



HAL
open science

UN POINT DE VUE MULTIDIMENSIONNEL SUR LES OUTILS ET LES INSTRUMENTS DANS LES ESPACES DE TRAVAIL MATHÉMATIQUE

Jean--philippe Drouhard, Alain Kuzniak

► **To cite this version:**

Jean--philippe Drouhard, Alain Kuzniak. UN POINT DE VUE MULTIDIMENSIONNEL SUR LES OUTILS ET LES INSTRUMENTS DANS LES ESPACES DE TRAVAIL MATHÉMATIQUE. Espacio de Trabajo Matemático Mathematical Working Space Espace de Travail Mathématique, 2015. halshs-01655923

HAL Id: halshs-01655923

<https://shs.hal.science/halshs-01655923>

Submitted on 6 Dec 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UN POINT DE VUE MULTIDIMENSIONNEL SUR LES OUTILS ET LES INSTRUMENTS DANS LES ESPACES DE TRAVAIL MATHÉMATIQUE

Jean-Philippe Drouhard et Alain Kuzniak

Universidad de Buenos Aires, Argentine et Université Paris Diderot, Paris, France

jpgrouhard@ccpems.exactas.uba.ar et alain.kuzniak@univ-paris-diderot.fr

Résumé. Dans cette communication, nous questionnons la place et le rôle des outils et instruments dans le travail mathématique. Après avoir fait une distinction entre artefacts, outils et instruments, nous introduisons un point de vue multidimensionnel sur la question des instruments en pointant des différences entre instrument sémiotique, instrument notionnel et instrument artefact. Nous réservons le terme d'instrument mathématique aux outils dont la maîtrise cognitive permet un travail mathématique complet. Pour illustrer ces distinctions, nous étudions les arbres pondérés en probabilités comme exemple d'objet initialement purement sémiotique, le calcul algébrique littéral comme exemple d'outil symbolique, le théorème de Thalès comme objet du référentiel théorique et, enfin, le compas comme artefact matériel.

INTRODUCTION

Comme l'indique l'appel à communication du symposium, les Espaces de Travail Mathématique permettent de cristalliser des manières de faire et des cheminements de pensée qui apparaissent dans la résolution des problèmes de mathématiques proposés dans l'enseignement. L'activité mathématique se donne à voir à travers l'usage, plus ou moins coordonné, d'artefacts, de signes et d'éléments du référentiel théorique constitutifs du plan épistémologique. La question sera précisément de comprendre, ou tout au moins de décrire, le processus de coordination entre tous ces objets aux statuts et rôles différents dans la constitution de l'activité mathématique. Notre but n'est pas d'épuiser le sujet mais d'en proposer une exploration à partir de quelques exemples mettant en évidence différents usages des objets et outils mathématiques dans les ETM idoines actuels.

La question des objets et des approches

Au-delà même de la redoutable question épistémologique de savoir ce que peuvent être les objets en mathématiques (Caveing, 2004), la complexité de l'étude de ces objets vient de la variabilité de leur emploi et de leur statut dans le travail mathématique. Ainsi un outil de résolution peut devenir un objet mathématique d'étude à part entière. Par exemple, une division particulière qui sert à résoudre un problème de partage devient une opération générique dont on étudie les propriétés. De même, les nombres décimaux utilisés pour approcher une racine carrée deviennent les éléments d'un ensemble de nombres \mathbb{D} qui devient alors le centre de l'étude. Cette évolution d'un outil vers un objet mathématique a été théorisée en

didactique des mathématiques par Douady (1986) et mise au service de l'apprentissage mathématique sous le terme de dialectique outil-objet.

L'origine des objets intervenant en mathématique est très diverse. Certains ont, comme nous venons de le signaler, d'abord été des outils. D'autres apparaissent sous la forme de signes ou bien de théorèmes. Certains objets relèvent du monde matériel et tangible, d'autres de systèmes sémiotiques ou bien d'ensembles structurés de propriétés articulées de manière logique dans un discours de preuve cohérent.

Cette diversité dans la nature des objets explique, pour partie, la profusion des théories avancées en didactique pour tenter de les comprendre. Certaines prennent appui, de manière classique, sur l'épistémologie et la psychologie et d'autres, de manière plus récente, sur l'ergonomie en adaptant, à travers la notion de tâche, les résultats issus du traitement du labeur ouvrier au travail intellectuel de l'élève dans la salle de classe.

L'approche que nous suivrons dans cet article s'inscrit dans le cadre général des Espaces de Travail Mathématique (Kuzniak, 2011) et elle s'appuie également sur les apports de l'épistémographie des savoirs pour la didactique que Drouhard a développé pour une étude spécifique de l'algèbre (Drouhard, 2012). Elle privilégie un regard multidimensionnel sur les objets mathématiques : un point de vue sémiotique et linguistique articulé sur les signes constitutifs de l'objet ; un point de vue instrumental articulé sur l'usage d'un certain nombre d'artefacts et enfin un point de vue orienté vers la preuve discursive où l'objet apparaît comme une notion mathématique intégrée dans un corpus théorique qui sert de référence.

ARTEFACT, OUTIL, INSTRUMENT

Privilégier l'étude du travail mathématique en didactique des mathématiques conduit nécessairement à s'interroger sur l'appropriation des différents outils mathématiques. Mais comme nous venons de le voir, les mots se bousculent dans ce domaine et les différents usages des objets mathématiques peuvent renvoyer à des notions qui ne sont pas évidentes à distinguer comme celles d'artefacts, d'outils ou d'instruments. Il est donc nécessaire de préciser ce triptyque artefact, outil, instrument dans le cadre de notre étude.

