



HAL
open science

Sur le fil de nos expériences. Saison 1. (2003-2004)

François Conne

► **To cite this version:**

| François Conne. Sur le fil de nos expériences. Saison 1. (2003-2004). 2018. halshs-01695004

HAL Id: halshs-01695004

<https://shs.hal.science/halshs-01695004>

Preprint submitted on 28 Jan 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Sur le fil de nos expériences

François Conne

(Sophie Gobert pour l'édition)

.

- Épisode 1 - **Préambule** ó pp.1-5.
- Épisode 2 - **Antagonisme savoir-expérience** - pp.7-9.
- Épisode 3 - **Nouer une expérience** - pp.11-16.
- Épisode 4 - **Exemples détaillés d'antagonisme savoirs - expériences** : cercles/disques, pliages, symétries - pp.18-36.
- Épisode 5 - **Commentaires de recherche** - pp.38-46.
- Épisode 6 - **Partage de feuilles A4 en moitiés** - pp.48-56.
- Épisode 7 ó **Premiers pliages** ó pp.58-64.
- Épisode 8 - **Pliage d'un carré dans une feuille aux dimensions ordinaires** ó pp.66-73.
- Épisode 9 - **Schémas d'actions/savoir/expérience** ó pp.75-81.

Résumé

19.03.16

De l'ordre dans l'expérience avec de l'expérience.

... l'intelligible naît d'une tentative pour trouver de l'ordre dans le sensible avec le sensible, en repliant pour ainsi dire les uns sur les autres les différents niveaux de la réalité sensible ...

P. Maniglier, *La vie énigmatique des signes*, p. 427

La finalité d'un *savoir-savant* sera l'organisation et le développement des savoirs eux-mêmes, ou encore la transformation des modèles.

F. Conne, 1992, p. 255.

Ces textes ont été rédigés en 2003. Il s'agissait pour moi de faire le point sur des recherches engagées dans l'enseignement spécialisé une dizaine d'années auparavant. Je dois à S. Gobert d'avoir insisté pour que je réunisse ces ébauches d'un projet de feuilleton inabouti. À elle vont mes remerciements.

Les conditions de l'enseignement spécialisé font que beaucoup d'actions enseignantes n'aboutissent pas, et que, bien plus largement encore, les enseignants n'arrivent pas à obtenir de leurs élèves quelque restitution de ce qu'ils y ont appris. Or des enseignements ont eu lieu où on a proposé des choses aux élèves et dans lesquelles ils y ont, peu ou prou, engagé leur activité. Ils y ont donc fait quelques expériences, et ce, quand bien même, les élèves se montreraient peu capables de nous en restituer quelque chose. La question est donc, pour l'enseignant spécialisé, de trouver moyen d'évaluer cette expérience sans avoir à en faire l'objet d'une demande à l'élève à laquelle ce dernier, pour quelque raison que ce soit, ne puisse ou ne daigne répondre.

Cette question rejoignait une autre. Dans la plupart des cas, l'élève de l'enseignement spécialisé accuse un retard dans son cursus scolaire. Ce décalage entre son âge réel et le degré auquel il est scolarisé se traduit entre autres par un décalage entre l'expérience qui est la sienne et celle qui est supposée aux élèves de son degré scolaire. Comment pourrait-on tirer parti de l'expérience "actuelle" d'un élève en retard afin de l'aider à réintégrer le cursus scolaire?

Ceci m'a amené au cours de mes recherches à tenter une piste. Celle de m'enquérir de ce dont les élèves (et enseignants) avec qui je collaborais et moi faisons l'expérience lors de nos interactions. Aborder la question de l'expérience - des expériences de chacun - par celle des interactions qui la supportent.

Mon projet d'épisodes narratifs, tantôt d'observations faites, tantôt du travail du chercheur pour penser ses expérimentations, n'a finalement pas abouti. En effet, il a été débordé par ce qu'il me permettait de réaliser en classes, donnant lieu en particulier à deux grands travaux. Le premier ayant pour thème la géométrie des pavages. Recherche qui a été maintes fois exposée lors de colloques et écoles d'été mais qui n'a été diffusée par écrit que pour quelques birbes et à laquelle est consacrée une série d'épisodes rédigés en 2003 et qui devraient venir compléter cette première partie. La seconde, l'initiation au monde des polyèdres, ayant fait l'objet d'une publication ultérieure.

