



**HAL**  
open science

## CAPÍTULO 2 EL MARCO DIALÓGICO ESTÁNDAR

Shahid Rahman, Nicolas Clerbout

► **To cite this version:**

Shahid Rahman, Nicolas Clerbout. CAPÍTULO 2 EL MARCO DIALÓGICO ESTÁNDAR . 2015.  
halshs-01237969

**HAL Id: halshs-01237969**

**<https://shs.hal.science/halshs-01237969>**

Preprint submitted on 9 Dec 2015

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



## CAPÍTULO 2<sup>1</sup>

### EL MARCO DIALÓGICO ESTÁNDAR

SHAHID RAHMAN Y NICOLAS CLERBOUT

La Lógica dialógica fue iniciada a finales de la década de 1950<sup>2</sup> por Paul Lorenzen y luego desarrollada por Kuno Lorenz<sup>3</sup>,

---

<sup>1</sup> Revisión y corrección del Capítulo 2 por MD Martínez Cazalla, doctoranda en Lógica, Universidad de Sevilla (España).

<sup>2</sup> De hecho, la lógica dialógica desarrollada por Paul Lorenzen y Kuno Lorenz, fue el resultado de una solución a algunos de los problemas que se suscitan en la Lógica Operativa de Lorenzen (1955) - para una discusión sobre las ideas y las deficiencias de la Lógica Operativa, ver Schröder-Heister (2008).

<sup>3</sup> Los principales trabajos originales se recogen en Lorenzen / Lorenz (1978). Para una visión histórica ver Lorenz (2001). Otros trabajos se han recogido más recientemente en Lorenz (2008, 2010a, b). Una relación detallada de los acontecimientos recientes desde Rahman (1993), se puede encontrar en Rahman / Keiff (2005), Keiff (2009) y Rahman (2012). Para la metalógica subyacente, ver Clerbout (2013, 2014a, b). Para las presentaciones de libros de texto: Lorenzen / Schwemmer (1975), Redmond / Fontaine (2011) y Rückert (2011). Para el papel clave de la dialógica en la recuperación de la relación entre la dialéctica y la lógica, véase Rahman / Keiff (2010). Los artículos de Keiff (2004a, b, 2007) y de Rahman (2009) contienen un estudio de lógica dialógica modal. Fiutek et al. (2010) estudian el enfoque dialógico de revisión de creencias. Clerbout / Gorisse / Rahman (2011) estudian la lógica de los Jainas en el marco dialógico. Popek (2012) desarrolla una reconstrucción dialógica de las *obligationes* medievales. Rahman / Tulenheimo (2009) estudian los vínculos entre el GTS y la lógica dialógica. Otros libros son Redmond (2010) que discute el tema de la ficción en el contexto dialógico, Fontaine (2013) que enlaza intencionalidad, ficción y diálogos y Magnier (2013) que desarrolla, en un marco dialógico, aplicaciones de la lógica epistémica dinámica para el razonamiento jurídico. Rahman y sus colaboradores comenzaron recientemente a estudiar el enfoque dialógico de la CTT, ver Clerbout / Rahman (2015), Rahman / Clerbout

ambos inspirados por la noción de Wittgenstein de significado como uso. La idea básica del enfoque dialógico, de la lógica, es que el significado de las constantes lógicas está dado por las normas o reglas para su uso y estas reglas se entienden como formas específicas de estructuración de la interacción argumentativa. Esta característica argumentativa subyacente a la dialógica, a menudo lleva a clasificarla como una teoría pragmática del significado.

De un modo más preciso, las reglas que fijan el significado pueden ser de más de un tipo y ellas determinan la reconstrucción de una práctica argumentativa y/o lingüística que una cierta forma de juegos de lenguaje, llamados diálogos, proporciona. Como se mencionó anteriormente, el enfoque dialógico de la lógica no es una lógica, sino un marco de significado pragmático en donde diferentes lógicas pueden desarrollarse, combinarse y/o compararse. Sin embargo, aquí vamos a limitarnos a las versiones dialógicas de la lógica clásica y la intuicionista.

En un diálogo dos partes discuten sobre una tesis respetando ciertas reglas fijas. El jugador que afirma la tesis se llama Proponente (**P**), su rival, que pone en tela de juicio la tesis, se llama Oponente (**O**). En su forma original, los diálogos fueron diseñados de tal manera que cada una de las partidas termina, después de un número finito de jugadas, con sólo un jugador ganador. Acciones o jugadas en un diálogo, a menudo son entendidas como elocuciones o como actos de habla. En otras palabras, la idea es que las reglas del diálogo no se aplican a expresiones aisladas del acto de elocución en que fueron proferidas sino, en el contexto del desarrollo de un juego dialógico. Las reglas se dividen en reglas de partículas o reglas para las constantes lógicas (*Partikelregeln*) y reglas estructurales (*Rahmenregeln*). Las reglas de partículas regulan aquellas jugadas que constituyen *peticiones* o *requerimientos* (a las jugadas del rival) y aquellas que son *respuestas* (a esas peticiones), mientras que las reglas estructurales determinan el curso general de un juego dialógico (también llamado *diálogo*).

---

(2014, 2015), Rahman / Clerbout / Jovanovic (2014), Rahman / Jovanovic / Clerbout (2015) y Rahman / Redmond (2014).