Définitions traditionnelles

L'emploi courant du terme *artefact* en didactique des mathématiques est certainement dû à l'influence de Rabardel (1995) qui l'a introduit pour désigner, conformément à l'usage des préhistoriens ou des archéologues, un objet transformé par l'homme pour une certaine fin. Il s'agit d'un terme a priori neutre dont les usages restent à définir notamment dans une perspective technologique.

Plus finalisée par rapport à la réalisation de certaines tâches, apparaît la notion d'*outil* : un gâteau est un artefact mais ce n'est pas un outil. Pour entrer dans les nuances, certains auteurs estiment qu'un outil n'est pas nécessairement transformé pour réaliser la tâche pour laquelle il va être utile, ainsi une pierre peut-elle être

utilisée comme serre-livres. Ce type de cas d'usage opportuniste est relativement rare en mathématiques par contre il peut apparaître chez les élèves qui ne connaissent pas nécessairement les règles du jeu autorisées dans la résolution d'un problème.

Les valeurs sémantiques du mot *instrument* sont très variées mais dans son acception standard dans le domaine scientifique, il s'agit d'un objet fabriqué pour permettre de réaliser une technique ou favoriser une opération (observation, mesure...). Dans le langage ordinaire, on peut donc y voir un outil particulier et performant dont la conception et la réalisation sont le fruit d'une anticipation importante.

Instruments et outils pour le travail mathématique

La notion d'instrument a acquis une signification particulière dans les travaux didactiques à la suite de l'influence de Rabardel et plus largement de l'importation de certains concepts de la théorie de l'activité. Dans cette perspective, le terme d'instrument acquiert une valeur cognitive et résulte d'une construction de schèmes par le sujet mis en activité sur des objets. Pour reprendre la distinction de Rabardel, l'instrument n'est pas un « donné » mais doit être élaboré par le sujet. Un instrument est alors formé de deux composantes : un artefact, matériel ou symbolique, et des schèmes d'utilisation associés. Ces schèmes peuvent résulter d'une construction propre au sujet ou dans un cadre plus général d'une appropriation de schèmes sociaux d'utilisation. Une formulation particulièrement claire de ses multiples relations dans le cadre de la théorie de l'activité a été donnée sous la forme d'un triangle par Engeström. Ce dernier utilise aussi deux niveaux d'artefacts et finalement d'instruments : le premier fait directement référence aux artefacts mêmes et le second renvoie à un point de vue réflexif sur leur usage (Engeström, 1999).

Dans la suite de cet article et chaque fois que cela sera utile, nous réserverons le terme d'*outil* aux objets du plan épistémologique ayant un usage potentiel déterminé dans le cadre de la résolution d'un problème. L'emploi du mot *instrument* sera privilégié dès lors qu'une interaction existera entre un sujet (élève, étudiant ou professeur) et l'outil qu'il faudra mettre en œuvre pour résoudre effectivement la tâche proposée.

Une vision multidimensionnelle

Pour tenter de comprendre l'usage dynamique et effectif des outils et instruments dans le travail mathématique, nous nous appuierons sur le point de vue multidimensionnel introduit par Drouhard (2012) dans son épistémographie des savoirs mathématiques. En relation avec les différents pôles du plan épistémologique et les différentes dimensions du travail mathématique, il est possible de considérer trois types d'outils et d'instruments : des outils sémiotiques comme les algorithmes de traitement dans les registres de représentation sémiotique ; des outils notionnels comme les théorèmes nécessaires pour valider certains raisonnements; des artefacts matériels comme les calculatrices. En un sens proche d'Engeström, Drouhard

introduit un second niveau avec la notion de méta-instruments qui réfèrent à des savoirs stratégiques sur les usages des autres instruments.

Ce point de vue multidimensionnel sur la notion d'outils et d'instruments rejoint ainsi les préoccupations de chercheurs utilisant le cadre des ETM en didactique de l'algèbre, de l'analyse et de la géométrie (Montoya-Delgadillo, Mena-Lorca et Mena-Lorca, 2012). Ces derniers ont développé la notion d'artefact symbolique pour décrire l'usage particulier dans le raisonnement mathématique de certains théorèmes comme le théorème des valeurs intermédiaires ou le théorème de Pythagore ou bien de techniques algébriques comme les règles de factorisation ou de développement.

La question étudiée

Nous faisons l'hypothèse que la prise en compte du caractère multidimensionnel des instruments mathématiques permet de préciser et de comprendre la nature des interactions existant dans les ETM entre chacun des éléments du plan épistémologique en relation avec les genèses associées : genèse sémiotique, instrumentale et discursive. Nous illustrerons cette approche par l'étude de la fonction et des usages dans l'espace de travail de différents objets utilisés en mathématiques. Il s'agira plus particulièrement d'explicitier leur rôle dans la circulation du savoir mathématique conçu à travers la modélisation des Espace de Travail Mathématique retenu dans Kuzniak et Richard (2014) qui met en exergue trois plans principaux d'interaction [Sem-Ins], [Ins-Dis] et [Sem-Dis]. Nous essaierons notamment de voir dans quelle mesure certains de ces objets peuvent intervenir en tant qu'instrument dans toutes ces interactions et constituer de ce fait ce que nous appellerons un instrument mathématique.

Pour cette étude, nous avons retenu les arbres en probabilités comme exemple d'objet outil initialement purement sémiotique, le calcul algébrique littéral comme exemple d'outil symbolique pour favoriser le calcul, le théorème de Thalès en géométrie comme objet du référentiel théorique et, enfin, le compas comme artefact matériel.