Ces textes sont une invitation faite aux chercheurs didacticiens et aux enseignants à se questionner sur l'expérience que peut dispenser l'école aux élèves en matière de géométrie. Ils ont à la fois une portée fort ambitieuse : contribuer à la pensée de cette question - et modeste : témoigner d'une manière de penser. Mon principal regret est de ne pas avoir su et pu développer plus d'exemples d'échanges avec les élèves, et ce, alors que la matière ne manquait pas. J'ai été par trop pris du souci de rendre mes manières de faire et de raisonner en vue de ces expériences.

Deux conseils au lecteur : lire ces épisodes séparément et ne pas le faire nécessairement dans l'ordre de leur numérotation actuelle. Qu'il m'excuse pour les nombreuses redondances.

FC

Références

Conne F. 1992, *Savoir et Connaissance dans la perspective de la transposition didactique. Recherches en Didactique des Mathématiques*, 12/2-3, pp. 221-270.

Maniglier P. 2006, *La vie énigmatique des signes. Saussure et la naissance du structuralisme*. Léo Scheer.

Episode 1

29.9.03 - 10.01.16

Préambule

Je vais décrire par des exemples et commentaires un certain type d'expérimentation didactique que je suis venu à développer dans le contexte de l'enseignement spécialisé. Celui-ci tente de raisonner à partir de considérations théoriques que j'ai exposées ailleurs, et sur lesquelles je reviendrai ponctuellement dans certains commentaires. Il s'agit bel et bien d'étayer mes propositions théoriques sur le plan expérimental. Je mentionnerai trois points d'ancrage. Le premier est ce que je dis de savoir et connaissance (Conne 92 et 99). Le second est que je dis que le savoir porte sur les échanges connaissance-expérience (Conne 97 et 98) et le troisième est que la fonction du savoir à laquelle je m'intéresse est une fonction de contrôle (Conne 01-03).

Beaucoup des expériences que je vais relater tournent autour de pliage de feuilles de papier et de découpages. J'ai beaucoup investi ce type de dispositif matériel et les tâches que je développe avec lui mais sans jamais entrer dans le domaine des pliages de type origami et autres.

C'est une enseignante que j'avais en formation qui m'a suggéré des activités de ce type. La première expérience marquante que j'ai faite avec ce matériel fut dans une classe d'adolescents en fin de scolarité (14-18 ans) pour la plupart réfugiés ou enfants de familles réfugiées, venant de pays comme l'ex Yougoslavie, ou la Somalie etc. J'avais recouru au pliage dans le contexte d'une leçon d'introduction aux fractions que leur enseignant avait engagé de la manière la plus classique sur des illustrations « en tranches de gâteaux » etc. La leçon se déroulait mal et j'avais été amené à proposer, en improvisant, une activité de pliage de bandelettes de papier, plus dynamique et motivante. J'avais en tête une relation que je trouve pour ma part très significative, l'égalité : $1/3 + 1/6 = 1/2$ pour laquelle j'avais imaginé une illustration par pliage.

Comme je collaborais à l'élaboration d'une batterie de test dyscalculie, je me suis inspiré de cette leçon pour mettre au point une épreuve d'observation. Mais j'ai surtout prolongé cette expérience par la mise au point d'autres observations portant sur le partage de feuilles A4 (en moitiés, quarts, tiers ou autres). Puis, toujours sur ce même type de dispositif, j'ai exploré des activités géométriques élémentaires. À propos du cercle, par exemple, puis sur d'autres aspects comme la géométrie des traces laissées sur une feuille par certains pliages etc.

Pour toutes ces recherches, je ne dirais jamais assez l'importance du contexte de l'enseignement spécialisé et le travail avec des élèves en difficulté scolaire donc mathématique. (Je ne commenterai pas ici ce *donc*, qui est un fait assez significatif dans le contexte de l'enseignement spécialisé). Je vais consacrer ce préambule à développer un aspect de cette question parce qu'il détermine ma stratégie de recherche et d'expérimentation.

