



HAL
open science

Sobre el significado del Postulado 2 de los Elementos *

Abel Lassalle-Casanave, Marco Panza

► **To cite this version:**

Abel Lassalle-Casanave, Marco Panza. Sobre el significado del Postulado 2 de los Elementos *. *Notae Philosophicae Scientiae Formalis*, 2012, 1 (2), pp.103 - 115. halshs-01300300

HAL Id: halshs-01300300

<https://shs.hal.science/halshs-01300300v1>

Submitted on 11 Apr 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Sobre el significado del Postulado 2 de los *Elementos**

Abel Lassalle Casanave
UFBA, CNPq / Brasil
abel.lassalle@gmail.com

Marco Panza
CNRS, IHPST (CNRS, Univ. de Paris 1 y ENS Paris) / Francia
panzam10@gmail.com

Abstract: In this note we shall consider different ways to apply Postulate 2 in Euclid's *Elements*, each of which corresponds to a different interpretation of this. We conclude that Euclid's text displays a non-uniform practice, and suggest a way to explain differences and give a coherent account of these different applications.

Key words: Mathematical proof, Euclid, Postulate 2 of the *Elements*.

Resumen: En esta nota examinamos diferentes maneras de aplicar el Postulado 2 en los *Elementos* que conducen a interpretaciones diferentes del mismo. Concluimos que el texto de Euclides no muestra una práctica uniforme y sugerimos un modo de explicar las diferencias y de dar cuenta de manera coherente de esas diferentes aplicaciones.

Palabras Clave: Prueba matemática; Euclides; Postulado 2 de los *Elementos*.

1. Se puede pensar que en el Libro I de los *Elementos* de Euclides se encuentra un tratamiento de segmentos y ángulos como cantidades, esto es, entidades que pueden ser sumadas y restadas y para las cuales es definida una relación de igualdad (distinta de la identidad) y una relación de orden que satisface la ley de tricotomía. Desde esta perspectiva, en la Proposición I.3 — Dadas dos rectas desiguales, quitar de la mayor

* Esta nota es resultado del debate que siguió a la conferencia “El doble papel de los diagramas en la Geometría Plana Euclidiana” dictada por Marco Panza en el XV Coloquio Cono Sur de Filosofía de las Ciencias Formales. Agradecemos las observaciones de Bernard Vitrac al respecto del uso del Postulado 2 en los *Elementos*. Los autores fueron beneficiados con un subsidio de la Capes/Brasil (Bex 8651/11-06) que permitió la realización de este trabajo.

una recta igual a la menor — se construye la resta de dos segmentos.¹ En efecto, por la Proposición I.2, construimos un segmento AD igual al segmento menor C sobre el extremo A del segmento mayor AB y con A como centro trazamos un círculo de radio AD: el punto E que resulta de la intersección del segmento mayor con el círculo determina el segmento resta EB.

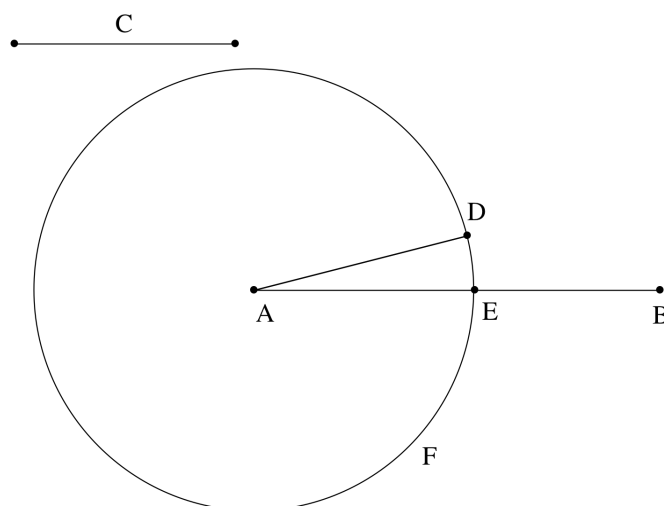


FIGURA 1

(Demostración de la Proposición I.3)

La demostración sugiere como corolario trivial la construcción del segmento suma de cualesquiera dos segmentos (Figura 2). En efecto, si AB y C son dados, bastaría aplicar la Proposición I.2 para construir un segmento AD como anteriormente y trazar un círculo de ese radio: prolongando en la dirección conveniente el segmento AB hasta la circunferencia construiríamos el segmento suma EB.