ARBRES PROBABILISTES OU LA COMPLETUDE DU TRAVAIL MATHEMATIQUE IDOINE

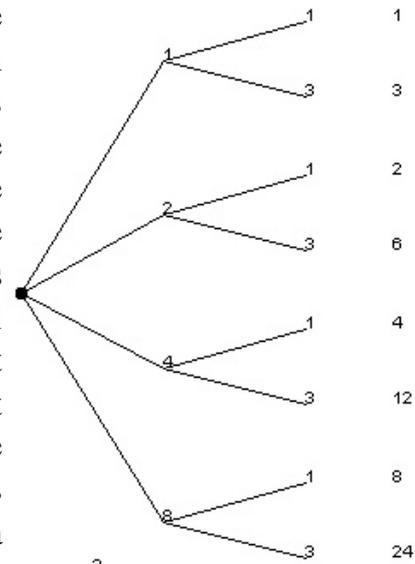
Dans cette section, il s'agit ici d'explorer le statut particulier de l'arbre probabiliste considéré comme un objet de type diagramme dans le travail mathématique scolaire à la fin du secondaire en explicitant son rôle éventuel d'instrument sémiotique puis d'instrument mathématique dans le sens introduit dans le paragraphe précédent. L'introduction des arbres comme outil de résolution de problèmes probabilistes dans l'enseignement secondaire français a commencé au début des années 90. Elle s'est faite progressivement à partir d'initiatives lancées par les IREM (Instituts de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques) qui y voyaient là une manière originale et efficace de traiter certains problèmes de

probabilité. Des arguments en faveur de cette introduction sont donnés dans Parzys (1993) et une analyse détaillée de l'impact possible de cet outil a été développée par Dupuis et Rousset-Bert (1996). Depuis cette période pionnière, les arbres ont bénéficié d'une reconnaissance institutionnelle puisqu'on les trouve officiellement inscrits dans les programmes scolaires actuellement en vigueur.

Les arbres dont il est question sont des *arbres probabilistes* qui dérivent des *arbres ensemblistes* de façon à favoriser les solutions et les calculs dans les problèmes impliquant les probabilités conditionnelles. Il y a ainsi une évolution d'un premier type de représentation essentiellement descriptif à un second type qui remplit des fonctions de preuves et dont un des enjeux soulevés par ses introducteurs initiaux était d'en faire un registre sémiotique au sens de Duval (1993).

Comme le souligne Parzys, les arbres ont longtemps fait l'objet d'un usage spontané avec des règles de fonctionnement implicites laissées à l'initiative de leur utilisateur. Il s'agit alors essentiellement d'un outil de modélisation qui permet de représenter et de mémoriser des situations ensemblistes de dénombrement portant sur des choix d'où les bifurcations qui représentent les alternatives.

Un exemple classique en France de ce type d'usage est celui du dénombrement des diviseurs d'un nombre dont on connaît la décomposition en facteurs premiers : l'association d'un arbre de choix à cette situation permet aisément de trouver ce nombre une fois qu'il est clair que l'opération arithmétique correspondante est une multiplication. En termes peirciens, l'arbre introduit ici est un objet indiciel qui permet de donner certains résultats mais dont le statut dans l'ensemble mathématique n'est pas clairement identifié et admis (il ne s'agit pas d'un légisigne global). Grâce aux travaux didactiques entrepris dans les années 90, on assiste progressivement à la transformation de ce diagramme initial en outil



mathématique autonome dont nous allons montrer qu'il permet un travail mathématique complet au sens des ETM car en plus de son rôle sémiotique, il sera possible de fonder une validation discursive sur le seul emploi des arbres.

Cette transformation d'un pur diagramme représentatif en un instrument de preuve passe par différents états intermédiaires (arbre de choix et d'occurrence, arbre pondéré, arbre probabiliste à marges) pour atteindre le statut d'instrument mathématique avec des règles de calcul ad-hoc.

Les arbres probabilistes ont pour principal domaine d'application les problèmes mettant en œuvre des probabilités conditionnelles. Le problème standard est le problème (A) décrit grâce à un modèle d'urne.

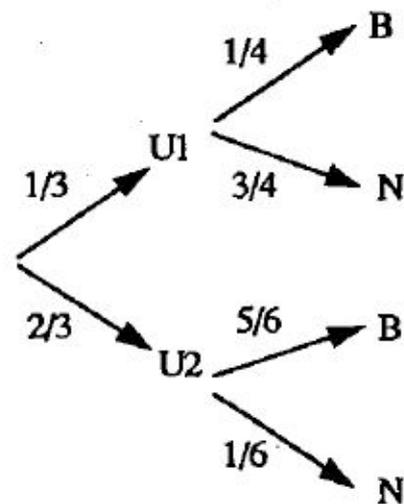
- (A) On dispose d'un dé bien équilibré et de deux urnes contenant des boules blanches et des boules noires. On jette le dé. Si le résultat obtenu sur le dé est 1 ou 2, on tire une boule au hasard dans l'urne U1. L'urne U1 contient $\frac{1}{4}$ de

boules blanches et $\frac{3}{4}$ de boules noires. Si le résultat obtenu sur le dé est 3 ou 4 ou 5 ou 6, on tire une boule au hasard dans l'urne U2. L'urne U2 contient $\frac{5}{6}$ de boules blanches et $\frac{1}{6}$ de boules noires.

- Quelle est la probabilité que la boule ainsi obtenue soit blanche ?
- Si on sait que la boule obtenue est blanche, quelle est alors la probabilité qu'elle provienne de l'urne U1 ?

