



**HAL**  
open science

## Erreurs, erreurs systématiques et contrôles sémantiques dans l'effectuation de divisions en colonnes

Jean Brun, François Conne, P. A. Cordey, Ruhel Floris, Gisèle Lemoyne, F.  
Leutenegger, Jean Portugais

► **To cite this version:**

Jean Brun, François Conne, P. A. Cordey, Ruhel Floris, Gisèle Lemoyne, et al.. Erreurs, erreurs systématiques et contrôles sémantiques dans l'effectuation de divisions en colonnes. 2017. halshs-01535915

**HAL Id: halshs-01535915**

**<https://shs.hal.science/halshs-01535915>**

Preprint submitted on 9 Jun 2017

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Erreurs, erreurs systématiques et contrôles sémantiques dans l'effectuation de divisions en colonne.

J. Brun (Université de Genève), F. Conne (Université de Lausanne et Service de l'enseignement spécialisé), P.A. Cordey (Ecole normale de Lausanne), R. Floris (Université de Genève), G. Lemoyne (Université de Montréal), F. Leutenegger (Université de Genève), J. Portugais (Université de Sherbrooke).

JUIN 1993

## PLAN

1. Six cas d'erreurs
2. Quelques remarques non exhaustives sur la description plus ou moins raisonnée des erreurs.
3. L'intérêt de la théorie de Van Lehn sur les erreurs systématiques.
4. Quatre exemples mettant en évidence des anticipations et/ou des inférences de la part du sujet.
5. Un autre point de vue pour la description des erreurs: situation plutôt qu' état. Exemple d'une telle description suivant la perspective d'un schème.
6. Les erreurs dans la perspective de la théorie des schèmes algorithmes.
7. Conclusion.

## 1. Six cas d'erreurs.

**Légende:** - (300) signale que ce nombre figure barré sur la feuille de l'élève.

- x signale l'omission de l'inscription d'un chiffre du quotient.

- 24 signale que ce quotient est un nombre à deux chiffres: vingt quatre et non deux puis quatre.

Des notations annexes figurant sur les feuilles des élèves et que nous ne reproduisons pas ici, faute de place, montrent que nos interprétations des notations des élèves sont correctes. Ceci s'applique en particulier aux erreurs de Natacha, qui sans ces données annexes ne nous auraient pas été compréhensibles (pour des informations complémentaires, on se référera à la page 5.)

YVES 7DS

$$\begin{array}{r|l} 7905 & 30 \\ \hline 60 & \underline{x63,5} \\ 190 & \\ \hline 180 & \\ \hline 105 & \\ \hline 90 & \\ \hline 150 & \\ \hline 150 & \end{array}$$

GAE 5S

$$\begin{array}{r|l} 7905 & 30 \\ \hline 60 & \underline{2513} \\ 190 & \\ \hline 150 & \\ \hline 405 & \\ \hline (300) & \\ \hline 390 & \\ \hline 15 & \end{array}$$

ISABELLE 5S

$$\begin{array}{r|l} 77274 & 324 \\ \hline 648 & \underline{2x24} \\ 1247 & \\ \hline 970 & \\ \hline 7774 & \\ \hline 7674 & \\ \hline 100 & \end{array}$$

NATACHA 7DP

$$\begin{array}{r|l} 23180 & 24 \\ \hline 216 & \underline{17(5)6x} \\ 158 & \\ \hline 144 & \\ \hline 140 & \\ \hline 120 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

NATACHA 7DP

$$\begin{array}{r|l} 7905 & 30 \\ \hline 78 & \underline{260} \\ 105 & \end{array}$$

NATACHA 7DP

$$\begin{array}{r|l} 803,2 & 4 \\ \hline 80 & \underline{200,8} \\ - - 32 & \\ \hline 32 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

## 2. Quatre remarques sur la description plus ou moins raisonnée des erreurs

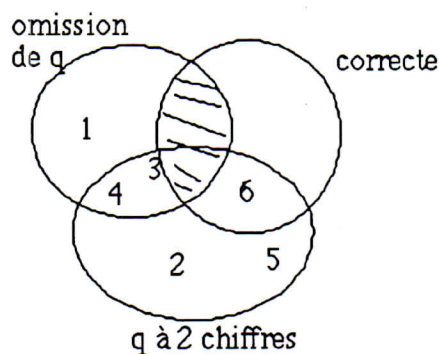
### Remarque 1.

On peut classer les erreurs selon des caractéristiques relativement évidentes. Dans le cas des six erreurs données ci-dessus, cela donne.

A. Réponses correctes

B. Oubli de noter un des chiffres du quotient ( $q_i$ ).

C. Notation d'un quotient à deux chiffres.



### Remarque 2.

On peut examiner de plus près les erreurs en fonction du processus pas à pas du calcul. On observe alors que si, dans certains cas, l'erreur est isolée (cas 1 de nos exemples), dans d'autres cas, on observe des erreurs en cascades (cas 2 et 3 de nos exemples) ou des erreurs co-occurentes (cas 3 et 4).

Notons que ces observations sont faites à partir d'une analyse intuitive, cas par cas, et au moyen d'un calcul, une quasi-simulation, nous restituant le contexte de chacune des opérations. Nous nous référons pour cela à "l'algorithme" de division que nous avons appris et à l'expérience que nous nous sommes forgés pour ce type de calculs, et aux traces écrites laissées par l'élève.