Lorsque j'ai essayé pour la première fois des activités de pliage c'était dans le contexte d'une invitation que m'avait faite un enseignant qui désirait introduire les fractions à ses élèves de fin de scolarité. Vu leur âge ce n'était sans aucun doute pas la première fois qu'on tentait de leur apprendre les fractions. La leçon se déroulait plutôt mal, du moins de mon point de vue, non pas tant du côté des élèves et de leur assiduité toute relative à travailler (toute personne qui travaille en ES a bien dû apprendre à « faire avec »), que du côté de l'enseignement, parce

que je connaissais bien les limites de telles illustrations et les obstacles qu'elles érigent à la compréhension de ce sujet.

Lorsque, en improvisant, j'ai proposé des activités de pliage, la séance est devenue bien plus intéressante pour nous tous. Je ne dis pas cela pour me vanter mais simplement parce que pour chacun, et pour des raisons différentes d'ailleurs, il s'y passait quelque chose. La situation nous ménageait des surprises. Ce que je réussissais n'était pas grand' chose : réveiller ces « grands gaillards » à des petits jeux anodins de pliages. Par exemple, comment exprimer un pliage en trois ? Où faut-il plier ? Ou encore, comment obtenir, par pliage, une portion de moitié de bande sans la plier en deux ? Une autre surprise nous attendait lorsqu'il apparut que pour la plupart de ces élèves, la relation entre le nombre de parts obtenues et le nombre de plis leur était inconnue ! Je pliais comme on le dit couramment : en deux puis en quatre, puis en huit, etc. Plus d'un commençait par anticiper : le nombre de plis plus 1 donne le nombre de parties (1 pli, 2 parties ; 2 plis, 3 parties ; 3 plis, 4 parties, etc. - comme si on n'avait pas composé les plis successifs), puis ils ont corrigé par une relation qui tenait compte des premiers résultats constatés sur pliage : à chaque nouveau pli, une partie de plus (donc 1 pli 2 parties ; 2 plis, 3 parties ; 3 plis, 5 parties ; et, comme on en constatait 8 et pas seulement 5 : 4 plis, 9 parties ; etc.) ; d'autres proposaient de doubler le nombre de plis (1 pli, 2 parties ; 2 plis 4 parties ; 3 plis, 6 parties ; etc.). Bien entendu, du point de vue scolaire on peut s'étonner de tant de maladresse ó qui n'était pas passagère, circonstanciée à des réponses données sans trop y réfléchir ó on pouvait aussi se demander ce qu'ils pourraient bien tirer de leur enseignement des fractions étant donné que des choses aussi simples les perturbaient encore tant. D'un autre côté, il était très encourageant de les voir intéressés et prêts à s'engager à ces petites devinettes, riants devant les démentis de l'expérience et intrigués à voir si ils allaient enfin deviner la réponse.

Il faut bien noter le caractère « secondaire » d'une telle expérience. Elle avait été proposée à titre de remplacement d'une activité défaillante (parce qu'elle dépassait le cadre d'une didactique dépassée, mais aussi parce qu'elle ennuyait profondément ces élèves - et n'enthousiasmait visiblement par leur enseignant non plus). Dit autrement, c'est parce qu'ils ne répondaient pas aux attentes de l'enseignant et de moi-même que je les avais amenés sur un autre terrain, une activité de substitution en quelque sorte. Ceci représentait une prise de risques. Celui de déconcerter les élèves, ou encore celui d'importer des éléments de brouillage, pouvant égarer les élèves plutôt que de les recentrer sur les fractions numériques. Cette prise de risque m'amenait à la nécessité de suspendre mon jugement sur leurs performances, comme si d'ailleurs le seul terrain scolaire étroit serait en définitive légitimé pour émettre un tel jugement. Ce qui veut dire aussi que si j'avais voulu évaluer mon action et le succès ou l'échec de ma prise de risque, j'aurais dû revenir ultérieurement sur des performances plus proprement scolaires. Ce qui veut dire aussi que je me dispensais de viser telle ou telle performance et que par conséquent la situation pouvait jouer tout autrement qu'une situation d'enseignement bien cadrée. Bref, nous prenions le temps de nous amuser à ces petits jeux de pliages en espérant qu'un tel enrichissement de significations soutiendrait ces élèves dans leur apprentissage des fractions.