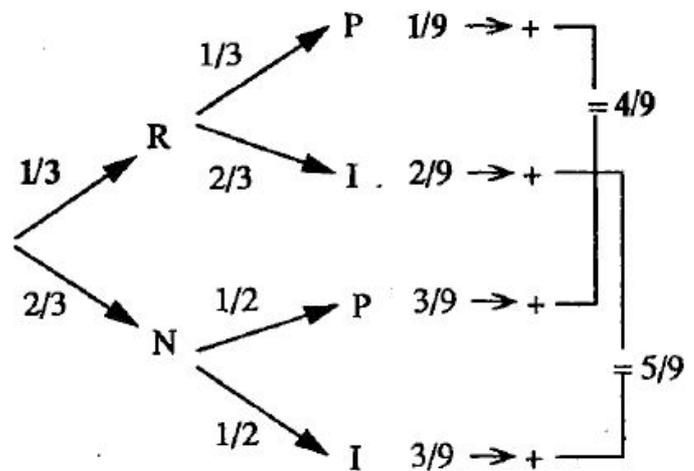
D'autres formes de problèmes relevant de ce modèle existe. Il s'agit soit d'habillage artificiel (on prend au hasard différents billets dans deux porte-monnaie choisis eux-mêmes aléatoirement) soit de problèmes sur des tests médicaux de dépistage de maladie ou de tests d'évaluation de la qualité de la production d'une usine avec des produits défectueux ou non.

À ces problèmes standards peuvent être associées deux représentations, une en tableau qui a perdu de son importance dans l'enseignement secondaire français, même si son usage reste envisagé dans les programmes, et l'autre en arbre qui a été institutionnalisée dans les derniers programmes.



L'arbre acquiert ainsi un statut symbolique et instrumental qui permet de donner le résultat. Une des questions que pose ce statut est de savoir si le résultat obtenu est considéré comme valable dans l'Espace de Travail Probabiliste ainsi créé, autrement dit si on peut fonder une démonstration sur le résultat donné par un arbre.

En terme peirciens, a-t-on un signe symbolique à la fois légisigne et argument ? En effet, généralement, l'arbre est traditionnellement accompagné, dans l'enseignement, d'un discours utilisant les symboles qui justifie chacune des étapes. Pour s'autonomiser et apparaître complet en tant qu'outil mathématique, il est nécessaire de préciser les règles de calcul sur un arbre qui permettent d'obtenir les valeurs recherchées. C'est à ce travail que se sont appliquées Dupuis et Rousset-Bert (1996), ce qui les a conduit à introduire ce qu'elles appellent un arbre « à marges » où les calculs figurent en bout des branches



et ceci avec deux marges de façon à gérer

implicitement la formule de Bayes pour répondre à la question 2 du problème (A).

Les études montrent que cet outil suppose un apprentissage spécifique. De plus, comme pour tout travail sémiotique, il y a un risque de perte de sens comme l'illustre par exemple le cas du problème précité des portefeuilles où l'équiprobabilité est déclarée par des élèves sur toutes les feuilles des branches (Nechache, 2014). De fait, une erreur initiale dans le codage de l'arbre ne se retrouve pas aisément et peut entraîner aussi des erreurs du côté du professeur. Il y a alors le risque bien identifié d'enfermement symbolique.

D'autres limites sont liées à l'objet lui-même qui est associé à une technique dont la portée peut paraître relativement limitée en mathématiques avancée. Dans le cadre de l'ETM idoine propre à l'enseignement supérieur, il y a un conflit entre les arbres et les écritures symboliques propres au paradigme axiomatique. De fait, les arbres disparaissent du paysage et des ETM idoines proposés dans le supérieur et leur usage est même proscrit par certains enseignants. Cette disparition est moins pertinente dans des sections plus techniques comme, par exemple, celle des techniciens de santé.

Comme nous l'avons noté les arbres probabilistes ont été officiellement introduits dans l'enseignement secondaire français actuel (2010). Leur introduction est graduelle et suit la construction sémiotique que nous avons dégagée avec d'abord un outil de modélisation parmi d'autres (arbres, diagrammes, tableaux) en classe de seconde (Grade 10) puis un lien étroit, en classe de première, avec les arbres de choix dans le cas d'un tirage de Bernoulli. Les arbres servent alors de support à loi binomiale et même à définir les coefficients binomiaux vus comme le nombre de chemins donnant p succès dans une épreuve à n tirages. Enfin, l'institutionnalisation comme un outil mathématique complet faisant partie de l'ETM idoine s'effectue en Terminale où les arbres pondérés sont les outils de représentation privilégiés pour étudier les probabilités conditionnelles. Leur statut d'instrument légitime est explicité dans les programmes de terminales scientifiques (Grade 12) en 2012 par le travail qu'il est nécessaire d'effectuer avec eux:

- Outil de représentation : On représente une situation à l'aide d'un arbre pondéré ou d'un tableau.
- Règle d'usage : On énonce et on justifie les règles de construction et d'utilisation des arbres pondérés.
- Rôle de preuve : Un arbre pondéré correctement construit constitue une preuve. Il est ajouté que :
- Le vocabulaire lié à la formule des probabilités totales n'est pas attendu du programme, mais la mise en œuvre de cette formule doit être maîtrisée.

Cette institutionnalisation des arbres comme outil légitime du travail mathématique en probabilité entraîne leur usage dans les manuels et dans les classes avec un certain nombre de variations sur leur statut suivant les classes et les manuels. Ainsi, certains manuels introduisent des règles de construction et des règles de fonctionnement d'un arbre en les mettant parfois en relation avec le substrat

ensembliste.

Par exemple dans le manuel Transmath p. 353 (Aimani et ali, 2012), trois règles sont données

- 1. La somme des probabilités sur les branches partant d'un même noeud est 1 (loi des noeuds).
- 2. La probabilité d'un événement représenté par un chemin est égale au produit des probabilités inscrites sur les branches de ce chemin (loi des chemins).
- 3. La probabilité d'un événement E est la somme des probabilités des événements associés aux chemins qui mènent à E .

