



HAL
open science

L'article analyse les rapports entre Russell et Couturat à partir d'une comparaison entre *The Principles* et *Les Principes*.

Sébastien Gandon, Université Blaise

► To cite this version:

Sébastien Gandon, Université Blaise. L'article analyse les rapports entre Russell et Couturat à partir d'une comparaison entre *The Principles* et *Les Principes*.. Louis Couturat (1868-1914) - Mathématiques, langage, philosophie, 2017. halshs-01673274

HAL Id: halshs-01673274

<https://shs.hal.science/halshs-01673274>

Submitted on 28 Dec 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Des *Principles* aux *Principes* : Couturat lecteur de Russell

Sébastien Gandon
PHIER, Université Blaise Pascal

Les principes des mathématiques (1905b) est un bien étrange ouvrage. Couturat y a réuni les cinq longs comptes-rendus des *Principles* parus dans la *RMM* en 1904-1905 (1904a, 1905c). L'idée de rassembler ces textes sous la forme d'un livre a émergé rapidement, et la motivation en est en partie critique, comme en atteste cette lettre à Russell datée du 12/19/1903 (2001, pp. 308-309) :

Je voudrais ... vulgariser autant que possible ces doctrines nouvelles, si peu connues en France des philosophes et des mathématiciens ... Certes, il serait désirable que votre livre fût traduit en français ... Mais, outre qu'il m'est impossible d'entreprendre une pareille tâche, je crois que votre ouvrage serait peu lu et peu compris, à cause de son aridité. Il vaudra mieux pour lui que je m'en fasse le *commentateur*. Peut-être même pourrais-je en publier sous forme de livre une sorte de résumé populaire, accessible aux profanes, j'entends aux gens non initiés à la Logique moderne.

L'ouvrage de Couturat n'est donc ni une traduction, ni une discussion, ni un ouvrage original ; il se présente comme une réécriture d'une œuvre existante rendu nécessaire par le fait que l'original, dont le contenu est révolutionnaire, aurait été mal présenté ce qui l'empêcherait de toucher le public auquel il était destiné¹. Bien entendu, on peut imaginer l'embarras de Russell, qui n'avait absolument rien demandé à Couturat, et qui se trouve contraint d'endosser des thèses qui n'étaient pas les siennes².

En réalité cette publication est à réinscrire dans l'horizon de la croisade anti-kantienne, alors centrale pour Couturat³. L'article sur les mathématiques de Kant (1904b), ajouté à la fin de l'ouvrage aimante toute la lecture, et ce contexte polémique agit comme un filtre dans la réception des thèses de Russell, sélectionnant celles qui consonnent avec le projet de Couturat, et faisant apparaître les autres comme d'inutiles scories.

Un coup d'œil au plan des *Principes* montre que Couturat suit de près le cheminement de Russell. Chaque partie des *Principles* (à part la dernière, mais qui a un statut particulier chez Russell) possède un correspondant chez Couturat. La proportion entre les tailles des parties est même à peu près respectée. Cette fidélité vaut d'être signalée car elle tranche par rapport à la réception contemporaine de l'œuvre de Russell, qui privilégie la partie I (sur la logique) et II (sur les cardinaux finis), et néglige toutes les autres. Couturat centre son analyse, comme tous ses contemporains d'ailleurs, non pas sur la logique, mais sur le logicisme, c'est-à-dire la vision des mathématiques qui se dégage de l'ensemble de l'œuvre russellienne. Le seul changement notable dans l'architecture générale tient à l'emplacement de la partie sur la quantité, qui suit, et ne précède pas, chez Couturat, la partie sur le continu. Je reviendrai bientôt sur ce point.

Le présent article vise à distinguer les conceptions que Russell et Couturat se font du programme logiciste. Je commencerai (§1) par décrire les critères généraux, nécessaires et suffisants, qui permettent, selon Couturat, de caractériser une théorie donnée comme faisant

¹ Voir les lettres de Couturat à Russell du 4/06/1903, 20/09/1903, 22/04/1904.

² L'ouvrage de Couturat a eu un très grand succès. Il a été l'objet de nombreux compte rendus (8 jusqu'en 1911), dont certains (comme celui de Cassirer) associaient les livres de Couturat et de Russell. D'autre part, les *Principes* ont été traduits en allemand et en russe très tôt – alors que les *Principles* ne sont toujours pas traduits dans ces langues !

³ La critique de Kant n'est pas centrale pour Russell. Voilà ce qu'il répond à l'invitation de Couturat (20/10/1903, Schmid 2001, p. 313) à écrire pour la *RMM* un article sur Kant (c'est le refus de Russell qui conduira Couturat à publier 1904b) : « Pour Kant, je ne me crois guère assez instruit au sujet de sa philosophie pour écrire un article sur lui. Il existe une telle masse de littérature sur l'interprétation de ses obscurités, que j'ai toujours senti qu'il valait mieux se passer de toute critique détaillée. [...] Il y a des années que je ne l'ai pas lu, et je n'ai jamais appris à juger entre les diverses opinions au sujet de ce qu'il signifie. »

partie de la logique. Je soulignerai le fait que, selon Russell, ces critères sont nécessaires, mais non suffisants. Je m'intéresserai ensuite (§2) à la façon dont Couturat structure et organise les mathématiques de son temps et comparerai l'architecture des *Principes* à celle des *Principles*. Dans une dernière partie (§3), je me concentrerai sur l'analyse de la géométrie métrique, domaine qui manifeste particulièrement bien les divergences d'approche entre les deux auteurs.

§1. Les critères de logicité

Que veut-on dire lorsque l'on soutient qu'une théorie particulière (l'arithmétique, la géométrie, la mécanique, etc.) n'est en son fond rien d'autre qu'un ensemble de propositions logiquement valides ? Cette question est évidemment cruciale pour Couturat dans la perspective de son opposition au kantisme. Si la philosophie des mathématiques de Kant doit être rejetée, c'est en effet parce que les jugements mathématiques sont des jugements analytiques, c'est-à-dire des propositions logiquement valides. Mais comment prouver que tel est bien le cas ? Une chose paraît claire dans l'approche de Couturat : il y a selon lui un ensemble de critères nécessaires et suffisant permettant d'établir une fois pour toutes qu'une théorie donnée est logiquement pure. Ce que sont ces critères n'est toutefois jamais complètement explicité, et il est difficile d'extraire des différents passages que Couturat consacre à la « méthodologie » des mathématiques une position stable et définie⁴.

Je vais donc adopter dans cette section la stratégie suivante : plutôt que d'analyser directement les développements de Couturat, je présenterai rapidement et schématiquement la position de Russell, et je décrirai le point de vue de Couturat par contraste. Pour aller tout de suite à l'essentiel et tuer tout suspens, il me semble que, concernant le contenu des critères, Couturat (si on l'interprète charitablement) s'aligne sur Russell. En revanche, alors que Russell voit dans les trois critères avancés des conditions nécessaires à la logicité d'une théorie, Couturat les considère lui comme des conditions nécessaires mais aussi suffisantes.

Dans les *Principles*, Russell maintient que, pour être considéré comme une partie de la logique, une théorie donnée T doit remplir les conditions suivantes :

1. T est axiomatisée
2. T ne comporte pas de constantes non logiques
3. T n'est pas vide, i.e. T possède au moins un modèle.

Examinons ces conditions une à une.

