



HAL
open science

Notes sur la narration (2004-2013)

François Conne

► **To cite this version:**

| François Conne. Notes sur la narration (2004-2013). 2017. halshs-01648688

HAL Id: halshs-01648688

<https://shs.hal.science/halshs-01648688>

Preprint submitted on 27 Nov 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Notes sur la narration
2004 ó 2013
François Conne

(Quelques inédits ó Édition 2017)

Descriptif

Ma contribution au travail du groupe Ddmes (groupe de recherche en *didactique des mathématiques dans l'enseignement spécialisé*, Lausanne) comporte un grand nombre de notes adressées à mes collègues. Sophie Gobert et moi-même avons collecté et mis en forme une petite part d'entre elles.

Toutes ces notes relatent diverses recherches que j'ai entreprises ici et là (ici avec le groupe Ddmes ; et là, dans le cadre universitaire). La plupart de ces notes sont elles-mêmes des narrations de ce qui m'a préoccupé dans divers travaux. Toutes celles que nous avons collectées pour ce document portent sur des thématiques auxquelles le groupe Ddmes s'est consacré : *le jeu de tâches, l'expérience, la narration* (cf. Ddmes (2012a) De l'expérience à la narration, *Math-Ecole* 218, 46. http://www.ssr dm.ch/mathecole/crbst_10.html). Vis à vis du groupe ces notes avaient pour fonction de souligner les liens qui rattachent les recherches spécifiques de Ddmes avec les questions générales de didactique des mathématiques.

Chacune de ces notes peut être lue sans qu'il y ait à se référer aux autres. Il y a certes quelques rappels çà et là entre telle ou telle note, ainsi que des répétitions. Cela correspond à ma conception de la narration que je considère comme un processus, une forme que prend le processus interprétatif, et qui se poursuit en d'incessantes reformulations, de narrations en narrations.

Dans la pratique des mathématiques, on ne cesse de reformuler autrement les choses que l'on examine - jeux de paraphrases auquel, par exemple, on peut assimiler tout calcul. Pour moi, c'est une forme non narrative du processus interprétatif. Et bien sûr de tels processus sont au cœur de toute diffusion de savoirs.

La narration rejoint alors aussi bien *le jeu de tâches* - qui sont des jeux de paraphrases d'une certaine problématique - que *l'expérience* vouée à être reproduite. Cet ensemble de notes représente en quelque sorte une pelote de ces thématiques, pelote qu'il resterait encore à patiemment démêler.

FC

SOMMAIRE

2004 - Une proposition théorique.

14 août 2009 - Caractère labile de l'expérience.

21 août 2009 - Singularité rareté et caractère exceptionnel.

29 et 31 août 2009, 3 et 4 septembre 2009 - Ce que j'ai appris en 2008-2009, Pré-de-Vert et Chamoyron.

4 octobre 2010 - Considérer dans le mot « faire des maths » un corrélat entre une activité et un milieu que l'on constitue.

7 octobre 2010 - Narration de recherche : constructions élémentaires avec règle et compas.

11 octobre 2010 - Quels enjeux pour un enseignement des mathématiques?

4 novembre 2010 - À Pierre Alain Cherix.

7 novembre 2010 - Narration de recherche : thèse.

7 février 2011 - Une fonction du savoir essentielle pour les.

22 février 2011 - La narration est un relai, une auberge espagnole bien entendu.

7 et 17 mai 2011 suivi d'une note du 4 juillet 2017 - Évocation d'une expérience didactique de longue haleine : arrangements de plots en bois.

19 juin 2011 - Qui m'occupe depuis 40 ans déjà.

5 octobre 2011 - Rebondissement suite aux Journées de la Chaux d'Abel, mai 2011, consacrées à la narration.

21 février 2012 : Deux remarques illustrées sur deux narrations de recherches actuelles (extrait d'un document inédit Possible / Potentiel

24 octobre 2012 : Les maths sont généreuses, elles vous offrent, sur des sujets d'expérience commune, des réponses à des questions que vous ne vous êtes jamais posées.

25 octobre 2012 - À propos de narration.

Bibliographie

Point d'orgue

14 février 2013 - Bulles soupapes

2004

Le texte ci-dessous date de 2004, il figure en annexe du mémoire de M. Yves Auckenthaler, (Auckenthaler Y. 2004). Il concerne le travail sur *croix géniale* avec le groupe d'élèves. Cette note constitue aussi la conclusion d'un projet d'article : *Jeux de tâches et suivis de situations*. 2008 (non disponible, en chantier).

Une proposition théorique

Ce qui est le plus accessible de ces descriptions et dont le lecteur pourrait faire usage afin de se rendre compte par lui-même de ce que cela produit tient à trois choses qui caractérisent ce que l'on pourrait appeler : *suivi anticipateur*, ou *interprétation proactive* (cf. point 3° ci-dessous).

1° À l'idée de suivre la pensée des élèves aux prises avec une situation et considérer les savoirs qui se manifestent alors.

2° À un ensemble de tâches qui permet un contrôle de la dynamique situationnelle par le truchement desquelles j'arrive à infléchir la manifestation de connaissances utiles à l'étude d'objets mathématiques.

3° À l'idée que l'expérimentateur suit une interaction en pilotant le jeu dans lequel elle est prise.

Le jeu de tâches n'est pas symétrique. Ici l'expérimentateur pilote le jeu de tâches. Mais ce pilotage est contraint par la situation, autant par le milieu que par les actions de l'élève. Ici les décisions du pilote dans le jeu de tâches reviennent à décider de faire ou de ne pas faire faire expérience¹ de certains aspects qui apparaissent. D'un côté, les signes que laissent les expériences aboutissent sur des données, informations, moyens, qui sont des savoirs. D'un autre côté, les savoirs disponibles signifiés de manière pertinente en regard de la situation permettent de se passer des expériences sous-jacentes (qui sont en quelque sorte incorporées au milieu par les signes utilisés). Ce qui distingue le pilote du partenaire *piloté* (attention, abus de langage, il faudrait dire *dont l'interaction cognitive est pilotée*) me semble être essentiellement que le pilote joue sur deux niveaux à la fois : le premier niveau est son propre niveau dans le jeu de l'expérience qu'il fait et des savoirs dont il dispose ; le second niveau est celui de son jeu avec le jeu *du piloté*. Le pilote dispose de plus de savoirs que le piloté ce qui, s'il ne s'agissait que de lui, lui permettrait de moins ouvrir à l'expérience, voire pas du tout. Cependant il doit suppléer les ignorances du *piloté* en ouvrant à l'expérience, ce qui, en contre-coup, l'amène à réviser ses propres savoirs dans cette confrontation. Certaines de ces expériences seront tout aussi neuves pour le pilote que pour le *piloté* et peuvent parfois même être plus déstabilisantes pour le pilote, vu qu'il sera confronté à un réseau de savoirs plus complexes. Ces déstabilisations donneront lieu à des fermetures ou des revirements du pilote que le *piloté* ne pourra comprendre, et qui n'auront que peu de liens avec la logique dans

¹ On ne peut pas dire avec précision en quoi consistera exactement une telle expérience tout ce dont on peut attester est qu'il y ait eu expérience mathématique. Ainsi la seule chose que je garantissais aux enseignants et institutions avec lesquels je collaborais était d'assurer de l'expérience mathématique aux élèves avec qui je travaillais et de pouvoir en attester, expérience qui, vu leur condition d'élèves de l'ES, pour un large part échappait à leurs enseignants.

laquelle la situation se sera engagée. Dans de tels cas, le jeu du pilote retombe à son niveau premier : son propre jeu avec le milieu.

Le jeu de tâches peut aussi être vu comme une manière de dépasser les difficultés dues aux découpages trop stricts d'un domaine à étudier en une collection de tâches ponctuelles à réaliser, rythmées et cloisonnées autour de sanctions de performance des élèves. Le jeu de tâches permet donc un autre découpage que celui qu'on fait d'habitude en tâches et sous-tâches, ou problèmes et sous-problèmes, qui partent toutes de solutions totales ou partielles ou du moins de réponses stabilisées, de paliers dans la résolution. Le jeu de tâches est essentiellement non stable, il dévolue le plus possible au *piloté* le travail de stabilisation de la situation.

Par exemple, on voit que très vite pour Christine la tâche : dénombrer précisément le nombre de petits cubes unités visibles d'un assemblage en un cube d'arrête 3, de reproduire le résultat de LA (27) puis quelque chose qui s'en rapproche ou qui puisse s'y relier. Il n'y a pas tant de curiosité pour le cube que de curiosité à arriver à faire ce qu'on lui demande avec le cube. Dès lors le cube est pour elle prétexte à une performance, celle de LA, qu'elle pourrait imiter voire égaler. Le problème didactique auquel je suis confronté est d'inverser les choses : que la performance de dénombrement (ou de calcul direct comme LA, si elle pouvait s'y rengager) soit prétexte à étudier le cube. Mais de la façon dont les choses se présentent, si Christine disposait de savoirs-dénombrer fiables et stables cela ne résoudrait en rien mon problème, puisque alors elle n'aurait pas de difficulté à trouver la réponse 26 (un cube reste en effet caché au centre) et faire que LA se corrige. Le cube aurait donc été occasion de dénombrement, et d'un dénombrement qui permet d'arriver aussi bien, voire mieux que le calcul de LA. Le savoir-dénombrer de Christine lui aurait permis d'éviter d'étudier le cube. Ce qui se passe d'intéressant est que le cube est un support qui donne au savoir-dénombrer de Christine une certaine efficacité. Le savoir sur le cube devient donc utile au savoir-dénombrer, alors que le savoir-cube n'en est pas un constituant. Le critère d'utilité n'est donc pas un critère de construction, et si on peut le considérer comme critère d'intégration ou de coordination, c'est un rapport de service plus que de condition qui se joue ici.

Le jeu de tâches part du principe que la limite du pouvoir de déstabilisation du pilote réside à la fois dans les savoirs du piloté et dans les surprises des expériences dans lesquelles il se lancera. La dévolution est complète si, fort de ses propres savoirs et d'une expérience actuelle et authentique mal contrôlée par les savoirs ciblés par l'enseignant, l'élève élabore de nouveaux savoirs. Le travail d'institutionnalisation n'est alors pas du tout gagné de la part du professeur puisque, pour lui, il s'agira ni plus ni moins de trouver à rendre compatible l'expérience actualisée avec le savoir visé.

14 août 2009

Caractère labile de l'expérience.

Suscité par ce que m'écrit Jacinthe Giroux.

*Je crois comprendre ton idée sur la question de créer un joli motif symétrique dont le motif prend toute la place et efface en quelque sorte l'intérêt de prendre en compte la symétrie... J'ai pensé à mes papillons. Mais pas grave. **Je pense que c'est aussi dans l'échange que les choses se passent. Je crois de moins en moins au fait que l'expérience avec les «choses» puisse suffire à l'abstraction des objets mathématiques. Car si les élèves en font l'expérience, je pense qu'il faut un troisième, un « maître » pour lui signifier que « oui », cette expérience est signifiant d'un objet à apprendre disons. J'ai des souvenirs de réflexions mais laissées en plan car non reprises, si tu veux, non relayées et donc sans «statut ».***

Bonjour

Je travaille pour une narration de trois séances de cet hiver à Pré de Vert avec M. et L. Et je me souviens d'une question soulevée lors de notre dernière séance d'édms sur l'institutionnalisation dans ce genre d'expérience ou du moins sur la nécessité de fixer certaines choses sinon elles vont se perdre et surtout sinon on ne pourra pas avancer faute de pouvoir s'appuyer dessus.

Voici de nouvelles considérations sur ce thème (et de la narration en brîbe). Je veux parler du caractère labile ou pas de l'expérience.

C'est vraiment une question pour moi mystérieuse. Cela veut dire que je suis bien incapable de la trancher. Je ne puis que faire des hypothèses et les éprouver. Je prends mes libertés en la matière. Je n'impose à personne de me suivre, je continue mon bonhomme de chemin, et ne reçois les remarques sur la difficulté à fixer l'expérience comme celle occasionnée par un travail sur un problème ouvert. J'y réponds très volontiers si c'est une invitation à problématiser.

Je ne vais pas contredire le constat que pas mal de choses se dissipent des expériences que je fais faire à M. et L. Par ailleurs les d'observations qui vont dans ce sens ne manquent pas.

De là à tirer la conclusion de la nécessité de l'institutionnalisation et de l'enseignement formel, il n'y a qu'un pas.

Je ne le fais pas parce que selon moi on ne sait pas au juste qu'est-ce qu'on institue. On institue souvent un milieu et des modes de faire et ce sont eux et pas les connaissances des sujets qui prennent en charge la fixation des choses ! Ce qu'on contrôle ainsi c'est que les élèves sont bien calés sur les bons rails, et hop, tout marche. L'enseignement ordinaire joue sans doute énormément là-dessus. Il suffira alors de ne pas perdre ces bonnes habitudes etc.

Je me disais ce midi que c'était comme si on mettait des échafaudages mais qu'on les laissait. Au fil du temps ces derniers viennent à pourrir et très souvent entraînent toute la construction avec leur ruine. Je ne dis pas que cela se passe tout le temps, je pose des questions.

Mes observations et ma manière de faire avec les élèves sans vraiment institutionnaliser (mais c'est à voir dans les détails, je ne suis pas totalement maître de décider le faire ou non, la séance du 23 février à Pré de Vert est à ce titre passablement instituante) et je ne puis pas assurer que grand' chose restera.

Par contre, je dis et répète ceci : je puis attester que les élèves auront fait l'expérience de certaines choses. Je me donne les moyens pour cela. Je prétends que l'enseignement ne le fait pas et les trois vidéos que je viens de visionner montrent maints exemples variés de ceci. Je puis aussi attester que dans ces trois séances, pas mal de ces expériences semblaient pour eux porter sur des choses totalement inédites. Je ne dis pas qu'elles l'étaient mais ce qui ressort est que les élèves ne se les étaient pas appropriées, et même celles que nous leur avons faites faire lors de la ou des séances précédentes.

Par exemple distinguer sur pièces de polydrons, la différence entre pentagone et hexagone, et, partant, faire l'expérience que le nombre de côtés est un organisateur de l'exploration de l'univers de polygones. Je puis montrer aussi combien cette expérience est fragile. Ça résiste, ça résiste durant ces 3 séances entre le 24 novembre 2008 et le 23 février 2009 !

Ou encore combien est fragile l'expérience du dessin du cadran de montre ! Pour ces élèves, l'une de 12 ans révolu, l'autre de 13 ans révolu ! Celui de 13 ans n'est pas convaincu immédiatement que si un polygone a n sommet, il a nécessairement aussi n côtés. Sa camarade le lui explique, et il semble qu'elle est très fière de l'explication qu'elle s'est trouvée ! Donc tout sauf une banalité pour elle aussi. Et là oui, on a un indice d'une appropriation.

Ce qui se passe est que nous sommes très surpris que ces choses n'aillent pas de soi pour les élèves, oh une fois que nous le constatons, nous trouvons immédiatement mille explications et commentaires pour enfouir ce fait (interprétation rétroactive). Mais nous ne tirons pas la leçon et, paf !, au prochain tournant nous nous trouvons à nouveau très surpris, à peine un mois plus tard, par telle ou telle autre facette du même problème.

L'exemple du nombre de côtés pour les polygones est à ce titre vraiment parlant. Faire le dessin des diagonales des polygones ne va pas de soi, bien que nous nous soyons mis au clair sur ce que sont les côtés et les sommets. Ou encore, toute tranche de disque, (de gâteau), voire toute portion s'appelle un quart. Ainsi trois quarts est compris comme des tiers, et cinq quarts comme des cinquièmes. Et cela aussi résiste sur deux séances.

Mon idée est désormais la suivante. En fait dans l'enseignement ordinaire, ceci est plus à la charge du dispositif didactique mis en place, disons milieu et tâche, disons aussi logique instituée, que du savoir de l'élève, ce dernier restant en rapport de connaissance à ces situations, ou de *savoir faire*, mais pas de *savoir savant* (id est s'organisant par lui-même - une idée forte de l'article *savoir et connaissance* (Conne F. 1992) et que je n'ai pas assez exploitée encore). En particulier parce que, spontanément, on travaille fort peu à l'organisation de ses connaissances.

Certes, la prise en charge de l'expérience par l'adulte ó pilote - est non seulement nécessaire, et inévitable, mais sa limite est qu'elle ne devrait jamais se substituer au travail de liens, de coordinations et d'organisation de ses connaissances par l'élève.

La manière dont, dans mes interactions avec les élèves, j'organise fortement les choses par mon pilotage est fortement contrecarrée par la manière dont les élèves eux-mêmes organisent

leur travail, et s'obstinent à faire les choses à leur tête. Cela se passe parce que je le permets, c'est à dire parce que les organisations de chacun se répondent, et que je m'intéresse bien plus à voir comment ils organisent leurs actions qu'à leurs performances.

Ainsi, à la tâche de reproduire un cadran de montre, une fois qu'ils ont à peu près réussi à faire le cadran à 12 traits, exemple les 4 quarts, puis deux traits intercalaires à chaque quart comme le propose l'élève de 12 ans, je leur demande un cadran à 6. J'organise la tâche et les expériences sur les relations numériques, ici sur le fait que 6 est la moitié de 12.

L'élève de 12 ans, M., organise sa réponse en proposant de faire les 4 traits des quarts et de ne pas tenir compte des 15 et 45 (c'est cela qu'elle dit). Elle barre donc les deux traits en question, et place les traits intercalaires. Alors, elle se trouve ennuyée et bloquée en mettant les deux traits intercalaires du premier quart - elle les trace à 5 et 10 minutes. Elle n'a pas anticipé cela mais quelque chose d'autre, et se trouve surprise.

Anticiper est une organisation en acte de son expérience bien sûr. C'est même souvent plus que cela. C'est la faire advenir comme il faut (idée pilotage).

Elle s'arrête alors et ne sait plus que faire. Elle ne pense pas du tout à faire 12 traits et effacer un trait sur deux, par exemple. Autre organisation qui s'appuierait sur le fait que 6 est la moitié de 12. Mais comment viendrait-on penser que ces relations numériques soient utiles à dessiner?

La difficulté devant laquelle je me trouve alors n'est pas tant son échec, ou contre-performance, que le fait qu'elle s'interrompe et qu'elle n'aille pas au bout de son idée. Je le lui dis même à diverses reprises dans cet échange justement.

Mais *aller au bout de son idée* est une règle d'organisation de son travail de niveau encore supérieur. Cela suppose qu'elle soit convaincue que son idée pourrait la mener sur la piste de la réponse. Ce qui veut dire qu'elle soit convaincue de la valeur de l'expérience.

Mais comment voulez-vous qu'elle le soit si la seule prise en compte de l'expérience par l'enseignement est celle de dispositifs qui prennent tout en charge, que la seule expérience qui soit considérée est celle de la réussite avec le soutien de tels dispositifs ?

Dans ma manière de mener ce jeu de tâches, je travaille explicitement sur les trois terrains du *savoir-faire*, du *savoir-réfléchi* et du *savoir-savant*. Et je dis, réitère et cherche à convaincre ..., que je m'intéresse à la manière dont l'élève entend s'y prendre, à ce dont il est convaincu, et à comment il rebondit d'une question à une autre. Je suppose que c'est faute de travailler cela que les choses ne fixent pas.

Voilà les questions que cela soulève et non pas celle de savoir si il serait indiqué ou non de procéder à un geste didactique dont on ne sait l'efficacité que d'un point de vue très empirique sans comprendre encore ce qui se trame avec ça.

21 août 2009

Singularité rareté et caractère exceptionnel.

Jacinthe

1° La référence à Walter Benjamin (*Le Narrateur*, in *Rastelli raconte ... et autres récits*. Point Seuil, 1987) concerne la narration et l'expérience et rejoint notre discussion sur le caractère labile de l'expérience et au bout du compte, cela remet aussi en question la trop forte polarisation de l'enseignement sur la fixation de savoirs qui ne tiendront jamais car, tout simplement, hormis des moments scolaires particuliers, personne n'en fait usage. Sans s'y réduire la thématique des fractions est très directement concernée par ce problème, et ce, à un degré élevé.

2° Les épisodes dont j'avais entamé la rédaction en 2003 (Conne F. 2003-2004, 2004a) étaient une tentative allant dans ce sens.

3° Je rencontre un problème, celui d'avoir toujours opté pour la singularité de mes recherches, descriptions et analyses. Cette singularité m'a à la fois apporté un certain succès et causé de énormes problèmes et de déboires. Il y a une chose que je n'ai pas su négocier (au sens de négocier un contour en conduisant une voiture), c'est d'éviter la confusion entre caractère singulier et exceptionnel.

Avec les *Conduites atypiques* (Giroux J. 2008), tu as rencontré exactement le même problème, même si, compte tenu de ton objet, la réponse ne sera pas la même que celle que je cherche à donner ici.

C'est aussi sur ce point exactement que se situent tous les nombreux débats, encore bien ouverts, que nous avons eu toi et moi autour de ton article.

Mon passage, non prémédité ni voulu, dans le domaine de l'Es n'a pas arrangé la chose, au contraire. Ce que je fais et nous faisons avec dmes est exceptionnel et nous en avons fait une carte de visite, mais ce que nous rapportons est très singulier. Singulier par rapport à quoi ?

a) Par rapport aux normes du savoir scolaire et par rapport au regard que nous posons sur les élèves. Lorsque je demande aux enfants de Chamoyron de déterminer le centre d'une table ronde ou d'en mesurer le périmètre, table sur laquelle ils ont l'habitude de travailler sans que jamais la question n'ait été posée, ni même envisagée par les enseignants - pas plus d'ailleurs que par tout le projet de leur enseigner les maths - c'est une démarche très singulière que j'entreprends. Mais si je travaille avec le boulier, cela le sera aussi, même si le boulier est un dispositif connu mais dont on ne fait aucun usage intelligent en classe, et si je travaille avec les polydrons, mon travail se singularise aussi : il n'est ni dans ce que les élèves en font en classe, ni ce que les enseignants sont capables d'en faire, ni ce que le vendeur du matériel a envisagé dans ses brochures, ni ce que d'autres didacticiens ont pu imaginer en faire.

b) Singulier par ce que je, nous, rapportons des élèves. Et ce à la fois parce que nous explorons des choses laissées en friche, mais aussi par le contexte dans lequel nous travaillons et enfin du fait des élèves eux-mêmes.

Concernant le caractère d'exception, je vais continuer inlassablement à le cultiver comme je l'ai fait jusqu'ici. En effet c'est ce que je pense qu'il faut apporter au système, c'est une position politique, au sens où tu le disais à propos de neuro-psy et dyscalculie.

Concernant le caractère de singularité, la question qui se pose à moi est la suivante. Comment faire la part entre ce qui restera une singularité, disons un point singulier, ou un ensemble de tels points, et ce qui est appelé à ne plus l'être une fois qu'il est inséré, situé, dans un espace de potentialités. Les réponses aux problèmes de billes que j'ai relevées comme singulières (Conne F. 1984), les réponses aux égalités lacunaires (Conne F. 1988) ont cessé de devenir singulières dès le moment où on peut dessiner des éventails des réponses et décrire leurs structures. Les erreurs cessent d'être singulières si on les décrit comme «systématiques» ou, tout autrement, si on montre comment d'une telle erreur on peut extrapoler quelque algorithme efficace. Mais aussi les singularités que je produis dans l'Es cessent de l'être dès le moment où j'enseigne à d'autres le moyen d'en produire eux aussi, ce qui se passe à d'autres, mais ce qui s'est tout aussi passé lors de nos entretiens toi et moi en 2004, ou encore lorsque Christine del Notaro se met à en produire elle aussi.

Bref, ce dont il s'agit de faire la part réside, du moins en partie, à séparer singularité de rareté. Il s'agit donc de rendre moins rares les choses telles que je les rapporte depuis des lustres. Et on pourrait alors y voir plus clair.

Il nous faut un outil et un dispositif pour cela : *la thématique de l'expérience et de la narration* est celui que nous cherchons à construire et nous doter. Mais ce n'est que la moitié de ce qu'il y a à faire, il faut aussi à la fois résister à toutes les tentatives d'annulation par assimilation aux théories en vogue (*Théorie des situations didactiques, théorie anthropologique du didactique, théorie des champs conceptuels; contrat didactique et jeux de cadres, théorie des registres sémiotiques, etc.*) et on tombe en particularité sur toutes les escarmouches portant sur la singularité ou non du terrain Es et il s'agit donc de ne pas se laisser assimiler à la généralité de ces théories, donc lutter fortement contre la propension à la généralité. Or c'est elle qui a la cote très fortement actuellement. Il faut en même temps ne pas tomber dans ce même jeu et jouer une sorte de contre assimilation (au sens de la relation transfert / contre transfert) des autres à notre système.

Je cherche à ce que je propose soit quelque chose parmi d'autres. Non pas dans l'idée, faussement modeste, d'apporter ma pierre à l'édifice, mais dans le souci de ne pas écraser la question que soulève la relative facilité qu'il y a à produire des observations singulières.

Pour bien me faire comprendre, je reprends l'exemple de la table ronde. Il me semble que poser une telle question à des élèves en classe et quel que soit le mobilier de leur école, restera à jamais quelque chose d'exceptionnel. Idem dessiner un cube en perspective cavalière, et encore plus en s'y mettant à trois comme tu l'as imaginé avec bonheur. Ce caractère d'exception rend singulier les événements et observations qu'on y rapporte, et cela va jusqu'à cette imagination heureuse de la part de l'expérimentateur, préparée voire improvisée. Je pose que le caractère exceptionnel de la démarche permet de lever de tels faits singuliers. Ils existent donc en latence, et existeront toujours. La question est donc bien celle de savoir quelle pertinence il y a à chatouiller, réveiller cette latence. Et cette question présente au moins trois aspects.

Le premier est de savoir si pour les élèves, ce qu'on réveille là leur permet d'avancer. Je postule que oui, et ce sans qu'il y ait rien à faire de plus, même pas à fixer l'expérience.

Le second est de se demander ce qu'on pourra bien faire de ce qu'on aura ainsi réveillé. Ma conjecture est que ce qui va jouer ici est la connaissance de l'interlocuteur, enseignant, chercheur.

Le troisième est de considérer que le savoir enseigné, et en ce sens normatif de la connaissance, laisse cela en jachère, veilleuse, latence, et qu'il nous en rend tout simplement inconscients. Il s'agit ici de questionner le savoir. En particulier n'y a-t-il pas ici une limite inhérente aux savoirs à laquelle il faut rapporter les difficultés que certains élèves rencontrent à les apprendre ?

Ce dernier point va assez loin. Je lis Gregory Chaitin, je mets l'entier du paragraphe, et en italiques le passage qui me frappe, la suite ne m'intéresse pas trop, mais tu as le contexte : *Hasard et complexité mathématiques* (Chaitin G. 2009), p. 51-52

La carte de la connaissance mathématique est comparable à une autoroute traversant un désert ou une jungle dangereuse. Quiconque s'écarte de la route s'égare sans retour et meurt. Je m'explique : cette carte représente ce qui est à la portée de nos outils, et non la réalité du monde mathématique. Les mathématiciens répugnent à parler de ce qu'ils ne savent pas. Les questions qu'ils aiment aborder sont celles que permet de traiter l'arsenal mathématique courant. Les doctorants trop ambitieux ne finissent jamais leur thèse et disparaissent malheureusement de la profession. Vous pensez qu'une réalité mathématique est objective, qu'elle ne relève pas du champ de l'opinion... Une démonstration est juste ou ne l'est pas : voilà qui semble clair et net. Jusqu'à un certain point ! Car la justesse n'est pas tout : il faut surtout que cette démonstration ait un intérêt. Ce qui, pour le coup, n'est qu'une affaire d'opinion et ne dépend que des modes mathématiques. Certains axes de recherche deviennent populaires, puis impopulaires ; on les voit alors disparaître et sombrer dans l'oubli. Pas toujours, certes ; mais parfois. Seules survivent les idées mathématiques d'une importance fondamentale.

Ce qui me frappe est de lire ce que je dis à mes étudiants du séminaire de recherche depuis au moins 10 ans, et dans les mêmes termes quasiment. Je ne parle pas d'autoroute, mais bien de jungle et de la rapidité avec laquelle un écart nous mène à nous perdre. Je le dis, sur pièce, en commentaire à une expérience que nous sommes en train de faire. Si G. Chaitin le dit aussi explicitement, c'est que cela n'est nullement quelque chose de commun et d'admis. G. Chaitin ne dit pas cela en l'air, il avait déjà dit la chose autrement p. 36:

On montre facilement qu'il existe un nombre infini de nombres premiers et nous verrons tout à l'heure trois façons différentes de le faire. Mais quelle que soit la méthode adoptée, des conjectures difficiles apparaissent dès que l'on s'aventure un peu plus loin dans la compréhension des mathématiques. Les frontières de nos connaissances sont proches, extrêmement proches.

Ma question rencontre une question de transposition, faut-il que le mathématicien scolaire fasse comme le mathématicien professionnel et ne sorte pas des sentiers battus ? On peut penser que cela s'impose, sauf que le jeu de la connaissance n'est pas du tout le même pour un mathématicien - je pense ici à la définition de W. P. Thurston (Thurston W. P. 1995) : *quelqu'un qui fait progresser la compréhension des mathématiques* et que pour quelqu'un dont on aimerait qu'il les apprenne. Quelles illères faut-il mettre à l'apprenant pour qu'il ne quitte pas l'autoroute et ne s'effraye pas du paysage alentour ?

Mais c'est bien plus large car ce qu'il faut bien comprendre c'est que cette jungle dangereuse n'est pas déjà là, qu'elle n'est que la frange de ce que nous construisons dans notre expérience ó la réalité à laquelle on se frotte, telle est l'image préférée de F. Bailly et G. Longo dans : *Mathématiques et sciences de la nature. La singularité physique du vivant*. (Bailly F. & Longo G. 2006), qui veut dire que non, on ne s'y perd pas nécessairement, ni n'en meurt - ce qui y meurt n'est pas nous mais notre entreprise, ce qui, de notre expérience ne fixe pas ó bref, cette jungle n'existe que parce que de tout temps nous y faisons des incursions, et pour beaucoup suite à de simples faux pas !

C'est cela en tout premier lieu que livre l'expérience. Pour dire les choses gentiment, penser à recourir à l'expérience dans les limites de cette autoroute est d'une très grande naïveté.

FC

Ps, je vais reprendre ces propos pour ddmes, mais pas tout de suite, et sans doute en améliorant un peu.

29 et 31 août 2009, 3 et 4 septembre 2009

À ddmes.

Ce que j'ai appris en 2008-2009, Pré-de -Vert et Chamoyron.

29 août 2009

Une chose que j'ai trouvée l'an passé en travaillant sur un long terme avec les polydrons et en travaillant 5 séances là-dessus à Pré-de-Vert. Je ne sais pas très bien comment le dire... C'est à quoi cela m'a amené, je ne puis pas dire obligé, de travailler plusieurs séances avec ce matériel. En fait ce sont les catégories de penser le monde et les expériences que l'on en fait qui sont bousculées.

Il faut regarder comment la recherche d'interactions avec les élèves nous oblige à nous mouvoir, et quels paysages cela nous fait traverser. On est dans l'exploration, ce n'est pas le jeu de tâches, qui n'est qu'un moyen.

Je n'ai pas pu en rester à la catégorisation *à priori* dont ce matériel procède, ni à celle dont procède l'intention d'enseigner. Impossible que les choses ne soient pas plus mélangées que dans les catégories bien nettes du savoir. J'avais écrit quelque chose là-dessus l'an passé, il y va aussi du savoir-savant puisque l'organisation du savoir procède, elle aussi, de ces catégories.

Ainsi j'ai un projet sur les polyèdres, et un projet relativement simple. Plus sophistiqué que mon projet, cela se trouve : par exemple je dispose d'un livre qui étudie de manière très fouillée les polyèdres et fourmille de photos de modèles en carton (A. Holden *formes espace et symétries. construisez facilement vos "solides"*. Cedic n° 2, 1977). Mes catégories sont bien plus imprécises, floues, syncrétiques que celles de l'auteur de ce livre. Ce que fournit l'expérience porte justement sur des affinements et recatégorisations. Mais les élèves sont encore quelques crans *en dessous*, et les élèves de 8 ans encore plus *en dessous* que ceux de 12 ans. Cela se voit clairement.

Cela se voit à ce que nous sommes amenés à explorer, et ma méthode d'entretien, de *épousser des liens*, et *de faire des maths dans l'interaction* le met en évidence. Ainsi je dois mélanger les polyèdres avec les polygnes, les polygnes avec les étoiles, tout cela avec les disques et les disques avec les diamètres et les *tranches de pizzas*, ou les disques avec les *chapeaux chinois*... Ce sont les choses que nous avons été amenés à explorer.

C'est ça le divers, et le divers empirique (Petitot/Descaves - in Descaves A. 1992) qui se construit dans ces interactions, et pas du tout les différents types de polyèdres, de polygones, d'étoiles etc. Ce dernier divers est bien trop spécifique et précis, suppose des catégorisations bien plus fines que les élèves pensent *à* et peuvent penser, tant il leur faut encore faire mille autres liens.

*

31 août 2009

Reprise

1° Dans spécialiste, il y a espèce, donc l'univers du spécialiste est catégorisé autrement que celui des autres.

La diversité des enfants de 8 ans est bien moins spécifique que celle des élèves de 12-13 ans, encore moins que la mienne qui l'est encore moins que celle du spécialiste, l'auteur du livre formes espace et symétrie. Cela n'aurait néanmoins pas de sens que de dire que l'enfant serait généraliste. On n'est généraliste que sur la base de catégories bien distinctes.

Conséquence, la diversité produite par les élèves n'est pas pauvre, elle est seulement moins circonscrite. Les élèves et mes étudiants - ne produisent pas une grande richesse de formes par le dessin, par les découpages, par les combinaisons de polyèdres, par les puzzles, mais ils divergent bien plus. Produire une diversité spécifique demande tout un travail d'organisation.

2° Autre manière encore simple de dire les choses.

Ce que j'ai découvert est que les choses ont une manière bien étrange de se mélanger, et que c'est très différent avec des élèves de 8 ans et avec des élèves de 12-13 ans, les uns tous aussi naïfs en la matière de polyèdres que les autres. Ce que j'ai trouvé est que le synchrétisme n'est pas "des choses liées ensemble", que l'indifférenciation ne tient pas à des liens, que bien au contraire, les liens différencient, et donc que la détermination des signes passe par la différenciation des objets, que les objets ne se décantent pas tant qu'ils ne s'affinent pas, mais se séparent en multiples objets, et que parler en terme d'affinement ou de détermination d'un objet ou noter qu'il ne s'agit pas de mêmes objets, n'est qu'une question de point de vue.

Ainsi cela n'a pas de sens d'étudier les polygones avec les enfants de 8 ans, parce que polygones, étoiles, cercles, et même polyèdres vont passablement ensemble. Que les objets qu'ils ont sont 2D/3D et ni isolément 2D ou isolément 3D etc.

3° J'ai donc, et je reviens à des formulations plus difficiles, deux pièces déjà en place:

1° Ce qui modélise le dispositif «physique» dans le creuset duquel se font les expériences n'est pas exactement le schéma de savoir que l'on veut enseigner, il y a hiatus, abduction nécessaire, l'expérience est un signe, la relation entre expérience et savoir à enseigner est symbolique et l'expérience est la part indiciaire de ce rapport.

2° L'organisation de l'expérience dans mon pilotage procède de catégories qui ne sont pas celles qui régissent l'expérience des élèves, si le projet peut se diriger sur une métaphore, sa réalisation se cale sur un diagramme, mais ce seront d'autres diagrammes et métaphores qui oeuvreront pour les élèves.

Il y a sans doute d'autres pièces. On peut considérer les affirmations ci-dessus comme un développement de mon *schéma règles-expérience-logique* (texte en chantier, non disponible).

*

3 septembre 2009

J'ai trouvé le joint entre expérience et catégorisation, les phénomènes dont on fait l'expérience viennent modifier les catégories qu'on se faisait, en liant sous un même phénomène des choses qu'on aurait autrement distinguées ou en liant sous une analogie des phénomènes concernant des choses distinctes.

Exemples :

Sur un papier plié en deux, on fait deux découpes de ciseaux et on obtient des quadrilatères mais aussi bien des hexagones ou octogones et des polygones ou des étoiles.

Avec un disque coupé le long d'un rayon on peut faire un chapeau chinois, avec sommet au centre - si la coupe est aussi longue que le rayon - et sommet décentré - si la coupe est plus petite ou plus grande que le rayon. Ces deux cas sont analogues mais se présentent différemment. Dans ces bricolages, lorsque la coupe est de longueur du rayon, le bord du disque de départ s'enroule sur lui-même, en cercle, et sur un plan, et lorsqu'elle est de longueur plus petite ou plus grande, selon une spirale sur la surface du cône obtenu. Ainsi on met en lien des choses qui au départ sont données comme différentes. Ce qui est aussi intéressant ici est que l'on relate l'expérience en déterminant 3 cas dans un continuum : plus petit égal ou plus grand que le rayon. Lorsqu'on a fait cela on n'a plus un processus, continu, d'expérience : variation de la coupe, mais une nouvelle catégorisation : 3 cas en ressortent.