Par la suite, dans le même manuel, les solutions d'exercices proposées font explicitement référence à ces règles. Ainsi une rhétorique interne au registre des arbres se met en place et l'arbre devient instrument à part entière de l'ETM idoine proposé.

Cette première étude montre la création récente d'un instrument sémiotique qui se transforme ensuite en instrument mathématique de l'ETM idoine. Cet instrument permet la représentation d'un type de problème, il constitue aussi un instrument de calcul et, in fine, il est reconnu comme un support légitime de preuve. Il permet ainsi *a priori* un travail mathématique complet dans l'ETG idoine du lycée et des études didactique en cours (Nechache, thèse en cours) s'attachent à observer l'usage effectif de cet instrument et son influence notamment au niveau des ETM personnels des élèves.

3. CALCULS ALGEBRIQUE ET SYMBOLIQUE

La question que nous aborderons dans cette partie est la suivante : peut-on considérer le calcul algébrique et, plus largement, le calcul symbolique comme des instruments mathématiques et, si oui, de quoi s'agit-il précisément ? Pour pouvoir répondre à ces questions, nous utiliserons des éléments de l'analyse épistémographique (Drouhard, 2012) spécifiquement dédiée à l'étude de l'algèbre. Ce qui nous permettra de préciser de manière rigoureuse le statut épistémologique de ce que l'on entend par *algèbre* et *calcul algébrique et symbolique* puis de déterminer alors ce que sont les outils et instruments dans ce domaine.

Objets et savoirs algébriques

Les relations entre les objets algébriques se situent dans des dimensions non réductibles les unes aux autres. Ainsi, par exemple, l'inéquation dans \mathbb{R} , $18x^2 < 8$ comporte une première dimension purement sémiolinguistique associée à la représentation des objets considérés : l'écriture « $18x^2 < 8$ », considérée comme une suite de caractères et identifiée par les guillemets. Le traitement de cette écriture s'inscrit dans un ensemble de savoirs sur les systèmes sémiotiques de représentation (en particulier, et essentiellement, des registres de représentation sémiotique). Ils sont nécessaires pour pouvoir représenter les objets sur lesquels on travaille, et en interpréter et en transformer les représentations. Ici par exemple, il faut, entre bien

d'autres choses, identifier la règle de priorité qui fait que l'écriture « $9x^2$ » dénote le produit de 9 par x^2 et non le carré de $9x$.

Mais le traitement d'une telle inéquation par un humain ne peut se réduire à des jeux d'écriture dans la dimension sémiotique (contrairement à ce que peut faire un logiciel de calcul formel). Il faut également prendre en compte la dimension notionnelle et référentielle des objets bien définis en mathématiques (ici par exemple, l'intervalle réel $] -2/3 ; 2/3[$) ainsi que leurs propriétés ou relations (ici le fait que le carré d'un nombre réel est positif, ou que la multiplication est distributive sur l'addition dans \mathbb{R} et plus généralement les propriétés de corps ordonné de \mathbb{R}). Les savoirs notionnels sont nécessaires pour pouvoir travailler avec ces objets. Ces savoirs sont forcément formulés d'une façon ou d'une autre, mais ils ne dépendent pas du registre d'expression employé. Qu'on le dise en français, en anglais, en espagnol ou en langage formel (« $\forall x (x \in \mathbb{R} \Rightarrow x^2 \geq 0)$ »), cela ne change rien au fait que le carré d'un nombre réel soit toujours positif.

Enfin, indépendamment d'un traitement instrumental des expressions algébriques avec une calculatrice formelle, les procédures générales que l'on peut mettre en œuvre pour réaliser les tâches souhaitées se constituent en artefact symbolique: ici par exemple, la factorisation nécessaire pour transformer « $9x^2 - 4$ » en « $(3x+2)(3x-2)$ ». Il existe donc une troisième dimension instrumentale qui va nécessiter un certain nombre de savoirs sur les outils du travail mathématique pour mener à bien, en pratique, le travail mathématiques. Ce sont, en quelque sorte, les modes d'emploi et les précautions d'usage de ces outils. Les savoirs instrumentaux se distinguent ici des deux autres types de savoirs, sémiotiques et notionnels, par le fait que leur énoncé s'accompagne toujours de la mention d'un but (plus ou moins explicitement) comme : « Pour résoudre une équation qui ne se ramène pas immédiatement à un cas connu, on a souvent intérêt à la mettre sous forme factorisée ». Il s'agira donc de savoirs seconds plus stratégiques que nous avons identifié dans la définition des outils et instruments (voir plus haut).

L'algèbre et les outils et instruments du travail algébrique

Nous pouvons maintenant répondre à la question controversée de la nature de l'algèbre et caractériser la spécificité épistémologique de l'algèbre dans les mathématiques en identifiant les outils et instruments du calcul algébrique. Elle consiste à considérer que le travail algébrique se déploie dans l'entière des trois dimensions du plan épistémologique (notionnelle et référentielle, instrumentale et sémiolinguistique). Pour le dire de manière plus imagée et indépendante de notre cadre théorique, l'algèbre est à la fois une science des nombres et de leurs structures, un art de la résolution des problèmes numériques, et un ensemble de systèmes de représentation sémiotiques permettant d'exprimer d'une part les problèmes numériques et leur résolution et d'autre part les nombres que ces problèmes mettent en jeu.

Ce triple point de vue sur le travail algébrique sera selon nous nécessaire pour

analyser de manière didactiquement pertinente une tâche algébrique. Ainsi le travail sur l'inéquation :

$$18x^2 < 8$$

ne peut se réduire ni à l'écriture « $8x^2 < 8$ », ni à l'inégalité entre les deux fonctions $f(x) = 18x^2$ et $g(x) = 8$ (pas plus qu'à l'ensemble $\{x \in \mathbb{R}; 18x^2 < 8\}$) ni à l'ensemble des procédures menant à sa résolution. Au contraire, on doit considérer que l'inéquation en question est formée des trois composantes à la fois, et que le travail algébrique se situe dans ces trois composantes indissociables.

