.
 - Para cada $t \neq t_0$ hay un único t' tal que $t'St$.
 - Para cada t y t' en T , si $t'St'$ entonces $l(t')=l(t)+1$.
 - Dada la partida π en $D(A)$ tal que $p_\pi(M')=p_\pi(M)+1$ y t, t' respectivamente etiquetadas con M y M' , entonces $t'St'$.

Una *estrategia* para un jugador X en $D(A)$ es una función que asigna un movimiento M a cada partida no terminal π con un movimiento Y como último miembro tal que, si extendemos π con M obtenemos una partida. Una estrategia de X es *ganadora* si jugando de acuerdo con ella nos lleva a una victoria de X sin importar cómo juegue Y .

La forma extensiva de una estrategia σ de X en $D(A)$ es el fragmento de árbol $E_{A,\sigma}=(T_\sigma, l_\sigma, S_\sigma)$ de E_A tal que:

- i) la raíz de $E_{A,\sigma}$ es la raíz de E_A .
- ii) Dado el nodo t en E_A etiquetado con un movimiento X , tenemos que $t'S_\sigma t'$ sea cual fuere $t'St'$.
- iii) Dado el nodo t en E_A etiquetado con un movimiento Y y con al menos un t' tal que $t'St'$, entonces hay una única $\sigma(t)$ en T_σ donde $t'S_\sigma \sigma(t)$ y $\sigma(t)$ es etiquetada con el movimiento de X prescrito por σ .

He aquí algunos ejemplos de resultados metalógicos obtenidos en la literatura reciente y que corresponden al nivel de las estrategias.¹⁹

- Estrategias de ganancia para P y hojas. Sea w una estrategia ganadora para P en $D(A)$. Entonces, cada hoja en $E_{A,w}$ está etiquetada con una proposición elemental de P .
- Determinación. Hay una estrategia ganadora para X en $D(A)$ si y solo si no hay una estrategia para Y en $D(A)$.
- Corrección y Completitud para tablas semánticas (también llamadas árboles semánticos). Considérese una tabla semántica de primer orden y una estrategia dialógica de primer orden. Hay una tabla cerrada para A si y solo si existe una estrategia ganadora para P en $D(A)$.
- Dado que las tablas semánticas (para lógica de primer orden) son correctas y completas respecto a una semántica modelo-teórica; se sigue que la existencia de una estrategia ganadora para P coincide con la validez. Es decir: Hay una estrategia ganadora para P en $D(A)$ si y solo si A es válida.

¹⁹ Estos resultados están probados, junto con otros, en Clerbout (2013).

EJEMPLOS DE FORMAS EXTENSIVAS

Las formas extensivas de juegos dialógicos y de estrategias son árboles generados infinitamente (árboles con un número infinito de ramas). Así, no es posible representarlos en su totalidad. Pero una ilustración sigue siendo útil, por lo que añadimos las siguientes figuras 1 y 2 a continuación:

