



Introduction

François Conne, Gisèle Lemoyne

► To cite this version:

François Conne, Gisèle Lemoyne. Introduction. Lemoyne G. & Conne F. Le cognitif en didactique des mathématiques, Presses Universitaires de Montréal, pp.7-28, 1999. halshs-01535951

HAL Id: halshs-01535951

<https://shs.hal.science/halshs-01535951>

Submitted on 9 Jun 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Données de catalogage avant publication (Canada)

Vedette principale au titre:

Le cognitif en didactique des mathématiques
(Éducation et formation)

Comprend des réf. bibliogr.

ISBN 2-7606-1743-2

1. Mathématiques – Étude et enseignement
2. Cognition. 3. Connaissance, Théorie de la.
4. Pédagogie. 5. Apprentissage.

I. Lemoyne, Gisèle, 1943-

II. Conne, François. III. Collection.

QA11.R43 1999 510'.71 C99-940751-1

Les Presses de l'Université de Montréal remercient le ministère du Patrimoine canadien du soutien qui leur est accordé dans le cadre du Programme d'aide au développement de l'industrie de l'édition.

Les Presses de l'Université de Montréal remercient également le Conseil des Arts du Canada et la Société de développement des entreprises culturelles du Québec (SODEC).

Dépôt légal: 3^e trimestre 1999

Bibliothèque nationale du Québec

© Les Presses de l'Université de Montréal, 1999

Introduction

François Conne
Université de Genève

Gisèle Lemoyne
Université de Montréal

La tenue d'un symposium en didactique des mathématiques, dans le cadre des activités du Réseau international de recherche en éducation et en formation (REF), nous est apparue une excellente occasion d'inviter des chercheurs européens et québécois ayant une pratique de recherche en didactique des mathématiques à situer la place et le rôle du cognitif dans leurs recherches théoriques et expérimentales. Cet ouvrage s'inscrit donc dans la continuité du travail amorcé lors de ce symposium¹. Il comporte deux parties.

Dans une première partie, l'examen des rapports entre le cognitif et le didactique donne lieu à des réflexions et élaborations théoriques permettant de mieux appréhender la complexité de ces rapports, proposant ou renouvelant certaines perspectives de recherche en didactique des mathématiques. Dans une seconde partie, c'est par l'analyse d'activités et de pratiques d'enseignement des mathématiques et de recherche en didactique des mathématiques qu'une clarification des rapports entre le cognitif et le didactique est réalisée et que des questions originales sont formulées. Pour orienter la lecture de cet ouvrage et mieux présenter les contributions des différents chercheurs, nous jugeons important d'amorcer une réflexion sur les fondements, les finalités, les objets et les méthodes de la didactique des mathématiques.

1. La tenue de ce symposium a été rendue possible grâce à une subvention collective du Conseil de Recherches en Sciences Humaines du Canada (CRSHC) et aux subventions de recherches individuelles provenant du même organisme octroyées aux chercheurs de l'Université de Montréal qui participent à cet ouvrage.

Il est bien difficile de définir les mathématiques. Si la « boutade » de Russell: « Une science dans laquelle on ne sait jamais de quoi on parle, ni si ce que l'on dit est vrai » n'aura pas été du goût de tout le monde, elle n'en dénote pas moins que les mathématiques ne nous livrent pas seulement des réponses sur le monde mais nous posent aussi de redoutables questions sur elles-mêmes. Nous nous demandons alors par quel retournement humoristique nous en sommes venus à nous associer au projet de fonder cette science, la didactique des mathématiques, qui prétend étudier les phénomènes d'enseignement spécifiques aux contenus mathématiques. Heureusement, cette question n'est embarrassante qu'en apparence. Il suffira pour nous en convaincre de considérer que notre entreprise dépend moins de l'ontologie des mathématiques que des savoirs et des pratiques de cet art.

Chaque discipline (scientifique, philosophique, etc.) saisit la réalité selon certains axes, autour de certaines choses qui lui sont propres. En ce qui concerne l'épistémologie, nous dirons que le savoir compte parmi ses choses premières (pour la physique, la matière serait une telle chose). Comme l'a montré Conne (1992, 1996), le savoir lui donne une prise sur la réalité qui l'occupe. De même que la physique ne s'arrête pas aux choses qu'elle rencontre expérimentalement, de même l'épistémologie ne s'arrête pas aux savoirs. Son objet se situe derrière ou au-delà, et entend en faire abstraction. Ses moyens d'approche sont divers: philosophie analytique, épistémologie génétique, sciences cognitives, anthropologie culturelle, etc. Toutes ces entreprises reposent sur des questions qui nous viennent avec les savoirs. Comme par exemple, celle évoquée plus haut, portant sur l'objet des mathématiques, ou encore, toute proche, celle portant sur l'adéquation des mathématiques à la réalité physique, etc. Nous dirons donc que ce qui autorise chacune de ces approches épistémologiques, ce sont certains savoirs. Par contre, les didactiques sont des sciences pour qui les savoirs sont devenus les objets. Certes, on peut réfuter sur ce point nos affirmations et revendiquer les savoirs comme objets de l'épistémologie. Il suffit de nous accorder sur la définition de nos termes. Nous nous contenterons cependant de faire remarquer qu'un tel choix reviendrait à faire une seule pièce du couple épistémologique/didactique, et mettrait paradoxalement le didactique à la source de l'épistémologique. Bien qu'une telle éventualité nous amuse, nous avouons ne pas pouvoir vraiment la prendre au sérieux. En effet, nous considérons pour notre part que ce sont bel et bien les résultats des épistémologies qui nous autorisent à penser des disciplines pour lesquelles le savoir aurait statut d'objet. Pour nous le projet de fonder la didactique des mathématiques ne s'entend que comme une entreprise informée de l'épistémologie. Voilà pourquoi nous dirons que, si l'épistémologie « succède » au savoir, elle « précède » les didactiques.

Cela dit, est-il utile de préciser que faire état de ce donné épistémologique dépasse nos moyens? Une fois de plus nous nous résignerons à quelques évocations, conscients de ce que cela exige de nos lecteurs. Qui plus est, et nous voilà en pleine transposition, notre référence se fera par l'entremise d'un auteur. Dans son ouvrage intitulé *Comprendre des énoncés, résoudre des problèmes*, Descaves (1992) fait une introduction remarquable de ce donné épistémologique. Pour cela, il a choisi de se fonder sur une synthèse proposée par Petitot (J. Petitot, Séminaire EHESS, *Idéalités mathématiques et réalité objective*, 1987/1988: voir Descaves, 1992, p. 13) auquel il emprunte deux figures que nous reproduisons ci-dessous, à notre manière.