1. Le point est bien connu. Il est développé par Russell de façon la plus claire au §434 des *Principles*⁵, mais il est sous-jacent dans un très grand nombre de développements. Couturat attache également une importance fondamentale à l'axiomatisation ou comme il dit aussi à la « formalisation » d'une théorie. Comme Russell et d'autres à l'époque, le philosophe français considère en effet que l'imperfection du développement axiomatique des théories constitue la source principale de la doctrine kantienne de l'intuition formelle (*Principes* 303-304) :

Kant concevait, avec tous ses contemporains, les mathématiques comme les sciences du nombre et de la grandeur, et même, plus étroitement encore, comme les sciences de l'espace et du temps, et non pas comme

⁴ Cette question est traitée de façon explicite en trois passages (1905b, pp. 34-42, 214-218, 302-308). Mais Couturat croise également ce problème lors de ces analyses du nombre, du continu ou de l'espace.

⁵ *Principles*, pp. 457-458 : « À l'époque de Kant, les mathématiques elles-mêmes étaient logiquement parlant bien inférieures à ce qu'elles sont devenues aujourd'hui. Il est tout à fait vrai, par exemple, que personne ne réussirait, sans l'usage de la figure, à démontrer la septième proposition des axiomes d'Euclide [...]. Comme la correction du résultat semblait indubitable, il était naturel de supposer que la démonstration mathématique était quelque chose de différent de la démonstration logique. [...] La croyance que les raisonnements de la géométrie sont en quelque manière particuliers a été, je l'espère, déjà suffisamment réfutée par les descriptions détaillées qui ont été données de ces raisonnements. »

une science ou plutôt une méthode purement *formelle*, comme un ensemble de raisonnements *déductifs et hypothétiquement* nécessaires. Ici encore, on ne saurait lui reprocher de n'avoir pas prévu l'avenir, encore que, sur ce point aussi, Leibniz ait vu plus clair et plus loin que lui.

Le développement des méthodes axiomatiques rendrait donc complètement superflu l'appel à une intuition *a priori*, et la conception kantienne des mathématiques serait donc en complet déphasage avec l'évolution des pratiques. On considère aujourd'hui les *Grundlagen* de Hilbert comme le manifeste des nouvelles mathématiques axiomatisées. Mais Russell comme Couturat voient les choses autrement : ce n'est pas à Hilbert, mais à l'école italienne, notamment à Pieri⁶, que les deux auteurs attribuent la paternité de cette percée.

2. Concernant l'élimination des constantes non logiques, le problème est le suivant : les théories axiomatiques (comme l'arithmétique de Peano) contiennent des symboles indéfinissables de constantes non logiques (à savoir « 0 », « nombre » et « successeur »⁷). Ces symboles ont des significations, qui ne sont pas, dans la présentation axiomatique, définis à partir des constantes logiques. En ce sens, la condition 1 n'est pas suffisante : il faut pouvoir, d'une manière ou d'une autre, se débarrasser de ces termes non logiques. Deux stratégies sont envisageables : on peut donner une définition explicite des constantes non logiques en termes logiques⁸ ; on peut « ramsifier » la théorie, c'est-à-dire considérer les prétendues constantes non logiques comme des concepts de second-ordre caractérisant les conditions formelles gouvernant l'usage de ces symboles dans la théorie.

Détaillons rapidement cette dernière stratégie. Soit $T(A_1, \dots, A_n)$ la conjonction des axiomes d'une théorie axiomatisée donnée T , qui spécifie l'ensemble des constantes non logiques A_1, \dots, A_n (de différents types) apparaissant dans T . Il est possible, en remplaçant toutes les constantes non logiques, à toutes leurs occurrences, par des variables (de type approprié), d'obtenir une fonction propositionnelle $T(X_1, \dots, X_n)$, qui s'applique à toute structure relationnelle satisfaisant l'ensemble des axiomes. On dirait aujourd'hui que le concept $T(X_1, \dots, X_n)$ caractérise l'ensemble des « modèles » de T . Comme il ne contient aucune constante logique, $T(X_1, \dots, X_n)$ peut être considéré comme un concept purement logique. Tout théorème de T est vrai de chaque élément de l'ensemble que ce concept définit. Ainsi, selon Russell, l'arithmétique de Peano, si elle ne définit pas explicitement les notions de « 0 », « nombre », « successeur », définit explicitement un concept purement logique : celui de progression, encore appelé « ω -sequence » (voir §229 des *Principles*). Peano est dans l'erreur quand il croit avoir défini la structure \mathbb{N} (*Principles*, §122) ; mais il ne se trompe pas lorsqu'il pense avoir défini explicitement un concept logique, à savoir l'ensemble des structures isomorphes à la suite des entiers.

Pour plus de précision concernant cette seconde stratégie, je renvoie le lecteur intéressé à l'article classique de Demopoulos, et à celui plus récent de Hallett⁹. Notons que Couturat ne se montre pas très précis sur cette manœuvre, qu'il utilise pourtant implicitement dans tous ses développements sur la géométrie¹⁰. L'essentiel pour nous est en réalité le point suivant : à partir du moment où on se place dans le cadre d'une logique suffisamment riche, avec des

⁶ 1905b, p. 3 : « Il ne s'agit dans tout ceci que de la Mathématique pure, conçue, suivant l'expression de M. Pieri, comme un « système hypothético-déductif », c'est-à-dire comme un ensemble de propositions dont la vérité est subordonnée à certaines hypothèses dont elles se déduisent logiquement. »

⁷ Russell en donne la version suivante (*Principles*, p. 125) : « (1) 0 est un nombre ; (2) Si a est un nombre, le successeur de a est un nombre ; (3) Si deux nombres ont le même successeur, les deux nombres sont identiques ; (4) 0 n'est le successeur d'aucun nombre ; (5) si s est une classe à laquelle appartient 0 et le successeur de chaque nombre appartenant à s , alors tous les nombres appartiennent à s . »

⁸ Ainsi, pour prendre l'exemple des entiers, Russell, comme c'est bien connu, définit « 0 », « successeur » et « nombre » dans les termes de sa théorie des cardinaux (voir *Principles*, chaps. 14, 29). Couturat suit Russell sur ce point (1905b, pp. 57-61) ; voir plus loin §2.

⁹ Demopoulos, Frege, Hilbert, and the Conceptual Structure of Model Theory, 1994; Hallett, More on Frege and Hilbert, 2012.

¹⁰ Couturat fait explicitement référence à cette opération lorsqu'il critique la méthode des définitions implicites dans son premier chapitre (1905b, pp. 41-43).

variables de relations et de propriétés de différents types, n'importe quel système axiomatique dans lequel apparaît des constantes non logiques peut être vu, au prix d'une reformulation éliminant ces constantes, comme la définition explicite, et donc purement logique, d'un concept d'ordre supérieur. À condition d'avoir à sa disposition un langage suffisamment riche, cette seconde étape peut donc être franchie dès que la première étape est atteinte.