A dessin, j'ai choisi et ordonné les six erreurs selon leur plus ou moins grande résistance à ce type d'analyse. Le cas 6 excepté, puisqu'il s'agit d'une "erreur correcte".

### Remarque 3.

On peut donc décrire les erreurs de différentes manières.

- Ponctualisation de chaque erreur, sans s'occuper du processus.
- Délimitation des erreurs liées, ou en cascade, détermination des erreurs co-occurentes et "logiquement" non liées.
- Classification des cascades d'erreurs.
- Classification selon le résultat final de l'opération, ou au contraire selon la source de l'erreur.

Ces distinctions relèvent de ce que l'on cherche à obtenir en décrivant les erreurs. On peut, aussi, s'occuper d'une population d'erreurs, et là encore il faudra spécifier de quel niveau:

- résultat final
- cascades
- sources
- erreurs ponctualisées.

On peut, encore rapporter les erreurs à une forme d'item. Sur nos six exemples, cela pourrait être l'item 7905;30, (cas 1, 2, 5) ou encore les rapporter à un même sujet, sur notre exemple, les erreurs de Natacha ( 4, 5, 6). A ce propos, remarquons que le recherche de régularité d'erreurs, ou de systématité, peut aussi bien se faire intra-sujet que inter-sujet. Ceci peut être référé à certains types d'items marquant une certaine étape dans l'apprentissage.

#### Remarque 4. Erreurs manifestes, règles implicites.

a) Lorsqu'on étudie un tant soit peu soigneusement les erreurs de calcul, on note rapidement qu'elles ont une cohérence. On y trouve même souvent une régularité. Enfin certaines erreurs sont remarquablement stables, voire communes.

b) En classe, on observe généralement des actions didactiques plus ou moins intuitives visant à "corriger" les erreurs. Souvent les enseignants dictent des règles ad-hoc aux élèves, ou les enjoignent à respecter certaines règles auparavant convenues. Les manuels font de grands détours et proposent de multiples aides symboliques originales pour expliquer et présenter les algorithmes.

c) Comme dit plus haut, lors de l'analyse pas à pas de l'erreur, l'analyste se réfère à "l'algorithme tel qu'il le connaît", contextualisé à ce cas d'erreur. Seule une trame de cet algorithme est explicite, beaucoup de règles restent liées à l'action.

#### Question :

Une erreur manifeste-t-elle toujours le non-respect d'une règle? Et cette règle peut-elle être toujours, d'une façon ou d'une autre, attribuée au sujet (élève) ?

En examinant de ce point de vue les exemples ci-dessus, on peut dire que "certaines règles" n'ont pas été respectées. Par exemple, écrire tous les  $(q_i)$ , ou ne pas écrire un  $(q_i)$  à deux chiffres. Mais comme nous l'avons vu, dans le cas 6, cette règle n'est pas absolue. D'autres cas sont encore moins clairs. En fait l'analyse correcte de la fonctionnalité des règles est délicate. Par exemple, dans la division intervient une comparaison du reste et du diviseur. Cette comparaison joue un rôle important, du moins quand on analyse la finalité de la division. Mais est-ce une règle qui agit au niveau du fonctionnement effectif de l'algorithme? On peut en effet remarquer que si le calcul est mené correctement, alors le reste sera forcément plus petit que le diviseur. Dès lors si un élève ne tient pas compte d'un reste trop grand, que peut-on conclure? Qu'il ignore la règle? Qu'il omet, pour une raison ou une autre de l'appliquer? Ou encore qu'il outrepassa la règle afin de "forcer" son calcul? On peut penser que la comparaison du reste et du diviseur est un "garde fou", une règle "secondaire" visant à "tester" la correction des étapes antérieures, on parlera du "contrôle". Mais ceci bute sur autre chose encore: la mise en relation du reste et du diviseur aura de toutes façons lieu, lorsque le reste sera soit partie du futur dividende (une fois complété par un chiffre suivant dans le dividende), soit qu'il sera redivisé (donc pris comme un nombre à diviser et non plus comme le résultat d'une différence). Alors le test a-t-il lieu, donne-t-il lieu à une règle, et dans quelles circonstances?

Les exemples 2 et 3 ci-dessus illustrent ce qui vient d'être dit. Mais voici un exemple encore plus spectaculaire.

FLORENCE 5S

$$\begin{array}{r|l} 77274 & 324 \\ \hline 648 & 23(4)5(4)3 \text{ R. } 162. \\ 1247 & \\ \hline 972 & \\ 2754 & \\ (1296) & \\ \hline 1620 & \\ 1134 & \\ (96) & \\ \hline 972 & \\ \hline \text{R } 162 & \end{array}$$

Dans ce cas, on voit que le test, ou son équivalent fonctionnel, intervient en amont de l'obtention du reste, et ne porte pas tant sur une mise en relation avec le diviseur que sur une mise en relation du dividende et du sous-multiple cherché, sur l'écart ( $D_i - M_i$ ). L'élève cherche à trouver un  $M_i$  (et un  $q_i$ ) pour lequel l'écart ne soit pas trop grand. C'est ce qui l'amène à corriger un premier essai :  $q_3=4$ ,  $M_3=1296$ , et tenter un second essai en "incrémentant"  $q_3$ :  $q_3'=5$ ,  $M_3'=1620$ . Le test sur l'écart n'est pas réappliqué, alors que l'écart est toujours trop grand. Le reste est calculé, et il est redivisé (le dividende n'a plus de chiffres il n'y a aucun abaissement). La même procédure d'essai est reprise pour la recherche de  $q_4$  ( $q_4=4$ ) mais cette fois  $M_4$  est "vu" comme étant trop grand (seules les unités de  $M_4$  apparaissent sur le diagramme du calcul). Le quotient est alors "décrémenté":  $q_4'=3$ . Le multiple correspondant est calculé ainsi que le reste. L'élève décide de s'arrêter là et indique bien que son dernier résultat est un reste.

