



HAL
open science

Calculs et erreurs systématiques

Jean Brun, François Conne

► **To cite this version:**

Jean Brun, François Conne. Calculs et erreurs systématiques. Journal de l'enseignement primaire, 1993, 43, pp.29-31. halshs-01515668

HAL Id: halshs-01515668

<https://shs.hal.science/halshs-01515668>

Submitted on 5 May 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

DIDACTIQUE DES MATHS

Calculs et erreurs systématiques

L'erreur est volontiers présentée comme un support possible pour les apprentissages de l'élève, et les recommandations générales aux enseignants pour travailler en ce sens sont fréquentes. Mais qu'en est-il de l'erreur par rapport à l'apprentissage lorsqu'on veut bien considérer celle-ci dans un secteur d'enseignement précis ?

Jean Brun, François Conne
FPSE

Pour tenter une réponse à cette question, nous nous arrêterons sur un apprentissage bien délimité dans les programmes, celui des algorithmes de calcul, tels qu'enseignés dans les calculs écrits des opérations arithmétiques.

Dans son Dictionnaire des mathématiques, F. Le Lionnais (1979) donne d'algorithme la définition suivante « Un algorithme est une suite finie de règles à appliquer dans un ordre déterminé à un nombre fini de données pour arriver avec certitude c'est-à-dire sans indétermination ni ambiguïté, en un nombre fini d'étapes, à un certain résultat et cela indépendamment des données. Un algorithme ne résout donc pas seulement un problème unique mais toute une classe de problèmes ne différant que par les données mais gouvernés par les mêmes prescriptions » (p. 25).

Il faut bien voir, en complément à cette définition, que ces « règles à appliquer » renvoient à un certain nombre de *connaissances* numériques il est donc impossible de séparer d'un côté les règles de l'algorithme et de l'autre les connaissances sur les nombres et sur les opérations numériques.

Ce sont les *connaissances numériques* qui constituent le fondement de l'apprentissage.

Le rôle de l'algorithme est, au **terme de l'apprentissage**, de prendre totalement en charge ces connaissances on pourra parler alors de son caractère automatique. Mais ces connaissances peuvent toujours fonctionner, en cas de besoin, et en particulier en cours d'apprentissages, comme des anticipations et des contrôles des actions organisées pour les besoins du calcul écrit.

On peut même envisager de faire carrément l'économie de l'apprentissage direct de l'algorithme en tablant sur l'invention par l'élève de méthodes de solution originales face à la question des calculs écrits. Encore faudrait-il que ceux-ci se présentent comme de véritables problèmes nouveaux, posant questions, plutôt que comme des tâches répétitives.

Le cas de la soustraction

Prenons le cas de la soustraction par colonnes la règle de l'algorithme demande de transformer l'écriture du nombre du haut dans les cas où c'est nécessaire pour pouvoir opérer on fait alors appel, en actes, à des *connaissances* comme

celles de partition du nombre et de compensation entre les parties de façon à ce que le nombre reste invariant.

Exemple

$$\begin{array}{r} 700 \\ - 104 \\ \hline \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{r} ^6 ^3 ^{10} \\ 700 \\ - 104 \\ \hline \end{array}$$

Sept cents peut être transformé en six cents plus nonante plus dix, étant donné que 100 peut être partagé en 90 plus 10. Après cette transformation de l'écriture, le nombre du haut n'a pas changé et la différence reste donc constante.

On peut aussi transformer l'écriture des deux nombres de manière à ce que leur différence reste égale, principe même de la soustraction.

Exemple

$$\begin{array}{r} 342 \\ - 125 \\ \hline \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{r} 342 \\ - 125 \\ \hline \end{array}$$

Dans ce cas, pour opérer on a ajouté 10 dans la colonne des unités (10 + 2, 12) du nombre du haut, et on les a « rendus » en ajoutant également 10 à la colonne des dizaines du nombre du bas (2 + 1, 3).

Le lien entre les règles d'un algorithme et les connaissances numériques associées étant rappelé, peut-on observer comment ce lien fonctionne lors des apprentissages des élèves? C'est ce que nous avons entrepris à propos de l'apprentissage de la division en analysant des erreurs d'élèves (Brun et Conne 1989-91).

La logique de l'erreur

Le caractère logique de nombreuses erreurs a été bien mis en évidence par les recherches sur les «erreurs systématiques» Brown et Van Lehn (1980) ont pu construire en intelligence artificielle des systèmes qui produisent les erreurs comme des suites d'organisations d'actions et de décisions. On peut alors parler des erreurs en termes d'inventions intelligentes ainsi, à propos de la soustraction, ces auteurs ont pu diagnostiquer la procédure erronée de l'élève à partir de sa seule réponse écrite. C'est une étape indispensable à la compréhension de l'erreur on peut ainsi parvenir à des catégories de procédures caractéristiques d'une opération donnée c'est ce que nous avons réalisé de notre côté pour l'opération de division.