Crucial para el enfoque dialógico son los siguientes puntos:

1. La distinción entre significado local (reglas para las constantes lógicas) y significado global (incluido en las reglas estructurales).
2. Las reglas para el significado local sean formuladas para jugadores anónimos.
3. La distinción entre el nivel de partida (triunfo de una partida) y el nivel estratégico (existencia de una estrategia ganadora).
4. Una noción de validez que equivale a una estrategia ganadora para **P**.
5. Que la noción de triunfo en una partida formal sustituye a la noción de estrategia ganadora en un modelo.

En la sección siguiente, presentaremos brevemente la lógica dialógica estándar. La idea es introducir los elementos de la lógica dialógica de una forma auto-contenida antes de enriquecerla con los aportes de la TCT.

## **2.1 Lógica dialógica estándar**

Sea **L** un lenguaje de primer orden construido en base a conectivas proposicionales, cuantificadores, un conjunto numerable de variables individuales, un conjunto numerable de constantes individuales y un conjunto numerable de símbolos de predicado (cada uno con una  $n$ -aridad fija).

Ampliamos el lenguaje **L** con dos etiquetas **P** y **O** que corresponden a los participantes del diálogo y el signo de interrogación "?". Cuando la identidad del jugador no importa, utilizamos variables **X** o **Y** (siendo  $X \neq Y$ ). Una jugada es una expresión de la forma **X**- $e$ , donde  $e$  es bien una expresión de la

forma  $! \varphi$  para alguna proposición  $\varphi$  de  $L$ , bien de la forma  $? [\varphi_1, \dots, \varphi_n]$ . Comenzamos con las reglas de partículas (Tabla 2.1).

**Tabla 2.1 Reglas de partículas para la dialógica estándar**

Afirmación	$\mathbf{X} ! \varphi \wedge \psi$	$\mathbf{X} ! \varphi \vee \psi$	$\mathbf{X} ! \varphi \rightarrow \psi$	$\mathbf{X} ! \neg \varphi$
Ataque	$\mathbf{Y} ? [\varphi] \text{ o } \mathbf{Y} ? [\psi]$	$\mathbf{Y} ? [\varphi, \psi]$	$\mathbf{Y} ! \varphi$	$\mathbf{Y} ! \varphi$
Defensa	$\mathbf{X} ! \varphi$ resp. $\mathbf{X} ! \psi$	$\mathbf{X} ! \varphi$ o $\mathbf{X} ! \psi$	$\mathbf{X} ! \psi$	--

Afirmación	$\mathbf{X} ! \forall x \varphi$	$\mathbf{X} ! \exists x \varphi$
Ataque	$\mathbf{Y} ? [\varphi(x/a_i)]$	$\mathbf{Y} ? [\varphi(x/a_1), \dots, \varphi(x/a_n)]$
Defensa	$\mathbf{X} ! \varphi(x/a_i)$	$\mathbf{X} ! \varphi(x/a_i)$ (en donde $1 \leq i \leq n$ )

En esta tabla, una expresión de tipo  $a_i$  es una constante individual y  $\varphi(a_i/x)$  expresa la proposición obtenida mediante la sustitución de cada ocurrencia de  $x$  en  $\varphi$  por  $a_i$ . Cuando una jugada consiste en una pregunta de la forma ‘ $? [\varphi_1, \dots, \varphi_n]$ ’, entonces el otro jugador elige una proposición entre  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  y la juega. Así, podemos –en términos de qué jugador tiene una opción– distinguir entre la conjunción y disyunción, por una parte, y la cuantificación universal y la existencial, por otra parte. En los casos de la conjunción y la cuantificación universal, el retador (o atacante) elige la proposición por la cual preguntar. Por el contrario, en los casos de disyunción y cuantificación existencial, el defensor es el

único que puede elegir entre varias proposiciones. Obsérvese que no hay defensa en el caso de la regla de partículas para la negación. Las reglas de partículas proporcionan una descripción abstracta de cómo se procede en el diálogo a nivel local: especifican el modo en el que una proposición puede atacarse o defenderse de acuerdo con su constante lógica principal. Decimos que tales reglas gobiernan el nivel local del significado. Rigurosamente, las expresiones que aparecen en las tablas precedentes no son jugadas reales porque tienen proposiciones esquemáticas y los jugadores no están especificados.

Más aún, las reglas de partículas son reglas para jugadores *anónimos*<sup>4</sup> en el sentido de que el defensor puede ser tanto **P** como **O** (por eso también se las llama *reglas simétricas*). Por eso están formuladas con la ayuda de variables que pueden ser substituidas (uniformemente) por **P** u **O**. No sería razonable basar un enfoque lúdico-teórico del significado de las constantes lógicas en un sistema de reglas que determine que una constante tal tiene un significado diferente cuando es jugada por un jugador diferente. Esto haría de cualquier interacción un sinsentido.

Además, estas reglas son indiferentes al rol de la proposición en las diversas variedades de diálogos en los que puedan intervenir, por ejemplo: las reglas locales de las constantes lógicas no varían si los diálogos son clásicos o intuicionistas. Por este motivo decimos que la descripción dada por las reglas de partículas es en cierto modo abstracta. Las expresiones "ataque" y "defensa" son convenientes para prescribir ciertas interacciones entre jugadas. Tales interacciones pueden ser definidas con precisión de la forma siguiente:

- Sea  $\sigma$  una secuencia de jugadas. La función  $\rho_\sigma$  asigna una posición para cada jugada en  $\sigma$ , comenzando con 0. La función  $F_\sigma$  asigna un par  $[m, Z]$  para ciertas jugadas  $N$  en  $\sigma$ , donde  $m$  denota una posición menor que  $\rho_\sigma(N)$  y  $Z$  es o bien  $a$  (un ataque) o bien  $d$  (una defensa). Es decir, la

---

<sup>4</sup> Ver Rahman / Redmond (2015a).

función  $F_\sigma$  permite seguir la "historia" de las interacciones ataque-defensa que originaron una jugada dada. Una *partida*  $p$  es una secuencia legal de jugadas, es decir, una secuencia de jugadas que observa las reglas del juego.