Qu'utilise-t-on pour résoudre une inéquation dans le cas d'un travail mathématique de type algébrique ? On applique :

- des règles de calcul littéral, qui ne sont pas autre chose que des jeux d'écritures (des « transformations de mouvement »),
- des propriétés mathématiques (telle que le fait que le produit de deux nombres négatifs est positif),
- et des considérations stratégiques plus ou moins contraignantes, par exemple le fait que pour factoriser une différence telle que « $18x^2 - 8$ » on a fortement intérêt à commencer par une mise en facteurs communs (aboutissant à « $2(9x^2 - 4)$ ») avant d'appliquer la différence de deux carrés (aboutissant à « $2((3x + 2)(3x - 2))$ »).

On retrouve ici les trois dimensions de l'analyse en terme d'ETM et d'épistémographie. Cela nous amène à considérer que les outils du travail algébrique, que l'on utilise pour opérer sur des objets algébriques tridimensionnels, doivent eux aussi être considérés comme tridimensionnels. Plus précisément, les trois dimensions des outils et instruments du travail algébrique correspondent aux trois dimensions des objets algébriques sur lesquels ces outils opèrent :

- la dimension sémiolinguistique des outils et instruments du travail algébrique (ce que, par commodité, on appellera «outils sémiotiques») est celle des transformations de type : « $18x^2 > 8$ » → « $18x^2 - 8 > 0$ » (Drouhard et Panizza, 2012).
- la dimension notionnelle et discursive associée à la preuve (ce que, par commodité, on appellera «outils notionnels») est celle des propriétés mathématiques utilisées comme outil de résolution,
- la dimension instrumentale même des outils et instruments (ce qu'on appellera «méta-instruments») est celle des stratégies d'emploi des instruments, suggérant par exemple un ordre d'emploi des instruments, qui renvoie à un savoir second sur l'usage des instruments.

Pour résumer, nous considérons donc les instruments du travail algébrique comme des objets mathématiques (dans leur trois dimensions) ayant un rôle d'outil dans le plan épistémologique et « instrumentalisés » par un travail cognitif du sujet qui les utilise en reprenant ici la distinction outil/instrument que nous avons retenu plus haut. Bien entendu, à chaque étape du travail algébrique, telle ou telle dimension sera privilégiée par le sujet et on pourra alors parler d'outil ou d'instrument

sémiotique, notionnel ou *d'ordre méta*. Autrement dit, nous proposons de considérer que les instruments sont des objets qui se déploient a priori dans un espace tridimensionnel mais que leur *usage* à un moment donné par un sujet donné réalisant une tâche donnée peut se situer dans une seule des trois dimensions.

Signalons que l'on peut étendre la notion de travail algébrique en « travail symbolique » qui correspond à la partie des mathématiques dans laquelle le travail sur les écritures (des registres des langages formels) joue un rôle essentiel (mais non exclusif) – en fait, la quasi-totalité des mathématiques au-delà de l'algèbre élémentaire.

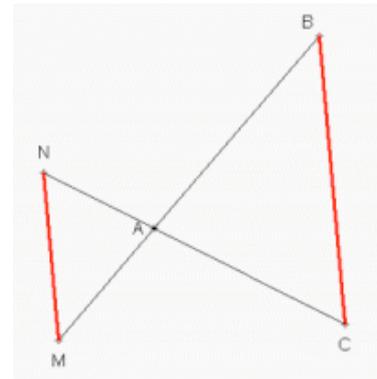
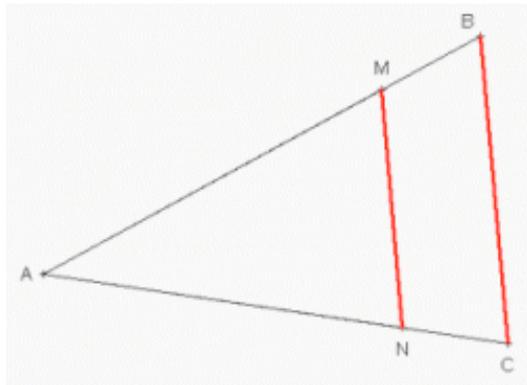
INCOMPLÉTUDE DU TRAVAIL MATHÉMATIQUE

Dans cette partie, nous allons envisager deux exemples d'un usage réducteur d'outils mathématiques et qui, de ce fait, entraîne un travail mathématique que nous qualifierons d'incomplet. Le premier exemple, le théorème de Thalès, concerne un outil notionnel emblématique du référentiel théorique dans le travail géométrique scolaire. Le second s'attache à un des artefacts matériels les plus familiers de la géométrie, le compas.

Thalès ou la clôture sémiotique

De part son importance dans les curricula de l'école secondaire, le théorème de Thalès bénéficie d'une abondante somme de travaux tant en didactique qu'en épistémologie. En langue française, nous retenons particulièrement le travail collectif publié par les IREM en 1995 qui permet notamment de décrire, à travers les âges, les différentes formes et usages de ce théorème dans l'enseignement. Dans la tradition euclidienne, le théorème de Thalès précise les relations existant entre des projections sur deux droites parallèlement à une direction, il est associé à un diagramme figural utilisé comme support du raisonnement pour justifier des parallélismes ou bien des similitudes de figures. Une des particularités de ce théorème est de jouer sur deux domaines mathématiques, celui de la géométrie et celui du numérique. Son usage comme outil de calcul est particulièrement développé dans le paradigme de la Géométrie I pour envisager des applications pratiques notamment dans le cas de la mesure des angles et des grandeurs inaccessibles.