Mais catégoriser ainsi les procédures ne suffit pas, il est nécessaire de remonter aux sources conceptuelles, c'est-à-dire aux connaissances qui dirigent ces organisations d'actions et de décisions produisant le calcul écrit. C'est ce que nous avons cherché à comprendre en observant les déroulements de calculs auprès d'élèves de 5^e et 6^e année.

Les résultats de nos observations nous renseignent sur le fait que

1. La plupart des erreurs révèlent moins des absences de connaissances et de règles que des organisations originales de connaissances et de règles celles-ci sont encore inadaptées à toutes les exigences du calcul à résoudre, mais elles peuvent être pertinentes par ailleurs, dans d'autres organisations et dans d'autres situations.
2. L'apprentissage de l'algorithme consiste dans le jeu des adaptations actives c'est-à-dire à l'initia-

tive de l'élève de ces organisations aux caractéristiques des situations de calcul.

9 par 9 ne se divise pas

Considérons l'erreur suivante et décrivons-la

$$\begin{array}{r} 9009 \quad | \quad 9 \\ 81 \quad \quad \quad 999 \\ \hline 90 \\ 81 \\ \hline 99 \\ 81 \\ \hline 18 \end{array}$$

Pour cet élève, 9 par 9 ne se divise pas en effet, 9 n'est pas «partagé» par 9 (référence à la connaissance «division partage» qui s'impose ici avec les contraintes que peut transporter une représentation concrète du partage pour qu'il y ait partage, il faudrait, selon cette représentation de l'élève, que le dividende soit plus grand que le diviseur et donc partagé entre un quotient et un reste).

L'élève divise donc 90 par 9, selon la règle «j'abaisse la colonne voisine».

La plupart des erreurs révèlent moins des absences de connaissances et de règles que des organisations originales de connaissances et de règles

Il applique alors à l'écriture du quotient la règle de numération en base dix, selon laquelle une position du nombre écrit trouve sa limite avec 9 donc 9 fois.
9 × 9, 81 90 - 81, 9 j'abaisse la colonne suivante 9 fois etc. Reste 18.

Cette combinaison de connaissances et de règles est organisée et systématique, mais de manière inadaptée aux exigences de la situation (bien que $999 \times 9 + 18 = 9009!$).

L'erreur suivante, d'un autre élève, rend compte d'une organisation différente mais qui est une forme d'adaptation à la même exigence mathématique de l'algorithme, à savoir qu'à chaque pas (colonne on cherche un rapport entre dividende et diviseur en fonction de la numération de position décimale, qui permet la partition la plus avantageuse du nombre en milliers, centaines, dizaines, unités).

Voyons cette erreur

$$\begin{array}{r} 60363 \quad | \quad 7 \\ 56 \quad \quad \quad 85123 \\ \hline 43 \\ 35 \\ \hline 86 \\ 84 \\ \hline 23 \\ 21 \end{array}$$

Dans ce cas (86 7), l'élève pense devoir écrire 12 dans une colonne de l'écriture du quotient, afin d'avoir un reste le plus petit possible.

On voit à travers ces deux exemples comment certaines connaissances s'imposent au détriment d'autres sans encore atteindre la coordination nécessaire dans le premier cas l'exigence de respect de l'écriture du quotient en base dix l'emporte au détriment de l'exigence d'un reste inférieur au diviseur, et dans le second cas, c'est l'inverse on peut considérer que ce type d'erreurs marque une étape de l'apprentissage de l'élève.

On pourrait argumenter que l'erreur en question est une «simple» erreur de calcul $43 \cdot 7 = 5$, au lieu de 6 bien sûr, si l'élève avait choisi 6, il aurait «fait juste», mais ce serait oublier que la vraie question pour l'élève est de savoir s'il accepte (et valide par là même le reste 8, et de contrôler le rapport reste/diviseur. Ici, il décide de continuer et il adapte ses connaissances à l'état nouveau du calcul. Ceci se fait dans la fluidité du calcul. C'est pourquoi nous disons que le déroulement du calcul erroné manifeste une exploi-

tation de connaissances (conceptuelles et procédurales plutôt qu'une absence de connaissances.

La plus grande partie des erreurs observées renvoie ainsi à des tentatives d'adaptation de l'élève aux exigences de l'algorithme par des coordinations encore insuffisamment contrôlées, mais constituées de véritables connaissances. C'est le propre d'un algorithme en cours de construction.

Ne pas s'en remettre à la « bonne explication »

Alors, demandera-t-on, quels liens entre ces résultats et l'enseignement ?

Si chercher à remonter à la source des erreurs nous fait rencontrer des connaissances en train de se coor-

donner par l'effet d'un travail d'adaptation, il paraît raisonnable de ne pas substituer à ce travail un rappel, même argumenté, du respect scrupuleux des règles et de leur ordre d'exécution de la part du maître. D'ailleurs les élèves savent en général comment exécuter la procédure proprement dite.

Il peut sembler également raisonnable de ne pas s'en remettre à « la bonne explication » qui lèverait enfin les obstacles à l'apprentissage. Et si ces résultats nous faisaient d'abord comprendre que la validation de l'algorithme n'est pas prioritairement à la charge de l'enseignant, malgré son caractère conventionnel ?