Lorsque les élèves disent du cône droit : "c'est un chapeau chinois", et du cône non droit : "c'est une pyramide", on a modification de catégories par analogie. Cet exemple est certes un peu faible. J'en donnerai d'autres.

Si on veut rendre compte des choses un peu mieux, on doit dire qu'il y a travail de différenciation et travail de réorganisation (catégorisation). On ne peut catégoriser que de la variété, mais celle-ci n'est pas donnée, elle est produite par différenciation. Et ces différences, produites et signifiées par des objets ou soit des choses, soit des mesures comme avec l'exemple de la coupe du rayon, mais on aurait aussi pu varier l'angle de coupe et ne pas couper sur un diamètre mais sur une corde, etc.

Par exemple, je demande aux élèves de déterminer et de vérifier le centre d'un disque de papier (et si besoin est, je suggère de le faire par pliage). Beaucoup d'élèves se contentent de plier un diamètre et de prendre à l'œil il le milieu du bord droit. D'autres proposent deux plis. Pli par un diamètre, dépliage et pli par un autre diamètre transversal et en général grosso modo à angle droit. Ils disent par exemple : "plier dans les deux sens" ou "plier et plier de l'autre côté". Ensuite assez vite le disque va se trouver plié en quatre (si je puis dire ainsi : une fois en quatre et plus seulement deux fois en deux). Lorsque je leur montre un pliage qui met en évidence que deux diamètres (ou plus précisément) un rayon coupe tout diamètre au centre quel que soit l'angle que fait le rayon, en ne pliant pas en quatre mais pliant un feuillet demi disque et pliant un secteur de grandeur quelconque, en m'assurant que le pli se fasse

bord à bord, les élèves hésitent ne savent pas si cela va donner le centre. Puis une élève me dit que cela pourrait marcher si mon pli était fait de sorte que cela donne un tiers car dans ce cas là je puis plier mon demi disque en trois parties qui se recouvrent exactement. On voit ici qu'elle amalgame différentes choses : les parties pliées se recouvrent exactement, bord à bord et/ou surface à surface, et la pointe du secteur ainsi plié est au centre du disque (puisque une fois déplié, j'aurais 6 tranches de pizza). Or dans ma construction du centre du disque par pliage, la seule chose qui compte est de contrôler est que le bord recouvre le bord. Ce qui revient à faire que le pli finisse sur le bord, perpendiculairement à la tangente au bord, et assure que le pli sera le long d'un diamètre. Propriété qui est déjà celle qu'on utilise pour le pli du disque en deux et qui, dans ce cas, entraîne que les deux demis disques coïncident. Donc on travaille à différencier les choses, les désamalgamer au profit de liens étonnants.

C'est ceci que je ne maîtrise pas encore bien, mais qui est en jeu dans toutes mes expérimentations avec les élèves autant qu'avec mes étudiants.

*

4 septembre 2009

Hier, j'ai trouvé un joint entre expérience et catégorisation (du divers empirique) : les phénomènes dont on fait l'expérience viennent modifier les catégories qu'on se faisait, en liant sous un même phénomène des choses qu'on aurait autrement distinguées, ou encore en liant sous quelque analogie des phénomènes concernant des choses distinctes.

Voici quelques exemples.

1) Exemple (antédiluvien)

Sur un papier plié en deux, (activité des manuels suisses romands 1997, *Plier Couper* 3P ou 4P) on fait deux découpes de ciseaux et on obtient des quadrilatères mais aussi bien des hexagones ou octogones et des polygones ou des étoiles. Le mode de découpe met en relation des choses qu'on distinguerait autrement : des carrés ne sont que des octogones aplatis en 4 coins, et si on enfonçait encore plus dans les coins donnerait une étoile à quatre branches. Ceci est lié à une autre variation, celle des angles de découpe dans le feuillet. On a donc un diagramme faisant correspondre une variation d'angles à une variation de formes, qui à la fois lie des formes que l'on aurait intuitivement distinguées comme des choses tout à fait étrangères, et qui d'autre part, réduisent ce continuum de variation formes/angle de découpe en quelques cas significatifs, et ici sous l'idée directrice d'une analogie d'un octogone flexible dont on enfoncerait certains coins : et passant de pointu (octogone) à plat (quadrilatère) pour finir enfoncé (étoile à 4 branches) : trois cas, trois catégories pour saisir le divers empirique.

2) Exemple M. et L., séance du 12 janvier 2009

Avec un disque de papier, coupé le long d'un rayon, on peut faire un chapeau chinois - analogie, ayant sa pointe/son sommet à diagramme - au (dessus du) centre (de sa base) si la coupe est faite de la longueur exacte du rayon, de son extrémité au centre du disque. La pointe/le sommet sera par contre décentré (relativement à la base du chapeau/cornet) si la coupe est plus petite ou plus grande que le rayon. Ces deux cas: coupe plus petite ou plus grande que le rayon, sont analogues mais se présentent différents. En particulier, le chapeau penchera dans un sens ou dans l'autre.

Ces choses peuvent être mises en relation - diagramme - avec un autre phénomène que l'on observe bien lorsqu'on enroule le papier en chapeau/corner. Dans ces bricolages, lorsque la coupe est de longueur du rayon, le bord du disque de départ s'enroule sur lui-même, en cercle, et sur un plan, et lorsqu'elle est de longueur plus petite ou plus grande, elle le fera en spirale sur la surface du cône obtenu. On a donc mis sous un même phénomène cercle et spirale. Ainsi on met en lien des choses qui sont données culturellement comme différentes.

Ce qui est aussi intéressant ici est que l'on relate l'expérience en déterminant 3 cas dans un continuum : plus petit, égal ou plus grand que le rayon, mis en relation avec deux catégories : chapeau droit et chapeau penché, éventuellement dans un sens et dans l'autre. Lorsqu'on a fait cela on ne considère plus que quelques cas significatifs d'un processus continu d'expérience : variation de la coupe. On peut aussi se demander ce qui se passe si on coupe non pas le long d'un diamètre mais le long d'une corde, donc en variant cette fois l'angle de coupe, comme dans le premier exemple et pas la longueur de la coupe. Dans ce cas, le phénomène d'enroulement en spirale apparaît encore plus manifestement.

Lorsque les élèves, comme le fait M. le 12 janvier 2009, disent du cône droit : « c'est un chapeau chinois » et du cône non droit, « c'est une pyramide », des catégories différentes viennent se télescoper et sont mises elles aussi en relation. Cet exemple est certes un peu faible. J'en donnerai d'autres. Moi j'avais dit aux élèves de Chamoyron que je pouvais faire une casquette chinoise, donc un autre jeu de rapprochement basé sur cette analogie. Il se trouve alors que les enfants ont demandé de faire la visière et que cela a produit quelque chose de fort intéressant car on peut superposer (par dessus) un chapeau chinois droit à un chapeau chinois penché, et obtenir par pliage la visière de la casquette en pliant la partie qui dépasse du cône penché le long du bord du chapeau chinois droit. On voit ici ce qu'une analogie peut produire d'intéressant géométriquement.

Si on veut rendre compte des choses un peu mieux, on doit dire qu'il y a un double travail de différenciation et de réorganisation (catégorisation). On ne peut en effet catégoriser que de la variété, mais celle-ci n'est pas donnée, elle est produite par différenciation (en déliant les choses). Et ces différences, produites sont signifiées en les relatant à des choses, voire à des nombres, par exemple des grandeurs (éventuellement mesurables) comme dans l'exemple de la longueur de la découpe ou de l'angle de la direction de découpe.

3) autre exemple, M. et L., séance du 12 janvier 2009.

Par exemple, je demande aux élèves de déterminer et de vérifier le centre d'un disque de papier. Ils le font en pointant le crayon, à l'œil. Les deux élèves ne marquent pas le même point. Qui est le plus proche du centre ? Pour le savoir, j'en viens à leur suggérer de faire un pliage. Au début, L. se contente de plier son disque bord à bord (recouvrement aussi des deux demi-disques) le pli se marque le long d'un diamètre quelconque (qui n'est déterminé que par le pli effectué). Il commence par examiner si son point est sur le pli ou pas et lequel des deux points marqués est le plus proche du pli. Mais il n'y a pas de geste particulier pour déterminer si le point est au milieu du pli, bien qu'il semble qu'il l'ait jugé à l'œil. Il est clair que les points sont plus ou moins au milieu. Mais se fait jour (ici et à Chamoyron) une ambiguïté entre les termes : "milieu" et "centre" (à Chamoyron, élèves de 8 ans, ils semblaient ne pas connaître la signification du mot centre pour un disque ou un cercle). Néanmoins, il semble plus facile de juger à l'œil le centre, maintenant qu'il est le milieu du bord droit du pli. C'est aussi pour eux plus facile d'en parler, maintenant que les choses se présentent ainsi.

Au cours de la discussion et vu mes questions, l'un ou l'autre des deux propose de faire un second pli. L. procède ainsi : il fait le second pli après avoir déplié le premier. Le second pli est fait transversalement à la direction marquée par le premier pli, approximativement à angle droit. Il me semble que L. dit ó à vérifier ó qu'il faut "plier dans les deux sens" mais il dit aussi, avant ou après ó à vérifier - "plier et plier de l'autre côté".

Ensuite, et sans doute par le fait que les plis sont marqués, le disque va se trouver assez vite plié en un feuillet cadran, grosso modo tout superposé.

Je fais un pliage double (combinaison de deux plis, et non pas succession de deux plis en dépliant entre les deux), en leur déclarant : "quelqu'un m'a dit qu'on obtient ainsi le centre du cercle". Je voudrais mettre en évidence la propriété que tous les diamètres d'un cercle se coupent au centre, ou que tous ses rayons convergent au centre, ou encore, dans ce cas précis, qu'un rayon coupe un diamètre au centre (vous remarquerez la variation des formulations de la propriété que je veux mettre en évidence).

Les élèves ont déjà une idée de ceci, ne serait-ce que par l'image d'une roue de vélo, mais aussi celle des tranches de tartes. Mais je veux leur faire rencontrer cette propriété dans un contexte, dans une expérience, non habituelle pour eux. Je veux savoir si le fait de plier à angle droit est pour eux important, significatif. Je fais l'hypothèse que oui. Je fais aussi l'hypothèse que c'est important, dans ce contexte là, dans cette logique du pliage dans laquelle je les ai engagés.

Je plie donc un disque en deux, et je replie le feuillet demi disque obtenu selon un petit angle, $< 90^\circ$ - catégorisation à fin ostensive de la part de l'expérimentateur - en appliquant soigneusement le secteur replié, bord à bord. Je me garde bien de déplier le tout et je demande si cela donne le centre. Les élèves hésitent ne savent pas si cela va jouer. Puis M. me dit, non sans confusion dans l'expression de son idée, que cela pourrait marcher si mon pli était fait de sorte qu'au final tout se superpose (ce qui est facile à réaliser, comme plier une lettre officielle en 3). Ceci revient à plier le feuillet demi disque en trois (et à 60 degrés). Ceci révèle que dans ce contexte, au moins trois choses différentes sont peu ou prou confondues :

- le pliage bord à bord - un segment de ligne coïncide exactement à un segment de ligne, c'est possible parce que le dispositif disque de papier, prend en charge que la courbure de cette ligne de bord est constante, propriété du cercle ;
- les surfaces rabattues les unes sur les autres se recouvrent exactement ;
- la pointe du secteur ainsi plié est au centre du disque.

Ensuite on déplie et on examine ces choses. Ce n'est pas extraordinairement visible parce que le pauvre disque se trouve plié de diverses manières. Cela a alors donné lieu à d'autres rebondissements, en liaison avec ce que nous avons fait auparavant qui portait sur les fractions.

Pourquoi les fractions? Parce que disques de papier et secteurs sont utilisées pour illustrer les fractions, et parce que le développement d'un cône est un secteur de disque, et parce que plus l'angle de ce secteur est petit plus le cône sera pointu, et parce que il y a analogie entre cônes et pyramides et que plus les angles des sommets des faces de la pyramide sont aigus (ou plutôt, plus leur somme sera petite), plus la pyramide sera pointue, ou encore les pyramides que l'on peut faire avec le jeu de

plaques polydrons seront de moins en moins hautes que leur base sera plus grande. Propriété qui intervient directement dans la détermination des polyèdres parfaits ou encore celle des deltaèdres ...

Dans la détermination du centre du disque par pliage, la seule chose qui compte est de contrôler que le bord recouvre le bord, ce qui est possible vu la propriété du cercle d'être une courbe à courbure constante. Il ne s'agit donc plus que de faire l'ajustement qui réalise cette possibilité. Or si on procède à un tel pli, bord à bord du disque, le pli ainsi marqué sera un diamètre. Pourquoi ? Parce que le pli viendra finir perpendiculairement au bord du disque, finir perpendiculairement veut dire qu'en ses extrémités, il sera perpendiculaire à la tangente au bord et ceci parce qu'on fait coïncider les bords des feuillets. C'est ainsi que la propriété de courbure constante du cercle est liée à celle qui veut que les rayons soient tous perpendiculaires à la tangente à leur extrémité et que par conséquent, ils soient tous convergents en son centre. Là encore, cela est à la charge du dispositif : disque de papier et pliage. Cette propriété apparaît dès le premier pliage. C'est elle qui fait que le pli d'un disque plié en deux moitiés se superposant, se fera le long d'un de ses diamètres. C'est ce qui lie diamètre et moitié, lien qui est signifié par son nom où dia et mètre. Plier en deux un disque en s'assurant que les bords coïncident exactement amène à superposer exactement deux demi disques et fait que le pli se marquera le long d'un diamètre.

Dans le creuset de cette expérience, toutes ces propriétés, tous ces aspects, sont co-présents, mais dans l'expérience ils sont amalgamés, largement confondus. Organiser l'expérience et en trouver un sens revient à les distinguer en les reliant où ici dans une certaine hiérarchie : la seule chose qui compte est de faire coïncider bord à bord les parties pliées. On travaille à différencier les choses, les désamalgamer au profit de liens étonnants.

Ce n'est pas ce que je vous aurais raconté hier, j'ai d'autres narrations à faire en m'appuyant sur les trois séances avec M. et L. Ce que je viens de vous narrer est encore assez neuf pour moi, du moins dans le fait de pouvoir l'écrire. Je dis ici quelque chose que je ne maîtrise qu'imparfaitement, même si il y a belle lurette que c'est au cœur de toutes mes expérimentations tant avec les élèves qu'avec les étudiants à Unige (et avec moi-même, bien entendu).

*

Esquisse de conclusion.

Et les élèves dans tout ça, qu'en retirent-ils ? C'est cela que devrait me permettre d'aborder la question *catégorie et expérience* que j'ai commencée à examiner - en analysant avec les notions de *diagrammes et analogie*. Un cadrage.

De plus ce qui ressort de mes vidéos est la différence de ce que ces expériences représentent pour les élèves de 8 ans de Chamoyron et pour les élèves de 13 ans de Pré-de-Vert. On pouvait le savoir d'avance, mais là on le voit et on le voit sur des expériences pour lesquelles manifestement ils sont aussi naïfs les uns que les autres. J'entre-aperçois ici comment ce sont les interprétants qui font la différence. Les néophytes ont des bribes de catégories, disjointes, comme dans l'observation : chapeau chinois, pyramide, selon les analogies, et donc selon les interprétants. Le problème n'est pas seulement que les catégories des uns ne sont pas du genre des catégories des autres, mais aussi et peut-être bien surtout que, pour une même personne, les genres de catégories locales sont très disjointes.

Cette affaire de catégorie et expérience est ce que j'ai compris en 2008-2009 et porte justement sur ce qui résistait à mon intention de faire faire des expériences.

FC

4 octobre 2010

À ddmes

Considérer dans le mot « faire des maths » un corrélat entre une activité et un milieu que l'on constitue.

Je réfléchis ces temps à mes cours mais aussi à la question suivante : pourquoi faire des maths? Quoi de neuf ?

Tout cela provient de ce que pour mes cours j'ai donné l'exemple des constructions géométriques à la règle et au compas, et que j'ai posé à mes étudiants la question: d'où ça vient donc cette affaire de règle et de compas?

Il apparaît en effet que cette question est rarement posée, les élèves et les étudiants, qui sont d'anciens élèves prennent cela comme un donné. Certes ils se font tous une idée vague que cela vient des grecs, etc. Mais ces explications sont culturelles et ce qui n'est pas fait est le lien entre leur apprentissage des maths et ces données culturelles. C'est pris comme une sorte de convention, comme par exemple danser la valse cela se fait ainsi et pas autrement ou que sais-je encore? on s'habille de telle ou telle manière quand on entre dans une église... Il est clair que si on danse la valse comme il faut, on va faire une expérience inoubliable, et à laquelle bien peu d'autres techniques pourraient nous donner accès, tout comme si tu fais un trekking au Ladakh, du Yoga, du Tai Chi, que tu bois un Bordeaux grand cru, ou si tu sniffes de la coke etc.

Je me suis demandé ce qu'apportait l'expérience de l'apprentissage du maniement de constructions à la règle et au compas, et j'ai aussi cherché, à un autre plan, quelle initiation cela pourrait représenter aussi. Je complète en considérant en quoi cela transforme et ouvre le monde maths des sujets. Pourquoi la-règle-et-le-compas renvoie au mystère des nombres. En gros ce qui se cache, de mathématique, derrière des choses facilement accessibles que sont le tracé de la circonférence d'un cercle, celui de la diagonale d'un carré et dont on ne peut pas soupçonner le statut mathématique, puis, un nombre qui se révèle à l'étude fort complexe et qui pourtant est productible à volonté pour autant que l'on soit initié à quelque technique instrumentée en quelque sorte.

Ce qui se passe avec la règle et le compas dans l'enseignement est que la technique instrumentée a supplanté le mystère, ou plutôt que l'initiation à cette question, à ce mystère, devient réservé à ceux qui maîtrisent la technique et l'instrument : "nul n'entre ici s'il n'est géomètre" semble bien ancré dans les consciences car ceux-là mêmes qui n'ont pas acquis la maîtrise des techniques et des instruments que sont règle-et-compas, réagissent à la question : pourquoi ? d'où cela vient-il ? comme quelque chose ne les concernant pas, un truc de géomètre, justement.

C'est bien sûr une question de dévolution : dans l'enseignement des maths qu'on donne ici, la réussite technique est comme condition de la dévolution. Et à cela il y a au moins une bonne raison : c'est que les objets maths sont tributaires de définitions et de techniques. C'est ce que ne cessent de me dire les matheux lorsque je leur dis que je donne un cours sur le calcul, etc. Ils pensent que ce sont des questions difficiles mais surtout bien prématurées à poser à des futurs instituteurs, faute d'expérience et faute de techniques pour les soutenir.

"Nul n'entre ici s'il n'est géomètre", ici c'est l'Académie de Platon ó si je ne me trompe ó mais si on est déjà géomètre, que va-t-on bien y faire, y étudier, y apprendre à cette académie ? A quel mystère y est-il donné d'accéder? Grosso modo c'est le mystère de la technique et de son efficience et cela renvoie au titre du célèbre article de J. Wigner : *La déraisonnable efficacité des mathématiques en sciences naturelles*. (Wigner J. 1960).

On accède au Pays de Cocagne mathématique qu'en faisant des maths, et surtout en y réussissant, il faut que les maths soient efficaces et efficaces non pas seulement culturellement, collectivement parlant, mais aussi en partie individuellement, que l'on ait pu éprouver cette efficience et efficacité, le fait de faire admettre, si ce n'est comprendre, le caractère déraisonnable de l'affaire étant du ressort et de la responsabilité de l'enseignant.

Bon j'exprime ici fort mal les pensées qui me trottent dans la tête depuis une semaine et par rapport auxquelles je voudrais resituer toute ma démarche de recherche dans l'Es ces derniers temps

.....

François

7 octobre 2010

À ddmes

Narration de recherche : constructions élémentaires avec règle et compas.

À Propos d'une recherche avec Jean Luc Dorier, Audrey Daina, Annick Flückiger et Pierre Alain Cherix au prétexte de la désaffection des maths et dont je vous ai déjà parlé plus d'une fois.

1° Je planche sur la question des constructions à la règle et au compas dans l'enseignement de la géométrie pour une raison liée à mes recherches et la question de l'expérience.

En gros la question des rapports entre le thème de l'expérience et celui de la *transposition didactique* (TD).

Depuis plusieurs années, je plaide pour un retour du savoir à l'expérience (sous forme de retour à telle ou telle expérience spécifique).

Ce retour prend son origine dans le savoir et dans les techniques que l'on maîtrise (on peut discuter le degré de maîtrise) que l'on va lier à d'autres techniques, d'un autre ordre, par exemple de pliage, de découpe de pâte à modeler, de dessin à main levée etc.

Cette origine est essentielle parce qu'elle induit les interprétants qui vont saisir le donné de l'expérience et dynamiser et orienter les sémoses.

Je sais faire cela pour moi, cela m'occupe passablement de temps.

Je puis prendre le livre de Jean-Claude Carrega *Théorie des Corps, La règle et le compas*, (Carrega J-Cl., 1981) et faire que cela suscite pour moi un retour à des expériences fort de ma maîtrise des constructions à la règle et au compas, des démonstrations et de l'algèbre.

*

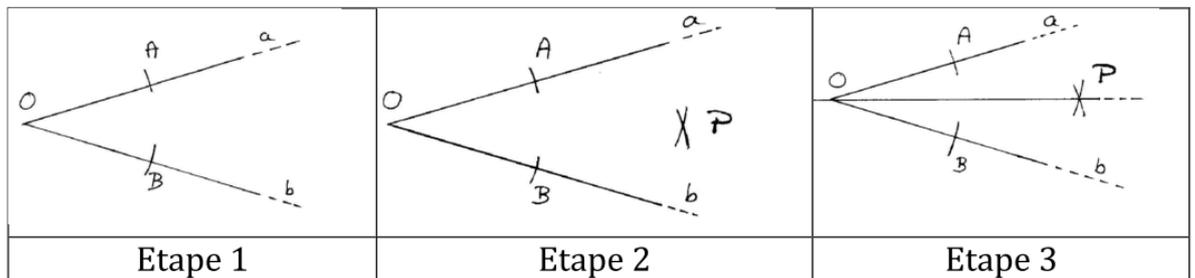
2° Dans mon séminaire de recherche, j'invite mes étudiants à faire un tel retour et tente de leur proposer des activités qui le permettent. Le gros problème que j'ai est que je ne contrôle pas l'origine de ce retour de leurs propres savoirs à des expériences que j'aimerais qu'ils fassent, et que, fort souvent, les choses tournent dans la substitution de mes savoirs sources aux leurs.

*

3° C'est aussi sur ce terrain que j'ai tenté d'amener la recherche désaffection des maths. Pour cette recherche j'ai proposé une question de construction à la règle et au compas.

Questions 2

Voici, en guise de rappel, une construction à la règle et au compas de la bissectrice d'un angle :



Cette construction aura sans doute ravivé en vous quelques souvenirs de géométrie élémentaire. Nous mettons maintenant à votre disposition du papier, un crayon, une règle et un compas pour effectuer deux constructions que nous vous demandons de faire.

1. Construisez s'il vous plaît la bissectrice d'un angle plat.
2. Construisez s'il vous plaît la perpendiculaire d'un point A à une droite d.
3. Ces rappels vous auront éventuellement suggéré une autre construction géométrique. Si oui, veuillez nous dire laquelle.

Commentaires éventuels :

3.1

Je parlais d'un prétexte de savoir qui disait que les constructions élémentaires bissectrice, médiatrice et perpendiculaire revenaient chaque fois au même, on pourrait dire à la construction d'un losange dont les lignes données et cherchées sont les diagonales. On peut discuter de ce modèle affiner, proposer d'autres modèles mais l'idée restera la même :

Il y a un moule pour ces constructions et le moule prend la forme d'une figure géométrique.

On a donc au centre de cette affaire une correspondance entre figure de technique et figure d'objet.

3.2

Je parlais de l'idée que ceci n'est pas révélé dans l'enseignement de cette matière. C'est une caractéristique de la TD.

Plus précisément encore, si j'avais à enseigner la géométrie au secondaire, je prendrais cette idée comme principe de mon enseignement. Je proposerais donc ma TD fondée sur cette idée. Je me démarquerais ainsi de l'enseignement qui est communément donné et que j'ai moi-même reçu.

On ne m'a jamais dévoilé cette affaire, on ne m'a jamais engagé à considérer que les constructions géométriques sont des modulations autour d'un même schéma.

Dès lors ma propre TD se démarquerait de celle qui caractérise l'enseignement de la géométrie.

3.3

Pour la recherche avec mes collègues, il y a eu négociations. Le groupe n'a pas pris à son compte mon idée mais a trouvé intéressant de poser la question. Nous avons donc élaboré une question qui sans aller aussi loin que mon intention, reprenait quelques aspects de cette affaire. Je me suis dit que c'était bon à prendre parce que cela me permettrait d'éprouver un peu mon idée, de voir ce que cela donne.

Une autre difficulté était que nous étions 4 à mener des entretiens et que nous ne le faisons pas du tout de la même manière, parce que, grosso modo, nous ne cherchons pas à mettre en évidence les mêmes trucs.

J'ai été chargé par le groupe d'analyser les entretiens sur cette question.

Il y a eu deux passations la première avec 6 duos : étudiant maths + étudiant instituteur, la seconde avec 8 duos : enseignant secondaire + enseignant primaire. L'analyse s'est elle aussi faite en deux temps.

3.4

Pour le premier groupe de sujets (duos d'étudiants), j'ai examiné les choses en fonction de mon idée de correspondance forme de technique et forme de figure. J'ai donc surtout précisé et formulé mon idée pour rendre lisibles les observations en fonction de mon schéma. Partant de cela j'ai dressé quelques constats, que j'ai traduits en termes de contrôles exercés par les sujets sur ce qui leur arrivait au cours des entretiens à l'occasion de constructions soit déjà effectuées, soit effectuées en cours d'entretien. J'ai parlé de contrôles intuitifs, empiriques et théoriques.

Une chose est ressortie très nettement : en règle générale, les futurs instituteurs ne s'en sont pas tenus strictement à la clause de la règle et du compas, alors que les étudiants en maths, si. Dans bien des cas, les étudiants instituteurs ont recouru à des expédients : équerre, usage des graduations de la règle soit pour mesurer soit comme équerre de fortune, tracés à l'œil. J'ai traduit cela en termes de contrôles en considérant que lorsqu'on élargit ainsi de manière ad hoc la gamme des instruments, on enrichit d'autant la gamme des contrôles que l'on va effectuer. Se limiter à la règle et au compas c'est formel en ce sens que cela est économique en contrôles exercés par le sujet ; on délègue plus aux instruments ; règles et compas prennent plus de choses en charge que lors d'un bricolage aussi astucieux soit-il avec règle, graduations de règle, équerre, compas, et que sais-je encore ?

3.5

Cela m'a amené à réorienter mon examen des données de la seconde cohorte de sujets (duos d'enseignants) sur ce dont on fait l'expérience lorsqu'on fait une construction. J'ai donc examiné avec soin ce qui se passait dans les entretiens au moment où un sujet effectuait devant les autres (son partenaire ainsi que l'expérimentateur) une construction et que tous commentent ce qui se passe. Je me suis attelé à examiner les traces laissées par ces expériences.

Ceci m'a amené à d'autres constats, en particulier que les enseignants du secondaire considéraient les constructions comme des objets, en bloc, du moins lorsqu'il s'agissait de

parler de leur réponse et de caractériser le problème mathématique posé. Par contre les instituteurs entraînent plus dans le vif de la construction hic et nunc, de ce qui se passait de cas en cas. Cela les enseignants du secondaire le faisaient aussi, mais toujours lorsqu'il s'agissait de considérer la construction de leur partenaire, soit pour la juger, soit pour le guider dans sa recherche de construction.

Les recherches sur la géométrie font des distinctions comme : *déclaratif/procédural*, ou *objet/processus*, ou *local/global* ou encore *singulier/général*. Mon constat pourrait être formulé en de tels termes. Disons donc que les enseignants du secondaire lorsqu'il s'agit soit d'eux-mêmes, soit de l'enjeu maths font des considérations globales, que les profs primaires font des considérations locales, et que les enseignants du secondaire s'ouvrent à des considérations locales lorsqu'ils se placent dans une relation didactique (soit effectivement, soit en évocation).

J'ai tenté de ramasser tout cela, en d'autres termes encore, en juin 2010.

3.6

Notre groupe de recherche voulons écrire un article avec toutes les contraintes que cela suppose. J'ai été chargé d'écrire 4 pages sur la question des constructions.

Je me suis donc contenté de reprendre à gros traits la différence entre primaires et secondaires, les deux populations (étudiants/enseignants) confondues, sur cette affaire de :

Les secondaires s'en tiennent à règle et compas, et les primaires pas.

Pour interpréter cela il faut tenir compte de deux éléments essentiels.

Tout le monde connaît cette clause et a eu l'occasion dans sa propre formation de l'éprouver, au moins comme contrainte. Ce n'est donc pas pour ignorer la clause (contrainte) que les primaires y dérogent. Souvent même ils présentent leur réponse comme une transgression. Ils motivent celle-ci par : inutilité pratique, insignifiance pour l'enseignement primaire etc.

Lorsque au cours de l'entretien on leur demande de tenter de produire une telle construction, une seule personne, une enseignante primaire, s'y refuse tout en disant que si elle y était forcée, sans doute qu'elle finirait par la trouver. Tous les autres se plient et avec bonne grâce à l'exercice. Plusieurs aboutissent. C'est là que tant l'expérimentateur que le partenaire secondaire en viennent à des considérations locales sur ce qui s'expérimente hic et nunc.

Je constate donc que c'est comme si cela avait été les sujets qui ne parvenaient pas assez rapidement à retrouver la construction à la règle et au compas qui ont eu recours à des expédients. Il y aurait donc eu de leur part une prise de décision en fonction de difficultés rencontrées. Ensuite ils rendent compte de leur décision d'une manière ou d'une autre. Et à ce moment là, on en vient à des considérations locales, ne serait-ce que parce que les contrôles pris à charge par le sujet sont bien plus conséquents.

3.7 TD

Je constate que cette clause de la règle et du compas est connue et surtout prise comme une contrainte donc comme constitutive de problème dont la solution tirera tout son sens. Faire à la règle et au compas c'est être en quelque sorte astucieux. Cela caractérise la TD de l'enseignement de la géométrie que nos sujets ont reçu à l'école secondaire.

Je constate aussi que la demande de justification, éventuellement de démonstration de validité a toujours été formulée par les expérimentateurs comme :

"comment es-tu sûr et certain que :

tu as bien construit ce qui est demandé ?
que ta droite est bien la bissectrice ?
que ta droite est perpendiculaire ?
etc."

Ces questions ont été formulées relativement à l'astuce qui a permis de surmonter la contrainte. Je constate que grosso modo les choses s'arrêtaient là.

Peu de démonstrations sont données formellement, on en est plus à des explications démonstratives.

Si les constructions géométriques sont des objets (considération globales) pour les secondaires, ces derniers n'en font pourtant pas la théorie (c'est comme si cela n'existait pas). La théorie n'intervient que dans les démonstrations de la validité de chacune des constructions.

On ne parle jamais de ce qui peut bien motiver la clause de règle et compas mais il n'y est fait que des allusions, éventuellement implicites, partagées entre expérimentateur et secondaires, voire considérations indirectes en parlant d'Euclide. Mais c'est très ténu, relativement au temps que les entretiens ont consacré à la discussion de cette question.

3.8

Les primaires ne dépassent pas les explications démonstratives donc ce que je qualifierais de *niveau local rationalisé*.

Ainsi donc, il y a quelque chose de clos, de fermé (cela rappelle le mémoire de J. Tonnelie, 1979, *Le monde clos de la factorisation en seconde*, Irem Aix - Marseille.).

Il semble que le fait de ne pas réussir à retrouver la technique empêche les primaires de considérer la chose qui importe le plus à savoir :

D'où vient donc cette clause à la fois si contraignante et si stimulante - conceptuellement parlant - de règle et de compas ?

La maîtrise de la technique permettrait aux secondaires d'entrer sur ce terrain, mais c'est comme si cela restait en a parte, qui plus est presque toujours implicite, entre eux et l'expérimentateur, comme si la présence du partenaire primaire et de son inefficience fermait la voie.

3.9

Je reformule les choses:

Les primaires sont mal à l'aise avec ces constructions, l'enjeu les engage sur l'échec, réel ou éventuel, à la question (pris comme défi) et cela finit par occuper tout l'espace de signification que peut prendre la clause de la règle et du compas.

Les secondaires ne sont pas interpellés de la sorte et par conséquent pour eux, l'espace de signification est plus ouvert. Mais, tout comme l'enseignement prodigué, ils ne font rien pour modifier la signification de la clause vers ce qu'elle est pour un historien ou épistémologue, ou pour un mathématicien qui s'intéresse aux problèmes mathématiques et pas (seulement) aux problèmes imaginés pour des fins didactiques.

Moi-même, dans les entretiens que j'ai menés, je ne viens jamais sur cette question de la clause. Je reviens sur l'expérience hic et nunc. Et je m'étonne d'avoir négligé ce point.

Cela m'a donné à réfléchir et de me trouver au bout du compte fortement persuadé qu'enseigner le motif de la clause de la règle et du compas est une nécessité. Je vois aussi par là que mon idée de retour à l'expérience est bien plus complexe que je ne me l'imaginais.

3.10

Je vois surtout comment se présente la *TD* des constructions géométriques à l'école.

Grosso modo : apprendre à manier un compas (un instrument particulier), et à comprendre en acte à quoi il peut être utile, donner des occasions aux élèves de se trouver à résoudre un problème et à argumenter pour valider leur solution, et enfin, leur donner des occasions de faire quelque chose des notions théoriques qu'on leur donne : triangles, segments, angles, bissectrices, médiatrices, perpendiculaire etc.

Cette *TD* enferme les mathématiques elles-mêmes dans le cadre de pratiques scolaires. D'une part elle empêche les sujets d'imaginer que la clause de la règle et du compas puisse être autre chose que ça. D'autre part elle met les sachants sur la réserve : on réserve cette question, ce savoir à ceux qui, parce qu'ils maîtrisent ces choses, peuvent dépasser le plancher des (problèmes) vaches.

3.11

Je remarque aussi que les choses sont toujours liées à des enjeux interpersonnels avec tous les défis et défiances qui les accompagnent.

La question que je me pose est celle-ci (on pourrait même dire que ce serait la nécessité de l'effet Jourdain) :

Est-ce que j'ai d'autre moyen que celui d'assurer aux élèves une certaine réussite technique aux constructions à la règle et au compas pour les amener à ouvrir les significations de ce qui se donne dans une telle *TD* ? J'entends par signification une clause localement contraignante et à ce qu'elle représente ou a représenté dans la constitution du savoir mathématique, ou encore le défi de savoir si tous les nombres sont algébriques de degré 2 (il se peut que cette dernière formulation ne soit pas encore tout à fait exacte mathématiquement, peu importe ici).

Dans mon cours sur vulgarisation, je bute constamment sur des problèmes didactiques analogues.

Par exemple lorsqu'il s'agit de démontrer que racine de 2 est irrationnel, qu'il y a une infinité de nombres premiers etc.

Ce sont toujours des moments difficiles de mes exposés, difficiles autant pour moi que pour mes interlocuteurs, parce que ces résultats mathématiques y jouent le rôle de repères ponctuels. Or pour tous ceux qui ne pigent pas du premier coup, alors ou bien cela les fait lâcher le cours des explications, ou bien, afin de les remettre en selle, je me vois obligé d'ouvrir la question qui alors perd tout caractère de ponctualité et rompt totalement le discours. Il devient difficile alors de reprendre après une telle dérive (de la sémiose).

Ces problèmes peuvent parfois être résolus, comme nous l'indiquent bien des discours vulgarisateurs. Ils nous montrent que c'est possible. En effet la réussite sur laquelle nous devons tabler ne doit pas forcément être effective. Les choses fonctionnent comme dans toute fiction où on peut se projeter peu ou prou dans la peau des héros. Le discours vulgarisateur peut donc fonctionner sur une réussite simplement évoquée et dont on ne demandera jamais de compte aux personnes auxquelles il s'adresse et j'ajouterais : surtout pas, pour ne pas ouvrir une boîte de Pandore.

Par exemple mon pliage pour montrer l'équivalence de la somme des puissances de 2 et de celle de leurs inverses (ce qui est banal si on considère que la seule différence entre les deux réside dans le signe des exposants).

3.12

On a donc, dans les livres de vulgarisation ce que je qualifierais de réussites sans enjeux. Et souvent par la révélation d'une astuce, ou de quelque chose que l'on présentera comme tel. Donc quelque chose de pragmatique mais non pas sous la forme : « c'est comme ça que ça marche ou/et c'est comme ça qu'on fait », mais de quelque chose qui se démarque : « avec ça, ça marche tout seul ». (Ici, on a une occasion de comprendre qu'il ne faut pas confondre pragmatique et empirique).