La segunda clase de reglas que hemos mencionado, las reglas estructurales, otorgan las condiciones exactas en las que una oración dada genera un juego dialógico. Un juego dialógico para  $\varphi$ , escrito  $D(\varphi)$ , es el conjunto de todas las partidas con  $\varphi$  como tesis (ver la regla de inicio más abajo). Las reglas estructurales son las siguientes:

**SR0 (Regla de inicio):** Sea  $\varphi$  una proposición compleja<sup>5</sup> de  $\mathbf{L}$ . Para cada  $p \in D(\varphi)$  tenemos:

$$\begin{aligned}\rho_p(\mathbf{P}-A) &= 0, \\ \rho_p(\mathbf{O}-n:=i) &= 1, \\ \rho_p(\mathbf{P}-m:=j) &= 2\end{aligned}$$

**COMENTARIO:** En otras palabras, cualquier partida  $p$  en  $D(\varphi)$  comienza con  $\mathbf{P} ! \varphi$ . Llamamos  $\varphi$  a la tesis de la partida y del juego dialógico correspondiente. Después de esto, el oponente y el proponente eligen sucesivamente un número entero llamado *rango de repetición*. El papel de este entero es asegurar que cada partida termine después de un número finito de jugadas que queda especificado en la siguiente regla estructural (**SR1**).

**SR1 (Regla clásica):**

- Sea  $p \in D(\varphi)$ . Para cada  $M$  en  $p$  donde  $\rho_p(M) > 2$  tenemos  $F_p(M) = [m', Z]$  donde  $m' < \rho_p(M)$  y  $Z \in \{a, d\}$

---

<sup>5</sup> Si la tesis no es una proposición compleja sino que es una proposición elemental, entonces la regla estructural que hay que aplicar no es la SR0 sino la SR2, regla que puede verse más adelante en este mismo capítulo.

- Sea  $r$  el rango de repetición del jugador  $\mathbf{X}$  y  $p \in D(\varphi)$  tal que el último miembro de  $p$  es una jugada de  $\mathbf{Y}$ ,  
 $M_0$  es una jugada de  $\mathbf{Y}$  de posición  $m_0$  en  $\pi$ ,  
 $M_1, \dots, M_n$  son las jugadas de  $\mathbf{X}$  en  $p$  tal que  $F_p(M_1) = \dots = F_p(M_n) = [m_0, Z]$ .

**COMENTARIO:** Considérese la secuencia<sup>6</sup>  $p' = p * N$  donde  $N$  es una jugada de  $\mathbf{X}$  tal que  $F_{p'}(N) = [m_0, Z]$ . Tenemos  $p' \in D(\varphi)$  sólo si  $n < r$ .

La primera parte de la regla establece que cada jugada después de la elección de los rangos de repetición es: bien un ataque, bien una defensa. La segunda parte se asegura la finitud de las partidas mediante el establecimiento de un rango de repetición del jugador como el número máximo de veces que puede desafiar a o defenderse de una jugada determinada del otro jugador.

**SR1i (regla intuicionista):** Los jugadores sólo pueden defenderse del último de los ataques aún no respondidos.<sup>7</sup>

**COMENTARIO:** Una de las contribuciones originales de la propuesta dialógica es que un marco tal permite, desde una nueva perspectiva, dar cuenta de la diferencia entre la significación clásica y la intuicionista de las constantes lógicas. Si bien la *significación local* es la misma (la reglas de partículas se aplica indistintamente a las dos lógicas), la *significación global*, dada por las reglas estructurales que determinan el desarrollo de un juego, es diferente. Obtenemos juegos dentro del marco de la lógica clásica si permitimos

---

<sup>6</sup> Usamos  $p * N$  para denotar la secuencia obtenida agregando el movimiento  $N$  al juego  $p$ .

<sup>7</sup> Esta cláusula también se conoce como la regla de *responda primero a la última obligación* (*Last Duty First*) y permite desarrollar juegos para la lógica intuicionista.

responder a un ataque que no sea el último, y obtenemos juegos dentro del marco de la lógica intuicionista si impedimos tal tipo de jugadas defensivas. Ahora bien, se ha demostrado en la literatura especializada, ya citada, que tales juegos proveen una noción de estrategia adecuada respecto a la noción de validez clásica e intuicionista respectivamente. Sin embargo, la motivación para utilizar la regla estructural clásica o intuicionista fue hasta ahora únicamente dada por las pruebas de adecuación, por ejemplo: introducimos la regla estructural intuicionista pues consideramos que ella se adecúa a la noción de validez intuicionista. Muy recientemente Clerbout (2015), propuso la idea de caracterizar las reglas por motivaciones basadas puramente en consideraciones que se siguen de la concepción de interacción dialógica. Una manera de verlo, como expondremos en el comentario de los ejemplos, es que la regla estructural intuicionista impone un modo de juego más restrictivo que el de la lógica clásica respecto a la elección de una u otra jugada durante el desarrollo de una partida. Si en un momento determinado del juego se eligió afirmar una proposición y más adelante se elige afirmar la contraria para defender *la misma jugada*<sup>8</sup>, ello llevará inevitablemente a perder el juego. Pero esta restricción no se reduce a impedir contradicciones, sino que es de orden más general, por ejemplo, si un jugador eligió una constante individual para defenderse de un existencial (ver ejemplos en 2.4) tal jugador debe, desde el punto de vista expresado por la regla intuicionista, permanecer coherente con tal elección. Tal vez, la idea subyacente a la regla intuicionista pueda formularse deónticamente de la siguiente manera:

*Aténgase a los compromisos que se contraen al elegir  
una jugada.*

---

<sup>8</sup> Como veremos en el penúltimo ejemplo, la restricción de los compromisos se refiere a la misma jugada: si la misma proposición es jugada dos veces, es decir, en jugadas distintas, las opciones sí pueden ser distintas.

