



HAL
open science

Gérard Vergnaud : L'enfant, la mathématique et la réalité (P. Lang 1980).

François Conne

► **To cite this version:**

François Conne. Gérard Vergnaud : L'enfant, la mathématique et la réalité (P. Lang 1980).
Recherches en Didactique des Mathématiques, 1982, 3 (2), pp.241-249. halshs-01523852

HAL Id: halshs-01523852

<https://shs.hal.science/halshs-01523852>

Submitted on 18 May 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

INFORMATIONS

PRESENTATIONS DE TRAVAUX

Gérard Vergnaud : L'ENFANT, LA MATHÉMATIQUE
ET LA RÉALITÉ

Editions Peter Lang, Berne.

A première vue, le texte de Vergnaud se présente comme un survol du programme de mathématiques à l'école élémentaire, avec un certain nombre de développements commentés que l'auteur peut y adjoindre en tant que psychologue et chercheur en didactique des mathématiques. Et alors, la psychologie y paraîtra bien discrète. Le lecteur pressé se demandera s'il n'a pas affaire à un nouvel ouvrage expliquant aux enseignants (et profanes) les mathématiques modernes enseignées. Pour certains, quelques-uns de mes étudiants par exemple, cette présentation est déroutante, habitués qu'ils sont à un autre type de découpage, à un autre usage des mêmes vocables. Pour d'autres encore, naîtra une certaine irritation, craignant, à lire certains passages (sur la classification des relations et leur propriétés ou encore sur les problèmes d'arithmétique) voir renaître une certaine scholastique. Pour de tels lecteurs s'offre alors l'alternative suivante : refermer le livre ou bien ouvrir leur esprit !

Quant à moi, qui, je l'avoue, ai beaucoup d'intérêt pour les glissements de sens, j'ai tout de suite pris le parti de ne pas m'achopper à certains passages obsolètes — i.e. plus à la mode — et de plus laborieux voire tatillons. J'étais frappé de voir le contraste entre l'auteur qui, sur la mathématique, explicite toutes les définitions, entre dans les détails, quitte à lasser le lecteur, et, sur le plan de ses hypothèses psychologiques, propose des formulations synthétiques, fort bien exprimées, avec à la clé sa brillante conclusion, quitte à ce qu'elles passent inaperçues au lecteur toujours trop pressé. Enfin j'étais amusé de voir Vergnaud tant aimer la logique (celle de l'analyse des concepts, celle des plans d'expé-

riences, ou encore celle de l'analyse de la tâche) et les problèmes d'arithmétique. Heureux amusement, car il m'a permis de faire « le pas de côté » si cher aux didacticiens... Mais trêve de clins d'œil.

Ce texte est précieux dans la mesure où, avant toute chose, il nous livre une démarche. Je le qualifierais volontiers d'essai, mais ce serait oublier que derrière cette analyse, il y a tout un ensemble de recherches dont les résultats et la fécondité nous disent que l'analyse est bien engagée. De plus, les thèses exposées ici par Vergnaud connaissent déjà des développements dus à de nouvelles recherches.

En fait l'analyse de Vergnaud ne se fait pas sur un seul mode, mais sur trois (le titre l'indique d'ailleurs). Premièrement, et ça dicte toute la forme de ce livre, Vergnaud ne décolle jamais de l'analyse des tâches auxquelles l'enfant est confronté. Je cite, page 54, « les tâches scolaires ne sont pas dans leur nature différentes des tâches qu'un enfant peut affronter dans la vie courante. Analyser une situation, se la représenter, opérer sur cette représentation pour trouver une solution et appliquer la solution ainsi trouvée, recommencer le cas échéant : c'est un processus psychologique fondamental de la vie, non de l'école ». Voilà ce qu'on peut entendre par le mot *réalité* tel qu'il apparaît dans le titre. Secondement, Vergnaud parle du contenu de l'enseignement des mathématiques à l'école élémentaire, et des concepts qui se profilent derrière ces contenus. Enfin, troisième facette qui donne sens à toute la démarche, l'analyse psychologique. Celle-ci a deux propos. Montrer d'une part le lien qu'on peut faire entre la pensée du sujet et les contenus mathématiques. Plus que de dire précisément quel contenu enseigner, l'auteur prend position sur la manière de le faire. Donc finalement les liens entre un contenu à enseigner et « les processus de matérialisation du réel chez l'enfant ». Montrer d'autre part comment coupler les deux : par l'analyse de la réalité à laquelle est confronté l'élève (ou plutôt l'enfant en tant qu'élève). J'engage le lecteur à porter son regard sur les articulations, sans cesse en fonctionnement, de ces trois aspects de l'analyse, plus que sur les contenus eux-mêmes qui sont là à titre d'exemples, choisis parce que parlant, et aussi parce que faisant partie du pro-

gramme. Il n'est pas si fréquent qu'un chercheur nous livre ainsi sa démarche ; saluons ici son courage et sa modestie ; et profitons-en !