Figure 1. Schématisation et modélisation

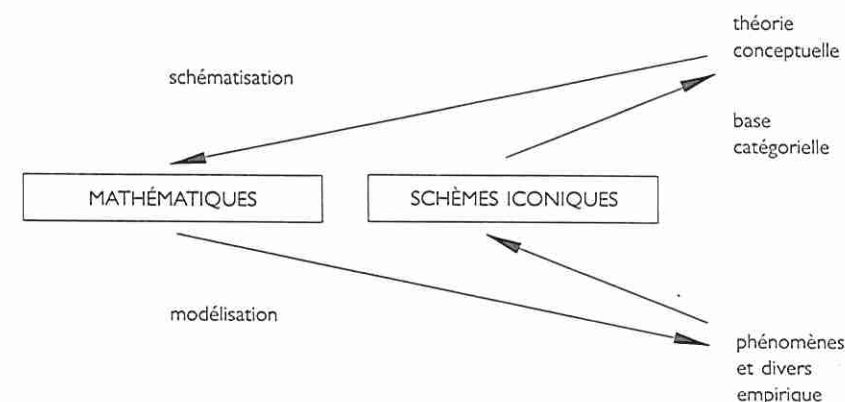
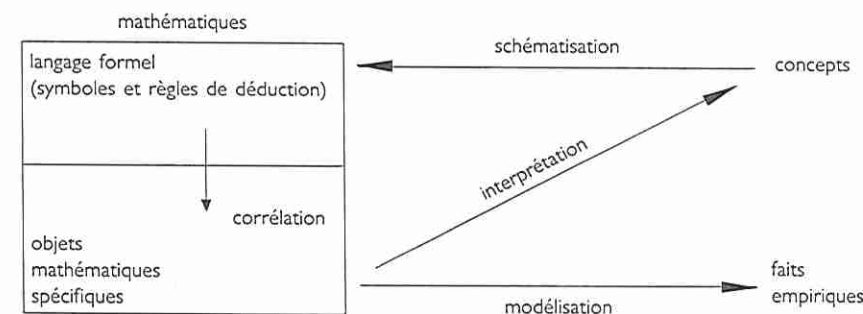


Figure 2. Le « jeu à quatre » des relations entre réalité et mathématiques



Nous n'allons bien entendu pas commenter ces tableaux, ni les expliquer, ni les discuter, ni même dire si nous adhérons ou non à une telle vision des choses. Pour l'heure, nous vous renvoyons à votre jugement ainsi qu'à la lecture de ces auteurs. Nous les examinerons pour ce qu'ils donnent. La citation d'un passage du commentaire de l'auteur (Descaves, 1992, p. 12) nous permettra de mieux nous faire comprendre :

La mathématisation des phénomènes empiriques n'est pas directe. Pour comprendre la possibilité d'une mathématisation des phénomènes issus du divers empirique, il faut postuler l'existence de processus de catégorisation, liés à la façon dont le monde se donne au sujet et aux capacités perceptives et cognitives de ce dernier. Le monde se donne sous forme d'un apparaître organisé morphologiquement. Le sujet extrait des catégories à partir de lui et c'est à partir de bases catégorielles que s'élaborent les théories conceptuelles. De nombreuses sciences humaines en restent d'ailleurs à un tel niveau conceptuel descriptif, sans pouvoir trouver les objets mathématiques modélisateurs qui leur permettraient de passer à un niveau explicatif.

Bien que tel n'en soit pas la typographie, ce paragraphe constitue à nos yeux l'équivalent d'une « légende » pour les figures 1 et 2. Précisons les choses : le livre d'où nous l'avons extraite est un ouvrage de didactique des mathématiques ; par contre, l'auteur y fait référence, via les figures de Petitot et ses écrits, au savoir épistémologique. Pourquoi donc faut-il à la transmission de ce savoir d'épistémologie un commentaire de présentation et d'explication ? Pour vous le rendre accessible. Nous sommes bel et bien en terre didactique.

Il est possible de développer nos considérations en empruntant les propres termes de ces figures et c'est à cette tentative de les « faire parler » que nous allons vous convier. Qui plus est, nous nous proposons d'y recourir à double titre, d'une part pour aborder la question des contenus en didactique, et d'autre part pour situer l'ensemble des contributions de cet ouvrage.

Rappelons que cet ouvrage porte sur les rapports entre le cognitif et le didactique. Pourquoi donc faire ce détour par l'examen des rapports entre épistémologie et didactique, et qui plus est, pourquoi donc cet intérêt pour les démarches de recherches ? Nous empruntons à Brousseau (1996a, p. 45) la définition suivante de la didactique des mathématiques : « La didactique des mathématiques étudie les activités didactiques, c'est-à-dire les activités qui ont pour objet l'enseignement, évidemment dans ce qu'elles ont de spécifique aux mathématiques. » La question de la spécificité aux mathématiques convient d'être précisée. La référence au donné épistémologique (et en particulier au schéma de Petitot/Descaves) nous est nécessaire pour ce qu'elle nous apprend sur les contenus de connaissances à enseigner, en l'espèce les mathématiques. Dans l'enseignement le

contenu intervient deux fois : enseigner les mathématiques c'est faire apprendre à d'autres les mathématiques. Les activités didactiques englobent ainsi des activités cognitives « témoignant de la capacité de modifier l'action selon l'expérience acquise, c'est-à-dire susceptibles d'utiliser de manière intégrée des représentations d'origine diverse... » et démontrant une capacité « d'agir par connaissance » (Proust, 1997, p. 27). Entreprendre une recherche en didactique des mathématiques, c'est alors considérer qu'il y a une réalité didactique connaissable au-delà de cette activité didactique. C'est-à-dire qu'il y a un contenu de connaissance et de savoir didactiques.

Mais comment comprendre l'articulation des contenus à enseigner (les contenus mathématiques) et les contenus didactiques eux-mêmes ? Les approches classiques et désormais révolues des questions didactiques dissociaient ces deux types de contenus et considéraient que le didactique était par nature distinct du cognitif. Dans cet ordre d'idées, il suffisait de savoir comment les connaissances se constituaient et d'adapter l'action didactique proprement dite à ce donné épistémologique. Comme le stipule clairement la définition de Brousseau, la didactique des mathématiques s'est inscrite en faux contre cette conception et a au contraire postulé un lien étroit entre les contenus d'enseignement et les contenus didactiques. Cela étant rappelé, considérons l'enseignement comme une activité en soi. Comme toute autre activité, elle donne lieu à un apprentissage, et nous pouvons étudier ce que nous apprenons nous-mêmes à enseigner les mathématiques. Se posent donc des questions du type suivant. Qu'apprenons-nous à l'apprentissage réussi ou raté des élèves, qu'apprenons-nous à comparer des enseignements, à chercher à les contrôler a priori ? Ces questions ne font que dire à leur manière que la didactique comme toute autre science se constitue en réponse à la résistance qu'oppose le réel à nos entreprises (en l'occurrence, celle d'enseigner les mathématiques). Nous pouvons alors mettre en perspective ces deux questions et nous demander comment les connaissances mathématiques et les connaissances didactiques (des mathématiques) se constituent (sont produites, se développent spontanément ou culturellement. Nous pouvons d'autant mieux le faire que, comme le souligne la remarque de Descaves sur les sciences humaines, le schéma de Petitot/Descaves est suffisamment général pour concerner les deux types de contenus. Nous nous y sommes donc référés comme à une norme concernant tout autant les contenus à enseigner que les contenus à découvrir (de la part des chercheurs didacticiens). Telle est donc notre proposition pour aborder l'étude de l'articulation entre contenus didactiques et contenus d'enseignement. Telle est la raison de notre détour épistémologique.