A propos de cette phase du calcul de la division, que je nomme: **recherche de ( $q_i / M_i$ )**, il est à noter qu'elle peut s'effectuer de diverses manières, dont celle, par essai et erreurs, illustrée ici. On peut modéliser cette opération, qui effectivement se déroule en plusieurs phases successives, par une recherche soumise à trois contraintes liées: ( $q_i \leq 9$  ;  $M_i \leq D_i$  ;  $D_i - M_i < d$ ). Ceci permet de résoudre en partie les questions soulevées ci-dessus à propos du test sur le reste. Je n'en dirai pas plus dans le cadre de cette communication.

### **3. L'intérêt de la théorie de Van Lehn sur les erreurs systématiques.**

Les règles attribuées par la description des erreurs peuvent donc être superflues, inadéquates, voire redondantes. Elles peuvent aussi brouiller les interventions didactiques. Ces problèmes d'économie et d'adéquation affectent aussi bien:

- nos explications des erreurs,
- les tentatives didactiques pour les éviter ou les corriger,
- notre représentation du processus d'apprentissage en cours.

Par exemple, nous avons plusieurs fois fait remarquer la maladresse des manuels suisses romands dans leur présentation de la division, où il est "proposé" de travailler sur plusieurs "formes" d'algorithmes. (c.f. en annexe, la page 91 du manuel de méthodologie de Suisse Romande, 6ème primaire.)

Le problème est plus aigu encore par notre dernière remarque. Effectivement, selon les moyens et signifiants mis à disposition, les règles engagées pour la recherche ( $q_i / M_i$ ) seront différentes. C'est entre autre ce que "recellent" les erreurs de Natacha (ex. 4, 5, 6). Voici une liste de quelques moyens que l'on peut engager dans la recherche de  $M_i$ :

- Mémoire des tables,  $d \leq 12$ .
- Tables toutes faites à disposition.
- Recherche additive de multiples de  $d$ . (Par exemple, Natacha, ci-dessus, a recherché les quotients en procédant par duplications du diviseur, et elle s'est trompée dans le décompte de celles-ci.)
- Recherche additive ou multiplicative des multiples de  $d$ , écrite à part ou sur le diagramme.
- Calcul mental des multiples de  $d$ .
- Enchaînement / fondu du calcul des multiples et de la soustraction.
- Etc.

La complexité de l'affaire trouve une aide salutaire dans les travaux de Van Lehn et sa Repair Theory. Elle a été développée à propos de l'algorithme de soustraction en colonnes, selon la méthode dite des "emprunts". A ma connaissance, nous ne disposons pas encore d'un modèle applicable à un algorithme de division. Bien que nous puissions supposer une relative "proximité" entre ces deux algorithmes de calcul élémentaire, nous devons ici "procéder par analogie".

Van Lehn ne simule pas des erreurs casuelles. C'est ce qui a fait le succès des travaux de Brown et Burton (Buggy and Debuggy), puis des premiers travaux de Van Lehn sur les erreurs systématiques. Ici, on simule un ensemble d'erreurs (inter-sujets / intra-sujet, peu importe). Van Lehn aboutit, avec sa Repair Theory, à un modèle informatique de l'algorithme et de son apprentissage. A notre avis deux idées force méritent d'être mises en évidence:

- Le modèle informatique peut aussi bien apprendre à dérouler correctement l'algorithme qu'à reproduire les erreurs observées chez les élèves. Les erreurs sont considérées comme des variantes de réponses.

- Le modèle est un modèle d'apprentissage automatique qui met sur le même plan et le déroulement de cet apprentissage et le déroulement d'un calcul casuel.

Nous sommes très intéressés par ce modèle car il place au départ même de l'acquisition de l'algorithme une certaine part d'automatisme, qui se développe elle-même automatiquement. Il y a peut-être là une conception sur l'automatisation des procédures qui rompt avec certaines idées reçues (nous pensons à celle qui voudrait que l'on acquiert une procédure, puis qu'on l'exerce jusqu'à ce qu'elle devienne automatisée). Des points de vues psychologique et didactiques, cela signifie que l'automatisation des procédures du sujet est à l'oeuvre dès l'origine. Ceci pourrait guider les didacticiens vers la constitution de milieux favorables au jeu de ces automatismes et de rendre ainsi les interventions didactiques plus économiques et pertinentes.