Cet intermède consistait donc à déplacer l'enjeu d'apprentissage et d'application de règles élémentaires vers celui d'un fonctionnement au travers d'expériences s'enchaînant par rebondissement (de fait, une sorte de sémiotique). C'est là que par la suite j'ai investi mes efforts de recherches expérimentales, celles que je me propose de décrire et d'évoquer avec ce feuilleton. Je précise que je ne me suis pas contenté de faire rebondir ces expériences seulement auprès des élèves de l'ES, mais que j'ai aussi essayé mes idées auprès

d'enseignants, d'étudiants, et de collègues. Et ce, souvent, sur le lieu même de mon expérience avec les élèves, sur la base de ce dont nous avons été témoins.

Dans l'exemple que j'ai évoqué ci-dessus, un enseignant m'avait fait venir dans sa classe pour observer son enseignement des fractions. Tout aussi surpris que ses élèves et moi-même, il a assisté à mon improvisation. Car lui aussi, je le transportais sur un terrain proprement inédit et dans lequel il n'avait jusqu'ici pas investi ses savoirs en matière de fractions ! Certes il savait plier une feuille en trois, comme on le fait dans la correspondance, pourtant, avait-il jamais essayé d'expliquer son pliage à quelqu'un qui ne le comprenait pas ? Je n'en sais rien, mais l'occasion lui était donnée d'assister à la tentative d'explication de tel élève à ses camarades qui n'avaient pas trouvé comment faire. Certes il savait, sans même y penser, que si je plie une feuille en 2, puis à nouveau en 2 (sans déplier), j'obtiens 4, 8, 16, 32 parties. Et il pouvait imaginer que l'on se trompe et prévienne seulement le double de parties : 2, 4, 6, 8 parties ! Mais que quelqu'un propose 2, 3, 4, 5 parties ; ou, en se corrigeant au fur et à mesure des constats : 2 ; 3, ah 4 ! 5 alors ! eh ! non 8 ! alors 9 ? ! Certes il pouvait se dire qu'une fois que les élèves auraient vu cela et l'auraient enfin compris, *ils ne s'en porteraient que mieux*. Toutefois sa propre expérience d'enseignant pouvait aussi bien lui faire douter que ma démonstration puisse sérieusement lui faciliter la mission de leur faire apprendre les fractions. Il pouvait aussi se dire, sans forcément me l'avouer, qu'il ne voyait vraiment pas comment il pourrait rattacher à son enseignement ce qui s'était présenté comme une petite récréation ; et encore moins voir comment une telle expérience pourrait être prolongée. Tout cela parce qu'il ne saurait pas trop comment s'y prendre lui-même pour intégrer une telle expérience aux savoirs des fractions qu'il devait enseigner, trop habitué, comme par effet de sa propre scolarité et de la manière dont on y pratique le savoir, à réduire l'expérience des pliages à une simple grammaire des fractions, trop enclin à appliquer ce savoir à faire taire les divergences fussent-elles produits de l'expérience et de l'impertinence des surprises qu'elle ne cesse de nous ménager !

Dans mes expériences donc j'entends que tout le monde soit engagé. Qu'il le soit à titre d'élève en maths, d'élève dans l'ES, d'étudiant en didactique, d'enseignant de maths, ou d'expérimentateur ne change pas grand' chose à l'affaire. Tout cela et l'âge même ne sont, dans un premier moment, que d'un faible poids devant le simple effet de dépaysement. Il suffit de s'aventurer sur un terrain d'expérience nouveau, resté en marge des savoirs acquis pour se trouver désarçonné. Ou plutôt, car il sied d'aborder la chose de manière plus nuancée, cette situation est à même de provoquer deux choses. Soit une telle confrontation agit en renforcement des attitudes acquises et en particulier l'effort de régler le problème dans le strict cadre des savoirs acquis ó plus on est savant, plus on est enclin à le faire et plus cette réduction est couronnée de succès. Il y a comme un refus de se laisser interpellé. Soit on se trouve perplexe et étonné de constater l'épaisseur et la finesse des choses. La première attitude est de bon sens, je la qualifierai de *saine indisponibilité d'esprit à se laisser déborder par des broutilles*. Elle entend donc rester cantonnée à ses propres limites. Or la limite de ce qu'un enseignant se permettra de faire en classe est à la mesure non seulement des limites de son propre savoir mais aussi, et je crois surtout, à la mesure de sa réaction à l'imprévu et les surprises de l'expérience. Plus mes savoirs seront limités et plus une réaction fermée et guindée de ma part risque d'être inappropriée, mais aussi moins je me donnerai l'occasion d'apprendre de mon expérience. C'est donc contre une attitude de fermeture du savoir que je plaide parce qu'une telle attitude, si elle ne fait que consacrer l'efficacité des savoirs, ne fait que prêter les moins savants ! Il y a là un effet pervers qu'on ne dénoncera jamais assez. Bref on n'apprend pas quelque chose sans s'y ouvrir, c'est bien ce que j'avais tenté avec mes petits pliages pour ces grands adolescents.