¹ Seguimos la traducción de María Luisa Puertas Castaño en Euclides (2007), pero nos permitimos usar eventualmente otra terminología, como, por ejemplo, segmento en lugar de recta.

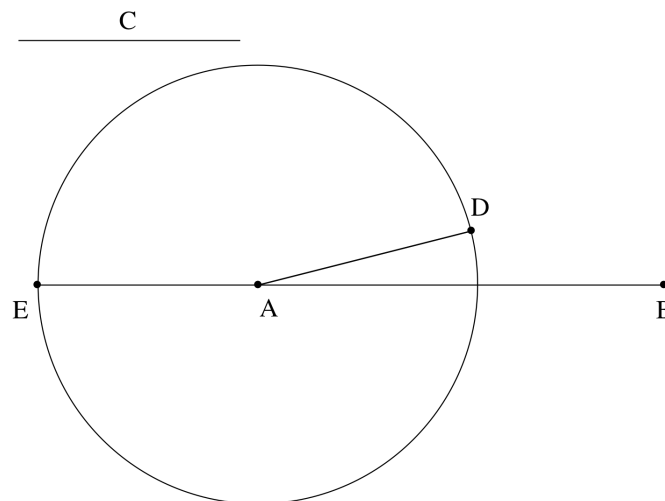


FIGURA 2

(Construcción del segmento suma sugerida por la Proposición I.3)

La posibilidad de la prolongación estaría garantizada por el Postulado 2, que autoriza “prolongar continuamente una recta finita en línea recta”. Ahora bien, imaginemos que en lugar de proceder como hemos dicho para construir el segmento suma EB, hubiéramos procedido aplicando antes el Postulado 2 para prolongar lo suficiente AB hasta un punto arbitrario F más allá de E (Figura 3) y después trazar el círculo de centro A y radio AD de manera tal que corte el segmento AF en el punto E.

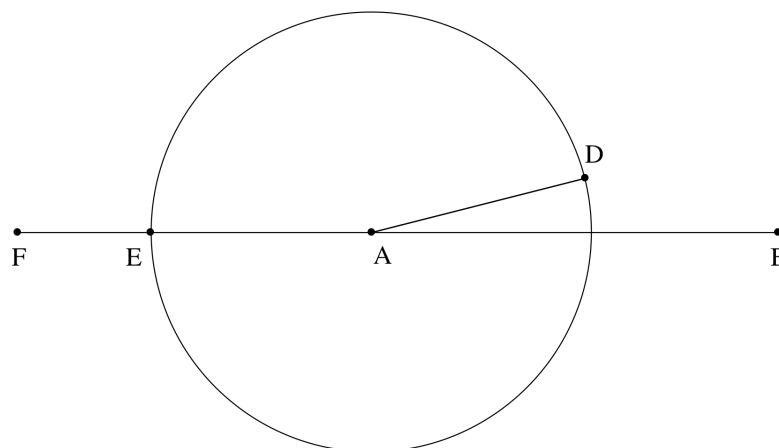


Figura 3

(Otra construcción del segmento suma)

Esta manera de proceder, se podría pensar, no sería apropiada: en efecto, no

solamente el punto F sería arbitrario, lo que haría que el segmento AF no fuese determinado de manera unívoca, sino que también sería muy difícil comprender que significa prolongar AB lo suficiente hasta un punto F mas allá de E, si E no hubiera sido construido antes de efectuar la prolongación. En última instancia, proceder así parecería ir en contra de la idea misma de lo que tendría que ser una construcción geométrica, porque introduciría elementos de arbitrariedad e imprecisión: proceder de esa manera, se podría decir, no sería proceder de manera genuinamente constructiva. Sin embargo, en la solución de la Proposición I.2, Euclides aplica el Postulado 2 justamente de esta manera no genuinamente constructiva: en dos ocasiones, para construir el punto de intersección de un círculo y un segmento, Euclides primero prolonga un segmento dado hasta un punto arbitrario y, a continuación, traza el círculo cortando el segmento que ha sido obtenido por la prolongación.