Bien entendu, un tel modèle cherche à éviter les hypothèses sémantiques. C'est ce qui motive chez Van Lehn, ainsi qu'il le dit lui-même, son choix d'étudier un algorithme de calcul élémentaire. Nous-mêmes cherchons plutôt à atteindre cette dimension sémantique. Pourtant le modèle de Van Lehn nous est très utile, car il prend en compte le cheminement de la résolution en fonction de l'évolution pas à pas des données est pas seulement en fonction d'une suite stricte et réduite d'opérations automatisées. La théorie prend aussi en compte le fait que l'élève "finalise" ses opérations sur l'obtention impérieuse d'un résultat: sa solution est souvent d'avoir "pu mener jusqu'au bout" ses calculs. Le modèle est un modèle: Etat --Règle--> Etat, le calculateur traite ses données, et selon leur état détermine la règle à appliquer, ce qui mène les données dans un autre état, etc. Ce modèle convient bien aux algorithmes et aux descriptions des cascades d'erreurs telles qu'on peut les observer dans nos exemples. En outre, nous avons pu reconnaître dans ce modèle des aspects que nous avons effectivement observé en classe (et non pas seulement recueilli dans des épreuves écrites): par exemple, des régularités chez un même sujet (cf Florence, ci-dessus), des régularités inter-sujet, la consistance des erreurs co-occurentes (cascades élargies). Non ce modèle n'est pas trop réducteur. Ce modèle est très consistant, très économique, et Van Lehn attache une importance cruciale à ce qu'il colle (fit) avec les données d'observations. En ce qui concerne le processus d'apprentissage, ce modèle est conçu sur la base de principes simples tels:

- Le système n'acquiert une nouvelle procédure que si cela est nécessaire (i.e. s'il se trouve dans une impasse).
- Le système n'acquiert, à chaque bifurcation qu'une seule procédure à la fois.
- compléter???

Pourtant ce modèle n'est pas anticipateur, le système ne considère que l'état où il se trouve. Il ne conserve des étapes antérieures que le fait d'en être arrivé à l'état courant (nous ne plaçons pas à ce niveau le répertoire de règles et de repairs). Il semble que ce modèle n'indique pas (encore) comment différentes procédures peuvent se combiner, ni comment ni où s'amorce l'apprentissage. De plus, le modèle de Van Lehn et sa théorie ne couvrent pas toutes les erreurs. Tout d'abord, il y a un ensemble d'erreurs considérées comme non-régulières (et par là on ne peut les produire par un système), elles sortent du champ de la théorie, et restent hors d'accès des modèles qui en découlent. On les considérera comme fugaces, hasardeuses, contextuelles, particulières au sujet, on peut les ranger dans la catégories des "erreurs-bruits", ou, pour reprendre l'heureuse expression de G. Brousseau, comme des "contingences".

Face à ces erreurs on peut adopter diverses attitudes. Dans le champ théorique, on peut chercher à en rendre compte, et même à construire une théorie suffisamment puissante pour englober les erreurs systématiques et les erreurs-bruits. Dans le champ expérimental (et empirique), on peut chercher à tirer profit de notre compréhension des erreurs systématiques en trouvant des mesures didactiques appropriées qui limitent le volume de ces contingences (certaines didactiques pouvant au contraire avoir un effet d'amplification de ces bruits).

Alors pourquoi disons-nous que la théorie de Van Lehn nous est d'une grande utilité? Tout simplement parce qu'elle apporte une grande clarté dans la question qui nous occupe. Comme nous l'avons dit, nous nous intéressons à mieux saisir l'aspect sémantique et le rôle que jouent les connaissances numériques dans les apprentissages, puis en retour l'impact que l'on pourrait attendre de ces apprentissages sur la formation de ces connaissances numériques. Il nous importe donc de ne pas nous méprendre sur les phénomènes que nous observons au travers de l'étude des erreurs. Ces apports d'un modèle informatique ne règlent pourtant pas notre problème, à moins de le déclarer d'emblée comme non-pertinent (ce qui, du point de vue des fins visées par Van Lehn, pourrait fort bien se comprendre). En effet, même si on nous démontrait que, par ignorance de certains mécanismes, nous aurions été amenés à attribuer des aspects sémantiques là où la théorie pouvait s'en passer (pour rendre compte des observations), cela n'affecterait en rien le fond de notre problème. Tout au plus serions-nous amenés à le traiter autrement.

Nous avons déjà indiqué que la théorie de Van Lehn nous laissait sur notre fin en ce qui concerne les origines de l'apprentissage, ou de l'installation d'une procédure, et de sa combinaison avec d'autres procédures. De même, la question de connaître les limites des procédures n'est pas traitée (quelles règles font partie du stock?). Enfin, et c'est lié bien sûr, nous ne sommes toujours pas certains que la division écrite puisse être, elle aussi, modélisée de cette façon (il semble que cela n'ait pas encore été réalisé).

Par ailleurs nous disposons d'autres références théoriques utiles. Ici nous nous appuyerons sur la théorie de G. Vergnaud concernant les schèmes-algorithmes. Un schème est défini comme: "l'organisation invariante de la conduite pour une classe de situations données". Il faut comprendre cette organisation à la fois du point de vue structural (la conduite est organisée) et fonctionnel (le schème est organisateur). Si le caractère organisé est déjà très largement présent dans les travaux sur les erreurs systématiques, il reste à préciser la part qui, dans ces organisations, est faite aux connaissances. Nous l'avons dit, le modèle de Van Lehn nous paraît nécessaire mais insuffisant. Qu'apporte la notion de schème? Rappelons avec G. Vergnaud qu'un schème comporte:

- des invariants opératoires,
- des anticipations des buts à atteindre,
- des règles d'action,
- des inférences.