3. Une théorie axiomatisée et expurgée de ces constantes non logiques n'est toutefois pas encore une théorie purement logique. Il faut en effet encore qu'une troisième condition soit satisfaite : la théorie en question doit décrire quelque chose, elle doit avoir un modèle, elle ne doit pas être « vide ». Cette demande est ordinairement liée, depuis Hilbert, à la question de la non-contradiction. Une façon de démontrer qu'une théorie T est consistante est de montrer qu'elle est interprétable dans le cadre d'une autre théorie U dont on a des raisons de penser qu'elle n'est pas contradictoire. On parle alors de résultat de consistance relative. Hilbert montre ainsi que la géométrie non archimédienne a un modèle numérique, et qu'elle n'est pas contradictoire si la théorie des nombres ne l'est pas¹¹.

Chez Russell, l'exigence de non vacuité de la théorie n'est pas liée à la question de la contradiction. Mais elle fait partie du cahier des charges logicistes. Comme le §473 des *Principles* le précise :

Dans les parties [qui suivent la partie I], il a été montré que les mathématiques pures existantes [...] peuvent être déduites des indéfinissables et des indémontrables de la partie I. Dans ce processus, deux points sont spécialement important : les définitions et les théorèmes d'existence. [...] Les théorèmes d'existence des mathématiques – i.e. les démonstrations que les diverses classes qui sont définies ne sont pas nulles – sont presque tous obtenus de l'arithmétique.

Couturat reprend à son compte cette exigence (1905b, p. 39) :

Toute définition s'effectue au moyen de termes généraux, au moins virtuellement et en principe, de sorte que le défini est toujours un terme général, une classe. Or, pour pouvoir ensuite raisonner sur cette classe et en invoquer les propriétés, il faut pouvoir affirmer qu'il existe des individus de cette classe [...] C'est pourquoi toute définition doit être accompagnée d'un théorème d'existence.

Comme Russell et comme Hilbert, Couturat affirme que c'est l'arithmétique (en un sens étendu, qui comprend la théorie des nombres réels) qui fournit l'instrument permettant de démontrer les théorèmes d'existence.

Cette troisième étape, comme la seconde, ne présente pas de difficulté particulière : Dedekind, Cantor et Weierstrass ont montré comment on pouvait construire à partir de la théorie des nombres entiers un modèle de la droite réelle ; et les géomètres travaillant dans la tradition ouverte par Descartes ont montrés comment construire des modèles algébriques des principaux espaces géométriques¹².

Au final, c'est donc la première condition, celle de l'axiomatisation qui constitue la condition fondamentale dans le processus de logification. Une fois qu'une théorie est axiomatisée, les deux

¹¹ Voir Hilbert, *Les fondements de la géométrie*, chap. 1, §13. Le modèle élaboré par Hilbert a pour but de prouver que l'axiome d'Archimède est indépendant des autres.

¹² Après Descartes, et notamment chez Euler, les courbes et les figures euclidiennes sont représentées par des équations dans un plan muni (le plus souvent) d'axes de coordonnées. Cette méthode analytique de représentation des objets géométriques s'est progressivement étendue tout au long du XIXe siècle à des environnements non exclusivement euclidiens. Le mathématicien allemand Julius Plücker introduit, autour des années 1820s, les coordonnées homogènes permettant de formuler les problèmes de géométrie projective de façon analytique. Dans son *Habitationschrift* de 1854, Bernhard Riemann définit les divers espaces non euclidiens à partir de l'idée de variétés numériques munies de différentes métriques. Sous l'impulsion riemannienne, les espaces à n dimensions, inaccessibles à l'intuition géométriques quand $n > 3$, sont étudiées par la voie de l'analyse durant tout le dernier tiers du XIXe siècle.

autres conditions sont satisfaites sans encombre, « mécaniquement » en quelque sorte. Chez Couturat, toute théorie axiomatisée peut donc être considérée comme une théorie logique. Mieux, elle doit l'être : les trois conditions (dont les deux dernières sont remplies si la première l'est) sont nécessaires mais aussi suffisantes. Ce point est fondamental. Souhaitant montrer contre Kant que la géométrie et l'arithmétique sont des théories logiques, Couturat fait comme si des critères généraux permettaient de distinguer les théories qui sont purement logiques de celles qui ne le sont pas. Comme nous l'avons dit, il n'est pas très explicite sur la nature de ces critères, et nous avons dû revenir à Russell pour les expliciter. Mais il ne fait aucun doute, pour Couturat, que si une théorie T est axiomatisée, si les constantes logiques sont éliminées, et si la théorie a un modèle, alors T doit être (et non seulement peut être) considérée comme une théorie logique. Puisque les deux dernières étapes ne sont qu'une extension non problématique de la première, on peut en conclure que formalisation est, pour Couturat, synonyme de logicisation.

Russell n'adhère pas, quant à lui, à une telle position. Pour une raison technique tout d'abord : les deux dernières étapes (la définition d'une classe de modèles et les théorèmes d'existence) sont sous la menace des paradoxes que le philosophe anglais découvre tardivement, en 1902, alors que l'essentiel de son ouvrage est déjà écrit¹³. Les paradoxes interdisent en effet de former la classe de toutes les interprétations d'une théorie formelle et ils rendent la démonstration des théorèmes d'existence extrêmement problématique (notamment, Russell ne peut plus prouver qu'il y a une infinité d'objets). Il n'est donc plus vrai que les deux dernières conditions sont satisfaites dès que la première l'est. Couturat ne saisit pas ce point : aucun passage des *Principes* n'exprime ne serait-ce qu'une légère inquiétude à ce sujet.

Mais si l'approche de Couturat est profondément insatisfaisante, c'est, nous semble-t-il, pour une autre raison, indépendante de la question des paradoxes. Musgrave et Coffa¹⁴ ont montré que les faiblesses d'une telle position. Rien ne s'oppose en effet, à ce que des sciences authentiquement empiriques, comme la géographie (c'est l'exemple pris par Coffa), soient complètement axiomatisées. Elles devraient, si c'était le cas, être considérées comme des sciences purement logiques -- ce qui est absurde. Croire que formaliser, c'est logiciser, « trivialisé » (selon l'expression de Coffa) le logicisme : à ce compte, toutes les sciences, dès qu'elles atteignent un niveau suffisant de systématisation, deviennent des disciplines logiques. Couturat semble parfois conscient du problème¹⁵ ; mais il n'y apporte aucune réponse stable et cohérente. Russell échappe lui à cette objection : en effet, si les trois conditions énumérées sont nécessaires pour considérer qu'une théorie relève de la logique, elles ne sont pas mutuellement suffisantes. Dans les *Principes*, il y a des théories (comme les géométries métriques, voir §3), qui satisfont à toutes ces conditions, et qui sont pourtant considérées comme des théories empiriques. Pour Russell, il n'y a pas de critères généraux permettant de démarquer les sciences logiques des sciences empiriques.