J'ai donc pris le parti d'examiner comment apprendre par l'expérience à dépasser les limites de ses propres savoirs, et permettre ainsi que la confrontation enseignante soit l'occasion d'un véritable échange autour du savoir. C'est ce que je me propose de relater au travers d'une suite de descriptions d'expériences menées ces dernières années avec des élèves de l'enseignement spécialisé.

Je ne me suis pas engagé dans une telle entreprise sans certains bagages. Il y a le bagage mathématique bien entendu, et nous avons vu combien la question de son usage est centrale. Je ferais aussi état de bagages épistémologique et méthodologique dans la manière de concevoir, de mener et de prolonger ces expériences. En résumé, toute cette question du bon usage, dans ma démarche expérimentale, de ce que je sais par ailleurs revient à une réflexion sur l'interprétation et une conception du travail expérimental comme un processus interprétatif. Pour cela, je trouve la sémiotique de C. S. Peirce très appropriée, et surtout me semble-t-il, parce qu'il est question de mathématiques et que la sémiotique de Peirce est très parlante pour ce domaine de connaissance. En tous les cas, c'est bien avec une attitude pragmatiste que j'ai abordé ces recherches.

Par exemple, je me suis donné pour règle dans ma démarche de ne chercher que des expériences simples, voulant éviter le plus possible la sophistication des techniques. Voilà pourquoi, dans ce travail, je ne me suis pas lancé dans la culture des origamis, même si je reconnais qu'on peut, avec elle, atteindre le grand art. Ce principe est essentiellement une clause d'accessibilité : je cherche comment tirer profit d'expériences facilement accessibles ó individuellement - pour lesquelles d'ailleurs je puis penser que mes interlocuteurs ont, peu ou prou, déjà eu accès, même si ce fut dans des contextes tout autres. Du point de vue pragmatique et sémiotique, ces contextes et les perspectives sur lesquels ils sont ouverts, changent évidemment les significations et le sens qu'ont pu prendre ces expériences. Ce principe d'accessibilité est donc essentiellement un principe de reconnaissance tourné vers des interprétations et exploitations nouvelles. C'est un principe d'ouverture et une invitation à des développements. Or c'est ici que les choses deviennent dynamiques parce que ces prolongements penchent inévitablement vers plus de complexité, voire dans le pire des cas, vers plus de sophistication. Ce qui va appeler à des remaniements en vue de nouvelles simplifications ou encore en vue de (re)trouver des accès plus directs. Dit en passant, le terrain des pliages est particulièrement bien venu pour de telles réflexions puisque les mots « simple » et « complexe » viennent, paraît-il, du latin *simplex* : *qui n'a qu'une pli* et *cumplex* : *qui a plusieurs plis*. La démarche connaîtra donc forcément des tensions, des remaniements, des ruptures, mais aussi des reprises et des recombinaisons d'expériences. Seule une perspective pragmatiste peut rendre compte de tels mouvements.

Avec ces épisodes je voudrais surtout illustrer la fécondité de la démarche. Depuis que j'ai investi ainsi de petites expériences anodines, les surprises et idées foisonnent. Mes descriptions se voudront principalement évocatrices, je ne sais si j'y arriverai à être parlant, ni pour lesquels de mes lecteurs je le serai. Par contre, je sais ceci : les idées nous viennent de notre ouverture à l'expérience. Ce que je vais raconter importe dans ce que cela pourra éveiller chez mes lecteurs.

Je vous souhaite plein de surprises, d'imagination, d'idées et d'observations propres à nous surprendre à notre tour¹.