Dans les livres de vulgarisation ces réussites sans enjeux côtoient les surprises substituant les intrigues aux enjeux et par là on a bien quelque chose de caractère narratif.

*

4° Pour en revenir à ma démarche de retour à l'expérience, certes on doit mettre l'origine dans le savoir et de ce que le sujet réussit, mais maintenant je puis déplacer mon regard sur le savoir que l'on cible, ce sur quoi on voudrait déboucher. Il s'agit d'opérer une levée de la fermeture transpositive dont procèdent les savoirs sources pour enrichir leurs significations de celles qui concernent plus profondément les maths.

Dit autrement, l'aboutissement du retour à l'expérience hic et nunc de ce que m'apporte la pratique (enseignement) ou prise de connaissance (vulgarisation) de la règle et du compas dépasse complètement cette expérience, elle vise ni plus ni moins la question de connaître ce qui anime les mathématiciens, et, ne serait-ce que très partiellement, d'en savoir quelque chose.

Cela me rend perplexe car je vois bien que cette voie mène à faire et faire faire un grand écart.

Je suis enclin à penser que ce grand écart est nécessaire, avec tout ce que cela entraîne de fatras et de trucs inintéressants.

Mais je me dis aussi qu'il se peut fort bien que je sois devant une impasse, qu'aller dans cette voie est sans issue, parce qu'elle ne ferait que creuser encore l'écart.

FC

11 octobre 2010

Quels enjeux pour un enseignement des mathématiques?

À Luca et Christine²

Ce que je tente de faire, en particulier au travers de mon séminaire, est un peu dans une impasse. Je dois me renouveler, lutter contre l'obsolescence.

Depuis mon intervention début juin à DiMaGe, je m'explique mieux les difficultés et problèmes que me pose mon séminaire, mais aussi les recherches Chamoyron ou ddmes.

La question est déjà formulée dans le texte Bombannes (Conne F. 2009a et b.) au tout début, c'est celle du lien entre ce dont les activités en classe font faire comme expérience et le monde mathématique.

Par exemple dans la recherche désaffection (DiMaGe), le lien entre ce dont il est question dans les entretiens lorsque un enseignant du primaire se débat à retrouver comment construire une perpendiculaire à une droite passant par un point A (pris sur la droite ou hors de la droite), et ce que cela peut bien signifier pour la géométrie.

C'est le lien entre ce qu'on fait apprendre à l'école et sa propre expérience, mais analysé un peu plus finement. En effet il faut voir le lien entre ce que l'on fait faire en classe et sa propre expérience disons extra scolaire, puis c'est le lien entre ces savoirs et ce dont les activités de classe hic et nunc suscitent, et enfin c'est le lien entre ce que l'on fait apprendre en classe et la connaissance du monde, disons scientifique ou intellectuel, et jusqu'à la connaissance de la manière dont nous connaissons le monde. Dans Francis Borceux, *Invitation à la géométrie*, 1986, p. 31, j'ai lu : "Aristote écrivait : *Pour Thales la question fondamentale n'était pas : Que savons-nous ?*, mais : *Comment le savons-nous ?*".

Ça fait beaucoup de choses.

Une partie de ce que nous explorons dans le séminaire a trait au second des liens : quels liens entre ce que le compas ou le pliage me livrent comme expériences et le savoir mathématique ? Donc le lien entre le milieu instrumenté et le savoir.

Un problème est qu'il ne va pas de soi que ce lien mérite d'être étudié (quelle pertinence pour quelle légitimité ?), pour la simple et bonne raison que les instruments et les pratiques instrumentées sont extrêmement sophistiqués et que donc il y a là quelque chose d'inaccessible et qu'il faut faire avec. C'est d'autant plus clair que l'on va vers l'usage d'instruments informatiques.

Dit autrement, ces boîtes ne peuvent pas être entièrement ouvertes et le seraient-elle, qu'on n'y gagnerait pas nécessairement grand-chose. Néanmoins ces boîtes agissent sur le milieu en l'enrichissant de leurs produits et ces derniers sont liés à ce qui les constitue.

² Lucas Del Notaro et Christine Del Notaro

Ce que je me dis et me suis dit jusqu'ici est que de toutes les manières ce qui est important est d'apprendre aux gens à lier expérience et savoirs, à faire usage de ce qu'on leur enseigne pour appréhender, penser et questionner ce qui leur est donné par expérience.

Dans ce cas, il y a opportunité à réfléchir sur l'expérience que me livre la pratique de constructions à la règle et au compas, ou le pliage ou encore un logiciel, même si ces exemples ne sont pas nécessairement les plus pertinentes ou légitimes.

Lié à ce problème le fait que l'on n'enseigne pas les maths pour apprendre aux gens à lire, interpréter, questionner ou tenter leurs propres expériences.

On leur apprend les maths pour les introduire à se situer et se projeter par rapport à un autre monde. On leur apprend un rapport aux maths.

Je me dis que ces problèmes que je vois sont tellement fondamentaux que les matheux et didacticiens des maths qui daignent m'écouter ne le font que poliment.

Ces maths par rapport à quoi il s'agit de se situer, de se placer, se projeter - dans sa vie - ne seront jamais quelque chose qui a un lien évident à ce dont on fait l'expérience hic et nunc.

Je m'explique avec l'exemple de l'algèbre, de la règle et du compas, du *õ*à bas Euclideö prononcé par J. Dieudonné et des logiciels dynamiques genre *Cabri* ou *Geogebra*.

Je commence par l'algèbre. Il est clair que ce que la géométrie traditionnelle se ramène actuellement à l'algèbre. De là le *õ*à bas Euclideö de J. Dieudonné qui dit ceci *õ*à bas Euclideö à l'école car c'est dépassé, obsolète et c'est faire perdre leur temps aux élèves, à moins que l'enseignement des maths soit destiné à nôtre que métaphorique. Bref J. Dieudonné parle de transposition didactique.

Il est clair que ce qu'il faut enseigner sont les instruments qui servent actuellement, qui sont à jour dans les pratiques mathématiciennes. Il est donc clair qu'il est plus indiqué d'enseigner l'algèbre et encore plus l'usage et la pratique de logiciels et autres calembrettes que la géométrie traditionnelle.

Du moins il est clair que c'est ce qui convient si on veut former des mathématiciens et ingénieurs à la page.

C'est ainsi que j'ai été formé, par exemple à l'algèbre et c'est par l'algèbre que j'ai été introduit aux coniques, figures géométriques, et aussi par l'analyse (étude des fonctions), mais pas par la géométrie. J'ai constaté qu'il en allait exactement de même - 30 ans plus tard ! - pour ma fille Aline lors de son bac. J'ai évoqué ceci dans une conférence (à l'Université du Québec à Trois Rivières) dont il est sorti un article (Conne F., 2007) où j'ai utilisé la formule: *õdes théories sans objets pour des objets sans théorieö*.

Dans le cas des coniques, exemple repris dans cet article, la théorie sans objet est l'algèbre et l'objet sans théorie sont les coniques. On a donc illustré la théorie algébrique sur un objet que certes l'algèbre permet de traiter - et avec quelle efficacité! - mais qui n'en fait pas pour autant la théorie. Notez que, historiquement parlant, le mouvement a été exactement dans l'autre sens.

On enseigne donc l'algèbre comme technique pour résoudre des problèmes de coniques. Le hic, c'est que la réalité de ces problèmes est réduite à un faire valoir : illustration et exercice pour ces techniques. Par une telle inversion d'objet, la didactique a produit quelque chose de bien ficelé, certes, mais de fermé. Comme j'ai pu le constater avec la scolarité de ma fille, cette production didactique a la vie dure !

Cela me pose deux problèmes de fond.

Le premier est *oprospectif*, apprendre ces techniques, comme l'algèbre, ne débouche sur rien, sauf sur poursuivre des études de maths, de physique ou d'ingénierie. Donc pour la très grande majorité des élèves, cela ne débouche sur rien ; ils ne pratiqueront jamais plus ces choses et ils ne verront jamais non plus en quoi ces choses ont un impact sur ce dont ils feront l'expérience. Bref, on leur enseigne des techniques qui ne leur serviront à rien qui ne leur permettront jamais de faire quoi que ce soit, si ce n'est d'avoir accès à telle ou telle profession parce qu'elle le demande en prérequis.

Ainsi on peut se demander à juste titre à quoi bon ? Surtout qu'il existe des logiciels qui font le travail technique algébrique. On a laissé tomber le calcul des logarithmes depuis qu'on a des calculettes, pourquoi n'en irait-il pas de même avec l'algèbre ? La question est difficile et reste ouverte, car on mesure mal tout ce que l'algèbre apporte. Pourtant elle n'est pas nouvelle, mais force est de constater que l'école pas plus que le système d'enseignement ne savent qu'en faire.

Il reste que si faire de l'algèbre ou manier des outils informatiques s'impose pour être dans le coup, cela laisse ouverte la question : à quoi bon être dans le coup et dans le coup de qui ou de quoi s'agit-il d'être ? ("nul n'entre ici s'il n'est géomètre", mais où donc s'agit-il d'entrer ?)

Admettons que ce qui est pertinent de faire faire à l'école est de mettre les élèves dans le coup des maths actuelles. Donc apprendre l'algèbre ou d'autres techniques, informatiques par exemple.

Une chose est certaine. Dans ma scolarité secondaire, on m'a fait apprendre le maniement de la règle et du compas, et c'était déjà assez obsolète comme technique (même pour le dessin technique), ce que n'était quand même pas l'algèbre. Et on m'a fait faire pas mal d'exercices dont certains subtils ou difficiles. Et même si, en ce qui me concerne, je les ai fort souvent trouvés plaisants à faire, cela ne m'empêche pas de me demander pourquoi donc en rester à de telles vieilles lunes.

Notons aussi que la règle et le compas n'ont pas disparu mais au contraire on les fait faire avec des logiciels dynamiques tels *cabri* ou *geogebra* et que justement la tentative de faire faire de la géométrie autrement, avec des outils bien plus différents encore rendus disponibles par l'informatique, je veux dire par *logo*, a totalement disparu. On n'en restera sans doute pas là. Personnellement, je ne sais pas ce que l'avenir innovateur nous réserve.

On a fait comme avec les coniques et l'algèbre, ces sujets vieilles lunes de mathématiciens sont devenus des illustrations pour des techniques qui les ont dépassés totalement. Et pourquoi donc ? Pour sauver la tradition ? Il y a de cela, mais dire ainsi est trop court. Ce qu'il faut considérer est que c'est une culture, c'est quelque chose d'un milieu disons existant, et

qui est, du moins pour un bon moment, encore relativement accessible. On pourrait dire : cela fournit un milieu culturel d'efficacité qui permet d'exercer ses techniques. On fait fonctionner les instruments : algèbre, informatique etc., pour ce qu'ils permettent de réussir.

Mais quelle expérience cela suscite-t-il ? Voilà le problème. Par exemple si un instrument comme le compas est obsolète il n'y a plus lieu de donner une quelconque importance à comment il fonctionne et ce à quoi sa pratique nous donne l'expérience.

Certes cette expérience nous la faisons, mais c'est purement "pratique", ou, si on la commente, ce sera pour se corriger et s'améliorer, mais cela reste quelque chose de technique, qui n'a pas de valeur mathématique et ce ne sont que des considérations sur les moyens et on se doit d'être le plus économe possible sur cela, n'expliquer que si la situation l'impose, parce que l'élève n'arrive pas, se trompe, reste trop maladroit etc. Et on ne parle d'ailleurs jamais du compas, mais de comment le tenir et le faire tourner sans à-coups.

Il se présente la même chose exactement avec les erreurs en calcul. Il en va exactement de même avec tous les autres instruments et ce d'autant plus que les instruments sont complexes et sophistiqués, sont construits sur d'autres instruments.

Donc l'expérience que suscitent ces pratiques et avec quoi le sujet est aux prises n'est pas prise comme objet, elle reste en quelque sorte sous-jacente, secondaire, dont la ou les significations ne sont qu'occasionnelles, parce que provoquées par l'usage des instruments.

On a donc ceci que :

a) À l'avenir : la plupart des gens n'auront plus jamais affaire à ce qu'on leur enseigne, tout ce qu'on peut livrer comme message est le suivant : ces techniques, cette science, cet art, permettent aux hommes de réaliser des exploits et des choses formidables, et à vous, si par aventure vous décidez de vous y vouer.

b) Au présent : leur expérience actuelle reste contingente, dévolue au service exclusif de techniques auxquelles le sujet n'aura plus jamais affaire. Pourtant il se passe quelque chose de tangible dans cette expérience et on peut, moyennant les défis scolaires, établir une analogie entre ce que cela vous permet comme exploit, hic et nunc, et les exploits des mathématiques (grâce à ses champions, voire demi dieux - on est quasiment encore en Grèce).

La question est donc bien le lien entre expérience actuelle, qui se trouve au niveau de ce que les instruments sont et permettent et ce pourquoi ces instruments sont faits, qui dépasse totalement et les instruments et, a fortiori, l'expérience que ces instruments vous procurent.

c) Au passé : d'où vient-il que ces instruments ont existé, qu'ils aient été élus comme emblématiques et qu'ils soient ensuite tombés en désuétude ?

On a vu que ce n'était que métaphoriquement, via les défis, ce que, dans le jargon didactique, on nomme problèmes qui est un interface entre défis scolaires et questions scientifiques et philosophiques de la culture. (C'est à cela que Dieudonné en avait, il a écrit sur cette question exactement et, en particulier, il s'en est pris par exemple à I. Lakatos lorsque ce dernier dans *Preuves et Réfutations* (Lakatos I., 1984) s'est intéressé à un événement de l'histoire des polyèdres pour illustrer toute une philosophie, ce que Dieudonné a trouvé critiquable vu que pour lui ce problème était tout à fait anodin au regard de l'histoire des maths).

On peut voir, dans *Théorie des corps. La règle et le compas* de J.-Cl. Carrega (Carrega J.-Cl. 1981) justement que c'est sous forme de problème que la chose est présentée.

La question est donc celle-ci : on a vu combien était problématique pour un élève de faire le lien entre ce dont il est amené à faire l'expérience hic et nunc en classe et les maths, parce que cela, l'enseignement, par manque de temps, ne fait que de le repousser au bout d'un cursus qui pourtant ne sera parcouru en entier que par de rares élèves. Est-ce que la pratique en classe de la règle et du compas me permettrait de saisir quelque chose de la tradition que cela a représenté ? Bien sûr que non ! Exactement comme pour les maths actuelles, cela est réservé à ceux qui réussissent suffisamment à ces techniques pour pouvoir les considérer de haut, pour se sortir des enjeux dans lesquels les défis artificiels que sont les exercices et problèmes scolaires les auront enfermés.

Dit autrement, la projection dans laquelle se donne l'enseignement des techniques illustrées sur des thèmes traditionnels, se dirige à l'opposé de toute prise en compte des origines. En effet, cette prise en compte nécessiterait que ces thèmes soient considérés pour eux-mêmes et pas comme faire valoir de ce qui les a dépassés. Il faut retrouver une (des) problématique(s) résolue(s) et dissoute(s).

Je parle d'expérience car c'est exactement ce qui s'est passé pour moi dans l'enseignement de la géométrie reçu en 8ème et 9ème, et où j'excellais. Mais je n'y ai rien appris sur les instruments, ni sur ce qui nous avait valu cette focalisation sur ces instruments, je n'ai rien appris sur l'histoire culturelle et encore moins didactique de cette chose, curieusement d'ailleurs on m'y aura initié à deux choses :

- à trouver des solutions astucieuses parce que indirectes et très économes ;
- à démontrer -

et j'y aurais appris, "par tournure d'esprit" à m'expliquer tout cela, en particulier en n'acceptant jamais quelque chose autrement que comme je le comprenais, certes dans les limites d'un horizon de potache. Néanmoins, vu mon aisance en ce domaine, je pouvais me payer un tel "luxe" (en particulier cela ne me laissait pas trop longtemps dans la confusion).

Cela m'aura introduit aux maths. D'abord parce que cet enseignement, curieusement, se donnait pour un enseignement de maths modernes ou au moins pour la marche qui les précède immédiatement. Et j'ai cru à ce boniment. D'ailleurs effectivement, c'était la géométrie traditionnelle déjà revue d'un certain où il proche de maths modernes - cette géométrie était réordonnée sur la notion de symétrie axiale, et s'opposait au slogan où bas Euclide. Ensuite, cela m'a amené aux études de mathématiques à l'université. C'est alors seulement que, très marginalement, discrètement, et lentement, j'ai commencé à apprendre d'où cela venait et en quoi cela avait été dépassé, débordé par la science mathématique, en particulier à la faveur de l'algèbre, mais pas celle des calculs tarabiscotés de l'école secondaire, celle des structures algébriques, dont numériques.

Sans doute par éducation, je n'ai jamais adhéré à faire de mes expériences propres quelque chose qui se cantonnerait au privé, voire à l'intime. Je parle ici des trucs par lesquels on se tire d'affaire mais qu'on garde pour soi et souvent auxquels on ne porte pas plus d'attention qu'à

ne le faut, parce que ce qui importe est de réussir à la science instituée et à ses modes, normes et habitudes.

Je résume : apprendre la géométrie comme je l'ai fait dans les années 61-67 m'a introduit à tout autre chose qu'elle : les maths modernes et leur insistance sur le théorique et le formel (et, par la bande seulement, sur l'expérientiel). Ce n'est pas un contre sens, mais cela veut dire que dans mes études mêmes, je visais autre chose pour moi que d'apprendre la géométrie euclidienne. Mais cela fait que je suis passé à côté de plein de choses dont cet enseignement prétendait être porteur. Dit autrement l'aisance que cet enseignement me permettait de témoigner à l'école et en famille et me servait de tremplin pour me projeter mathématicien, mais le respect que j'avais pour cette pratique venait de ce qui faisait le hic et nunc de mon expérience et de mon expertise et cela ne me donnait aucun accès à la raison qui faisait que cette affaire de règle et compas est respectable : à savoir les *Eléments* d'Euclide et les 3 problèmes grecs. Je dirais même que ce dans quoi je me projetais m'éloignait de cette perspective.

La question qui se pose est bien celle des relations, je veux bien que l'on dise "rapports", entre ce que l'on vit hic et nunc et des projections tantôt dans le futur (le modernisme, le progrès) tantôt dans le passé (la tradition, l'évolution). Il n'y a pas de solution de continuité dans ce que l'on vit au présent, ou que l'on se projette au futur ou au passé. Et ce que l'on vit au présent n'est en définitive que indice, signe indiciel pour de telles projections.

Comme je l'ai dit à propos de problèmes, de défis et d'exploits, le mode de la réussite est le mode de liens que l'école a choisi et sur lequel elle met tout l'accent. Je cherche autre chose car le mode de réussite ne joue que ce sur quoi on a prise, cherche autant que possible solution de continuité. *Perte et prise de contrôle, non sens, surprise, ...* tous ces thèmes sont autant de moyens pour penser ruptures.

Comme vous le constatez ces choses se présentent à mon esprit comme tellement essentielles, et tellement hors de portée de ce que l'école peut faire, que je me sens nettement en porte à faux lorsqu'il s'agit de rendre mon enseignement directement utile aux besoins courants de l'enseignement des maths.

FC

4 novembre 2010

À Pierre Alain Cherix³

Salut

J'ai pas mal passé de temps à observer, étudier et méditer l'enseignement dit des ensembles dans l'école primaire - aux programmes des classes de Suisse romande entre 1972 et 1997.

Bien sûr on peut dire que cela se résumait au diagramme de Venn, mais en disant cela tu ne juges pas l'enseignement effectif, tu juges la prétention de l'intention à l'aune de ce à quoi, une fois la baudruche dégonflée, tout cela se réduit.

Le problème de l'enseignant est qu'il ne peut pas enseigner deux ans, même à des petits, sur un si pauvre argument, il faut en quelque sorte s'arranger pour que la baudruche ne se dégonfle pas trop vite ou du moins qu'elle ne s'effondre pas avant que le programme abandonne le sujet. Bref j'ai observé une enseignante de fort bonne foi qui croyait en ce qu'on lui avait dit et parce qu'elle en avait compris quelques bribes, tentait de porter à bouts de bras quelque chose d'antennable.

Ne crois pas que l'enseignement des coniques au collège ne s'effondre pas lui aussi comme une baudruche. Aucun de mes étudiants, et ce sur 35 ans d'enseignement de didactique, sait pourquoi on dit conique, d'où vient ce mot, et encore moins pourquoi on s'y est particulièrement intéressé en maths. Et je ne parle pas de l'enseignement des intégrales. À mon époque, 1967-1969, et en section dite latin-maths spéciale, le prof avait largué cela à toute vitesse au dernier moment, pendant le trimestre dit de préparation au bac !

Tel est le sort commun des enseignants en maths, pour le meilleur et pour le pire.

Alors il se trouve que l'enseignement est une pratique sociale qui peut se révéler aussi absurde que le commun des pratiques sociales.

J'ai écrit un article à ce sujet, *Un canard dans les mares* (Conne F. 1987).

C'est sans doute une question de génération, je fais partie des gens qui, élèves adolescents, ont été particulièrement sensibilisés à l'absurdité des choses. La faute à Camus, la faute à Michaux, etc., mais aussi bien à ce que l'on pouvait y goûter de fantaisiste, la faute à Carroll, la faute à Roorda, la faute à Ionesco, etc.

FC

³ Collègue DiMaGe de l'institut de mathématiques de UniGe.

7 novembre 2010

À ddmes

Narration de recherche : thèse.

Bonjour

J'ai évoqué ma thèse, certains ne la connaissent pas, d'autres en ont souvenir plus que flou. Je tente pour vous une narration (attention je ne suis pas très content de ma formulation sur les motifs maths et psychologiques de l'enseignement des ensembles, je marche un peu sur des bouts).

En 1978-1980, je suis allé voir ce qui se passait en 1P/2P (actuellement 3P/4P de la francophonie helvétique, et, si je ne m'abuse, CP/CE1 de la francophonie française) parce que je ne connaissais rien de plus de l'enseignement primaire que ce que j'avais vécu en y passant. On enseignait les maths modernes, dont les ensembles. J'avais fait des études de maths et avais aussi travaillé sur la logique mathématique. (Conne F. 1981).

Pour diverses raisons que j'ai analysées dans ma thèse, on a voulu introduire les élèves aux ensembles à l'école. Tant le motif mathématique que le motif psychologique (piagétien) se ramenaient à la possibilité d'exprimer et de formaliser des structures avec le langage des ensembles. Une de ces structures concerne la logique et la logique mathématique depuis laquelle a été formalisée par G. Boole en ce qu'on appelle des algèbres de Boole. Mais tant ce qui inspirait Piaget que les mathématiciens se situait au delà de la logique mathématique, en particulier dans les développements qu'avait suscités l'étude des rapports entre logique, logique mathématique et mathématique ainsi que dans le recours à des systèmes formels pour exprimer les objets mathématiques. La notion d'ensemble en mathématiques est apparue dans l'étude de certains nombres, puis est en quelque sorte redescendue (ici je caricature et verse dans un anachronisme, je devrais sans doute dire "a rencontré" plutôt que "est redescendue") de là vers des questions fondamentales, et de là encore vers des questions touchant aux relations entre logique et mathématiques, ces questions étant en quelque sorte renouvelées par les progrès formels que permettait la notion d'ensemble.

L'enseignement des maths modernes à l'école primaire comportait un chapitre "ensembles et relations", et proposait aux élèves d'apprendre le maniement de diagrammes de Venn et de diagrammes de Carroll ainsi que de diagrammes dits "en arbre". Qu'est-ce que cela a avoir avec la théorie des ensembles et les références soit mathématiciennes, soit psychologiques ? La chose semblait aller de soi. Comment, pourquoi ? Par contre qu'est-ce donc que Venn et Carroll avaient bien pu proposer de si intéressant pour l'école et comment se fait-il qu'il n'ait pas d'auteur à qui attacher un nom aux diagrammes "en arbre" ? Ce sont ce genre de questions que j'ai dû me poser.

Piaget s'intéressait à l'idée que la maturation intellectuelle passait par des stades de structurations et régulations des activités mentales. Les structures logiques sont à la fois au cœur de toute catégorisation des choses du monde et sont très simples. Piaget s'y est donc intéressé, entre autres structures.

La logique formalise les opérations de raisonnement, ce sont par exemple les fameux syllogismes de la logique d'Aristote et autres techniques permettant de mener à bien et de

contrôler nos raisonnements. C'était un objectif de l'enseignement d'amener les élèves à (apprendre à) raisonner (en particulier dans ma propre scolarité, via, au primaire, les problèmes d'arithmétique, puis, au secondaire, de la géométrie déductive). Pour en revenir aux opérations de raisonnement, ici il n'est plus question de structure, mais bien d'instruments pour mener à bien certaines tâches ou mener un raisonnement, vérifier la validité d'un raisonnement, etc. Dans la logique classique cela se formule sur des propositions langagières essentiellement, ce sont des jeux de langage en langue ordinaire (je dis cela car les propositions sont formalisées et se distinguent de la langue courante).

Il se trouve que L. Euler dans ses *Lettres à Une princesse d'Allemagne* (1768 à 1772), ouvrage de vulgarisation scientifique qui connût un très grand succès, a eu recours à une illustration des syllogismes logiques procédant du dessin de petits cercles, tantôt séparés, tantôt se chevauchants, tantôt inclus, qui traduisaient les relations logiques entre propositions langagières en relation de classes d'objets figurées par des cercles et leurs intérieurs respectifs. Ainsi la proposition *Tout homme est mortel* était traduite en un dessin montrant l'inclusion de la classe des hommes dans la classe des mortels. À l'époque de Euler on ne parlait pas d'ensembles en mathématiques, mais bien entendu on savait ce qu'étaient des classes logiques. (Certes les ensembles sont des classes de choses, il y a un rapport, mais la notion d'ensemble n'a pas été inventée pour se substituer aux classes de la logique mais pour exprimer des relations qui sont d'un tout autre ordre.)

Les diagrammes de Venn et de Carroll sont directement inspirés de ceux de Euler. Mais ils ont une autre portée que ces derniers. En effet, Venn et Carroll se réclament tous deux de George Boole qui, au XIX^{ème} siècle a fondé la logique mathématique. Ce que, entre autres, Boole apporte est l'idée de calcul logique, et l'analogie que raisonner c'est calculer (cette idée a déjà été cherchée et défendue avant Boole, par Leibniz, et encore bien avant. Ce que Boole apporte, c'est une manière définitive de le faire). Venn et Carroll s'inspirent de Euler, mais leurs dessins ont une ambition bien plus grande que celle de ce dernier. Euler ne faisait qu'illustrer par des figures géométriques des relations analogues (isomorphes) à celles formulées dans les propositions langagières classiques. Pour cela il tablait sur le fait que l'on peut combiner deux zones du plan (tantôt séparées, tantôt se chevauchant, tantôt incluses) de manière isomorphe à la manière dont on peut combiner des figurations planes des classes et, partant, dont on peut combiner les propositions qui s'y réfèrent. Pour Euler, Venn et Carroll ces figures sont respectivement des cercles, des ellipses et des tableaux, et les deux derniers auteurs justifient explicitement leur choix figuratif. En francophonie helvétique des années 70 par contre ce sont des "patates", id est des figures dont le contour irrégulier voulait exprimer le caractère indéterminé des ensembles combinés : les opérations ensemblistes étant valables en toute généralité. De plus, Venn et Carroll proposent des véritables diagrammes, des machines logiques comme M. Gardner (*L'étonnante histoire des machines logiques*, 1964, Dunod) les qualifie, des algorithmes de calculs logiques. Et leurs diagrammes sont les diagrammes de ces algorithmes là. Dans ma thèse, j'ai cité in extenso un texte de Lewis Carroll qui est explicite sur ce point, extrait de son ouvrage intitulé *Symbolic logic* (1896) manuel destiné aux étudiants qui voulaient se spécialiser en logique. Il y expose ses diagrammes et sa méthode. Dans un appendice, Lewis Carroll explique à l'adresse des spécialistes, l'origine et l'apport de ses diagrammes.

Plus précisément, tout comme cela l'était dans les illustrations de Euler, les diagrammes de Venn ne sont que des zones que l'on marque de deux manières seulement selon que l'on sait ou déduit que cette plage est vide de tout élément ou qu'elle en comporte au moins un. Usage des symboles booléens 0 et 1 dans le diagramme de Venn. Cela permet un calcul automatique

fait par le diagramme au fur et à mesure que les plages sont affublées des marques selon les informations des données. Les diagrammes de Carroll reprennent ce principe pour l'améliorer (par prise en compte de la négation et inscription du syllogisme dans un référentiel explicite). Carroll ne se contente pas de peaufiner la chose, il va, dans son ouvrage se moquer ouvertement et dans le plus pur style non-sens du XIX^{ème} siècle britannique, de la logique classique. J'y reviendrai plus loin.

Avec les maths modernes, tout comme Venn et Carroll ont redécouvert les dessins de Euler et les ont améliorés, chacun à sa manière, les pédagogues redécouvrent les uns les diagrammes de Venn et de Carroll, les autres ceux de Euler etc. Mais tout comme la perspective de Venn et Carroll n'était plus celle de Euler, là encore la perspective a changé et n'a plus grand chose à voir avec les intentions de ces deux auteurs. Il ne s'agit pas du tout d'enseigner la logique, ni celle des syllogismes, ni celle du calcul booléen, mais à la fois, 1° pour l'école secondaire supérieure, d'introduire les notations modernes que les mathématiciens ont adoptées pour décrire leurs structures et 2°, pour l'école primaire et obligatoire, d'introduire les élèves à un peu de logique formelle. Pour les élèves des 4 premières années primaires plus particulièrement, et selon ce que ces pédagogues ont bien pu comprendre des idées piagétienne, de les placer dans un domaine analogue, du point de vue de sa structuration, à la structuration mentale en cours dans le développement de leur intelligence.

Ainsi les diagrammes de Venn que l'école prétend enseigner n'en ont que l'allure. Pire encore, en ce qui concerne ceux de Carroll, ils n'en ont que très vaguement l'allure. Ici, il y a eu confusion chez les pédagogues entre diagrammes de Carroll et *tableaux à double entrée*, confusion entretenue par celles d'*ensemble produit* et de *graphe de relation*, autres termes consacrés de la mathématique mathématicienne moderne.

Si vous examinez ce que l'on faisait en classe avec les diagrammes de Venn et de Carroll, c'était vraiment toute autre chose, rien à voir avec cela. On ne dessinait pas ces choses pour traduire une proposition comme : *tout homme est mortel*, comme le préconisait Euler, on ne s'occupait pas du tout de marquer lesquelles des plages de notre diagramme pouvaient être assurément considérées comme vides ou, au contraire, comme non vides (en déduisant tout ce qui pouvait être déduit des informations fournies en prémisses). Non, on se contentait de faire placer des éléments dans un diagramme et les cases qu'il présentait, voire, mais bien plus rarement, dessiner les contours d'un diagramme correspondant à telle ou telle manière de classer des choses. Bref on faisait essentiellement du rangement, certes du rangement abstrait car il se trouvait que deux casiers ou deux tiroirs pouvaient s'intersecter. De plus, le diagramme une fois obtenu n'était l'image de rien du tout, je veux dire par là que l'enseignant ne jugeait pas le diagramme obtenu à sa forme globale. Or c'était bien là toute l'idée de Euler, de Venn et de Carroll (pour eux, les figures que faisaient leurs cercles ovales ou tableaux étaient l'image de la relation déduite de toutes les données) mais on regardait élément par élément lesquels étaient correctement ou incorrectement placés dans les cases, lesquels avaient été omis, lesquels avaient été placés plus d'une fois etc.

Ainsi donc on ne faisait que ranger (plus exactement on ne faisait que les ranger autrement que de la manière dont elles étaient présentées), des collections de choses - de dessins-de-choses ou de gommettes-autocollantes-supportant-le-dessin-de-choses - selon des propriétés (ou attributs) sinon significatives du moins prégnantes pour les enfants : des formes, des couleurs, et bien d'autres attributs pittoresques. Cela était plein plein plein de significations, de celles mêmes que véhiculaient les propositions langagières classiques, mais dans une acceptation déjà un peu formelle et artificielle de la logique, non du formel abstrait si ce n'est

pédant des savants, mais de ce "formel naïf enfantin", de l'univers tout en couleurs de formes idéales dont on les affuble et les habille - les petites filles en rose les garçons en bleu pâle - et de petites figurines sympathiques.

Dans cet univers, pas d'hommes ni de mortels, encore moins de Socrate, et surtout pas de crétois qui comme chacun le sait sont non seulement menteurs mais retors. Aucun de tels personnages ni de telles horreurs, sauf, poussé à un jeu de non-sens qui a fait fureur et qui a définitivement placé Charles Ludwidge Dodgson / Lewis Carroll au firmament des poètes.

Ce non-sens, était voulu par le pédagogue Charles Ludwidge Dodgson, et ce, précisément par souci didactique, afin de bien faire comprendre à ses lecteurs que la sémantique n'est nullement affaire dans la simple combinaison calculatoire de relations syllogistiques ! Le pédagogue a déteint sur l'auteur d'Alice, dans sa propension à des jeux de mots et d'expressions loufoques. Pour le manuel de logique, ce que je qualifierais volontiers de pata-syllogismes-grecs, ou la parole donnée à Achille et à la Tortue pour nous faire entendre ce qu'ils se dirent, tandis que pour Alice, entre autres, les *nursery rhymes* (par exemple dans *Alice au Pays des merveilles*, Humpty Dumpty, le héros d'une de ces nursery rhymes, raisonne, pour mieux s'illusionner sur son sort).

Les pédagogues des maths modernes se sont réclamés de Lewis Carroll (et d'un malentendu datant de son *Alice*) pour se complaire à l'idée d'un lien entre le formel logique et un formel de fantaisie soi disant enfantine. Si Lewis Carroll s'est retrouvé embarqué dans le navire maths modernes, ce n'est pas tant pour ses diagrammes (j'ai dit on les a confondus avec d'autres) mais bien comme emblème d'auteur de fantaisies malicieuses pour enfants et que beaucoup d'adultes ont décidé de prendre au sérieux.

Et ainsi, hélas, hélas l'esprit de Carroll s'est vu amputé de ce qui en faisait tout le charme : le non-sens et ce furent à des activités tellement banales de signification qu'elles en devinrent dérisoires que l'on a fait remplir des soi-disant diagrammes de Venn et de Carroll aux élèves.

Sauf que, sauf que ... Il s'agissait de proposer des tâches signifiantes pour les élèves, et que ni celles des mathématiciens : formuler et formaliser certaines structures, ni celle des logiciens : calculer des raisonnements, ni celles des psychologues : tenter de repérer les caractéristiques de la pensée enfantine en gestation, ne pouvaient être proposées à des élèves de l'école. Il fallait bien trouver quelque signification, quelques motifs à quelques jeux !

Tel fut l'horizon de tâches que l'on aura trouvé pour enseigner l'instrument diagrammes de Venn (Carroll et arbres) aux élèves des 4 premières années primaires, en ne gardant de ces diagrammes que leur image. Y avait-il quoi que ce soit à comprendre à ces tâches ? Quelles techniques ont donc été requises ? Etc.

Par exemple colorier, remplir de coloriages ou de petites figures, varier les petits motifs que l'on trace sur son dessin, coller des gommettes autocollantes, faire de tas de trucs aussi sympathiques, certes pas n'importe comment, pas à sa guise, mais selon quelques consignes et contraintes, en organisant quelque peu ses actions, en s'assurant que personne ni rien n'avait été oublié en route, en s'assurant aussi d'avoir mis *the right things at the right places* etc. Bref, on aura emprunté aux pratiques enfantines les tâches à accomplir avec les instruments diagrammes. (Et en tant que pratiques effectives, on pouvait y comprendre des choses, mais de cela je ne parlerai pas ici).

Et cela tourne autour du graphique et donc des propriétés spatiales de sorte que l'on a réellement pensé faire d'une pierre deux coups, avec eux, autant enseigner la logique, intitulée *ensembles et relations*, que les rudiments d'une soi-disant *découverte de l'espace*. Alors qu'un autre usage de la mise en boîtes, obéissant à des logiques numériques cette fois-ci, les introduisaient par le truchement de classes qui ne sont alors plus logiques, aux *nombres et opérations*, via partition et produits d'ensembles, et à la *numération*, via les groupements. Une exploitation tous azimuts, singeant la reconstruction moderne des maths, de quelque chose qu'on avait mis au commencement et que l'on avait appelé, par analogie à ce que l'on singeait : les ensembles.

Et les diagrammes "en arbre" ? Pour eux, pas de Euler ó et pourtant ó pas de Venn ni de Carroll à qui les attribuer. Les diagrammes en arbre étant là pour illustrer la logique des relations et partant les structures ordinales chères tant aux logiciens, mathématiciens et piagétiens ó mais pas pour les mêmes raisons. Là encore les arbres sont des structures alors que leur usage scolaire se limitait à en faire des diagrammes de tris d'une collection.