Es importante notar que la noción de *compromiso* no conlleva, desde el punto de vista del concepto dialógico de la interacción, un matiz necesariamente estratégico. En efecto, desde el punto de vista dialógico la interfaz de ataques y defensas, despliega la interacción de derechos y compromisos (u obligaciones) que determinan el desarrollo de un juego. Por ejemplo, al jugar una conjunción, el adversario tiene el derecho de preguntar por alguno de los compuestos de la conjunción (a su elección) y el defensor tiene la obligación de responder con el compuesto requerido.

La regla clásica expresa una forma más liberal respecto a los compromisos adquiridos mediante una afirmación: a fin de defender una proposición en la jugada  $n$  un jugador puede elegir una opción y más tarde otra (respecto a la misma jugada), aun cuando esas opciones sean incompatibles entre sí (de hecho es lo que pasa en la demostración por *reducción al absurdo*). En otras palabras, la idea es que la regla intuicionista exige un compromiso estricto respecto a las elecciones hechas durante el juego, y la regla clásica centra el compromiso respecto a la tesis en cuestión pero no respecto a las jugadas subsidiarias que son dependientes de tal tesis.

**SR2 (Regla formal):** Sea  $\varphi$  una proposición elemental,  $N$  la jugada  $\mathbf{P} ! \varphi$  y  $M$  la jugada  $\mathbf{O} ! \varphi$ . Una secuencia  $p$  de jugadas es una partida sólo si se cumple: si  $N \in p$  entonces  $M \in p$  y  $\rho_p(M) < \rho_p(N)$ .

**COMENTARIO:** Es decir, si el proponente afirmó una proposición elemental, entonces  $\mathbf{O}$  la afirmó ya antes. Esta regla es una de las características más sobresalientes de la lógica dialógica. Como se discute en Marion / Rückert (2015) la regla se remonta a la reconstrucción de Aristóteles de la dialéctica platónica: la idea principal es que, cuando una proposición elemental es desafiada (atacada), entonces –desde

el punto de vista puramente argumentativo— la única respuesta posible es apelar a las concesiones del oponente (es decir, sin hacer uso de una autoridad más allá de las jugadas realizadas durante la interacción argumentativa). De hecho, uno podría ver la regla formal como la implementación de un tipo de *jugada de espejo* (conocida en teoría de juegos como *copy-cat strategy*): *mis razones para afirmar tal proposición son exactamente las mismas que las suyas cuando concedió Ud. la misma proposición*<sup>9</sup>.

Ahora bien, si los fundamentos últimos de una tesis dialógica son proposiciones elementales y si esto se lleva a cabo mediante el uso de la regla formal, entonces los diálogos son, en este sentido, necesariamente asimétricos. De hecho, si ambos contendientes estuvieran restringidos por la regla formal ninguna proposición elemental podría ser afirmada. Por lo tanto, implementamos la regla formal mediante el diseño de un jugador, llamado proponente, cuyas afirmaciones de proposiciones elementales están restringidas por esta regla. Como veremos más abajo, es el triunfo del proponente el que proporciona la noción dialógica de validez.

La regla que introduce jugadas de espejo permite incorporar jugadas sobre expresiones elementales sin tener que recurrir a la teoría de modelos para las proposiciones elementales, como lo hace Hintikka en sus juegos para GTS. Sin embargo, es importante observar, que las jugadas de espejo, a pesar de que provienen de la así llamada *regla formal*, no se reducen a pura sintaxis. Ciertamente es que en las presentaciones estándar, como la presente, donde no se puede hacer explícito el elemento lúdico, pudiera parecer que la regla formal se independiza del significado de las proposiciones elementales. Pero no es ésta la idea, la regla formal consiste en permitir al proponente copiar las razones aducidas por el oponente en favor de la afirmación de la misma proposición elemental introducida por el oponente (en el cuadro dialógico enriquecido con la TCT lo que se copia es el objeto lúdico correspondiente). Dado que en el cuadro

---

<sup>9</sup> Cf. Clerbout / Keiff / Rahman (2009) y Rahman / Keiff (2010).

estándar los objetos lúdicos no se escriben de forma explícita, el uso de la regla formal pareciera consistir en copiar un signo vacío de contenido.

En el caso de juegos en los que se permite que la tesis sea una proposición elemental, hay que reformular la regla formal de la siguiente manera:

**SR2\* (Regla formal modificada):** **O** puede atacar una proposición elemental si y sólo si él mismo aún no la afirmó. Sólo el oponente puede atacar proposiciones elementales. El proponente se defiende, de un ataque a una proposición elemental, mostrando que en el ulterior desarrollo del juego el oponente será forzado a conceder la proposición elemental atacada, digamos en la jugada  $n$ . En cuanto **O** jugó  $n$ , entonces **P** se defiende del ataque respondiendo *sic* ( $n$ ) (léase: porque tú mismo acabas de conceder en  $n$  la misma proposición elemental).

