



**HAL**  
open science

## Comptage et écriture en ligne d'égalités numériques

François Conne

► **To cite this version:**

François Conne. Comptage et écriture en ligne d'égalités numériques. Recherches en Didactique des Mathématiques, 1988, 9 (1), pp.71-116. halshs-01523870

**HAL Id: halshs-01523870**

**<https://shs.hal.science/halshs-01523870>**

Submitted on 17 May 2017

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# COMPTAGE ET ÉCRITURE EN LIGNE D'ÉGALITÉS NUMÉRIQUES

François Conne<sup>1</sup>

## ABSTRACT

This article talks about a research I have made in first grade of primary school in French part of Switzerland. My interest is to study the interaction between counting procedures and writing of addition equalities ( $a + b = c$ , or  $c = a + b$ ) as they are involved in real teaching. Analysing the way that children have finished equalities of a set of uncompletely written ones, I look how the written data are interpreted to support numerical operations. I try to show all the dynamic of this interaction.

I have chosen to present the whole gait of my study, to illustrate the chain of methods I used to exploit *real class observations*, and to contrast with classical presentations of experimental research. Through that presentation I show that the difficulties in counting lie not, at this moment of school learning (*end* of first grade of primary school), in the acquisition of isolated performances but in their integration in a stable system of interpretations and procedures. I defend the general idea that the symbolical notations play a significant role in this process.

## RESUMEN

Este artículo presenta un investigación llevado a cabo en una clase de 1° de E.G.B. en la zona francófona de Suiza.

Mi interés se centra en la relación que mantienen, en el marco de la enseñanza practicada, los procedimientos de cuentas y escritura en línea de igualdades (adiciones). Al analizar como los alumnos han completado un conjunto estructurado de igualdades con huecos que les habían sido sometidas por escrito, he examinado como los datos escritos se transforman, a través de la interpretación del alumno, en soportes de sus operaciones numéricas. He intentado mostrar por medio de la función de representación el carácter dinámico de esta interacción.

Desde otro punto de vista, he optado por una presentación paso a paso de mi investigación para ilustrar los métodos que tienden a explotar los datos obtenidos de la observación en clase, y para contrastar este tipo de estudio con los estudios psicológicos. Todo esto tiene su importancia en cuanto al objeto de estudio en sí mismo ya que yo muestro que donde el aprendizaje de cuentas y de cálculos elementales plantea problema no es en la adquisición de tal o tal capacidad aislada, sino en su integración en un sistema estable, y yo defiendiendo la idea de que las notaciones simbólicas juegan un papel determinante en este proceso.

1. La Romanèche 1163 ETOY, Suisse.

## RÉSUMÉ

Cet article présente une recherche faite en classe de première primaire en Suisse romande (équivalent au CP français, âge moyen 7 ans). Je m'intéresse à la relation qu'entretiennent, dans le cadre de l'enseignement pratiqué, procédures de comptage et écriture en ligne d'égalités (additions). En analysant la façon dont les élèves ont complété un ensemble structuré d'égalités lacunaires qui leur avait été soumises par écrit, j'examine la façon dont les données écrites deviennent, au travers de l'interprétation de l'élève, des supports à ses opérations numériques. J'essaie de montrer, au travers de la fonction de représentation le caractère dynamique de cette interaction.

D'un autre point de vue, j'ai opté pour une présentation de l'entier de ma démarche d'étude pour illustrer des méthodes visant à exploiter des données issues de l'observation des classes, et pour contraster ce type d'étude didactique avec des études psychologiques. Ceci n'est pas sans importance quant à l'objet d'étude lui-même puisque je montre que ce qui pose problème dans l'apprentissage des comptages et des calculs élémentaires n'est pas l'acquisition de telle ou telle compétence isolée mais bien leur intégration en un système stable, et je défends l'idée que les notations symboliques jouent un rôle déterminant dans ce processus.

## I. INTRODUCTION

## Intentions de l'auteur

Cet article présente une recherche déjà ancienne (1979), le domaine où elle s'inscrit : comptage et calculs en arithmétique connaît un développement soutenu depuis une bonne décennie et le mouvement est encore en plein essor aujourd'hui, alors qu'on a redécouvert aux USA les vertus du "calcul mental" et les spécificités de celui-ci par rapport au "calcul en colonne" (qui est un calcul mental assisté par une disposition élaborée écrite des données numériques). Valait-il encore la peine de présenter ma propre contribution, qui, par certains aspects, date manifestement ? Si je réponds par l'affirmative à cette question, c'est pour deux raisons. Tout d'abord mon étude (car il s'agit plus que d'une recherche expérimentale) porte finalement plus sur les écritures symboliques et leur rôle en classe, à un moment bien précis de l'apprentissage de l'arithmétique élémentaire, que sur l'apprentissage lui-même. Or cette question de symboles, supports aussi bien des échanges entre maître et élèves, que de l'effectuation des tâches elles-mêmes, est une question que la didactique des mathématiques, contrairement à la psychologie, ne peut pas éluder. La seconde raison est que nous nous trouvons actuellement à une période où les échanges entre psychologie et pédagogie manifestent un très net déséquilibre entre l'offre et la demande de résultats.

La discussion d'un récent article de M. Fayol me permettra de montrer au lecteur comment les deux raisons évoquées ci-dessus sont en fait liées.

## Les offres sont faites, rien ne va plus ?

En 1985 la Revue Française de Pédagogie a publié une note de synthèse de M. Fayol : *Nombre, numération, dénombrement : que sait-on de leur acquisition*, où l'auteur présente les résultats récents des recherches psychologiques. Cette note était bien venue pour le public francophone. Certes on doit reprocher à M. Fayol sa discrétion quant aux recherches des didacticiens eux-mêmes. Mais l'auteur a pourtant très clairement annoncé sa position dans l'introduction de son texte. Je cite : "En tant que psychologue, nous n'avons pas à conseiller ou

même à suggérer telle ou telle pratique. La pédagogie n'est pas la science appliquée à la psychologie. En revanche il nous a semblé important d'informer, au moins succinctement, les maîtres des développements récents relatifs à l'acquisition du nombre et de la numération. Il leur appartiendra d'en faire l'usage qu'il leur paraîtra le plus judicieux".

La question que soulève aussitôt une telle position est la suivante, les maîtres ont-ils les moyens d'en faire usage (je dis bien usage et même pas usage judicieux) ? M. Fayol laisse entendre que l'information des enseignants devrait suffire. A ceci je rétorquerai que cela ne suffit manifestement pas, et qu'un autre préalable est nécessaire, dont M. Fayol ne parle pas, à savoir que les maîtres (et les pédagogues) puissent s'approprier les données des recherches psychologiques.

Cette offre étant déclarée, M. Fayol entreprend sa synthèse. Il essaie de situer les résultats de recherche, dénote les thèses respectives et les positions des problèmes. Puis il conclut comme suit : "Comme le note Ginsburg (1978) en ce qui concerne les mathématiques" : "Cross-cultural research suggest universal cognitive capacities. Why do schools fail to exploit them ?" Et effectivement, le bilan que nous avons présenté amène à se demander, comment et pourquoi, compte tenu des "habiletés" précoces décelées chez les enfants, l'apprentissage des mathématiques peut être difficile! "Une telle conclusion est abrupte : Rien ne va donc plus, Et la position de M. Fayol se fait alors bien ambiguë. En tous cas elle ne contribue pas à susciter la demande chez les enseignants. Mais au fait, dans quel domaine situer sa question ? Sans vouloir opposer les personnes, je dois quand même signaler ici que la position de G. Vergnaud est à ce propos plus solide. Ce chercheur en effet insiste sur la nécessité pour les psychologues de relever les défis que posent les faits scolaires. Tel celui soulevé par Ginsburg et Fayol. Et d'ailleurs J. Piaget avait fait une même remarque à ce propos dans *Psychologie et Pédagogie* (Piaget 1969), et avait en outre indiqué une réponse possible en situant la difficulté au niveau de la compréhension du "langage technique comportant un symbolisme très particulier et exigeant un degré plus ou moins haut d'abstraction" avec lequel "l'enseignement des mathématiques convie les sujets à une réflexion sur les structures". Bien entendu, si la pédagogie se trouve ainsi intéressée en premier chef à cette question, rien n'empêche la psychologie de nous apporter sa contribution.

Quoi qu'il en soit, les raisons qui poussent la didactique de s'informer sur l'acquisition des concepts mathématiques ne sont pas tout à fait identiques à celle des psychologues. Les perspectives ne sont pas les mêmes. Il me paraît de plus en plus douteux que les pédagogues ou les didacticiens puissent "consommer" des faits bruts, et vu le déséquilibre que j'évoquais tout à l'heure, il me paraît de première importance que l'on dégage les procédures des études didactiques dans ce qu'elles ont de spécifique. Que ce soit en vue de l'établissement de ce que certains ont appelé l'ingénierie didactique, ou que ce soit, en vue de celui de procédures expérimentales plus classiques ou encore de celui de procédures d'observation de classes. Or c'est à ceci même que mon texte se propose de contribuer, au travers de la présentation d'une étude sur les comptages et les écritures d'égalités lacunaires en classe élémentaire. Il sera ici question essentiellement d'observation et d'analyse des productions d'élèves recueillies en classe.

#### L'exploitation des Données recueillies en classe

M'étant engagé à l'observation du travail fait en classe, je me suis vu confronté à une double difficulté. La première était celle de bien identifier le travail effectif du maître et des élèves, par delà les présentations des manuels scolaires et les descriptions des enseignants eux-mêmes. Guy Brousseau a maintes fois insisté sur ce point.

Examinons ceci à propos du comptage et de l'enseignement des mathématiques en 1er et 2e primaire en Suisse Romande (CP, CE, français). Dans l'article intitulé "*Le comptage et la procédure «(+1)-itérée» dans l'exploration intuitive de l'addition*", R. Droz et J. Paschoud (1981) proposent la démarche suivante ; je cite le résumé de leur article : "Partant d'une analyse de plans d'études pour l'enseignement élémentaire et l'observation des conduites spontanées de comptage et d'addition d'un sujet de quatre ans, nous tentons de démontrer que le comptage joue un rôle important dans l'exploration préopératoire du nombre. Les systèmes conceptuels de Russel et de Piaget paraissent inadéquats, pour rendre compte de nos observations et nous nous servons de l'approche de P. Lorenzen".

Mes propres observations de classe élémentaires ont prolongé ce résultat et montré que si les manuels suisses romands destinés aux maîtres ne faisaient quasiment pas référence, eux non

plus, aux comptages, cela n'empêchait pas que, pratiquement, les élèves y recourent massivement dans l'accomplissement de leurs tâches. Il y a donc un hiatus au sein même de l'école entre les manuels d'enseignement et les pratiques effectives. Comment comprendre ce hiatus ? Bien sûr il serait un peu court d'y voir un manque de bonne volonté ou même une ignorance de la part des auteurs. Au contraire si le comptage reste implicite c'est qu'il semble aller de soi. Autre chose est en jeu, à savoir la fonction même des manuels de méthodologie : or il s'agit avant tout pour eux d'attester qu'on fait des mathématiques en classe, comme le stipule le projet social. Il s'agit alors de seconder le maître dans sa tâche, de lui permettre de diriger les apprentissages vers le but poursuivi plus que de leur présenter les façons de procéder des enfants. Pour remplir cette fonction, les manuels agissent alors sur deux plans. D'une part, celui de la séquence de situations présentées en classe au cours de laquelle se dégagera la (ou les) signification(s) des notions présentées en classe. D'autre part, celui des notations symboliques en usage, en général empruntées aux mathématiques, et qui indiquent la (ou les) signification(s) attribuée(s) par l'école aux activités scolaires. Toute analyse de manuel, et toute observation de classe se doit de mener conjointement à ces deux niveaux, son investigation. C'est ce que j'ai entrepris dans ma thèse (Conne 1986). Les didacticiens ont beaucoup insisté sur l'analyse et même plus encore sur la confection de séquences de situations didactiques jusqu'à en faire l'instrument même de l'expérimentation didactique. Ils n'ont pas non plus négligé l'étude des symbolismes associés à l'enseignement, quoiqu'on puisse dire cependant qu'ils ont plus retenu, à leur propos, l'aspect communication que l'aspect support aux actions. C'est cette double fonction du symbolisme que j'entends rappeler par la présentation de mon étude.

La seconde "difficulté" que je voudrais évoquer ici a trait à l'observation et au recueil de faits de classe. Nous nous trouvons en effet dans une situation bien différente de celle du laboratoire, où on peut s'entretenir en particulier avec des élèves, et ainsi se soustraire, un moment, à l'emprise du projet d'enseignement. Non seulement l'observation de la classe nous donne en vrac des faits innombrables, mais encore ceux-ci sont-ils d'emblée plus "globaux", touchant en même temps à plusieurs niveaux sans qu'on ait pu les isoler vraiment. Le recueil de faits de classe comparés au recueil de faits de laboratoire semble

procéder de façon transverse; On se souvient de la question que M. Fayol posait en conclusion de son article : "comment et pourquoi, compte tenu des "habiletés" précoces décelées chez les enfants, l'apprentissage des mathématiques peut être difficile!" Ceci manifestait un certain désarroi de la part du chercheur en psychologie : que faudrait-il encore étudier pour comprendre cette difficulté ? Eh bien justement, la réponse me paraît être connue, étudier le travail effectif en classe (en recourant soit à l'observation simple, soit à l'observation provoquée, peu importe ici). Car on peut d'ores et déjà faire l'hypothèse que ce ne sont pas tant ces "habiletés" partielles, éparses qui sont en cause, mais bel et bien leur intégration. Or, et c'est ce que je tenterai de montrer dans la seconde partie de cet article, je crois pouvoir affirmer que l'analyse de l'appropriation des systèmes symboliques conventionnels par les élèves permet justement l'étude de cette intégration.