Références faites dans le texte.

Conne F. 1992, Savoir et connaissance dans la perspective de la transposition didactique, *Recherches en didactique des mathématiques*, 12 (2.3), 221-270.

Ce texte a été publié en 1996 comme 5ème chapitre du livre: *Didactique des mathématiques* de la collection Textes de base en Pédagogie, pp 275-338, sous la direction de J. Brun, Delachaux et Niestlé, Lausanne, Paris, 1996.

Conne F. 1997, Diffusion des connaissances : savoir et connaissance. 3p

Conne F. 1998, L'activité dans le couple enseignant / enseigné. *Actes de la IX^e école d'été de Didactique des Mathématiques*, sept. 97, Houlgate, ARDM éd.

Conne F. 1999, Faire des maths, faire faire des maths et regarder ce que ça donne, In F. Conne & G. Lemoyne (Sous la dir.) *Le cognitif en didactique des mathématiques* pp. 31-69. Montréal : Presses Université de Montréal. 367p.

Conne F. 2001-2003, Interactions de connaissances et investissement de savoir dans l'enseignement des mathématiques en institutions et classes spécialisées. In Schmidt S. & Maury C. (éds) La spécificité de l'enseignement des mathématiques en adaptation scolaire, *Education et Francophonie*, XXXI (2), automne 2003. Revue en ligne.
<http://www.acelf.ca/c/revue/sommaire.php?id=3#.VvWSTHo0gu>

¹ Note 2016. Finalement, ce projet n'a pas abouti et je n'aurais proposé que fort peu de descriptions, pourtant ce n'est pas la matière qui manquait. Mais je me suis laissé accaparer par mes recherches qui ne m'ont pas laissé le temps à la rédaction de leur narration.

Episode 2

1.10.03 - 11.01.16

Antagonisme savoir-expérience

Tous nos échanges avec autrui sont relatifs à une certaine expérience partagée de la réalité. Si en outre je veux me faire une idée de ce que l'autre sait et connaît, je ne puis le faire qu'en relation avec ma propre connaissance d'une telle réalité. Si en particulier je cherche à savoir en quoi la connaissance qu'autrui a d'une certaine réalité diffère de la mienne, je ne pourrais le faire qu'en découvrant au travers d'une expérience réelle ou mentale une représentation de cette réalité qui n'est pas la mienne, ou bien en modifiant ma propre représentation de cette réalité de manière suffisamment consciente pour arriver à qualifier ce qui a changé. Il n'est impossible d'accéder directement à la pensée, celle d'autrui encore moins qu'à la mienne ; par contre il est possible d'accéder au milieu dans lequel cette pensée s'inscrit. Ainsi donc toute expérience de la réalité me donne potentiellement aussi accès à la connaissance d'autrui ; et autant qu'un travail introspectif m'informe aussi sur la connaissance d'autrui, autant une enquête sur la connaissance de tiers m'informe sur ma propre connaissance. Enfin, toutes nos expériences passent au travers de notre propre acculturation, qui, dès notre prime enfance s'est faite par le truchement de nos relations avec autrui. En ces questions, nous avons toujours affaire à une authentique triade : moi, autrui et notre expérience culturelle de la réalité.

Savoir, connaissance et expérience sont dans des relations dialectiques complexes qui font que si le général schématise et recouvre le particulier, le particulier se singularise¹ en regard du général. De ce point de vue on peut parler d'antagonisme. Dans de nombreux textes, j'ai tenté d'exprimer cela par le truchement de quelques formules : *le savoir dispense de la connaissance* - en insistant sur le double sens que le mot *dispense* peut avoir : *fournir des connaissances*, ou *nous épargner des connaissances*. J'ai aussi dit et écrit : *le savoir nous dispense de tout connaître*, ou encore *le savoir nous dispense de devoir faire l'expérience de tout*, ou encore *le savoir économise de la connaissance*. Etc. Le savoir a donc (aussi) une fonction d'accès, de court-circuit dans les réseaux de connaissances, et par là d'accélération et de généralisation dans les apprentissages.

Ici encore, nous avons affaire à une triade, entre la connaissance (constituée et construite en réseau), le savoir et l'expérience.