Toutefois, si les principes sont clairement indiqués, les réalisations

(didactiques) restent à faire. Examinez les flèches, et ne vous trompez pas sur ce qu'elles symbolisent : ce sont des rapports fonctionnels et non des transformations. Une question qui occupe la didactique sera de savoir comment, à partir d'un tel donné, revenir à des actions et transformations, et aussi, bien sûr, sur quel terrain cela va se passer, en particulier si cela peut être pensé comme un retour au divers empirique de départ ou non. Le fait qu'en définitive tel schéma que nous livre telle élaboration épistémologique puise dans ce divers empirique ne nous assure en effet aucunement sa restitution. En effet, « aller au-delà du savoir, aller voir derrière, en faire abstraction » n'est pas à même de nous dévoiler de nouveaux accès à cette réalité. À notre charge donc de retrouver le chemin des choses premières de l'épistémologique (en vrac, les savoirs, les pratiques, etc.). En abordant ainsi le continent didactique, nous voilà engagés à « repartir pour un tour ». Au passage, le savoir aura passé du statut de chose (de la réalité épistémologique) à celui d'objet (de la didactique). Est-il nécessaire d'ajouter que ce que nous apprenons dans l'entreprise ne se borne pas à mieux comprendre le didactique, ni même à mieux enseigner, mais que la démarche consistant à apprendre à retourner au divers empirique a aussi une portée épistémologique ?

Il peut paraître bizarre de se dire que l'on est réduit à parcourir de nombreuses fois le schéma idéal de Petitot/Descaves, mais c'est bien ce que dit la dernière phrase de la légende de Descaves qui évoque en passant les sciences humaines (celles qui n'ont pas encore trouvé les objets mathématiques modélisateurs qui leur permettraient de passer d'un niveau descriptif à un niveau explicatif). Nous ne pouvons bien entendu pas nous empêcher de prendre la remarque pour nous et de nous demander ce qu'il en est pour la didactique des mathématiques elle-même. (Qu'il soit clair que nous ne nous prononcerons pas ici sur la question de savoir si oui ou non cette discipline serait une science humaine.) Les figures 1 et 2 sont des exemples de schémas que peut nous fournir l'épistémologie. Ces derniers ne sont certes pas « tombés du ciel », mais sont le produit d'un travail se référant à une foule de modèles (tant tirés de l'épistémologie, de la psychologie ou des sciences cognitives ; par exemple, modèles behavioristes, ou modèles inspirés de la biologie, modèles de l'épistémologie génétique, modèles d'intelligence artificielle et, parmi ces derniers, modèles connexionnistes, etc.). Et ces modèles à leur tour renvoient à des objets mathématiques et à leur langage.

On constate donc ceci. Si l'on peut penser avec Descaves qu'en ce qui concerne la didactique des mathématiques les objets mathématiques modélisateurs nous manquent, ce n'est pourtant pas faute de disposer de schémas (comme ceux qui nous sont proposés), ni de modèles (comme ceux qui sont à l'origine de l'élaboration de ces schémas), ni d'objets que

ces modèles dénotent ! Et comme il s'agit de mathématiques, l'étonnement n'est que plus grand de voir que ces objets ne sont pas encore les nôtres ! Pourtant, telle est la leçon de la transposition didactique, le savoir s'interpose entre ces objets et les concepts et objets de la didactique, les savoirs nous interdisent un chemin direct de l'épistémologique au didactique. Ni les connaissances, ni les concepts ne peuvent être considérés dans des rapports directs non médiatisés par les savoirs, il n'est pas possible non plus de les confondre avec eux. Dits dans les termes des figures 1 et 2, et en supposant corrects les schémas qu'elles illustrent, cela donne que nous ne pouvons pas remonter des modèles aux objets, ni même les déduire tels quels des schémas épistémologiques, ou du moins que nous ne pourrions pas le faire tant que nous ne serons pas capables d'établir effectivement chacun des maillons proposés : catégorisation, conceptualisation, schématisation, modélisation et interprétation. Comment cela se passe-t-il dans les faits ?

Nous pouvons utiliser le schéma épistémologique pour situer les démarches des chercheurs. L'entreprise didactique ne part pas de zéro, elle débute avec des contenus à enseigner, c'est-à-dire des savoirs et des connaissances se référant à une certaine réalité (un certain divers empirique), aux catégorisations, conceptualisations, objectivations et modélisations qui les constituent ainsi qu'aux relations de schématisation, de modélisation et d'interprétation qui en assurent la cohérence. Le divers empirique auquel se réfère la construction mathématique ne comporte pas la dimension didactique, et c'est donc à une nouvelle réalité que l'entreprise d'enseignement nous confronte. Les résistances que nous y rencontrons nous obligent à réviser nos a priori, c'est-à-dire à recatégoriser, reconceptualiser, remodeler, etc. Poser la question des rapports entre cognitif et didactique à des chercheurs en didactique est une mise en évidence de ce travail. Justement, le point sensible se situe à l'articulation entre le contenu à enseigner et le savoir didactique lui-même. En effet, le chercheur confronte deux ordres de contraintes, celles d'un héritage de pensée (le donné mathématique et épistémologique) et celles de la réalité didactique elle-même. S'il reçoit de certaines disciplines des concepts, des modèles pouvant orienter sa réflexion, ceux-ci ne viennent pas seuls, mais accompagnés de contraintes sur les données et les arguments admissibles. Or la satisfaction de ces dernières comporte toujours des risques de substituer d'autres objets à l'objet d'étude initial. Le chercheur rencontre aussi la nécessité de définir des concepts, des schémas et des modèles originaux ou encore d'élargir les études sur la connaissance. Les textes rassemblés pour cet ouvrage témoignent à leur manière de cet état des choses : les chercheurs en sont à ce point d'établir, non sans peine, différents maillons de ce type (de ceux que présentent nos figures). Notre lecture des contribu-

tions des différents chercheurs montre cet effort « d'émancipation vis-à-vis des disciplines de référence » passant par une transformation des « rapports que la didactique, comme nouveau champ d'études, entretient avec ces disciplines » (Brun, 1996, p. 10). On s'aperçoit bien comment les avancées des sciences épistémologiques invitent les chercheurs didacticiens à y glaner schémas, modèles, objets, et autres langages formalisés. Chacun des textes peut être pris comme le récit d'une exploration.

Choisissons donc une entrée parmi d'autres, celle des modèles. Dans cet ouvrage, vous verrez des chercheurs s'attelant à les travailler. Pour notre propos, nous soulignerons trois aspects de ces études (trois moments que nous pouvons rapporter à la figure 2): (1) présentation d'un modèle disponible dans la littérature et dont l'auteur pense qu'il sera pertinent; (2) interprétation d'un modèle en le confrontant aux concepts didactiques; (3) modélisation d'un aspect du divers empirique didactique. Chacun des textes nous livre, peu ou prou, ces trois aspects. Certes, les orientations, les accents et les combinaisons sont fort variés. Certains exposés se concentrent sur la présentation et restent très allusifs sur les deux autres aspects (contribution de Sophie René de Cotret). D'autres discutent de nouveaux concepts en exhibant de nouveaux modèles (contribution de Jean Portugais). Certains se concentrent sur la validation d'une modélisation par l'exposé de l'interprétation qu'elle permet (contribution de Ruhal Floris). D'autres profitent de la modélisation pour découper dans le divers empirique un champ d'expérience (contribution de Benoît Côté). D'autres encore (contribution de Marie-Hélène Salin) contrastent, sur la base d'une modélisation commune, un réel modélisé à un réel interprété... Comme nous allons l'exposer ci-dessous, les liens et les rencontres surabondent. Pourtant l'image d'ensemble reste assez touffue et ne nous livre pas encore une belle ordonnance. Le découpage en deux parties de cet ouvrage a donc un caractère heuristique.

Première partie: modélisations des rapports du cognitif au didactique

La première partie de notre ouvrage inclut des textes proposant diverses modélisations du rapport du cognitif au didactique. Les entrées pour ces modélisations sont fort variées et reflètent un réel didactique polysystémique.