## II. LA QUESTION DES COMPTAGES SOUS L'ANGLE DES SUPPORTS SYMBOLIQUES

Il ne suffit pas, dans l'enseignement des mathématiques, de proposer des écritures mathématiques pour garantir la réalisation du projet didactique. Encore faut-il qu'en classe on utilise ces écritures pour l'accomplissement des diverses tâches. Ou, dit autrement, que maître et élèves échangent par le biais de ces écritures, c'est-à-dire puissent à travers elles proposer, effectuer, et corriger des tâches bien précises. Les systèmes symboliques ont donc une double fonction : celle de communication et celle de support aux actions. C'est donc bien en termes de systèmes de signifiants qu'il faut examiner cette question, ainsi que le propose Vergnaud (1985). Mais pour mieux cerner le type de tâche associé aux écritures d'égalités lacunaires dans les programmes Suisse Romands, il est bon de fixer, un peu en amont, une terminologie. Celle que je vais proposer ici est issue de l'analyse de manuels modernes et anciens utilisés en Suisse romande, elle a donc une valeur générale pour cette région.

### Dénombrement, comptage, calculs

Parmi les activités numériques élémentaires, je distinguerai

tout d'abord entre dénombrement et calcul. Les dénombrements traitent de quantités préalablement données (collections concrètes ou figurées) et s'accompagnent toujours de la récitation (exprimée ou mentale) de la comptine ou plus généralement du recours à tout autre type de compteur. Les activités de dénombrement consistent à coupler ce compteur - la récitation de la comptine - avec l'énumération des éléments de la collection. Elles ne permettent pas seulement l'évaluation de quantités mais aussi celle de certaines de leurs transformations suite à des adjonctions ou des retraits, ainsi que leurs comparaisons (même si bien entendu il n'est pas nécessaire dans ce cas de dénombrer les quantités à comparer). Formellement, un seul compteur, et de là un seul système symbolique suffit au dénombrement. Cependant suivant l'ordre de grandeur de la quantité à évaluer et des conditions de ce travail, le recours à des systèmes de marquage auxiliaires peut s'avérer nécessaire. Les calculs traitent les opérations numériques reflétant les transformations et comparaisons de quantités. Portant sur des entités abstraites, les calculs recourent à des systèmes symboliques plus ou moins élaborés qui jouent le rôle de supports aux actions. Je distingue alors les comptages et les calculs numériques. Les comptages s'apparentent aux dénombrements parce qu'ils utilisent comme support des systèmes symboliques figurant des quantités. On peut dire que dans le comptage des calculs sont médiatisés par le recours aux opérations de dénombrement (ou d'opérations directement dérivées du dénombrement)<sup>1</sup>. Le critère définissant un comptage sera donc tout naturellement celui de la récitation de la comptine ou d'une séquence de celle-ci, et ceci quel que soit le support figuratif utilisé (ou son image mentale) : jetons, doigts, traces écrites, nombres figuratifs, bouliers, réglettes, etc. Les calculs numériques traitent eux aussi des opérations en recourant à des sup-

1. L'opposition dénombrement/comptage est la même que celle proposée, voici 4 ans, par Habiba El Bouazzaoui (1987) dans sa thèse sur les premiers enseignements du nombre et de la numération. Elle distinguait deux raisons de recourir à un nom désignant un nombre : la mesure d'une quantité et la production d'une collection (cf. chap. II par. 2.2.2.1. pg 21-22). Dans mon idée cependant, le comptage n'est pas seulement dans un rapport inverse au dénombrement, on a changé de niveau puisque la quantité est médiatrice du calcul, elle est sous son contrôle. Certaines propriétés des quantités concrètes, sous une forme donnée choisie ou imposée par commodité ou simple convention (c'est-à-dire selon des critères pragmatiques, économiques, ou autres), sont réinvesties à un niveau de traitement plus abstrait que celui requis dans le simple dénombrement.

ports symboliques variés (matériels ou images) : boulier, écritures, prononciation orale des nombres composés... mais ne recourent pas à un compteur - ou à la récitation de la comptine. A ce niveau, c'est la connaissance de la structure de la comptine (ou de l'organisation numérique) qui intervient, à la fois au travers de la mémorisation des tables des opérations numériques (addition, multiplication) et au travers de l'application des règles de numération (dérivées des axiomes structurels numériques telle l'associativité, la commutativité, la distributivité, etc.). Ces règles de numération ne sont pas connues en tant que telles, mais sont représentées par le biais de règles d'écritures (ou plus généralement par le biais de règles de transformation des représentations symboliques). Ces traitements symboliques : écriture, réorganisation, disposition des calculs, etc. permettent de substituer à une opération de calcul une autre ou une séquence d'autres opérations plus élémentaires mais équivalentes. Bien sûr la disposition en colonne, l'effectuation d'une addition colonne par colonne, les règles de retenue, ainsi que la lecture du résultat sont des exemples de calculs numériques répondant aux critères susmentionnés. Mais de même le calcul mental (procédant d'un autre découpage des données), le calcul sur boulier, répondent aussi à ces critères. Plus près des comptages, on considérera aussi comme calculs numériques les opérations visant à simplifier le calcul ou le comptage, ainsi le fameux "passage à la dizaine".

$$8 + 6 = (8 + 2) + 4$$

ou d'autres méthodes

$$\text{comme par ex. } 45 + 8 = (45 + 10) - 2.$$

Considérant la question sous l'angle des supports symboliques auxiliaires j'ai montré comment dénombrements, calculs, comptage et calculs numériques se hiérarchisent selon la richesse et la complexité des outils utilisés. En observant le travail en classe, on n'échappe pas à l'examen du rôle que les systèmes de représentation jouent dans l'échange entre maître et élèves, à la fois pour signifier à ces derniers une tâche précise et pour leur permettre de rendre compte de leur travail au travers de leurs réponses. Dès le moment où on demande l'effectuation de dénombrements ou de calculs aux élèves, ces deux fonctions des représentations symboliques (support-communication) sont étroitement liées et c'est sur leur articulation que progresse l'apprentissage. Je vais examiner en détail cette

question à propos des comptages et des écritures d'additions simples, en ligne

$$a + b = c \text{ ou } a = b + c$$

qui sont utilisés en Suisse romande pour cette phase de l'apprentissage (du dénombrement au comptage vers la présentation de quelques règles de calcul numérique). Ceci concerne les deux premières classes de l'enseignement primaire (enfant d'âge 7-8 ans).

### L'écriture en ligne comme codage des calculs effectués par comptage

Les manuels suisses romands ne distinguent pas de manière explicite entre la signification mathématique des opérations numériques et la signification que ces dernières prennent pour des élèves en train de s'approprier les techniques de calcul. L'écriture mathématique usuelle est empruntée, et, comme elle ne préjuge pas des moyens de calcul effectifs, cette "disponibilité" du symbolisme est mise à profit pour l'attribution de significations scolaires provisoires. Tant qu'il est question de présenter les premiers nombres et les opérations numériques que l'on peut faire avec, avant que "l'acquisition des tables d'addition" (répertoire de compositions et décompositions élémentaires) rende superflu le recours aux comptages et permette des calculs plus élaborés (en colonne), l'écriture en ligne se voit attribuer la valeur de code des calculs effectués par comptage. Il n'est pas nécessaire que ceci soit voulu, ni même consciemment envisagé par le programme scolaire. Il suffit pour qu'il en soit ainsi que l'écriture en ligne soit utilisée comme demande d'un calcul, que les élèves les effectuent par comptage, et qu'inversement ils expriment leurs comptages en les écrivant de la sorte. Ce n'est que plus tard, que la pratique du calcul passera par la pose de l'opération en colonne. Dès lors, et progressivement, ces écritures revêtiront d'autres significations. On y recourra d'abord pour présenter quelques règles utiles de calcul (pour le calcul mental par exemple) puis enfin elles seront prises tantôt comme formules mathématiques tantôt comme équations algébriques. <sup>2</sup>

2. Bien que mettant en avant la continuité, voire l'aspect cyclique de la progression en mathématiques, les manuels progressent en *étapes*. Un moyen de les analyser est de regarder, au niveau des activités ou des exercices, ce qui fait le menu de telle ou telle an-

### En termes de comptage

En termes de comptage, une addition est un parcours dans la suite numérique. On "fait un nombre", on "compte jusqu'à". Le parcours peut être effectué dans le sens ascendant ou dans le sens descendant. Cependant ce dernier type de parcours est bien moins souvent pratiqué. A partir d'une certaine maîtrise du comptage, l'enfant ne compte plus tout mais considère une donnée comme point de départ puis poursuit la récitation de la comptine pour un certain nombre de pas et considère le nombre sur lequel il a ainsi abouti. Je représenterai ceci dans les termes suivants :

"Le nombre de départ suivi d'un nombre de pas donne un nombre d'arrivée". Cette relation étant fixée, la connaissance de deux de ces éléments suffit à la détermination du troisième, et formellement trois cas correspondent aux trois types connus de comptage :

*comptage direct* :                    départ, nombre de pas → arrivée  
*comptage complémentaire* : départ, arrivée → nombre de pas  
*comptage à rebours* :                arrivée, nombre de pas → départ

### Remarques

- 1) Ceci suppose le couplage de deux vections : l'ordre de la suite des opérations et l'ordre de la suite numérique.
- 2) Une propriété du comptage qui, en amont, tire son origine de ce qu'on a appelé la vicariance des dénombrements (le résultat d'un dénombrement ne dépend pas de l'ordre dans lequel on a dénombré les objets) et qui, en aval, donnera la commutativité de l'addition fait qu'on peut toujours intervertir le nombre de départ avec le nombre de pas. Ceci permet de ramener les trois cas présentés ci-dessus à deux cas dont les plus commodes sont : le comptage direct et le comptage complémentarisation. Le comptage à rebours est ramené à un comptage complémentarisation par inversion de l'ordre et échange entre nombre de pas et nombre de départ (13 moins 7 devient de 7 aller à 13).

née. Ainsi, et après une correction de la 2ème édition des manuels de 1P, 2P, de Suisse Romande, les écritures en ligne avec signe "=" initial ( $a=b+c$ ) disparaissent avec la fiche OP6 en 2P. Beaucoup d'autres exemples montrent que l'année 1P reste celle de ce qu'on appelait "l'apprentissage des tables d'addition" dans les anciens manuels. Il n'y a bien sûr aucun mal à cela.

3) Vu de cette façon, ce qui différencie ces modalités de comptage, c'est l'orientation du sujet vers la retenue de tel ou tel nombre comme résultat final. Formellement, il s'agit d'une simple interversion entre signal d'arrêt du comptage et nombre retenu.

4) Le comptage suppose deux niveaux numériques, décalés. La suite des nombres (bornes), le dénombrement des pas. Compter sur les doigts, c'est alors représenter ce nombre de pas sur les doigts tandis que l'attention mentale se centre sur la récitation de la comptine.

5) Les difficultés principales du comptage portent sur la coordination de ces deux séries numériques. Par exemple, source d'erreur bien connue, l'élève peut compter comme un pas le nombre de départ, ceci arrive plus fréquemment en situation de comptage à rebours. Ceci amène à des erreurs de l'ordre de l'unité. Un autre exemple moins connu, non pas parce que moins fréquent mais parce que plus subtil à analyser, consiste à confondre les deux séries numériques et se tromper sur le signal s'arrêt de récitation de la comptine. Par exemple,  $2+6=6$ . L'élève compte 3,4,5,6 et en considérant mentalement ce 6, croit qu'il a effectué les 6 pas demandés. Il s'arrête. Cette erreur ne se produit pas si le choix du nombre de départ est la plus grande donnée. Ainsi outre qu'un comptage  $a+b$  avec  $a>b$  est moins coûteux pour l'élève (donc aussi mieux contrôlable) il est déjà de fait plus fiable. D'autres erreurs proviennent du contrôle du nombre de pas ; par exemple,  $6+\dots=15$ , réponse 4: l'élève "oublie une main".

### Écritures lacunaires

En tant que code d'un comptage, l'écriture en ligne *représente ce parcours additif*. Ceci est valable quelle que soit la modalité de comptage utilisée. Ceci rend compte d'une observation qui a surpris plus d'un observateur selon laquelle des élèves, en situation de résolution de problème, représentent le calcul qu'ils ont fait sous la forme d'une écriture additive même si, de fait, ils ont trouvé leur réponse par complémentation ou soustraction. Ce qui étonne, c'est que l'élève ne représente pas son opération et qu'il aboutit à une écriture dont le résultat n'est pas la réponse du problème mais une des données. Les élèves ne sont pas seuls dans ce cas. Nous ne disposons pas d'écriture symbolique spécifique, ni de signe pour représenter une complémentation.

Nous l'évoquons alors par référence à une situation additive que nous rendons par une écriture additive lacunaire.