Mais voilà, les commentaires qui précèdent ne sont pas à même de susciter cette « dépersonnalisation du savoir » qui permettra à la communauté de l'identifier en tant que tel (les clins d'œil recommencent, excusez-moi). Je vais alors consacrer la suite de mes commentaires à examiner la question des emprunts conceptuels faits par l'auteur aux mathématiques.

Je vais examiner ici relations, transformations et homomorphismes.

Relations

Vergnaud commence son ouvrage par l'étude des relations. Ce choix est dicté par la généralité de la notion. Je cite page 10, « Elle recouvre à la fois les activités des petits et les activités les plus élaborées. D'autre part, on peut mettre sans difficultés sous le terme générique "relations" :

- les relations statiques entre objets et les transformations dynamiques ;
- les structures qualitatives et les structures quantitatives ;
- les relations entre objets et les correspondances entre ensembles. »

Suivons alors la démarche :

1. Rappel du fait psychologique suivant : « La connaissance consiste pour une part importante à établir des relations et à les organiser en systèmes » (page 13).
2. Suit une classification des types de relations (binaire, ternaire, quaternaire) avec la donnée de certaines façons de les représenter. Ici on est en mathématiques. *relationnel*
3. Introduction de la notion de *calcul rationnel*. Notion de type psychologique et qui caractérise l'activité du sujet pensant, et qui consiste en « déduire une conduite ou une règle générale de conduite des relations constatées ou acceptées » et aussi « déduire de nouvelles relations à partir de relations constatées ou acceptées » (pages 20-21). Mais, « les calculs *rationnels* ne sont possibles et n'ont de validité qu'autant qu'ils s'appuient sur les propriétés des relations en jeu » (page 23). *relationnel*

4. Donc retour aux mathématiques avec l'exposé des propriétés des relations binaires, définitions explicitement données, avec exemples et contre-exemples.

5. Nouvelle parenthèse psychologique pour la relation d'égalité, où Vergnaud introduit une différenciation entre signifiant/signifié.

6. Reprise de la discussion mathématique à propos des relations ternaires et quaternaires pour introduire la notion de transformation, puis celle de loi de composition interne et d'application.

Je m'arrêterai là. Se dessine donc un mouvement de bascule : ancrage des définitions mathématiques mais pour un usage un peu différent que l'usage mathématique. L'important pour le psychologue, même s'il est didacticien, reste le fonctionnement du sujet, et non pas celui de la théorie mathématique. On remarque en outre un certain glissement de sens. Au départ, relation est pris au sens très vague ; à peine plus précises que ces relations qui président à l'aurore des introductions axiomatiques. Et puis, on débouche sur cet objet mathématique que l'on définit en théorie des graphes et qui généralise la notion d'application. Ce glissement s'est fait à la faveur de l'analyse de traitements quantitatifs et de l'introduction de la notion de transformation. Mais avant de passer à celle-ci, je voudrais examiner encore une question.

Je dis, il y a référence à des concepts mathématiques et à leur définition, mais usage tout autre. Il me faut clarifier mon propos et je prendrai deux exemples.

Exemple transitivité :

Vergnaud nous rappelle (page 25) la définition mathématique de la transitivité. Que dit celle-ci ? Par la donnée d'un critère, elle dit au mathématicien ce qu'il devra vérifier (assurer par démonstration) avant de pouvoir s'y appuyer dans la suite de ses raisonnements. Que dit le psychologue quand il parle de transitivité ? Il dit en gros que la capacité de l'enfant à s'appuyer, dans une tâche donnée, sur cette propriété dépend tout à la fois de son âge, des notions traitées, et de conditions propres à la tâche. Même pour des relations aussi « objectivement transitives » que la longueur de bâtonnets, le poids de boulettes de plasticine, etc..., des

enfants s'avèrent jusqu'à un certain âge incapables de prendre en compte la transitivité. A remarquer par contre que, pour tout sujet qui y parvient, la transitivité de la relation *est évidente*. Pas question de vérifier quoi que ce soit. On pourrait même faire la boutade suivante : « Si un enfant s'avère incapable de sérier les bâtonnets, faisons-lui donc vérifier la transitivité de la comparaison des longueurs, il aura ensuite tous les éléments pour réussir ». On ne s'en sortira pas non plus en faisant remarquer que peut-être, les psychologues ne font pas tant référence à la transitivité qu'à l'implication logique.

L'implication est en effet elle-même transitive... Non, ce sont les propriétés même des objets (et relations) tels que la pensée du sujet est capable de les appréhender, c'est la réalité même du sujet, qui sont en jeu ! La transitivité est donc un point sensible dans la construction de la pensée chez l'enfant, on le confrontera donc à des tâches où il aura à traiter des relations transitives, sous diverses formes. Mais de la définition elle-même, le critère, qu'en aurait-il à faire ?