Nous avons cherché dans les erreurs que nous avons pu observer, des exemples que nous n'arrivons pas à décrire sans en appeler à la notion de schème. En un premier lieu, nous allons vous montrer certaines erreurs, issues de la mauvaise application de certaines règles, dont le caractère systématique peut se discuter, mais qui mettent bien en évidence les anticipations et inférences du sujet. Nous nous sommes gardés de produire des erreurs par trop particulières à l'algorithme de division. En effet pour cet algorithme, contrairement aux calculs d'addition, de soustraction ou de multiplication, la recherche de  $(q_i / M_i)$  donne lieu à une procédure par essais/erreurs. Il s'agit d'un ségment quasi heuristique de la procédure, que nous écartons pour cette raison même de notre démonstration.

**4. Quatre exemples mettant en évidence des anticipations et/ou inférences de la part du sujet.**

**Exemple 1.** Nous reprenons ici le premier de nos six exemples.

YVES 7DS.

$$\begin{array}{r|l}
 7905 & 30 \\
 \underline{60} & \times 63,5 \\
 190 & \\
 \underline{180} & \\
 105 & \\
 \underline{90} & \\
 150 & \\
 \underline{150} & \\
 \hline
 0 & 
 \end{array}$$

**Description:** L'inscription de  $q_1$  manque. Saut non systématique d'une étape.

**Explications plausibles :** Erreur de copie ;  $q_1=2$  resté mental ;  $M_1=60$  identifié directement sans passer par l'identification de  $q_1$ .

**Remarques:** L'inscription de  $q_i$  dans le diagramme est "franche" en ce qui concerne les calculs engagés dans la partie de gauche. La finalité de cette inscription est lointaine (lecture du résultat final). La finalité d'avoir trouvé  $M_i$  peut supplanter celle de déterminer  $q_i$ .

**Question:** Alors distraction de l'élève? Une règle didactique de vigilance est-elle nécessaire? Si oui, comment s'intégrera-t-elle dans la procédure?

**Exemple 2. Prolongement de l'exemple 1.**

PATRICK 5S

$$\begin{array}{r|l}
 965 & 9 \\
 \underline{9} & \times 7 \\
 065 & \\
 \underline{63} & \\
 2 & 
 \end{array}$$

erreur classique

JULIEN 5S

$$\begin{array}{r|l}
 965 & 9 \\
 \underline{96} & \times 8_{xx} \\
 05 & \\
 \underline{0} & \\
 0 & \\
 \text{à côté: } 12 & \\
 \underline{\quad \times 8} & \\
 96 & 
 \end{array}$$

fausse reconnaissance

PATRICK 5S

$$\begin{array}{r|l}
 8032 & 4 \\
 \underline{8} & \times 8 \\
 0 & \\
 32 & \\
 \underline{32} & \\
 0 & 
 \end{array}$$

double reconnaissance avec saut d'un 0 au quotient.

**Description commune:** La reconnaissance de multiples amène à sauter des étapes d'inscription de 0 au quotient.

**Remarques:** La finalité de constituer un multiple (trouver un multiple) avec les chiffres de D prend le pas sur la stricte observance de l'ordonnancement des règles.

**Exemple 3. Un cas où l'élève accomode sa lecture des signes.**

FANNY 7DS. Suivi de 7 étapes dans le calcul.

**Donnée**                      Brouillon                      Brouillon                      Brouillon                      -->

$803,2 \quad   \quad 4$	$\begin{array}{r l} 8032 & 40 \\ \hline 80 & 20,8 \\ \hline 0320 & \\ \hline 320 & \\ \hline 0 & \end{array}$	<del><math display="block">\begin{array}{r l} 8032 &amp; 40 \\ \hline 80 &amp; 20,8 \\ \hline 0320 &amp; \\ \hline 320 &amp; \\ \hline 0 &amp; \end{array}</math></del>	$\begin{array}{r l} 8032 & 40 \\ \hline 80 & 2080 \\ \hline 0320 & \\ \hline 320 & \\ \hline 0 & \end{array}$
-------------------------	---	---	---

*Reconnaissance des multiples 32  
anticipation de la  
décimale*

--->                      Brouillon                      Brouillon                      **Réponse**

$\begin{array}{r l} 8032 & 4 \\ \hline 80 & 208(0) \\ \hline 0320 & \\ \hline 320 & \\ \hline 0 & \end{array}$	$\begin{array}{r l} 8032 & 4 \\ \hline 80 & (20)(80) \\ \hline 0320 & \\ \hline 320 & \\ \hline 0 & \end{array}$	$\begin{array}{r l} 803,2 & 4 \\ \hline & 208 \end{array}$
--	--	--

*$32 \div 4 \approx 32 \div 40$   
occulte la pnc en compte  
de 3 ou 03 comme  
dividende partiel  
=> un seul 0 au q  
c'est donc 92 qui est  
avis*

**Description:** Un calcul suivi de diverses réécritures (va et vient entre feuille de réponse et feuille de brouillon)

**Explications plausibles :** Accommodation d'une réponse: calcul erroné, remis en question, puis relecture différente de ce calcul. Comme pour les exemples précédents, l'élève commet une erreur en oubliant de noter un 0 au quotient (q2 ou q3) par contre le quotient q4=8 est bien considéré comme décimal. L'élève trace son calcul et recommence, elle efface la transformation du diviseur. Sur le quotient cela se traduit par un rajout d'un zéro final et d'une disparition de la virgule. Une relecture du quotient élimine le zéro final considéré comme décimal. Mais cela ne correspond pas aux multiples partiels inscrits dans le diagramme: 80 et 320. En effet, si le quotient est 4, alors les multiples doivent être 20 et 80. De là, l'élève <sup>modifie</sup> ces quotients et les entoure. Pour entrer à nouveau dans le format de la donnée, un dividende à une décimale, l'élève supprime le dernier 0 de son quotient (ce qui revient à l'écrire comme nombre à une décimale: 2080--> 208,0=208).