Alors que suis-je donc allé faire dans cette galère de l'enseignement primaire ? Mais ce n'était pas une galère, pas du tout. Je suis allé voir ce qui s'y pratiquait au nom des maths pour non pas me désoler de les voir si mal servies ó trop facile de se désoler et finalement pas bon pour le tain - mais bien pour guigner derrière ces *palissades Potemkine* que sont les maths que l'on dit pratiquer en classe, si, ne s'y cacheraient pas des maths et de la logique, et plus encore du raisonnement, de la pensée, de la compréhension, non pas de la prose à *effet Jourdain* comme Guy Brousseau (et sans doute bien d'autres qui ont été plus discrets à mon égard) a cru que cela était ó je parle de son jugement dans les années 80-82. De tout ceci, j'en ai trouvé de ci, de là, j'en ai aussi provoqué, parce que tout de même il faut se respecter, et j'ai trouvé aussi autre chose, quelque chose que je ne soupçonnais pas du tout, à savoir que :

Tout ceci transitait toujours par un travail extraordinaire d'interprétation fourni par les élèves, et tout particulièrement d'interprétation de ce qu'on leur voulait avec tous ces trucs qu'on leur demandait de faire, de toutes ces questions auxquelles on leur demandait de répondre, ou encore toutes ces interpellations que je m'amusais à leur faire. J'ai appris que leur apprentissage passait par ce travail interprétatif, prenait place là-dedans, que tel en était le cadre. J'ai appris que les élèves s'initiaient ainsi activement aux jeux de signes ó pour autant que j'ai compris Wittgenstein, ce serait là quelques-uns de ses fameux "jeux de langage".

En attaché, le premier de deux articles relatant ceci et tirés d'observations faites lors de ma thèse (septembre 1978 - juin 1980) : *Un canard dans les mares* et *Comptage et écritures en ligne d'égalités numériques* (Conne F., 1987 et Conne F., 1988).

FC.

7 février 2011

Une fonction du savoir essentielle pour l'Es.

Bonjour

J'aimerais entamer ici une discussion qui pourrait offrir une thématique sur laquelle diriger nos narrations. Au fil de mon écriture mon idée relativement simple au départ a pris des proportions bien plus grandes et fondamentales. Voici une esquisse de ce que je devrais retravailler

1° Potentiel des élèves.

Cette thématique a été souvent soulignée par Christian Cange, mais fait aussi partie des préoccupations de Thierry Dias. Par ailleurs, je sais qu'elle est largement partagée dans le groupe d'adultes et je dirais même qu'elle est une des thématiques emblématique de notre groupe.

Suite à une présentation de notre travail à Chamoyron, Céline Vendaïra-Maréchal et moi, et en repensant à l'accueil favorable que nous avons reçu, je réfléchis que, à chaque fois que j'ai eu l'occasion de faire de telles présentations à Chamoyron, mais aussi dans d'autres institutions, il s'est produit la même chose : mes auditeurs ont l'impression de se rendre compte de potentialités qu'ils ne soupçonnaient pas chez les élèves qui nous sont confiés. La remarque ne manque jamais de nous être faite, en particulier de la part des responsables pédagogiques de ces institutions. Notons aussi qu'elle est faite quel que soit le niveau de l'élève, je veux dire aussi bien pour un élève de 10 ans qui sans doute arrivera à réintégrer l'Eo (dans une école privée), exemple actuel Pikatchu, qu'un élève déficitaire, exemple actuel Mateo Le Chat (ils sont contemporains, 10 ans). On pourrait dire aussi que ces présentations font venir à l'esprit de nos interlocuteurs les signes de tels potentiels. Je souligne que jamais je n'ai axé mes présentations sur cette thématique, mais que je me suis contenté d'expliquer et d'illustrer comment je travaille et de donner des opportunités à mes auditeurs de relier mes propos à ce qui les préoccupe.

Notons en outre que cela a pour effet de les soulager d'un peu du poids des difficultés et de la lenteur que ces élèves témoignent dans leurs apprentissages formels.

2° Considérons cet effet comme un phénomène de contraste : potentiel / habitude.

Je me suis demandé à quoi cela pouvait bien tenir : qu'est-ce qui dans ce que nous faisons est si convainquant ? Il est clair que ceci est lié aux contenus que je travaille avec les élèves (pour eux inédits), à l'attention méticuleuse que nous portons à analyser leurs productions ainsi qu'au fait que nos activités sont sorties des enjeux d'apprentissage, de remédiation voire de rééducation qui les concerne. Mes enjeux sont l'expérience qui n'est pas la principale préoccupation de l'enseignement ó que ce soit l'Es ou l'Eo.

J'aurais beaucoup à commenter cette idée de potentiel. Cela n'est pas forcément synonyme d'espoir, justement parce que cette impression de potentiel s'imprime en contraste avec les difficultés parfois énormes et très frustrantes pour les enseignants ó difficultés de toutes sortes : difficultés à enseigner, difficultés avec les conditions de travail dans l'institution, difficultés à trouver des places pour la suite de la

formation, difficultés dans les relations avec les parents etc. Ce potentiel fait donc l'effet de leur (et, si vous y tenez, leur désespoir). Ce qui me frappe est combien cela fait effet, combien cela est reçu comme un signe d'encouragement dans les institutions, combien cela rassure. Il est en effet très important que si d'expérience je fais cet effet, cela ne fait pas pour autant illusion, et que, de ce point de vue cela ne rentre pas en conflit, du moins direct, avec les personnes qui ont la charge d'enseigner les maths.

Je considère ceci comme un phénomène didactique et si j'ai ici quelque chose à attribuer c'est de profiter qu'il se reproduise régulièrement dans le cadre de mes recherches. Es pour moi intéresser et tenter de le comprendre.

En première approche on dira que lorsqu'on agit à la manière que j'ai développée et promue à Chamoyron (et ailleurs aussi bien sûr), et qu'on en rend compte comme je le fais, on obtient cet effet. Aussitôt formulé ainsi apparaît un défaut à cette explication, à savoir ce que j'ai souligné plus haut : que ces exposés et descriptions contrastent avec un autre phénomène en arrière fond : une certaine usure et obsolescence de l'enseignement qui pèsent grandement dans les institutions, et d'autant plus que les élèves y séjournent longtemps (de nombreuses années). Vient alors un fait important dans cette affaire : ce phénomène d'obsolescence affecte tout autant mes actions, et là encore d'autant plus que mon suivi des élèves dure longtemps.

Ainsi, l'effet relevé : mise en perspective du potentiel des élèves se manifeste-t-il par contraste, que je formulerai en disant que cela se fait lors de rupture avec l'habitude. Ce qui me semble alors important, voire crucial, n'est pas d'échapper aux pesanteurs de l'habitude et à l'obsolescence qui les accompagne, cela semble inévitable, mais que ne s'érode pas, dans l'esprit des enseignants, éducateurs, mais aussi chercheurs, le potentiel entrevu. Pour cela il me semble utile de savoir se mettre en situation de nous le faire rappeler. Par exemple comme lors de notre intervention dans la classe de Christian Cange, l'an passé Jean-Michel Favre et moi-même. Christian nous rappelle régulièrement la nécessité qu'il y a pour lui à ce que nous imaginions des dispositifs le permettant.

Donc il faut considérer ensemble les phénomènes liés à l'aplanissement de l'habitude et à l'ouverture potentielle. Notons que la remédiation, la rééducation, l'exercice, la consolidation etc. sont, du point de vue didactique, des actions basées sur l'habitude. Ils n'échappent au phénomène d'obsolescence que dans leur dépassement. Par conséquent toute didactique fondée sur de tels moyens (comme la didactique de l'école ordinaire) est tenue à une inépuisable fuite en avant vers l'acquisition de techniques de plus en plus abstraites ó voire sophistiquées. Par contre les propositions didactiques comme les problèmes ouverts, les situations-Charrière, et toutes les choses de ce genre, jouent sur l'autre tableau, celui du potentiel et des perspectives. Les promoteurs de telles formes d'activités à l'école ne manquent jamais de faire remarquer qu'au cours de telles activités les enseignants et animateurs ont été agréablement surpris de découvrir chez des élèves en difficulté des possibilités insoupçonnées.

On notera alors que dans les pratiques usuelles en classe, les activités fondées sur l'habitation ne laissent que peu de place pour les activités d'ouverture (potentiel). Le conflit porte sur l'emploi du temps imparti, les deux en sont grandes consommatrices. Néanmoins ce qui apparaît est ceci : ce qui est régulièrement mis en avant pour justifier de ne pas allouer le temps suffisant aux activités d'ouverture, c'est le programme. Ainsi, ce

qui leur fait barrage n'est pas le contraste : habitude contre potentiel, mais bien la fuite en avant qui affecte toute didactique fondée sur l'habitation. Et là c'est bien une question de sens qui est en cause (et par sens je veux dire ici plus une affaire de perspectives, que de significations prédéterminées).

3° Ce phénomène concerne aussi bien les élèves que les contenus qu'on leur propose.

Il m'apparaît alors qu'ici le contenu est fortement impliqué. Il s'agit ici encore d'un problème de transposition didactique. On y retrouve aussi le contraste transposition didactique / transposition de vulgarisation.

Mais avant d'en venir à cet aspect des choses je rappellerai que de ce point de vue le manuel de géométrie de O. Burllet (Burllet O., 1989) à l'élaboration et à la conception duquel Jean-Daniel Monod a été associé, tentait une réponse originale à cette question. Le manuel qu'il venait supplanter, le manuel de géométrie de A. Delessert (Delessert A., 1960) proposait, lui, une réponse bien plus classique à ce problème. Comme dans des manuels de facture classique, les activités de potentiel s'y trouvent entièrement assimilées aux activités d'habitation. Classiquement, un premier contraste, grossier, s'y fait dans la distinction entre exercices et problèmes, mais le vrai clivage de l'habitation au potentiel se trouve dans la graduation de la difficulté des problèmes. Cette conception est élitaire : on se dégage de l'habitude soit en se dépassant soi-même, en relevant des défis de plus en plus difficiles, soit en la faisant "culture générale" : mémoire de choses que l'on a su faire un jour mais avec lesquelles, avec le temps, on a eu vite fait de perdre la main ("ce qui reste quand on a tout oublié").

Charrière a toujours déclaré sa grande admiration pour Delessert, et dit combien sa proposition de "technique des situations" (ouvertes) devait à son mentor. Néanmoins c'est une autre réponse au problème habitude / potentiel qu'il propose, parce que les situations sont ouvertes, mais pas, comme dans les programmes sur de nouvelles techniques maths (fuite en avant : calcul numérique, algébrique, différentiel) mais sur des expériences et domaines permettant de donner significations aux techniques déjà acquises, donc en montrant en quoi les techniques acquises par habitude ouvrent sur des "mondes". Notons alors que son manuel d'algèbre (Charrière G., 1997) et dont l'avant propos est signé par J.- D. Monod, G. Charrière tente de concilier les deux réponses, celle, classique, de Delessert, et la sienne avec sa technique des situations.

La proposition de O. Burllet est encore un peu différente, en ce sens que l'ouverture et le dépassement de l'habitude cherchent à se faire "dans l'intuition", lors d'approches présentées comme "informelles". L'originalité étant ici que l'appel à l'intuition est fait dans la perspective de prolongement de ce qui a été enseigné et appris, et pas dans celle d'introduction à un enseignement formel.

Cette longue parenthèse permet de mieux comprendre encore la manière dont les questions rencontrées dans le cadre de l'Es éclairent d'un jour neuf les questions propres à l'Éo.

4° Questionner (et nous questionner) sur les possibilités des élèves nous amène à nous questionner sur le savoir.

Si je reconsidère les propos tenus jusqu'ici, je vous ferais remarquer qu'étant parti sur une considération portant sur les élèves : leur potentiel (cognitif mais, aussi savant dès le moment où on en appelle aux expériences qu'ils auraient pu faire par eux-mêmes), j'en suis venu à montrer que ce potentiel est celui d'une mise en relation des élèves avec un contenu et que par conséquent il faut penser que "potentiel", ou "habitation", ou "dépassement", etc. sont des termes qui qualifient des relations et non pas des individus ni non plus des contenus pris isolément. Cela a donc un sens de penser en termes de potentiel d'un contenu autant qu'il est pertinent de penser habitation à un contenu (ce qui, chez certains didacticiens se nomme *tâche / technique*). On trouve alors des considérations comme celles que propose André Scheibler. Selon lui, il est possible dans l'Es de s'affranchir de la pesée de l'habitude pour ouvrir sur des questions bien plus fondamentales conceptuellement que ne le permet l'enseignement Eo. Thierry Dias défend une idée proche aussi dans sa thèse, et il insiste pour établir des liens culturels. Ceci veut dire que, convaincus du potentiel des élèves de l'Es, nos deux camarades insistent sur une ouverture de l'Es sur des questions mathématiques, scientifiques et culturelles qui vont bien au-delà de l'univers borné de l'Eo.

Bien entendu les activités que je propose aux élèves de l'Es s'inscrivent totalement dans ces considérations. Ce que je tente de faire, depuis longtemps, avec plus ou moins de succès, est de lier habitude et potentiel (et ici la sémiotique de C. S. Peirce me fournit une petite aide). Mes activités sont ouvertes comme des situations-Charrière, mais elles sont bien différentes, parce que cette ouverture est tournée un peu ailleurs, moins vers des contenus bien estampillés mathématiques.

5° Troisième terme de la tirade, le milieu : le contraste moyen / support (exercice / expérience).

Ainsi donc mes propos dans cette note ont permis de lier ouverture/fermeture d'esprit-chez-les-élèves, ou d'esprit-dans-les-contenus et de montrer en quoi y sont liées les préoccupations de notre groupe, et de rappeler dans cette perspective les divers accents que nous mettons chacun à notre manière. Il me reste à lier cela à une autre facette de nos préoccupations dont je n'ai jusqu'ici pas parlé et qui nous concerne chacun de manière plus primaire encore. Cette question d'habitude / potentiel se trouve en effet liée à celle et du milieu et du *pilotage de l'interaction de connaissances* à propos d'une tâche, d'une situation, d'un dispositif particulier.

Il y a ici deux aspects:

a) L'habitude a pour fonction de fournir un support ó plus que des moyens pour une expertise qui ne sera jamais utile qu'à une petite minorité de gens (ça c'est une idée que je défends mordicus).

La calculette est un support et donc pas un moyen opposé au calcul mental. - Ainsi, le calcul de multiplication en colonnes écrit, dans le travail de mémoire SCES de Jean Michel Favre (Favre J.-M., 1992) était tout aussi bien un support, mais avant cela, dans cette recherche, la calculette a servi de support pour introduire le calcul

écrit. - Une certaine habileté en pliage de papier, ou en découpage de pâte-à-modeller ou de maniement de scie à sagex sont tout autant des supports. Sans compter assemblages de polydrons ou maniement de bouliers, ou de tableaux de nombres etc.

Donc il faut de l'exercice et de l'habitude pour que ces dispositifs puissent jouer leur rôle de supports. C'est ce qui fait la différence entre être initié et être expert. Les ouvrages de vulgarisation ont pour fonction de vous initier, mais ne permettent pas de vous conférer une expertise. L'enseignement ordinaire se situe à mi-chemin entre initiation et expertise, surtout que, comme je l'ai fait remarquer ci-dessus, l'expertise se perd.

Le contraste avec la didactique classique, du moins avec sa conception et ses intentions, est qu'elle fait de l'habitude un préalable au fonctionnement à titre de support et que pour ce faire elle commence toujours à vous introduire aux techniques en tant que moyens. Ce faisant, elle réduit la question du sens à celle d'être d'abord de la signification (en tant que moyen de faire ceci ou cela). Suivant cet ordre d'idée, l'habitude ne se dépasse que parce que ce qui était un moyen devient un support. (Dès lors, support est un troisième terme qui casse l'opposition outil / objet, support est lié à milieu).

b) Mais ce dépassement, on n'a pas besoin de le laisser à l'horizon des activités proposées, on peut fort bien l'inclure dans le travail d'habitude. Dès lors on n'exerce plus la technique à quelque situation prétexte, comme le conçoit la didactique classique, mais on explore le milieu qu'ouvrent à nous les techniques que l'on est en train d'apprendre. Dans les activités que je propose, le dessin du cube en perspective cavalière est un support, pas une technique ! Et, considéré comme support, il est préférable d'apprendre à esquisser des formes en 3D que d'apprendre la technique du dessin en perspective.

Notez que dans les situations-Charrière, les techniques sont elles aussi des supports plus que des moyens.

Notez aussi que si je vous fais une explication, par exemple une démonstration mathématique qui vous fasse lire quelque calcul, par exemple algébrique, que vous ne sauriez plus mener vous-mêmes mais que vous savez encore grosso modo comprendre à sa lecture, la technique algébrique que vous avez apprise à l'école ne vous sert pas de moyen, mais de support. Votre "familiarité" avec les écritures algébriques, vous a initié à l'univers dans lequel cette démonstration prend sens.

Bref, l'expérience l'exploration du milieu, tout cela qui passionne Jean-Michel Favre ou Luca Del Notaro, est entièrement lié à la problématique que j'esquisse ici pour vous.

C'est une utilité autre de considérer les savoirs maths comme support que comme moyens. Et ce jusque pour l'enseignement (et, pour chacun d'entre nous, sa propre formation à enseigner ce qu'il peut se trouver chargé d'enseigner en maths - ou chargé d'en assurer l'apprentissage, ce qui n'est pas tout à fait la même chose).

Et lorsque je dis que savoir permet entre autres de se mettre dans une situation qui va induire dans notre esprit telle ou telle connaissance (par remémoration, ou par résolution de problème ou que sais-je ?), bref que savoir c'est aussi être à même de se placer dans le cadre situationnel dans et par lequel vont s'actualiser certaines dispositions d'esprit, il s'agit d'une fonction de support plus que de moyen. À contrario, une technique comme

moyen, se passe de cadre situationnel signifiant (sa signification est déemblée et toute entière dans la tâche qu'elle permet d'accomplir).

6° Envoi

Je délègue au savoir mathématique l'utilité, la fonction, de permettre à ce potentiel de se manifester, voire de se révéler ó surtout si cela se passe dans un processus d'un suivi de séances. Je ne laisse pas ceci au seul hasard des rencontres avec des élèves à propos d'activités que je leur propose, mais je me donne quelques gages que ceci peut se passer en commençant par explorer le milieu pour moi, puis, et surtout, en poursuivant cette exploration du milieu en fonction des observations recueillies auprès des élèves et lors de mes interactions avec eux.

Je travaille le savoir avec les élèves comme support à la reproduction de l'effet de découverte ou rappel de potentiel des élèves aux équipes enseignantes thérapeutiques des institutions.

À ce propos, il faut bien comprendre ceci : les prises en charges des élèves de l'Es (handicapés, victime de troubles psychiatriques, en détresse etc.) requièrent souvent beaucoup de temps. Il faut donc trouver des moyens de maintenir chez les personnes qui ont ces élèves à charge l'idée qu'une part de leur potentiel reste intact, qu'éventuellement sur tel ou tel aspect même il se développe. Il faut contrer une certaine désespérance de voir les stratégies d'habitué échouer. Et pour cela on ne peut que tabler sur la richesse des mondes, dont celle du monde mathématique. Bref, aller chercher les ressources chez les élèves suppose qu'on explore ces mondes pour y trouver les ressources qui soient à même de révéler les premières. (Ce qui revient en gros à faire appel à des significations pour supporter le sens de développer sa pensée mathématique).

Il y a là une transposition didactique très particulière, mais elle est fort voisine de celle qui est évoquée, et seulement évoquée de manière littéraire, dans maints ouvrages de vulgarisation dont, par exemple : *Le démon des maths* de H. M. Enzensberger (Enzensberger H. M., 1998).

Cela caractérise assez bien nos interventions à Pré-de-Vert, et pas seulement les miennes ou celles de Céline à Chamoyron.

C'est une fonction du savoir, en soi non spécifique à l'Es (en ce sens le travail de Christine Del Notaro en témoigne bien), mais essentielle (en tous cas sur laquelle a été fondé mon travail dans ce domaine et qui perdure depuis 20 ans) et par ce fait, d'être essentielle, spécifique à l'Es. Même si on peut le regretter, on remarque que l'Es peut, cahin caha, fonctionner en la négligeant. En effet, le potentiel des élèves de l'Es leur est quasiment accordé d'office. Il est attribué avec le simple fait de rester dans la norme.

FC

22 février 2011

La narration est un relai, une aubergeí espagnole bien entendu.

Bonjour

J'aimerais dire ici ce qui m'a convaincu de l'importance de la narration.

Cette prise de conscience s'est opérée pour moi il y a bien longtemps, grosso modo en 1995, et a suivi mon travail sur le texte : *Faire des maths faire faire des maths et regarder ce que ça donne*, (Conne F., 1999) texte dont j'ai terminé la rédaction en 1996, dont j'ai ensuite réécrit l'introduction et qui a été publié, avec l'ancienne introduction en 1999. Texte que j'ai commencé à écrire en 1992-1993.

Vous constatez donc que ces choses ont occupé mes pensées durant plusieurs années !

Je suis venu à l'importance de la narration en réfléchissant à mon travail de chercheur et d'enseignant au SCES (séminaire cantonal de l'enseignement spécialisé). Je me suis dit alors, et c'est ce que j'ai raconté en 1996 lors d'un petit discours que j'ai fait en quittant le SCES, que finalement j'étais peut-être plus un penseur qu'un chercheur à proprement parler. C'est comme ça que j'ai voulu le dire, par esprit de provocation. Peu importe ce que j'étais ou que je suis, ce sur quoi je voulais mettre l'accent est une distinction : malgré les apparences et les préjugés idéologiques que l'on peut avoir, penser et chercher ne vont pas automatiquement de pair.

Cette idée je l'ai reprise dans mon mail de hier en affirmant que *õ Finalement, les savoirs (mathématiques) ainsi acquis sont certes généraux, mais captifs de leurs répliques dans les supports associés*. [Voir aussi la note du 21 février 2012, infra]. C'est lié aussi à ce que je vous écrivais récemment sur la distinction *õoutils / supports* (Cf. note supra : *Une fonction essentielle du savoir pour l'Es*) et c'est aussi lié à quelque chose de bien plus ancien que je développais à propos des élèves de l'Es qui ne sont pas en situation de se trouver portés par leur enseignement comme c'est le cas dans l'Es (je vous laisse retrouver ma formulation d'alors qui était mille fois meilleure qu'ici).

Pour en revenir aux savoirs généraux et aux supports associés

- sur lesquels justement leur généralité est reportée, ce qui fait qu'on peut dire qu'on apprend à l'école plus à s'initier et utiliser des supports généraux que les savoirs généraux qui les fondent. Et cela peut faire penser à l'apprentissage d'un langage ó

la distinction que je fais ici est exactement analogue à celle que je fais entre chercheur et penseur. C'est le sempiternel problème de la fin et des moyens et de la propension à ce que les moyens gagnent en présence sur les fins. (Comme si, socialement, et par une sorte de discrétion sur les fins que chacun poursuivrait librement, la seule chose qui nous soit donnée de partager étaient les moyens.)

Quel est le lien avec la narration ? Je l'ai déjà dit à plusieurs d'entre vous et peut-être l'ai-je même écrit. Lors de mon petit discours de départ du SCES, je poursuivais en disant en substance ceci : "que j'appréciais beaucoup lire, écouter des narrations, que je m'essayais de

plus en plus dans mes cours parce que j'avais acquis la conviction que pour arriver à (bien) raconter il fallait les avoir longuement pensé et que toute narration témoignait surtout de la pensée du narrateur, et que c'était cela aussi qui captivait son public".

Parallèlement à cela, lors d'une journée consacrée à l'autisme, réunissant des personnes de divers horizons, psychanalystes, psychologues comportementalistes, médecins, enseignants, éducateurs, parents, etc., je me suis rendu compte que ce qui faisait la différence, pas entre les personnes mais bien entre les horizons professionnels, se marquait clairement dans la qualité des narrations de ce qu'ils faisaient : les psychanalystes y excellaient et captivaient tout l'auditoire, les comportementalistes n'étaient pas en reste, tandis que les enseignants, qu'ils soient de tendance psychanalyste ou comportementaliste, n'y parvenaient pas du tout. Je me suis dit - et en ai parlé à Jean-Michel Favre - que si un jour, nous didacticiens voulions convaincre de l'importance et de l'intérêt de considérer ce qui se passe dans les classes, nous devrions apprendre à narrer.

Bref, la narration est pour moi l'expression vivante d'une pensée. Et c'est en cela que je la considère non scientifique, avant même que de considérer qu'elle est interprétative, et tout ce qui s'en suit.

De ceci découle qu'une narration est pour la personne qui s'y lance une entreprise risquée, elle y risque sa pensée, rien moins!

Il est bien plus commode de se retrancher derrière des observations empiriques mises sous forme la plus objective et neutre possible. Ce que nos étudiants croient souvent qu'il leur suffira de faire. Il est bien plus commode de se retrancher à témoigner de choses auxquelles on a assisté. En un mot, il est bien plus commode de se raccrocher aux supports méthodologiques du chercheur.

Le problème est que ces supports sont des supports pour chercher mais qu'ils ne garantissent nullement de trouver quoi que ce soit. Je soutiens que nous ne trouvons rien qui n'ait passé par notre pensée. Certes, on peut trouver quelque chose qu'on ne cherchait pas, comme par hasard. Cela ne change rien à l'affaire. Car avant qu'on s'en soit rendu compte, on n'aura encore rien trouvé, on aura seulement obtenu quelque résultat. Trouver est obtenir quelque chose que l'on reconnaît comme une trouvaille. Les supports et méthodes du chercheur sont des moyens d'obtention de résultats soumis à des normes de validité, voilà tout ce qui est garanti. Par contre reconnaître est de l'ordre de l'interprétation et résulte d'un acte de pensée.

Voilà qui est dit pour le chercheur. Mais pour les autres, l'enseignant, le formateur, l'élève, la personne qui s'intéresse aux sciences, etc. ?

C'est leur pensée qui m'importe, entendez moi bien, je ne dis pas pour autant qui m'intéresse (a priori). Je voudrais que mon travail donne à penser.

Un jour dans un de mes cours au SCES, une vingtaine d'étudiants et moi, nous sommes partis d'un grand et long fou rire lorsque j'ai interrompu une étudiante qui me disait : «je sais pas, mais je pense que ...» en lui rétorquant tout de go : «ce que vous pensez ne m'importe pas, je veux seulement que vous pensiez». Le fou rire nous est venu par le côté paradoxal de notre échange : comment l'étudiante pourrait-elle me témoigner qu'elle pensait si elle ne me disait pas ce qu'elle pensait ?

Alice se fait rabrouer par le chapelier fou sur le fait que dire ce que l'on pense n'est pas équivalent à penser ce que l'on dit. Eh bien je fais de même et dis tout net : déclarer ce qu'on pense, etc. n'est pas un bon témoignage du fait que l'on pense, tout au plus est-ce le témoignage que l'on a pensé. Ce qu'on pense est le fruit d'une pensée. Il serait déjà mille fois plus indiqué de dire à quoi on pense plutôt que ce que l'on pense. Ou alors, encore mieux, de raconter quelque chose qui nous a donné à penser. En particulier, et par exemple, pour reconstituer par la pensée ce que l'on a fait (afin, éventuellement, de le repenser, mais cela n'est pas obligé). Ainsi, dire ce que l'on pense est bien moins engageant que l'on veut bien croire, et ce, tout simplement parce que dire ce que l'on pense est une sortie, un dégagement, une coupure, qui éventuellement va provoquer une ressaisie (si on se trouve en situation d'en tirer les conséquences).

Il me reste à dire quel intérêt je trouve à ce que mes interlocuteurs pensent et pourquoi je les invite à des narrations dans lesquelles, par transfert, ils me donnent à penser. Il s'agit en effet de ce que je pourrais qualifier d'interlocution de pensées. Voici.

La didactique met l'accent sur un acte d'enseignement indispensable que l'on appelle la dévolution. En effet, s'agissant de mathématiques et selon les exigences que nous mettons à leur enseignement, on ne peut pas déléguer l'apprentissage des élèves à l'enseignant ni non plus à quelque dispositif d'apprentissage que ce soit. La dévolution est donc un acte nécessaire par lequel, autant qu'on puisse parler ainsi, l'élève prend en mains son apprentissage. On constate que la dévolution est un acte difficile pour l'enseignant, et pour le didacticien tout autant. Cela fait partie de ce qu'on pourrait qualifier de "plus vite dit que fait". Mais exprimer les choses ainsi est trompeur.

Comme tout apprentissage n'est en définitive que le fait de l'apprenti (pas nécessairement conscient ni a fortiori reconnu par lui-même), et que les élèves apprennent, peu ou prou, on doit constater que dans l'enseignement, il n'y a jamais absence de dévolution. La question n'est donc pas d'assurer la dévolution, la question est de la contrôler. On retrouve alors ma boutade qui a provoqué le fou rire. Il y a en effet un paradoxe : la dévolution n'est-ce pas en effet un acte de remise du contrôle aux mains de l'élève ? Comment dès lors puis-je parler de contrôle de la dévolution ? (Cela me rappelle un titre de livre, que je n'ai hélas pas acheté, vu dans une vitrine à Montréal: *Contrôlez votre lâcher prise*. Et on trouve aussi : sur un blog : maitrisez votre lâcher-prise <http://aeliah.verblog.com/ma%C3%A9triser-le-l%C3%A2cher-prise>)

La plupart des didacticiens de mes collègues se sont intéressés à contrôler la dévolution. Ce qu'ils veulent contrôler n'est pas la dévolution elle-même, mais se situe en aval de celle-ci. Ils voudraient contrôler que celle-ci ne dérive pas trop des buts qu'ils se sont assignés. L'entreprise est tout à fait légitime mais extrêmement risquée.

Pour ma part, je me suis intéressé à quelque chose d'apparemment moins ambitieux. J'ai considéré que je pouvais commencer par chercher à contrôler non pas la dévolution mais simplement *qu'il y ait bel et bien de la dévolution* et dans tel cas à observer quelle tournure elle prend. C'est cela qui m'a amené à comprendre, sans avoir en quelque sorte indirectement à le déduire comme ci-dessus du fait que les élèves ont appris, que de la dévolution il y en avait toujours effectivement.

Car s'il y en a toujours c'est parce que les élèves n'en pensent pas moins. Et n'en penser pas moins c'est ce qui souvent nous amène à déclarer : «je vais vous dire ce que je pense (de tout ça)». N'en penser pas moins est échapper à une emprise, c'est donc exactement ce que, par dévolution, nous tentons d'exploiter pour faire apprendre des choses à nos élèves.

Bref, donner à penser est la clé de la dévolution. La narration est un moyen de donner à penser, à la fois de restituer ce que la dévolution aura permis et d'engager de nouvelles pensées, à de nouvelles pensées.

Vive la dévolution!

F. Conne

7 et 17 mai 2011 suivi d'une note du 4 juillet 2017.

À ddmes

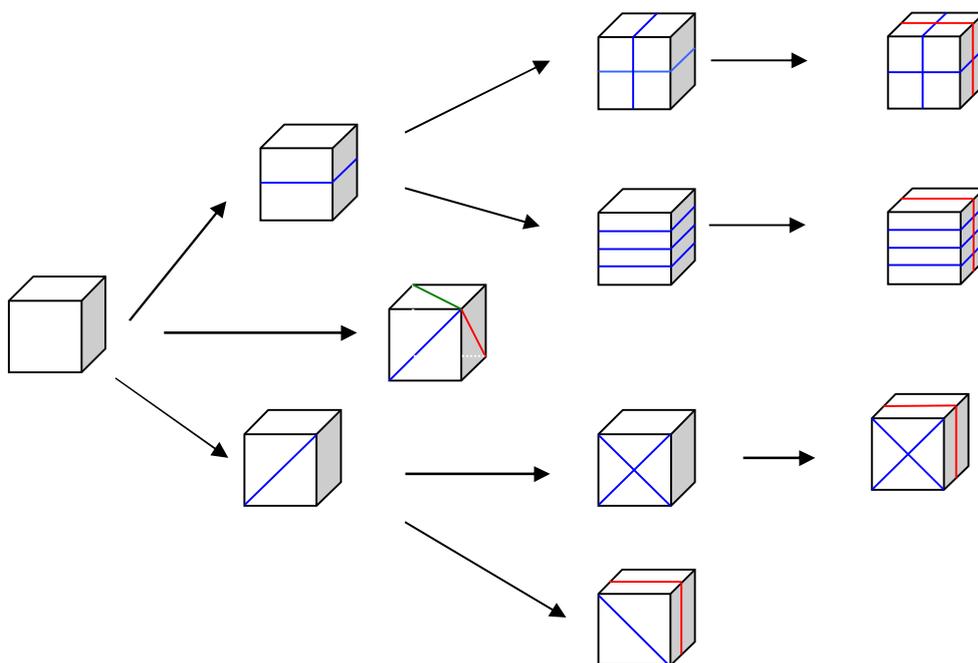
Evocation d'une expérience didactique de longue haleine : arrangements de plots en bois.

7 mai 2011

L'exemple qui suit présente des analogies à celui de nos puzzles de quadrilatères du puzzle que nous étudions en 2003 (Del Notaro L. & Scheibler A., 2003).

On dispose d'une collection de plots en bois, qui sont des découpes de cubes : il y a 48 pièces.

Jeux de plots en bois.



La collection des 48 plots décrite comme obtenue par découpage du cube.

Durant 30 années d'observation de gens jouant avec ces plots, j'avais toujours observé tels ou tels arrangements de plots, mais jamais un arrangement qui m'était venu à l'esprit il y a

15 jours seulement : un arrangement de 5 plots, fort simple à réaliser, qui tient debout tout seul et qui implique 2 pyramides-tiers-de-cube du matériel et qui donne une pyramide d'arête double de la pyramide-tiers-de-cube.

En fait tout se passe comme si les arrangements de plots que l'on observe toujours, comme a) l'arrangement de trois pyramides faces contre faces afin de faire une pyramide égyptienne et la recherche dans le matériel d'une 4ème pyramide pour compléter cet arrangement, ou b) la recherche d'arranger les 3 pyramides pour faire un cube, aussi bien que c), celui que je n'ai jamais observé (arrangement d'un petit cube avec deux pyramides tiers et deux prismes triangulaires moitiés), procèdent tous de l'imagination préalable et anticipatrice de l'existence de quelque chose de vague que le sujet croit reconnaître dans les figures que font ses arrangements. Il y a donc trois éléments : anticipation d'une forme vague, détermination de cette forme par arrangements des plots et reconnaissance de cette forme dans les arrangements se déterminant lors de manipulations (voilà qui est assez mal dit, je travaillerai plus tard la formulation). Dans les exemples a) et b) ci-dessus, les sujets imaginent bien les pyramides et les cubes (c'est ce qui a passé pour des *gestalt*) et dans l'exemple c) ce serait faute d'imagination que l'assemblage n'apparaît jamais ou, s'il apparaît par hasard, qu'aucun sujet ne s'y arrête, n'y reconnaissant rien, et donc que l'arrangement est aussitôt défait.

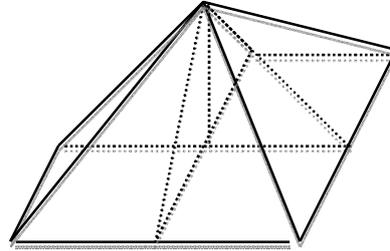
C'est d'expérience que j'en suis venu à imaginer un tel arrangement, j'y suis venu par un raisonnement et cela m'est venu comme une question, une intuition fort vague. Ensuite j'ai noté que je n'arrivais pas, mentalement à me représenter ceci, et je me suis essayé au dessin et si ce dernier me confortait dans mon intuition, il ne me donnait rien de clair, je suis alors allé chercher mes plots et là, l'arrangement s'est trouvé simplissime à réaliser et de là le dessin lui aussi est devenu fort simple à tracer : sur le dessin les formes des pièces se sont déterminées uniquement en tirant quelques traits, sans que j'aie à chercher à les copier. Et alors, enfin, l'image mentale m'est devenue plus aisée, parce que, en suivant les réorganisations que me permettaient la manipulation des plots, la reproduction à main levée et aussi l'imagination de l'obtention de ces pièces par découpes, j'organisais autrement cette image mentale.

Mais qui orchestre cela ? C'est l'esprit. Et là est bien l'idée que défend le neurologue A. Damasio (*Le sentiment même de soi*, 1999, O. Jacob) et c'est aussi ce que J. Piaget tentait de saisir avec l'idée de schèmes (et surtout de leurs coordinations). Mais ce qui est à critiquer chez Piaget ne me semble pas son logicisme (Longo - in Bailly A. & Longo G., 2006 - me déçoit en retombant dans cette vieillerie) mais le fait que ces coordinations dont parle Piaget ne se font pas sans les choses, sans des signes ! Sans cet ancrage dans le monde empirique, ces coordinations ne sont que potentielles. Dit autrement, les coordinations de schèmes (ou plus généralement les mises en relations de l'esprit) ne fixent que par la médiation des choses, par la prise de l'esprit sur les choses à propos desquelles les coordinations ont été faites. Il ne suffit pas de dire que des choses sont mises en relations, que des choses se coordonnent, il faut encore que ces coordinations se répercutent comme quelque chose du monde sur quoi, à son tour, l'esprit aura prise.