L'écriture lacunaire est le fragment d'un code représentant un comptage. La tâche de l'élève ne se limite pas à trouver l'élément manquant. Car pour ce faire il lui faudra au préalable interpréter l'écriture c'est-à-dire déterminer les données ou ce qui revient au même, déterminer le rôle que jouent chacune d'elle : départ, nombre de pas, arrivée (selon la terminologie adoptée ci-dessus). Pour ce faire, le sujet se basera sur l'organisation des symboles représentés, essentiellement sur leurs places relatives, mais aussi, le cadre étant fixé, sur l'ordre de grandeur des données numériques. Il est bien entendu que la seule considération des données numériques n'est pas déterminante d'un comptage (avec deux données par exemple, on peut toujours additionner ou complémenter)<sup>3</sup>

### Objets d'enseignement

Au travers de ces usages d'écriture lacunaire, l'écriture des égalités additives vient à acquérir une signification scolaire particulière, puisqu'au travers d'une situation elle vient à désigner une modalité de comptage (à signifier, à demander : ceci dépend du contexte où on représentera une écriture lacunaire : fiche d'exercice, fiche d'objectifs d'enseignement, commentaire théorique destiné aux enseignants et expliquant les diverses opérations numériques ou de comptage, etc.). Cette signification dérivée a même, pour les élèves, plus de réalité que la signification mathématique d'origine. Une écriture de type lacunaire provoque immédiatement un calcul de la part des élèves, tandis qu'une bonne partie d'entre eux restent passifs devant la présentation d'une écriture complète, ils n'ont pas

3. Si, à des fins de comparaison, on considère la tâche consistant à inscrire à la place de la lacune, dans l'écriture  $a\dots b$ , le signe relationnel  $>$ ,  $<$  ou  $=$ , qui convient aux nombres donnés (ex:  $2\dots 8$ ,  $2<8$ ), on note une différence notable. Tous les élèves savent lequel des deux nombres est le plus grand, le plus petit. Mais plusieurs élèves se trompent car ils traduisent "mot à mot" leur comparaison. Par exemple, dans  $2\dots 8$ , on peut comparer 2 à 8 et dire 2 est plus petit que 8, ce qui amène, traduit mot à mot  $2<8$ . Mais on peut tout aussi bien dire : "2, 8, 8 plus grand." Ce dernier terme (plus grand) alors reporté sur la forme déjà écrite de la donnée, produit  $2>8$ . Comme pour le calcul lacunaire, la difficulté est de ne pas confondre entre la comparaison qui est écrite et celle que l'on fait. Mais un calcul peut se reconstituer, dans la mesure où il signifie un déroulement d'actions diverses sur des supports bien précis - et souvent matériels -. Ce n'est pas le cas d'une relation.

d'eux mêmes le réflexe de vérifier l'exactitude de l'égalité, quand bien même nous pouvons être assurés que celle-ci ne leur saute pas aux yeux (comme à nous qui connaissons par coeur la table d'addition et sommes entraînés au calcul mental).

Le fait que la forme lacunaire ne se limite pas à être un exercice, une situation problème dans laquelle on place l'élève, mais qu'elle en vient à représenter les objets mêmes de l'enseignement est caractéristique de l'enseignement des mathématiques et fait partie de la transposition didactique du savoir mathématique. (Par exemple, on utilise aussi dans l'enseignement des langues des exercices lacunaires, mais ces formes restent des exercices d'application et n'accèdent pas au rang de notion). C'est exactement ce qui se passait dans l'ancien temps avec les problèmes d'arithmétique.

III. PRÉSENTATION DU TEST AYANT PERMIS DE RECUEILLIR UN ENSEMBLE DE RÉPONSES ÉCRITES DE 93 ÉLÈVES DE 1ÈRE PRIMAIRE (C.P.)

Divers moyens d'investigation et d'analyses des données recueillies par l'observation de classes de 1P (CP) et l'examen des manuels de méthodologie destinés aux enseignants m'ont amené à proposer la description ci-dessus des pratiques de comptage et de la signification que prennent les écritures d'égalités lacunaires lors de cette phase de l'apprentissage. Mais le noyau de mon étude aura été fourni par l'examen minutieux des réponses recueillies auprès de 5 classes de 1 P, lors du dernier trimestre de l'année. J'avais proposé, en deux fois, sur deux jours consécutifs, 30 items lacunaires aux élèves auxquels ils devaient répondre par écrit et individuellement.

Voici pour exemple une copie d'une élève : *Pina*. Le lecteur y trouvera les données, les réponses de l'élève inscrites au-dessus des lacunes représentées par trois points (...) ainsi que les consignes écrites qui étaient lues en classe par la maîtresse. La page suivante indique le plan de construction des divers items. Les différentes parties de cette interrogation, désignées épreuves, seront rappelées par leur numéro, inscrit en chiffre romain. Epreuve II, Epreuve III, Epreuve IV. Notons que nous ne nous occuperons pas des résultats de l'Epreuve I qui ne figure ici qu'à titre d'information.

Pour exemple, une copie d'élève (la réponse de l'élève sont écrites au-dessus de la lacune.)

*Pina*

1° Complète pour faire de bon calcul  
 $2+6 = 8$   
 $4 = 10 + 7$   
 $4 = \dots + 4$   
 2° Trace le calcul faux  
 $5 = \cancel{8} + 2$   
 3° Complète pour faire de bon calcul (ne mets pas de 0)  
 $7 = 8 + 9$   
 $5 + 6 = 11$   
 4° Complète pour faire de bon calcul  
 $1+5 = 3+4$   
 $3+4 = 7+5$

5° Complète pour faire de bon calcul  
 $6 + 3 = 9$   
 $7 = 5 + 2$   
 $4 = 5 + 9$   
 $8 = \cancel{8} + 3$   
 $4 + 4 = 8$

6° Complète pour faire de bon calcul  
 $2+7 = 7+8$   
 $3+6 = 9+9$

*Nous*

*Pina*

1° Complète pour faire de bon calcul  
 $8 = 9 + 3$   
 $6 = 1 + 5$   
 $9 + \dots = 4$   
 $7 = 2 + 3$   
 $\dots + 8 = 7$   
 $3 + 7 = 8$

2° Trace le calcul qui sont faux  
 $5 = \cancel{1} + 6$   
 $3 = 7 + 10$

3° Complète pour faire de bon calcul (ne mets pas de 0)  
 $4 + 1 = 5$   
 $2 + 2 = 4$   
 $4 = 5 + 6$

4° Complète pour faire de bon calcul  
 $4+2 = 2+5$   
 $5+4 = 9+3$   
 $3+4 = 3+4$   
 $6+2 = 8+4$

*Nous*

IV. RÉCIT DE L'ÉTUDE DES RÉPONSES ÉCRITES DES ÉLÈVES

Venons-en maintenant au second objet de mon étude, à savoir comment ce qui a été dit plus haut se manifeste précisément au travers des données telles qu'on peut les recueillir en classe. Et rappelons brièvement mes intentions.

Deux idées

Je vais défendre ici deux idées. La première est que ce qui est en cause dans l'apprentissage des mathématiques n'est pas tant la manifestation par le sujet de telle ou telle "habileté" particulière, mais bien plutôt celle de l'intégration de toutes les "habiletés" partielles dont il est capable. Cette idée peut s'exprimer encore autrement. Cela revient en effet à penser que nous rencontrons chez un même sujet (dans cette phase d'apprentissage du comptage) autant de diversité (ou presque) qu'entre différents sujets. C'est donc sous l'angle de la variété que j'ai traité l'ensemble des 2790 réponses récoltées. Or, et c'est ici un point capital, *c'est bien à de telles diversités que les enseignants sont quotidiennement confrontés dans leur métier.* Voilà pourquoi la méthode d'analyse utilisée ici ne se contentera pas de faire la comptabilité des réponses comme on le fait classiquement. La seconde idée que je vais défendre a trait au rôle de l'écriture en ligne. Or il est triple ici : tout d'abord c'est pour l'expérimentateur un outil. La construction des items décrite ci-dessus en témoigne sans qu'il soit besoin d'en dire plus. En fait, je reviendrai sur ce premier aspect, dans ma conclusion, mais pour le considérer conjointement au second aspect que je veux signaler maintenant. L'écriture est un médiateur des échanges entre les élèves et moi-même, supporte nos explorations réciproques, et contribue à la constitution de la classe des problèmes résolubles par tel ou tel algorithme. Enfin, troisième aspect, c'est un rôle d'intégration que l'écriture joue en classe. C'est sur elle que se focalisent ou s'articulent différents aspects du comptage puis du calcul. A ce titre, j'estime que ce "langage technique et les symbolismes très particuliers qui lui sont associés" qu'évoque J. Piaget dans son explication citée plus haut ont une fonction "formatrice" des connaissances. Du moins cette expression me paraît justifiée pour autant qu'on ne confonde pas la construction des connaissances à leur mise en

Construction des items

Les n° d'épreuve ne correspondent pas à l'ordre des items des feuilles de données

Les items de l'épreuve I

|            |           |
|------------|-----------|
| 5 : 7 : 2  | 5 = 1 : 6 |
| 8 - 5 = 3  | 3 7 : 10  |
| Séq. desc. | Séq. asc. |

Ces items ne seront pas examinés par la suite.

Consigne : Trace les calculs faux

Les items de l'épreuve II

|        |          |             |             |              |             |
|--------|----------|-------------|-------------|--------------|-------------|
| LACUNE | FINALE   | 2 + 6 = ... | / / / / /   | 4 = 5 + ...  | 7 = 2 + ... |
|        | MÉDIANE  | 3 : ... = 8 | 9 + ... = 4 | 4 + ... + 7  | 8 = ... : 3 |
|        | INITIALE | ... : 3 = 9 | ... + 8 = 7 | ... = 1 : 5  | ... = 5 : 2 |
|        |          | Séq. asc.   | Séq. desc.  | Séq. asc.    | Séq. desc.  |
|        |          | Egal final  |             | Egal initial |             |

Consigne : Complète pour faire de bons calculs

Les items de l'épreuve III

|                 |               |                 |
|-----------------|---------------|-----------------|
| Donnée initiale | 5 + ... = ... | 7 - ... = ...   |
| Donnée médiane  | ... : 4 = ... | (... - 2 : ...) |
| Donnée finale   | ... = ... + 5 | ... = ... : 6   |
|                 | Egal final    | Egal initial    |

Consigne : complète pour faire de bons calculs (ne mets pas de 0)

Les items de l'épreuve IV

|                |                         |                 |                 |                 |
|----------------|-------------------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| LACUNE FINALE  | 3 : 4 = 7 : ...         | 4 : 2 = 2 : ... | 1 : 5 = 3 : ... | 2 : 7 = 7 : ... |
| LACUNE MÉDIANE | 5 : 4 + ... = 3         | 6 : 2 = ... : 4 | 3 : 6 = ... + 9 | 3 : 1 = ... : 5 |
|                | ← Variations diverses → |                 |                 |                 |

Consigne : complète pour faire de bons calculs

forme (formation). Mais il convient d'évaluer cette idée à sa juste valeur. Elle n'est finalement que le pendant, le reflet, au niveau symbolique, de celle qui conçoit les mathématiques comme organisations de plus en plus complexes de concepts et d'opérations de pensées. En ce qui est dit ici pour l'écriture en ligne vaut tout autant pour n'importe quel diagramme, ou toute disposition symbolique accompagnant et supportant nos opérations : des griffonnages sur nos brouillons jusqu'aux dispositions en tableaux qui accompagnent les algorithmes. Et ceci bien entendu n'ôte rien au caractère conventionnel de tous ces systèmes de signifiants.

Je puis passer maintenant à l'étude des réponses écrites que les élèves ont produites dans les épreuves de calcul lacunaire. Je convie le lecteur à un récit (raccourci), celui des étapes successives de mon analyse.

### Origine de mon enquête

A l'époque de cette recherche, je suivais en observateur une classe de première primaire (CP) et m'intéressais à l'évolution des compétences numériques des élèves. De ce point de vue, on peut caractériser la deuxième moitié de l'année par la description suivante : même si certains élèves connaissent déjà une partie des tables d'addition, et calculent sans compter, la plupart recourt au comptage et compte comme je l'ai décrit précédemment (cf. p. 79).

La recherche que je vais présenter a pour origine une discussion avec une élève qui écrivait systématiquement la réponse 9 à l'item  $7=2+\dots$ . Cette erreur s'avéra être d'un type assez courant et ne dépendait pas chez cette élève d'une ignorance de la soustraction ni de la décomposition. Si je lisais  $7=2+\dots$  en : "7, c'est fait par 2 et puis...", l'élève répondait aussitôt : "et encore 5". Ainsi, la présence d'une écriture lacunaire à lacune finale (tout à droite) pousse certains élèves à produire une addition (réponse additive) et à négliger les autres aspects de l'item proposé. D'autres observations comme celle d'une inversion de la lecture en présence d'un item écrit avec un égal initial (à gauche comme dans  $7=2+\dots$  précisément) pratiquée par quelques élèves, faisaient ressortir l'importance de la vection gauche ----> droite de l'écriture couplée à celle du calcul. Or cette vection ne faisait pas l'objet de commentaires ni re-

marques dans la leçon de mathématiques (Bien sûr, il y avait l'apprentissage de la lecture et de l'écriture). Au contraire, le signe égal qui est soigneusement introduit, défini et commenté n'était en général pas lu spontanément par les élèves. Ceci rappelait la tendance à écrire des égalités en chaîne de type  $a+b=c+d=e\dots$  ( $5+3=8+6=14+2=16\dots$ ). D'autre part, j'observai que lorsque je demandais aux élèves d'écrire un de leurs calculs, dans la majorité des cas, le égal était écrit en position finale (à droite, succédant au +). L'analyse des manuels anciens ou étrangers montrait en outre que les calculs lacunaires privilégiés étaient de forme :  $a+b=\dots/c=\dots+\dots$  ce qui correspondait aux deux opérations inverses de la table d'addition : composition de nombres/décomposition d'un nombre. Tous ces éléments me confirmaient l'existence d'un lien entre sens de l'écriture (de la lecture) et sens de l'opération elle-même : facteur ----> résultat, amplification numérique. Une autre observation montrait le lien entre comptage et écriture (et pas seulement que le comptage est la procédure de l'élève, mais plus, le cadre de référence de l'écrit), c'était celle d'élèves écrivant leurs calculs ainsi :  $3+3=4+5=6$  (pour le comptage  $3+3$ ). Ceci apparaît même explicitement lors d'un entretien clinique avec Céline qui, pour compter  $4+6$  trouve - entre autres réponses -  $4+6=6$  puis me demande : faut-il compter le 5 ? Je lui réponds "qu'est ce que ça fait si tu comptes le 5 ?" et elle me répond 4 et puis 6, 4 5 6 (cf. Conne 1984 page 165).