Exemple compréhension/extension

A deux reprises, pages 13 et 62, Vergnaud fait remarquer que « Le psychologue est amené pour sa part à considérer que l'enfant travaille principalement en compréhension » contrairement au mathématicien qui « dans l'exercice de son métier » se définit les choses en extension. Il n'est peut-être pas très exact de faire porter la différence sur extension/compréhension. Il ne fait cependant aucun doute que Vergnaud reste ici à la définition des applica-^{peuse} tions et des relations qui pour le mathématicien consiste en la donnée d'un triplet (E, F, G) , E et F étant des ensembles et G un sous-ensemble de $E \times F$ (soumis à certaines conditions pour la notion d'application). Et, pour ce qui concerne les ensembles, c'est le simple fait de pouvoir les considérer in abstracto, d'un seul acte de pensée. Pour moi, c'est un point fondamental. Et qui permet de bien contraster les approches du psychologue et du mathématicien. Les mathématiques ne portent que sur des *entités constituées*. L'ensemble est tout fait, la relation est donnée par son graphe. On ne s'occupe pas de savoir

comment elles se constituent, on ne prend pas en compte ce moment*.

Tout autre est le point de vue du psychologue qui s'intéresse au sujet, et qui remarque (c'est temporel!) que la pensée est toujours « ouverte ». Le sujet vit au moment de ses opérations de pensée. Ainsi les élèves non transitifs, ou encore les élèves qui sont toujours prêts, à l'affût, de compléter les ensembles qu'ils ont été amenés à constituer, ou encore ceux qui comptent et faute d'être sûrs de leur comptage recomptent encore et encore. Considérer des entités constituées, implique des opérations de pensées bien plus abstraites, c'est se placer d'emblée à un niveau de représentation où on peut traiter de ces entités comme des objets (voire des nombres).

Transformations

Vergnaud propose ce terme, quand bien même, formellement, il disposerait de concepts tels que relation (relation dynamique), fonction, ou encore opérateurs pour en rendre compte. Il y a dans le choix de ce terme le souci de marquer une nouvelle perspective. On ne se trouve plus seulement dans la description de l'activité mentale du sujet, mais on considère en outre ses représentations de la réalité. Il y a mathématisation de la réalité par le sujet et non pas seulement un contenu mathématique qu'il aurait appris. Le point en est le suivant: *une même entité* de la réalité (tel que le sujet peut l'appréhender) passe par des *états distincts*, subit donc une transformation. Cette transformation est *réalisée* par le sujet aux plans de ses représentations par un calcul, une écriture, un schéma fléché etc... Dynamique, c'est à la fois temporel et actif. Remarquons tout de suite que certains sujets sont incapables (sur la donnée d'un problème d'arithmétique verbal par exemple) de considérer (de se représenter) les transformations; leur traitement numérique est alors un pur traitement de mesure d'états distincts.

Donc à des transformations objectives de la réalité, la

* De là d'ailleurs la transposition didactique qui dans l'enseignement élémentaire invente des tâches de constitution d'ensemble par remplissage d'un diagramme de Venn.

pensée associe des transformations mentales (des opérations de calcul par exemple). Mais il y a là complète solidarité, comme si pour le sujet, la transformation mentale qu'il fait était réellement la transformation objective de la réalité (ou plutôt ce qu'il en retient dans le contexte de la tâche qui lui est proposée). Voilà d'ailleurs pourquoi le processus peut être entièrement fictif comme c'est le cas pour les problèmes d'arithmétique à l'école.

Homomorphisme

Venons-en pour terminer à l'idée d'homomorphisme introduite par Vergnaud. Mais de nouveau avec un certain décalage par rapport à son usage mathématique. On a la chance de pouvoir, tout au long de ce livre, suivre Vergnaud dans sa démarche. Or celle-ci nous montre qu'il passe de la notion de transformation à celle d'homomorphisme. Voyons comment. Avec les transformations, on passe un cap important dans l'analyse de la pensée du sujet puisqu'on passe au plan de la représentation. Continuant cette analyse, Vergnaud introduit alors ce qu'il appelle: isomorphisme de mesure. Le terme me paraît mal choisi. L'usage qu'il en fait ici n'étant à mon avis pas très cohérent avec celui qu'il fera de l'homomorphisme. Isomorphisme de mesure désigne une espèce de super-transformation. Super à deux sens: d'une part on s'élève au-dessus du plan de la réalité, isomorphisme de mesure renvoie aux transformations entre quantifications d'entités réelles distinctes; d'autre part, et c'est lié, ces transformations ont une structure plus complexe puisqu'elles doivent être compatibles avec les rapports que ces entités entretiennent entre elles. L'idée de morphisme est bien là, et je ferais seulement remarquer qu'elle se précise au moment où on entre plus avant dans l'analyse de représentations du sujet.