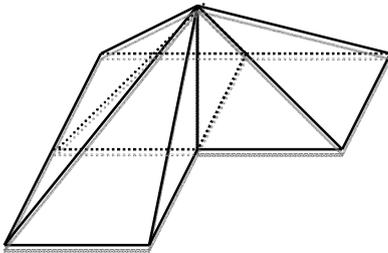
Les coordinations de mes tentatives de représentation et de réalisation de mon arrangement de plots ont donné lieu à un arrangement réalisé qui, en retour a pu être saisi par mon esprit et devenir en soi, un objet de représentation, et non plus seulement une construction de plots.

En d'autres termes cet assemblage a commencé à exister pour lui-même et pas seulement en tant que possible combinaison de plots.

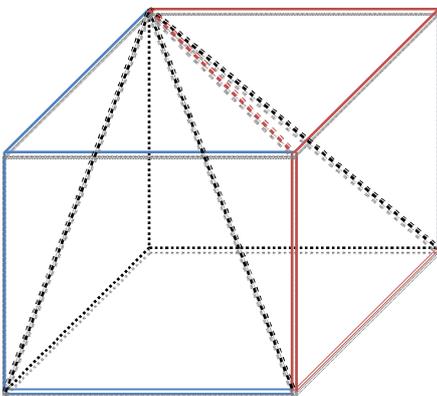
Arrangement a) toujours tenté. Personne pourtant ne s'imagine qu'avec 6 de ces pyramides, je puis reconstituer un cube et ce, aisément. Dans le matériel, il manque une pyramide pour pouvoir l'achever. La pyramide manquante est ici représentée derrière,



et ici, devant.

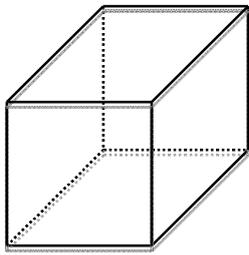


Arrangement toujours tenté : b) trois pyramides en cube. Toutes les autres pièces du jeu permettent de reconstituer un cube, soit uniquement avec des pièces identiques, soit par d'autres combinaisons. Sauf avec ces pyramides qui ne se combinent à aucune autre pièce du jeu.

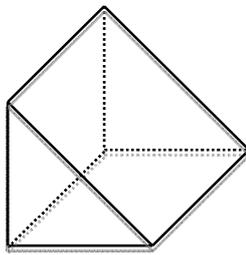


Arrangement c) jamais observé, avec 5 pièces de trois sortes :

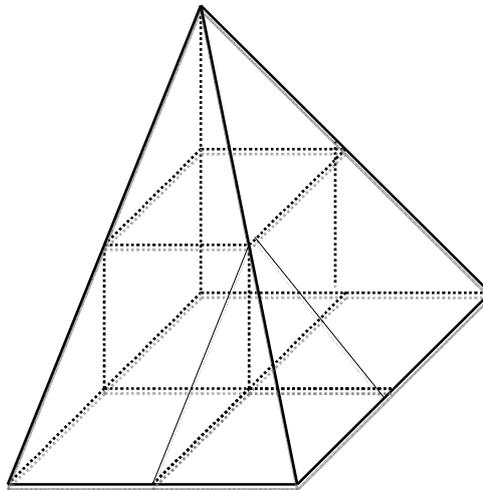
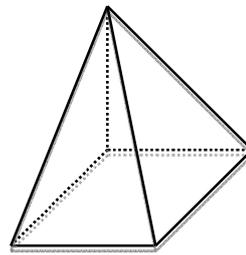
1 cube,



2 prismes



2 pyramides.



Cette décomposition est très emblématique des mathématiques chinoises (le livre des 9 chapitres). Le prisme s'appelle *quiandu*, la pyramide *yangma*, et le tétraèdre demi pyramide, *bienao*. En fait, j'ai eu l'occasion de voir cette décomposition dans le livre et lors d'une conférence de Dorier, mais je ne l'ai pas assimilée à mes plots.

17 mai 2011

J'aimerais revenir sur un point de la discussion qui a fait suite à mon message du 7 mai 2011.

1° Si j'examine rétrospectivement ma manière de travailler et de suivre telle idée puis telle autre, de proposer de considérer les choses de tel point de vue et des propositions que j'ai pu faire au groupe, c'est pour le moins foisonnant et on peut se demander si je ne m'oxy perds pas, si je ne tourne pas en rond.

Une chose est claire il est bien difficile de hiérarchiser tout cela, donc c'est pour le moins touffu et sans doute quelque peu embrouillé.

Ici, je tente d'exprimer une représentation que j'ai de mon propre travail.

2° Je travaille des liens et les idées selon leur phylum.

Dans un phylum se trouvent, *l'exploration du milieu*, le *jeu de tâches*, la *surprise*, la *narration*, diverses *fonctions du savoir* dont celle de mettre en évidence des potentialités, le *caractère superficiel et schématique de l'expérience*, *l'idée de jouer des difficultés comme celle de jouer des situations* et tant d'autres choses dont j'ai pris le parti de mettre par écrit ce que j'avais à en dire au moment où j'avais quelque chose à en dire.

3° Je reviens sur une question que j'avais en tête lorsque j'ai commencé à m'intéresser à l'enseignement des maths, et qui tombe dans le sens commun sous le thème de l'intuition et dont nos conceptions actuelles sont marquées par le romantisme.

Il y a des problèmes dont la solution semble tomber de nulle part, être magique, dont on se demande bien comment elle a pu venir à l'esprit de celui qui en a eu l'idée et dont, si cela nous arrive à nous, à notre échelle bien sûr, cela nous fait l'effet d'une grâce intellectuelle. On peut appeler cela comme on voudra: astuce, intelligence, malice, génie, intuition, perspicacité et j'en passe.

La question que j'avais était celle-ci : voilà une expérience qui a une telle répercussion pour qui la vit qu'il est souhaitable de donner aux élèves l'occasion de la vivre et les maths offrent de telles occasions à tous les niveaux qu'on les pratique. On peut même se demander si d'avoir vécu régulièrement ce genre d'expérience ne serait pas nécessaire à l'investissement des maths par les individus.

Ce qui distingue ces idées c'est leur caractère imprévisible, inattendu, que l'on ne peut anticiper. Bref, ce sont les meilleures surprises qui soient. Qui les vit, vit bel et bien une surprise. Pourtant quand on y pense, rétrospectivement, ce n'est pas vraiment le caractère de surprise que l'on considère. Mais plutôt que c'est une idée venue d'ailleurs, descendue du ciel, merveilleuse etc. On considère donc l'effet de la surprise bien plus que le caractère surprenant.

Moi même je pensais ainsi pendant longtemps. Je m'intéressais à et je l'ai écrit dans au moins un texte publié à ce *il fallait y penser!* Je me demandais mais que fallait-il donc? Ou plutôt que pourrait-il bien falloir pour y penser? Car il fallait y penser est une reprise, est une

considération rétrospective, celle de celui qui a la réponse, mais ne dit rien de celui-ci lorsqu'il ne l'avait pas encore.

4° Plus tard lorsque je me suis intéressé aux erreurs, comme tout le monde je ne me suis pas trop questionné sur l'étrangeté des erreurs, mais progressivement je me suis dit qu'il y avait là quelque chose à creuser. Notre incapacité à anticiper les erreurs. La nécessité dans laquelle j'étais d'aller en récolter. Puis, en total contraste, la facilité que nous avons à en trouver des explications, le sentiment souvent immédiat de les comprendre ó même si c'est de manière erronée. Puis avec le travail, la considération de listes d'erreurs, leurs analyses, etc. petit à petit je pouvais imaginer des erreurs et avoir le plaisir de les voir commettre ensuite. Mais il s'est alors passé une chose, c'est que je commettais moi même de plus en plus d'erreurs, là où je n'en commettais pas, je me suis dit que mon travail m'avait fait lever quelques censures que mon éducation et mes études en mathématiques m'avaient dotées.

Donc si les erreurs peuvent être en partie anticipées, moyennant un travail théorique, ce que la levée de ces censures m'apportait c'est d'élargir mon horizon de possibles dans lequel s'inscrivent ces anticipations. Et ce que m'apportait de pouvoir éprouver par moi-même un certain nombre de ces erreurs et confusions, c'est de palier au caractère inattendu des erreurs.

Car c'est une chose est de pouvoir les anticiper, une toute autre chose est de les prévoir. Il reste qu'elles surviennent à l'improviste. Par surprise. Même lorsque l'erreur provient d'une hypothèse que l'on a prise de manière délibérée, tout à fait conscient que ce que l'on fait pourrait s'avérer faux, il reste quelque chose de surprenant parce que l'on ne sait pas à l'avance quand ni sous quelle forme cela nous sera signifié par l'expérience. Certes dans ce cas l'effet de surprise est atténué. Mais surprise il y aura.

Par surprise tout comme nous viennent les solutions éblouissantes.

Là encore, et même si on vit bel et bien la surprise d'avoir commis une erreur, ce que l'on considère est plus l'effet de la surprise que le caractère surprenant. Pour le sujet surprise désagréable, pour autant qu'il ait un moyen de se rendre compte qu'il a commis une erreur, pour le chercheur surprise parfois agréable de pouvoir observer une erreur qu'il avait envisagée possible, ou de constater qu'il s'est donné les moyens de provoquer la manifestation d'une erreur qu'il avait théoriquement anticipée, ou encore de constater que telle erreur qu'il avait observée dans une situation particulière, il peut la retrouver dans d'autres situations et que donc l'erreur n'est pas seulement circonstancielle, mais qu'elle répond à une certaine logique etc.

Nous ne savons donc pas quand ni d'où (ce qui comporte aussi de qui) les erreurs vont survenir. Même si nous savons les provoquer.

5° Lorsque je vous ai parlé de cet assemblage d'un cube, de deux prismes et de deux pyramides pour constituer une pyramide de dimensions (linéaires) doubles. J'ai souligné que je ne l'avais jamais vue proposée par un sujet naïf, qui se serait contenté de jouer aux plots, de faire des constructions. J'ai contrasté cela avec des assemblages qui eux, au contraire apparaissaient tout le temps et quasi immédiatement. Je soutiens donc qu'il y a des manipulations de plots que l'on ne fait jamais sans avoir une idée en tête provenant d'autres considérations. Et moi-même j'avais mis des années à penser faire cette construction. Rétrospectivement je puis dire dans quel contexte, ce que j'avais en tête (le phanéron dirait Peirce) lorsque cela m'est venu à l'esprit (l'interprétant dirait Peirce) etc. Il n'empêche que

j'ai été fort surpris de songer et de constater que c'était possible, simple, à portée de mains et de dessin etc.

Et cette surprise m'a masqué à mes yeux une autre idée un autre rapprochement, un autre lien : le phénomène est exactement le même que celui de trouver la clé d'un problème. Il est tout aussi banal. La seule différence est que cette construction de plots n'est pas en soi la solution à un quelconque problème, elle ne se donne pas ainsi, mais comme banale construction de plots.

Pour moi, la construction devient surprenante lorsqu'elle répond à une question, qu'elle est devenue solution à un problème, que je l'ai trouvée au détour de la recherche de quelque chose. C'est le contexte que je mentionnais ci-dessus. L'effet de cette surprise est alors celui d'avoir un argument très fort concernant l'opacité du matériel des plots, qui fait obstacle à la pensée et à la connaissance. Les plots sont tellement prégnants qu'ils n'offrent pas de prises à connaître le cube au delà de quelques apparences et comme chose isolée d'autres choses de formes différentes - et qu'il faut tout un travail pour les faire parler du cube.

Dans cet exemple dont je vous ai entretenu les deux jeudis de mai à ddmes, j'ai tenté de relater le pas suivant : quelque chose de surprenant m'est arrivé qui a été provoqué par une question et un problème que je me suis posés à propos de ce matériel qui m'est si familier. Déjà là, la question et le problème étaient relativement inédits pour moi - mais ne venaient pas d'une intuition soudaine, au contraire se poser cette question et ce problème étaient fort logiques. La solution est venue. Et la surprise n'a pas été la solution, la surprise a été que la construction m'ait jusqu'ici échappé totalement, et à moi et à tous les autres que j'ai vu jouer avec ces plots.

Et cette surprise est venue comme solution d'un autre problème, relatif à l'expérience à même de procurer le matériel des plots, et son caractère opaque parce que bien trop prégnant. La solution mathématique éclaire une question didactique et surtout donne prise au questionnement sur l'expérience lors de manipulation de matériel.

6° Or ce qui fait souvent l'incompréhension entre deux personnes, l'une qui sait, qui a les solutions, et l'autre qui apprend, c'est bien quelque chose du genre : de l'opacité due à un caractère trop prégnant du savoir, de la solution. De sorte que les explications du savant tournent à la répétition de la même chose, n'offrent et ne produisent aucune prise sur la pensée de l'apprenant.

7° Face à cette incertitude, je ne vois qu'une seule réponse : le jeu. Considérer le jeu permet aussi de revenir sur la surprise comme quelque chose que l'on recherche, que l'on cherche à reproduire, comme quelque chose qui a prise sur le processus de résolution de problème éventuellement susceptible d'en accélérer le cours. C'est aussi un élément de répercussion d'un problème sur un autre.

8° Le titre du premier texte que j'ai publié sur la surprise est précisément : *« Jouer la surprise »* (Conne, 2004b). J'ai donc fait de la surprise l'objet d'un jeu. Tout comme je propose aujourd'hui de faire des situations ou des difficultés des élèves des objets possibles d'un jeu.

Mais cela reste totalement lié à la résolution de problèmes. Mais alors que la question, l'intrigue, le défi, le problème sont amorces d'un processus dont la solution est

l'aboutissement, la surprise est un élément dynamique, c'est la relance. Soit la relance du processus de résolution de problème lui-même, soit la relance d'un problème sur d'autres, ayant d'autres dimensions.

*

4 juillet 2017

À propos des notes de mai 2011 sur les arrangements de plots en bois

Les deux documents ci-dessus à propos de plots en bois, pourront sembler banals, mais tout au contraire ils font part d'une observation indéniable et extrêmement importante. Certes cela ne dit rien que d'autres n'ont pas dit, mais en voici une confirmation irréfutable

Si, comme je l'ai tant de fois fait avec mes étudiants, on propose sans autres ce matériel de plots à des gens, ils n'observeront que ce qui peut entrer dans leur horizon et leur exploration sera déterminée par les questions qu'ils sont à même d'imaginer. Ces questions ne sont pas forcément très claires à leur esprit et n'ont pas à être explicitement formulées. Cela peut être très vague. Néanmoins elles sont indispensables. Sinon, eh bien ce qu'ils seraient éventuellement amenés à assister dans leurs manipulations leur passera à côté.

Ainsi la pyramide à base carrée - genre égyptienne - existe dans l'esprit des sujets avec qui j'ai échangé avec ces plots et ils se demandent si avec les pyramides du matériel on pourrait en faire une, et cela semble marcher et ils cherchent en vain un 4ème plot du genre. Ainsi, parce qu'on leur a montré les pyramides assemblées en cube, ils essaient de la refaire - comme les casse tête, on sait qu'il y a une réponse, et on tente de la (re)trouver.

Mais la pyramide augmentée avec les 5 pièces est au delà de leur horizon. Et a longtemps été hors du mien aussi.

C'est exactement ce que nous avons observé à Pré-de-Vert avec l'activité puzzle relatée dans les actes du séminaire national de didactique des mathématiques en 2003. Appelés à combiner des pièces polygonales en carton afin de produire la plus grande variété de quadrilatères possibles, nous avons été frappés de constater la très grande pauvreté des productions des élèves ainsi que celle des leurs commentaires. Nous avons alors pu lever cet obstacle en transformant la tâche en un jeu : on disposait les pièces en un quadrilatère et le jeu consistait à transformer ce quadrilatère en un autre en déplaçant le moins de pièces possibles. Alors non seulement les productions ont été bien plus riches mais encore, les élèves dans leurs commentaires ont révélé tout ce qu'ils savaient des quadrilatères.

C'est entre autre ce qui fait que lorsque l'on fait la démonstration de quelque phénomène ou expérimentation : rien n'indique que les assistants y verront quoi que ce soit d'autre qu'une information. Ce n'est pas ainsi que l'on parle à l'esprit des gens.

Mais c'est aussi ce qui fait que tant d'enseignants de maths, ne voient que du feu à ce qui arrive dans leur classe, faute de questionnements, justement ! En effet, la remarque vaut aussi bien pour l'élève que l'enseignant et ce que ce dernier observera des premiers tient aux questions qu'il est à même de se poser sur eux ou leurs mathématiques.

La plupart du temps, c'est l'enseignant qui fournit les questions et l'élève est censé les prendre en charge comme siennes, c'est ce que chacun appelle une dévolution. Dans mon optique de suivi d'interaction, je suis à l'affût des questions qui viennent aux élèves et tente d'orienter les échanges sur cette base, on pourrait dire que j'inverse la dévolution.

Il est clair que le matériel - et cet exemple illustre parfaitement - est « opaque » parce que « trop prégnant » sur certains aspects.

Ainsi un cube en bois ou un cube en polydrons n'ont pas du tout la même emprise sur notre esprit. Par exemple si on veut démontrer la formule d'Euler : $F-A+S=2$ par la démonstration des graphes planaires qui suppose que l'on découpe la coque le long des arêtes pour rendre cette coque plane - par exemple, F. Gonseth donne cette démonstration dans *La géométrie et le problème de l'espace (Gonseth 1946-1953)* - eh bien j'ai été fort surpris de me rendre compte que cela est bien plus aisé à se le représenter sur un polyèdre en polydrons que sur un cube plein, car il est plein, justement. De là ma distinction entre lignes de découpe et marques de découpes (*Quelques pas esquissés dans l'univers des polyèdres*, Conne F. 2007a), puis, inmanquablement l'idée de découpe dans de la pâte à modeler.

Pour en revenir à l'assemblage en pyramide de dimensions linéaires doubles des petites pyramides du matériel, ce qui m'a amené à me questionner là-dessus est difficile à retrouver. Il y avait aussi des considérations de volumes. Je me rappelle aussi avoir espéré trouver une solution qui utilise les trois petites pyramides.

Dans la manipulation des plots, ce qui ne m'était pas venu à l'esprit était de placer les deux prismes le long de deux faces adjacentes - donc perpendiculairement - et si je tente de me faire une image mentale des pièces dans une telle construction, c'est là que, personnellement, je croche. On pourrait dire que le cube matériel m'incite au parallélisme.

C'est par dessin, ou plutôt par esquisse à main levée que la réponse m'est venue. Et ce, en appliquant une syntaxe de dessin : en tirant quelques traits idoines. Cela part néanmoins d'une raison : la base de la pyramide augmentée est un carré dont le quart est la base de la petite pyramide.

Je dessine un cube en perspective cavalière. Je prolonge la base de ce cube en une base de dimension double. Je relie les sommets de cette base double avec leur correspondant de la face supérieure au cube. Ces 4 lignes convergent - ou plutôt fort de mon intention je les fais converger, convaincu que tel est bien le cas - et la pyramide augmentée apparaît. Apparaît aussi une petite pyramide posée sur la face supérieure du cube.

Trois sommets de la face supérieure du cube sont visibles. Trois sommets de la base de la pyramide augmentée sont visibles, chacun relié au sommet visible correspondants de la face supérieure du cube. Je relie celui des sommets de la face supérieure du cube qui est médian avec les milieux des deux côtés visibles de la grande base. Apparaissent alors les deux prismes latéraux ainsi que la petite pyramide du bas.

Voici donc les emplacements des pièces déterminés. J'ai voulu m'assurer que les pentes des faces avaient bel et bien les mêmes inclinaisons, et pour cela ai réalisé l'assemblage des plots.

*

Dernière remarque, ces considérations sont étroitement liées à la note *Rebondissement suite aux Journées de la Chaux d'Abel, mai 2011* (Groupe d'études 2012b), consacrées à la narration (cf. ci-dessous 5 octobre 2011.)

FC

19 juin 2011

Qui m'occupe depuis 40 ans déjà. (Conne F., 2006).

Ce qui pour moi a déclenché mon intérêt pour les questions d'enseignement des mathématiques est un événement public qui s'est passé en janvier 1972 au CERN. Une conférence donnée par A. Grothendieck, un mathématicien très réputé, où il expliquait son renoncement à poursuivre sa carrière de chercheur en mathématiques (<https://www.youtube.com/watch?v=ZW9JpZXwGXc>). C'est tout à fait par hasard que je me trouvais parmi les auditeurs, l'amphithéâtre était archicomble. Au sortir de cette conférence, moi qui me destinais à faire de la recherche en mathématiques, qui en étais au début de ma troisième année d'études, j'ai renoncé définitivement à ce projet. Je n'étais de loin pas le seul à avoir été marqué par cette conférence et le mouvement assez large dont elle se faisait l'écho. Par contre l'impact aura été de relative courte durée. Rien n'a bien changé dans le monde de la recherche en mathématiques. Néanmoins cet événement, qui a été décisif pour moi, était le signe d'un profond malaise parmi les chercheurs en sciences dures, et le discours de A. Grothendieck remettait fortement en question et la pertinence et la légitimité de la recherche de pointe en mathématiques. Son argumentation était solide et reposait pour une partie sur des faits, en particuliers institutionnels, quant aux sources de financement des recherches en mathématiques, que l'on désignait alors volontiers par l'expression : complexe industriel et militaire. Une autre part de l'argumentation de A. Grothendieck était manifestement moins solide et reprenait à son compte les critiques que les tenants de la systémique faisaient aux tenants de la science classique ou parfois taxée de cartésienne. Enfin une dernière part de l'argumentation se faisait l'exégèse d'idées maoïstes parfaitement farfelues et, comme on a pu s'en rendre compte par la suite, dangereusement idéologiques.

Ici je retiendrai une crise portant sur la pertinence et la légitimité de recherches extrêmement pointues et sophistiquées en mathématiques, inaccessibles à toute personne non spécialisée du domaine, même aux mathématiciens professeurs de la faculté, et reposant sur des faits clairement établis de la manière dont les mathématiques étaient pratiquées dans les milieux académiques et de recherche.

Une chose m'avait étonnée : questionné sur ce qu'il avait l'intention de faire professionnellement, A. Grothendieck a annoncé qu'il se retirait certes, mais gardait un poste universitaire et qu'il se contenterait de répondre aux questions qu'on lui poserait sur ses recherches antérieures. Une sorte de "mathématicien passif et retiré". Ainsi à la crise de légitimité et de pertinence résistaient deux choses : un fait social, et institutionnel, il garde un poste universitaire, et, d'autre part, un fait individuel relatif aux questions et à leur partage avec d'autres.

Je n'étais pas naïf au point de croire que A. Grothendieck et les camarades qui l'avaient suivi allaient changer la face du monde académique et scientifique. Je me suis contenté d'en tirer les conséquences qui me concernaient personnellement. Quant aux questions de pertinence et de légitimité des mathématiques telles que pratiquées alors, j'étais trop peu informé pour m'en faire une idée précise, mais néanmoins assez pour partager quelques-uns des doutes du conférencier. J'ai donc décidé deux choses. 1° Dans le doute m'abstenir. Ce qui voulait dire rien moins que renoncer à une carrière de mathématicien. En effet, en 1972 déjà, qui voulait y réussir n'avait pas loisir de tels états d'âmes, du moins en tout début de carrière. 2° Tenter d'y voir clair sur un terrain qui me soit accessible.

J'ai considéré alors, et je me le suis formulé exactement ainsi il y a 40 ans, qu'il était un fait, celui de l'enseignement des mathématiques, que je pouvais chercher à mieux connaître et questionner. Surtout que là, la pertinence et la légitimité étaient aussi sujets à de sérieux doutes, cette question était vive. Elle l'est restée aujourd'hui encore. Certes, cela se posait ici à un niveau très profane, certes aussi il retournait de bien d'autres choses que les considérations de A. Grothendieck, mais il était aussi indéniable qu'il y avait des liens entre les deux.

Voilà pour le volet des faits, mais sur celui des questions, une perspective s'offrait à qui s'intéresserait aux questions d'enseignement des mathématiques. Il s'agissait de l'ouverture sur l'épistémologie que les études piagétienne proposaient, et qui s'étaient sérieusement et profondément penchées sur les mathématiques.

J'ai donc pris ma plume, et écrit au Pr. L. Pauli, que je connaissais de nom, et me voilà débarquant à la FPSE, c'était en 1974.

Plus tard, par l'entremise de G. Vergnaud, j'ai rencontré les didacticiens des maths français, dont l'un des leaders, G. Brousseau nous faisait une proposition alléchante : étudier scientifiquement les phénomènes propres à l'enseignement des mathématiques, en faisant le pari de ne s'en tenir qu'aux phénomènes spécifiques à cette "matière" (ou "discipline", "contenu", etc. ... il m'est difficile de trouver le terme le plus complet et correct).

Cela collait et prolongeait assez bien les perspectives piagétienne du moins de ceux qui s'étaient plus spécifiquement attachés aux mathématiques : P. Gréco, L. Pauli, J.-B Grize, A. Morf etc. Cela cadrerait aussi assez bien avec les idées d'un philosophe, interlocuteur important de J. Piaget, F. Gonseth. J'ai donc adhéré au projet de fonder une didactique des mathématiques autour de G. Brousseau, G. Vergnaud et Y. Chevallard.

Il s'agissait donc pour moi de questionner des faits, ceux de l'enseignement de maths et de la pratique scolaire des mathématiques, de garder le focus sur les questions de pertinence et de légitimité, mais restreintes à la sphère de l'enseignement, et enfin de m'inspirer des études d'épistémologie génétique afin de questionner les questions, je veux dire questionner les questions qui pourraient motiver les élèves à apprendre les mathématiques. Tout cela cadrerait fort bien avec les conséquences que j'avais tirées de la conférence de A. Grothendieck, sauf sur un point, et non des moindres : celui de m'associer à une entreprise et un pari scientifiques.

C'était un pari risqué, et 35 ans plus tard, je vois que je ne saurai pas de mon vivant si il sera gagné ou pas. Valait-il la peine d'être tenté ? Ça même je ne le sais pas. Néanmoins quelque chose de très simple m'a poussé à le prendre. Une question banale, une question de légitimité et de pertinence. Si il est légitime d'étudier les fonctions elliptiques, ou les formes modulaires en maths, s'il est légitime d'étudier la cosmologie, ou les phénomènes de transportation quantique, s'il est légitime de s'intéresser aux bactéries et autres biotopes, s'il est légitime de s'intéresser aux aborigènes ou à nos ancêtres babyloniens, etc., il est tout aussi légitime de s'intéresser aux phénomènes d'enseignement et de se demander si oui ou non, certains seraient spécifiques aux contenus enseignés. C'est un argument de principe, et tant qu'on en reste a priori, il ne fait aucun doute. Il en va tout autrement a posteriori. Pour le moment la didactique des mathématiques n'est pas une science établie. Elle pourrait le devenir - la biologie a mis du temps à se constituer comme science de la vie, - mais ici, tout reste à faire.

Il ne s'agit pas de constituer science, ni même de proposer quelques théories aussi pertinentes soient-elles pour gagner ce statut. Une science ne se réduit pas à ses théories!

Je me suis alors posé une question somme toute assez simple. "Que faut-il pour constituer une science ?" Ou encore : "que nous faudrait-il en didactique pour que le projet de faire une science survive au long processus de sa constitution ?" Pour moi il ne s'agit ni de méthodes, ni de théories, mais quelque chose de bien plus fondamental. Ce qu'il faut c'est un mystère propre (voire un petit nombre de tels mystères).

Il faut lier le projet de la didactique à des questions qui nous dépassent. Aucune science ne s'est constituée autrement.

Attention *question qui nous dépasse* ne veut pas dire forcément *question métaphysique*, au contraire, justement puisque les sciences arrachent à la métaphysique des pans entiers de ces questions.

En maths, ce sera, parmi d'autres : "Qu'est-ce qu'un nombre ? Qu'en est-il du sens en mathématiques ?", en physique : "Qu'est-ce que la matière, le temps, l'espace ?", en biologie : "Qu'est-ce que la vie ?", en psychologie : "Qu'est-ce que la conscience ?" Et j'en passe et j'en passe... Je me suis restreint à ne mentionner ici que des mystères spécifiques à quelques sciences.

Mon pari sur la didactique tient donc à cette question : " Y aurait-il quelques mystères didactiques, quelques questions qui nous dépassent que la didactique pourrait arracher à la métaphysique ?" Et enfin, et toujours : "Dans quelle mesure ces mystères didactiques ressortent des spécificités des disciplines ?"

J'ai pas mal réfléchi à ces questions. Et vous pensez, j'y réfléchis encore. Je suis parfaitement au clair qu'il ne tient pas à quelque individu d'y apporter une réponse, ni de convaincre la collectivité à leur propos. Bref, ce ne sont pas des questions sur lesquelles on puisse prophétiser (puisque alors on en resterait à la métaphysique). Cela n'empêche pas d'y penser.

Je l'ai fait sur trois niveaux.

Le premier, qui pour moi est le plus accessible et évident, consiste à considérer que la didactique, si elle veut se faire science, se doit de considérer et de partager une part des mystères propres aux mathématiques. La question de savoir ce qu'est un nombre concerne tout autant la didactique que les maths. Pour moi cela va de soi. Et même c'est une nécessité. C'est sur ce genre de point que je prétends que la pertinence et la légitimité de l'enseignement des maths sont liées à celle des maths elles-mêmes. Et c'est un argument fort qui plaide pour la spécificité des didactiques.

Mais il est des mystères que les maths partagent avec d'autres domaines : la question du sens, par exemple avec cette question que l'on retrouve dans les arts musicaux. Celle du signe avec la linguistique etc. Il y a donc des ponts entre didactiques des disciplines. Et bien entendu cela se croise avec quelques mystères de la psychologie, comme ceux des rapports entre intelligence et perception, et partant des questions de visualisation ou d'espace proprioceptif en didactique de la géométrie ou d'écoute musicale en didactique de la musique.

Le second niveau est plus difficile. C'est celui de se demander ce qui serait un mystère propre à la ddm. Ici je n'ai jamais cherché à me poser cette question au-delà du domaine que connais, l'enseignement des mathématiques, mais il est clair que si je trouvais ce que je cherche, cela aurait un lien avec la question de l'enseignement en général.

J'ai énormément réfléchi, étudié et cherché autour de quelques intuitions. Ici je suis obligé de faire très court. La question la plus simplement formulée que je puisse proposer est celle-ci : "Qu'est-ce donc qu'enseigner des mathématiques ?", "Qu'est-ce donc comme acte ?" J'ai bien entendu en tête que l'on veuille me rétorquer que c'est une question de psychologie, voire de psychologie sociale. Je ne le pense pas. Et mon argument porte sur la distinction triptyque entre *connaissance*, *savoir* et *savoir institué*, et les phénomènes de *transpositions des savoirs* et de *transferts des connaissances*, et de là ma notion d'*interaction de connaissance*, et d'*investissement de savoirs* ou encore ma définition de l'enseignement comme apprentissage du couple enseignant /enseigné.

Mentionnant tout cela, je ne cherche pas à vous convaincre, je veux simplement témoigner de questions d'études et de recherches. Je veux surtout dire que je crois fermement, au point de parier, que là, il y a bel et bien mystère. Non pas pour moi, mais pour tout un chacun, quelque chose qui soit communément admis comme une des questions qui nous dépassent. Bref, il y a de quoi faire de la ddm une science, et, partant, des didactiques aussi.

Est-ce que cela se fera un jour ? C'est une toute autre affaire (une affaire de civilisation, donc qui nous dépasse encore plus).

Viennent alors très naturellement deux objections ó et sans doute plus. Et nous voilà à un troisième niveau de considérations.

La première est que les questions métaphysiques qui nous dépassent, on se les pose depuis la nuit des temps. Bref, s'il y avait quelque mystère didactique, ça se saurait. Ma réponse est assez simple, elle est puisée à l'exemple de la constitution de la biologie autour du mystère de la vie. Cela ne s'est pas fait tout seul, cela a mis du temps à se clarifier. Et pas sans d'énormes remous. Les questions et mystères, cela se travaille, se formule et se reformule, etc. Je prendrai un tout autre exemple pour dire que, si ce ne sont pas tant de nouveaux mystères qui apparaissent sur le devant de la scène, du moins les mystères ne sont pas figés, ils se voient renouvelés par les progrès scientifiques et techniques. En mathématiques quelque chose de cet ordre est liée aux ordinateurs et à leur contribution à l'établissement de vérités mathématiques, en particulier des démonstrations inaccessibles sans leur recours. Ou encore sur l'étude de nombres dits "aléatoires", etc. Plus généralement, en maths et dans toutes les autres disciplines, même en histoire des maths pour l'étude des maths babyloniennes, la question est de savoir si les formidables possibilités de traitement de données des ordinateurs modifient qualitativement les sciences concernées.

La seconde objection est d'un autre ordre, elle concerne la situation de la didactique (quelques-uns de mes collègues pédants parlent "du didactique") dans l'éventail des sciences : science ou épistémologie, à verser du côté de la philosophie plutôt que des sciences, etc. ? Ainsi donc, selon l'objection que j'ai en tête, la didactique serait un domaine si général qu'il serait vain de lui trouver un mystère scientifique, je veux dire une de ces questions qui nous dépassent et que l'on puisse arracher à l'emprise de la métaphysique (ou plutôt à une emprise exclusive de la métaphysique).

Un premier élément de réponse est qu'il y a des faits, souvenez-vous que c'était là un des points de départ de mon parcours. Il y a aussi des phénomènes.

Néanmoins il y a bel et bien autre chose d'essentiel à relever ici. La didactique a une dimension épistémologique. (Et de ce point de vue, elle a quelque chose à voir avec un projet qui lui est antérieur, celui de l'épistémologie génétique. Cela ne préjuge en rien une filiation.) Mais surtout c'est là que la question de la discipline à laquelle se voue telle ou telle didactique devient cruciale. Ici je m'en tiendrai à la seule ddm.

Pour cela je considérerai la ddm, en contraste, à sa droite, à l'épistémologie génétique ou la psychologie cognitive et, à sa gauche, aux didactiques professionnelles. (À ce propos qu'il soit clair que si il existe des didactiques professionnelles, alors il existe des didactiques des professions d'enseignants, et donc une part qui concerne la didactique des maths.)

Le psychologue qui enquête sur la cognition et sur l'apprentissage des maths ou le développement de l'intelligence ne doit rien en retour aux sujets qu'il interroge et sur lesquels il expérimente. Les maths ne sont pas un contenu de leurs échanges. Plus, il est sensé se taire à ce propos. Néanmoins, il ne le peut que jusqu'à certaines limites, bien sûr et toute expérimentation psychologique sur des contenus est entachée de phénomènes didactiques. Certes le travail du psychologue de la cognition n'est déjà pas aisé puisque il doit déjà faire la part des choses entre ce qu'il peut desceller de mathématique des conduites des élèves ó ce qui par exemple structure la perception, ou encore ce qui caractérise le réglage des actions, etc. - et ce qui a trait aux mathématiques tel que ce sujet les thématise à partir de ses expériences, etc. Mais l'étude du didacticien y ajoute encore une couche, un niveau. Car des math, il en échange avec les élèves, il partage des connaissances, et des thématisations, en situation, sa propre pensée se met au diapason de celles des élèves, certes non sans gros hiatus. De tels échanges et partages ont lieu, de toutes les façons, mais si le psychologue doit les mettre entre parenthèses, le didacticien, lui, doit les exploiter. Il doit induire, il doit suggérer. Ceci fait que le didacticien des maths à affaire sur deux degrés au moins aux mathématiques.

Bref, la didactique est une sorte d'épistémologie de second degré.

On peut maintenant se rendre compte de la même chose au regard de ce qui distingue didactique professionnelle et didactique d'un contenu comme les mathématiques. Le didacticien professionnel n'est pas un homme du métier qu'il étudie. Les mathématiques que le didacticien des maths étudie pour ses élèves sont ses mathématiques, il connaît et sait ce qu'il cherche à examiner comment l'élève les connaît et les sait. Il a lui même été un élève et ne saurait étudier quelque sujet mathématique que ce soit sans qu'il ne l'ait appris, à l'école ou à la faveur de ses recherches.

Je suis donc persuadé de ce caractère à double fond de la ddm en regard aux disciplines voisines de nature épistémologique. Et cela me ramène au second niveau dont je vous ai déjà entretenu, celui qui est au cœur de ma réflexion sur l'existence ou non d'un mystère propre à la ddm. Tout se jouait disais-je autour de phénomènes de la transposition didactique, autour de la distinction connaissance savoir, autour de l'enseignement qui est une affaire de couple, etc. Autour de choses qui sont, elles aussi, à double fond (si ce n'est plus même). Bref, une telle cohérence me conforte dans mon argumentation contre cette seconde objection.