**Remarque:** On pourrait considérer que ce cas sort des cas considérés par l'étude des erreurs puisque la production du calcul proprement dite n'est pas reprise par l'élève, et que ses hésitations interviennent en aval. Mais cet exemple est bien complémentaire des exemples précédents qui portaient sur le processus du calcul. Comme nous allons le voir avec le dernier exemple, tous quatre illustrent la difficulté qu'il y a à coordonner la production de réponses dans le diagramme avec la résolution d'une division proprement dite.

*Rem: Je pense que la réponse est issue d'un conflit chez le sujet  
et non d'état final de l'algorithme, produit sur (par) le diagramme*

#### Exemple 4. Très bel exemple.

Consigne: Calculer le quotient avec deux décimales.

$$\begin{array}{r} \text{NICOLAS 7DP.} \\ 965 \quad | \quad 9 \\ \underline{9} \quad | \quad 106,72 \text{ r. } 2 \\ 060 \\ \underline{54} \\ 65 \\ \underline{63} \\ 20 \\ \underline{18} \\ 2 \end{array}$$

**Description:** Opération prématurée, inversion de l'ordre des opérations à faire.

**Explications plausibles :** L'élève anticipe qu'il va devoir abaisser un zéro, mais il l'effectue avant d'avoir épuisé tous les chiffres du dividende. Ceci ne l'empêche pas d'y revenir ensuite: le 5 est abaissé après le 0. Ceci ne l'empêche pas non plus de placer la virgule au bon endroit de q (la partie entière de q a trois chiffres, il calcule deux décimales du quotient). Intervient donc aussi de façon annexe un calcul sur le nombre des chiffres de q et sur les décimales. (Par ex., rien ne l'empêchait d'abaisser encore un 0 et obtenir comme quotient: 1067,22.)

Nous pouvons conclure de cette analyse que les erreurs des élèves ne correspondent pas toujours à une absence de contrôle sémantique, mais qu'en cours d'apprentissage, il y aurait parfois excès. Les règles de calcul ne sont peut-être que le versant objectif du réglage de ce contrôle. C'est cela que l'élève doit apprendre.

#### 5. Un autre point de vue pour la description des erreurs: situation plutôt qu' état. Exemple d'une telle description suivant la perspective d'un schème.

Forts de ces analyses, nous avons tenté de poursuivre l'étude des erreurs de la division écrite en montrant comment la considération d'un schème élémentaire: "partager / distribuer", pouvait amener à une classification / explication d'un ensemble d'erreurs. L'idée qui permet de le faire est de considérer le calcul comme un déroulement qui voit le sujet (l'élève) mis à chaque pas de son calcul devant une nouvelle situation. L'effectuation du calcul est alors comprise comme le contrôle (mise en relation de connaissances) mutuel des pas les uns par les autres ( $\pm$  via le sujet lui-même). Tout au long de son calcul, l'élève doit anticiper, faire des choix, planifier ses actions, les contrôler, même si avec l'expérience, il le fait de manière de plus en plus automatique. Voici donc maintenant la description d'un nouveau ensemble d'erreurs, recueillies auprès de classes de 5P/6P à Genève en 1990-1991.

### 5.1. Situations où le Dividende est égal au Diviseur

Le schème "partager/distribuer" fonctionne lors de l'apprentissage de la division; il revêt pour certains élèves une signification très précise qui correspond à la situation où le dividende est plus grand que le diviseur. La situation où le dividende est "seulement" égal au diviseur ne peut être assimilée par le schème car, selon ces élèves, la quantité à partager ne l'est pas si on la divise par le même nombre: le dividende n'est pas fractionné. Suite à cette impossibilité l'élève abaisse alors la colonne suivante pour se mettre dans la situation où " dividende est plus grand que diviseur", et peut donc "être partagé". Dans ces cas, une règle de numération peut être coordonnée au schème "partager": à chaque position de l'écriture du quotient le plus grand nombre écrit possible est 9 (exemples 1 et 2.) On retrouve aussi ce fonctionnement "restrictif" du schème dans les cas où le reste est égal au diviseur; il n'est alors pas divisé (exemple 3).

$\begin{array}{r l} 9009 & 9 \\ \hline 81 & 999 \\ \hline 90 & \\ \hline 81 & \\ \hline 99 & \\ \hline 81 & \\ \hline 18 & \end{array}$	$\begin{array}{r l} 7147 & 7 \\ \hline 63 & 999 \\ \hline 84 & \\ \hline 63 & \\ \hline 217 & \\ \hline 63 & \\ \hline 154 & \end{array}$	$\begin{array}{r l} 7344 & 18 \\ \hline 72 & 407 \\ \hline 144 & \\ \hline 126 & \\ \hline r. 18 & \end{array}$
---	---	---

### 5.2. Situations où Restes (partiels) sont plus grands que le Diviseur

Le schème "partager/distribuer" fonctionne très bien; il est également coordonné avec une règle contraignante liée à la numération: "9 est le plus grand chiffre possible au quotient." Lorsque se présente la possibilité de contrôler le calcul par le rapport reste/diviseur, l'élève ne résout pas ce problème mais il le transporte avec lui jusqu'à l'indice de fin du calcul (la dernière colonne). On a alors une succession de 9 au quotient, comme précédemment, ou comme dans l'exemple 4. Le schème "partager/distribuer" peut par contre s'imposer très fort pour résoudre le problème du rapport reste/diviseur, au point de délaissé, cette fois, les règles de numération associées. On observe alors des nombres à deux chiffres au quotient, exemple 5. Au lieu d'un nombre à deux chiffres on trouve également une succession de deux nombres au quotient pour un seul et même dividende; celui-ci a fait l'objet de partages successifs, exemple 6.