Es verdad que en la mayoría de los casos en que enfrentamos una dificultad semejante Euclides no es explícito acerca del procedimiento que está utilizando, como ocurre, por ejemplo, en la demostración de la Proposición I.20. Esta proposición afirma: “En todo triángulo dos lados tomados juntos de cualquier manera son mayores que el restante”. Euclides considera un triángulo ABC (Figura 4), aplica el Postulado 2 para prolongar BA hasta D de tal manera que AD sea igual a AC y después traza el segmento DC. Pero Euclides no dice como construir D: si se trata de prolongar lo suficiente BA y trazar después un círculo de centro A y radio AC que corte el segmento prolongado en D, o si, al contrario, se trata de trazar antes ese círculo y prolongar después AB hasta encontrarlo en el punto D.²

² Euclides tampoco es explícito en este punto en las demostraciones o soluciones de las proposiciones I. 16, I.24, I. 44, I. 48, II. 6, II.8, II.9, II. 10, II. 11.

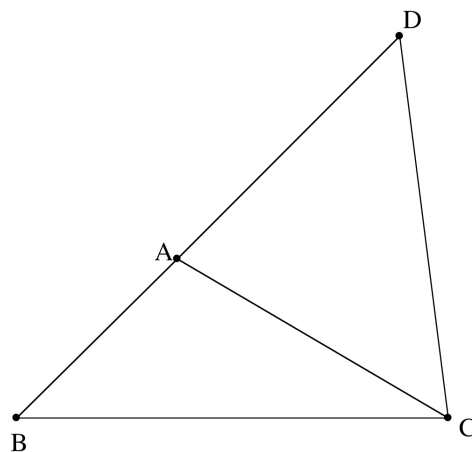


Figura 4

(Demostración de la Proposición I.20)

Ahora bien, es un hecho que para encontrar un ejemplo en el cual Euclides aplica el Postulado 2 para construir el punto de intersección de un segmento y de un círculo de acuerdo con una construcción similar a la que hemos propuesto para la suma de dos segmentos dados tenemos que ir hasta la demostración de la Proposición II.14 del Libro II.³

Pero, antes de tratar en detalle la demostración de la Proposición II.14 más adelante, nos preguntamos primero: ¿qué ocurre cuando el papel del círculo lo juega otro segmento? En la proposición que sigue, la I.21, encontramos un ejemplo. Esta proposición es también un teorema y afirma: “Si a partir de los extremos de uno de los lados de un triángulo se construyen dos rectas que se encuentren en el interior (de él), las (rectas) construidas serán menores que los dos lados restantes del triángulo, pero comprenderán un ángulo mayor”. En otros términos, si en el interior de un triángulo ABC se construyen los segmentos BD y CD (Figura 5), estos segmentos son respectivamente menores que BA y CA y el ángulo \widehat{BDC} es mayor que el ángulo \widehat{BAC} . En la demostración, Euclides aplica el Postulado 2 para prolongar BD hasta encontrar CA en un punto E. Así, un segmento es prolongado hasta encontrar otro segmento en el punto que se trata de construir.

³ Encontramos construcciones semejantes en las proposiciones III. 2, III. 9, III. 10, III.15, III.20 e IV 15.