### Comment se révèlent les comptages dans des réponses écrites ?

Cette référence étant fixée, comment en tirer parti ? Les comptages vont se révéler tout d'abord aux réponses erronées. Mais il y a au moins deux façons de se tromper : se tromper dans l'effectuation du comptage, ou se tromper de comptage. La première analyse va donc essayer de déterminer la manière dont la réponse a été produite par l'élève ; et dans un premier temps je considérerai les réponses comme additives (l'élève a sommé les données de l'item - ou dans le cas de l'épreuve III a sommé la donnée de l'item avec une donnée auxiliaire), soustractives (ou de complémentation je ne ferai pas la distinction ici), de refus (l'élève a barré l'item), ou réponses "autres" c'est-à-dire, réponses qui ne sont pas interprétables aussi facilement.

Je croise alors cette catégorisation avec les erreurs de comptage - les fautes de calcul, dans l'effectuation - du moins celles qui sont aisément repérables comme celles décrites dans les pages 77 à 84 ci-dessus. Un premier résultat sort alors de la confrontation de ces classements : la part des "fautes de calcul" est minime, les erreurs sont dues essentiellement à une mauvaise interprétation des items. Ceci prend un relief plus grand encore quand on considère le taux de réussite moyen (de 60% à 20% selon les épreuves) obtenu dans ce test (cf. Conne 1984, p. 14-18).

C'est donc de l'interprétation des items qu'il s'agit. C'est-à-dire que ce qui est en jeu n'est pas tant l'effectuation de comptage mais leur discrimination sur les configurations de symboles. Le comptage reste bien entendu le référent aux interprétations des élèves. Pour examiner plus précisément ceci, je me suis tout d'abord restreint à une première catégorisation, relativement grossière des réponses en additives/soustractives/refus/et autres. Les erreurs dues à l'effectuation de comptage, lorsqu'elles peuvent être identifiées sont comptées avec la catégorie qui leur correspond. Je me trouvais donc en présence de trois modes de description des items :

a) le descripteur conventionnel où l'item est désigné par la réponse qu'on attend. Par ex :  $\dots+3=9$  est un item de soustraction (complémentation), tandis que  $\dots=5+2$  est un item d'addition, et  $\dots+8=7$  est un item impossible.

b) un système analytique où le "portrait" de l'item est fait selon le croisement des facteurs retenus dans le plan d'épreuve: place de la lacune (initiale (gauche), médiane, finale (droite)), place du égal (initiale (gauche), finale (droite)), et séquence des données de gauche à droite (ascendante, descendante).

c) la distribution des réponses produites pour chaque item par les 93 élèves selon la typologie définie ci-dessus.

Exemple :  $7=2+\dots$  a obtenu 39 réponses additives, 41 réponses soustractives, 7 réponses refus et 6 réponses autres (Vecteur (39, 41, 7, 6)).

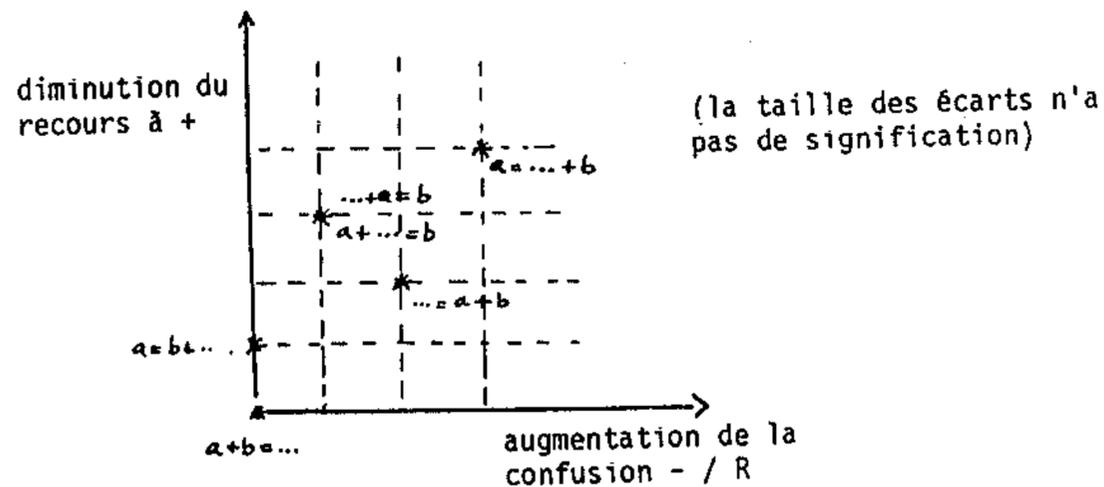
S'agissant de traiter de l'interprétation avec des catégories de réponses si grossières, je fis, à ce stade de mon étude, l'hypothèse que c'est sur la configuration des items que l'élève base son interprétation. Ce qui revient à dire que je ramenai la description conventionnelle des items à la description de mon plan d'épreuve. Comment donc cette interprétation s'opérait-elle ?

Une analyse succincte ainsi que les premières observations montrent que les critères retenus par le plan d'épreuve ne sont ni indépendants ni homogènes dans leur modalité : le égal et sa position n'est pas pris en compte de la même façon ni au même moment selon que la lacune occupe telle ou telle place. Ceci compliquait ma tâche d'autant plus et m'obligeait à procéder plus globalement en comparant tout d'abord les distributions des réponses de chaque item selon les quatre catégories retenues pour ramener ensuite la comparaison de ces distributions à la comparaison des configurations des items. (Pour plus de détails et des tableaux, cf. Conne 1984 pages 34-42). Pour prendre un exemple, la distribution des réponses aux items à lacune finale présente un net déséquilibre vers l'addition, sans pour autant qu'il y ait confusion entre soustraction et refus. Les réponses sont alors soit additives, soit justes comme le montrent les vecteurs associés aux items  $7=2+\dots$  (39, 41, 7, 6) et  $4=5+\dots$  (43, 5, 36, 9). Mais par contre, les items à lacune initiale présentaient une distribution équilibrée entre trois types de réponses : additives (+), soustractives (-), refus (R). Ex : l'item  $\dots+3=9$  : (23, 53, 11, 6) et  $\dots+8=7$  : (22, 13, 50, 8). Finalement de ces comparaisons ressortent plusieurs choses :

a) Tout d'abord, concernant les items impossibles ainsi que la possibilité offerte aux élèves de refuser de traiter un item parce que jugé impossible, ce résultat surprenant : malgré que cette double éventualité soit quelque chose de tout à fait nouveau et inusité pour les élèves, et que cela contribuait à élargir passablement le champ des possibles, les élèves n'ont pas du tout été perturbés ; *ils ont pu aisément assimiler ceci à ce qu'ils connaissaient des comptages*. De plus le taux de réponses soustractives et refus sont quasi égaux et enfin les items soustractifs (selon la caractérisation classique) ne sont pas mieux réussis que les items impossibles. *D'autre part, pour les items des épreuves III et IV, les élèves ont recouru aux refus et ce malgré l'absence de consignes à ce sujet*. On peut interpréter ceci de la façon suivante, la nouvelle éventualité a été comprise par les élèves parce qu'ils ont vu le rapport qu'il y avait entre elle et la configuration des écritures lacunaires. Ceci dénote donc une attention à ces dernières. Il y a donc eu assimilation (EP II) et généralisation (EP III, IV). Ceci sera précisé plus loin (p. 97).

b) Cette symétrie entre soustraction et refus amène à considérer les formes d'items selon deux axes : celui des taux de ré-

ponses additives reçues pour un item donné, qui mesure le degré d'assimilation de cet item à un item additif par cette population d'élèves et celui du taux de confusion soustraction/refus qui mesure le degré d'assimilation de l'item à un déroulement séquentiel (gauche  $\rightarrow$  droite représentant le déroulement du comptage). Un tableau ordinal et indicatif peut alors être dressé pour les items de l'épreuve II :



Ceci laisse penser que les bornes de l'écrit sont bel et bien prises comme bornes de comptage

c) Pour l'épreuve III (items bilacunaires) l'aspect séquentiel ressort nettement plus dans les réponses que pour les deux autres épreuves. Or la tâche de l'épreuve III se caractérise par le fait que le sujet doit fournir deux nombres dans sa réponse (puisque une seule donnée numérique lui est présentée). En conséquence, la part de l'écriture qu'il a en charge est plus grande et favorise l'expression de ses propres conceptions de l'écriture en ligne. Dans l'épreuve II, où il y a une lacune et 2 données, le calcul de l'élève est beaucoup plus guidé. Le fait que cette épreuve révèle les représentations séquentielles montre bien comment les élèves investissent l'écriture de signification en étroite rapport avec les actions qu'il effectue. Ici le comptage, avec expression de sa vocation temporelle dans l'ordre gauche droite!

d) Ces mêmes représentations se révèlent à l'épreuve IV mais autrement. En effet ici il y a 3 données, et la place de la lacune (qui varie entre 2 positions :  $a+b=c+\dots$  et  $a+b=\dots+c$ ) s'avère déterminante tant dans la discrimination de l'opération

(ou l'enchaînement d'opérations) à effectuer que dans le nombre de données dont il sera tenu compte. Il y a globalement plus de réponses par le calcul de  $a+b+c$  dans les items  $a+b=c+\dots$  que dans les items  $a+b=\dots+c$  (où l'addition s'arrête souvent à l'effectuation de  $a+b$ ).

### Charnière entre deux approches

A ce point de la recherche il m'a semblé prometteur de pousser un cran en avant dans l'étude des réponses écrites des élèves. En effet jusque là c'était une population d'items que j'avais étudiée. Il était tentant de croiser cette analyse avec une étude des réponses fournies par un même sujet. Je cherchais alors l'unité du sujet au travers de ses réponses et examinai comment il restitue la variété des items proposés. Or entre le temps des premières analyses et celui de ce nouveau projet, j'avais étudié plus à fond le comptage, et passé en revue avec plus de précision les protocoles d'entretiens dont je disposais à ce propos. J'en savais alors beaucoup plus sur les comptages et les formes sous lesquelles on les retrouvait derrière les observations de classe. J'étais donc prêt à retourner à l'analyse des données écrites et à utiliser systématiquement une méthode de recoupements. Les premières questions auxquelles je me suis alors attaché furent celles de comprendre les réponses qui jusqu'ici échappaient quelque peu à mes analyses : les "réponses autres" puis les "réponses refus". Ces aspects une fois examinés, il m'a été possible de pousser l'étude d'un cran encore en examinant les profils de réponses d'un même sujet.

### Réponses "autres" : des comptages à l'écriture

Que peut nous apporter l'analyse des réponses autres ? La question est de savoir si ces réponses pouvaient être rattachées au comptage, mais comptage erroné, d'une façon très particulière et peu accessible à une analyse de surface, ou si elles constituaient une catégorie vraiment différente. C'est la volonté de pousser l'analyse jusqu'à ces réponses qui a motivé l'approche qualitative des réponses d'élèves que je vais maintenant relater.

En observant les élèves compter (entretiens cliniques), je pouvais comprendre certaines de ces réponses autres et les lier

aux comptages. J'ai déjà mentionné l'erreur consistant à trouver  $2+6=6$ , et les réponses où l'élève écrit la comptine pour son comptage. Ces dernières réponses apparaissent le plus nettement à l'épreuve III, à la faveur du fait que l'élève devait fournir deux nombres pour sa réponse. Les réponses de Frédéric (A) méritent d'être citées, elles ne sont pas les seules de ce genre mais sont les plus élaborées puisque non seulement la comptine est écrite sur l'item mais encore dans un ordre ascendant gauche  $\rightarrow$  droite. Voici ses réponses (soulignées) :  $7=\underline{8}+\underline{9}$ ,  $\underline{3}+\underline{4}=\underline{5}$ ,  $5+\underline{6}=\underline{7}$ ,  $\underline{3}+\underline{4}=\underline{5}$ ,  $\underline{1}+\underline{2}=\underline{3}$  et  $\underline{4}=\underline{5}+\underline{6}$ . C'est cet aspect élaboré qui est pour moi ici le fait le plus significatif. Il indique que ce type de traitement n'est pas aussi fruste qu'on pourrait le croire puisqu'il est intégré à l'écriture comme une représentation du comptage lui-même. De ce point de vue l'épreuve III apportait des résultats insoupçonnés par rapport à mon intention de recherche, c'est elle qui permettait le mieux de comprendre les réponses "autres". Répétons-le, l'élève devait fournir deux réponses, et toutes deux ne pouvaient pas être comptées à partir de la donnée! Je pouvais donc examiner d'une façon plus générale que par comptage les procédés de production des réponses. Les nombres que l'on retrouvait dans les réponses des élèves n'étaient pas choisis au hasard, on retrouvait souvent le nombre 1 (la consigne interdisait le 0), la reprise de la donnée (répétition, de la création de doublons), le choix du successeur ou prédécesseur (dans la comptine) de la donnée. (Pour plus de détails, cf. Conne 1984 pages 127-131).