Une recherche annexe à celle sur les erreurs des élèves nous donne quelques indications à ce sujet. En effet, depuis plusieurs années nous demandons à des enseignants en

formation continue de répondre à un questionnaire sur des erreurs d'élèves.

À la question

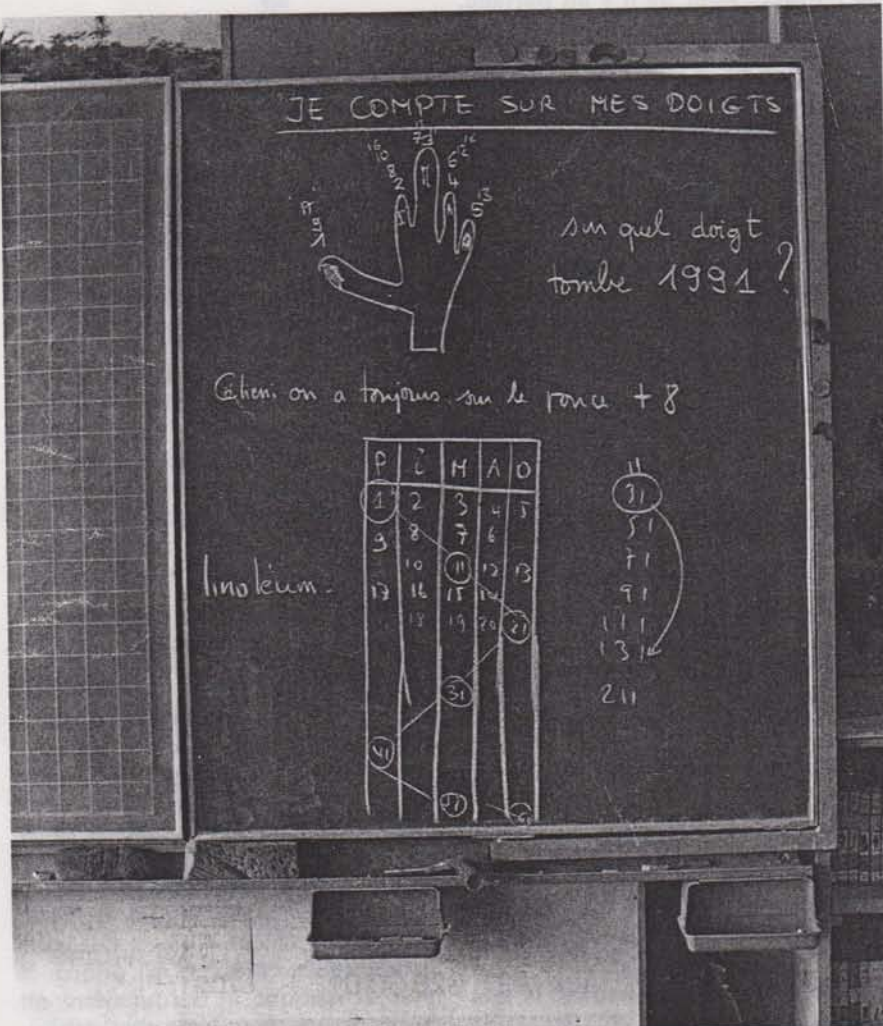
« En classe, un élève vous présente la réponse suivante en vous demandant est-ce juste ?

$$\begin{array}{r} 368 \\ - 273 \\ \hline 115 \end{array}$$

Décrivez le scénario d'un tel moment en classe. »

La majorité des réponses, toujours très détaillées, consiste en une reprise de l'explication de l'algorithme, souvent dans un dialogue individualisé avec l'élève, à propos de l'étape précise où se localise l'erreur manifeste, ou bien en une reprise de l'algorithme dans son ensemble par l'intermédiaire de démonstrations à l'aide d'un matériel. L'erreur signifiant l'échec de l'enseignement, la solution serait ainsi dans la reprise d'un enseignement, comme si le rapport enseignement/apprentissage fonctionnait de manière mécaniste. Quelques réponses s'orientent vers la recherche de détours proposant de nouvelles situations de calcul susceptibles de faire s'interroger les élèves sur leur calcul. Le but de ces détours est de remettre la question dans le camp de l'élève plutôt que de lui expliquer comment obtenir la réponse. La démarche est de rencontrer, à l'œuvre, ces organisations dont nous avons parlé, et de fournir la possibilité de réorganisations à l'initiative de l'élève. C'est dans cette voie que nous prolongeons notre étude des rapports entre apprentissage et erreur.

A. Musy



N.B. Le présent texte se rapporte aux recherches effectuées dans le cadre du subside FNRS n° 11-25448-88. L'étude des algorithmes de calculs dans la transmission et la constitution des connaissances numériques. J. Brun, F. Conne, J. Retschitzki.

Nous remercions les maîtres principaux, les enseignant(e)s et les élèves des écoles Saint-Jean et Roseraie pour leur constante coopération tout au long de cette recherche.