Dans l'enseignement français, à partir des années 80, l'utilisation du théorème de Thalès, se réduit progressivement aux seuls triangles avec deux configurations types : l'une dite *triangle* et l'autre *papillon*.



L'*outil notionnel* Thalès qui était au centre d'un travail discursif de preuve tend à changer de nature par suite de l'importance croissante accordé au *diagramme* Thalès dans le travail attendu. Dans les tout derniers programmes et dans les manuels scolaires, on constate une évolution vers un usage de la configuration de Thalès vue comme une sorte de diagramme de calcul à trous qui permet d'exercer les activités de calcul numérique sur les fractions ou les nombres décimaux. Ainsi un objet théorique initialement conçu comme un outil pour la démonstration se transforme en un outil sémiotique prétexte et support pour des calculs. Le travail attendu des élèves se situe désormais presque exclusivement dans le plan (Sem-Ins) de l'ETM après un changement de domaine puisque l'on a quitté la géométrie pour entrer dans le numérique (Nechache, 2014). Cette fermeture du travail mathématique sur un seul de ces plans verticaux nous conduit à parler de clôture sémiotique. Le glissement de domaine peut se poursuivre car on note également une évolution du type de tâches demandées aux élèves qui conduit aussi à utiliser le support Thalès pour introduire des équations algébriques, certains des nombres apparaissant sur les diagrammes associés à Thalès étant remplacées par des inconnues.

Le compas ou les usages contradictoires d'un artefact matériel

Dans le cadre scolaire élémentaire, le compas est clairement un artefact matériel introduit dans l'espace de travail de la géométrie (Géométrie I) avec le rôle spécifique d'outil pour la construction des cercles. Par contre dans un cadre non scolaire, une grande diversité de compas existe en fonction des applications particulières de cet outil à des champs d'activités humaines non nécessairement mathématiques : compas d'épaisseur, compas du tanneur, compas d'artillerie... L'outil initial se complexifie pour répondre aux attentes de ces utilisateurs particuliers et il permet ainsi la mesure et le calcul des proportions. Le compas est alors associé non seulement au tracé du cercle mais aussi au travail sur la mesure des longueurs et ceci à la différence de son emploi dans la théorisation euclidienne de la Géométrie II. En effet, rappelons que dans ce cadre il s'agit d'un compas imaginaire « rétractile » et qui ne permet donc pas de reporter les longueurs et encore moins de calculer des rapports. C'est la notion de cercle vu comme l'ensemble des points équidistants d'un point donné qui devient première dans cette géométrie et le compas dans ce cadre perd son statut d'outil de construction pour s'amalgamer à la notion de cercle défini

comme une figure et non plus comme un dessin.

Ainsi, en Géométrie I, l'apprentissage de la notion de cercle est centré sur le compas et sur la maîtrise de l'agilité gestuelle nécessaire à la maîtrise de cet outil dans un processus classique d'instrumentalisation d'un artefact matériel. Par contre, en Géométrie II, l'accent est mis sur la reconnaissance des propriétés du cercle liées à l'équidistance et ceci de manière conflictuelle avec les usages antérieurs du compas. Des activités de transition spécifiques comme celle de Fenichel et Taveau (2009) doivent être conçues pour surmonter ou mettre en évidence le nouvel usage du compas.

Les élèves disposent d'une feuille de papier où figurent un point rouge A et un point bleu B, ils doivent construire quinze points situés à la distance AB de A. Différents outils dont l'usage mathématique a déjà fait l'objet d'activités sont mis à leur disposition: compas, règle, ficelle.

Cette activité filmée par les auteurs permet d'observer les difficultés qu'ont les élèves pour résoudre cette situation avec des usages divers du compas et sans relation étroite avec les attentes usuelles propres à cet instrument.

Au collège, dans une situation de classe étudiée par Bulf (2014), après avoir donné la définition du cercle, le professeur demande aux élèves de construire des cercles dans un espace plus grand que celui de la feuille de papier (celui de la cour de l'école). Il met à la disposition des élèves des ficelles mais ces derniers ne font alors aucune association avec la définition du cercle et ils ne donnent aucun rôle bien clair à la ficelle dont l'apparition dans l'Espace de Travail Géométrique apparaît presque incongrue. Faute d'une préparation suffisante les élèves échouent dans cette activité, ou procèdent par pure approximation. Il leur est en effet demandé d'utiliser une ficelle comme artefact géométrique avec emploi identique à celui du compas mais autre que celui qui lui est généralement attribué dans le monde réel. Il s'agit là de ce qui est désigné généralement par le nom de catachrèse, qui renvoie à un usage transgressif de l'outil, comme d'utiliser un téléphone portable pour enfoncer une punaise. Ceci suppose de la part des élèves une maîtrise du but visé, mais aussi un changement du contrat didactique usuel.

Pour résumer, en géométrie, du fait du changement de paradigme associé au travail sur cercle, le rôle premier du compas et, plus généralement, des outils de dessin, comme artefact matériel doit faire place à un rôle plus complexe d'*artefact symbolique* permettant d'identifier et de vérifier les propriétés attachés aux figures associées à ces outils. On passe d'un travail mathématique expérimental où le rôle du compas est central à un travail de démonstration où son rôle doit devenir second jusqu'à l'effacement. De ce fait, divers blocages et malentendus seront associés au compas avec, d'une part, les difficultés de la maîtrise gestuelle en Géométrie I et, d'autre part, son emploi ambigu lors de la transition de paradigmes géométriques associée à un changement du statut épistémologique des objets tels que, en particulier ici, le cercle.