Cette analyse permettait alors par contre coup de comprendre un certain nombre de réponses "autres" aux deux autres types d'items. Restons-en à la comptine et à Frédéric (A), voici ses réponses à l'épreuve II :  $4=\underline{5}+4$ ,  $\underline{2}+3=9$ ,  $\underline{4}=\underline{5}+2$ ,  $4=\underline{5}+\underline{6}$ ,  $8=\underline{9}+3$ ,  $7=\underline{2}+\underline{3}$ ,  $\underline{7}+8=7$ ,  $3+\underline{4}=\underline{8}$  (cf. Conne 1984, page 95). On retrouve la suite des nombres, mais pas n'importe comment :  $(4,5)/(2,3)/(4,5)/(5,6)/(8,9)/(2,3)/(7,8)/(3,4)$ . La séquentialité va toujours de gauche à droite, et Frédéric donne une réponse amplifiée de 1, sauf dans le cas des items à lacune initiale où la configuration et le désir de réaliser une séquence ascendante gauche  $\rightarrow$  droite l'obligent à donner une réponse réduite de 1. Mais Frédéric n'était pas le seul. Dans certains cas, comme ces items présentent deux données, cela peut créer un conflit dans la détermination de la réponse. Voici comment deux élèves ont résolu ce conflit : Stephano (C)  $4=\underline{3}+\underline{6}+7$  (4, 3 ; 6, 7), puis

$9 + \underline{8} = 4$  ( $\varepsilon=3$  à l'envers) et Graziella  $9 + \underline{10} = 4$ . Ces réponses correspondaient à ce que j'avais pu observer chez des élèves au début de leur apprentissage du calcul et des écritures en ligne. Ici ils réapparaissent, chez des élèves plus avancés, mais à la faveur de la complémentation aussi. La complémentation comprise comme la complétion d'un fragment de comptine donné par ses deux bornes :  $4 = \underline{5} + 6$ ,  $4 = \underline{5} + 6 + 7$ , etc. C'est bien cela qu'il s'agit de faire, en comptage, mais pas d'écrire! Les autres procédés d'obtention étaient importants aussi, parce qu'en rapport avec les nombres et la comptine et j'y vois aussi la façon dont l'élève s'approprie les tables d'addition et structure les nombres. Entre autre l'importance de la répétition et des doubles, des décompositions de nombres pairs en doublons et des nombres impairs en nombres successeurs. Les triplets de nombres de la table sont agrémentés de relations secondaires (cf. Conne 1984, page 129).

C'est alors cette richesse de procédés envisagés qui m'a le plus impressionné (et enthousiasmé). Mais selon quelles lois ? Les sujets semblaient couvrir toute une gamme complète des interprétations envisageables d'une même forme d'écriture. Comme s'il y avait une exploration.

A titre d'exemple voici ce qu'on obtenait pour l'épreuve IV.

- |   |  |
|---|--|
| 1° $3 + 4 = \underline{7} + 5$          | 7 comme somme de 3 et 4 : $3 + 4 = \underline{7}$<br>4, prédécesseur de 5 : $\underline{4} + 5$ ; 3, 4 ; 4, 5. |
| 2° $3 + 4 = \underline{7} + \cancel{5}$ | 7 comme somme de 3 et 4 : $3 + 4 = \underline{7}$<br>suppression du + 5 rétablissant une forme ternaire.       |
| 3° $3 + 4 = \underline{7} + 5$          | somme partielle $3 + 4 = \underline{7}$ , 5 non considéré.   |
| 4° $3 + 4 = \underline{7} + 5 = 10$     | Ecriture de 2 calculs ternaires<br>$3 + 4 = \underline{7}$ $\underline{5} + 5 = \underline{10}$                |
| 5° $2 + 7 = 10$ $7 + \underline{3}$     | Ecriture de 2 calculs ternaires ayant même résultat.   |
| 6° $1 + 5 = 3 + \underline{3} = 6$      | Ecriture de 2 calculs ternaires ayant même résultat.   |

7°  $3 + 4 = \underline{1} + 5$  Pour  $4 = \underline{1} + 5$  (selon recouplement des réponses de cet élève).

8°  $3 + 4 = \underline{1} + 5$  <sup>13</sup> Pour  $3 + 4 + 1 + 5 = 13$

9°  $3 + 4 = \underline{12} + 5$   $3 + 4 + 5$  font 12.

10°  $5 + 4 = \underline{9} + 3$  <sup>12</sup> Enchaînement de 2 additions :  
 $5 + 4 = 9$   
 $9 + 3 = 12$

11°  $1 + 5 = \overset{6}{3} + 2$  Enchaînement de 2 additions :  
 $1 + 5 = 6$   
 $6 = 3 + 2$ .

Mais les résultats ne s'arrêtaient pas à cette richesse, et l'étude des réponses "autres" apportait plus d'éléments encore. En particulier sur le rôle de l'écrit. Déjà en examinant les réponses ci-dessus on peut s'apercevoir que l'écrit est "investi" différemment suivant les réponses, ainsi ce n'est pas considérer tout à fait de la même façon l'écrit que de mettre  $3 + 4 = \underline{7} + 5$  ou  $1 + 5 = 3 + \underline{3} = 6$ . Nous voyons aussi des élèves inscrire deux nombres dans la lacune, et même quelquefois en retournant l'un des chiffres. *Manifestement plusieurs élèves avaient réécrit leur calcul sur les données* (en surimpression). Voyons ici l'exemple de Patrick (D) (cf. Conne 1984 p. 108) :

$$2 + 6 = 26 = 8 / 4 = \underline{15} + 7 = 10 / 4 = \underline{15} + 4 = 8 \text{ /etc.}$$

$$8 = \underline{3} + 3 = 6 / 7 = 2 + \underline{2} = 4 \text{ /etc.}$$

Il y a de cela maints exemples.

Notons alors en revanche que *très rares* (trois items) sont les cas où un élève aurait corrigé une forme qu'il aurait pensé impossible à résoudre. Donc ces réécritures sont avant tout à comprendre comme produites par une sorte de calcul sur l'écrit, c'est l'intégration du support écrit qui est en cause ici. En général ces réponses ont une vexion gauche --> droite, le résultat étant noté tout à droite, précédé ou non d'un signe égal. Cette prise en compte des "opérations d'écritures" aura, en retour, permis de mieux comprendre certaines réponses de l'épreuve

groupes  
 eux  
 ... + ... = 5

III, telles celles d'Alain (C) :  $7 = \underline{7} + 14$ ,  $4 + 4 = 8$ ,  $5 + 5 = 10$ ,  $10 + \underline{5} = 5$ ,  $2 + 2 = 4$ ,  $12 = \underline{6} + 6$ . Alain procède toujours par calcul de double, il additionne toujours la donnée avec elle-même. Il place la répétition de la donnée sur la lacune adjacente à celle-ci, ce qui imprime une vexion gauche ---> droite à ses réponses sauf dans deux cas où les deux lacunes précèdent la donnée. *L'écriture s'inverse d'elle-même, à cause des contraintes de la forme donnée* (on trouvera plusieurs autres exemples dans Conne 1984 p. 137). Méthodologiquement, cette analyse des réponses "autres", par nécessité des recouplements, ne porte plus sur des réponses isolées à tel ou tel item mais sur un ensemble de réponses d'un même élève. Puis elle se poursuit par la recherche de recouplements sur plusieurs élèves.

### Réponses "refus" : comptage impossible ou forme refusée

Tout comme les réponses "autres", les réponses "refus" demandent à être interprétées plus finement. Ici les recouplements sont encore plus nécessaires. L'élève qui a barré un item n'a pas opéré, n'a pas eu l'occasion de se tromper dans son effectuation, et on ne peut donc pas remonter facilement à son interprétation. Cependant l'importance des refus signalée page 91, le fait qu'il y ait égalité entre refus et soustractions, le fait que les items de l'épreuve III et IV aient aussi pu être refusés, tout cela mérite un examen un peu plus approfondi.

En ce qui concerne tout d'abord l'absence de refus, ceci signale un élève qui comprend qu'il doit fournir un calcul, ce calcul lui est en effet toujours possible s'il ne s'occupe que des données numériques. Cependant, l'absence de refus s'accompagne en général d'un traitement additif uniquement. On retrouve le fait que l'éventualité de la soustraction s'accompagne d'une prise en compte des signes écrits et par là de l'impossibilité éventuelle de l'item. Notons ensuite que l'absence de refus est plus manifeste dans une des cinq classes observées. (Mais même là, elle n'est pas le fait de tous les élèves ce qui rend improbable un simple effet de consigne lors de la passation des épreuves). En ce qui concerne ensuite les refus systématiques à telle ou telle épreuve, j'ai tout d'abord éliminé les élèves qui refusaient tous ou presque tous les items. De plus le refus à tous les items de l'épreuve II s'accompagnait aussi du refus aux items des épreuves III et IV, donc ces réponses - rares - ont été éliminées

aussi. Restent les refus systématiques à l'épreuve III ou IV. *Le premier fait est qu'il n'y a pas, conjointement refus systématiques à ces deux épreuves!* Ceci paraît donc significatif.

a) Les refus systématiques aux items de l'épreuve III sont dus au fait que l'élève estime ne pas avoir assez de données pour son calcul. Tous les élèves qui ont refusé tous les items de l'épreuve III ont fourni pour l'épreuve II des réponses invariablement additives. Ceci dénote en fait que ces élèves ne s'occupaient que des données numériques et pas de leur disposition dans la donnée. Ceci les empêche de trouver une interprétation, en terme de calcul à faire, pour les items bilacunaires. Ceci est confirmé par le fait que tous les élèves qui ont refusé tous les items de l'épreuve III ont aussi fourni des réponses additives à chaque item de l'épreuve IV.

b) Le refus systématique des items de l'épreuve IV est alors celui d'une forme particulière, inusitée pour les élèves. Pour le reste, les recoupements individuel donnent des informations précieuses. D'autre part il convient d'être toujours aussi attentif aux formes du refus, aux traces écrites des élèves. Et si possible aux corrections qu'ils auraient pu faire.

Voici tout d'abord deux exemples de refus d'élèves. Laurence (A) : *Première passation* : item à lacune médiane refusé, autres items traités additivement. *Deuxième passation* : items à lacune médiane traités comme une tâche de comparaison (exercée en classe) où il s'agit de compléter par le signe de comparaison (>, <, =) adéquat l'écriture  $a \dots b$ . Ainsi pour  $3 + \dots = 8$ , Laurence répond  $3 + \leq = 8$  ( $3 < 8$ ). (Ses réponses sont de ce point de vue correctes), items à lacune non médiane refusés. *Ainsi Laurence se base sur la distinction lacune médiane/lacune non médiane pour interpréter sa donnée, et ce de façon très structurée et, fait très surprenant, de façon complémentaire lors de chaque passation.* Il n'y a pas stabilité de l'élève au niveau de la réponse mais bien une stabilité à un niveau plus profond (la complémentarité des tâches addition/comparaison).

Autre exemple Giancarlo (B) qui répond correctement aux items de l'épreuve II (et III) mais qui refuse:  $\dots + 3 = 9$ ,  $7 = 2 + \dots$ ,  $4 = 5 + \dots$  et  $\dots + 8 = 7$  ainsi que les items de la forme  $a + b = c + \dots$  (tandis que les items de la forme  $a + b = \dots + c$  sont assimilés à  $a + b = \dots$ ). D'autre part, la façon de marquer le refus (en rouge) est précieuse : c'est le triple  $a = b$  qui est barré, tandis que pour les items  $9 + \dots = 4$  et  $4 = \dots + 7$  refusés eux aussi (à juste

titre) c'est la lacune qui est barrée. Je conclus que Giancarlo isole dans les items une partie : le triplet  $a = b$  (où  $a$  et  $b$  sont des nombres), ou, dans les items de l'épreuve IV, la forme partielle  $a + b = c$  ou  $a + b = \dots$  (pour plus de détails Conne 1984 p. 84-87).