FC

5 octobre 2011

À ddmes

Rebondissement suite aux Journées de la Chaux d'Abel, mai 2011, consacrées à la narration (Groupe ddmes, 2012)

Lors de ces journées, nous avons proposé les rubriques suivantes:

Narrer, c'est

1) *Narrer, c'est relater tout à la fois ce que j'ai fait, ce qui a fait que je l'ai fait (les raisonnements qui sous-tendent mes actes) et ce que je pense de ce que j'ai fait (André, Jean-Michel).*

2) *Narrer peut conduire à problématiser, en rassemblant les questions auxquelles on a apporté des réponses, les questions qui sont restées sans réponses, les moyens que l'on pourrait engager pour obtenir ces réponses,í (François).*

3) *Narrer, c'est rendre compte des interactions élèves-milieu et des interactions expérimentateur-élèves-milieu ; narrer conduit à la mise en évidence d'éléments du milieu, de l'élève, voire de l'expérimentateur dont on était ignorant jusqu'alors. En d'autres termes (scheibleriens), narrer permet de ratisser les couches molles (André, Christian).*

4) *Narrer est intimement liée à l'idée de jeu de tâches, cela permet de révéler tout à la fois les tâches et les jeux qui en sont fait (Philippe, Jean-Michel).
On engage tout à la fois des interprétations de ce que fait l'élève et des procès sur ce que fait l'expérimentateur ; narrer, oui, mais, comment narrer autrement (Philippe, Jean-Daniel) ?*

5) *Narrer révèle des mathématiques et des traitements singuliers, voire iconoclastes des savoirs mathématiques (Jean-Daniel, André).*

6) *Narrer par écrit ou par oral appelle des manières différentes d'engager le lecteur/l'auditeur (Christian, François).*

*

Afin de préciser le point 2) ci-dessus, quelques définitions, puis un commentaire sur ce que j'entends par : "problématiser, en rassemblant les questions auxquelles on a apporté des réponses, les questions qui sont restées sans réponses, les moyens que l'on pourrait engager pour obtenir ces réponses".

1° Définitions.

Questions --- réponses --- questions problématiques --- solutions --- problèmes í

Un signe didactique.

Considérons, et ici cela suffit, qu'un signe représente quelque chose, appelé objet de ce signe. Si je parle de signe didactique, je veux dire signe d'un objet didactique.

On peut considérer ce qu'on appelle "problème" comme un signe psychologique, cognitif, dont l'objet sera ce phénomène, ou les processus cognitifs qui s'y rapportent, on peut même imaginer en faire un signe de ce phénomène. C'est ce qu'ont fait les tenants du *problem solving*. Plus loin, on peut chercher à caractériser ce phénomène en étudiant les processus neuronaux qui lui sont spécifiques. Dans une autre direction, on peut aussi généraliser en une épistémologie et une philosophie, et faire de la *résolution de problèmes* un signe d'un tout autre objet encore.

Ici je ne considère pas les choses de cette manière. "Problème" sera considéré comme signe de quelque chose de didactique. Quoi donc ?

On considère que "apprendre" comporte une composante cognitive et que la rencontre de problèmes en est un des principaux moteurs. On se base, très empiriquement, sur le fait que l'enseignant peut ó pas tout le temps ó observer qu'un ou des élèves "ont un problème", qu'il dispose d'indices pour cela ó interpréter ces indices et qualifier quel est donc ce problème est une autre paire de manches ó et qu'il peut aussi provoquer ce phénomène dans leur esprit. Ce sont des moyens qu'il a pour enseigner. Le principe d'un tel enseignement repose sur une mise en correspondance, par le biais d'une formulation en termes communs, des problèmes "perçus" chez autrui et des problèmes suscités à autrui. Et vu qu'il s'agit d'enseigner des maths, la formulation se fera en termes mathématiques. À cela il faut ajouter que ces termes sont reliés à l'expérience propre que l'enseignant a de ce phénomène. Il y a bien interaction cognitive, sans quoi le phénomène de problème ne saurait jouer le rôle qui est le sien dans les interactions de connaissances.

Notons ici, c'est important à souligner en passant, que le mot problème sert aussi de terme médiateur pour expliquer, éventuellement comprendre, comment il se fait que la connaissance mathématique est venue aux hommes. Grosso modo, et très schématiquement dit, les mathématiques seraient la forme que prennent les solutions à certains problèmes que les hommes se sont posés.

Dans ce cas, on associe le mot "solution" au mot problème. Toutefois, si je considère le mot "problème" comme représentant un phénomène mental, que peut donc représenter le mot "solution" ? L'issue, la fin, l'extinction du phénomène ? La décharge de protéine synaptique apportant le plaisir fulgurant d'avoir trouvé la réponse ? La récompense, comme dirait Changeux & Co ? í Ici il semble que la solution soit une partie du phénomène, que la solution fasse partie de ce que l'on entend par problème. Mais une telle considération psychologique ne colle plus du tout à ce que, en mathématiques, on appelle "solution", qui, elle, est un contenu, et même un contenu bien plus identifiable que ne l'est un problème. Au point même, où, dans les représentations que l'on donne des mathématiques et de leur

progrès, on fait des solutions les indices des problèmes que les mathématiciens se sont posés ou auxquels ils se sont vus confrontés.

Le mot problème sera donc, pour moi, le signe de cette chose là à laquelle on accorde une grande importance pour toute action didactique. De ce point de vue je le relie à un autre terme, lui aussi fort important dans l'enseignement, celui de "question". Je m'intéresse plus à l'exploitation à fins didactiques d'un phénomène cognitif qu'au phénomène lui-même, que je laisse aux soins du psychologue ou du neurologue. C'est pourquoi, le signe que je définis souligne une facette bien précise de ce que l'on peut appeler problème.

Il est clair que pour la psychologie, le mot "question" n'a pas la même importance que le mot "problème". L'idée de question renvoie à une réalité psychosociale, d'échanges, plus que purement cognitive. Néanmoins en didactique, les questions sont des signes fort importants, ceux des demandes que se font, réciproquement et tour à tour, enseignants et élèves. Les questions qu'autrui me pose peuvent être indices pour moi du problème qu'il éprouve, tout comme les questions que je lui pose me permettent d'induire chez lui quelque problème.

Pour le signe didactique que j'élabore, j'associe le couple *question/réponse* au couple *problème/solution*. Outre que dans la réalité didactique cette association est forte, je tire parti de l'idée d'une relation symétrique entre question et réponse pour penser, en termes didactiques, la dissymétrie de la relation entre problème et solution. Du point de vue didactique le terme "problème" ne sera donc pas premier. Ce qui sera pris comme premier est le couple *question/réponse*. Dès lors on définira ce qu'est une *question sans réponse*, et parmi celles-ci les *questions problématiques*. On pourra alors définir ce qu'est une *solution*, comme un type particulier de *réponse* à une *question problématique*, et, partant, définir un *problème* comme une *question problématique* dotée d'une *solution*. L'intérêt que je vois à procéder ainsi est double : d'une part, le ou les phénomènes cognitifs impliqués restent toujours en deçà de ce signe ; d'autre part, on est bien en didactique où on entend tirer profit des solutions apportées par les mathématiciens pour faire apprendre les mathématiques, les problèmes didactiques restent au delà de ce que l'on veut faire apprendre (ce sont des moyens). On a ainsi un signe didactique qui boucle la boucle entre cognition et mathématiques.

Voici donc mes définitions :

On a des **questions** ; certaines de ces questions ont des **réponses**, d'autres pas ; pour les questions qui ont des réponses, on dispose soit directement de ces réponses, soit des moyens de les trouver ; ces moyens peuvent être dérivés de la question ou non et dans ce dernier cas je dirais qu'ils sont des moyens de **s'informer** auprès d'une instance qui détient la réponse à la question ; il se trouve donc des situations où on détient la réponse à une question sans être à même de savoir comment cette réponse a été trouvée, voire comment on pourrait s'y prendre pour la trouver autrement qu'en s'informant ; parmi ces situations il y a toutes celles où on dispose d'une réponse à une question sans pouvoir dire comment on l'a trouvée, sans pouvoir restituer ou reconstituer la démarche qui nous y a amené, et dans ces cas, les choses se présenteront différemment si on sait, par ailleurs, que la réponse est juste, si on est incertain de sa réponse, voire même lorsqu'on est certain que sa réponse est fautive ; pour les questions pour lesquelles nous n'avons pas de réponse, on dispose parfois de moyens qui nous permettront les trouver ou parfois c'est sûr, parfois on est porté à le croire ou dans ce cas on dispose d'une réponse à la question dérivée : "comment trouver la réponse à ma question ?" Ainsi donc, une question nous étant posée, la question secondaire de savoir soit comment s'y prendre pour y répondre ou que ce soit par dérivation ou par information - ou encore celle de

savoir comment on a pu y trouver réponse ó qu'on soit assuré ou non que ce soit la bonne réponse ó peuvent elles-mêmes rester sans réponse c'est le cas aussi des questions qui sont effectivement sans réponse. Dans tous ces cas, je dirais que la **question** que je me pose m'est **problématique**. Une **solution** est une réponse à une question problématique, c'est une réponse double : la réponse à ma question et la réponse à comment j'ai trouvé cette réponse. Cette seconde réponse fait que ma solution est démultipliée porteuse d'autres réponses spécifiques que celles que je me suis posées ; une question problématique qui comporte une solution est appelée **problème**.

On comprend dès lors pourquoi l'enseignement est si friand de problèmes. Ils relient, en amont, des phénomènes mentaux suscités chez les élèves à, en aval, des solutions, des réponses qui ont à la fois un caractère spécifique (réplique) et un caractère général (légisigne). Les maths se prêtent particulièrement bien à ce type de signes.

Portée de cette définition.

Notez que c'est un aspect très général qui est mis en évidence par le signe que j'ai défini. Certes selon ma définition, il n'y a pas de problème qui ne connaisse de solution⁴ mais seulement des questions problématiques sans réponses. Ceci ne peut pas convenir pour un mathématicien, ni, plus généralement pour un chercheur (et je ne parle pas des métaphysiciens). Néanmoins, la recherche procède bel et bien par la recherche de solutions, et ne se contente pas de poser des questions et d'y apporter des réponses. C'est pourquoi, dans mes considérations je dois ajouter un terme : **conjecture**. Quelle place lui conférer dans ma construction ? C'est assez facile : une conjecture est un candidat réponse, indice de solution (plus maladroitement dit : c'est la présomption d'un moyen de déterminer la réponse à une question problématique). On pourra alors élargir ma définition de problème à être une question problématique qui comporte une conjecture. Cela convient aussi bien à la réalité didactique, ici, vue du côté de l'élève plutôt que du côté du projet d'enseignement, comme tantôt, qu'à toute recherche, et, pour ce qui nous intéresse, mathématique autant que didactique.

Notez qu'à partir d'une conjecture vous pouvez émettre des hypothèses, en déduire par raisonnement quelques conclusions et vous demander si de telles conclusions s'observent empiriquement. Une conjecture lie à son problème des questions et problèmes dérivés ou associés etc.

Le lien est ainsi fait entre les questions (et toute la chaîne qui s'en suit) des élèves, celles de leurs enseignants ó dans leur enseignement ó et celles des didacticiens. On a bel et bien quelque chose que l'on peut rapporter à une réalité didactique.

Deux derniers termes encore : information et faux-problème

Une réponse coupée de sa question qui, elle, n'a plus de raison d'être est une **information**. De ce point de vue, une information est tout le contraire d'une solution. Maintenant je ne définis pas ici le terme information, je ne dis pas que toute information serait une réponse à une question. Dans ce propos, information est lui un terme premier, mais ma perspective est celle

⁴ Dans *Le commencement de l'infini. Les explications transforment le monde.* (Cassini, 2016), David Deutsch. Lui, répète à l'envi que tous les problèmes ont une solution. Mais je ne crois pas qu'il accepterait ma définition.

du schéma *question/réponse*, pas celle de l'idée d'information dont je fais mention en me contentant par là de qualifier le découplage que l'on fait entre questions et réponse.

Tous les problèmes que nous font rencontrer l'étude des mathématiques ne sont pas de même valeur et il se trouve même souvent que nous nous posons ce que nous appelons de "faux problèmes". Ce qui est ici en cause est la pertinence des questions problématiques et en particulier des problèmes. Comme je l'ai dit, c'est sur le mot "solution" que se distinguent surtout les signes psychologiques ou didactiques que l'on tirera du mot problème. Ceci fait que, psychologiquement parlant, il n'existe pas de faux problèmes. Votre esprit se trouve dans un état que l'on dit joliment en anglais : "puzzled", disons un mélange de confusion et de sentiment de ne pas pouvoir recoller des données, voire de se trouver face à leur caractère contradictoire, sujet à ce qu'on appelle aussi un conflit cognitif.

La notion de **faux-problème** est donc relative à celle de solution telle que je l'ai définie ci-dessus.

Je dirai qu'un faux-problème est une question problématique qui mène à une impasse. Dans les termes proposés, c'est une question problématique, qui en règle générale, ne trouve pas solution. Néanmoins, cela ne suffit pas à qualifier une telle question de faux-problème.

Une question problématique qui a une solution, un problème au sens où je l'entends, ne peut pas être un faux-problème, du fait même que ce n'est pas une impasse. Mais c'est peut-être un problème peu significatif, banal, insignifiant, dérisoire, une question de détail. Cela tient à ce que l'on peut tirer de sa solution. Féliciter des élèves pour un tel problème est une forme que peut prendre l'effet Jourdain.

Un faux-problème est en effet un problème qu'il n'y a pas lieu de se poser, ou qu'il n'y a plus lieu de se poser, étant donné ce que l'on sait par ailleurs. Le terme "faux" ne porte pas sur le contenu de la question problématique, mais sur l'organisation de ces questions avec les problèmes et solutions que l'on connaît par ailleurs.

Un faux-problème ne se pose pas et il faudrait éviter de se le poser, ou à s'y trouver empêtré. On considère que l'on ne tire pas de bénéfice d'un faux-problème et même que cela peut être frustrant et particulièrement démotivant. Et bien entendu dire à quelqu'un qu'il se pose de faux-problèmes est souvent péjoratif, voire méprisant. C'est lui dire qu'il manque de moyens - de (se) les éviter. Néanmoins qui se coltine avec un faux-problème se trouve dans une impasse réelle, qui a tant sa facette objective que subjective et de tels problèmes sont souvent de vrais casse-têtes. Leur difficulté peut être très grande. (Ces considérations montrent bien la différence de perspective entre celle que je propose et une perspective psychologique).

Mais comment sait-on que tel problème que l'on se pose, telle question problématique à laquelle on accorde notre attention est un faux-problème? Cela ne se peut qu'en se référant à un autre problème et à sa solution, qui permettent de contourner l'impasse dans laquelle on se trouve.

C'est donc relativement à un problème et à sa solution, qu'un autre problème se trouve relégué au rang de faux-problème. Donc un problème et sa solution viennent (nous permettent de) contourner l'impasse dans laquelle nous sommes mis, et nous permettent de nous en dégager, nous déprendre, sans pour autant apporter de solution à la question problématique (momentanément) insoluble devant laquelle nous sommes.

Comme je l'ai dit, ce qui est ici en cause est la pertinence des questions que l'on se pose, celle des questions problématiques tout autant que des problèmes que l'on aborde. La question de la pertinence est une question philosophique fort vaste et complexe, je ne m'y aventurerai pas ici. Je me contenterai de rajouter ceci. Dans la vie courante, on se comporte continuellement de manière à contourner les obstacles, à se passer des informations dont on ne dispose pas etc. Au point où, pour certains esprits pragmatiques un peu frustrés, tout problème serait quasiment d'avance un faux-problème. Ces faits là travaillent fortement la pratique de l'enseignement des mathématiques.

*

2° Commentaire.

Question / réponses, un schéma d'échanges spécifique et biaisé par la propension à faire du savoir et de l'ignorance des attributs.

Me rappelant les remarques faites au début des années 80 par Y. Chavallard sur ce sujet je dirais que dans notre quotidien nous avons peu affaire à des questions, du moins explicitement et dûment formulées. Et pour les quelques questions auxquelles nous sommes confrontés, nous sommes habitués à en recevoir rapidement la réponse, ou à laisser tomber, éventuellement après un court laps de temps de réflexion. Il semble pragmatique de ne pas s'embarrasser de questions sans réponses immédiates ou quasi.

De ce point de vue, le régime des échanges scolaires se distingue du régime ordinaire par la place qu'occupent les questions. Théoriquement au moins, le contrat est tel que chacun des protagonistes, enseignants comme élèves, se trouve en droit de poser des questions à l'autre. Néanmoins, faisait remarquer Chavallard, à l'école les questions que l'on considère sont avant tout celles auxquelles on peut répondre et le temps consenti à le faire reste très limité. Ce n'est que dans les sphères savantes et scientifiques qu'on s'intéresse à des questions encore sans réponse, ou sans réponse complète, que l'on fait même "vivre de telles questions". En mathématiques de fameux problèmes ont mis des siècles pour trouver réponse, alors qu'en classe, l'échelle temporelle du délai entre problème et solution est minime. En classe, les problèmes non résolus ne sont que des problèmes non résolus dans le temps imparti pour le faire. Souvent, la recherche d'une solution à un problème n'est qu'un moment dévolu à la familiarisation avec le thème, suite à quoi on expose aux élèves la solution que la plupart n'auraient pas su trouver tout seuls.

Par ces rappels, je veux souligner que les questions et réponses ne sont habituellement associées qu'à des situations ou moments d'apprentissage, des moments d'incertitude dues à l'ignorance ou au manque d'information et qu'elles sont absentes des activités ordinaires, que l'on considère comme suffisamment informées. Il en va ainsi de la plupart des activités professionnelles, l'enseignement fait partie de ce lot. Font exceptions quelques activités spécifiques et en ce sens extraordinaires, par exemple activités de diagnostic, de recherche, etc. Les activités ordinaires supposent connu le réel qu'elles ont à traiter et ne se questionnent pas non plus elles-mêmes. Pour elles, les moments et lieux de leur formation sont séparés des moments et lieux de leur exercice.

De ce fait, pour l'enseignement, ce régime spécial des questions/réponses est le propre des échanges enseignants - enseignés, et les problèmes, que l'on considère comme moteur de l'apprentissage, concernent les élèves (apprenants). Déjà là, ce sont des problèmes pour apprendre, des problèmes sensés faire apprendre et pas des problèmes d'apprentissage. Les enseignants sont des professionnels formés et comme tels n'ont pas à résoudre des problèmes d'enseignement. S'ils rencontrent des problèmes, ceux-ci ne répondent pas à la définition que je me suis donnée, et on pourrait tout aussi bien les appeler difficultés. Elles sont le fait de certains élèves, de par leur comportement ou tout simplement de la lenteur et/ou la fragilité de leurs progrès - élèves que l'on qualifie parfois d'"élèves à problèmes". Elles affectent l'enseignement mais ne sont pas ce que l'on pourrait entendre par l'expression : "problèmes d'enseignement". En tous cas, ce ne sont pas des problèmes didactiques.

Ainsi, il n'est pas dans nos habitudes de considérer les efforts d'enseignement selon le même moule que les efforts d'apprentissages. Ceci marque un fort contraste dans l'appréhension que l'on a de ce qui, d'un côté, fait l'apprentissage et, de l'autre, fait l'enseignement. L'apprenti est mis à l'enseigne de son ignorance de ce qu'on entreprend de lui faire apprendre, l'enseignant est mis à l'enseigne de son savoir : il sait ce qu'il a à enseigner et est sensé aussi savoir comment s'y prendre pour l'enseigner.

Ce biais est tout autant un a priori qu'une orientation, et je serais même tenté de le qualifier de tropisme. Dans la plupart des narrations, relations, compte rendus, communications, conférences etc., le propos est prioritairement et principalement tourné vers le savoir. On rend compte de ce que l'on sait, de ce que l'on a appris, de ce que l'on comprend, de ce que l'on est à même d'expliquer, etc., bien plus que de ce qui nous échappe, de ce qui nous pose problème ; et on évoque encore moins la manière dont nous questionnons le réel et dont nous nous prenons pour apprendre. Les questions restent en arrière plan, souvent même largement implicites, ce qui fait que ces discours sont essentiellement orientés vers les informations, éventuellement les réponses, voire plus rarement encore les solutions. Bref, le chercheur qui communique se présente à ses pairs plus comme un enseignant qu'un apprenti, il soumet à l'homologation de ses pairs les savoirs qu'il pense avoir élaborés, plus qu'il ne fait partager sa science et/ou son art.

Il est très difficile de se dégager d'un tel schéma biaisé par une dissociation exagérée des pôles enseignant et enseigné. Nous mêmes, lorsque nous présentons nos observations, nos résultats, etc., nous le faisons pour mettre en évidence et en valeur nos explications, et la raison que nous avons à interpréter ce qui est arrivé de la manière que nous le faisons, justifiant par là et la pertinence des actions que nous avons entreprises, même lorsque ce qui s'est passé se serait avéré très différent de ce que nous prévoyions et/ou escomptions, et l'intérêt de ce que, au vu des événements, nous envisageons d'entreprendre. Bref, nous faisons état empiriquement de notre propre expertise à répondre plus que de celle à questionner.

Nous donnons l'exemple de ce que nous savons faire, mais que disons-nous de la manière dont nous avons appris à le faire ? Si, comme le veut l'air du temps, nous croyons fermement au rôle moteur de la résolution de problèmes dans tout apprentissage, que disons-nous des problèmes que nos expériences nous ont fait rencontrer ? Et quid aussi des questions dont ils découlent, des conjectures et solutions que nous leur avons trouvées ?

Formulons les choses autrement. Lorsque nous expliquons une réponse d'élève au vu des traces qu'il a laissées, ou des événements surprenants qui se sont produits, ce que (en 2011

lors de nos Journées d'adultes à La Chaux d'Abel) - Groupe d'adultes 2012b - narraient Christian Cange et Jean-Michel Favre, ces explications attribuent quelque chose aux sujets (élève, enseignant), que nous avons appris à la faveur de quelque investigation. Nous ne savons pas grand-chose d'eux, et, selon notre projet, nous nous posons des questions à leur sujet, et nous glanons quelques réponses, soit par observation, soit par déduction, soit par conjecture, etc. Les questions qui nous viennent à l'esprit sont généralement liées à chacun des contextes de nos échanges, et aux événements qui les émaillent. Souvent elles proviennent de surprises, d'attentes non confirmées etc. Dans nos relations et narrations, nous avons l'habitude de ne présenter que les réponses relatives aux échanges enseignants - enseignés, et de ne pas présenter comme telles, les réponses de l'enseignant, de l'expérimentateur, ou du chercheur aux événements. Ces actes, quelque fois présentés comme des décisions de leur part, sont plutôt rapportés à la dynamique de l'échange et à la conduite de la situation, soit au titre de dépassement de quelque écueil, soit au titre de l'évocation de l'échec de l'entreprise. Bref, nous rapportons plus des informations que des réponses. Les questions d'où procèdent les informations restent pour la plupart du temps implicites.

Par exemple je me demande si un tel élève sait son âge, je le lui demande, il me répond : "Comme Marie", en me montrant ses mains avec huit doigts levés. Soit je sais qu'il a 8 ans, soit je sais, éventuellement aussi, que Marie a 8 ans, soit je sais que si il lève huit doigts c'est bien pour dire "huit", et alors je me dis : "c'est ok. huit, dans ce contexte, est ok pour lui", et je passe plus loin. En disant cela, je soulève ici la question de savoir à quelles conditions une réponse que me fournit un élève à une de mes questions me donne une information sur lui.

Alors, quelle question est-ce que je me posais au juste à son propos ? Je me rappelle quelle question je lui posais, mais ce faisant, quelle était donc ma question à moi ? Est-ce vraiment son âge que je voulais savoir ? Et pourquoi le lui demander, à lui ? Etc. Pour cela il me faut remonter le fil des événements.

Ah oui je me souviens. Il s'embrouillait dans le comptage de ses doigts (et des miens tout autant). Je me demandais par conséquent ce qu'il appréhendait des nombres inférieurs à dix, et je lui ai demandé son âge parce que voilà un nombre inférieur à dix qui pouvait avoir pour lui une signification et parce que je savais qu'on lui avait déjà posé cette question, et très certainement plus d'une fois. Je ne savais pas son âge (ni celui de la dite Marie, que je connaissais pourtant). Et voilà que par chance, il me répond en me montrant ses doigts, mais sans les compter, du moins explicitement (mentalement, je ne sais pas). Peu importe qu'il me réponde juste, sa réponse est déterminée, fixe, rapportée à l'âge de Marie, c'est clair, net, immédiat, sans hésitation, sans comptage non plus : il me montre un nombre de doigts où que je ne puis pas m'empêcher de considérer comme huit où et il pense avoir répondu, avoir communiqué son âge. Voilà les informations que j'ai tirées. Toutefois, la réponse me surprend un peu. En effet, me voilà devant un problème. À la question : "sait il quelque chose des petits nombres ?", j'ai obtenu tour à tour deux réponses. Une qui me dit : "sans doute fort peu de choses", et une autre qui me dit : "sans doute plus qu'il n'y paraît". Les moyens que j'ai engagés pour déterminer la réponse à la question concernant son savoir numérique ne me permettent pas de répondre clairement et les concilier s'avère problématique. Mais je puis imaginer quelque conjecture. (Portant en l'occurrence sur la coordination des prononcés des noms de nombre et des actes de lever les doigts, í).

Voilà comment j'ai appris quelque chose avec cet élève (j'évoque ici un exemple de ce qui m'est bel et bien arrivé). Par contre, les enseignants qui m'avaient adressé cet élève m'avaient dit de lui : "il n'a pas encore la conservation du nombre au delà de 4 ou 5". C'était une information, certes non dénuée de raison - ce qui ne veut pas dire pour autant correctement interprétée. Comme j'ai pu le constater par moi-même, ses réponses à de simples dénombrements de quantités entre 5 et 10 variaient notablement. Moi cela me posait une question : "est-ce simplement possible ?" Je me disais que je serais vraiment étonné que cela se puisse, non pas théoriquement, mais je considérais que si cela était, cela devrait représenter un cas fort rare et que j'étais bien chanceux de tomber dessus. Il valait mieux rester prudent et tenter d'imaginer d'autres explications. Bon on peut se dire que ce sont là des questions de chercheur et pas d'enseignant : qu'est-ce que ce dernier aurait à faire de telles considérations ? Il veut simplement expliquer ce qui se passe avec cet élève. Le souci est que les explications qu'il se donne, même celles qui sont raisonnables et reflètent la réalité, peuvent faire obstacle à son entreprise. Comment éviter un tel écueil ?

Dans cet exemple, j'ai voulu montrer comment j'avais appris quelque chose de cet élève et je l'ai fait par le truchement d'un régime didactique d'échanges. Certes je prenais quelques libertés avec le régime scolaire, néanmoins cela restait didactique.

L'enjeu est donc de trouver moyen de questionner certaines informations. On peut esquisser une démarche.

Selon les définitions que je me suis données, ceci revient à restituer les questions dont elles procèdent, et les relier à de nouvelles.

Une procédure est alors envisageable : sélectionner parmi les informations dont nous disposons quelques unes, chercher à quoi elles répondent ou pourraient répondre. Ce travail consiste à situer nos informations parmi d'autres que nous n'avons pas en les situant par rapport à des questions sans réponses. Parmi ces dernières nous nous intéressons à celles qui sont pour nous problématiques, afin de questionner nos moyens d'investigation et de recherche, et de dégager quelques problèmes, par le truchement des solutions ou conjectures que nous pouvons imaginer à leur propos.

Voilà un programme ambitieux. Mais le plus important de cette esquisse réside dans la foulée de la démarche. Pour moi, il s'agit de lier aux informations que nous avons obtenues en questionnant les élèves et en suscitant pour eux des problèmes, les questions, questions problématiques et problèmes qui animent notre propre curiosité, investigation ou recherche, et ce, en regard du contenu, c'est-à-dire des questions, réponses, problèmes et solutions mathématiques qui concernent ce que nous savons des maths et que l'enseignement ou la recherche nous amène à faire partager aux élèves.

Bien sûr ces propos se rapportent à une des mes principales préoccupations de recherche. Je tente de me doter de définitions et de moyens me permettant de mieux comprendre les échanges didactiques comme un couplage entre deux apprentissages. C'est la perspective que j'ai ouverte en proposant de définir l'enseignement comme *l'apprentissage du couple enseignant/enseigné* (Conne F., 1999) et en développant cette idée dans quelques autres articles. Désormais le signe que j'ai élaboré autour du terme "problème" me permet de poursuivre dans cette voie.

En effet, en vertu du caractère général que j'ai déjà souligné, ce signe rend compte d'une facette de tout processus d'apprentissage en mathématiques, ou concernant les mathématiques, que ce soit celui de l'élève, celui de l'enseignant (la formation de son expérience professionnelle) ou celui du chercheur (l'établissement de résultats et de savoirs). Mais surtout, et, ce, en vertu de son caractère de signe, il permet de le faire de manière liée : ainsi les réponses des élèves sont autant des réponses aux questions qu'on leur a posées (ou plutôt à ce qu'ils en ont compris) que des réponses à des questions que l'enseignant (ou les auteurs du manuel etc.) se posent à propos de l'élève, des mathématiques aussi bien que des rapports qu'il peut y avoir entre eux. La chaîne ne s'arrête pas là puisque, justement, les manuels, les programmes, les méthodes proposent des actions en réponse (voire solution) aux questions (voire problèmes) que des penseurs ou chercheurs en didactique se sont posées (ont résolus).

Pour l'exemple ci-dessus, j'ai esquissé, sommairement et de mémoire, la narration d'une observation qui m'a donné à réfléchir (déjà évoquée dans ma communication à l'école d'été de 1999, à Houlgate, et que j'ai rappelée à de multiples occasions). Celle-ci m'a permis de questionner des informations, id est de restituer un lien (ce n'est peut-être pas le lien originel) entre une information et la question à laquelle elle répondait ou aurait pu répondre. Puis à situer cette question par rapport à d'autres questions et leurs éventuelles réponses.

FC

21 février 2012

À ddmes

Deux remarques illustrées sur deux narrations de recherches actuelles
(extrait d'un document inédit Possible / Potentiel).

Remarque 1) La première est que, pour Pikatchu, ces expériences de boulier étaient restées des expériences, sans suite. Sans institutionnalisation, sans exercice. Ainsi il a été initié, introduit, au boulier, il sait de quoi il s'agit, mais il n'a pas une maîtrise ni une représentation très précise.

Mais voilà : dit ainsi c'est fort mal formulé de ma part. Je dois retravailler cette affaire.

La question de ce que sait ou ignore le sujet a des significations fort différentes selon que ce sujet est interpellé sur des choses dans la perspective de lui enseigner ou de ne pas lui enseigner. Donc la valeur que l'on attribuera au fait qu'un élève sache ceci ou ne sache pas cela est toute relative à la valeur de ce savoir dans l'apprentissage qu'on lui destine et que l'on a programmé pour lui.

Le passage à l'expérience est une réplique de savoirs généraux. On apprend par expérience en en dégageant des savoirs généraux qui seront reportés (et le plus souvent destinés, par programme, à être reportés) sur d'autres expériences.

On aura alors appris : a) quelque savoir général, et b) à nous débrouiller avec les formes spécifiques sous lesquelles on en aura fait l'expérience.

Le caractère général du savoir acquis devrait le rendre apte potentiellement à des répliques et actualisations dans diverses autres situations. Mais cette potentialité reste endormante.

En fait ce qui se passe est que les savoirs généraux se voient associés à des appareils instrumentaux et symboliques qui les attachent à des milieux d'expériences particuliers. La généralité acquise scolairement est alors plus celle de ces appareils, qu'on applique partout, qu'aux savoirs eux-mêmes.

Par exemple les savoirs de numération restent attachés à l'écriture chiffrée de nombres et aux dispositions des calculs en colonnes ou encore aux moyens du calcul mental. Finalement, les savoirs ainsi acquis sont certes généraux, mais captifs de leurs répliques dans les supports associés.

Ainsi, le transfert de ces savoirs sur des expériences avec boulier ne se fait pas, et l'imagination à le faire en est même bloquée. La généralité du savoir acquis est celle de la généralisation et de la normalisation de tels appareils et supports plus que la généralité de transfert entre différentes actualisations expérientielles, ni effectives (indicielles) ni imaginées (rhématiques).

Remarque 2) La seconde, qui vient appuyer mon analyse ci-dessus est basée sur plusieurs autres observations sur moi-même ou quelques-uns de mes interlocuteurs, est qu'en fait la plupart des gens n'ont pas une idée ni une maîtrise bien meilleure du boulier et de tout ce qui

peut se passer sur un boulier, il en va de même avec les erreurs de calcul, mais encore bien des expériences.

Les savoirs maths sont de nature générale et il faut pas mal d'ajustement à des actualisations à des circonstances non familières. Finalement, c'est ce qui fait que lorsque je travaille avec un boulier, j'explore quelque chose et invite l'élève à m'accompagner dans cette exploration. Et donc à nos interactions se révèlent bien des choses que je n'avais pas anticipées par pensée et devant lesquelles les élèves ne s'étaient jamais trouvés.

Il y a donc certainement de l'ignorance de ma part, même si sur le sujet je suis plutôt savant. Et cette ignorance recouvre en partie celle que manifeste l'élève. Ainsi il y a une part d'ignorance qui n'est pas à proprement parler ignorance de savoirs de base.

Dit autrement ce qui est important n'est pas la manifestation d'ignorance, la contre-performance en elle-même, mais ce à quoi elle va se rapporter, ce que l'on peut en faire, comment on peut se rattraper, ou encore ce que l'on peut apprendre en se trouvant en telle situation. Ou encore, à quoi les différents sujets - moi, Céline qui assiste, l'élève déjà initié ou l'autre élève - pourront assimiler la nouveauté et ce qui fait surprise ou échappe.

Mais, et c'est là le point essentiel de ce que je préconise, il faut éviter que cette assimilation se fasse à quelque chose de général, mais bien qu'elle se plie aux accommodations nécessaires à un contrôle pleinement actualisé et spécifié sur ce qui se passe effectivement.

Ceci demande un minimum de technique. Mais la valeur de la technique n'est pas tant son utilité ou sa commodité, mais bien de **transformer en possibilité ce qui n'est que potentialité du savoir général**.

Quelque chose de potentiel est moins que quelque chose de possible. C'est parce que pour moi une chose est possible, ne serait-ce qu'en représentation, que je puis dire qu'il y a là chez l'élève une potentialité.

Il reste alors, éventuellement, à rendre pour lui aussi possible une partie (mais quelle partie ?) de ce qui l'est pour moi, et, ce, d'une manière ou d'une autre et que je puis anticiper pour lui. Vu ainsi, potentiel est du possible anticipé.

Ce travail nécessite un retour à l'expérience, mais non pas au sens où la présentait F. Boule : *voir le savoir général, la somme des angles du triangle fait 180°*, dans l'expérience au prix de plein d'aspects **filtrés a priori** (in Conne F., 2008). Ces aspects mêmes auxquels les élèves sont sensibles et dont, à chaque fois, ils nous font prendre conscience ; certains qui contrecarrent nos projets, d'autres qui leur permettent de prendre un cours inédit.

On peut dire autrement que le malentendu avec l'expérience de Boule provient de notre propension culturelle, d'associer expérience et observation. Or les deux ne vont pas forcément de pair. L'expérience de Boule n'est pas une expérience d'observation. En effet, on n'observe réellement que parce que l'on ne s'est pas contenté d'assimiler ce à quoi on assiste à des savoirs généraux. Certes, ce travail de spécification et d'accommodation à la réalité, freine la pensée, et on ne peut sans doute pas facilement observer et en même temps se sortir de l'embarras, résoudre des problèmes ou comprendre. Cette accommodation au particulier des répliques de savoirs généraux est à la fois centration sur le hic et nunc et décentration de

sa pensée, et ce n'est qu'après qu'on peut s'attendre à ce que cette expérience se répercute en réflexion.

Pour l'échange didactique cela veut dire que travailler avec un boulier, par exemple, participe d'un mouvement où je vais au devant de mon ignorance et souvent cela semble incroyable d'ignorer encore ceci ou cela, mais voyez-vous, jusqu'ici, je n'y avais encore jamais pensé, ni vu les choses sous cet angle, etc. et pour rencontrer quelque expérience qui pourrait faire avancer l'élève. Et Céline qui assiste à cela, est encore plus fortement confrontée à ses propres ignorances puisque c'est moi qui emmène tout le monde sur les pas de mes propres surprises.

En novembre ou décembre de l'an passé Jacinthe Giroux m'avait demandé pourquoi je tenais tant à proposer aux autres de faire les expériences que moi-même avais faites. Ci-dessus, je commence à lui répondre.