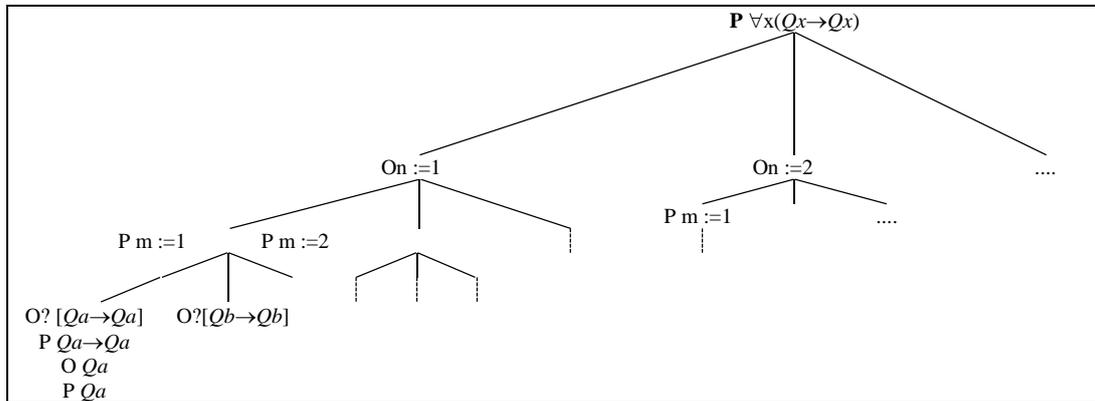


Figura 1

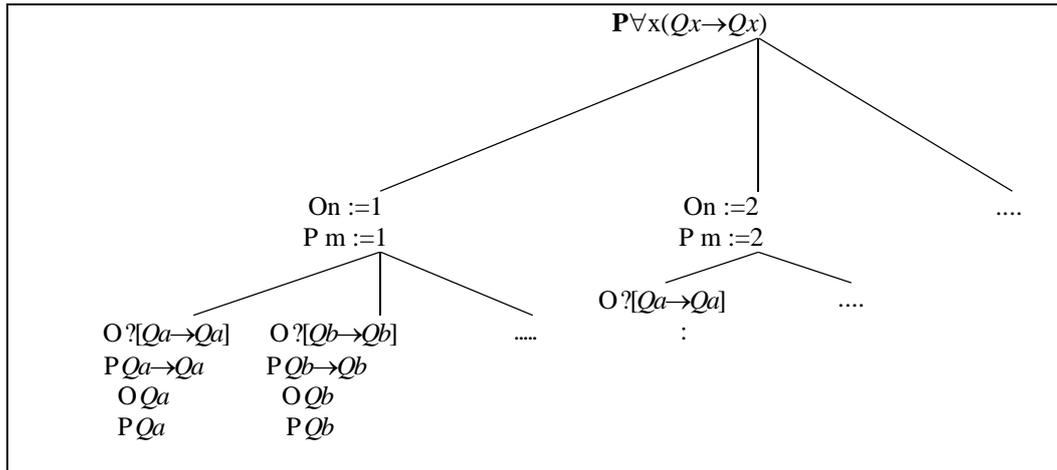


Figura 2

--La Figura 1 representa parcialmente la forma extensiva del juego dialógico para la proposición $\forall x(Q(x) \rightarrow Q(x))$. Cada partida en este diálogo se representa como una rama en la forma extensiva: hemos dado un ejemplo en el que la rama de la izquierda representa una de las partidas más simples y más cortas en el juego dialógico. La raíz de la forma extensiva se etiqueta con la tesis. Después de eso, el oponente tiene un número infinito de opciones posibles para su rango de repetición: esto está representado por el número infinito de sucesores inmediatos en la raíz de la forma extensiva. Lo mismo vale para el rango de repetición del Proponente, y por cada vez que un jugador va a elegir una constante individual.

--La Figura 2 representa parcialmente la forma extensiva de la estrategia del Proponente en este juego. Se trata de un fragmento del árbol de la Figura 1 en la que cada nodo etiquetado con un movimiento de **O** tiene a lo sumo un sucesor. No mantenemos más que un registro de todas las opciones posibles para **P**: cada vez que el Proponente tiene una opción en el juego, la estrategia selecciona exactamente uno de los movimientos posibles. Pero como todas las formas posibles para que el Oponente juegue deben ser tomadas en cuenta por una estrategia, las otras ramificaciones se mantienen. En nuestro ejemplo, la estrategia prescribe la elección del mismo rango de repetición que el Oponente. Por supuesto que hay un número infinito de otras estrategias disponibles para **P**.

Referencias

Belnap, N. D. (1962). "Tonk, plonk and plunk". *Analysis*, vol. 22, pp. 130-134.

Brandom, R. B (2000). *Articulating Reasons*. Cambridge, Mass.: Harvard UP.

Clerbout, N. (2013). "First-Order Dialogical games and Tableaux". *Journal of Philosophical Logic*. Online first Publication – DOI: 10.1007/s10992-013-9289-z.

Clerbout, N. (2014a). *Etude sur quelques sémantiques dialogiques. Concepts fondamentaux et éléments de métathéorie*. London: College Publications.

Clerbout, N. (2014b). "Finiteness of plays and the dialogical problem of decidability". *If-CoLog Journal of Logics and their Applications*1(1), pp. 115-130.