Poursuivant ses études sur la conversion connaissance-savoir, François Conne (chapitre 1) s'intéresse à « l'acte même d'enseigner les mathématiques à des élèves ». Pour examiner cet acte, il propose une articulation de pratiques se manifestant par des activités plus ou moins nouées, indices

plus ou moins prégnants de ces pratiques. Si faire des mathématiques permet d'accéder aux pratiques mathématiques, faire faire des mathématiques permet à des élèves d'accéder à ces pratiques. Faire des mathématiques, c'est « créer et animer des objets de pensée », écrit Conne. Mais, lorsque le mathématicien fait des mathématiques, il est soumis à des règles, des normes, des habitudes sur la manière de faire, en raison de son appartenance à une institution. Faire des mathématiques suppose donc des interactions de sujets avec des milieux. « De telles interactions », selon Conne, « sont au centre de toute situation où il est question de mathématiques et a fortiori de toute situation didactique ou d'enseignement. » De telles interactions, pourrions-nous ajouter, sont en résonance avec le statut d'objet que la didactique confère au savoir.

Pour juger de la complexité de l'acte d'enseigner, Conne invite à analyser la distance entre l'activité enseignante et l'activité enseignée. Si l'enseignant connaît bien les mathématiques qu'il enseigne, il lui est plus facile de concevoir des moyens de faire faire des mathématiques aux élèves; la connaissance des mathématiques lui permet aussi de contrôler la situation. Mais, plus le maître a prise sur les mathématiques et la situation, plus il peut lui être difficile d'apprécier ce que font les élèves et de prendre la mesure de la distance entre son activité mathématique et celle des élèves. Regarder ce que produit l'activité enseignante et l'activité enseignée nécessite que l'enseignant soit informé ou attentif aux issues possibles et souvent imprévisibles de l'enseignement pour les élèves. Cela suppose aussi que dans l'enseignement, les mathématiques ne soient pas « versées du côté de l'objet, du dispositif de l'activité [...] qui du coup devient un emblème scolaire de l'objet mathématique et des pratiques mathématiciennes »; éviter ce piège n'est pas chose facile.

La seconde partie du texte de Conne est consacrée à l'examen des incertitudes de l'enseignement et à l'analyse de théories, dont la théorie des situations, qui pourraient permettre de mieux définir le « jeu d'une didactique qui tienne compte du cognitif comme facteur adverse, d'une didactique forcée à adapter ses moyens aux contraintes de son milieu ». Les analyses a priori des situations fournissent des moyens de lire in situ le produit de l'activité enseignante, mais elles ne peuvent permettre une « prévision exacte de ce qui va se passer, ni du moment où cela adviendra ». Regarder ce que produit l'activité enseignante est ainsi tenter d'établir une correspondance entre les pensées respectives des élèves et de l'enseignant.

Les interactions de connaissances dans les situations didactiques sont constitutives d'objets mathématiques. Elles peuvent permettre avec plus ou moins de succès de faire accéder les élèves à des pratiques mathématiques. Reconnaître les activités mathématiques de l'enseignant, en amont,

en fait

à côté et en aval de celles de l'enseigné, ouvre un autre « divers empirique » pour la didactique; reconnaître que l'interprétation de ces activités influe sur le pilotage de l'échange didactique débouche sur des questions de sens, de relations entre « intelligence et intentionnalité ». Dans cet ouvrage, Jean Portugais examine de telles questions en associant aux interactions de connaissances des interactions d'intentions.

Pour conduire un tel examen, Portugais développe un modèle des intentions didactiques (chapitre 2) qui repose fondamentalement sur une distinction entre l'*Intentio*, l'*Intentionnalité* et les *intentions didactiques*. Cette distinction prend appui sur la notion d'institution didactique définie par Chevallard (1996); l'école, la classe, la situation d'enseignement sont ainsi des institutions. On peut envisager des rapports différents à des objets de ces institutions selon la position du sujet; on peut également envisager d'autres rapports plus personnels, non institutionnels. Ainsi, « le cognitif ne se distingue pas du didactique en s'opposant à lui, il lui est plutôt intégré en raison du fonctionnement intentionnel des sujets et des institutions », écrit Portugais. L'*Intentio*, l'*Intentionnalité* et les intentions didactiques témoignent de l'ensemble de ces rapports institutionnels et personnels. L'*Intentio* est marquée par les « contraintes du passage des objets de savoir à des objets à enseigner »; elle émane de la lecture de ces contraintes par l'enseignant qui a la charge de réaliser les intentions du système à l'égard de ces savoirs; l'intentionnalité reflète les « intentions privées de l'enseignant en rapport » à un savoir à transmettre qui doit faire sens pour l'élève; les intentions didactiques constituent alors « la part actualisée de l'intentionnalité ».

L'étude du sens du savoir conduite par Portugais s'appuie sur la distinction faite par Conne entre connaissance et savoir; le savoir étant une connaissance utile, le sens est « un trait relatif à la reconnaissance d'utilité du savoir selon son utilisateur », nous dit Portugais. Il ajoute aussi que « la notion de savoir institué qualifie le savoir par le marquage de la reconnaissance du savoir utile en tant qu'objet social de la transaction en tant que contenu intentionnel de l'*Intentio* ». Le développement de ces énoncés rend intelligibles plusieurs des pratiques d'enseignement des mathématiques et plusieurs des pratiques des chercheurs en ce domaine. Selon une croyance partagée par plusieurs praticiens et chercheurs en didactique, le sens est conçu comme une « chose achevée », intrinsèque au savoir; s'il s'agit d'une telle chose, on peut penser qu'elle peut être plus ou moins achevée et qu'il est possible d'en découper divers paliers d'achèvement. C'est bien, comme le dit Portugais et comme le disent de diverses façons plusieurs des chercheurs dans cet ouvrage, ce qui sous-tend la mise en place d'une variété de dispositifs d'enseignement qui s'affirment toujours plus performants que les autres.

Mais, si « le sens est extrinsèque au savoir », dans le projet didactique, il est régi par l'« Intentionnalité tout entière, celles des institutions (I₀) comme celle du maître et celle de l'élève », déclare Portugais. Ainsi, il est possible que la signification du savoir visé par l'*Intentio* demeure inaccessible. Pour reprendre une réflexion faite par Conne, il est possible que « les savoirs et les connaissances induites chez l'enseignant par les conduites de l'enseigné influent sur le pilotage de l'interaction » et que cette interaction n'aboutisse pas au savoir visé. Associer les interactions de connaissances à des interactions d'intentions conduit enfin Portugais à définir trois types d'*Intentionnalité*: l'*Intentionnalité intrinsèque*, *comme-si* et *dérivée*. Il montre comment cette distinction permet de rendre compte du processus de conversion savoir/connaissance, en d'autres termes, de préciser le fonctionnement des processus de dévolution et d'institutionnalisation dans la théorie des situations didactiques (Brousseau, 1986a; Rouchier, 1991; Conne, 1992).

En posant le didactique comme le « lieu des phénomènes de mise en circulation des savoirs, c'est-à-dire de l'apprentissage provoqué par un jeu de conditions et de contraintes intentionnellement mises en place », Portugais s'est inspiré des travaux de Searle pour définir un modèle permettant d'interpréter certains phénomènes et certains concepts de la théorie des situations didactiques. René de Cotret (chapitre 3) emprunte, pour sa part, le modèle bio-cognitive de Maturana et Varela (1994) pour examiner « le rapport du sujet connaissant à l'objet de connaissance » sur le terrain de la didactique. Il ne s'agit pas ici de construire un modèle nouveau, mais d'utiliser un modèle de la compréhension humaine pour lire autrement le didactique.