FC

24 octobre 2012

À ddmes

Les maths sont généreuses, elles vous offrent, sur des sujets d'expérience commune, des réponses à des questions que vous ne vous êtes jamais posées.

Avertissement : Cette note, la dizaine de pages qui suivent, est une tentative de rendre compte d'un travail d'une suite de narrations suscitées au prétexte d'un malentendu de consigne avec une étudiante. Par ces élaborations narratives successives, je tente de rendre compte d'une de mes façons de travailler.

Pour sa lecture, je conseille vivement le lecteur de se munir de feuilles de papier et de se lancer dans les pliages, sinon la lecture de la note lui sera très fastidieuse (comme elle l'est à moi-même lorsque je la relis). Mais les pliages demandés restent simples - il est en effet essentiel dans ma démarche avec des expériences de pliages de ne pas tomber dans de la sophistication, je laisse cela à l'art, par exemple celui des origamis.

Préambule : une expérience que vous pouvez faire.

On prend une feuille de papier rectangulaire. Le plus simple A4 ou pour économie de papier A5.

1°

On plie une feuille et on déplie. La marque est une droite.

On plie une feuille, on replie une fois, on déplie le tout, en règle générale la marque est une ligne droite et une ligne brisée en V dont le sommet est sur la première droite.*

*Bifurcation possible de cette expérience. On peut aussi chercher à inverser certaines de ces choses. Par exemple partir d'une marque de pli en ligne brisée, pour cela plier par deux fois la feuille en la pinçant jusque vers son centre, mais sans marquer de pli transverse de part en part de la feuille, mais en faisant converger les deux marques de plis vers la même extrémité. Puis tenter de trouver à faire un pliage qui reproduira le motif de la droite passant par le sommet d'une ligne brisée en V.

Un cas particulier si on a opéré le second pli de manière à rabattre le dos du premier pli le long de lui-même. Les deux pliages nous ont donné une équerre. Dans ce cas en dépliant on obtient une croix de deux lignes perpendiculaires. Et si, qui plus est, on avait rabattu le premier pli sur lui-même de sorte à apposer une extrémité sur l'autre, sur la feuille dépliée, la marque d'une des lignes de la croix est coupée en son milieu.

* Bifurcation possible de l'expérience. Une question vient : est-ce que l'on pourrait s'arranger à obtenir une marque de pli droite et une marque en forme de ligne brisée en V (donc non perpendiculaire), mais de sorte que la droite soit coupée en son milieu ?

On plie une feuille de sorte que le rabat ne recouvre pas entièrement le « fond ». On rabat « le coin » du fond non recouvert en alignant son bord le long du bord du premier rabat. On obtient ainsi une équerre.

* Bifurcation proposée de l'expérience. Une étudiante croit comprendre la consigne et ne rabat pas le second pli selon mes instructions, mais se contente de faire le pli le long du bord du rabat (et non pas plier de sorte que les bords des deux rabats soient jointifs), mais faire le second rabat autour du bord du premier rabat). Elle me dit qu'elle a trouvé un contre exemple à mon affirmation. Je rebondis sur cette mauvaise interprétation sans chercher à répondre à l'objection, mais en proposant une « autre expérience », selon une autre consigne.

On plie une feuille et on replie des feuillets toutes les parties « qui dépassent ». On déplie le tout. On a (en règle générale) 5 marques de plis. Oublions celle du premier pli. Est-il vrai que les 4 autres sont perpendiculaires ou parallèles deux à deux ? Comment se convaincre de sa réponse ? Comment l'expliquer ?

On peut alors prendre une feuille de même format que celle dans laquelle on a fait les plis et vérifier les angles utilisant cette seconde feuille comme une équerre. Pour cela il faut superposer les deux feuilles d'une certaine manière (deux manières sont possibles, l'une est préférable à l'autre).

Cela fait, on laisse les deux feuilles appliquées ainsi l'une sur l'autre et on rabat tous les « coins » qui dépassent. Cela fait on plie encore une fois le feuillet obtenu selon le premier pli que l'on avait fait au premier feuillet. On déplie le tout et on sépare les deux feuillets en prenant bien soin de le faire en les glissant, sans retourner l'un des feuillets par rapport à l'autre.

Je prétends que ça donne quelque chose de surprenant, à vous de chercher quoi. Je vous invite en suite à chercher à le comprendre et chercher à l'expliquer. *Voir ce que ça donne, le comprendre ou l'expliquer* : je vous invite aussi à vous demander lequel des trois a la préséance.

Note : chercher quelque chose de surprenant ou chercher une interprétation qui produise une surprise. Cela peut parfois produire quelque chose qui ne sera pas facilement partageable.

*

Narration. Pliages dans les séminaires du 17 et 24 octobre.

Quelques gestes que l'on pourrait avoir machinalement, sans penser plus loin. Vous prenez une feuille rectangulaire, et la pliez, pas en deux moitiés, pas bord à bord (cela est un geste encore plus machinal, quand je demande aux gens de me plier une feuille souvent ils la plient en deux moitiés, et même deux élèves aveugles avec lequel j'ai travaillé, et je me demande même si il faudrait s'en étonner). Vous tenez votre feuillet en mains et repliez les "coins qui dépassent", les parties où le feuillet de fond et le feuillet rabattu ne se recouvrent pas. Vous pliez de sorte que la charnière du pli s'applique sur le bord du feuillet que le coin dépasse.

On peut concevoir un tel geste comme plutôt machinal. On le fait sans trop penser, sans s'appliquer particulièrement, sans prêter attention à ce que cela produit. Notre geste est guidé par le dispositif. Déjà le décrire comme j'ai tenté de le faire ci-dessus est un peu artificiel, ça l'est à la mesure, justement, où cette description ne va pas de soi, parce que le geste ne nous y avait pas préparés. Pas simple de parler après coup de ce que l'on a fait, sans intention (tout dispositif porte en lui une intention, et les feuilles de papier ordinaire, format A4 etc. tout autant. Mais dans mon exemple, cette intentionnalité n'opère même pas, le dispositif agit de manière contingente).

Remarque : Les gestes que l'on fait quasi machinalement et guidé par les dispositifs sont les équivalents des règles de calcul ou de dessin géométrique. Ils sont réglés non pas, de l'extérieur, par convention, mais bien de l'intérieur par les connaissances induites, les schèmes de Piaget (repris par Vergnaud). Dans la pratique des interactions intersubjectives, elles sont "admises" comme évidentes, allant de soi, non thématiques et partant, non questionnées. Et ceci fonctionne comme une convention, ou plutôt nos conventions fonctionnent comme ceci. Les règles sont des répliques externes, objectives et formelles de nos schèmes.

Ici, cette petite expérience reste, pour le moment, sans surprise. Une surprise serait l'occasion d'un étonnement, c'est-à-dire l'ouverture à un questionnement, voire à une question, ou encore, ne serait-ce qu'un point d'interrogation placé avant même toute formulation. Pour le moment, ici, c'est une expérience qui n'a que peu de perspective. Elle a une signification, c'est celle de l'impact que le dispositif a eu sur nous : "replier les coins qui dépassent" (une expérience assez familière et prégnante depuis notre enfance). Mais selon quelle perspective? Pour cela, il faudrait, par exemple, se demander "qu'est-ce que ça donne?". C'est une question possible. Ou encore, autre formule : "est-ce que cela pourrait donner quelque chose à faire expérimenter à mes étudiants du séminaire de recherche?" ou "est-ce que cela pourrait donner quelque chose à la poser à Céline Vendaïra-Maréchal comme je l'ai fait mercredi passé dans son bureau?" C'est précisément ce que j'ai fait, avec Céline tout autant qu'avec les étudiants et qui m'a amené à examiner les choses plus avant. Notez bien l'expression : "plus avant" qui veut dire "plus avant dans des sémoses !

*Bifurcation possible : Voici un geste commun tout aussi machinal mais moins "automatique" (comme l'entendaient les surréalistes) et qui met en jeu les mêmes éléments. Vous prenez une feuille ordinaire (mais toute feuille rectangulaire suffirait). Vous en rabattez un des coins de sorte que le rabat coïncide bord à bord avec le fond. Vous coupez le morceau du fond qui dépasse (qui n'est pas recouvert). Vous dépliez le feuillet, il a la forme d'un carré.

Ce que je décris est même une procédure usuelle pour découper un carré dans une feuille ordinaire. Le sens est ici arrêté, c'est ce que Peirce appelle interprétant final, et c'est en cela que je la qualifie de "machinale et non automatique". Qu'est-ce que ça donne ? Un carré. C'est une fermeture assez nette et forte. C'est une habitude pour celui qui découpe des carrés dans des feuilles A4. C'est un interprétant final ou un sens final, mais qui est toujours susceptible d'être rouvert, requestionné.

Qu'est-ce que ça donne ? Un carré ! Et pourquoi ? Y répondre vous amènera à considérer que ça donne d'autres choses aussi et que tout converge à ce que ce soit un carré (cf. annexe ci-dessous). C'est ceci que vous devriez trouver et élaborer si on vous demandait de démontrer que cela donne bel et bien un carré. C'est une manière de relancer une sémiologie, de rouvrir la question du sens momentanément fermée par l'habitude d'interpréter le résultat de ce geste comme la détermination d'un carré dans une feuille A4. La perspective n'est plus la même.

Vous pouvez tenter aussi d'ouvrir ce sens d'une autre manière : en cherchant à semer le doute, est-ce vraiment un carré ? Qu'est-ce qui nous l'assure ? Est-ce que ce serait un carré dans tous les cas de format de feuilles ? Est-ce que cela marche avec une feuille qui ne serait pas rectangulaire ? Est-ce que cela pourrait nous être utile à découvrir comment confectionner un carré dans une feuille de forme non rectangulaire ? de forme circulaire ? "informe" ? Etc.

Revenons à la première expérience et la perspective qui était la mienne : est-ce que cela pourrait donner quelque chose de proposer à mes étudiants de faire cette expérience ? Je ne sais pas du tout quelle question pourrait leur venir, je ne dispose pas des conditions qui me feraient opter pour proposer et voir. Je cherche une question qui pourrait faire en sorte que cette proposition d'expérience donne quelque chose. Par exemple.

J'ai donc mon feuillet à deux pans, tout ce qui dépasse d'un pan sur l'autre a été rabattu sur le feuillet. Je déplie le tout. J'ai donc une feuille sur laquelle les plis ont laissé leur marque. Est-ce que ces plis ont une disposition quelconque ? Là encore, comme je l'ai fait avec vous, ci-dessus, je pourrais laisser les étudiants observer, décrire etc. Mais il y a une exigence qui m'oblige à poser une question plus précise. Et c'est, comme précédemment déjà, une exigence sémiotique, une exigence de sens. Je cherche en effet à orienter les étudiants vers une sémiologie qui assure que son aboutissement donnerait quelque nouvelle signification à l'expérience proposée. Pour cela, je cherche à orienter les étudiants vers quelque chose qui soit en lien avec la procédure de pliage proposée. La question n'est donc pas : quelle figure les plis laissent-ils sur la feuille ? Mais : est-ce que la figure des plis laissés sur la feuille a quelque chose à voir avec la procédure de pliage ? est-ce que cette figure pourrait en révéler quelque chose ?

Je décide donc de ne pas attendre que mes étudiants y voient quelque chose et propose tout de go une conjecture. Je leur dis : "je prétends que les plis sont perpendiculaires deux à deux. Est-ce que j'ai raison ? (Si oui est-ce un hasard ?) Comment faites vous pour vous convaincre de votre réponse ó mon affirmation est correcte, non correcte. (C'est un hasard, ce n'est pas un hasard.)"

Là je les laisse faire. J'observe les moyens qu'ils vont chercher et mettre en œuvre pour s'assurer de la perpendicularité.

Dans les faits, et comme je l'ai décrit en préambule à cette note, cette expérience n'a pas été introduite ainsi, mais s'inscrivait dans une expérience plus large portant sur les moyens de plier un angle droit dans une feuille de papier. De sorte que la question de la perpendicularité était dans l'air avant même d'aborder cette petite expérience. Qui plus est, et comme indiqué en introduction, c'est un quiproquo qui m'y a introduit. Je proposais une procédure de pliage d'un angle droit (en francophonie française dans le jargon de l'enseignement des maths, appelé "pliage d'une équerre") et je demandais si j'avais raison de dire que j'obtenais ainsi un angle droit. Une étudiante a mal compris la procédure indiquée et, portée par le dispositif qui est la feuille et ses habitudes enfantines, elle a procédé à un rabat incorrect. Elle a présenté son pliage comme contre-exemple à mon affirmation. En effet, c'en était apparemment un. Qui plus est, elle se l'expliquait : elle avait procédé à un premier pliage transverse dans le sens de la longueur de la feuille rectangulaire alors que je l'avais fait dans le sens de la largeur et elle attribuait la différence de constat à cette circonstance ; ça ne marchait pas si on opérait le premier pliage comme elle l'avait fait.

Ce qui m'a amusé est que, malgré tout, lorsqu'on examinait sa feuille dépliée, son pliage produisait des marques perpendiculaires l'une à l'autre, pas celle que ma procédure annonçait mais d'autres. En quelque sorte, en procédant comme elle, on n'échappait pas non plus à la perpendicularité ! Et qui plus est, cette perpendicularité était entre deux marques de plis en segments qui ne se coupaient pas sur la feuille dépliée.

J'ai donc proposé de bifurquer de l'expérience que j'avais proposée à une autre qui partait de la confusion de l'étudiante.

* Bifurcation effective mais momentanée. Cela a aussi donné lieu à une nouvelle confusion d'un étudiant, il ne considérait pas les mêmes rabats que l'étudiante, ce qui lui faisait penser que ma question était triviale. Et il se convainquit sur pièce, en usant du coin rabattu comme d'une équerre. Pour moi c'était inespéré parce que je voulais justement les introduire à un développement où on faisait usage d'une feuille équerre. J'ai donc bifurqué momentanément sur cette dernière proposition pour leur indiquer que pour vérifier, ils n'avaient pas nécessairement besoin de sortir leur équerre de leur trousse et que des feuilles de papiers pouvaient faire parfaitement l'affaire.

Cela entrait en plein dans le sens que je voulais indiquer aux expériences proposées puisque je leur avais annoncé une procédure autre que l'habituelle pour obtenir par pliage une équerre dans un morceau de papier de forme quelconque. Le sens de tout ceci résidait dans l'indication qu'à plier on faisait correspondre la bissectrice (on opère en effet par rabat de surfaces et pas seulement de lignes, ce qui fait que le pliage donne avant tout une marque sur la bissectrice) et que, dans le cas d'un angle plat, cela donnait perpendiculaire, voire médiatrice (la perpendiculaire et partant la médiatrice ne sont, dans le cas de ces pliages, que des bissectrices particulières).

Je suis toujours intéressé par le fait d'user du matériel même sur lequel on expérimente comme instrument pour son étude, ici user de la forme du papier lui-même comme équerre, pour vérifier des angles droits. Mais dans ce cas, c'est encore plus amusant puisqu'une feuille rectangulaire est un instrument insolite, une quadri-équerre, elle permet de juger par une seule application de 4 angles droits. Les plis sont perpendiculaires deux à deux de la même manière que les bords de la feuille perpendiculaire ó de même dimension que la feuille dans laquelle on a plié ó qu'on applique sur le pliage.

C'est "normal" puisque on rabat en appuyant le pli le long de bords eux-mêmes perpendiculaires ó dans leur position dépliée. En positions pliées, ces bords ne sont plus perpendiculaires, et les marques des plis des rabats que l'on fait le long d'eux non plus. Mais une fois dépliés, les bords reprennent leur position perpendiculaire, et les plis, qui ne les longent plus le "deviennent aussi". C'est en ce sens que la figure de la disposition des marques de plis correspond à la figure de la disposition des bords.

Pour cela il faut "placer" cette quadri-équerre de manière idoine, appliquer les bords de la feuille rectangulaire le long des marques de plis, et ajuster le tout pour que la feuille s'applique exactement dans le canevas des plis. Et ça marche : ce n'est pas encore le *sept d'un coup* du petit tailleur, mais c'en est déjà quatre ! Un seul geste vérifie d'un coup 4 perpendicularités. C'est un peu surprenant, même si un petit peu seulement. (Et les géants n'y verront que du feu, évidemment !)

Une chose amusante est que la feuille que l'on applique fait déborder ses coins de la feuille du fond, que l'on fait en quelque sorte le geste inverse de ce que l'on avait fait par rabat de ce qui dépassait du feuillet obtenu précédemment dans la première feuille. On peut alors s'amuser (c'est assez naturel) à garder nos deux feuilles appliquées l'une sur l'autre, la feuille équerre au dessus (son verso sur le recto de la feuille de dessous), et replier tous les coins qui dépassent de cette application. Pour la feuille de fond, ces rabats ne sont pas autres que ceux que l'on avait fait, cela "se fait tout seul". Pour la feuille appliquée, la feuille équerre, on doit rabattre les coins qui justement permettaient de juger de la perpendicularité (les 4 coins équerres).

On a donc un feuillet, avec les coins rabattus, dont un des feuillets, celui du fond a encore une marque de pli que l'autre, celui de dessus, n'a pas. On peut assez naturellement plier encore une fois le feuillet selon ce pli du fond. On déplie le tout, et on sépare les deux feuillets, en glissant le feuillet supérieur, sans le retourner (paraphrase : sans intervertir recto et verso de la feuille du dessus).

Comme par ces pliages les deux feuilles étaient venues à s'appliquer exactement l'une sur l'autre et que sur cette application parfaite on a opéré le dernier pli, on peut se dire que finalement on n'aura fait que reproduire sur la feuille équerre les mêmes plis que sur la feuille fond. Et que par conséquent, les deux feuilles présentent la même figure exactement.

On aurait en quelque sorte obtenu la même chose que si on avait appliqué exactement, bords sur bords, la seconde feuille sur la première et que l'on avait refait sur le tout les plis de la première pour les marquer aussi sur la seconde. Dans ce cas on aurait reproduit exactement les plis de la première feuille sur la seconde.

Or ce n'est pas ce que nous obtenons si nous procédons comme décrit, en positionnant la seconde feuille non pas bord à bord comme décrit ci-dessus, mais en position de quadri-équerre.

Or on a un effet miroir ! Les figures des plis laissés sur les deux feuilles sont symétriques l'une de l'autre ! C'est miroir. Et c'est (paraphrase) à l'inverse des mains que l'on applique paume sur paume, recto sur recto, ici miroir tout en étant par application verso (de la feuille de dessus) sur recto (de la feuille de dessous).

Comment s'en convaincre ? Comment se l'expliquer ?

Remarque meta : À ce propos, une chose : dans toute recherche de preuve, et partant de démonstration, il s'agit de faire converger ce qui nous convainc avec ce qui nous explique, c'est-à-dire arriver à faire converger deux faisceaux de significations (ce qui nous convainc et ce qui nous explique) dans le même sens. Un troisième faisceau de significations consiste en la reproduction de l'expérience.

Dans le cas ci-dessus, ce sens où tout viendra converger est celui qui relie cette expérience à celle du pliage du carré dans la feuille rectangulaire ! Ce sont deux répliques d'une même chose qui se passe lorsqu'on plie des feuilles : le pliage d'une feuille consiste à opérer sur la partie rabattue une rotation de 180° dans l'espace, autour de l'axe charnière du pli (qui intervertit recto et verso de la feuille). Sur le plan de la table où on effectue ce rabat, et pour autant que l'on identifie recto et verso de la feuille, comme si la feuille était un plan (qui n'a ni recto ni verso), cela correspond à opérer une symétrie axiale sur une partie seulement de la figure que représente la feuille de papier et sa forme. Le feuillet d'une feuille pliée a la forme de la superposition d'une partie de la feuille, sise d'un côté de la marque du pli, et de l'image de la partie de la feuille, sise de l'autre côté de la marque du pli, par la symétrie d'axe la marque du pli.

* Bifurcation : Un autre point de vue, une autre perspective, que je n'ouvre pas ici est de considérer que le pliage revient à aplatir un cylindre que l'on fait en enroulant le papier. En enroulant des cylindres de papier ou quelque autre support transparent de nos dessins, on voit fort bien les effets de symétrie par simple rabat.

Ou, dit autrement : lorsque je place sur ma feuille rectangulaire la feuille équerre, cette dernière prend la position de l'image dans le plan du rectangle de la feuille du fond par la symétrie d'axe la marque du pli. La superposition de mes deux feuilles rectangulaires représente la superposition du rectangle et de son symétrique.

De même dans le pliage du carré, la symétrie du rectangle par le pli à 45° de son coin est un rectangle sis à angle droit du premier, de manière transverse. La superposition du rectangle et de son image est en forme de L, ou de coin de cadre d'un tableau. Le rectangle et son image se superposent sur une partie rectangulaire dont les côtés valent la largeur du rectangle (dans leur position, les deux rectangles ne peuvent se recouvrir plus). (Et on peut facilement mimer cela avec ses mains).

On peut simplifier cette "manip." en se contentant d'un dispositif simplifié (c'est-à-dire schématisé, et intermédiaire entre expérience et idéalisation mathématique). Avec cela, on perd le "naturel" qui m'a amené à cette expérience et que j'ai cherché à prolonger (à faire vivre longtemps à étendre) avec les étudiants pour quelque chose encore plus artificiel. Toutefois, en contre partie de ce caractère artificiel, on ne gagne pas, ou fort peu, en évidence logique de la mathématique venant expliquer cette expérience (cf. ci-dessous).

On prend deux feuilles rectangulaires (de format A4 ou plus petit). On combine ces deux feuilles en un dispositif tel que les deux coïncident sur leur diagonale mais ne se recouvrent pas exactement. Si je nomme les sommets de la première feuille A, B, C et D, et la seconde A', B', C' et D', alors B' superpose A et D' superpose C, mais les autres sommets ne se superposent pas. Je plie le dispositif des deux feuilles soit en

rabattant $D\phi C$ sur $B\phi A$ (le pli se marque sur la médiatrice de la diagonale $B\phi D\phi AC$) soit le long de leur diagonales superposées $B\phi D\phi AC$. Je sépare les deux feuilles en les glissant. Je compare la position du pli dans les deux feuilles (médiatrice de diagonale ou diagonale) et je constate que ces marques sont en position symétriques l'une de l'autre. Ainsi par le truchement de ce dispositif, la marque sur la feuille du dessous est symétrique de la marque de la feuille du dessus.

L'imprimerie procède par apposition en superposition exacte et retournement.

Si j'avais fait usage d'un dispositif classique d'imprimerie, par exemple en prenant une feuille et en marquant d'encre sa diagonale et, avant que l'encre soit sèche, en l'appliquant par superposition exacte sur une seconde feuille, j'aurais imprimé une trace sur la feuille du dessous. Afin de comparer diagonale ancrée et sa trace imprimée, je retourne la feuille imprimante. Les deux marques seront en position miroir.

Mon dispositif aboutit d'une autre manière à un résultat équivalent : une marque symétrique, par apposition en superposition décalée (par rotation en fait) mais cette fois sans qu'il y ait besoin d'effectuer de retournement. Ainsi ce que, par l'imprimerie, j'opère par retournement de l'identique, par mon dispositif, je l'opère par rotation et translation de l'identique.

Viens alors une manip. Simplifiée comme la précédente et cette fois encore plus spectaculaire que la première ! Encore plus claire.

Je constitue un dispositif de deux feuilles rectangulaires comme ci-dessus. Je plie le dispositif soit sur la diagonale, soit sur sa médiatrice. Je découpe sur le pli une figure géométrique qui a une nette orientation. Je déplie le tout et sépare les feuilles. Sur chacune des feuilles, un trou de forme géométrique, symétrique selon le pli. Mais les deux trous sont orientés symétriquement sur les deux feuilles. (Les trous sont symétriques selon l'une des symétries du rectangle, et symétrique, à une rotation de 180° près, selon l'autre !).

On peut illustrer cela autrement. Si je prends mon dispositif des deux feuilles décalées et que je plie la feuille du dessus selon l'axe diagonal, alors le rabat de cette feuille viendra exactement se superposer à la moitié de la feuille du dessous. Avant d'opérer de rabat, la feuille du dessus est décalée de la feuille du dessous de manière à ce que la position de la première soit celle que viendrait occuper la feuille du dessous si je lui appliquais une symétrie axiale d'axe la diagonale. Le dispositif est donc le couple d'une feuille rectangulaire et de sa symétrique selon l'axe diagonal.

La relation intéressante est celle qui lie la constitution du dispositif : appliquer deux feuilles identiques de manière décalée par une rotation idoine et la symétrie du marquage par pliage. Comment un décalage par rotation peut-il se manifester par un effet de symétrie ?

Cette remarque nous mène à la propriété mathématique qui se manifeste ici. Avec l'imprimerie, les deux feuilles et la position de la marque sont identiques tant qu'on ne retourne pas la feuille de dessus. Dans mon dispositif, les deux feuilles seront identiques si on tourne et recale la feuille du haut sur celle du bas, opérant sur elle une

rotation, et si on la retourne, opérant sur elle une symétrie selon un des ses deux axes de symétrie. On annule alors l'effet d'une symétrie (celle que l'on constate) combinant une rotation et une symétrie. Cela illustre le fait mathématique que la composée d'une rotation avec une symétrie est équivalente à une symétrie. Mon dispositif décompose une symétrie en deux gestes : une rotation décalant les deux copies et une symétrie.

Il y a donc fort loin de la description à l'explication, et du phénomène à la propriété mathématique qui s'y manifeste ! Il y a même un saut qui ne peut être qu'abductif, c'est-à-dire quelque chose qui se devine (et que l'on va chercher dans ce que l'on sait ou connaît par ailleurs) et qui, par un heureux retour, vient éclairer, et élucider le phénomène. Mais ni la devinette, ni le retour ne sont assurés, les deux ont un coût réel de pensée.

Les métaphores sont des signes de l'organisation des répliques.

Annexe : l'épisode 8 dans *Sur le fil de nos expériences* (Conne 2003-2004).

1 novembre 2012

Bonjour

1° Le document que je vous ai envoyé (*narration exp. 24 octobre*) est en cours d'élaboration. Il ne change pas mais s'étoffe, c'est que l'expérience que je relate est elle aussi en cours et se développe. Je tente d'illustrer ce que c'est, à mes yeux, un travail de "paraphrasages narratifs" C'est aussi dans la ligne des articles *sur le fil de l'expérience* de 2003 et en lien avec les idées de faits, et leurs trois niveaux: sous-jacent, manifeste et supérieur, idée de 1986 ! (Conne 2003-2004 et Conne 2004a)

J'y travaille de manière très serrée la relation entre maths et expérience, et surtout le saut qu'il y a entre les niveaux sous-jacents, manifestes et supérieurs décrits à propos de l'idée de faits maths. Pour ce qui en est du niveau manifeste et supérieur ce saut oblige à l'abduction, c'est-à-dire à la devinette des relations maths pertinentes qui puissent par un heureux retour élucider et rendre compte des phénomènes qui se manifestent dans l'expérience. C'est lié à modélisation math de la réalité et caractère général et schématique des maths alors que notre appréhension du manifeste est superficielle. C'est lié à *règles significations et sens* (logique) etc. Et c'est lié à narration et paraphrases. Toutes choses dont je vous ai entretenu au fil des ans dans mes courriels.

La retombée sur l'enseignement est la question de l'ancrage des savoirs maths enseignés et appris dans un réel dont les élèves aient une certaine expérience, qui est une question de signification de l'enseignement

et qui passe par les idées inverses, sources de multiples confusion lorsqu'on les réduit l'une à l'autre, de *modèle maths du réel* et *d'illustration concrète des maths*,

et celle des significations que l'on trouve au monde dans lequel la pratique des maths nous introduit, qui se constituent selon autant de perspectives ouvertes par à-coups abductifs.

2° Le document que je vous ai envoyé est d'une lecture difficile, surtout la description résolument donnée sans illustration, figure ou dessin pour se repérer dans ce que j'évoque. C'est un moment dans l'élaboration de ce document, ce n'est pas que je serais opposé à mettre des figures, expliciter quelques diagrammes.

La narration relate une progressive thématization d'une expérience qui au départ est fort commune. Ce qui n'est pas commun dans l'affaire est le travail de thématization. Ce travail va progressivement faire évoluer l'expérience commune vers des formes d'expérience. C'est tout un travail délicat et qui prend du temps. C'est un travail de paraphrases de l'expérience. Le matériau que je malaxe est l'expérience.

Là, je viens de trouver une forme de relation élaborée et que je prévois assez stable. Ce que je vous ai présenté comme une expérience prétexte, suivie d'une exploration de cette expérience prend désormais la forme de la *manip* ci-dessous.

Cette *manip* illustre la propriété de géométrie plane selon laquelle la composée d'une rotation et d'une symétrie donne une symétrie (d'un autre axe). C'est un cas du théorème fondamental permettant de classer les isométries planes (toute isométrie plane se réduit à une composition de une, deux ou trois symétries planes). Il est difficile de trouver des expériences concrètes où ce fait se manifeste (je vous en parlerai une autre fois si vous le désirez).

La *manip* que voici le manifeste à sa manière. Comme c'est une forme d'expérience, je l'écrirai en caractères italiques.

On prend deux feuilles rectangulaires identiques (copies) dont, pour la description je nommerai les sommets, dans le sens contraire des aiguilles d'une montre, respectivement A, B, C, D et A', B', C', D'. On constitue un dispositif matériel en superposant ces deux feuilles de telle sorte que B' vienne superposer A, ainsi que D' vienne superposer C. On plie le dispositif ainsi obtenu très soigneusement en appliquant la paire de sommets D'C' sur la paire B'A. En fait ce pliage fait superposer bords à bords l'ensemble du dispositif. Avec une paire de ciseaux, on découpe dans le pli une marque quelconque. On déplie le dispositif. Apparaît un trou symétrique autour de l'axe de la marque du pli. On sépare les deux feuilles en glissant celle du haut en la tournant de sorte à lui donner la même orientation que celle du bas. Dans chacune des feuilles les deux trous sont disposés en miroir l'un de l'autre. Les deux trous (eux-mêmes symétriques) sont symétriques l'un de l'autre mais par une autre symétrie que le pli, une des symétries du rectangle.

3° On peut alors considérer dans le travail de thématization de l'expérience que j'ai fait trois moments.

a. Le premier moment est celui de l'expérience que l'on fait avec les étudiants, plutôt touffue parce que produite de gestes machinaux, parfois automatiques, parfois pas, (niveau sous-jacent) et de quiproquos interprétatifs. C'est délicat à narrer correctement et le lecteur trouve cela touffu et complexe. Sans s'adonner lui-même aux pliages décrits, le lecteur aura fortement tendance à abandonner ce texte.

b. À la suite d'une chaîne d'abductions, l'identification de la propriété mathématique abstraite, **très abstraite**, de l'équivalence de la composée d'une rotation et d'une symétrie plane avec une autre symétrie.

c. Le retour de cette propriété sur une nouvelle forme de *manip* donnée à l'expérience source, ou dit autrement, un *modelage de l'expérience* source (modelage et pas modèle), aboutit à une *illustration concrète* de la propriété math. Cette manip a une double action :

- d'un côté, elle illustre la propriété maths (via il est vrai un travail interprétatif non évident qui m'amène par exemple à introduire la notion de dispositif) ;
- et de l'autre, elle élucide l'expérience commune et le travail de développement opéré par thématization (elle donne réponse aux questions que l'on ne se pose pas sur cette expérience commune, sur les gestes familiers et machinaux, sur le niveau sous-jacent des schèmes).

4° Dans mon travail de recherche, la narration joue un rôle très précis. Pour cela je dois rappeler que selon moi la différence entre un calcul et un texte tient au fait que le cours du calcul détermine au fur et à mesure son résultat alors que le discours du texte rend compte d'un résultat déjà déterminé, le discours détermine discursivement quelque chose de déjà déterminé ailleurs. Le calcul présente son cours, le texte présente son discours. Plus précisément, c'est selon moi le propre du texte de prose, le texte poétique étant plus proche du calcul, disons que celui-ci est en position intermédiaire (ou à un niveau meta plus loin, en quelque sorte, il thématise son discours).

Selon cette analogie, pour moi la narration doit être plus proche d'un calcul, et donc plus proche d'un texte poétique que d'un texte de prose !

Selon cette analogie, la *manip formulée* ci-dessus, (c'est en effet une expérience formulée tout comme l'est un calcul achevé ; c'est une mise en forme d'une expérience) serait en quelque sorte un poème liant l'expérience commune qui en est la source à la propriété idéale mathématique qu'elle finit par indiquer.

5° Pour moi la narration est un texte hybride, écrit comme un texte, sur le mode discursif, il devrait produire au lecteur un calcul. C'est cette idée que je suis actuellement en train d'explorer.

Voilà mon travail. Je vous en fais part, mais ne veux l'imposer à personne !

FC

25 octobre 2012

À propos de narration.

(Et des catégories "sujet - subjectif / objet ó objectif" à ne pas confondre avec "personnel / impersonnel - voire apersonnel").

1° Postulat épistémologique à propos de la dépersonnalisation des productions de recherche.

La recherche produit (ou prétend le faire) des résultats empiriques. Sauf en mathématiques dont les résultats se réfèrent à un univers de pensée.

Selon moi, la dépersonnalisation des produits de la recherche doit distinguer la dépersonnalisation de l'établissement des faits ou, en maths, des vérités, et la dépersonnalisation des théories. En effet si on suppose qu'il n'y a qu'un seul réel empirique de référence, ou qu'un seul univers de pensée mathématique, il y a toujours plusieurs théories, qui n'en sont que des saisies, des approches, des cadres interprétatifs.

Dans le premier cas de figure, la dépersonnalisation se fait, soit en ciblant sur le réel, sur des faits empiriques, soit, comme en maths, par objectivation, c'est à dire en ciblant un univers de pensée, ce qui suppose tout un appareil de définitions de principes et d'axiomes.

La reproductibilité est un tel travail. Mais reproduire un résultat expérimental, est toute autre chose qu'attester de la validité d'une démonstration, ou de la justesse d'un calcul ! Les deux pourtant assurent quelque chose de l'ordre de la reproductibilité.

Dans le second cas de figure, lorsqu'il s'agit de théorie, quelle soit ou non maths, on ciblera sur une logique. Je soutiens que lorsqu'on dépersonnalise une théorie on ne peut le faire que sur une logique, la logique selon laquelle se développe la théorie.

2° Cela dit, il ne faut pas confondre ce qui est de l'ordre de la rédaction d'un texte de savoir avec ce qui est de l'ordre de la production de savoir.

(Ce n'est pas pour rien que Y. Chevallard dès 1980 dans son schéma de la chaîne transpositive, qui ne concernait que les maths, avait désigné la source par un graphe étrange de ligne brisée. Il n'y avait ni terme ni initiale comme Savoir (S) ou Objet (O) ou que sais-je ?)

La recherche produit du savoir avant de le mettre en texte (ce que certaines peuvent aussi faire, le cas échéant).

3° Secondement il ne faut pas confondre ceci avec la question de l'objectivation.

En ddm, la question de la dépersonnalisation et de la décontextualisation a été développée à propos du savoir mathématique, qui est un savoir "scientifique" à considérer un peu à part, et sur ce point exactement. On ne peut donc pas appliquer sans autres ces catégories

(dépersonnalisation / décontextualisation) au savoir en ddm. Ce n'est pas une question de science dure ou de science humaine.

Il reste que le statut des maths n'est pas clair, ou qu'il n'y a pas accord unanime là-dessus : ce n'est ni une science comme la physique ou la biologie, ni une science humaine.

Si on identifie parfois maths et sciences dures c'est depuis que la physique est fortement mathématisée et que les développements des maths et de la physique sont très intriqués. Mais cela ne justifie pas une identification. En passant et à ce propos, je ne connais pas de texte qui expose cette intrication sans recourir et à des contextualisations et à des personnalisations. Et cela tient, à mon sens, à ce que peut bien être le contexte dans lesquels s'inscrit la recherche en maths. Ce contexte n'est pas comparable au contexte dans lesquels s'inscrit la recherche en physique. Idem pour les savants.

Alors pour ce qui concerne la ddm, qui est vraiment très loin de la mathématisation de la physique, c'est encore plus différent !

Paradoxalement, il est assez facile de présenter quelque chose qui fasse office d'objet pour les maths, mais bien plus difficile pour la psychologie, quels sont donc ses objets ? Et encore plus pour la ddm. Dès lors l'objectivité dans ces domaines est à penser autrement. Par contre pas de faits empiriques en maths !

4° Alors comment dépersonnaliser en ddm? Je puis esquisser le lien entre la dépersonnalisation d'une théorie, celle que je propose en distinguant *connaissance/savoir/savoir institué* et les faits empiriques que nous produisons dans le cadre de ddmes.

Parlons donc un peu, à propos de transposition didactique, des logiques des théories de référence en ddm.

Si je retrace le cheminement de la pensée en ddm sur ce sujet, je rappellerai que l'idée de transposition didactique de Chevallard (1980) est liée à ce qu'il appelait le *texte du savoir*. Dans sa théorie, le savoir est considéré comme rendu visible par ce texte. La transposition est alors le travail de ce texte qui connaît diverses versions selon les lieux où il est donné à lire et enseigner / apprendre.