Une autre éventualité de refus entre dans le temps, l'élève répond par un premier calcul, complète son item puis relit sa donnée, hésite avec une autre réponse, ou la barre estimant qu'elle est fautive. Ainsi Henriette (C) qui hésite beaucoup (corrections sur sa feuille). Par exemple  $8 = \dots + 3$ , réponses effacées : 5 et 11 (+ et -); puis refus. En examinant de près toutes les réponses aux items de l'épreuve II, on conclut que Henriette, si elle envisage de calculer somme et différences des données, se base en définitive sur une lecture séquentielle de la gauche vers la droite pour maintenir sa réponse. Ainsi, c'est comme si pour  $8 = \dots + 3$ , trouvant 5 et 11 ces réponses sont successivement effacées car l'item complété serait lu comme  $8 + 5 = 3$  et  $8 + 11 = 3$  deux égalités fautes (bien sûr, c'est écrit  $8 = 5 + 3$  et  $8 = 11 + 3$ ). Ceci explique toutes les hésitations d'Henriette (six sur douze items), les réponses non corrigées, ainsi que deux tentatives de trouver une écriture convenable à partir de  $4 = \dots + 4$  et  $\dots + 8 = 7$  (cf. Conne 1984 pages 102-103). Ceci suppose un décalage, dans le temps, entre le moment du calcul et celui de la relecture de sa réponse (de l'item complété).

L'éventualité de cette description est confirmée par un entretien clinique où à l'inverse, l'élève Roby, devant un item qu'il juge impossible  $6 = \dots + 8$  me déclare : "alors je peux mettre n'importe quoi" puis il complète par le nombre 5 :  $6 = \underline{5} + 8$  et enfin barre "le 6" :  $\cancel{6} = \underline{5} + 8$ , c'est-à-dire que Roby barre le résultat du calcul ainsi reconstitué sur la donnée écrite et non pas la réponse qu'il a inscrite dans la lacune. Je veux noter ici le fait que le refus n'est pas lié à une forme seulement (et partiellement forcément) de l'écrit mais est imbriqué dans un déroulement de l'activité (ou plutôt des activités solidaires, interprétation, calcul, relecture, vérification). Et c'est alors que l'on saisit la phrase des élèves qui devant  $\dots + 8 = 7$  déclarent : "pour faire 7 et j'ai 8! c'est impossible" (même phrase que pour la complémentation). Ici ce n'est plus tant au refus qu'on a affaire mais à une déclaration d'impossibilité. Nous avons donc deux connotations distinctes de ce type de réponse : refus d'une configuration d'item non interprétable en terme de tâche ou déclaration d'égalité impossible à établir.

**Tremplin : interprétation, relecture, support écrit**

En discutant avec des étudiants en pédagogie - dont certains étaient enseignants de profession, j'ai noté un jour que l'item  $\dots + 3 = 9$  était interprété comme soustractif tandis que la réponse  $\underline{6} + 3 = 9$  était interprété comme une réponse additive! Car  $6 + 3$  fait 9. De même l'élève Roby cité ci-dessus, traite  $4 = 5 + \dots$  additivement  $4 = 5 + 2$  puis s'aperçoit d'une erreur et trace le 4 de la donnée. De plus beaucoup d'élèves, devant la tâche de corriger un camarade qui répond  $7 = 2 + 2$  (donc connaissant la question:  $7 = 2 + \dots$  et la réponse : 9) disent : "2 + 9 ça fait pas 7, ça fait 11" et corrigent le 7 de la donnée (plutôt que de corriger le 9 répondu en 5 correct vis-à-vis de la donnée). Il s'avère donc que *les items complétés ne se lisent pas de la même façon que les items à compléter* - ou du moins ceci aussi doit s'apprendre. De plus, les résultats de l'épreuve I, non analysés ici, montrent qu'un item complet donné sans référence à une tâche scolaire (pas donné comme un item lacunaire complété) est encore perçu autrement. L'ambiguïté étant créée par le fait que "l'opération" reconstituée sur l'écrit ne correspond pas au calcul effectué. Il y a bien conflit d'interprétation. Et c'est bien parce que la signification de l'écriture n'est pas univoque, qu'elle joue ce rôle focalisateur que j'évoquais à la page 87.

Mais ceci n'épuise pas les rapports du sujet à l'écriture, nous avons vu que dans le cadre de leur traitement les élèves peuvent s'appuyer sur des surnotations écrites, c'est-à-dire véritablement procéder à un calcul écrit. Les maîtres font d'ailleurs de même lorsque pour aider les élèves à répondre aux items  $a + b = c + \dots$  ils ajoutent des cases au-dessus de  $a + b$  voire même au-dessus de l'équation tout à droite pour indiquer aux élèves qu'il faut calculer  $a + b$  puis compléter le résultat à  $c$  :

$\overline{a+b} = c + \dots$  et  $a + \overline{b} = c + \dots$ . Une élève avait d'ailleurs parfaitement assimilé cette écriture, elle écrivit :

$\begin{array}{c} 6 \\ 1 + 5 = 3 + 3 \end{array}$  ! (cf. Conne pages 143 et 152). On voit bien ici que *l'écriture est l'analogie des diagrammes ou des tableaux de chiffres accompagnant les algorithmes de calcul (ou de résolution)*.

Donc dans l'analyse des productions écrites, il s'avère nécessaire de tenir compte de ces deux aspects, une distinction entre

configuration (forme) et procédure est impérative: elle débouche sur le regroupement des réponses d'élèves en 4 catégories :

1) Des élèves qui ne "s'occupent pas des formes écrites, se contentant de prendre les données et de sommer. De là refus aux items de l'épreuve III - par manque de données -. Ceci n'est apparu ici qu'avec des élèves répondant invariablement additivement. Et autre fait significatif, la plupart des élèves considérés ici sont ceux à qui on a permis de travailler avec des jetons (élèves en difficultés que le maître croit aider de la sorte!). Pour ces élèves, les tâches qu'ils associent à ces items sont donc essentiellement des dénombrements, et dans ce cas, l'organisation des données (l'ordre des symboles) n'a pas de signification.

2) Des élèves qui refusent de traiter certains items soit parce que ce ne sont pas pour eux des écritures usuelles, soit encore parce qu'ils y lisent des relations qui leur paraissent fausses (je rappelle ici un exemple, celui du refus de  $7 = 2 + \dots$  parce que l'égalité, isolée,  $7 = 2$  est fausse). Ces élèves sont attentifs aux configurations écrites.

3) Des élèves qui complètent la donnée ou écrivent, en "surimpression" de sorte que l'écriture qui en résulte représente un calcul qu'ils ont effectué. Cette représentation ne sera peut-être pas tout à fait correcte selon nos conventions, mais elle sera facilement lisible pour nous. Si on examine plusieurs de ces réponses d'un même élève procédant de la sorte on voit que le calcul représenté est disposé de façon adaptée aux configurations de la donnée. Ainsi je rappelle le cas d'Alain C où son écriture se trouvait "automatiquement" inversée selon la disposition de la donnée. (p. 97)

4) Des élèves qui effectuent un calcul en vue de reconstituer une égalité (conformément aux conventions usuelles ou à une interprétation personnelle, élaborée, des signes et de leur agencement). Ici les élèves recourent à telle ou telle opération selon les besoins de leur reconstitution, et *l'égalité reconstituée représente le calcul désigné par la donnée et non pas le calcul de l'élève*. Les réponses correctes entrent dans cette catégorie. Mais aussi d'autres comme celles de Nadia B que je citerai plus loin (p.109). La série de réponses à l'épreuve III de Carole E est un cas limite entre les catégories 3) et 4). Voici ses réponses:  $7 = \underline{2} + \underline{5}$   $\underline{8} + 4 = \underline{4}$   $5 + \underline{3} = \underline{2}$   $\underline{2} + \underline{3} = 5$   $\underline{2} = 2 + \underline{4}$   $\underline{3} = \underline{3} + 6$ . Carole décompose lorsque la donnée est extrême (initiale ou finale) et ce, sans s'occuper de la place du =. Mais dans les 2 cas

où la donnée est médiane elle procède par doublement, en inscrivant le résultat en place initiale à la 1ère passation et finale à la 2e passation. Ce qui fait que pour la 1ère passation l'ordre des calculs représentés est droite  $\rightarrow$  gauche et pour la seconde passation cet ordre est inversé : gauche  $\rightarrow$  droite.

### Profils de réponses des élèves, variété

Les éléments nouveaux dégagés sont réinvestis dans l'étude pour examiner comment ils éclairent en retour les autres données. Les faits sont formés et mis en perspective par la "circulation" des informations. Les catégories dégagées ci-dessus montrent qu'il est nécessaire d'examiner une séquence de réponses du même élève. Il s'agit donc maintenant de rendre cette étude possible. J'appelle par la suite l'ensemble des réponses : *profil de réponses de l'élève*.

Les catégories dégagées ci-dessus posent différentes questions très intéressantes. A y regarder de plus près, les catégories ne sont pas très claires encore. *Une première chose qui les distingue, c'est le cadre de référence qui préside à l'interprétation de l'élève*. Pour la première catégorie, c'est les opérations de dénombrement, pour la seconde ce sont des relations partielles lues au travers des symboles, pour la troisième c'est le comptage effectif du sujet et pour la quatrième, c'est la relation ternaire donnée par l'égalité. Mais ces catégories ne dégagent que des tendances chez le sujet. C'est-à-dire que *ces cadres de référence pour l'interprétation seront plus ou moins fixés*. De ce point de vue la catégorisation donne une image idéalisée. Le degré de fixation va se traduire par une plus ou moins grande "fluctuation" des réponses, et dans ce sens on peut exprimer ce qui vient d'être dit dans les termes suivants : *peut-on dégager dans le cadre de référence un invariant interprétatif ?* Nous nous trouvons donc devant une question qui se rapproche des "invariants relationnels" ou "théorèmes en acte" indiqués par G. Vergnaud 1985. *Mais cette question vient alors à se croiser avec une autre, celle de la variété des procédés effectués par le sujet*. En effet si on considère une séquence de réponses correctes aux items, découlant de l'interprétation conventionnelle, elle mettra en oeuvre diverses opérations : addition, soustraction, ou même combinaison de ces deux, sans oublier des jugements de "possibilité" ou "d'impossibilité" de reconstituer une

égalité correcte. Par contre si on considère le cadre d'interprétation (qui peut être un "invariant") des dénombrements, l'éventail des opérations sera tout autre, et semble-t-il même, considérablement réduit. Donc, pour ce qui concerne la variété des procédés "intégrés" dans le cadre interprétatif, deux choses sont donc à considérer : *l'amplitude de son éventail et son contrôle par un cadre de référence plus ou moins fixé*.

Mais ne peut-on pas plutôt considérer qu'un montage algorithmique contrôlerait les procédés de l'élève ? On sait que les algorithmes permettent par les procédés formels qu'ils proposent, d'acquérir des savoirs-faire adaptés sans qu'il y ait connaissance de leurs fondements. Bien que la présente étude n'était pas à l'origine consacrée aux algorithmes, surtout parce qu'à cette phase de l'enseignement on ne fait pas référence à un algorithme explicite, comme ce sera le cas avec les "opérations en colonne", il est clair que le recours à une gamme d'items et à des tâches de plus en plus articulées (EP. III, EP IV) font que cette question se pose. Mais de nouveau il ne faut pas préjuger du formalisme mécaniste de la description de l'algorithme pour croire qu'il peut s'apprendre mécaniquement. *Aussi pauvres soient-ils, les algorithmes sont pour le sujet des outils conceptuels* : ils ont une signification externe, mettent en jeu des invariants opératoires et reposent sur des ensembles de signifiants. Avec eux, le sujet engage ses propres représentations (Vergnaud 1985). Ainsi par exemple un algorithme adéquat pour les items de l'épreuve II serait le suivant : 1° Déterminer les deux groupes de places de chaque côté du signal égal et situer par rapport à eux la lacune. 2° Si la place du résultat est vide additionner, sinon, comparer les données numériques pour s'assurer que la décomposition est possible et dans ce cas, l'effectuer. On voit ce que ceci implique comme interprétation des symboles et de leurs agencements. Or les termes qu'utilisent les élèves montrent comment le comptage et ses représentations leur servent de références dans leur discriminations : "ça fait" (+) et "pour faire" (-/R). Les comparaisons de ce type d'exercice avec celui des autres épreuves sont alors très instructives. Prenons tout d'abord l'épreuve IV ( $a+b=c+.../a+b=...+c$ ), très fréquemment les maîtres prennent en charge la référence au comptage (calcul). Avec une efficacité certaine, ils transforment l'écriture de l'égalité en un véritable diagramme d'algorithme. Ils indiquent en effet, au moyen d'une

sur-notation, une marche à suivre : dans quel ordre on peut procéder et quelles données considérer ensemble. Ces notations sont-elles aussi évocatrices des comptages,  $a+b$  pour dire  $a+b$  ensemble,  $a + b = c + \dots$  pour signifier le résultat final,  $a + b = \dots + c$  pour bien signifier le nombre équivalent des deux additions.