§2. L'architecture des mathématiques modernes

Dans les *Principes*, Couturat s'oppose à la définition kantienne des mathématiques comme science du nombre et de la grandeur – définition qui est aussi reprise dans *De l'Infini Mathématique* (1896b). En 1905, Couturat fait valoir une conception alternative des mathématiques, selon laquelle l'objet des mathématiques n'est ni la grandeur ni le nombre, mais l'ordre (1905b, p. 98) :

La conception traditionnelle des Mathématiques, qui a régné jusqu'au milieu du XIXe siècle, faisait de la grandeur l'objet essentiel de cette science; le nombre lui-même était considéré comme une espèce de

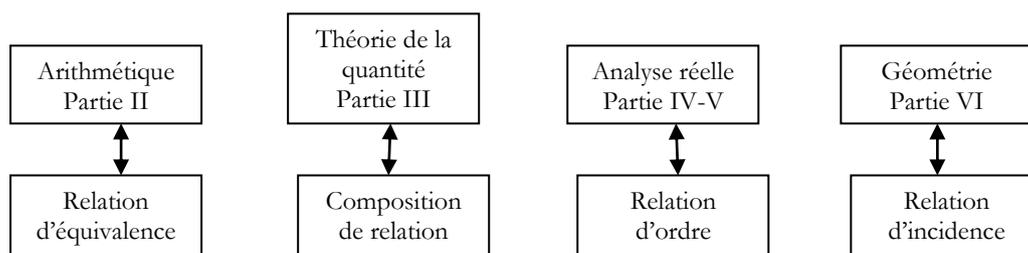
¹³ Sur cette histoire, voir Byrd, Part I of *The Principles of Mathematics*, 1985.

¹⁴ Voir Musgrave, « Logicism Revisited », 1977, et Coffa, « Kant and Russell », 1981.

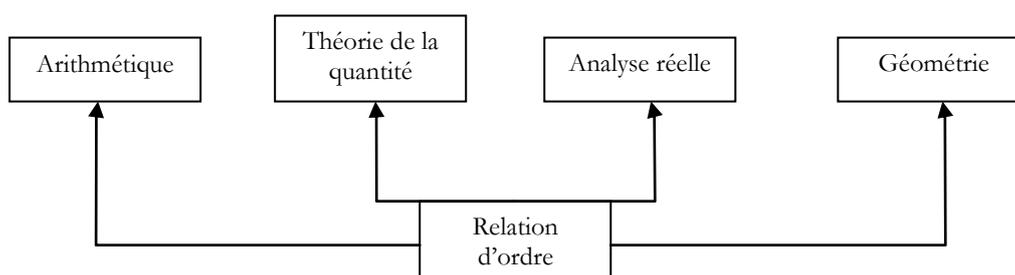
¹⁵ Voir notamment (1905b, 215), où Couturat critique la définition que Peirce donne des mathématiques (selon Peirce, « la Mathématique serait essentiellement la méthode déductive et démonstrative »), en affirmant qu'« elle est manifestement trop générale, car elle fait rentrer dans la Mathématique toute espèce de raisonnements, même ceux qui portent sur des matières tout empiriques, comme les arguments des avocats ».

grandeur, la grandeur discrète, par opposition à la grandeur continue. Depuis lors, c'est devenu un dogme universellement accepté, que la Mathématique pure repose entièrement et uniquement sur l'idée de nombre, et même de nombre entier. Or nous avons vu, d'une part, que l'idée d'ordre est un objet de la Mathématique pure, et qu'elle est irréductible à l'idée de nombre, puisque celle-ci (en tant que nombre cardinal) ne contient aucune considération d'ordre; et, d'autre part, que les nombres en tant qu'objets de la Mathématique pure peuvent se réduire à leurs propriétés ordinales, et que le continu lui-même, qui semblait l'attribut caractéristique de la grandeur, peut se définir d'une manière purement ordinale. Il semble que l'objet essentiel ou principal de la Mathématique pure soit, non plus l'idée de grandeur ni l'idée de nombre, mais plutôt l'idée d'ordre, et que celle-ci ait détrôné les deux autres, qui ont si longtemps occupé le premier rang.

Certains propos de Russell peuvent laisser penser que les deux philosophes sont sur ce point en parfait accord. Mais il n'en est en réalité rien. Lorsque l'on analyse de façon plus attentive la structure des *Principles*, on constate que si la notion d'ordre joue un rôle central dans la théorie des ordinaux (sur laquelle sont fondées l'analyse mathématique, la théorie des nombres réels, l'arithmétique transfini), elle n'intervient pas de façon essentielle dans les autres branches principales des mathématiques, comme l'arithmétique, la théorie de la quantité, la géométrie. En réalité, Russell fait correspondre à chaque grande discipline des mathématiques de son temps une forme relationnelle spécifique. À l'arithmétique sont associées les relations d'équivalence ; à la théorie de la quantité, les produits relationnels (les relations composant à partir de relations de nouvelles relations) ; à l'analyse réelle, les relations d'ordre ; à la géométrie les relations d'incidence. Ceci peut se résumer dans le schéma suivant¹⁶ :



Pour Couturat, au contraire, la théorie de l'ordre joue un rôle fondamental dans toutes les parties des mathématiques. Le schéma qui correspondrait à ce modèle est donc plutôt le suivant (si on maintient inchangée la division des mathématiques telle qu'on la trouve dans les *Principles*) :



La théorie du continu, mais aussi la géométrie, l'arithmétique et la théorie de la quantité, devraient, selon Couturat, se définir comme des sous-disciplines appartenant à la science de l'ordre. En réalité, les choses sont légèrement plus complexes que cela. Nous allons ici passer

¹⁶ Pour plus sur ce point, je me permets de renvoyer à Gandon, *Russell's Unknown Logicism*, chap. 3, et Gandon, *Which Arithmetisation for Which Logicism?*, 2008.

rapidement en revue le contenu des différents chapitres 2 à 5 de (1905b) afin de vérifier ce qu'il en est (je réserve l'analyse de la géométrie (chapitre 6) à la section suivante).

Couturat reprend, dans le chapitre 2, consacré à la théorie des nombres entiers, l'analyse russellienne : il faut distinguer les nombres cardinaux des nombres ordinaux et accorder une primauté aux premiers sur les seconds. Si, en effet, d'un point de vue mathématique, le développement de l'arithmétique à partir des axiomatiques de Peano et de Dedekind est possible et même naturel, il n'en va pas de même du point de vue logique : l'unicité et surtout l'existence des entiers n'est pas garantie dans l'approche ordinale (1905b, pp. 58-61). Peano avait défini la notion de progression (cf. plus haut). Mais comment garantir l'existence d'au moins une progression ? Les théorèmes d'existence sont généralement prouvés, avons-nous dit, par le biais de modèle numérique. Mais comment démontrer l'existence d'un modèle de la théorie des entiers ? On ne peut à ce stade faire appel aux nombres, puisqu'il s'agit, justement, de prouver leur existence. La seule solution est de construire les nombres à partir d'entités considérées à cette époque comme des entités logiques : les ensembles. C'est pour cette raison, liée à des considérations sur les théorèmes d'existence, que Couturat, après Russell, adopte la définition cardinale des nombres entiers. La caractérisation des entiers comme classes de classes équinumériques a l'avantage (modulo la résolution des paradoxes) de garantir l'existence et l'unicité du *definiendum*. Loin de fonder l'arithmétique sur l'idée d'ordre, Couturat fait donc reposer la notion de nombre entier sur les relations d'équinuméricité entre classes, étrangères à toute idée d'ordre. Ce faisant, il déroge une première fois, à son programme général consistant à présenter les mathématiques comme une science de l'ordre.