CONCLUSION

Dans cet article, nous avons réservé le terme d'outil aux objets du plan épistémologique de l'ETM ayant un usage défini dans le cadre des mathématiques. Sous ce terme générique, il est possible de distinguer des artefacts matériels, des outils notionnels qui sont les théorèmes et les propriétés et enfin des outils sémiotiques définis à partir de diagrammes, de symboles ou d'objets tangibles ayant un rôle de signe. Nous avons parlé d'*instrument* dès lors qu'une interaction existait entre un sujet (élève, étudiant ou professeur) et l'outil pour résoudre effectivement une tâche proposée. De ce fait, les différentes dimensions –instrumentale, discursive, sémiotique– des ETM avec leur genèses propres nous ont permis d'analyser chacune des transformations cognitives particulières d'un outil donné en instrument. De cette manière, il nous a été possible d'avoir un point de vue multidimensionnel sur la question des instruments en pointant des différences entre instrument sémiotique, instrument notionnel et instrument artefact. Nous avons précisé le terme d'instrument mathématique en le réservant aux outils dont la maîtrise cognitive permettait un travail mathématique complet jouant sur les différentes dimensions cognitives du travail dans son ensemble.

Une fois dégagées ces précisions terminologiques et conceptuelles, nous avons utilisé cette approche multidimensionnelle pour comprendre la nature très particulière du calcul algébrique qui se caractérise par une proximité très forte des différentes dimensions du plan épistémologique. Les différents objets – arbres probabilistes, théorème de Thalès, compas – que nous avons étudiés dans cet article nous ont permis de montrer la grande flexibilité instrumentale des outils introduits en mathématiques et donc la nécessité d'une prise en compte précise de leur rôle pour en assurer un emploi adéquat dans leur domaine d'usage. Ainsi, un objet purement sémiotique comme un arbre peut, à la suite de certaines transformations, devenir un instrument mathématique remplissant toutes les fonctions attendus pour ce type d'instrument. A l'inverse, un instrument mathématique traditionnel tel que le théorème de Thalès peut perdre ce statut à la suite d'un appauvrissement des tâches scolaires nécessitant son usage et se réduire à un instrument sémiotique et un outil de calcul. Enfin, l'étude d'un outil traditionnel comme le compas nous a permis d'illustrer la transformation d'un pur artefact matériel en artefact symbolique lié au changement de paradigme géométrique, qui fait passer d'un univers d'objets réels tels que les dessins concrets au monde des figures abstraites. Ce changement entraîne une transformation de l'usage même du compas qui peut être source de malentendus didactiques et de blocages dans le travail de l'élève.

L'éclaircissement des différentes fonctions et usages des outils et instruments dans le cadre des ETM devrait permettre une étude plus fine du travail mathématique nécessaire pour résoudre des situations mathématiques complexes et guider un enseignement prenant en compte la diversité cognitive de ce travail.

REFERENCES

- Aimani, S., Bonneval J.M., Devynck J.-B. & Yvonnet, P. (2012). *Manuel de Terminale S. Collection Transmath*. Paris: Nathan.
- Bulf, C. (2014). Présentation au séminaire national de didactique des mathématiques. *Université de Bordeaux*.
- Caveing, M. (2004). *Le problème des objets dans la pensée mathématique*. Paris : Vrin.
- Douady, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil/objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. 7(2). 5-32.
- Drouhard, J-Ph. (2012). L'épistémographie, un outil au service de la didactique des mathématiques. In M. Abboud-Blanchard & A. Flückiger (Eds.). *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques (Année 2011)*. IREM de Paris 7 – Université Paris Diderot. pp. 129-133.
- Drouhard, J-Ph., Panizza, M. (2012). Hansel et Gretel et l'implicite sémio-linguistique en algèbre élémentaire. In Coulange, L., Drouhard, J.-Ph., Dorier, J.-L., Robert, A. (Comp.) *Recherches en Didactique des Mathématiques, Numéro spécial hors-série, Enseignement de l'algèbre élémentaire: bilan et perspectives* (pp.209-235). Grenoble: La Pensée Sauvage.
- Dupuis, C. & Rousset-Bert, S. (1996). Arbres et tableaux de probabilités : analyse en terme de registre de représentation. *Repères Irem* 22. 51-72.
- Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de didactique et de sciences cognitives*. 5., 37-65.
- Engeström, Y. (1999). Learning by Expanding: An Activity - Theoretical Approach to Developmental Research. Web: <http://lhc.ucsd.edu/MCA/Paper/Engestrom/expanding/>.
- Fenichel, M. & Taveau, C. (2009). Enseigner les mathématiques au cycle 3. Le cercle sans tourner en rond. DVD. CRDP Créteil.
- IREM (1986). *Autour de Thalès*. Paris: Irem de Paris Diderot.
- Kuzniak, A. (2011). L'Espaces de Travail Mathématique et ses genèses. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 16. 9-24
- Kuzniak, A. & Richard, P. (2014). Espaces de Travail Mathématique. Points de vue et perspectives. *Relime, numéro spécial sur les espaces de travail*. Web: <http://www.irem.univ-paris-diderot.fr/~kuzniak/publi/Publications>
- Montoya-Delgadillo, E., Mena-Lorca, A. & Mena-Lorca, J. (2012). Circulaciones y génesis en el Espacio de Trabajo Matemático. *Communication au symposium ETM3. Montréal*.
- Nechache, A. (2014). Comparaison de la démarche de validation dans les Espaces de Travail idoines en géométrie et en probabilités. *Communication au colloque ETM4. Madrid*
- Parzysz, B. (1993). Des statistiques aux probabilités. Exploitions les arbres. *Repères Irem* 10. 93-104.
- Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies. Une approche cognitive des instruments contemporains*. Paris: Armand Coli