Selon René de Cotret, Maturana et Varela essaient d'expliquer la communication et le partage social des connaissances. Ce qui autorise René de Cotret à utiliser le modèle de ces chercheurs est d'abord le caractère social de la relation didactique; c'est aussi le fait que, dans une situation d'enseignement, « les actions du sujet ne sont pas imposées par la situation, mais sont déterminées par sa structure propre, sa façon d'entrer en interaction avec la situation ». Cette affirmation forte lui permet de montrer la naïveté, voire le peu de pertinence didactique d'un enseignement par imposition de faits et de théories explicatives, d'interroger le bien-fondé des modèles behavioristes, associationnistes, d'étudier le processus d'attribution de connaissances par un observateur (en enseignement, le maître) à partir de conduites (des élèves) et, enfin, de re-lire certains concepts et résultats de la didactique des mathématiques, en particulier de ceux définis dans la théorie des situations didactiques.

Dans le texte de René de Cotret, c'est cette dernière action de re-lecture qui soulève des questions importantes sur les rapports de la didactique des

mathématiques aux autres disciplines. Le concept de milieu interprété à la lumière du modèle de Maturana et Varela, en faisant aussi un détour par le modèle piagétien de la genèse de la connaissance, a-t-il encore quelque parenté avec le concept de milieu défini par Brousseau? Les interprétations du processus d'institutionnalisation des connaissances, selon la conception définie par Rouchier et selon la conception développée par René de Cotret à partir du modèle de Maturana et Varela, peuvent-elles être rapprochées? Plusieurs autres questions pourraient être soulevées à partir de ce texte. Ces questions renvoient au problème que nous soulevons au début de l'introduction concernant l'absence d'objets mathématiques modélisateurs pour la didactique des mathématiques et l'interdiction d'une trajectoire directe de l'épistémologie au didactique ou encore, du cognitif au didactique.

Pour interroger le rapport du cognitif au didactique, Ruhul Floris (chapitre 4) considère d'abord une définition du cognitif inspirée des travaux en sciences cognitives, selon laquelle les systèmes sont dotés d'une mémoire et de la capacité de choisir entre au moins deux stratégies. Ces capacités engendrent une « *certaine incertitude structurelle* ». Cette définition est appliquée provisoirement aux sous-systèmes élève, maître et savoir du système didactique. Floris se demande où « *s'arrête le sous-système cognitif* » et formule les questions suivantes: « 1) partant d'une question se rapportant au système didactique, peut-on être amené à devoir étudier le sous-système cognitif? 2) partant d'une question sur le système cognitif comme sous-système du système didactique, peut-on être amené à devoir étudier le système didactique? »

La première question est examinée dans le cadre d'interactions didactiques, à propos d'une situation de géométrie; ces interactions se rapportant à des jeux dans le milieu des propriétés de figures et celui du dessin. Floris montre alors comment l'observateur entraîne la « *réouverture de la mémoire géométrique et le raccord des milieux* » et comment l'analyse en termes de jeu et de contrat permet la prise en compte du cognitif, c'est-à-dire du « *jeu des interactions des sous-systèmes* ». La seconde question est étudiée en se référant aux travaux sur l'enseignement des algorithmes de calcul et sur les erreurs des élèves (Brun, Conne, Cordey, Floris, Lemoyne, Leutenegger et Portugais, 1994). Floris s'intéresse aux modélisations informatiques de ces erreurs et montre que les modèles informatiques sont des systèmes cognitifs dotés de mémoire et de procédés de sélection de stratégies. L'idée de schème est peut-être, écrit-il, « *la prise en compte du non modélisable, de l'accumulation à long terme d'imprévu ou, encore, les prédictions de l'imprévu lui-même* ». La confrontation de cette hypothèse aux résultats de l'équipe de Brun l'amène à conclure ainsi: « *Le système cognitif est ouvert sur les objets didactiques à dispo-*

sition; le savoir et le contrat permettent de réduire l'incertitude dans le fonctionnement de ce système. » Le traitement du système didactique et de ses sous-systèmes en termes de systèmes cognitifs envisagés selon les définitions de l'intelligence artificielle et la prise en compte des modélisations cognitives et adidactiques dans l'étude de ce système et de ses sous-systèmes ouvrent sur de nouvelles problématisations des rapports entre le cognitif et le didactique.

Le tissu des rapports entre le cognitif et le didactique, comme le montrent les contributions précédentes, est façonné de matériaux et de motifs fort variés. Envisager le cognitif à sa cible, le didactique, oriente et délimite toutefois l'examen de ces rapports. C'est ce que nous apprennent les textes précédents. Le texte d'Alain Mercier (chapitre 5) montre également l'intérêt d'une telle approche. L'examen des rapports entre le cognitif et le didactique est ainsi réalisé « depuis la position de la didactique des mathématiques ». Les analyses qu'il conduit permettent d'enrichir notre lecture de l'enseignement des mathématiques et des questions complexes auxquelles se confrontent les chercheurs. Mercier définit la position de la didactique des mathématiques en référence à la théorie des situations qui, écrit-il, est « *une théorie didactique de la connaissance* ». Il s'agit d'une assertion importante que Mercier explicite par la suite. Le cognitif ainsi examiné par Mercier relève de la cognition institutionnelle et « des conditions de l'émergence d'une connaissance sociale qui soit fondée sur l'épreuve personnelle du problème que porte l'institution didactique ». Si Mercier ne nie pas que, comme le montrent les théories psychologiques de la connaissance, l'individu construit des connaissances, apprend sans qu'il y ait eu une intention didactique à son égard, il rappelle que, dans l'institution didactique, l'apprentissage est une réponse à une situation problématique conçue par le maître pour que l'élève rencontre les connaissances mathématiques et construise des rapports « *adéquats* » à des objets de savoir.

Les mathématiques apprises par les élèves viennent de la classe. L'élève y est sous le contrôle d'une intention didactique; il sait qu'il a les moyens cognitifs de faire face aux situations rencontrées. Sa position dans l'institution en est aussi garante, ce qui ne présume en rien des perceptions ou convictions personnelles de tel ou tel élève d'une classe vis-à-vis ses capacités cognitives et ses possibilités de réussite. Le rôle du maître s'en trouve considérablement simplifié. Ainsi, comme l'écrit Mercier: « *Le fait que, sur les vingt ou quarante élèves de la classe, un élève au moins puisse produire la connaissance attendue, suffit au professeur pour régler quotidiennement la question du cognitif [...] parce qu'il est ensuite assuré de pouvoir réaliser la diffusion de celle-ci.* » C'est le caractère outil du savoir mathématique qui permet de réaliser une tâche et rend possible la diffu-

sion; cette idée est essentielle pour comprendre que l'enseignement, dans sa version « traditionnelle », peut produire des apprentissages. Car la diffusion concerne minimalement les procédures et les algorithmes, d'où son pouvoir de clore une situation problématique et de régler l'avancée du temps didactique.