Dans tous ces cas la signification sert surtout à évoquer l'articulation entre les deux sous-opérations. Le cas de l'épreuve III vient alors à point nommé dans la comparaison. En effet dans ce cas une seule donnée numérique est présente, la réponse n'est donc pas univoquement déterminée. Là aussi deux sous opérations sont nécessaires (deux moments). Or si on peut imaginer, formellement, que le choix arbitraire d'un premier nombre inscrit dans l'une ou l'autre des lacunes permettrait de ramener l'item de l'épreuve III à un item monolacunaire, puis de le résoudre en tant que tel, ce n'est pas du tout ainsi que les élèves procèdent. Leur but n'est pas de se ramener à un problème qu'ils sauraient déjà résoudre. Non, c'est de reconstituer une écriture d'un calcul. Et en ce sens ils ont compris la consigne. Ainsi dans 70% des cas au moins l'élève se guide sur la place de la donnée, seule ou associée à la place du égal, pour décider de composer ou de décomposer la donnée. (Conne 1984 pp. 43-49). On retrouve donc *le même cadre interprétatif* des items II aux items III (le calcul), sans qu'il y ait ni réduction d'une tâche à l'autre, ni même démarche de résolution comme le suggérerait une description purement algorithmique. Ainsi un examen minutieux des couples de réponses produits montre que les élèves se sont aidés d'autres relations numériques, non nécessaires à l'effectuation de la tâche (du moins telle qu'on peut la décrire a priori) pour compléter les items : dans 25% des cas l'élève donne le nombre 1 comme une de ses réponses (il doit fournir 2 nombres). Dans 45% des cas il établit une relation de double - composition ou partage - ou une relation de succession dans la comptine - composition ou partage. [Il se peut que mon choix des données numériques de l'épreuve ait favorisé ceci, je retiens quand même cette détermination en sus de l'élève qui lui permet de subvenir ainsi à l'indétermination de la donnée (Conne 1984 pp. 128-133)] Ainsi donc s'il est aisé, dans cas comme ceux-ci, de décrire les procédures des élèves par un algorithme, encore faut-il au préalable indiquer dans quel cadre il se situe, quelles spécificités lui donnent ou encore quelles significations le contrôlent.

En d'autres termes il ne faut pas, s'agissant d'algorithme, oublier qu'ils comportent deux versants. a) Le montage d'opérations élémentaires, b) le montage d'une classe de problèmes qu'ils permettent de traiter. *Ces deux versants doivent se construire.* C'est bien ce que nous apprend le cas de Céline évoqué à la page 89 et sur lequel je reviendrai dans mes conclusions page 111.<sup>4</sup>

Les considérations ci-dessus ont dérogé à la règle que je m'étais fixé dans ma présentation, à savoir suivre le déroulement diachronique de mon étude. Mais je crois que ces précisions étaient nécessaires pour que le lecteur comprenne bien le fil de ma pensée. En effet, ce sont bien ces idées qui - non formulées - me guidaient dans ma recherche. Revenons un peu sur terre, avec des questions plus pratiques, revenons à l'analyse des réponses des élèves.

La première question est de se demander sur quels sous-ensembles d'items baser cette analyse. Cette question de découpage est délicate mais cruciale. J'ai procédé empiriquement, ne disposant pas d'élément théorique pour répondre. J'ai commencé par le découpage selon le type d'épreuve. Bien sûr en essayant de passer des résultats observés à l'une d'elles aux données recueillies à l'autre. Mais de plus il s'avérait que plusieurs élèves avaient changé d'une passation à l'autre (malgré le fait qu'elles furent effectuées deux jours consécutifs) et ce de manière moins cohérente que Laurence (A) citée ci-dessus (p. 98). J'ai donc opté pour un découpage selon les passations, ce qui comportait 6 items à l'épreuve II, 3 items à l'épreuve III, et 4 items à l'épreuve IV (cf. copie d'élève p. 86). Je m'efforçai là aussi de trouver des interprétations globales.

4. Dans le cas des algorithmes, les systèmes symboliques associés sont des supports, ils balisent tout à la fois le cours des actions (et les bifurcations) et la classe des "problèmes". De ce point de vue, l'algorithme est refermé sur le système symbolique associé, il peut alors être isolé de toute autre référence situationnelle, et se vider ainsi de signification externe. Voilà pourquoi, j'ai tenu, s'agissant d'algorithmes, à mettre le mot "problème" entre guillemets. Ceci explique bien sûr pourquoi l'enseignement et l'apprentissage s'étiolaient lorsque le maître ou l'élève se contentent trop exclusivement sur l'acquisition d'algorithmes. Ce qui garde de l'intérêt pour moi ce sont alors deux aspects: 1) Concernant le caractère reproductif des algorithmes, c'est la question des contrôles de leur usage et leur effectuation par le sujet et surtout des liens que ces contrôles, externe et interne, entretiennent entre eux. 2) Concernant le caractère constructif des algorithmes, ce sont la mise en forme que leur constitution opère, et les significations qu'on peut leur attribuer une fois qu'ils sont constitués. Je rejoins ici une thèse que J. Rogalski défend dans : *Les représentations graphiques. Caractères réducteurs et producteurs des représentations graphiques de fonctions* (Rogalski 1982).

Nous sommes donc pratiquement confronté à la fluctuation des interprétations des élèves. Ceci est une condition réelle que les maîtres doivent affronter eux aussi. Négativement, cela est un aspect d'instabilité, et contrecarre les efforts du chercheur aussi, mais positivement cela est gage d'enrichissement de la pensée de l'élève qui peut ainsi s'essayer. Mais, et les didacticiens l'ont bien mis en évidence à la suite de G. Brousseau, ceci fait aussi que l'exploitation didactique d'un tel instrument, de par la pauvreté des feedback de telles situations, est très délicate, et, peut-être, jamais très efficace. En effet le danger est qu'au manque de feedback de la situation se supplante les feedback de convenance que le contrat didactique imposera aux élèves et aux maîtres sans qu'il soit toujours possible pour eux de s'en affranchir. Mais il convient alors au didacticien d'organiser ses situations de manière à ce que l'écrit ne soit pas réduit à n'être qu'un support de communication mais aussi un support de pensée, c'est-à-dire prendre très au sérieux le *mot formulation* proposé par G. Brousseau.

L'analyse des profils des élèves porte sur la liste des réponses de celui-ci, interprétées selon les catégories définies plus haut mais aussi sur les résultats des réponses "autres" et "refus". Le premier point est de chercher à voir si les réponses des élèves pourraient être regroupées selon des patterns et mieux encore bien entendu si ces patterns pourraient être définis à partir du plan des items.

Ceci est possible pour l'épreuve IV. De toutes les variations diverses évoquées au tableau des pages 77-79, la place de la lacune à joué un rôle massif. Les patterns sont donc des profils à deux cases selon les deux types d'items retenus  $a+b=c+\dots$  et  $a+b=\dots+c$ . Les réponses sont soit systématiques et de cinq types :

ST = somme totale des données ( $a+b+c$ )

SP = somme partielle des données (presque toujours  $a+b$ )

CD = réponse composition - décomposition, c'est-à-dire correcte

R = refus

A = autre

soit elles sont variées.

Les réponses, quand elles sont systématiques sur un des types d'item, le sont aussi sur l'autre. En fait des trois modali-

tés, la modalité ST est celle qui fait le moins de cas de l'écriture, elle disparaît semble-t-il au profit d'une interprétation SP. Mais on observe 32 ST/ST, et 11 ST/SP, c'est-à-dire que les items  $a+b=c \dots$ , par la place de la lacune sans doute, recueillent plus de réponses ST. Ensuite il y a deux lectures possibles de l'item qui correspondent à deux interprétations  $(a+b) = (c+\dots)$  ou  $(a+b) = (\dots+c)$  qui est celle que l'on veut enseigner et  $(a+b=c) + \dots$  ou  $((a+b=\dots)+c)$  qui est celle des écritures enchaînées ( $3+4=7+2=9+5=14$  etc.) plus "naturelle" et proche de l'interprétation selon un comptage. Fait important à relever dans la perspective même du cadre de référence à l'interprétation, c'est qu'une *écriture enchaînée exige l'effectuation des différentes étapes du calcul*. L'écriture représente le calcul tel qu'il se déroule. Ces lectures ne sont pas incompatibles. Les élèves cohérents étant les 12 qui répondent R/SP (car dans aucun des items donnés  $a+b=c+\dots$  la relation partielle  $(a+b=c)+\dots$  n'était correcte), et les 21 qui répondent CD/CD. Mais 7 répondent CD/SP et tous les entretiens cliniques montrent que les élèves n'ont pas d'éléments, sur l'écrit, pour choisir entre ces deux types d'interprétation! (pour plus de détails, cf. Conne 1984, pages 146 et suivantes).

Par contre, ni pour l'épreuve II, ni pour l'épreuve III il n'a été possible de définir des patterns auxquels ramener les profils de réponses des élèves, à part bien entendu les traitements systématiques additifs et les traitements corrects. Ce fait venait se rajouter à celui déjà évoqué des changements de traitements observés dans certains cas entre les deux passations. Il fallait donc prendre une approche par un biais différent. Je me suis alors dans un premier temps rabattu sur une analyse plus simple constituant à examiner l'éventail des procédés présents dans chacun des profils. Je distinguais alors les profils *monotones* (une seule modalité de calcul effectuée), *les profils mixtes* (deux modalités, +/- ou +/R, ou R/-) et *les profils multiples*.

On peut ainsi considérer le contenu des profils. On voit alors que les profils monotones sont additifs, les profils mixtes sont +/- et +/R, que l'on a ensuite des profils multiples +/-R, +RA différemment organisés. Ceci je l'interprète comme deux mouvements conjoints : la différenciation du comptage additif vers la complémentation (soustraction/refus) et la prise en compte de façon de plus en plus complète de l'écrit. On trouve ainsi la distinction vue pour les refus entre interprétation forme syntaxe

et interprétation procédurale. Ainsi les profils +R seraient essentiellement dus aux refus de forme, parce qu'inusitées pour les élèves, les profils +- seraient le fait des élèves qui comptent à tout prix. On trouve les deux formes de refus dans les profils multiples et même sur un profil donné comme celui déjà cité de Giancarlo (B) que je note +R/R pour +-R impossible/R refus selon la distinction de la page 99.

Ces résultats sont importants, le fait par exemple qu'on ne trouve pas de traitement monotone, ni de traitements mixtes -R montre que l'addition reste dans le cadre de référence à l'interprétation des données écrites, et que c'est en s'appuyant sur ce qui discrimine (+) et (-/R) puis (-) et (R) que l'élève en vient à discriminer les formes écrites. Cette avance de l'opératif sur le figuratif est bien connue. Elle a été retrouvée dans les observations de Céline citées à la page 89. On la retrouve sous de multiples formes, quelquefois surprenante. Ainsi Julien A propose les réponses suivantes :  $2+6=44$   $34=5+2$  et il refuse ensuite tous les autres items lors de cette passation. Il veut bien entendre dire :  $2+6=4+4$  et  $3+4=5+2$ . C'est-à-dire proposer l'égalité de deux compositions. Pourtant il refuse de traiter les items de l'épreuve IV qui portent justement là-dessus. Il y a donc un problème de reconnaissance de la tâche demandée. Mais si cette reconnaissance se fait progressivement, il n'en reste pas moins que la disposition écrite des symboles fournit une forme à cette intégration des opérations. C'est ce rôle "focalisateur" que j'évoquais au début.

Mais, fort de cette idée que le rôle de représentations symboliques n'est pas amorphe, j'ai voulu prolonger cette première analyse. La mise en évidence de l'organisation des profils de réponses devait étayer ma thèse. Pour dégager cette organisation, j'ai utilisé deux moyens : a) d'une part une analyse "en surface", par le regroupement des réponses selon chaque modalité (+, -, R, A) et la comparaison de ces regroupements avec la configuration des items considérés. Ici je retrouvais, en bien plus précis et sur l'ensemble du profil de réponses, les toutes premières analyses. La position de la lacune s'avérait à nouveau un élément déterminant, plus que la position du signe égal. J'ai donné déjà les exemples de Laurence A (p. 98) et de Frédéric A (p. 93). Voici un exemple de profil où je n'ai pas pu dépasser ce niveau de description de surface : Fanny (B) a répondu de la sorte : *Lacune finale* ---> addition ; *lacune initiale* ---> 2 cas :  $\dots=a+b$  ---> addition,  $\dots+a=b$  ---> refus ; la-

*cune médiane* ---> 3 cas :  $a+\dots=b$  ---> addition,  $a=\dots+b$ ,  $a<b$  ---> soustraction,  $a=\dots+b$ ,  $a>b$  ---> refus. Notons qu'à l'épreuve III Fanny a procédé par composition et rempli la lacune en mettant le résultat en position initiale ou finale (selon la position de la donnée). (Cf. Conne 1984 pages 107 et 137). b) Pour tenter d'aller plus "en profondeur" dans l'analyse j'ai essayé d'identifier ce qui avait pu jouer le rôle de cadre de référence décrit page 102, et dans le cas d'une telle détermination, dans quelle mesure il pouvait être considéré comme fixé. Si le lecteur se rappelle l'exemple de Alain C (page 97), il comprendra qu'une description de surface n'est pas à même, elle seule, de nous faire comprendre ses réponses. Bien sûr, il s'avère, une fois l'explication trouvée, que la place de la donnée numérique, ou plutôt le fait que l'item présentait une lacune finale ou non, était un élément déterminant dans le calcul d'Alain. Mais le danger de l'analyse de surface est d'isoler ces éléments, d'être abstraits de toute signification numérique, et de ne pas rendre compte de l'ensemble des signes présents dans l'écrit. (C'est tout le problème avec la position du signe égal).