En realidad no haremos uso de esta forma modificada en los ejemplos desarrollados para la lógica estándar. Prosigamos ahora con el resto de las definiciones y reglas estructurales:

- Decimos que una partida es terminal cuando no puede ampliarse en jugadas sucesivas lícitas. Decimos que es **X**-terminal cuando la última jugada en la partida es una jugada del jugador **X**.

**SR3 (Partida ganada):** El jugador **X** gana la partida  $p$  sólo si es terminal **X**.

- Una *estrategia* para un jugador **X** en  $D(\varphi)$  es una función que para cada partida no-terminal  $p$ , asigna una jugada  $M$  a una jugada de **Y** que es el último miembro de  $p$ , tal que, si extendemos  $p$  con  $M$  obtenemos una nueva partida.

- Una estrategia de **X** es *ganadora* en  $D(\varphi)$  si jugando de acuerdo con ella nos lleva a una victoria de **X** para  $\varphi$  sin importar cómo juegue **Y**.

La próxima definición relaciona estrategia ganadora para **P** con validez:

- **P** tiene una *estrategia ganadora* para  $\varphi$ , si y solamente si,  $\varphi$  es válida en la lógica clásica y/o en la lógica intuicionista jugando de acuerdo con las reglas clásicas y/o intuicionistas.

## 2.2 Ejemplos de diálogos estándar para la lógica clásica y para la lógica intuicionista

Considérese por ejemplo la siguiente secuencia de jugadas: **P** !  $Qa \rightarrow Qa$ , **O**-n:=1, **P**-m:=1, **O** !  $Qa$ , **P** !  $Qa$  que pueden ser escritas del modo siguiente:

	<b>O</b>			<b>P</b>	
				! $Qa \rightarrow Qa$	0
1	n:=1			m:=1	2
3	! $Qa$	(0)		! $Qa$	4

**Gana P**

La partida puede leerse informalmente de la siguiente manera:

- 0 **P** afirma la tesis
- 1, 2 Los jugadores elijen rango de repetición 1.
- 3 Dado que la tesis es una implicación material, el ataque fuerza a **O** a conceder su antecedente.
- 4 **P** puede ahora hacer uso de la regla formal para afirmar el consecuente (es decir, puede afirmar en 2 la proposición elemental  $Qa$ , pues **O** la afirmó antes en la jugada 1) y así ganar la partida.

Los números de las columnas externas son las posiciones de las jugadas en la partida. Cuando una jugada es un ataque, la posición de la jugada desafiada se indica en las columnas internas, como ocurre con jugada 3 de este ejemplo. Los ataques introducen una nueva línea, pero las defensas se llevan a cabo en la misma línea. La idea es que el ataque y la defensa al ataque correspondiente se encuentran en la misma línea (como veremos en próximos ejemplos, este tipo de notación ayuda a identificar gráficamente los usos de la regla intuicionista o la clásica). Dado que las defensas se llevan a cabo en la misma línea en la que se abrió el ataque, las defensas no llevan número en la columna interior (siempre se sabe a qué ataque responde la jugada defensiva). En la literatura especializada se denomina *ronda cerrada* una línea compuesta de un ataque y su defensa correspondiente. Nótese que este tipo de tablas llevan la información facilitada por las funciones  $\rho$  y  $F$ , además de representar la partida en sí.

Compárese con una partida en donde la tesis es  $\mathbf{P} \ ! \ Qa \rightarrow Qb$ . La partida será ganada por  $\mathbf{O}$ , pues  $\mathbf{P}$  no puede afirmar el consecuente: la regla formal sólo le permite afirmar una proposición elemental si el oponente la afirmó antes.

	<b>O</b>			<b>P</b>	
				$\ ! \ Qa \rightarrow Qb$	0
1	$n:=1$			$m:=1$	2
3	$\ ! \ Qa$	(0)			4

**Gana O**

El ejemplo siguiente muestra a la vez cómo desarrollar un diálogo con premisas y cómo distinguir las buenas de las malas jugadas. Supongamos que se trata de afirmar  $A \vee (C \rightarrow D)$  dada la premisa  $B \wedge A$ . La premisa, es comprendida aquí como una concesión que  $\mathbf{O}$  hace antes de comenzar la partida:

	<b>O</b>			<b>P</b>	
Premisa	$B \wedge A$			$!$ $A \vee (C \rightarrow D)$	0
1	$n:=1$			$m:=2$	2
3	$? [A, C \rightarrow D]$	(0)		$! A$	6
5	$! A$	(4)	premisa	$? [A]$	4

**Gana P**

En la jugada 3, **O** le pide a **P** elegir una de las dos partes de la disyunción. **P** no puede por el momento elegir la izquierda pues no ha sido aún afirmada por **O** y la derecha le obligará en el desarrollo del juego a afirmar  $D$ , sin que él pueda forzar a **O** a afirmarla. Sin embargo, el astuto proponente se da cuenta que puede obligar a **O** a afirmar  $A$ . Por tanto, pasa al contrataque, abre un ataque en la línea siguiente (jugada 4), exigiendo a **O** que afirme la derecha de la conjunción concedida como premisa de la partida. Esto fuerza a **O** a afirmar  $A$ , y **P** puede ahora defender la disyunción eligiendo  $A$ . Aquí presupusimos que **P** jugó de forma óptima desde el punto de vista estratégico. No obstante, desde el punto de vista de la partida, nada impide a **P** elegir defender la disyunción con la derecha, como tampoco elegir en su contrataque la izquierda de la conjunción. Ciertamente, no serían éstas las jugadas óptimas desde el punto de vista estratégico pero serían perfectamente legítimas y estarían en perfecta concordancia con el significado local y global de la constantes lógicas implicadas.