Enfin, Vergnaud introduit dans son chapitre conclusif, l'idée d'homomorphisme. Mais auparavant, et pour mieux contraster les usages, je tenterai de caractériser l'usage mathématique de ce concept. Un homomorphisme est, en gros, un outil pour connaître la structure de certains objets mathématiques. Soit en modélisant cet objet par un autre dont la structure nous est déjà connue. L'homomorphisme

est alors la correspondance qui fait passer de l'un à l'autre. La modélisation n'est pas forcément complète. Soit, plus finement, en examinant la structure d'un ensemble d'homomorphismes de l'objet « inconnu » dans un même modèle, voire dans l'objet lui-même.

Voici maintenant deux citations de Vergnaud (pages 199 et 204) :

« Un homomorphisme est une application d'un ensemble dans un autre qui respecte certaines structures relationnelles de l'ensemble de départ et de l'ensemble d'arrivée. Homomorphisme signifie même forme, même structure ».

« Bref la notion d'homomorphisme permet de comprendre les équivalences entre procédures opératoires, à la fois du point de vue des rapports entre réalité et représentation, du point de vue des rapports entre plans différents de représentation et du point de vue des rapports intérieurs à un même plan de représentation. C'est la notion la plus puissante qui permette de rendre compte de la nature des opérations de la pensée ».

Comme on s'en rend compte à la lecture de cette deuxième citation, Vergnaud ne se place pas vraiment dans le cadre précis et restreint d'une application entre ensembles. Pour lui, l'homomorphisme permet de rendre compte de la solidarité des différents plans qui constituent la connaissance. Ainsi par exemple cette solidarité évoquée plus haut à propos des transformations. L'homomorphisme exprime un principe de cohérence et de rattachement à la réalité. Cela en valide sa mathématisation et les traitements mathématiques qui dépassent de loin ceux des activités matérielles ou concrètes. « Cela permet, au psychologue mais aussi au sujet, différemment peut-être, de comprendre l'équivalence des procédures opératoires ». Tandis qu'en mathématiques, elle a pour but de trouver de nouvelles procédures opératoires équivalentes, dans un même plan de représentation ou non. On comprend dès lors que le concept y soit précisé.

On le voit, la pensée et le traitement mathématique de la réalité sont selon Vergnaud pleins de mises en relation effectuées par le sujet. Pleins aussi d'homomorphismes qui, eux, ne sont pas tant le fait du sujet que de celui du réglage

et du développement des diverses représentations. Une dernière citation (page 201) « La notion d'homomorphisme s'applique d'abord à la fonction qui fait passer de la réalité à la représentation. La représentation ne peut en effet être opératoire que si elle reflète de façon pertinente et homomorphique ». Je rajouterai : de toutes façons elle est opératoire, sinon elle ne se développerait pas.

Compte-rendu par François Conne
F.P.S.E. Genève

Serge Fauconnet : ETUDE DE RESOLUTION DE PROBLEME : QUELQUES PROBLEMES DE MEME STRUCTURE EN PHYSIQUE

Thèse de 3^e cycle : Université Paris VII, 1981.

Serge Fauconnet essaie de situer son travail au carrefour de deux approches extrêmes des études sur le raisonnement :
— l'une où l'aspect « traitement de l'information » est presque complètement négligé, mais où l'accent est mis sur la structure des connaissances (étude de représentations).
— l'autre où l'on s'intéresse de près à la mise en place de stratégies de résolution, mais où l'on délaisse l'aspect cognitif (problem solving).

L'idée centrale de sa thèse est de présenter aux élèves des problèmes de physique ayant tous la même structure mathématique, mais présentant des habillages physiques différents. Pour varier les présentations, il a joué sur deux facteurs, d'une part le domaine de la physique concerné par le problème, d'autre part le rôle joué par le facteur temps dans l'habillage de l'énoncé.

Il a donné des problèmes reposant sur trois thèmes physiques :

— deux ressorts, attachés bout à bout, sur lesquels on tire pour les allonger (les deux ressorts ont des coefficients d'allongement différents).

SOMMAIRE / SUMARIO / SUMMARY

James M. MOSER : <i>The emergence of algorithmic problem solving behavior</i>	133
Yves CHEVALLARD, Marie-Alberte JOHSUA : <i>Un exemple d'analyse de la transposition didactique</i>	157
INFORMATIONS	
PRESENTATIONS DE TRAVAUX	
Gérard VERGNAUD : <i>L'enfant, la mathématique et la réalité</i>	241
Serge FAUCONNET : <i>Etude de résolution de problème: quelques problèmes de même structure en physique</i>	249

Recherches en didactique des mathématiques