Dans mon préambule j'ai exprimé cet antagonisme des deux manières selon que je me plaçais du côté du savoir ou du côté de l'expérience. Ainsi j'ai évoqué *les divergences*, *les surprises*, *les démentis* nous venant de l'expérience. Ici je me mettais du côté de l'expérience. Mais j'écrivais aussi : *la saine indisponibilité de ne pas se laisser déborder par des brouilles*, ou encore *réduire l'expérience des pliages à une simple grammaire des fractions*. Et d'ailleurs, tout ce que j'évoquais des doutes que pouvait avoir (et avait eu) l'enseignant de mon exemple ne fait qu'illustrer cet antagonisme.

Or, il en va tout autant de notre étonnement de constater l'inexpérience de ces adolescents en matière de pliages et de partitions en moitiés, comme il en va de même chaque fois que quelqu'un s'étonne que les élèves ne transfèrent pas ce qu'ils ont appris à des domaines où

¹ Je distingue donc particulier et singulier.

ces savoirs s'appliquent et sont efficaces. L'antagonisme savoir-expérience s'exprime ici sur deux plans.

a) Si le savoir dispense des connaissances encore faut-il une expérience qui supporte un tel processus et le savoir ne se transporte pas comme on s'y attendrait dans le champ de l'expérience. Les processus de particularisation des connaissances nous sont bien plus obscurs que ceux de généralisation.

b) Il faut des savants pour s'en étonner.

Donc, si on considère que les individus qui échangent à propos de leur expérience ont chacun leurs savoirs, cet antagonisme savoir - expérience se prolonge en décalages et oppositions savoir - savoir. Au travers des évocations ci-dessus, soit entre "adultes" : savoir du prof - savoir du chercheur, soit entre : savoir d'enseignants - ignorance d'enseignés. Mais qui peut tout aussi bien se manifester de savoir à savoir. Un exemple très simple sur lequel nous butons constamment dans l'enseignement : cette propension à l'action, à l'activisme que nous rencontrons chez les élèves et encore plus fortement chez les élèves en difficulté. Les élèves veulent faire í **c'est leur savoir-faire qu'ils opposent ainsi aux savoirs thématés** qu'on voudrait voir s'imposer.

Je demande à un élève qui a construit un cube avec 6 plaquettes carrées, combien de plaquettes (de cette taille) il lui faudrait pour construire un cube qui aurait un côté double. S'en suit une « dispute » parce que l'élève veut construire un tel cube et montrer ainsi combien il lui faudra de plaquettes plutôt que de se risquer à me répondre. Ou encore plus retors, un élève me demande de lui donner 15 plaquettes en espérant se lancer dans la construction de son cube et se ménager ainsi la possibilité de me redemander des plaquettes.

Qui n'en a pas fait l'expérience un jour ou l'autre ? Dans l'enseignement spécialisé, et plus généralement dans les échanges avec des élèves en difficulté quels qu'ils soient, cela peut devenir extrêmement difficile à négocier. Car il faut obtenir à relancer l'apprentissage en leur faisant accepter qu'il leur faut basculer du *savoir-pour-faire* au *faire-pour-savoir*, et ainsi de suite.

Ces antagonismes s'expriment par l'intermédiaire de jeux de prise et de pertes de contrôle que les acteurs exercent avec leur savoir sur la situation (Conne 01 - 03), luttés d'autant plus âpres que chacun des acteurs sera par ailleurs en bute à ce que lui oppose le milieu. Là encore, ce sont des jeux à trois (2 interlocuteurs et un milieu) ! Ainsi la position de l'enseignant est fort délicate car il doit négocier différents antagonismes. « Connaître ses adversaires » lui est donc utile. Ceci m'a fait dire (Conne 99) que l'enseignant était forcément preneur de tels savoirs.

Pourtant sur la plupart des sujets que l'on vient à traiter en classe, il faut bien se rendre à l'évidence que ces savoirs manquent ou bien sont difficilement accessibles.