Dans les chapitres 3 et 4, Couturat expose la théorie de la continuité, et souligne son caractère purement ordinal. Dans le sillage de Russell¹⁷, il s'en prend notamment aux définitions du continu qui font appel à une notion de métrique, donc à une idée de grandeur. De façon particulièrement éloquente, Couturat oppose à la conception extrinsèque et métrique de la continuité une approche plus intrinsèque. Dans la première approche, explique-t-il, l'espace caractérisé comme continu est en effet plongé dans un autre espace, sur lequel est définie une relation de distance. Citons (1905b, p. 96) :

On voit [...] quelle est la différence essentielle entre les deux continuités : la continuité ordinale est *intrinsèque*, elle repose uniquement sur les relations internes des éléments de l'ensemble, et ne tient aucun compte des éléments étrangers; tandis que la continuité métrique est relative à la *situation* de l'ensemble considéré au sein d'un autre ensemble, qui est continu, et dont les éléments entrent en considération. La continuité ordinale est donc la seule primitive et absolue.

La théorie des réels, donc des limites, du calcul différentiel et intégral, est donc, bien comme annoncée, fondée sur le concept d'ordre¹⁸. Rien d'étonnant à cela, cependant, puisque tel était déjà le cas chez Russell.

La ligne suivie dans le chapitre 5, consacrée à l'idée de grandeur, est plus originale et novatrice, et je vais lui consacrer une analyse plus détaillée. Pour comprendre la démarche de Couturat, il faut en effet en revenir à Russell. Le concept de grandeur est abordé dans la partie III des *Principles*, avant les parties sur l'ordre et la continuité. Le développement a un statut tout à fait particulier, puisque Russell explique qu'il aurait très bien pu développer l'ensemble des mathématiques sans se référer au concept de grandeur¹⁹. Les nombres réels ne sont notamment pas, en 1903, définis à la façon « euclidienne », comme des rapports de grandeurs. Comment Russell caractérise-t-il les nombres réels dans les *Principles* ? Dans le chapitre 33, il reprend la théorie de Peano (elle-même inspirée de la construction de Dedekind), et maintient qu'un

¹⁷ Voir *Principles*, chaps. 35, 36.

¹⁸ Dans « Correspondance mathématique et relation logique », paru dans la *RMM* en 1905, P. Boutroux s'en prendra à cette caractérisation de l'analyse mathématique comme science de l'ordre.

¹⁹ Au §150, dans la présentation introductive de la partie III, Russell parle d'une « concession faite à la tradition ».

nombre réel est une certaine classe de nombres rationnels²⁰. Dans les trois chapitres qui suivent, il se penche sur la définition de la continuité, dont il donne une définition ordinale comme nous venons de le voir. Mais quel rapport y a-t-il entre l'analyse des nombres réels au chapitre 33 et l'analyse de la continuité des chapitres 34-36 ? Le type d'ordre de l'intervalle $[0,1]$ dans \mathbb{R} est appelé θ par Russell, qui reprend sur ce point les conventions adoptées par Cantor. θ caractérise l'ordre des nombres réels, mais il caractérise également d'autres ordres : l'ordre d'une portion « fermée » de la droite réelle, d'un intervalle de temps, etc. Quelle est la particularité de l'intervalle réel $[0,1]$ parmi les ordres de type θ ? Russell ne répond pas à cette question dans les *Principles*. Une fois le chapitre 33 achevé, il semble considéré que la seule question importante est celle de l'ordre continu, et non pas celle de l'ordre continu particulier qu'est l'ordre sur l'ensemble des nombres réels. Or cette absence d'articulation pose un problème dans la structuration même des *Principles*. La question du rapport de l'intervalle réel $[0, 1]$ à θ semble en effet la même que celle du rapport entre \mathbb{N} et le concept de progression. On a vu que Russell était très attentif à ne pas rabattre la structure numérique des entiers sur celle des ordinaux finis. La thèse de la priorité logique des cardinaux sur les ordinaux vise précisément à déterminer ce qui distingue les entiers des autres ensembles qui sont ordonnés de la même façon. Pourquoi Russell ne reprend-il pas ici ce schéma d'analyse, et ne cherche-t-il pas à préciser ce qui distingue les nombres réels des ensembles ordonnés continus de type θ ?

Le chapitre 5 de (1905b) vise à répondre à cette question. Couturat y distingue d'abord nettement la structure ordinale du continu et la structure numérique des réels. Il affirme ensuite que la généralisation des nombres au-delà des entiers est toute entière gouvernée par l'idée de mesure des grandeurs (1905b, p. 115) :

On peut, logiquement, définir le nombre par la grandeur ou la grandeur par le nombre ; laquelle de ces deux méthodes est la plus rationnelle, c'est-à-dire laquelle de ces deux idées est la raison d'être de l'autre ? / La réponse à cette question est moins simple et moins tranchée qu'on ne pourrait le croire d'après son énoncé. Pour le dire tout de suite, elle nous paraît être la suivante : l'idée du nombre entier (cardinal) est indépendante de l'idée de grandeur ; mais les autres espèces de nombres (les nombres généralisés) procèdent de l'idée de grandeur.

Il n'est pas possible de décrire en détail la construction de Couturat. La ligne directrice de son inspiration est cependant facile à saisir : ce qui distingue les nombres réels des autres ensembles continus est que les nombres sont essentiellement des rapports (des mesures) de grandeurs. Couturat en revient donc à l'approche traditionnelle, euclidienne, des nombres rationnels et réels comme rapport entre grandeurs, et rompt ainsi avec les définitions « arithméticiennes » qui ont toutes en commun de vouloir couper le lien entre nombres et grandeurs. Cette rupture n'est toutefois pas un retour à l'intuition. En effet, la notion de grandeur est elle-même axiomatisée, et donc logique dans le sens précisé au §1. Couturat, dans le chapitre 5 de son 1905b, présente et analyse le système de Burali-Forti (pp. 104-117), que Russell avait lui aussi utilisé dans la partie III des *Principles*, et définit les nombres comme des relations d'une certaine sorte (des rapports) entre des grandeurs de la même espèce (pp. 118-125).

Je souhaiterais faire deux remarques sur la théorie des réels et de la grandeur défendue par Couturat. La première concerne le rapport entre cette analyse et les développements que l'on trouve dans *De l'Infini Mathématique* (1896b). Couturat, qui revendiquait alors une approche kantienne, critiquait déjà les théories purement ordinales des entiers et des nombres réels (1896, p. 322) :

Sous prétexte de dégager le nombre irrationnel de son origine empirique (surtout géométrique), on le crée de toutes pièces, par une convention arbitraire ; puis, par un postulat non moins arbitraire, on affirme l'existence d'un point (ou d'un état de grandeur correspondant) correspondant, tandis que c'est l'existence

²⁰ Peano s'écarte de Dedekind en ce qu'il fait correspondre un nombre réel non pas à une coupure, mais au premier élément du couple qu'est une coupure. Voir *Principles*, pp. 270-275.

de ce point qui exige et justifie, en réalité, l'invention de ce nouveau nombre. ... On transporte la continuité originelle et radicale du domaine de la grandeur, où elle paraît essentielle, dans celui du nombre, où elle est au moins superficielle. Par ce chassé-croisé de postulats, on prive le nombre irrationnel de tout sens réel, et on lui enlève sa véritable raison d'être. On ne voit pas bien ce que l'ordre logique y a gagné; mais en revanche, il est certain que l'ordre rationnel y a perdu.

Même si Couturat renie explicitement la perspective qui était la sienne en 1896, il intègre dans le nouveau dispositif certains éléments de l'ancienne construction. Bien des passages du chapitre 5 font échos aux anciennes critiques des théories « formalistes »²¹.