$\begin{array}{r l} 60363 & 9 \\ \hline 45 & 5999 \\ \hline 153 & \\ \hline 81 & \\ \hline 626 & \\ \hline 81 & \\ \hline 5453 & \\ \hline 81 & \\ \hline 5372 & \end{array}$	$\begin{array}{r l} 60363 & 7 \\ \hline 56 & 85 \underline{12} 3 \\ \hline 43 & \\ \hline 35 & \\ \hline 86 & \\ \hline 84 & \\ \hline 23 & \\ \hline 21 & \\ \hline 2 & \end{array}$	$\begin{array}{r l} 13117 & 13 \\ \hline 13 & 10081 \\ \hline 0117 & \\ \hline 104 & \\ \hline 13 & \end{array}$
---	---	--

L'exemple 6 illustre une forme du schème où la recherche d'un reste inférieur au diviseur se dispense d'une autre manière des règles de la numération de position. Ce fonctionnement peut aller jusqu'à prendre la forme d'une succession de 1 au quotient, correspondant à un enchaînement de soustractions successives.

$$\begin{array}{r|l}
 25125 & 125 \\
 \hline
 125 & 111 \\
 \hline
 126 & \\
 \hline
 125 & \\
 \hline
 125 & \\
 \hline
 125 & \\
 \hline
 125 & \\
 \hline
 125 & \\
 \hline
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l}
 540060 & 901 \\
 \hline
 901 & 11111 \\
 \hline
 4499 & \\
 \hline
 901 & \\
 \hline
 3598 & \\
 \hline
 901 & \\
 \hline
 2697 & \\
 \hline
 901 & \\
 \hline
 1796 & \\
 \hline
 901 & \\
 \hline
 8956 & \\
 \hline
 \end{array}$$

### 5.3. Situations où le Dividende est plus petit que le Diviseur

Dans ces cas le schème "partager/distribuer" n'est pas alimenté; d'où :

- a. Passage à la colonne suivante et absence de 0 au quotient.
- b. En l'absence de colonne suivante, arrêt du calcul.

$$\begin{array}{r|l}
 7344 & 18 \\
 \hline
 72 & 48 \\
 \hline
 144 & \\
 \hline
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l}
 18202 & 901 \\
 \hline
 1802 & 2 \\
 \hline
 182 & \\
 \hline
 \end{array}$$

### 5.4. Situations avec reste final plus petit mais proche du diviseur.

Le schème fonctionne encore, malgré l'indice de fin du calcul; il est alimenté du fait d'un "gros" reste, et ce de deux façons:

- a. zéro supplémentaire au quotient
- b. inscription de 1 au quotient

$$\begin{array}{r|l}
 568 & 368 \\
 \hline
 368 & 10 \\
 \hline
 200 & \\
 \hline
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l}
 7829 & 39 \\
 \hline
 78 & 21 \\
 \hline
 29 & \\
 \hline
 \end{array}$$

## 6. Les erreurs dans la perspective de la théorie de schèmes algorithmes.

Si le caractère organisé des conduites est déjà largement présent dans les travaux sur les erreurs systématiques, il restait à préciser la part qui, dans ces organisations est faite aux connaissances. Les considérations ci-dessus montrent, à notre avis, qu'il n'est pas superflu de faire recours à la notion de schème, et de schème-algorithme (Vergnaud 1991). Dit autrement, nous proposons maintenant une manière d'intégrer dans le modèle explicatif de ces erreurs les opérations sur les nombres, au-delà de celles sur les signes.

Vergnaud définit le schème comme "l'organisation invariante de la conduite pour une classe de situations données" (p.136). Il faut comprendre cette organisation à la fois d'un point de vue structural (la conduite est organisée) et d'un point de vue fonctionnel (le schème est un organisateur). La notion de schème prend précisément en compte les connaissances à l'oeuvre

dans une conduite organisée : "C'est dans les schèmes qu'il faut rechercher les connaissances-en-acte du sujet, c'est-à-dire les éléments cognitifs qui permettent à l'action du sujet d'être opératoire." (136), : " Un schème repose toujours sur une conceptualisation implicite" (139). Evoquant des "schèmes-algorithmes, Vergnaud note qu' "il peut certes y avoir des ratés dans l'exécution automatisée d'un schème, mais ce ne sont pas ces ratés qui rendent compte des principales erreurs"(139). Nous pourrions compléter la notion d'erreur systématique par celle de schème dans la mesure où les inventions erronées des élèves à propos des algorithmes mettent véritablement en jeu des coordinations imparfaites de connaissances; c'est ce que nous avons montré à propos de l'opération de division.