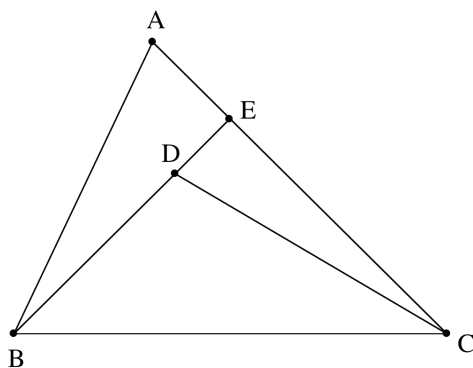


Figura 5

(Demostración de la Proposición I.21)

En este caso, sin embargo, este otro segmento (el segmento AC) no es construido en la demostración; está dado como una condición del teorema y sería imposible proceder de la manera inversa: aplicar antes el Postulado 2 para prolongar BD lo suficiente para después construir E. En efecto, construyendo la prolongación ya se construiría de hecho el punto E. Euclides hubiera podido invertir la prueba: tomar un punto cualquier E sobre AC, trazar EB, tomar otro punto cualquier D sobre BE, y finalmente trazar DC. Pero, aparte de que esta construcción no parece corresponder al enunciado del teorema — que presupone que los segmentos construidos en el interior del triángulo son dados — y que requiere también tomar dos puntos arbitrarios sobre dos segmentos (lo que Euclides hace, por ejemplo en la demostración de I.23), de esta manera simplemente se eliminaría el recurso al Postulado 2. Así, tampoco se puede decir en este caso que Euclides prefiere una construcción similar a la que hemos propuesto para la suma de dos segmentos dados. En efecto, una construcción como la nuestra aquí simplemente no procede.⁴

Ahora bien, un estudiante que quisiera aprender la geometría de Euclides estudiando los *Elementos*, ¿tendría que concluir que, en general, para construir el punto de intersección de dos líneas usando el Postulado 2, éste se aplica como en el caso de la solución de la Proposición I.2, prolongando un segmento dado lo suficiente, o, como en nuestra construcción, prolongando un segmento dado hasta encontrar una línea dada o construida previamente? La segunda manera de hacerlo parece de lejos la más satisfactoria; la primera, aunque aparentemente no

⁴ Y no encontramos otra oportunidad de aplicarla entre segmentos en los Libros I-IV.

genuinamente constructiva, es la que Euclides sigue explícitamente en I.2 y acaso implícitamente en la mayoría de los casos.

No se trata solamente de comprender como Euclides piensa que el Postulado 2 es aplicado para construir puntos de intersección: es la interpretación misma del postulado, su significado, que está en juego. Uno de nosotros dos ha propuesto en otro trabajo interpretar el Postulado 2 en términos de la regla siguiente:

R) si un segmento es dado y puede ser continuado hasta cortar otro segmento o círculo dado, entonces el primer segmento puede ser producido hasta ese segmento o ese círculo.⁵

La idea es que mientras que el Postulado 2 deja abierta la posibilidad de proceder de las dos maneras hasta aquí examinadas, la regla **R** fija una condición suficiente para prolongar segmentos dados de manera genuinamente constructiva.

Pero, como vimos, el texto de Euclides parece deponer en contrario de **R** en la solución de la Proposición I.2 (y, en la duda, en todos los casos en que no es explícito acerca del procedimiento utilizado). Se podría argumentar que Euclides actúa de manera no genuinamente constructiva cuando él podría también haber actuado de acuerdo con la regla **R**, de forma tal que la interpretación de Postulado 2 que proporciona esta regla (que no autoriza prolongar segmentos dados lo suficiente hasta un punto arbitrario) no comportaría ningún cambio substancial en su teoría. Aunque esto fuera concedido, restaría explicar porqué Euclides prefiere de hecho aplicar el Postulado 2 de manera no genuinamente constructiva. Se podría pensar que lo hace por razones de simplicidad, por el hecho de que una construcción más rigurosa, pero más compleja, conduciría de cualquier forma al mismo resultado. Pero es fácil ver que en muchos casos, como en el de la Proposición I.2, la elección de Euclides no comporta ventaja alguna de simplicidad.