Veamos algunos otros ejemplos:

	<b>O</b>			<b>P</b>	
				$! A \vee \neg A$	0
1	$n:=1$			$m:=2$	2
3	$? [A, \neg A]$	(0)		$! \neg A$	4
5	$! A$	(4)		--	
				$! A$	6

**Gana P**

Este juego ha sido desarrollado de acuerdo con reglas estructurales, incluida la regla de la lógica clásica (SR1) y dejando excluida la intuicionista (SR1i), conduciendo esto a que **P** resulte ganador. En efecto, en la jugada 3, el jugador **O** obliga a **P** a tener que elegir una de

las partes de la disyunción. **P** opta, en su jugada 4, por afirmar la parte negativa. De hecho, no puede afirmar la positiva dado que es elemental y **O** no la ha afirmado antes. **O** contrataca la negación afirmando él mismo  $A$ . Nótese que de acuerdo a la regla de partículas, no hay una defensa para la negación, de ahí que haya un vacío a la derecha de la jugada 5. Es más, un ataque a una negación siempre producirá una *ronda abierta*. Dado que no puede defenderse de la negación, **P** decide ahora defenderse de la disyunción con la otra opción y, puesto que **O** ya la ha afirmado, **P** gana: si tú (**O**) concedes  $A$ , entonces eso es suficiente para defender mi disyunción.

Nótese que la regla estructural clásica, le permite a **P** afirmar primero la negación de  $A$  (jugada 4) y luego (jugada 6)  $A$ . Más aún, la jugada 6 cierra la ronda abierta en 3 y que ya había sido cerrada antes con la jugada 4. Desde el punto de vista intuicionista **P** no se atiene al compromiso adquirido cuando eligió en su jugada 4 defender la disyunción con la negación de  $A$ . Si jugamos con la lógica que se atiene a la regla estructural intuicionista, el juego termina con la jugada 5 de **O**, quien ganaría la partida:

	<b>O</b>			<b>P</b>	
				$!A \vee \neg A$	0
1	$n:=1$			$m:=2$	2
3	$? [A, \neg A]$	(0)		$! \neg A$	4
5	$!A$	(4)		--	

**Gana O**

La ronda abierta con el ataque de la jugada 5, queda abierta y **P** no tiene otra jugada disponible, puesto que la regla intuicionista le obliga a atenerse al compromiso adquirido cuando eligió  $\neg A$  en la jugada 4. Es cierto que **P** eligió el número de repetición 2, pero la regla estructural intuicionista le impide usar la repetición para la defensa.

Consideraciones similares explican por qué la siguiente tabla presenta una partida ganada por **P** cuando se juega con la regla de la lógica clásica, mientras que la tabla subsiguiente muestra una tabla desarrollada en donde gana **O**, cuando se juega con la regla de la lógica intuicionista.

	<b>O</b>			<b>P</b>	
				$! \neg\neg A \rightarrow A$	0
1	$n:=1$			$m:=2$	2
3	$! \neg\neg A$	(0)		$! A$	6
	--			$! \neg A$	4
5	$! A$	(4)		--	

**Gana P**

	<b>O</b>			<b>P</b>	
				$! \neg\neg A \rightarrow A$	0
1	$n:=1$			$m:=1$	2
3	$! \neg\neg A$	(0)			
	--			$! \neg A$	4
5	$! A$	(4)		--	

**Gana O**

Lo más interesante de estos ejemplos es que muestran la utilidad de la notación que hace que las defensas se anoten en la misma línea que su ataque: el vacío a la derecha de la jugada 3 muestra que, desde el punto de vista intuicionista, la ronda queda abierta y por ello es que **P** pierde. En efecto, la idea es que, ante el desafío de la jugada 3, **P** podía, en principio, elegir entre defenderse y contraatacar. **P** se decidió por contraatacar, afirmando  $\neg A$  e ignorando la defensa. La regla intuicionista le impide a **P**, después que **O** afirma  $A$  en 5, ignorar su compromiso anterior con la negación y afirmar también  $A$ .

El próximo ejemplo muestra la utilidad de la regla de repetición para partidas jugadas siguiendo la regla estructural intuicionista. Es bien sabido que la doble negación de una proposición, válida en la lógica proposicional clásica, es también válida en lógica intuicionista. Veamos como desarrollar una partida que indique (parcialmente) este hecho (para corroborar el hecho totalmente y no sólo parcialmente, deberíamos desplegar todas las partidas relevantes de la estrategia ganadora de **P**):

	<b>O</b>			<b>P</b>	
				$! \neg\neg(A \vee \neg A)$	0
1	n:=1			m:=2	2
3	$! \neg(A \vee \neg A)$	(0)		--	
	--		(3)	$!(A \vee \neg A)$	4
5	? [A, $\neg A$ ]	(4)		$! \neg A$	6
7	$! A$	(6)		--	
	--		(3)	$!(A \vee \neg A)$	8
9	? [A, $\neg A$ ]	(8)		$! A$	10

**Gana P**

La jugada crucial aquí es la jugada 8. El rango de repetición 2 de **P**, que no es afectado por la regla estructural intuicionista (que concierne sólo a las defensas) le permite a **P** atacar la jugada 3 por segunda vez y ganar. El ejemplo pone también de relieve que más que la coherencia lo que está en juego aquí es que el jugador se ciña a su último compromiso respecto a la *misma* jugada: la mientras que la elección manifestada por la jugada 6 está ligada a la jugada 4, la elección manifestada por la jugada 10 está ligada a la jugada 8.