L'idée de dépersonnalisation et de décontextualisation ne provient pas de Chevallard mais de G. Brousseau (il en parlait dans les années 80, mais cela se trouve dans *fondements et méthodes de la ddm* (RDM 7.1, 1986, repris dans Brun J. 1996) et nous avons publié avec Brun et Perret-Clermont et Schubauer-Leoni (Perret-Clermont A-N et alii, 1982), un cahier qui porte ce titre relatant une communication à un colloque de 81). Selon moi, c'est la manière dont Brousseau a assimilé l'idée de transposition didactique à sa propre théorie, la TSD. Et c'est lié bien entendu à ses schémas de communication et son idée de situation, complétée ensuite par celle de milieu.

Mais là encore "milieu" selon Brousseau n'est pas ce qu'entend Chevallard avec ce terme. Il n'y a qu'à lire les articles de RDM du début des années 90, ceux de G. Brousseau, et celui de Y. Chevallard (ce dernier repris dans les *textes de base de la ddm* 96 - Brun J. 1996).

Ce n'est que dans la transposition didactique de ces savoirs de didactique, afin de formation à la didactique des maths, que l'on met tout dans le même sac et que l'on s'accommode de telles réductions.

Un des problèmes auxquels les idées de Chevallard et de Brousseau tentent de répondre concerne la place et l'attention à attribuer au cognitif, aux processus cognitifs et à la connaissance.

Si je distingue processus cognitif et connaissance, c'est que le premier terme ne fait plus référence à une quelconque épistémologie des maths ou des sciences alors que le second, oui. Et bien entendu les deux approches sont distinctes par la manière de considérer les choses.

L'idée d'un mécanisme de dépersonnalisation / décontextualisation puis de repersonnalisation / recontextualisation qui serait au cœur de la transposition didactique selon la TSD procède de l'intérieur du processus d'enseignement. Dans la conception de cette théorie, Brousseau assimile le travail du savant producteur de savoirs à l'apprentissage. C'est lié à son idée de *non didactique* et *adidactique*. Une telle assimilation a aussi été revendiquée à sa manière par J. Piaget. Toutefois Brousseau n'est pas pour autant piagétien, en ce sens qu'il considère des situations socialement marquées. Brousseau a une vue institutionnelle, tandis que Piaget entend s'en abstraire. Ainsi ce dernier n'a pas besoin de penser qu'il faille distinguer adidactique de non didactique.

Chevallard, lui, reste à l'extérieur. Et cette extériorité sera marquée par l'idée non pas de parler de connaissance mais de *rapport au savoir*, et de décliner des rapports au savoir. La catégorisation de Chevallard sur ce point est confuse et ses notations pédantes n'arrangent rien à l'affaire. Il parle en tous les cas de rapports : "officiels, privés, publics, personnels" - et que sais-je encore ? Mais ce qui a trait au cognitif est alors relégué dans le *rapport personnel* - attention à ne pas confondre avec ce qu'il appelle *rapport privé* parce que le rapport privé est social, alors que le rapport personnel est psychologique. Notez que la question des assujettissements des personnes et des individus a été abordée dans la théorisation de Chevallard et A. Mercier y a fortement contribué.

Leur idée est que un même individu, voire une même personne (la différence n'est pas claire), est susceptible d'autant d'assujettissements qu'elle "fréquente" d'institutions (le mot "fréquente" n'est sans doute pas adéquat).

Donc toutes ces catégories s'empilent au fil des textes sans que j'y trouve de réelle cohérence, ainsi serait-il pertinent de parler de rapport individuel au savoir ? Ou encore de rapport subjectif au savoir ? Ou encore : pourquoi devrait-on se restreindre à ne parler que de rapport personnel au savoir ?

Bref on n'est jamais sujet que relativement à une institution, le terme sujet est ici relatif à une institution, alors que dans le jargon piagétien, ce n'est que le sujet auquel s'intéresse la psychologie du développement. Mais alors que faisons-nous de l'opposition sujet ó objet. Pour cela, dans esquisse d'une théorie formelle du didactique (Chevallard Y., 1988), Chevallard parle de "univers culturels" et "domaines de réalités" des institutions. Les objets sont les objets d'une institution. Les objets ne sont pas les objets de pensées d'un sujet aux prises avec ses choses, comme je l'écris dans *Faire des maths, faire faire des maths et regarder ce que ça donne*, (Conne F. 1999).

Ce que Chevallard fait est de rendre l'empirie à l'image des univers mathématiques. Et ce, au prétexte d'une *théorie formelle du didactique* (Chevallard Y., 1988). À l'époque Chevallard cherchait à mathématiser la dm, je ne sais pas si il a toujours ce projet en tête. Mais ce que je sais c'est que cela n'a pas été reçu. Janine Rogalski m'a dit avoir trouvé une pétition de principe dans cet article de Chevallard. Mais peu importe, le problème avec la formalisation de Chevallard est qu'il resterait à inventer un calcul qu'elle nous permette d'opérer. Sinon, pas besoin de telles formes !

(C'est bien là l'échec de tant de soi-disantes mathématisations tentées en sciences humaines dans les années 60-70-80 ! Brousseau et Vergnaud y sont aussi allés de leurs notations, sans plus de résultats, ils ne voulaient sans doute pas être en reste.)

Ensuite, dès le début des années 90, Chevallard ne désignera plus par O, *objet*, mais *œuvre* et a tenté une théorie des œuvres.

C'est ce qui m'a fait dire que la théorie de Chevallard était passée d'une maison de rapport à une histoire d'O.

Mais qui se rappelle de tout cela ?

Dans sa thèse sur l'institutionnalisation, A. Rouchier (Rouchier A., 1991) a adopté quelques uns de ces termes afin de relier ces considérations à S&C (Conne F., 1992). Mais je préfère de loin son idée de rapporter cela à des pratiques sociales - qu'il ordonne en "niveaux de pratiques", les PSI, PSII & PSIII, idée que j'ai adoptée mais que je suis quasi le seul à avoir fait (ici je suis en plein dans la personnalisation).

Parler de rapport au savoir, je ne l'ai jamais repris pour mon compte. Depuis ce moment, je me suis désintéressé de la théorie de Chevallard. Et J. Brun était tout à fait hostile à cette façon de parler. C'est en effet qu'il y a quelque chose d'objectif à la connaissance.

Chevallard entend reléguer le cognitif en en faisant quelque chose de subjectif. Il se contente donc d'euphémismes et de langage politiquement correct.

Du point de vue de la transposition didactique de la didactique et de ses mélanges, c'est pratique parce que cela peut s'entendre avec dépersonnalisation / repersonnalisation.

Savoir et connaissance (Conne F., 1992) rompt délibérément avec cette manière de penser.

S&C entend aussi rompre avec tout un fatras de fausses idées sur la psychologie. N'oublions pas que les mathématiciens, même ceux qui se défendent le plus de faire de la psychologie, n'ont jamais abandonné la prétention d'avoir des vues sur l'esprit et le mental, ils y sont obligés dès qu'il s'agit de parler de nombre, de calcul, de relations spatiales etc. Voyez Frege (cf. citation infra), je pourrais aussi citer Dedekind et tellement d'autres !

Ce qui fait que si une personne, mise en situation, voit son esprit occupé par des connaissances induites, cela, en soi, n'a rien de personnel.

La seule chose de personnel qu'il y a ici est tout au plus la forme que cela prendra selon les individus. Et encore, car cette forme est pour une large part déterminée et de par ses contenus et de par les processus qui s'enclenchent alors. Et le caractère atypique relevé par J. Giroux (Giroux J., 2008) n'est pas pour autant personnel.

Il faut alors à la recherche, pour autant qu'elle adopte les vues de ma théorie sur S&C, se donner des moyens de traiter de ces choses, d'en parler etc. Il s'agit en effet d'un travail de dépersonnalisation des données empiriques. À l'heure actuelle, ces moyens et ces méthodes font défaut, il faut les élaborer. Ce travail est en cours et la narration en est, je crois, un élément central.

La narration n'est donc pas quelque chose de l'ordre des recherches biographiques, ni, à l'opposé des narrations biographiques, de l'ordre des entretiens d'explicitation. Dans les deux cas ces moyens sont des moyens de reconstitution après coup de quelque chose qui s'est passé et qui est l'objet d'étude. Alors que la narration a une fonction interprétative proactive. Elle n'est pas un compte rendu. La narration n'est pas non plus l'idée de chronique de Brousseau pour les recherches du COREM, son école expérimentale à Talence. (cf. plus loin).

La narration a pour objectif de rendre visible les interactions cognitives entre individus en situation, et selon les potentialités des milieux dans lesquels ces interactions sont plongées.

À ce point je dois rappeler que le mot "milieu" ici n'est pas du tout celui que définit la TSD, parce que je parle de "milieu cognitif", de "milieu d'adaptation" et pas de "milieu d'un jeu avec le réel" comme le fait la TSD. La différence est que pour la TSD, le "milieu" est toujours encadré par une "situation", c'est le point de vue institutionnel de la TSD, alors que le "milieu" auquel je me réfère ici englobe la "situation", parce que c'est un "milieu cognitif". Et de ce point de vue cette idée de milieu se rapproche de celle de Chevallard (pour plus de précision je dis un mot de cela dans *Trois pas de deux entre savoir et connaissance* - Conne F., 1995).

Un peu plus sur la logique de S&C :

Comment peut-on en effet parler des connaissances en jeu dans les interactions que l'on étudie ? S&C (Conne F., 1992) affirme que l'on ne peut le faire qu'en référence à des savoirs, et ici il faut entendre des savoirs institués. Mais cela ne dit pas pour autant comment cela se fait. Pour cela il faut comprendre ce qu'est le savoir. Le savoir contrôle la représentation dit S&C.

(Vous voyez je dépersonnalise, dépersonnaliser c'est mettre en évidence la logique des théories, c'est ce que J. Cavailles dit qu'il s'agit d'attraper : "*Comprendre la théorie est en attraper le geste et pouvoir continuer*" (Cavaillès J., 1981, p. 178). Et surtout l'auteur d'une théorie peut la dépersonnaliser de lui-même, c'est pourtant ce que ne font aucun des auteurs de référence en ddm, pour autant que je sois bien informé sur ce point, aucun ne livre sa logique, c'est un sacré boulot pour arriver à le faire!)

Et comment donc ? Par le biais de situations qui agissent sur le sujet en induisant des connaissances.

Dans un certain sens on pourrait considérer ces connaissances soit comme associées à ce savoir, soit seulement corrélées. C'est les deux et justement parce que les milieux cognitifs débordent les situations (il y a tout ce qui est en mémoire par exemple, mais il y a aussi que les situations ne sont jamais unidimensionnelles, et pas seulement didactiques et adidactiques, bien plus que cela. Notons que la TCC ó théorie des champs conceptuels - de Vergnaud le dit aussi).

Quand on entend étudier les connaissances, les savoirs institués ne jouent qu'une fonction d'étiquette, et pour Chevillard, d'étiquette apposée sur le couvercle de boîtes noires qu'il pense pouvoir éviter d'ouvrir.

Brousseau c'est quasi pareil, il désigne comme connaissance ce qui est bel et bien induit par la situation mais dont enseignants et enseignés ne peuvent faire objet de leurs échanges. Telle est sa distinction entre savoir et connaissance (voir mon texte *le sens* - Conne F. 1993 -, *3 pas de 2* - Conne F., 1995 - et ma *conférence Chantilly* - Conne F., 1994).

Je réfute ceci car cela fait fi de la connaissance de l'enseignant (le pilote, le chercheur, le lecteur des relations d'observations, protocoles ou autres), et des processus cognitifs qui sont à l'œuvre dans ses propres interactions !

Eh oui je réfute l'idée d'automate dont Brousseau rêve pour les situations ! C'est à cause des connaissances de l'enseignant (du pilote, du chercheur) que l'étiquetage ne peut suffire, qu'il faut ouvrir quelque peu les boîtes !

J. Bruner (1987) l'avait déjà vu, et bien avant nous. (Cela est explicitement relaté dans le texte d'introduction de *ddmes* dans les actes du séminaire national de 2003 - Conne F. et alii 2003 - où la méthode de travail de *ddmes* est esquissée). Bruner avait aussi bien compris alors la nécessité de la narration afin d'avoir un instrument qui permette par évocation, d'induire, en l'absence d'interactions avec les élèves et les milieux, les connaissances qui sont à l'œuvre dans les phénomènes que l'on étudie. Et nous, *ddmes*, avons retrouvé cela de notre côté. Toutefois, la finalité que j'attribue à la narration, n'est pas de (re)subjectiver les choses. Elle n'a pas non plus la fonction de chronique, telle que Brousseau l'envisageait afin de rendre compte du travail au COREM. Elle n'a pas non plus le rôle de simplement permettre aux lecteurs de se les représenter.

Elle cherche à contrôler quelque chose qui, autrement, resterait masqué et apporterait son lot de confusions et d'embrouilles. En effet, le lecteur de protocoles ou d'autres relations soit disant objectivées se verra tout autant induit quelques connaissances et quelques représentations, et les assimilera à ses propres étiquettes, tout en faisant impasse sur elles. C'est en effet ce dont il se croit autorisé par le caractère objectif attribué a priori à la transcription qu'on lui livre : protocole, chronique ou autre... Tout lecteur de telles formes de relations d'observations d'échanges didactiques entretient un rapport personnel qui doit être pris en compte si on veut un tant soit peu contrôler l'objet de nos études. Cela ne doit pas rester privé.

Je puis préciser en me référant à cette citation de Frege (*Frege G., 1892*):

"On peut observer la lune au moyen d'un télescope, je compare la lune elle-même à la référence, c'est l'objet de l'observation médiatisée par l'image réelle produite dans la

lunette par l'objectif, et par l'image rétinienne de l'observateur. Je compare la première image au sens et la seconde à la représentation."

Pour les connaissances et phénomènes de cognition, nous devons prêter notre propre esprit, il joue le rôle de la lunette d'observation de la lune qu'évoque Frege dans la citation ci-dessus.

Ceci, je le dis depuis belle lurette et l'ai repris assez précisément dans *S&C* (Conne F., 1992) bien entendu, puis dans le texte sur *le sens* (Conne F. 1993), *3 pas de 2* (Conne F., 1995), la conf. de *Chantilly* (Conne F., 1994) ainsi que dans l'introduction à *Faire des maths etc.* (Conne F., 1999) mais dans ce cas surtout en parlant de maths, puis enfin dans *interactions de connaissances et investissements de savoirs* (Conne F., 2003).

Le chercheur pas plus que le lecteur d'articles de recherche ne peut en faire abstraction !

C'est ce à quoi les mathématiciens échappent - parce que les maths sont sensées ne rien devoir aux sujets, même pas à leur pensée - et que pour ce faire ils établissent des règles très strictes pour mener les raisonnements et les calculs, ainsi que des définitions très contraignantes.

De même, c'est à ceci qu'échappent les chercheurs en sciences expérimentales, parce qu'ils se donnent des normes de reproductibilité d'une part, mais surtout, d'autre part parce que les choses ou objets de leurs études, que ce soient des électrons, des galaxies, des macromolécules, des hormones, ou des souris, etc. sont indifférents à ce que l'on pense d'eux - de sorte que ce qu'on pense d'eux n'interfère pas sur les phénomènes en tant que tels, mais, bien sûr, en aval sur leur interprétations.

On voit alors que ce que la plupart des gens en ddm prennent pour de l'objectivation tient, par simple désir de mimétisme avec la science dure ou avec les maths, à la relégation dans la sphère privée de tout ou pan des phénomènes qui nous concernent. On voit comment on substitue "public" à "objectif". Et on le fait, d'une part, en confondant "objectif" avec "intersubjectif", ou "partagé", et ce, sans jamais se poser la question de ce que peut bien être cette intersubjectivité en matière de connaissance et de savoirs. Et on le fait, d'autre part, en faisant de l'adoption d'un langage institutionnel un gage de scientificité, on a tendance à jouer une légitimité institutionnelle contre la pertinence scientifique. C'est une constante dans les institutions savantes ! Actuellement on dit qu'on y tient un langage politiquement correct.

í

À suivre : le point qu'il s'agit d'élaborer dans notre définition de ce que nous entendons par "narration" est la question de la reproductibilité. (Je rappelle que nous avons abordé cette question lors de notre dernière séance de ddmes).

FC

BIBLIOGRAPHIE

Auckenthaler Y., 2004, *Jouer la surprise, oui mais comment ? Analyse de jeux de tâches géométriques et de leurs moments de surprise*, mémoire ssed, fpse, Unige.

Bailly F. et Longo G., 2006, *Mathématiques et sciences de la nature. La singularité physique du vivant*, Hermann.

Benjamin W., 1987, *Le Narrateur*. In *Rastelli raconte ... et autres récits*. Point Seuil.

Borceux F., 1986, *Invitation à la géométrie*, Ciaco.

Brousseau G., 1986, *Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques*. *Recherches en didactique des mathématiques*, 7(1), 33-115. Grenoble : La pensée sauvage. Texte republié dans Brun 1996.

Brun J. (éd.), 1996, *Didactique des mathématiques*. Lausanne : Delachaux et Niestlé, coll. Textes de base en pédagogie.

Bruner J., 1987, *Le développement de l'enfant : savoir faire, savoir dire*. Paris : PUF.

Burlet O., 1989, *Géométrie*, Editions Loiris et Pédagogie, Lausanne.

Carrega J.-Cl., 1981 réédité 2001, *Théorie des Corps, La règle et le compas*, Hermann.

Carroll L. (éd.1966), *Logique sans peine*, Jm. Gattegno & E. Coumet (eds.) Hermann.

Cavaillès J., 1981, *Méthode axiomatique et Formalisme*, Paris : Hermann (1ère éd. 1937).

Chaitin G., 2009, *Hasard et complexité mathématiques*, Flammarion.

Charrière G., 1997, *Algèbre mode d'emploi*, Loisir et pédagogie.

Chevallard Y., 1988, *Esquisse d'une théorie formelle du didactique*. In C. Laborde (éd.) *Actes du premier colloque franco-allemand de didactique des mathématiques et de l'informatique à Marseille* (pp.97-106). Grenoble : La Pensée sauvage.

Conne F., 1981, *La transposition didactique à travers l'enseignement des mathématiques en première et deuxième année de l'école primaire*. Thèse de doctorat. Lausanne. Conne / Couturier - Noverraz, (publiée en 1986). 462 pages. <http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01066233>

Conne F., 1985, *Calculs numériques et calculs relationnels dans la résolution de problèmes d'arithmétique*. *Recherches en didactique des mathématiques*, 5 (3), 269- 332. <https://halshs.archives-ouvertes.fr/halshs-01523859>

Conne F., 1987, *Un canard dans les mares*. *Bildungsforschung und Bildungspraxis: Education et recherche*, 9 (3), 301-328.

Conne F., 1988, Comptage et écriture en ligne d'égalités numériques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 9 (1), 71-116. <https://halshs.archives-ouvertes.fr/halshs-01523870>

Conne F., 1992, Savoir et connaissance dans la perspective de la transposition didactique. *Recherches en didactique des mathématiques*, 12 (2.3), 221-270. <https://halshs.archives-ouvertes.fr/halshs-01523900>. Republié dans Brun 1996.

Conne F., 1993, Du sens comme enjeu à la formalisation comme stratégie : une démarche caractéristique en didactique des mathématiques, In *Sens des didactiques, didactiques du sens*, Ph. Jonnaert & Y. Lenoir (Eds.), (Actes des Troisièmes rencontres internationales du REF - réseau international de recherche en éducation et formation). Editions du CRP Faculté d'éducation, Université de Sherbrooke, pp. 205-261.

Conne F., 1994, Quelques enjeux épistémologiques rencontrés lors de l'étude de l'enseignement des mathématiques, in Actes du XXI^e congrès colloque INTER-IREM de la COPIRELEM, Chantilly 1994, IREM Picardie INSSET St Quentin, p. 3 à 35. <http://www.arpeme.fr/>.

Conne F., 1995, Trois pas de deux entre savoirs et connaissances. In Arzac G., Gréa J., Grenier D., Tiberghien A. (Eds), *Différents types de savoirs et leur articulation*, pp. 253-278. Grenoble : La pensée sauvage. <https://halshs.archives-ouvertes.fr/halshs-01535924>

Conne F., 1999, Faire des maths, faire faire des maths et regarder ce que ça donne. In Lemoyne G. & Conne F. (Sous la dir.) *Le cognitif en didactique des mathématiques*, pp. 31-69. Montréal : Presses Université de Montréal.

Conne F., 2003 Interactions de connaissances et investissement de savoir dans l'enseignement des mathématiques en institutions et classes spécialisées. In Schmidt S. & Maury C. (éds) « La spécificité de l'enseignement des mathématiques en adaptation scolaire », *Education et Francophonie*, XXXI (2), automne 2003, pp.82-102. Revue en ligne. <http://www.acef.ca/c/revue/sommaire.php?id=3#.VvvWsTHo0gu>

Conne F., 2003-2004, Sur le fil de nos expériences. Saison 1, 10 épisodes, 85p. (Édition 2016) <https://halshs.archives-ouvertes.fr/halshs-01296507/>

Conne F., 2004a, Sur le fil de nos expériences. Saison 2, trois épisodes et deux ouvertures, 90p. (Édition 2017) <https://halshs.archives-ouvertes.fr/halshs-01508950>

Conne F., 2004b, Jouer la surprise. *Educateur*, 7/2004 du 18 juin 2004, 35-37. <https://halshs.archives-ouvertes.fr/halshs-01517755>

Conne F., 2007a, Quelques pas esquissés dans l'univers des polyèdres. In J. Giroux & D. Gauthier (dir.). *Difficultés d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques. Hommage à Gisèle Lemoyne.*, Montréal : Editions Bande Didactique, Chapitre 9, pp. 219-258. <https://hal.archives-ouvertes.fr/halshs-01053718>

Conne F., 2007b, Une vue sur l'enseignement des mathématiques au primaire et au secondaire en suisse romande, *Petit x* 73, 37-70. <http://www-irem.ujf-grenoble.fr/spip/spip.php?rubrique26>

Conne F., 2008, L'expérience comme signe didactique indiciel, *Recherches en didactique des mathématiques* 28 (2), 219-264. <https://halshs.archives-ouvertes.fr/halshs-01523909>

Conne F., 2009, Annexe au texte « Que sait-on de la géométrie à ses origines ? Comment y donner des interprétations didactiques ? ». In Actes XXXV^e colloque national de la COPIRELEM « Enseigner les mathématiques à l'école: où est le problème ? », Bordeaux Bombannes 2-4 juin 2008, pp. 29-39.

Conne F., 2009, Que sait-on de la géométrie à ses origines ? Comment y donner des interprétations didactiques ?. In Actes XXXV^e colloque national de la COPIRELEM « Enseigner les mathématiques à l'école: où est le problème ? », Bordeaux Bombannes 2-4 juin 2008, pp. 29-39. Actes en ligne : http://www.arpeme.fr/index.php?id_page=25

Conne, F., 2006, Savoirs à perte de vue. Texte inédit, disponible sur HAL archives-ouvertes.fr [On Line] <https://halshs.archives-ouvertes.fr/halshs-01114874>.

Conne, F., Cange, C., Favre, J.-M., Del Notaro, L. Scheibler, A., Tièche Christinat, Ch., Bloch, I. & Salin M.-H., 2003, L'enseignement spécialisé : un autre terrain de confrontation des théories didactiques à la contingence. In V. Durand Guerrier & Cl. Tisseron (éds) *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques*, mars, année 2003, pp. 77-185. http://www.irem.univ-paris-diderot.fr/articles/mise_en_ligne_des_actes_du_seminaire_national_de_didactique/

Damasio A., 1999, *Le sentiment même de soi*, 1999, O. Jacob.

Ddmes, 2012a, De l'expérience à la narration, *Math-Ecole* 218, 46. http://www.ssr dm.ch/mathecole/crbst_10.html

Ddmes, 2012b, *Des narrations pour partager et faire rebondir nos expériences mathématiques dans l'enseignement spécialisé*. Actes des deuxièmes journées didactiques de La Chaux de Talendaz.

Del Notaro I. & Scheibler A., 2003, *Modèles de milieu à l'épreuve de la contingence en enseignement spécialisé*, in 2004. L'enseignement spécialisé : un autre terrain de confrontation des théories didactiques à la contingence. In V. Durand Guerrier & Cl. Tisseron (éds) *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques*, mars, année 2003, pp. 141-158. http://www.irem.univ-paris-diderot.fr/articles/mise_en_ligne_des_actes_du_seminaire_national_de_didactique/

Delessert A., 1960, *Géométrie plane*, SPES, Lausanne.

Descaves A., 1992, *Comprendre des énoncés, résoudre des problèmes*, Hachette.

Enzensberger H. M., 1998, *Le démon des maths*, Seuil.

Euler L., 1768-1772, *Lettres à Une princesse d'Allemagne (1768 à 1772)*, Shrisjhti D. Chatterji ed, 2003, Presses Polytechniques et Universitaires Romandes.

Favre J.-M., 1992, *La multiplication : élaboration d'une démarche par l'observation de la formation et de l'évolution d'un concept*. Mémoire inédit réalisé au Séminaire cantonal de l'enseignement spécialisé (SCES) à Lausanne, disponible auprès de l'auteur.

Frege G., 1892, *Über Sinn und Bedeutung*, trad française *Sens et Dénotation* in *Ecrits logiques et philosophiques*, Le Seuil, 1971.

Gardner M., 1964, *L'étonnante histoire des machines logiques*. Dunod.

Giroux J., 2008, *Conduites atypiques d'élèves du primaire en difficulté d'apprentissage*, RDM n° 28/1; La Pensée Sauvage, Grenoble.

Gonseth F., 1946-1953, *La géométrie et le problème de l'espace*. Ed. du Griffon Neuchâtel (diffusé par Dunod)

Holden A., 1977, *Formes espace et symétries. construisez facilement vos "solides"*. Cedic n° 2.

Lakatos I., 1984, *Preuves et Réfutations*, Hermann.

Perret-Clermont A.-N., Brun J., Conne F., Shubauer-Leoni M.-L., 1982, Décontextualisation et recontextualisation du savoir dans l'enseignement des mathématiques à de jeunes élèves. *Interactions didactiques* 1, 1-33.
http://www2.unine.ch/ipe/home/publications/interactions_didactiques

Rouchier A., 1991, *L'institutionnalisation des savoirs dans l'enseignement des mathématiques*, in *Etude de la conceptualisation dans le système didactique en mathématiques et informatique élémentaires: proportionnalité, structures itérativo-récurrentes, institutionnalisation*. Thèse de doctorat d'état, Université d'Orléans, UFR: Sciences Fondamentales et Appliquées, Orléans 1991, pp. 26-71.

Thurston W. P., 1995, *Preuve et progrès en mathématiques*, revue Repère IREM n° 21.

Tonnelle, J., 1979, *Le monde clos de la factorisation*, DEA de mathématiques, IREM Aix-Marseille et IREM de Bordeaux.

Vergnaud G., 1991, La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10 (2), 133-168.

Wigner J., 1960, *The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences*, in *Communications in Pure and Applied Mathematics*, vol. 13, No. 1 (February 1960). New York: John Wiley & Sons, Inc. Copyright © 1960 by John Wiley & Sons, Inc.)

POINT D'ORGUE

14 février 2013

Adressée à une foule de gens mais rédigée comme une lettre adressée à Adolphe Adhiou.

Bulles soupapes

Adolphe

Bulles soupapes (laïus de retraite).

Cela fait longtemps que je fais du boulot underground, ddmes c'est de l'underground. Bon, il faut bien vivre alors on donne des cours et pour obtenir le poste, on publie, on va dans des congrès, on rapporte sur des articles, on fonde une société qui se veut académique et on en écrit le manifeste (ssrdm), on monte de temps en temps en surface. On a vite brassé beaucoup d'air.

Mais pourquoi est-ce que je fais du boulot underground? (À Corps à l'école d'été de 2001, Y. Chevallard disait que je faisais du off).

Cela provient d'un problème auquel j'ai dû me résoudre.

Quand j'ai entrepris de faire des maths je voulais faire de la recherche scientifique. J'étais ouvert à ce que ce soit en maths ou ailleurs. Puis il y a eu la conférence de Grothendieck au CERN en janvier 1972, et la contestation radicale de la manière dont on faisait de la science. J'ai immédiatement adhéré à ces idées et ces critiques. Du jour au lendemain j'ai renoncé à mon projet de recherche en maths ou en maths dans sciences humaines ou biologie.

Mais il fallait bien avoir un projet. Je ne voulais surtout pas enseigner. Je me suis présenté sur un champ relativement ouvert et vierge : la psychopédagogie des maths (L. Pauli, à la fpse). Puis je me suis rallié, en 1980, à la ddm. Il m'a semblé que là je pourrais faire de la recherche scientifique autrement que classiquement, que l'on pourrait tenter l'utopie d'une pratique scientifique qui réponde à la critique du mouvement de Grothendieck.

En fait c'était un petit peu plus compliqué. Il me semblait que l'on pouvait installer et entretenir une bulle dans l'académie ó qui, elle, fonctionnait exactement comme les autres sciences - où on pourrait pratiquer de la recherche scientifique de manière nouvelle et plus sensée. Ceci semblait d'autant plus faisable que la ddm devait d'abord se constituer comme science.

C'est là que le problème est venu. Parce que, au lieu de se constituer comme science, la ddm a voulu commencer par s'instituer comme telle et qu'elle s'est mise à s'organiser et se pratiquer comme on pratiquait les sciences, ce que justement je ne voulais pas. C'était singer une pratique scientifique avec laquelle je pensais qu'il fallait rompre - et je pense qu'il le faudra bien un jour!

Désormais la ddm est bel et bien instituée comme science et se pratique de l'exacte manière dont on pratique les sciences mais ne s'est toujours pas constituée comme telle. Aujourd'hui, je ne pense pas qu'elle le fasse un jour. On connaît mille tentatives pour constituer telle ou telle science et qui ont échoué. Tout près de la ddm, prends l'épistémologie génétique. Mais qui sait?

Retour en arrière. Je me suis donc trouvé à avoir investi la ddm comme un champ où je pourrais pratiquer de la recherche scientifique d'une nouvelle manière, sans tomber dans les travers relevés et dénoncés par le mouvement de Grothendieck. Et je me trouvais dans un champ qui n'était pas une science vraiment constituée, mais qui s'était évertuée à s'instituer comme telle rien qu'en se pratiquant à la manière dont on pratique les sciences, cette manière avec laquelle je voulais rompre.

Pris dans cette contradiction et tenant absolument à m'accrocher à la recherche que j'avais pu mener pour ma thèse et qui avait été un tel rayon de soleil - je l'ai dessiné dans ma thèse, ce soleil - j'ai tant bien que mal aménagé ma bulle. Je l'ai déménagée lorsqu'il a fallu, et l'ai aussi scindée - au SCES - entre mes activités d'enseignement et mes activités de recherche - essentiellement Chamoyron. Puis ces deux bulles ont été transbahutées à Unige. Une troisième est éclos : ddmes. Une petite quatrième bulle s'est faite autour de mes courriels semés à quelques brises.

Les bulles finissent par éclater mais sans laisser d'éclats. Que faire de ce qu'elles ont produit, des quelques traces qui en resteront ? Je ne sais pas.

Il me faut d'abord trier. Comme je l'ai dit, ces bulles ne sont pas isolées de l'environnement, d'un milieu, d'un milieu d'une science instituée et qui singe la pratique des sciences pour se rassurer sur elle-même. De mes bulles je me suis beaucoup adressé à ce milieu, puis, seulement à un petit groupe de personnes de confiance de ce même milieu. Ces papiers là, même ceux qui ont été publiés, je crois qu'ils méritent bien d'aller à la poubelle. S'il y a quelque chose à garder c'est ce qui s'est produit dans les bulles (et peut-être même dans les trois premières seulement).

De la bulle de mes cours, il ne restera rien : "it's gone in the air, you can never never catch it again". De Chamoyron et d'ailleurs, je ne sais pas, à voir comment cela peut être repris par une production de la bulle ddmes, sinon, sans une transposition, ce sera aussi "gone in the air" comme tout ce qui se fait dans n'importe quelle classe d'école !

Un exemple, tout frais, le 8 février, à la fin d'une courte séance avec un élève de Chamoyron, qui pour moi marque l'aboutissement d'une longue démarche d'approche entre lui et moi, je le remercie. Et lui : "c'est moi qui vous remercie". Mais de quoi nous remercions-nous ? Cet élève est très perturbé, mais il a un esprit extrêmement vif, mais il ne fait que ce qui lui chante et il est parfaitement indifférent à donner, mais il prend ce qui lui vient, mais refuse tant qu'on lui offre, mais il n'est pas libre pour autant, il est souvent sous l'emprise de ce qui lui vient. Il ne tient pas en place, se lève, se promène et revient à son affaire, puis s'envole à nouveau. Il n'apprend ó très vite - que par la bande. Quoi que je lui propose, il l'écarte, le met de côté. Marginalement, il est capable de remarques mathématiques étonnamment pertinentes. Il dessine très bien et la responsable qui m'a adressé cet élève a pensé que sur ce terrain du dessin il se pourrait que lui et moi nous nous rencontrions de manière positive et profitable à chacun. Ce 8 février, alors qu'il me dit tout de go : "surtout pas de dessin", je le lui propose quand

même, je voudrais que ce soient des formes géométriques comme je le fais depuis trois séances - en lui proposant, en ligne de mire, l'évocation d'un algorithme de dessin de ballon de foot que j'ai trouvé dans le train, il y a quelques années. Comme à chaque fois, il refuse, puis se met à dessiner une voiture en 3D, mais pour lui : il y met en effet la condition que je n'emporte pas son dessin avec moi. Je suis pressé, il est arrivé avec un énorme retard, mais je ne puis que le laisser faire. Il dessine bien, en 3D bien sûr, une voiture, vue en enfilade, glissière latérale ouverte. Je l'observe, il a tous les gestes du dessinateur, la tenue du crayon, l'ordonnancement des traits, la planification du dessin etc. C'est très élaboré. Il est bien plus pro que je ne le suis, même si sa perspective est un peu gauche - pas le même point de fuite entre avant et arrière de la voiture, toutefois il ne procède pas par point de fuite bien entendu. Moi je ne puis proposer que quelques trucs très basiques, mais qui font effet - dont mon ballon de foot. Je ne développe pas. Disons que dans mes recherches, j'ai tenu à investir le dessin dans des formes volontairement frustrées, tout sauf de la technique ! Des esquisses rien d'autre, des esquisses de figures. Je l'amorce sur un truc que j'avais trouvé avec un autre excellent dessinateur de Chamoyron, il y a presque 20 ans de cela : dessiner un cube en fermant les yeux (et qui l'avait accroché, hélas un tout petit bout de temps, mais énorme en comparaison à son indisponibilité plus de 10 secondes dans nos échanges antérieurs). Cette fois l'élève prend un grand plaisir aux trucs que je lui montre qu'il ne connaît pas mais qu'il n'a aucune peine à investir, il apprécie les techniques que je lui présente, il a tôt fait de se les approprier. Moi j'ai eu 20 ans pour affiner mes ruses de dessin.

Lorsque j'entends : "c'est moi qui vous remercie" j'entends qu'il me remercie pour ça, pour les trucs que je lui ai montrés à lui, lui qui, de par son propre savoir, bien plus élaboré que le mien, est en mesure de les apprécier.

Il n'est pas exclu non plus - et je l'ai aussi entendu sur le moment - que ce ne soit qu'une forme de politesse - ce ne serait pas étonnant connaissant le bonhomme. Mais je m'en fous, parce que de l'interprétant "formule de politesse" je ne saurais rien en faire tandis que l'autre interprétant détermine déjà la sémiose qui se poursuivra pas plus tard que demain. Je tiens une icône de reconnaissance qui est un signe de rencontre possible et c'est ce que je vise avec lui, multiplier les rencontres.

Voilà ce qui se produit, et ce depuis plus de 20 ans, par exemple dans la bulle Chamoyron et autres lieux de Es. Mais cela ne peut se fixer que si je le transpose dans une autre bulle, celle de Ddmes ou celle de cette narration que je te fais.

Est-ce la narration d'une science qui se pratique ? Une chose est sûre : c'est une pratique comme je l'appelais de mes vò ux. Une autre chose : la possibilité et de tels événements et de leur compte rendu provient d'une exigence et d'un questionnement épistémologiques qui se rapprochent de ceux d'une science.

C'est cela finalement que j'ai pu.

François

Ci-dessous, fragment photo calendrier Helvetas, février 2013. Photo AF Rodrigues, Brésil.

João Ignacio, plus connu dans la favela da Mare sous le nom de João Bolinha (Jean bulle de savon), a quitté le nord-ouest du Brésil pour s'établir à Rio. Il gagne sa vie en

vendant dans la rue de quoi faire des bulles de savon, pour la plus grande joie des enfants.