La seconde remarque concerne la réception que Russell fait des commentaires critiques de Couturat sur sa théorie des réels et de la grandeur. À plusieurs reprises en effet, le philosophe français adresse à son correspondant des demandes d'éclaircissement au sujet du statut logique ou non du concept de grandeur. Russell y répond, mais ne paraît pas saisir l'importance de la question. Citons des extraits de l'échange²² :

Il y a un point sur lequel vous ne m'avez pas répondu ... C'est sur la valeur et le sens exact que vous attribuez à la théorie de la grandeur de Burali-Forti ... Peut-on dire qu'elle est purement logique? (Couturat à Russell, 11/04/1904, Schmid 2001, p. 379)

Je suis d'opinion que la théorie de BF est indépendante de l'arithmétique, et que ses objets se définissent en termes purement logiques. (Russell à Couturat, 22/04/1904, Schmid 2001, p. 383)

Je suis bien aise de ce que vous me dites de BF, car cela me permettra d'adopter sa définition de la grandeur, qui me paraît conforme à l'usage et aux besoins des mathématiciens. (Couturat à Russell, 5 mai 1904, Schmid 2001, p. 386)

C'est à Whitehead que reviendra le mérite de faire comprendre à Russell le point souligné par Couturat : la définition des nombres réels comme rapport de grandeur n'est pas une entorse au logicisme, et permet d'articuler de façon plus claire les structures numériques et les structures ordinales²³. Dans les *Principia Mathematica*, la théorie des ordres continus est développée dans le livre V et la théorie des nombres rationnels et réels, comme rapport de grandeur, est développée dans le livre VI²⁴. Couturat anticipe donc, en 1905, sur l'évolution du logicisme, sans que Russell, à l'époque occupé à la résolution des paradoxes, ne parvienne à saisir la perche qui lui était tendue.

Résumons. On a chez Couturat une conception de l'architecture des mathématiques qui fait officiellement de l'ordre l'objet fondamental de cette science. Nous avons vu que l'examen de la continuité et de l'analyse mathématique s'inscrivait pleinement dans cette perspective. Nous vérifierons aussi dans la prochaine section que Couturat voit dans la géométrie une théorie de l'ordre. Il convient de remarquer toutefois que Couturat s'écarte de cette ligne générale lorsqu'il aborde l'arithmétique et la théorie de la grandeur et celle des nombres réels. La notion d'entier est fondamentalement cardinale, non ordinale ; le concept de nombre réel, loin d'être confondu avec celui d'ordre continu, doit être défini via le concept de grandeurs (pour un tableau général de l'architecture des mathématiques, voir l'appendice à la fin de cet article). Ces deux « entorses » par rapport à la thèse d'ensemble sont toutefois à chaque fois justifiées. C'est parce que l'arithmétique joue un rôle particulier dans les théorèmes d'existence qu'il n'est pas possible de se contenter d'une approche ordinale. C'est parce que les nombres « généralisés » (rationnels et réels) sont fondamentalement liés à la mesure que l'on ne peut pas, comme le fait Russell en 1903, se contenter de les réduire à un type d'ordre. La cohérence globale du propos de Couturat n'est donc pas affaiblie par l'admission de ces cas particuliers ; bien au contraire, le canevas mis en

²¹ Cf. l'extrait cité p. ??, où on retrouve l'opposition entre ordre rationnel et ordre logique ainsi que la notion de raison d'être.

²² Voir également lettres de Couturat à Russell du 31/10/1903, 13/03/1903.

²³ Voir Russell, *Introduction à la Philosophie des Mathématiques*, pp. 138-139. Dans cet ouvrage, Russell, afin de simplifier son exposition, reprend la théorie des *Principles* – mais il note explicitement que la voie qu'il présente n'est pas celle adoptée par son « ami et collaborateur » Whitehead dans les *Principia*.

²⁴ Sur les livres V et VI des *Principia*, je renvoie le lecteur intéressé à *Russell's Unknown Logicism*, chaps. 5 & 6.

place par le philosophe français se montre suffisamment déterminé pour permettre une discussion informée de pans entiers de mathématiques, tout en étant assez souple pour aménager des dispositions particulières lorsque c'est nécessaire. Mais, comme nous allons le montrer maintenant, ce bel ensemble se brise, lorsque Couturat en vient à discuter de l'espace et de la géométrie.

§3. L'analyse de la géométrie

Quatre parties composent le chapitre 6 des *Principes* (le plus long de tous, 55 pages) consacrés à l'espace : la première est consacrée à la notion de dimension et à des considérations sur la topologie alors naissante ; la seconde porte sur la géométrie projective ; la troisième à ce que Russell nommait la géométrie descriptive et qui correspond à la géométrie d'une partie propre convexe de l'espace projectif²⁵ ; la dernière section est consacrée à la géométrie métrique. Couturat suit apparemment de près l'enchaînement des quatre premiers chapitres de la partie VI des *Principes*, qui ont presque les mêmes intitulés. Mais en réalité, les contenus diffèrent profondément.

L'idée directrice de cette partie est résumée dans cet extrait qui ouvre la section sur la géométrie métrique (1905b, 181) :

[La géométrie d'Euclide] est logiquement postérieure à la Géométrie projective et à la Géométrie descriptive, et elle repose nécessairement sur l'une ou sur l'autre, car elle implique des relations de situation (généralement inaperçues ou négligées) auxquelles elle superpose des relations de grandeur.

Deux sortes de théories, selon Couturat, sont à distinguer : les théories géométriques pures (la topologie, la géométrie projective, la géométrie descriptive), qui n'introduisent aucune notion de grandeur, et qui ne portent que sur l'ordre, la situation, ou les qualités ; les théories métriques (Couturat parle dans l'extrait de la géométrie d'Euclide, mais les géométries non euclidiennes sont également englobées dans sa caractérisation), qui sont hybrides, impures, et mélangent des considérations ordinales avec des considérations quantitatives. D'une certaine façon, une troisième entorse est faite au canevas général selon lequel les mathématiques sont une science de l'ordre : la géométrie métrique combine l'idée d'ordre avec une idée qui lui est tout à fait étrangère, celle de grandeur, dont la théorie a été présentée dans le chapitre 5 (voir l'appendice finale). On pourrait croire que l'analyse de Couturat procède, comme dans les autres cas, d'une décision réfléchie et informée. Ce n'est hélas pas le cas.

Tournons-nous d'abord vers le premier bloc, celle des géométries non quantitatives. Couturat se montre très descriptif et a beaucoup de mal à dégager des idées directrices générales. Sur ce qu'il nomme topologie, il est particulièrement faible : on ne voit pas ce qui relie, dans l'esprit de Couturat, la notion russellienne de dimension, les développements de Cantor sur la cardinalité de la droite et du plan (1905b, pp. 128-132), certains travaux peu connus de Enriques sur la coordination des surfaces (1905b, pp. 134-137), et les recherches issues des travaux de Riemann sur la topologie (1905b, pp. 138-142). Ce dont parle Couturat et qu'avait négligé Russell est bien évidemment de la plus haute importance, mais le philosophe français amalgame sans les articuler des développements qui ne trouveront une unité (quand ils en trouvent une) que bien plus tard.