L'épreuve personnelle d'un problème, dimension psychologique de la cognition, est-elle alors toujours nécessaire? C'est une question fort importante formulée par Mercier. Le coût d'une telle épreuve, comme le rappelle Mercier, est généralement prohibitif. Il ajoute également que « l'étude des liaisons de la cognition personnelle à la cognition institutionnelle et le développement de dispositifs institutionnels de gestion de ces liaisons » constituent des projets difficiles à réaliser.

Sentant dans l'opposition du cognitif au didactique, une part trop belle faite à une perspective psychologique (pour ne pas dire psychologisante), Anna Sierpiska (chapitre 6) se propose de la déplacer vers celle plus classique qu'entretiennent le cognitif et l'épistémologique. Le cognitif serait ce qui a trait à l'individu, voire à la personne, tandis que l'épistémologique concerne la science, voire la culture. Elle écrit d'ailleurs ceci en conclusion: « [...] les approches strictement cognitivistes aux problèmes de l'apprentissage comme, par exemple, le constructivisme, posent problème tant au niveau théorique que pratique lorsqu'on veut les adapter ou s'en inspirer dans les recherches en didactique des mathématiques. » Quelle est la source d'un tel problème? Pour Sierpiska, il y a problème en raison de la centration sur l'individu, en l'occurrence l'élève dans une classe, au détriment d'un regard culturel sur le savoir enseigné. Or, la didactique s'intéresse à la genèse des connaissances non pas en soi, ni chez un individu, mais au cours de l'histoire; il s'agit d'un travail épistémologique qui est utile dans la mesure où il renseigne sur les moyens à prendre pour provoquer l'acquisition des connaissances chez les élèves. Il ne s'agit donc, pour elle, pas tant de savoir comment les connaissances se construisent pour y adapter notre didactique que de savoir comment initier les élèves à différents modes de pensée propres aux contenus visés. Dès lors, Sierpiska ramène la discussion à un schéma plus classique où le didactique est conçu comme un moment second par rapport à l'établissement des connaissances.

Au travers des exemples qu'elle commente, Sierpiska défend l'idée que des caractéristiques épistémologiques comme l'opposition entre pensée analytique et synthétique expliquent certains phénomènes didactiques observés. Ainsi, l'examen du sens dans certaines interactions didactiques que ce chercheur conduit s'appuie sur une distinction entre « la pensée dont l'objet est donné directement (l'intuition de l'objet ou l'idée) et la pensée dont l'objet est donné indirectement (pensée discursive, à propos

des relations entre les idées) »; cette distinction renvoie à d'autres distinctions: pensée analytique ou pensée synthétique; cognition rationnelle ou cognition empirique. On voit bien comment Sierpiska propose de substituer l'épistémologique au cognitif, envisageant la classe comme une unité de pensée; dans la classe, on va s'intéresser « aux modèles du sens », le sens étant une catégorie épistémologique. Mais, elle ajoute: « Les phénomènes d'enseignement des mathématiques ne peuvent se comprendre ni sans une réflexion épistémologique stricto sensu (sur la genèse et la validité des savoirs mathématiques) et l'étude des fonctions cognitives propres à la mathématique, ni sans aller au-delà de ces réflexions dans le domaine plus large de didactique. » Contenir une psychologie par trop envahissante, trancher entre deux ordres d'explications concurrentes des phénomènes didactiques (épistémologique ou cognitif), tel est le projet auquel Sierpiska nous a fait participer. Cette participation, pour reprendre une expression psychopédagogique bien connue, peut être qualifiée d'active. Ainsi, nous avons été étonnés du recours à un même terme « pensée » pour qualifier tantôt ce qui est propre à un sujet et tantôt ce qui est propre à un savoir; nous nous sommes également demandé quelle était la place spécifique réservée au didactique, à la transmission des connaissances.

Comme nous l'avons succinctement montré dans les résumés précédents, les contributions de chacun permettent d'identifier des points d'entrée du cognitif dans le didactique et de déterminer certaines conditions à l'enrichissement du didactique par le cognitif. La contribution d'André Rouchier (chapitre 7) réunit plusieurs des éléments traités dans les textes des précédents chapitres et montre comment l'évolution des rapports entre le cognitif et le didactique est porteuse de thématisations et de questions nouvelles.

Rouchier s'intéresse d'abord à « la part constituante » que l'analyse cognitive « a prise dans l'analyse didactique ». Cette part est apparue naturelle en raison des questions de « relations de connaissance entre certains objets, et notamment des objets mathématiques » dont se préoccupait et se préoccupe toujours la psychologie cognitive. Le traitement de relations de connaissance entre des objets mathématiques est devenu ainsi « objet » et « moyen » de recherche en didactique des mathématiques. Cette lecture des premières liaisons entre la psychologie cognitive et la didactique rejoint celle effectuée par Brun (1994).

Rouchier montre ensuite comment l'analyse conceptuelle (voir la théorie des champs conceptuels développée par Vergnaud) a permis et permet encore une « première prise de contact avec une question relative à un ou plusieurs objets mathématiques ». Il discute également des difficultés que rencontre l'application de cette analyse en didactique. L'analyse didactique ne peut en effet ignorer les finalités du système didactique. Il montre

d'ailleurs à cette occasion que la connaissance individuelle appréhendée par la psychologie cognitive est généralement résultante d'une rencontre avec des « dispositifs didactiques ». Étudier le cognitif dans ses rapports avec le didactique devient ainsi tout aussi significatif qu'étudier le didactique dans ses rapports avec le cognitif. Cette proposition ouvre sur des perspectives nouvelles pour l'interrogation cognitive et didactique qui enrichissent les deux domaines : étude de « la notion de pratique mathématique », étude de la notion d'étude comme « unité signifiante et structurante de l'apprentissage », étude de la biographie cognitive en rapport avec la biographie didactique, étude ethnodidactique...

Dans la dernière partie de son texte, Rouchier traite de la place et du rôle du cognitif dans les études sur l'institutionnalisation. Il souligne le rôle essentiel de l'institutionnalisation dans le développement de la personne et de l'institution. Puis, il explique comment la théorie des situations et la théorie anthropologique permettent de rencontrer l'institution dans les théorisations en didactique des mathématiques. « C'est par le biais de cette propriété fondamentale de l'humanité de connaître en recourant à des systèmes de signes organisés que les rapports entre institutions et connaissances prennent un sens. C'est parce qu'une connaissance est aussi l'organisation d'un champ d'expérience spécifique qu'elle est connaissance et qu'elle peut être atteinte en tant que telle... » Ces énoncés organisent la lecture du projet de la théorie des situations, en regard du projet central de l'institution didactique. Ils traitent aussi des rapports complexes entre le cognitif et le didactique, entre l'expérience spécifique qui est connaissance et le travail nécessaire de cette connaissance pour qu'elle prenne le sens et la forme des savoirs dans l'institution. Nous appuyant sur les expériences de recherche décrites dans les chapitres précédents, nous pouvons voir comment ces deux pôles attracteurs, connaissances spécifiques et connaissances normées, régulées, formatées, sont porteurs de recherches variées et de réalisations tout aussi variées dans la classe. Entre activités et pratiques mathématiques, les liaisons ne sont jamais simples.

Deuxième partie : modélisations cognitivo-didactiques de différents aspects du divers empirique de la didactique

Les activités didactiques forment ainsi le divers empirique que la didactique essaie de modéliser et elles se laissent difficilement enfermer dans une dimension unique de la réalité didactique. Dans la première partie de cet ouvrage, les chercheurs développent des concepts permettant d'appréhender la complexité de l'activité didactique et du cognitif qui fonde et

fait cette activité. Dans la seconde partie, les chercheurs effectuent des entrées différentes dans le didactique et analysent des résultats et certaines pratiques didactiques qui ouvrent également sur des perspectives nouvelles pour la recherche. Nous donnons un aperçu de ces travaux, en débutant d'abord par les travaux qui émanent principalement d'une analyse psychocognitive de situations d'enseignement.