Clerbout, N. / Gorisse, M.-H. / Rahman, S. (2011). "Context-sensitivity in Jain Philosophy. A dialogical study of Siddharsigani's Commentary on the Handbook of Logic". *Journal of Philosophical Logic*, 40:5, pp. 633-662, 2011.

Clerbout, N. / Rahman, S. (2015). *Linking Games and Constructive Type Theory: Dialogical Strategies, CTT-Demonstrations and the Axiom of choice*. Dordrecht: Springer, en prensa.

- Dummett, M. (1973). *Frege: Philosophy of Language*. London: Duckworth.
- Dummett, M. (1991). *The Logical Basis of Metaphysics*. London: Duckworth.
- Dummett, M. (1993). "Language and truth". En: M. Dummett, *The Seas of Language*. Oxford: Clarendon Press, pp 117–65.
- Fiutek, V. / Rückert, H. / Rahman, S. (2010). "A Dialogical Semantics for Bonanno's System of Belief Revision". En: P. Bour et alii (eds.), *Constructions*, London: College Publications, pp. 315-334.
- Fontaine, M. (2013). *Argumentation et engagement ontologique de l'acte intentionnel. Pour une réflexion critique sur l'identité dans les logiques intentionnelles explicites*. London: College Publications.
- Gentzen, G. (1969). *The Collected Papers of Gerhard Gentzen*, Amsterdam: North-Holland, 1969.
- Gentzen, G. (1935). "Untersuchungen über das logische Schliessen". *Mathematische Zeitschrift*, vol. 39 (1934-1935), pp. 176-210. También en Gentzen (1969), pp. 68-131.
- Granström, J. (2011). *Treatise on Intuitionistic Type Theory*, Dordrecht: Springer, 2011.
- Keiff, L. (2004a). "Heuristique formelle et logiques modales non normales". *Philosophia Scientiae* 8:2, pp. 39-57, 2004.
- Keiff, L. (2004b). "Introduction à la dialogique modale et hybride". *Philosophia Scientiae* 8:2, pp. 89-102, 2004.
- Keiff, L. (2007). *Le Pluralisme Dialogique. Approches dynamiques de l'argumentation formelle*. PHD thesis, Lille: Université de Lille, 2007.
- Keiff, L. (2009). "Dialogical Logic". *Sanford Encyclopedia of Philosophy*, online (versión 2013), 2009.
- Lorenz, K. (2001). "Basic objectives of dialogue logic in historical perspective". En: Rahman / Rückert (2001), pp. 255-263.
- Lorenz, K. (2008). *Dialogischer Konstruktivismus*. Berlin / New York: de Gruyter, 2008.
- Lorenz, K. (2010a). *Philosophische Variationen: Gesammelte Aufsätze Unter Einschluss Gemeinsam Mit Jürgen Mittelstrass Geschriebener Arbeiten Zu Platon Und Leibniz*. Berlin / New York: De Gruyter, 2010.
- Lorenz, K. (2010b). *Logic, Language and Method - On Polarities in Human Experience*. Berlin / New York: de Gruyter, 2010.
- Lorenzen, P. (1955). *Einführung in die operative Logik und Mathematik*. Berlin / Göttingen / Heidelberg: Springer, 1955.
- Lorenzen, P. "Logik und Agon". En: *Atti del XII Congresso Internazionale di Filosofia, Venezia*, Sansoni, 1960, pp. 187–194. (Reimpreso en Lorenzen / Lorenz (1978, pp. 1-8)).
- Lorenzen P. / Lorenz K. (1978). *Dialogische Logik*. Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft, 1978.
- Lorenzen P. / Schwemmer O. (1975). *Konstruktive Logik Ethik und Wissenschaftstheorie*. Mannheim: Bibliographisches Institut, 1975.
- Magnier, S. (2013). *Approche dialogique de la dynamique épistémique et de la condition juridique*. London: College Publications, 2013.
- Marion, M. / Rückert, H. (2012). "Aristotle on Universal Quantification". En prensa.
- Martin-Löf, P. (1984). *Intuitionistic Type Theory - Notes by Giovanni Sambin of a series of lectures given in Padua, June 1980*. Naples: Bibliopolis, 1984.