Les analyses que Couturat consacrent aux géométries projective et descriptive sont mieux maîtrisées, mais les deux théories sont simplement juxtaposées, sans être reliées l'une à l'autre, ni

²⁵ La géométrie descriptive peut être aussi décrite comme la géométrie d'une partie convexe de l'espace euclidien, toutes les considérations métriques ayant été mises entre parenthèses. Pour plus sur ce point, voir Gandon, *Russell's Unknown logicism*, chaps. 1 & 2.

aux développements de la première section²⁶. C'est, nous semble-t-il, précisément parce qu'il soutient que les géométries non quantitatives sont essentiellement ordinales que Couturat reste aveugle à la dynamique propre de la réflexion russellienne. En effet, la géométrie projective et la géométrie descriptive, présentées sous forme axiomatisée, sont essentiellement équivalentes, au sens où l'espace projectif peut être défini dans le cadre descriptif, et où l'espace descriptif peut être défini dans le système projectif. Les deux théories ne diffèrent qu'en ce qu'elles ne se fondent pas sur les mêmes concepts premiers. Dans l'axiomatique élaborée par Pieri en 1898, les indéfinissables de la géométrie projective sont le point, la droite, le plan et les relations d'incidence entre eux. Les indéfinissables de la géométrie descriptive sont les points et la relation d'ordre « entre ». Dit autrement, la géométrie descriptive est clairement une théorie de l'ordre, alors que ce n'est pas le cas dans l'axiomatique de l'espace projectif élaborée par Pieri.

Ce point possède, en réalité, une importance cruciale. Dans son article de 1898, Pieri parvient à définir l'ordre sur la droite projective à partir des relations d'incidence entre les droites dans le plan. Cela revient à renouer avec une vieille intuition d'un des fondateurs de la géométrie projective, G. von Staudt, pour qui le seul objet de la théorie projective est l'étude des rapports d'incidence entre des « formes » (points, droites, plans). Pieri apporte donc à la question de savoir quel statut donner à l'ordre en géométrie pure (question cruciale à l'époque²⁷) une réponse radicale et simple, qui séduit Russell : la géométrie pure n'est pas une étude de l'ordre, elle a pour seul sujet les rapports d'incidence entre les éléments géométriques²⁸. C'est précisément cette idée qui, chez Russell, justifie la distinction entre deux approches de l'espace projectif (l'approche pure, projective, due à Pieri, présentée dans le chapitre 45, et l'approche descriptive, qui repose sur la notion d'ordre, exposée dans le chapitre 46), et qui explique aussi rétrospectivement la définition de l'espace comme série multidimensionnelle (élaborée au chapitre 44)²⁹. Et c'est également cette idée que Couturat n'a absolument pas comprise. La volonté de retrouver la notion d'ordre partout en géométrie pure interdit à Couturat de saisir le sens de l'analyse de Russell -- pire, elle vide la notion d'ordre de tout contenu. Couturat en vient à confondre l'ordinal et le non quantitatif ; et, évidemment, à ce compte-là, presque tout, en mathématique, peut être considéré, comme une théorie de l'ordre³⁰.

La situation est-elle meilleure lorsqu'on se penche sur ce que dit Couturat de la géométrie métrique dans la dernière section du chapitre 6 ? Rappelons que, selon le philosophe français, la géométrie métrique est une science combinant l'idée d'ordre à celle de grandeur. Or une telle approche pose immédiatement une difficulté : elle semble contredite par le fait, bien connue à l'époque puisqu'il constitue le cœur du célèbre article que Klein publie en 1871, qu'on peut définir une distance à partir des seuls concepts projectifs. Couturat évoque, en passant, cette possibilité (dans les pages 173-174 de son ouvrage), mais il n'en tire pas les conséquences qui s'imposent : si une métrique peut être définie dans un cadre purement projectif, c'est que la distance peut être vue comme une notion projective, et qu'il faut en conséquence renoncer à voir la géométrie métrique comme un composé hybride de deux cadres hétérogènes l'un à l'autre, la science de l'ordre d'une part, la science de la quantité de l'autre.

Chez Russell, la question de l'espace métrique se pose tout différemment. Comme Couturat, Russell accorde que l'on peut, de plusieurs manières (mais par exemple, à la façon de Hilbert), axiomatiser la géométrie d'Euclide comme une théorie hybride, où la métrique s'introduit comme une nouvelle idée primitive. Mais contrairement à Couturat, Russell prend également en compte le fait qu'il est possible de développer une théorie purement projective de la

²⁶ Couturat le reconnaît d'ailleurs lui-même (lettre du 5/05/1904, Schmid 2001, p. 386) : « Je trouve que votre ouvrage reste trop [en ce qui concerne la géométrie] dans les généralités et les abstractions. Il faudrait donner un système complet de postulats pour chacune des Géométries en question, et montrer comment elles s'en déduisent [...] C'est la multiplicité des systèmes [de géométrie élémentaire] et leur diversité qui m'embarrassent. »

²⁷ Pour une contextualisation de cette question, voir Gandon, *Russell's Unknown Logicism*, chap. 1.

²⁸ Sur Pieri comme successeur de von Staudt, voir *Principles*, p. 421.

²⁹ L'idée est ici que, pour avoir un espace, il faut avoir au minimum des intersections entre des droites, donc au moins deux dimensions.

³⁰ Couturat va ainsi jusqu'à dire (1905b, p. 208) que « la théorie des groupes [...] est une branche de la science de l'ordre ».

distance. Le philosophe anglais considère toutefois que toutes ces définitions de la distance sont artificielles, parce qu'elles ne tiennent pas compte du caractère élémentaire de la géométrie euclidienne : les considérations liées à la distance et à la congruence sont si basiques, qu'il n'est pas possible, soutient Russell, d'introduire la notion via des concepts projectifs plus complexes ou par le biais de conditions formelles compliquées³¹. La géométrie métrique s'est développée comme une science indépendante depuis au moins deux millénaires. Or les constructions « logiques » de la distance (qu'elles soient projective ou axiomatique) ne parviennent pas à rendre compte de l'autonomie et de l'élémentarité de la discipline. Que faire ? La réponse de Russell est radicale, en ce qu'elle revient à expulser la géométrie métrique du giron des mathématiques pures (*Principles*, p. 428) :

Il y a une science réellement spécifique de la géométrie métrique, mais, puisqu'elle introduit un nouvel indéfinissable, elle n'appartient pas aux mathématiques pures.

Pour des raisons qui sont liées au rôle qu'a joué la géométrie euclidienne dans l'histoire des sciences, Russell maintient donc que la géométrie métrique est fondée sur une notion extra-mathématique, empirique, la distance, dont l'expérience nous révèle les propriétés. Bien qu'elle puisse faire l'objet d'une axiomatique et d'une dérivation projective, la géométrie métrique n'est donc pas, selon Russell, une science logique.

Couturat maintient lui que la géométrie métrique est une science logique – étant axiomatisable, elle satisfait les critères de logicité énumérés dans la §1. Mais il veut également distinguer entre la géométrie purement ordinale et la géométrie quantitative. Il n'a cependant pas les moyens mathématiques de stabiliser cette distinction : le fait est fort connu à l'époque, les métriques euclidienne, hyperbolique et elliptique peuvent être considérées comme des concepts projectifs. Au lieu de remettre en question son appareil doctrinal, Couturat s'obstine et préfère négliger la positivité mathématique.