Resta entonces la siguiente pregunta: ¿Tuvo Euclides razones sólidas para preferir la aplicación del Postulado 2 de manera que, al menos a primera vista, no es

⁵ Esta regla aparece en Panza (2012) como R2: "If a segment is given and the concrete line representing it is such that it can be continued so as to meet a concrete line representing another given segment or a given circle, then the former segment can be produced up to meet this other segment or this circle; hence, if a segment a and another appropriate line b (either a segment, in turn, or a circle) are given, then the following other objects are susceptible of being given: two other segments, one of which, let us say c , extends a up to b , while the other, let's say d , is formed by a and c taken together; a point on b at which both c and d meet it; two portions of b having this last point as a common extremity (either two segments or two arcs of circle)."

genuinamente constructiva? En lo que sigue intentaremos dar la respuesta.

2. Comencemos preguntando por la función de los tres primeros postulados. El Postulado 1 autoriza trazar un segmento entre dos puntos dados. El Postulado 3 autoriza trazar un círculo con un centro y un radio dados. Es claro que en ambos casos aquello que es supuesto dado (dos puntos en el primer caso, y un punto y un segmento en el segundo) en la formulación misma de los postulados determina de manera unívoca qué se construye aplicando los postulados mencionados (un segmento en el primer caso y un círculo en el segundo). No ocurre lo mismo con el Postulado 2. En efecto, dado solamente un segmento, ningún otro segmento que este postulado autoriza trazar es determinado de manera unívoca. ¿Cómo se podría evitar esta falta de univocidad? La regla **R** surge una manera de evitarla, pero lo hace bajo la condición de considerar algo dado (un segmento o un círculo) que, en la formulación misma del Postulado 2, no es supuesto como dado. ¿Hay otra manera de evitar la falta de univocidad, sin tener que llevar en cuenta, por así decir, condiciones de contorno relativas a la aplicación del postulado como en la demostración de I.21?

Una manera podría ser entender que el Postulado 2 autoriza prolongar un segmento dado en una recta, o, al menos, en una semirrecta (entendiendo, naturalmente, las dos como siendo infinitas): la primera estaría determinada de manera unívoca por el segmento dado; la segunda estaría determinada de manera unívoca por el segmento dado y la elección del extremo a partir del cual se prolonga. La diferencia entre esta segunda interpretación del Postulado 2 y la interpretación proporcionada por la regla **R** es clara. De acuerdo con la última interpretación, el *output* unívoco del postulado (la recta o semirrecta) está completamente determinado por su propio *input* (el segmento dado o, a lo sumo, el segmento dado más la elección de uno de sus extremos); en cambio, de acuerdo con la idea que preside la regla **R**, el *input* del postulado no es de ninguna manera suficiente para determinar su *output* unívoco: para esto sería necesario recurrir, como en I.21, a condiciones de contorno del teorema mismo.

Sin embargo, es un hecho que en la Proposición I.2, Euclides no habla de rectas o semirrectas infinitas, sino solamente de trazar segmentos prolongando lo suficiente hasta un punto arbitrario. Se podría pensar — esta vez de manera mucho

más convincente — que esta elección sí está justificada por razones de simplicidad: Euclides en estos casos evitaría hablar de rectas o semirrectas para hacer la prueba más simple, puesto que la mencionada falta de univocidad implicada se podría fácilmente eliminar invocándolas, sin recurrir a ninguna condición de contorno relativa a la aplicación del postulado.

Si fuera esa la explicación del procedimiento de Euclides en casos como los de la Proposición I.2, se tendría de concluir que el papel de las líneas infinitas en los *Elementos* sería más fuerte de lo que usualmente se piensa. En efecto, el infinito no solamente entraría en juego en dos ocasiones en los *Elementos* meramente para evitar la proliferación de casos, a saber, en las demostraciones de las proposiciones I.12 y I.22, sino también para garantizar la univocidad del *output* del Postulado 2 sin ningún apelo a condiciones de contorno.

Pero lo que hemos dicho arriba acerca de la Proposición I.21 parece ser suficiente para poner en claro que la manera más natural de evitar, en favor de la simplicidad, una recta o una semirrecta infinitas es tener en cuenta una condición misma dada por el teorema. Estas consideraciones podrían ser suficientes para explicar la manera en la cual Euclides actúa en la solución de la Proposición I.21, pero no en otros casos, como el de la solución de la Proposición II.14, que es mucho más complejo. Esta proposición es un problema: “Construir un cuadrado igual a una figura rectilínea dada”. Examinemos su demostración en detalle.