Finalmente veamos un caso con cuantificadores. En el contexto de cuantificadores la clave para la victoria de **P** es elegir aquellas constantes lógicas que conduzcan a **O** a conceder aquellas proposiciones elementales que **P** esté necesitando. El ejemplo, que sólo se puede ganar jugando con la regla estructural clásica, requiere de cierta pericia de **P**:

	<b>O</b>			<b>P</b>	
				$! \exists x(A(x) \rightarrow \forall yA(y))$	0
1	n:=1			m:=2	2
3	? [A(x/a <sub>1</sub> ), ..., A(x/a <sub>n</sub> )]	(0)		$! A(a) \rightarrow \forall yA(y)$	4
5	$! A(a)$	(4)		$! \forall yA(y)$	6
7	? [A(x/b)]	(6)		$! A(b)$	10
				$! A(b) \rightarrow \forall yA(y)$	8
9	$! A(b)$	(8)			

## Gana P

**P** responde, en su jugada 4, al ataque al existencial eligiendo la constante individual  $a$ . En la jugada 7 **O** ataca el universal afirmado en 6 eligiendo para su ataque la nueva constante individual  $b$ . Nótese que elegir una constante nueva es una jugada óptima desde el punto de vista estratégico, pero desde el punto de vista de la partida nada fuerza a **O** a elegir una nueva constante. La idea es que, como él recuerda que él mismo afirmó en 5  $A(a)$ , con su elección de  $b$  intenta una jugada que impida a **P** hacer uso de su propia afirmación. **P**, que una vez más suponemos aquí que juega las jugadas óptimas desde el punto de vista estratégico, se decide a repetir su defensa del existencial con la jugada 8 (esto le está permitido por la conjunción del número de repetición elegido y la regla estructural clásica), sin embargo, esta vez **P** elije substituir la variable por la constante individual  $b$ . **O** se ve forzado a atacar la implicación material y con la jugada 9 concede  $A(b)$ . Justamente era ésta la afirmación que estaba esperando **P** para defender el universal atacado con  $b$  en la jugada 7 y ganar la partida. Si se juega la partida haciendo uso de la regla estructural intuicionista, la partida se termina con la jugada 7 de **O** y con su victoria.

### 2.3 Juegos Extensivos

La notación tabular, empleada en sección anterior, tiene ciertas ventajas cuando se trata de comparar diferentes lógicas como la clásica y la intuicionista. Sin embargo, cuando queremos considerar varias partidas juntas –por ejemplo, en la construcción de una estrategia– dichas tablas no proporcionan el medio de representación más adecuado. De hecho, cuando queremos representar la construcción de una estrategia usamos lo que se conoce como la *forma extensiva*. La forma extensiva del diálogo  $D(A)$  es simplemente la representación del árbol del mismo, también llamado a menudo: *árbol-lúdico*. Más precisamente, la forma extensiva EA de  $D(A)$  es el árbol  $(T, l, S)$  tal que:

- i) Cada nodo  $t$  en  $T$  está etiquetado con la jugada que ocurre en  $D(A)$ .
- ii)  $l: T \rightarrow N$
- iii)  $S \subseteq T^2$  donde:
  - Hay un único  $t_0$  (la raíz) en  $T$  tal que  $l(t_0)=0$ , y  $t_0$  está etiquetado con la tesis del juego.

- Para cada  $t \neq t_0$  hay un único  $t'$  tal que  $t'St$ .
- Para cada  $t$  y  $t'$  en  $T$ , si  $tSt'$  entonces  $l(t')=l(t)+1$ .
- Dada la partida  $p$  en  $D(A)$  tal que  $\rho_p(M')=\rho_p(M)+1$  y  $t, t'$  respectivamente etiquetadas con  $M$  y  $M'$ , entonces  $tSt'$ .

La forma extensiva de una estrategia  $\zeta$  de  $\mathbf{X}$  en  $D(A)$  es el fragmento de árbol  $E_{A,\zeta}=(T_\zeta, l_\zeta, S_\zeta)$  de  $E_A$  tal que:

- i) La raíz de  $E_{A,\zeta}$  es la raíz de  $E_A$ .
- ii) Dado el nodo  $t$  en  $E_A$  etiquetado con una jugada  $\mathbf{X}$ , tenemos que  $tS_\zeta t'$  sea cual fuere  $tSt'$ .
- iii) Dado el nodo  $t$  en  $E_A$  etiquetado con una jugada  $\mathbf{Y}$  y con al menos un  $t'$  tal que  $tSt'$ , entonces hay una única  $\zeta(t)$  en  $T_\zeta$  donde  $tS_\zeta \zeta(t)$  y  $\zeta(t)$  es etiquetada con la jugada de  $\mathbf{X}$  prescrita por  $\zeta$ .

He aquí algunos ejemplos de resultados meta-lógicos obtenidos en la literatura reciente y que corresponden al nivel de las estrategias.<sup>10</sup>

- Estrategia ganadora para  $\mathbf{P}$  y hojas: Sea  $w$  una estrategia ganadora para  $\mathbf{P}$  en  $D(A)$ , entonces, cada hoja en  $E_{A,w}$  está etiquetada con una proposición elemental de  $\mathbf{P}$ .
- Determinación: Hay una estrategia ganadora para  $\mathbf{X}$  en  $D(A)$  si y sólo si no hay una estrategia para  $\mathbf{Y}$  en  $D(A)$ .
- Corrección y Completitud para tablas semánticas (también llamadas árboles semánticos): Considérese una tabla semántica de primer orden y una estrategia dialógica de primer orden. Hay una tabla cerrada para  $A$  si y sólo si existe una estrategia ganadora para  $\mathbf{P}$  en  $D(A)$ .
- Dado que las tablas semánticas (para lógica de primer orden) son correctas y completas respecto a una semántica modelo-teorética, se sigue que la existencia de una estrategia ganadora para  $\mathbf{P}$  coincide con la validez. Es decir, hay una estrategia ganadora para  $\mathbf{P}$  en  $D(A)$  si y sólo si  $A$  es válida.