Pascale Blouin (chapitre 8) décrit une expérimentation didactique portant sur la notion de fraction. Cette expérimentation permet de mettre à l'épreuve et de poursuivre les analyses préalables à la conception de son enseignement. Ces analyses sont essentiellement psychocognitives bien qu'elles s'alimentent d'études sur les pratiques d'enseignement de la fraction et de l'étude réalisée par Brousseau (1980, 1981a, 1981b) sur l'enseignement des décimaux. L'expérimentation est réalisée dans un contexte d'entrevues avoisinant par la méthodologie celles conduites par les chercheurs en psychologie cognitive. Toutefois, ces entrevues « permettent de dessiner un portrait stylisé » des rapports des élèves au savoir « fraction » ayant déjà fait l'objet d'un enseignement. Des conduites clés sont relevées chez un grand nombre d'élèves et montrent comment il est « contre-intuitif et difficile » pour ces élèves de penser la fraction comme un rapport. Blouin montre aussi comment la lecture de ces conduites provoque une rencontre du cognitif et du didactique bien qu'il soit difficile d'identifier les jeux et positions possibles de ces partenaires. Réfléchissant aux conséquences pour la recherche en didactique, elle s'interroge alors sur une inscription possible, voire souhaitable, de ces résultats dans la conception d'une séquence didactique pour l'enseignement de la fraction et rejoint ainsi un sujet de vifs débats dans la communauté des chercheurs en didactique des mathématiques.

Le travail réalisé par Blouin montre également les problèmes que pose le recours à des analyses psychocognitives dans l'interprétation de conduites d'élèves lors d'entrevues, étant donné la difficulté de faire abstraction du contrôle didactique de ces élèves ; on peut même dire que, dans plusieurs cas, en l'absence de contrôle didactique, il serait impossible de rendre intelligibles les problèmes posés. Le contrôle didactique permet l'enseignement ; il permet aux enseignants de faire faire des mathématiques à leurs élèves. Comment peut-on alors réaliser un enseignement à des élèves qui n'ont pas encore eu le temps de construire des rapports à des objets institutionnels. Comment l'enseignant s'y prend-il pour installer un tel contrôle, pour « didactifier » les premières tâches qu'il donne aux élèves ?

C'est une des questions que Jacinthe Giroux (chapitre 9) examine dans son travail sur l'enseignement des nombres naturels à des élèves au début de leur scolarité. Elle s'intéresse aux dispositifs mis en place, dès le début

de la scolarité, pour que les différents partenaires de la relation didactique puissent interagir à propos d'un objet de savoir alors que les élèves n'ont pas développé (ou peu développé) d'habitus liés à leur métier d'élèves. Elle montre comment l'enseignement procède alors à une réduction du degré d'incertitude, afin d'amener les élèves à répondre selon les normes du savoir visé. Cette réduction occulte les connaissances numériques construites par ces élèves dans d'autres lieux, connaissances ne pouvant être lues par le savoir visé à l'école, d'autant plus que ce savoir est fortement morcelé et fréquemment transformé (du moins au Québec) en objectifs de conduites définies par des actions et des gestes spécifiques; Giroux examine quelques exemples typiques de ce processus de réduction. Faire abstraction de ces connaissances semble aussi un moyen de fixer un temps de départ commun pour tous les élèves, d'établir une « ligne de départ » pour le jeu scolaire à installer, à défaut de pouvoir la tracer à partir de la mémoire didactique.

Le texte de Giroux pose de façon cruciale le problème de la dialectique ancien-nouveau, à propos des premiers enseignements en mathématiques. L'étude de ces premiers enseignements constitue une occasion unique pour étudier plus longuement les rapports entre la psychologie cognitive et la didactique, et en particulier pour examiner la façon dont les résultats d'études psychocognitives peuvent être utilisés dans la construction de situations didactiques même lorsqu'elles ont été réalisées à l'aide de tâches et de problèmes peu comparables à ceux présentés à l'école. C'est dans une telle perspective que Giroux analyse dans une seconde partie de son texte des situations destinées à de jeunes élèves.

L'étude des rapports entre la psychologie cognitive et la didactique trouve aussi un terreau propice dans l'enseignement spécialisé. Cette étude est réalisée par Jean-Michel Favre (chapitre 10) dans le contexte de sa formation à l'enseignement, de sa pratique en classe régulière et en classe spéciale. Favre traite ainsi du cognitif et du didactique du point de vue de l'enseignant: au cours de sa formation, au cours de ses premières années d'enseignement en classe régulière et enfin, au cours des années subséquentes d'enseignement en classe spéciale. Ce travail constitue un écho important au travail réalisé par Conne (chapitre 1) sur l'acte d'enseigner. Le « faire des mathématiques » n'est jamais pris en compte dans la formation; il est, pourrait-on dire, une présence acceptée, mais ignorée. En revanche, le « faire faire des mathématiques » occupe presque tout l'espace dans la formation; apprendre à « faire faire des mathématiques » est apprendre les moyens et les méthodes d'enseignement appropriés. Et le cognitif rencontré dans la formation n'entretient pas de relation avec le didactique. Les propos de Droz (1980) sur la transposition du psychologique au pédagogique sont à cet effet fort instructifs et posent bien le

problème de la transposition du psychologique au didactique; ils montrent bien que les savoirs d'un domaine ne peuvent être exportés sans une interrogation sérieuse sur les moyens de production de ces savoirs.

Favre montre aussi comment la formation permet à l'enseignant de régler sans heurts ses activités d'enseignement en classe régulière; l'observation et l'évaluation dans la pratique enseignante le dispensent de regarder le produit de l'enseignement. Plus encore, la présence d'élèves en échec en classe régulière s'avère indispensable pour juger des apprentissages des autres élèves. Favre montre alors comment l'échec systématique des élèves en classe spéciale a provoqué chez lui la rencontre du mathématique, du cognitif et du didactique. Il effectue à ce propos une remarque fort importante: « En augmentant la compréhension de ce que fait l'élève, la dialectique mathématique-cognitif augmente en effet dans le même temps le champ décisionnel de l'enseignant. » Nous pourrions ajouter que si l'étude du champ décisionnel de l'enseignant s'avère importante en didactique, ce dont nous ne doutons pas, elle ne pourra que s'inscrire dans une étude fort complexe des intentions didactiques, comme le montre le travail de Portugais (chapitre 2).

L'étude du champ décisionnel de l'enseignant renvoie, entre autres, à celle de la gestion par l'enseignant de situations d'enseignement. Lorsque nous avons présenté l'étude réalisée par Mercier (chapitre 5), nous avons cité une remarque faite par ce chercheur à propos de la nécessité pour l'élève de faire l'épreuve personnelle d'un problème et de la difficulté de développer des dispositifs d'enseignement qui rendent possible une telle épreuve. Salin (chapitre 13) montre que si de tels dispositifs peuvent être conçus par des chercheurs en didactique, leur réalisation en classe par des enseignants n'en garantit pas nécessairement la préservation. Nous présenterons le travail de Benoît Côté (chapitre 11) en dernier.