Conclusion

Couturat lit Russell à partir de son agenda anti-kantien : le philosophe français veut expulser l'intuition des mathématiques (ce qui le conduit à rigidifier les critères de démarcation entre le logique et l'empirique – voir §1), et veut substituer la notion d'ordre au concept de grandeur dans la définition des mathématiques (ce qui le conduit à rigidifier l'architecture des mathématiques – voir §2). Cette orientation simplifie outrancièrement la pensée de Russell. Pour le philosophe anglais, la logique est avant un cadre de permettant de présenter et de confronter l'une à l'autre différentes formes d'organisation, différentes conceptions de la structure des mathématiques. La logique ne prescrit pas elle-même, comme a l'air de le penser Couturat, une architecture particulière. On peut bien, il est vrai, construire la géométrie comme une science de l'ordre, et ce en un sens précis – mais qu'on le puisse ne signifie pas qu'on le doive. Opter pour un type d'organisation des mathématiques plutôt que pour un autre relève d'une décision prise au terme d'une discussion qui évalue et balance les avantages et les inconvénients des différentes possibilités. Le choix et la délibération ne sont pas des applications mécaniques de critères généraux. Le cas de la géométrie métrique illustre de façon spectaculaire qu'il peut se faire que la définition « logique » (axiomatique) d'un concept soit tellement artificielle qu'on préfère y renoncer.

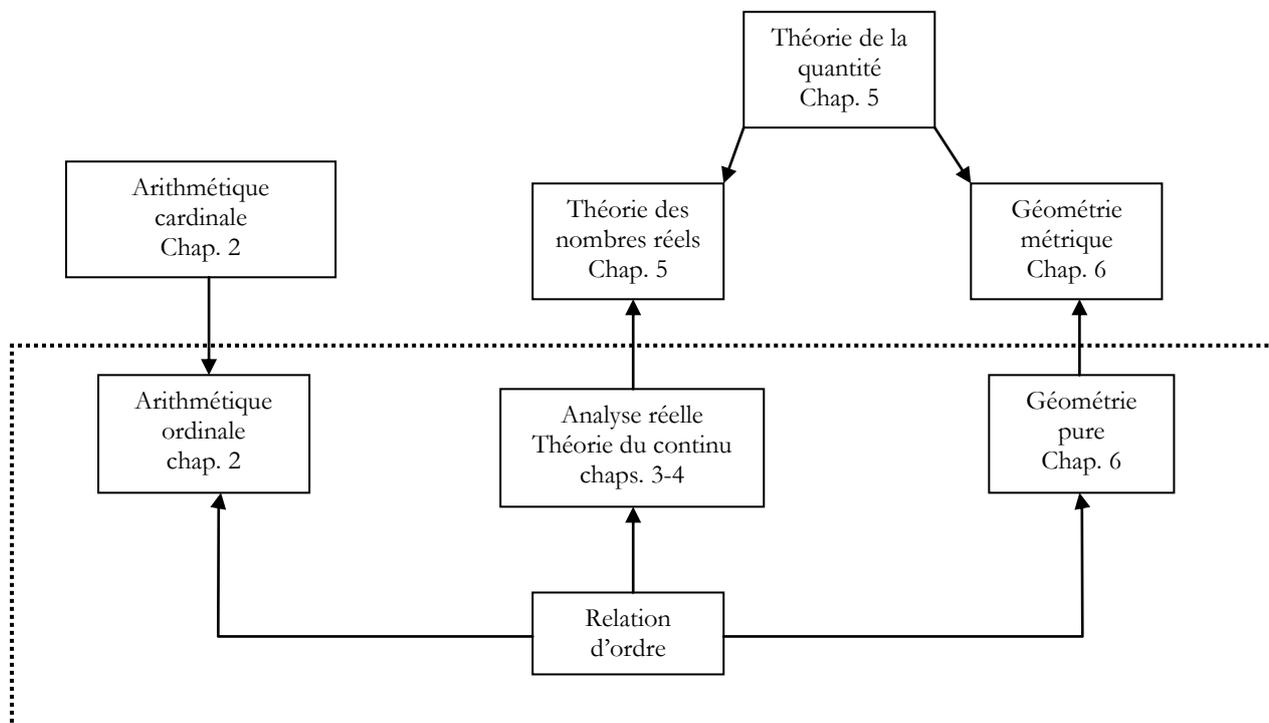
D'une certaine façon, ce que Couturat manque, c'est l'exigence universaliste de Russell. Pour Russell, le programme philosophique (en l'occurrence la polémique contre Kant et ses épigones) ne possède aucune sorte d'antériorité sur le développement de l'analyse logique. Le projet de

³¹ On trouve la critique de la définition projective de la distance dans *Principles*, pp. 425, 427 – et celle des définitions axiomatiques p. 411. Un résumé de la conception d'ensemble est donné p. 428.

Couturat, celui de court-circuiter les médiations conceptuelles pour en extraire la « leçon philosophique », l'« évidence intuitive », n'a, de ce point de vue, aucun sens. La « leçon philosophique » est dans le parcours de l'analyse, et dans les délibérations et les discussions qu'il engendre. Comme le dit Russell à Couturat dans une lettre du 9 juin 1903 (Schmid, p. 297) : « quand vous dites que vous allez vous placer au point de vue didactique, je crains que ce soit l'erreur que vous allez enseigner ».

Appendice : schéma de l'architecture générale des mathématiques selon Couturat (1905b)

Les flèches indiquent des relations de fondation. Le rectangle en pointillé délimite le domaine dévolu aux mathématiques « ordinales ».



Bibliographie

- Burali-Forti C. (1898). Les propriétés formales des opérations algébriques, *Rivista di Matematica*, 6, pp. 141-177.
- Byrd M. (1985). Part I of *The Principles of Mathematics*, *Russell: the journal of Bertrand Russell Studies*, 4, pp. 271–88.
- Boutroux P. (1905). Correspondance mathématique et relation logique, *Revue de Métaphysique et de Morale*, 13, pp. 620-637.
- Coffa A. (1981). Russell and Kant, *Synthese*, 46: 247-263.
- Demopoulos W. (1994). Frege, Hilbert, and the Conceptual Structure of Model Theory, *History and Philosophy of Logic* 15 (2):211-225.
- Gandon S. (2008). Which Arithmetisation for Which Logicism? Russell on Quantities and Relations, *History and Philosophy of Logic*, 29: 1, 1-30.
- Gandon S. (2012). *Russell's Unknown Logicism*, Palgrave MacMillan.
- Hallett M. (2012). More on Frege and Hilbert, *Analysis and Interpretation in the Exact Sciences*, The Western Ontario Series in Philosophy of Science, Volume 78, pp 135-162.
- Hilbert D. (1899). *Les fondements de la géométrie de David Hilbert. Edition critique avec introduction et compléments*. Rossier P. trad., Gabay, 1997.
- Klein F. (1871). Ueber die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie, *Mathematische Annalen*, 4, pp. 573-675.

- Musgrave A. (1977). Logicism Revisited, *British Journal of Philosophy of Science*, 38: 99-127.
- Pieri M. (1898). I principii della geometria di posizione composti in sistema logico deduttivo, *Memoria della R. Accademia delle scienze di Torino*, 48, pp. 1–62.
- Russell B. (1903). *The Principles of Mathematics*, Seconde édition, Routledge, 1992.
- Russell B. (1921). *Introduction à la Philosophie des Mathématiques*, F. Rivenc trad., Payot, 1991.