Le second moyen était donc d'essayer de compléter la première description, par la recherche d'une "règle" présidant au profil. Les analyses des profils de Laurence (p. 98) ou Alain (p. 97) illustrent ma démarche. Il y a plus d'exemples que je ne l'aurais pu espérer avant de procéder à l'analyse que le lecteur trouvera dans le rapport de recherche où *tous les profils* ont été examinés (Conne 1984). Mais voici le plus bel exemple d'un profil organisé selon une interprétation non conventionnelle : Nadia B dont je vous donne la réponse :  $8=\dots+3$  refusé ;  $4=1+5$  ;  $9+\geq=4$  ;  $7=2+2$  ;  $\dots+8=7$  refusé ;  $3+5=8$  ;  $2+6=8$  ;  $4=3+7$  ;  $4=\dots+4$  refusé ;  $\dots=5+2$  refusé ;  $4=5+2$ . Toutes ces réponses seraient correctes si le signe égal était chaque fois final ! C'est le prototype d'une lecture séquentielle, l'ordre est gauche-droite et la position du = n'importe pas. Nadia a répondu selon le même système d'interprétation aux items des autres épreuves III et IV ! (cf. Conne 1984 p. 101-102, 135 et 150).

Selon le degré d'organisation ainsi dégagé, les profils mixtes et multiples sont classés en fluctuants, organisés et corrects. Le premier résultat de cette étude, qui conforte la thèse sur l'écriture symbolique, est qu'il a été ainsi possible de situer tous les profils les uns par rapport aux autres. Par épreuve des tableaux ont été faits et comparés ensuite entre les épreuves. Bien sûr pour chaque élève séparément, les réponses fournies

aux diverses épreuves ont été comparées aussi. Dans une partie des cas les élèves se sont avérés cohérents, mais dans d'autres cas les élèves ont manifestement changé de point de vue à l'occasion du changement de tâche. (Pour plus de détails, cf. Conne 1984, chapitre II). Le second résultat tient à l'organisation des profils. La double approche décrite ci-dessus prolonge *la distinction*, relevée lors de l'analyse des refus, entre deux cadres ou *deux aspects du cadre de référence* : *configuration des symboles écrits dans la donnée (forme, figure) et calcul effectif*. Cette dernière référence se manifestant chez les élèves lorsqu'ils utilisent les vocables : "ça fait" (addition) ou "pour faire" (soustraction) et "impossible" (de soustraire). Le troisième résultat est *la diversité des interprétations que l'on peut observer au travers des réponses des élèves*. Les exemples cités ici en donnent un aperçu ; limité par la place je n'ai pu en donner plus, le lecteur se référera à (Conne 1984).

Si l'épreuve II par sa forme est assez contraignante et qu'elle offre deux données à compter, l'épreuve III fait apparaître plus nettement les traitements séquentiels, c'est-à-dire une interprétation qui couple l'ordre gauche ---> droite avec l'amplification du parcours de la comptine. Dans ce type d'item l'élève doit répondre avec un couple de données, il a plus de champ pour écrire et la forme que prend l'item complété est plus proche de la façon dont il écrirait lui son calcul. Dans la plupart des profils de réponses l'élève se base sur la place de la donnée pour interpréter sa tâche : *composition/décomposition*. Mais nous avons vu aussi que dans certains cas comme Alain (C) page 97, la réponse de l'élève était dirigée par la place disponible pour écrire ses réponses (il ne s'agit donc pas d'un traitement séquentiel). Alain procède assez mécaniquement et est guidé par l'écrit. Tandis qu'un traitement séquentiel tel celui de Nadia (B) (ci-dessus) ou celui de Frédéric (A) (page 94) appellent à la mise en correspondance par le sujet entre la place prise sur l'écrit et celle dans le comptage (ou la comptine).

Pour ce qui est de la comparaison des profils de réponses aux diverses épreuves, je renvoie le lecteur au rapport de recherche (Conne 1984).

## V. CONCLUSIONS

Arrivé à ce point de mon étude il ne me semble pas possible d'exploiter encore les données d'observation disponibles, d'autres recherches sont à ce point nécessaires. Certaines ont d'ores et déjà été engagées, notamment vers l'étude des réponses d'élèves à des calculs en colonne, additifs, soustractifs et de multiplication. De nouveau, il s'avère très instructif de bien étudier les marques laissées par les élèves dans leurs calculs (façon de noter les retenues) et de bien écouter les termes avec lesquels ils commentent leurs calculs. Une autre direction d'étude serait de formaliser un peu mieux les méthodes d'analyses engagées et décrites dans ce texte. Tout ceci, avec la classification du problème concernant la formation des algorithmes, est en gestation.

Ici j'aimerais faire un retour sur la question de la gestion de l'échange avec l'élève, dans le double but de lui donner des occasions de progresser, et, pour moi, de comprendre sa pensée. L'instrument que j'ai utilisé est la variation d'item par combinatoire d'éléments formels permettant de proposer des items variés et trois types de tâches différentes quoique proches. Cette variation n'était pas tout à fait arbitraire étant donné qu'elle était inspirée de ce qu'on trouve dans les manuels d'enseignement élémentaire et qu'elle est liée à une signification précise d'exercice de la table. (Les prototypes d'écriture lacunaire sont  $a+b=...$  composition/ $a=...+...$  décomposition). Or ce qui en résulte c'est le recueil d'une diversité de réponses et de combinaisons de ces réponses en de nombreux profils. Il y a donc bien un rapport entre ces deux gammes.

Pour examiner ceci sous l'angle de *l'échange avec les élèves*, revenons à mes tout premiers pas dans cette étude, l'interview d'élèves en classe 1P. Tout commença par hasard, le 19.1.79 au fond d'une salle de classe lorsque Céline, une élève, me demanda de l'aide. Il s'agissait de répondre à un exercice consistant à compléter les lacunes présentées à propos du dessin suivant :



$$\begin{array}{l} \dots + \dots = \dots \\ \dots = \dots + \dots \end{array}$$

Céline avait consciencieusement écrit  $4+2=6$  et  $4=2+6$ . Puis ayant montré son travail à la maîtresse, elle envisageait les corrections suivantes :  $2=4+6$  et  $2+4=6$ . Je pris le parti de ne rien lui expliquer mais de tenter de lui faire changer de point de vue par le biais de la confrontation à des tâches variées. Ordre des symboles, calculs lacunaires ou écritures complètes à juger. Céline répond gentiment mais ses réponses donnent l'image d'une incohérence. En termes de variation, on peut dire que Céline et moi n'envisageons (ne concevons) pas le même ensemble de formes. Si Céline pense à transformer  $4=2+6$  en  $2=4+6$ , elle ne pense jamais à écrire  $6=4+2$  ou  $6=2+4$ . Or formellement, il ne s'agit que d'une permutation du même type que la précédente. On bute donc sur quelque chose de plus profond. De même, l'essai de lui faire juger des écritures complètes rata car celles-ci pour une bonne part n'avaient aucune signification pour elle, elles n'étaient en fait ni fausses, ni justes. De plus, cette approche par variation formelle ne permettait pas non plus de saisir toute la pensée de Céline comme le confirma cet entretien à propos d'une fiche d'exercice, où Céline m'annonça triomphalement avoir compris. Elle avait, dans ce cas, compris la demande la décomposition dans l'item  $9=...+...$ . Ceci ne l'empêchait pas de répondre invariablement  $7=2+9$ . Sauf si, jouant sur les mots, je lui demandais "7, c'est fait par 2 et puis?" La réponse était alors immédiatement correcte.

En terme de variation des items, je dirai ceci : les formes envisageables par Céline ne recouvraient pas les formes que je lui imposais. Il n'y avait débordement de ma part et dans ces situations là, Céline répondait en se raccrochant à des éléments partiels, et non pas seulement des éléments de l'item mais encore des éléments de la situation globale qui se présentait à elle. Tel était le cas dans l'interview sur la fiche ci-dessus, tel était le cas dans maintes autres situations où nous "tournions en rond" Céline et moi (cf. Conne 1984 pages 164-177). Ce qui limitait le champ des écritures pensables par Céline, c'était la référence au déroulement de la comptine dans le comptage. Si elle devait écrire un calcul, elle l'écrivait avec le signe égal final et si elle devait lire l'item  $7=2+...$ , elle "sautait" systématiquement le signe égal.

Parler de variation n'est cependant pas tomber dans les vicissitudes de "l'effet Jourdain" décrit par Brousseau (1984). Car l'échange ne porte bien entendu pas là-dessus, "l'action pédagogique" décrite ci-dessus revient bien à confronter l'élève à

une variété de formes (la simple répétition est déjà une variation) cependant ce qui est en jeu ce sont les règles qui contrôlent pour ma part la production de cette variation (adaptée continuellement aux réponses de l'élève et à mes analyses) ou, pour la part de l'élève à la production de ses réponses. Ce ne sont pas les mêmes règles. Parmi les diverses productions erronées, certaines apparaissaient fluctuantes, contingentes, tandis que d'autres, telle l'assimilation de l'item  $7=2+...$  à la demande d'une addition, invariable (persistante, mais pourquoi pas invariante?!) Ces dernières demandent à être déstabilisées ou ce qui revient au même, l'horizon de l'élève demandait à être élargi. Or celui-ci se bornait tout d'abord au comptage et à la vexion "naturelle" de la comptine. Puis Céline se confronta à la question des bornes du comptage (donc au seuil de la complémentarité) et elle-même proposa à un élève à qui elle était confrontée, et qui défendait la réponse  $7=2+5$ , la réponse  $7=2+7$  qui correspond à l'erreur de calcul décrite page 82 ; par ailleurs, ce camarade lui proposait d'inverser le sens de la lecture :  $7=2+9$  c'est si on lit de gauche à droite, tandis que  $7=2+5$  c'est si on lit de droite à gauche (cf. Conne 1984 pages 173-176). Toutes ces nouvelles "erreurs" sont positives dans la mesure où elles sont autant de signes de la déstabilisation de la réponse première. Ni le comptage ni la lecture ne sont aussi univoques qu'il paraissent. Plus tard Céline "comprit" qu'il fallait répondre  $7=2+5$ . Je me dis que cette déstabilisation était le signe avant coureur de ce changement.

Et bien sûr tous ces échanges se faisaient par le truchement d'écritures.

Les données présentées ici et analysées si longuement sont basées sur un matériel d'observation *facilement accessible* aux enseignants eux-mêmes. Quelles raisons font donc qu'il faille attendre des chercheurs la mise en évidence de tels faits ? Pour répondre à cette question il convient de porter son attention non pas tant sur l'observation que sur l'interprétation, la confrontation et l'usage que l'on fait des données ainsi recueillies. Or ce travail n'est pas, aujourd'hui encore, considéré comme partie intégrante de l'enseignement. L'observation reste un élément extérieur au guidage de la classe, du domaine du journal de bord, ou alors, laissé au chercheur, et aux questions particu-

lières qu'il se pose. Les pédagogues se retranchent souvent derrière la complexité des phénomènes scolaires. Ce qui ne les empêche pas curieusement, de se contenter d'interprétations rationalisatrices, réifiantes voire banalisantes des observations de classe. La présente étude montre toute l'attention que l'on peut porter à des aspects considérés soit comme des détails soit comme des traits individuels d'élèves. Ceci dénote un grand obstacle à l'observation des données de classe auquel les analyses réductrices qu'elles soient de type mathématique ou du type psychologique ne nous ont pas préparé. En effet, l'observation de classe nous confronte sans ménagement à la diversité et à la variabilité. Les chercheurs commencent à s'en rendre compte, le lecteur pourra trouver la même remarque dans la compilation de Ed. Labinowicz [11]. Cette situation est fort peu rassurante : comment faire la synthèse de tout cet afflux de données ? Mais aussi combien nos outils théoriques sont-ils encore grossiers !

L'apprentissage et l'enseignement des mathématiques sont des choses bien mystérieuses encore, du moins pour le chercheur en didactique que je suis.

#### BIBLIOGRAPHIE

- BROUSSEAU G., 1984, *Le rôle central du contrat didactique dans l'analyse et la construction des situations d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques*. IREM Université I Bordeaux.
- CONNE F., 1984, *Une épreuve de calcul en première primaire*. Interaction didactique cahier N° 6 F.P.S.E. Genève - Sém. Psychologie Neuchâtel.
- CONNE F., 1986, *La Transposition didactique à travers l'enseignement des mathématiques en première et deuxième année de l'école primaire*. Lausanne, Conne-Couturier Noverraz, pp. 304-446.
- CONNE F., 1987, Comptage et écriture des égalités dans les premières classes d'enseignement primaire. *Math Ecole*, 128, pp 2-12.
- DROZ R., PASCHOUD J., 1981, Le comptage et la procédure "(+1)-itérée" dans l'exploration intuitive de l'addition. *Revue Suisse de Psychologie* N° 40 (3), pp 219-237.

- EL BOUAZZAOUI H., 1987, *Etude de situations scolaires des premiers enseignements du nombre et de la numération. Relation entre divers caractères de ces situations et le sens, la compréhension de l'apprentissage de ces notions*. Thèse de doctorat. IREM de Bordeaux, Université Bordeaux I.
- FAYOL M., 1985, Nombre, numération, dénombrement : que sait-on de leur acquisition ? *Revue Française de Pédagogie*. N° 70, pp. 59-77.
- LABINOWICZ Ed., 1985, *Learning from children*. (New beginnings for teaching numerical thinking), Menlo Park, Addison Wesley.
- PIAGET J., 1969, *Psychologie et Pédagogie*. Denoël, Paris, pp. 68-77.
- ROGALSKI J., 1982, *Les représentations graphiques. Caractères réducteurs et producteurs des représentations graphiques de fonctions*. Notes manuscrites d'une communication à la seconde école d'été de didactique des mathématiques, Orléans.
- VERGNAUD G., 1985, Concepts et schèmes dans une théorie opératoire de la représentation. *Psychologie Française*, N° 30-314, pp. 245-252.