---

<sup>10</sup>Estos resultados están probados, junto con otros, en Clerbout (2013).

### EJEMPLOS DE FORMAS EXTENSIVAS

Las formas extensivas de juegos dialógicos y de estrategias son árboles generados infinitamente (árboles con un número infinito de ramas). Aquí no es posible representarlos en su totalidad, pero como una ilustración sigue siendo útil añadimos a continuación las figuras 1 y 2:

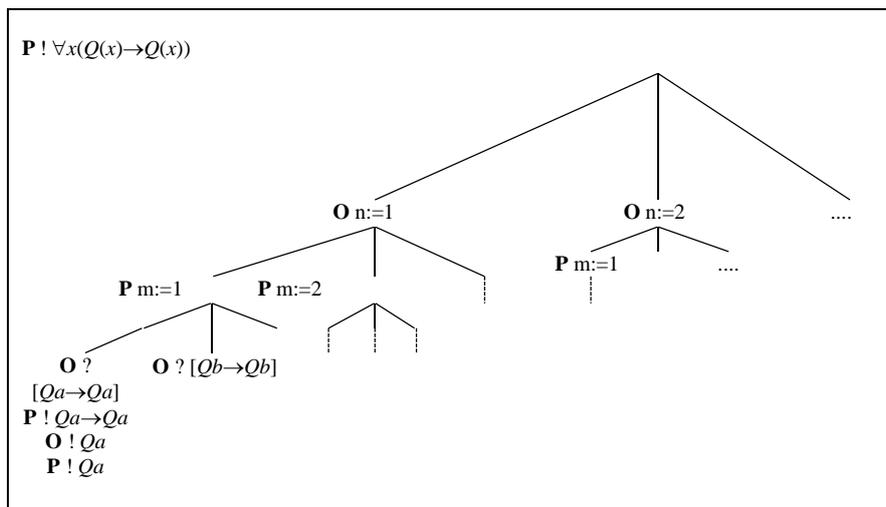
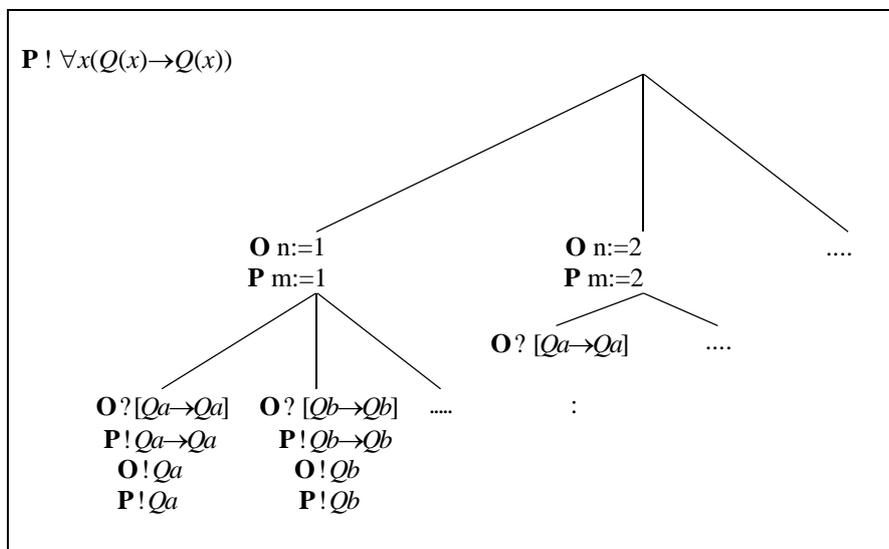


Figura 1



**Figura 2**

La Figura 1 representa parcialmente la forma extensiva del juego dialógico para la proposición  $\forall x(Q(x) \rightarrow Q(x))$ . Cada partida en este diálogo se representa como una rama en la forma extensiva. El ejemplo que hemos dado es el que la rama de la izquierda, el cual representa una de las partidas más simples y más cortas en el juego dialógico. La raíz de la forma extensiva se etiqueta con la tesis. Después de eso, el oponente tiene un número infinito de opciones posibles para su rango de repetición: esto está representado por el número infinito de sucesores inmediatos en la raíz de la forma extensiva. Lo mismo vale para el rango de repetición del proponente y para cada vez que un jugador va a elegir una constante individual.

La Figura 2 representa parcialmente la forma extensiva de la estrategia del proponente en este juego. Se trata de un fragmento del árbol de la Figura 1 en la que cada nodo etiquetado con una jugada de **O** tiene a lo sumo un sucesor. No mantenemos más que un registro de todas las opciones posibles para **P**: cada vez que el proponente tiene una opción en el juego, la estrategia selecciona exactamente una de las jugadas posibles. Las otras ramificaciones se mantienen puesto que una estrategia mantiene vigentes todas las opciones posibles para el oponente. En nuestro ejemplo, la estrategia prescribe la elección del mismo rango de repetición que el oponente. Por supuesto que hay un número infinito de otras posibles estrategias para **P**.