- Nordström, B. / Petersson, K. / Smith, J. M. (1990). *Programming in Martin-Löf's Type Theory - An Introduction*, Oxford: Oxford University Press, 1990.
- Popek, A. (2011). "Logical dialogues from Middle Ages". En: Barés et alii (eds.), *Logic of Knowledge. Theory and Applications*, London: College Publications, pp. 223-244, 2011.
- Popper, K. R. (1947a). "Logic without assumptions". *Proceedings of the Aristotelian Society*, 47, pp. 251-292.
- Popper, K. R. (1947b). "New foundations for logic". *Mind*, vol. 56, 193-235.
- Popper, K. R. (1949). "The trivialization of mathematical logic". *Proceedings of the 10th International Congress of Philosophy*, ed. E.W. Beth et al., Amsterdam: North Holland 1949, pp. 722-727.
- Prawitz, D. (1965). *Natural Deduction*. Stockholm: Almqvist & Wiksell, 1965.
- Prawitz, D. (1971). "Ideas and results in proof theory". En: J. -E. Fenstad (ed.), *Proceedings of the Second Scandinavian Logic Symposium*, North-Holland, Amsterdam, pp. 235-308.
- Prawitz, D. (1994). "Review of Dummett (1991)". *Mind*, vol.103, pp. 373-376
- Primiero, G. (2008). *Information and Knowledge. A Constructive Type-theoretical Approach*. Dordrecht: Springer.
- Primiero, G. / S. Rahman (ed.) (2009). *Acts of Knowledge: History, Philosophy and Logic: Essays Dedicated to Goran Sundholm*, pp. 301-336. London: College Publications, 2009.
- Prior, A. N. (1960). "The Runabout Inference-Ticket". *Analysis*, vol. 21, No. 2, pp. 38-39
- Rahman, S. (2012). "Negation in the Logic of First Degree Entailment and Tonk: a Dialogical Study". En: S. Rahman, G. Primiero, and M. Marion (eds.), *The Realism-Antirealism Debate in the Age of Alternative Logics*, Dordrecht: Springer, pp. 213–250.
- Rahman, S. / Clerbout, N. (2014). "Constructive Type Theory and the Dialogical Turn". En: J. Mittelstrass / C. von Bülow (eds.), *Dialogische Logik*, Münster: Mentis, pp. 91-148.
- Rahman, S. / Keiff, L. (2004). "On How to be a Dialogician". En: D. Vanderveken (ed.), *Logic, Thought and Action*, Dordrecht: Kluwer, pp. 359-408.
- Rahman, S. / Keiff, L. (2010). "La Dialectique entre logique et rhétorique". *Revue de Métaphysique et de Morale* 66:2, pp. 149-178.
- Rahman, S. / Clerbout, N. / Keiff, L. (2009). "On Dialogues and Natural Deduction". En: S. Rahman / G. Primiero, G. (eds.), *Acts of Knowledge - History, Philosophy, Logic*, London: College Publications, pp. 301-336.
- Rahman, S. / Jovanovic, R. / Clerbout, N. (2015). "Knowledge and its Game Theoretical Foundations: The challenge of the Dialogical Approach to Constructive Type Theory". En: A. Nepomuceno et alii. (eds.) *The Dynamics of Knowledge: From Epistemology to Sciences and Back*. En preparación.
- Rahman, S. / Clerbout, N. / McConaughey, Z. (2014). "On Play Objects and Dialogical Games: Towards a Dialogical Approach to Constructive Type Theory". En: P. Allo / V. v. Kerkhove (ed.), *Modestly radical or radically modes. Festschrift for Jean-Paul van Bendegem*. London: College Publications, pp. 127-154.
- Rahman, S. / Primiero, G. / Marion, M. (eds.) (2012). *The Realism-Antirealism Debate in the Age of Alternative Logics*, Dordrecht: Springer, 2012.
- Rahman, S. / Rückert, H. (eds.) (2001). "New Perspectives in Dialogical Logic". *Synthese*, vol. 127, 2001.
- Rahman, S. / Rückert, H. (2011). "Eine neue dialogische Semantik für lineare Logik". En: Rückert (2011).