Les différentes formes (procédurales et sémiotiques) que prennent les différentes inventions des élèves sont ce qu'on pourrait appeler avec Inhelder et Cellérier (1992) des "réalisations psychologiques différentes d'un même schème", ici celui de division de nombres. Ce schème a, par rapport à ces différentes réalisations psychologiques, la propriété demandée par Piaget à tout schème, celle de tendre à la généralisation. Il organise, en amont, une variété de conduites sur une variété de tâches. Il s'agit alors de comprendre les erreurs (certaines tout au moins) comme des formes provisoires de ce schème en construction; elles sont des réalisations psychologiques, encore inadaptées à l'algorithme, mais fruits de compromis entre diverses connaissances qu'un schème achevé coordonnerait. Ces formes que nous avons appelées "hybrides" peuvent avoir été forgées par une progression didactique et être négociées par l'élève comme une combinaison originale d'autres schèmes nécessaires à la réalisation de l'algorithme : nombre, soustraction, valeur de position, partage par exemple. Dans le cas de l'opération de division la partition du nombre prend une place centrale; cette partition s'effectue en utilisant la numération écrite de position (on peut découper l'écriture du nombre pour diviser une partie du nombre, puis une autre, etc.); la numération de position permet ainsi de prendre la part la plus grande en fonction de chaque pas de l'écriture du quotient. Il faut donc combiner différentes connaissances numériques pour diviser deux nombres, et non seulement enchaîner des règles sur les signes.

Sur la question du fonctionnement des erreurs systématiques, la notion de schème est aussi un apport. En effet le schème prend en compte le caractère dynamique du fonctionnement de l'erreur en tant qu'instrument d'assimilation, pourvu de capacités d'accommodation; il est l'unité cognitive qui rend possible les inventions, en jouant un rôle organisateur des règles. Ainsi, dans les cas d'apprentissages, "on va assister à l'amorçage successif de plusieurs schèmes, qui peuvent entrer en compétition et qui, pour aboutir à la solution recherchée, doivent être accommodés, décombinés et recombinaés " (Vergnaud, p.136). La dimension fonctionnelle des erreurs est alors à souligner non seulement pour décrire le mécanisme de ces erreurs (impasse-réparation) mais aussi pour comprendre leur rôle heuristique. Notre classification a montré comment différentes situations de calculs de divisions peuvent offrir diverses résistances aux schèmes assimilateurs des élèves, schèmes qui demandent à être coordonnés avant de former le schème-algorithme de la division écrite.

## **7. Conclusion.**

Les examens d'erreurs d'élèves dans leur effectuations de divisions écrites semblent bien justifier les explications en termes de schèmes. En effet ce qui apparaît clairement c'est le

caractère organisé et dynamique de beaucoup d'erreurs: dynamique en ce sens que le calcul forme un tout se déroulant de manière fluide, en négociant pour ainsi dire les différentes contraintes de l'algorithme; les unes sont jugées incontournables et d'autres négligeables afin d'arriver sans encombre au terme du calcul. Ce sont des erreurs systématiques certes, mais aussi organisées autour de connaissances numériques, et découvertes par adaptation aux propriétés de la situation.

Une question essentielle pour comprendre les erreurs observées a trait au fonctionnement didactique de ces erreurs. Bien que nous ne l'ayons pas abordée ici, notre équipe travaille aussi sur cet axe. Le lecteur intéressé pourra se référer, entre autres, au travail de J. Portugais qui l'a étudiée dans le cadre d'une recherche sur la formation des enseignants (Portugais 1992).

## Références

- BROWN J.S. and BURTON R.R. (1978) Diagnostic model for procedural bugs in basic mathematical skills. Cognitive Science, 2, 155-192.
- BROWN J.S. and VAN LEHN K. (1980) Repair theory : A generative theory of bugs in procedural skills. Cognitive Science,4, 379-426.
- BRUN J. , CONNE F. , RETSCHITZKI J. (1989). L'étude des algorithmes de calcul dans la transmission et la constitution des connaissances numériques. Projet de recherche FNRS. Rapport final, 1991.
- CONNE F. et BRUN J. (1991) Analyse de brouillons de calcul d'élèves confrontés à des items de divisions écrites. Proceedings of PME XV, Assisi, Italy.
- CORDEY P.-A. (1991) Qui a peur de l'erreur? Pas moi!!! Repérage, description, classement et analyse des erreurs apparaissant lors du traitement de l'algorithme de division. Mémoire de licence de la section de Sciences de l'Education, F.P.S.E., Université de Genève, 159 p.
- INHELDER B. , CELLERIER G. (1992) Le cheminement des découvertes de l'enfant. Neuchâtel, Paris, Delachaux et Niestlé.
- PORTUGAIS J. (1992) Didactique des mathématiques et formation des enseignants; le cas des erreurs de calcul. Thèse. Faculté de psychologie et des sciences de l'éducation. Université de Genève.
- VAN LEHN K.(1988) Toward a theory of impasse-driven learning. in Heinz Mandl and Alan Lesgold, eds, Learning issues for intelligent Tutoring systems, p. 19-41, New-York, Springer Verlag.
- VERGNAUD G. (1985) Concepts et schèmes dans une théorie opératoire de la représentation. Psychologie Française, 30, 3-4, 245-252.
- VERGNAUD G. (1991) La théorie des champs conceptuels. Recherches en didactique des mathématiques, 10/2.3, 133-170.