Sea A la figura rectilínea dada. Euclides empieza por recomendar la construcción de un paralelogramo rectángulo $BCDE$ igual a A , lo que se puede hacer por la Proposición I. 45. Si los lados de este paralelogramo son todos iguales, entonces el problema es trivialmente resuelto. Si los lados no son iguales (Figura 6), Euclides prolonga el lado mayor BE , hasta F , haciéndose EF igual a ED , y luego, divide BF en dos partes iguales en G , traza primero un círculo de centro G y radio GF y después prolonga el lado ED hasta encontrar el círculo en H .

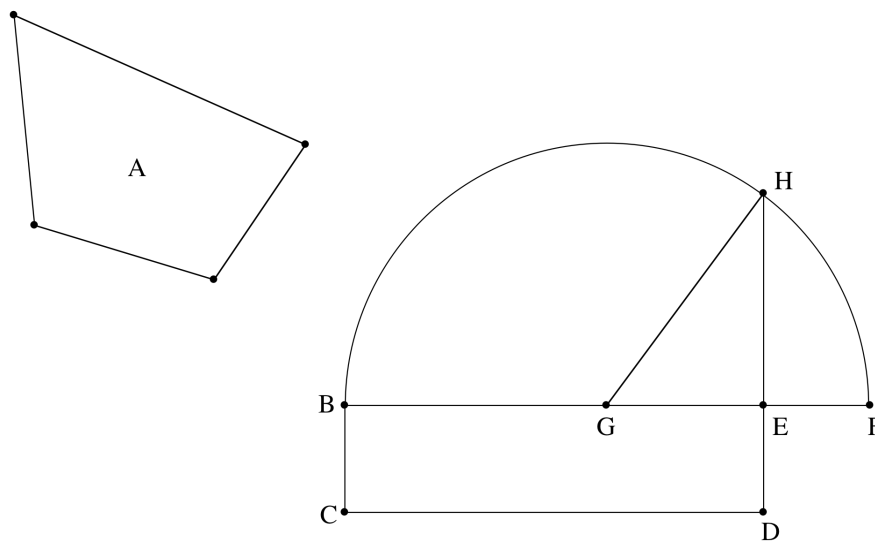


FIGURA 6
(Demostración de la Proposición II.14)

Como en el caso de la prueba de la proposición I.20, Euclides no deja claro cómo construir la prolongación de manera tal que ella sea igual a otro segmento dado: del segmento EF se limita a indicar que tiene que ser igual a DE. Pero en el caso de EH es más claro: el Postulado 2 parece aquí explícitamente aplicado de acuerdo con la regla **R**. ¿Cuál es la diferencia entre este caso y el de la Proposición I.2 que justifica esta actitud diferente?

Tal vez la diferencia depende del hecho de que en la construcción de II.14 no es relevante que el segmento EH, determinado por la intersección con el círculo, sea la prolongación del segmento ED, aunque EH sea construido de acuerdo con el Postulado 2 prolongando ED. Lo que es esencial para resolver II.14 es solamente que el segmento EH sea un cateto de un triángulo rectángulo del cual el otro cateto es igual a GE y la hipotenusa igual a GF (Figura 7). Supongamos dados los segmentos BE y ED (lados del rectángulo dado BEDC); prolongamos BE hasta F, de manera que EF sea igual a ED (lo que, dicho sea de paso, es hacer la suma de BE y ED, como sugerido para nuestra construcción relativa a la Figura 2); sea G el punto medio de BF: aplicando las construcciones del Libro I (y utilizando el Postulado 2 de la manera que se prefiera), construimos un triángulo rectángulo cualquiera G'E'H' tal que G'E' es igual GE y G'H' es igual a GF. El cateto E'H' de este triángulo rectángulo será igual a EH, lo cual resolvería el problema tanto cuanto EH mismo,

cualquiera que sea su posición: el cuadrado construido sobre $E'H'$ sería de todas formas igual al rectángulo dado $BEDC$, y entonces igual al polígono A , como requerido.