Salin analyse les problèmes que pose aux enseignants la gestion de situations d'enseignement construites par les chercheurs sur la base de situations adidactiques. Cette analyse prend acte d'un fait d'observation en classe, à savoir la persistance de pratiques ostensives d'enseignement. Ceci l'amène à formuler deux conjectures: (1) « La problématique didactique ne prend en compte qu'une partie de la situation de l'enseignant et conduit les chercheurs à sous-estimer la complexité de cette situation. » (2) « Le recours à l'ostension est aussi un reflet de la complexité de leur situation dans les phases d'interaction collective avec leurs élèves. » Elle montre d'abord que si les définitions de l'enseignement proposées par les chercheurs en didactique, en particulier la définition donnée par Conne (1992), dirigent bien l'attention sur ce qui est l'enjeu fondamental de l'enseignant, elles font abstraction de l'environnement et de ses contraintes de réalisation. Elle montre, entre autres, comment la variable « nom-

bre d'élèves » pèse dans les décisions d'interactions cognitives de l'enseignant.

Dans l'étude de la seconde conjecture, elle examine le jeu de l'enseignant avec le système des interactions de l'élève, le jeu de l'élève avec les problèmes qu'il lui pose, en un mot les jeux définissant la situation didactique. Elle constate que le recours à l'ostension est particulièrement fréquent dans les phases de formulation, de validation et d'institutionnalisation. Les études menées par Ratsimba-Rajhon (1977) et par Fregona (1995) montrent, entre autres, qu'éviter l'emploi de procédés ostensifs suppose de la part du maître une maîtrise de la notion lui permettant d'évaluer, à chaud, l'état du groupe, ou celui d'un sous-groupe d'élèves, voire encore celui de chaque élève à propos du problème étudié. Cela suppose également une prévision des réactions des élèves qui lui permette tantôt de susciter un consensus, tantôt de semer le doute. Cela demande enfin la capacité de prendre en compte les conduites inattendues et d'imaginer, au-delà de son simple énoncé, diverses voies d'accès au savoir visé.

Salin complète son étude des pratiques ostensives par un examen de leçons ordinaires qui l'amène à distinguer des pratiques ostensives *assumées* ou *déguisées*. Elle conclut par deux questions de recherche encore peu abordées : Comment la didactique pourrait-elle prendre en compte la complexité de la situation de l'enseignant ? Comment l'enseignant s'adapte-t-il et pourrait-il s'adapter à l'inattendu et à l'imprévu autrement qu'en recourant à des pratiques ostensives ?

L'adaptation de l'enseignant, de l'enseignement à des événements inattendus est étudiée par Lemoyne et Haguel (chapitre 12) dans le cadre de pratiques variées d'enseignement réalisées conjointement par des chercheurs et des enseignants. L'étude de ces événements, de leurs dénouements et de leurs effets est orientée par les travaux sur la conversion connaissance-savoir, sur les rapports entre la psychologie cognitive et la didactique, et sur les situations didactiques. Le premier événement examiné est provoqué par l'évaluation des conduites d'élèves à un test portant sur l'addition et la soustraction de termes algébriques ; le second événement est produit lors de la formulation et de l'évaluation de solutions à un problème de géométrie. La décision du chercheur et de l'enseignant d'ouvrir la situation en vue de comprendre les conduites des élèves les a obligés « à refaire des mathématiques » (selon l'esprit défini par Conne et Favre (chapitres 1 et 10), et à retracer l'histoire de ces conduites. Il en a résulté de nouvelles situations dans lesquelles les élèves ont pu poursuivre la construction des savoirs visés par la recherche d'une meilleure harmonie entre leurs convictions mathématiques et cognitives quant au bien-fondé de leurs solutions.

Les chercheurs concluent leur travail en montrant que, dans la classe

de mathématiques, certaines situations méritent d'être examinées plus attentivement. Les situations d'institutionnalisation, même lorsque le maître se contente de reconnaître les connaissances attendues et d'exposer le savoir, peuvent chez certains élèves déboucher sur des situations transformatrices de leurs connaissances. En paraphrasant Mercier, nous dirons que l'épreuve personnelle de la connaissance est au moins réalisée pour certains élèves. Les situations d'évaluation, d'examen, contiennent enfin assez souvent des problèmes nouveaux permettant comme il le conçoit « de mettre le connu dans des problèmes nouveaux ».

Dans le travail réalisé par Lemoyne et Haguel, les enseignants et les élèves ont rencontré les oppositions entre la cognition personnelle, de nature psychologique, et la cognition institutionnelle, de nature didactique. La prise en compte dialectique de ces cognitions a permis non seulement une évolution des connaissances mathématiques, mais une première entrée dans une pratique mathématique de preuve. Engagés dans un raisonnement formel, les élèves ont pu effectuer une telle entrée. Dans l'enseignement des mathématiques et dans les mathématiques, la conduite formelle d'un raisonnement est au centre de l'interaction constitutive de connaissances, de savoirs. Le travail réalisé par Côté (chapitre 11) constitue quant à lui un milieu pour le raisonnement déductif et la démonstration.

Côté décrit en effet la démarche de conception d'un logiciel pour le raisonnement formel et en montre le fonctionnement. Ce programme modélise une interaction avec un moteur d'inférence ; les théories et méthodologies en sciences cognitives et, en particulier, en programmation logique et dans l'élaboration de systèmes experts servent de cadre conceptuel. Il s'agit d'une tentative, comme l'a souligné Rouchier lors du symposium, « de faire fonctionner un cognitif de la preuve, soit un raisonnement par conditions nécessaires. L'ordinateur devient ainsi le maître d'école, mais un maître particulier n'admettant aucune négociation ».

Côté explique son projet de la façon suivante : « [...] on veut enseigner à un ordinateur à raisonner. On se demande : "Comment pourrait-on formuler une situation de raisonnement à partir de ce dessin ? [dessin d'un segment d'une droite]" ». Il est amené à constituer une banque d'énoncés ou propositions, utilisant les représentations connues dans les systèmes experts. La démonstration est vue comme une sorte de calcul effectué sur des énoncés à partir de règles qui n'ont rien à voir avec la signification des énoncés. La stratégie didactique fait du moteur d'inférence un objet d'étude et l'outil central d'apprentissage est la production de traces. La trace constitue ainsi une représentation non seulement de la suite d'énoncés qui va des axiomes à l'énoncé à prouver, mais encore du processus de recherche des axiomes et théorèmes pertinents. Le logiciel modélise un

raisonnement par chaînage avant et arrière. Les règles de chaînage avant et de chaînage arrière sont des outils pour contextualiser les savoirs de la logique. Côté propose que ces notions apparaissent aussi dans les savoirs à enseigner, et inclut de ce fait des concepts informatiques dans le corpus des mathématiques scolaires. Les mathématiques ne constituent pas, selon lui, le seul savoir de référence pour les mathématiques scolaires. En conclusion, il déclare qu'il faut accepter le fait que la conception du logiciel soit indissociable de la conception des activités qu'elle permet et englobe même l'analyse du domaine de connaissances visé. Dans ce texte, l'enseignement du raisonnement logique (visée cognitive) devient donc l'outil pour l'enseignement de la démonstration en mathématiques (visées didactique et mathématique). Ce texte prend donc acte de rapports entre les sciences cognitives, les mathématiques et la didactique et montre comment ces rapports permettent de créer un milieu propice à l'enseignement.

Première partie

***Modélisations des rapports
du cognitif au didactique***