- Rahman, S. / Tulenheimo, T. (2009). "From Games to Dialogues and Back: Towards a General Frame for Validity". En: O. Majer / A. Pietarinen / T. Tulenheimo (eds.), *Games: Unifying Logic, Language and Philosophy*, Dordrecht: Springer, pp. 153-208.
- Ranta, A. (1988). "Propositions as games as types". *Synthese* 76, pp. 377-395.
- Ranta, A. (1994). *Type-Theoretical Grammar*. Clarendon Press, 1994.
- S. Read (2000). "Harmony and Autonomy in Classical Logic". *Journal of Philosophical Logic*, 29, pp 123-154.
- S. Read (2008). "Harmony and Modality". En: C. Dégrémont / L. Keiff / H/ Rückert (eds.), *Dialogues, Logics and Other Strange Things. Essays in Honour of Shahid Rahman*, CP: London, pp. 285-304.
- Redmond, J. (2010). *Logique dynamique de la fiction. Pour une approche dialogique*. London: College Publications, 2010.
- Redmond, J. / Fontaine, M. (2011). *How to Play Dialogues. An Introduction to Dialogical Logic*, London: College Publications, 2011.
- Rückert, H. (2001). "Why Dialogical Logic? ". En: H. Wansing, (ed.), *Essays on Non-Classical Logic*, Singapore: World Scientific, pp. 165-185.
- Rückert, H. (2011). *Dialogues as a dynamic framework for logic*. London: College Publications, 2011.
- P. Schroeder-Heister (1984). "Popper's theory of deductive inference and the concept of a logical constant". *History and Philosophy of Logic*, vol. 5, pp. 79-110.
- P. Schroeder-Heister (2005). "Popper's structuralist theory of logic". En: I. Jarvie, K. Milford / D. Miller (eds.) *K. Popper: A Centenary Assessment*, London: Ashgate 2005. Versión online pp. 1-21.
- Schröder-Heister, P. (2008). "Lorenzen's operative justification of intuitionistic logic". En: M. van Atten / alii (eds.), *One Hundred Years of Intuitionism (1907-2007)*, Basel: Birkhäuser, pp. 214-240.
- Sundholm, G. (1983a). "Constructions, proofs and the meaning of the logical constants". *Journal of Philosophical Logic* 12 (2), pp. 151-172.
- Sundholm, G. (1983b). "Systems of deduction". En: D. Gabbay / F. Guentner (eds.), *Handbook of Philosophical Logic*, vol 1, Dordrecht: Reidel, pp. 133-188.
- Sundholm, G. (1986). "Proof-Theory and Meaning". En: D. Gabbay / F. Guentner (eds.), *Handbook of Philosophical Logic*, vol. 3, Dordrecht: Reidel, pp. 471-506.
- Sundholm, G. (1997). "Implicit epistemic aspects of constructive logic". *Journal of Logic, Language and Information* 6 (2), pp. 191-212.
- Sundholm, G. (1998). "Inference versus Consequence". En: T. Childers (ed.), *The Logica Yearbook 1997*, Prague: Filosofia, pp. 26-36.
- Sundholm, G. (2000). "Proofs as acts and proofs as objects: some questions for Dag Prawitz". *Theoria*, vol. 64 (1998, publicado en 2000), 2-3, pp. 187-216.
- Sundholm, G. (2001). "A Plea for Logical Atavism". En: O. Majer (ed.), *The Logica Yearbook 2000*, Prague: Filosofia, pp. 151-162.
- Sundholm, G. (2009). "A Century of Judgment and Inference: 1837–1936". En: L. Haaparanta (ed.), *The Development of Modern Logic*, Oxford: Oxford University Press, pp. 263-317.
- Sundholm, G. (2013). "Containment and Variation; Two Strands in the Development of Analyticity from Aristotle to Martin-Löf". En: M. van der Schaar (ed.), *Judgement and the Epistemic Foundation of Logic*, Dordrecht: Springer, pp. 23-35.