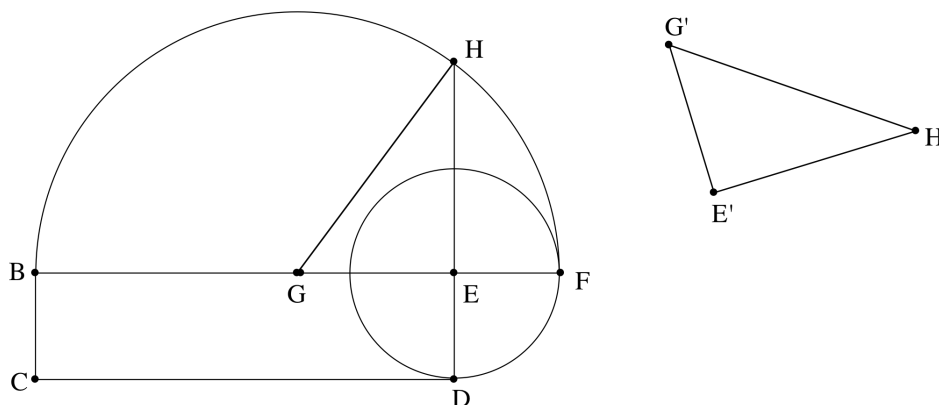


FIGURA 7
(Demostración alternativa de II.14)

Por el contrario, en todas las construcciones de los libros I a IV en las cuales Euclides aplicase el Postulado 2 como en la Proposición I.2, prolongando un segmento dado lo suficiente hasta un punto arbitrario, sería relevante la posición del segmento para la construcción en cuestión.

Luego, podría ser entonces el caso que Euclides acepte aplicar el Postulado 2 de acuerdo con la regla **R** cuando la posición del segmento que se obtiene por prolongación no sea relevante. Y, por el contrario, se podría pensar que Euclides se sujeta a la alternativa no genuinamente constructiva cuando la posición lo es. Esto se adaptaría bien a nuestras consideraciones precedentes, porque cuando la posición del segmento que se obtiene por prolongación no es relevante, es también irrelevante el *input* mismo del postulado en su posición dada, y, al contrario, cuando la posición del segmento obtenido por prolongación es relevante, el *input* del postulado en su posición dada también lo es.

3. Es evidente que nos hemos movido en el ámbito de la conjetura. En efecto, tanto la regla **R** cuanto nuestra explicación del hecho de porqué Euclides

prefiere no aplicarla y actuar de manera que no parece ser genuinamente constructiva, así como también la explicación del hecho de que en otros casos él parezca aplicarla, son puramente hipotéticas. El texto de los *Elementos* no permite comprobar ninguna de ellas. Pero no es nada conjetural, en cambio, que este texto no muestra una práctica uniforme, y es entonces difícil que la misma pueda ser considerada como el resultado de una actitud coherente acerca del significado del Postulado 2. Este es un hecho que con esta nota esperamos haber puesto en claro.

Ahora bien, se podría sostener que la tarea del historiador frente a un texto tan importante como los *Elementos* tendría que ser única y exclusivamente la de observar todos los hechos relevantes acerca de del mismo. Ciertamente que también se podría argumentar que el historiador no tiene que hacer conjeturas para explicar los textos que estudia, y que debería estrictamente limitarse, por el contrario, a dar cuenta de lo que los textos contienen. Pero aceptar esta actitud en relación con los *Elementos* sería lo mismo que negar que allí se exponga una teoría matemática que se quiera aprender para utilizarla en casos diferentes de aquellos que son considerados en el texto. Y es nuestra opinión que negar esta posibilidad sería lo mismo que negar que los *Elementos* es un tratado matemático.

Referencias Bibliográficas

- Euclides. 2007. *Elementos*. Madrid: Editorial Gredos. (Traducción y notas María Luisa Puertas Castaño)
- Panza, M. 2012. "The twofold role of diagrams in Euclid's plane Geometry", *Synthese*, DOI 10.1007/s11229-012-0074-2.