Qui peut dire, là, de but-en-blanc, autre chose que des banalités sur le développement de la conceptualisation du cercle chez les enfants ? Comment nous servir de ce que les psychologues ont pu trouver quant au développement de la notion de moitié chez les enfants ? En l'état actuel, la psychologie est incapable de nous donner des informations complètes sur des sujets aussi pointus et particuliers. Et, entre autres, parce que ses catégories, la manière dont elle découpe les notions et relie les

connaissances, s'affranchissent trop de ceux des savoirs de référence et même des savoirs scolaires. C'est dire combien le problème est difficile. Par conséquent, je ne pense pas que le rôle de la psychologie soit de fournir à la didactique des informations précises sur les contenus, cela me semble hors de portée. Je suis peut-être excessivement pessimiste. Quoi qu'il en soit aujourd'hui nous sommes assez loin de disposer de telles informations et il nous faut, en attendant, faire avec. Je peux surtout espérer apprendre de la psychologie comment trouver, en contexte, la connaissance qui me sera nécessaire. (On retombe sur le rapport entre un savoir et une expérience.)

En explorant le milieu et la manière dont peut se manifester quelque antagonisme savoir-expérience, je puis, dans certaines limites, surseoir à mon ignorance en matière de psychologie. Raison pour autant plus de jouer avec l'élève et apprendre à maîtriser les effets du milieu aussi bien que le fait un tennis man selon ce qu'il sait de la physique des lifts de balle, et de celle des rebonds sur terre battue, gazon ou autres.

Références faites dans le texte.

Conne F. 1999, Faire des maths, faire faire des maths et regarder ce que ça donne, In F. Conne & G. Lemoyne (Sous la dir.) *Le cognitif en didactique des mathématiques* pp. 31-69. Montréal : Presses Université de Montréal. 367p.

Conne F. 2001-2003, Interactions de connaissances et investissement de savoir dans l'enseignement des mathématiques en institutions et classes spécialisées. In Schmidt S. & Maury C. (éds) La spécificité de l'enseignement des mathématiques en adaptation scolaire, *Education et Francophonie*, XXXI (2), automne 2003. Revue en ligne.
<http://www.acelf.ca/c/revue/sommaire.php?id=3#.VvWstHo0gu>

Episode 3

6.10.03 - 11.01.16

Nouer une expérience

Surtout, le savoir et l'expérience ne s'enrichissent et ne se diversifient pas de la même façon ni aux mêmes rythmes ! Le savoir doit se dépasser lui-même sinon il stétiote, patine et s'arrête à des habitudes bien rôdées. Le savoir demande régulièrement à ce que l'on fasse le pas (qu'on abandonne par exemple dans les calculs les comptages élémentaires pour faire appel à sa mémoire, puis qu'on s'aide d'une notation en colonnes etc.)...

On décrit volontiers le savoir comme une construction en étages. Dans cette analogie, le savoir se fonde sur lui-même. En orientant l'organisation de l'enseignement sur une telle logique, on entend assurer la progression dans le savoir par la solidité des bases. Fondation de savoir ou d'expérience ? Il y a longtemps que l'on a répondu en ce qui concerne la lecture : fondation d'expérience. Et en maths ? Bien sûr, il faut aussi de l'expérience, même si les relations expériences / savoirs y sont d'une nature très spécifique (et constitue un problème épistémologique majeur concernant les maths).

Je qualifierai volontiers d'enseignement réussi celui qui arrive à synchroniser les processus de constitution de l'expérience et ceux de construction des savoirs. Pourtant, on ne peut faire l'expérience de tout et certaines expériences viennent faire écran au savoir. Le savoir visé par l'enseignement fait donc òuvre de filtre. Comment peut-il alors se dépasser ? Cette question a été souvent discutée dans le thème des obstacles épistémologiques et didactiques. Le pas se fait et par l'annonce de quelque chose de nouveau dans le savoir et par un appel à l'expérience, appel filtré certes, mais ouverture indispensable.

Les ratés de l'apprentissage sont des ratés de la synchronisation entre construction du savoir et constitution de l'expérience. Il y a ici trois processus interdépendants et pourtant forts distincts : celui de la maturation psychique, celui de la constitution de l'expérience et celui de la construction du savoir. Le savoir va vite, et souvent bien trop vite. Il arrive qu'il s'effondre, momentanément, dès que, pour avancer et sortir de son train-train, il doit faire appel à une expérience qui ne se présente pas, ou alors telle qu'elle fait retomber l'édifice, l'élève semblant tout d'un coup ne plus rien savoir. Dire qu'alors ce sont les bases qui manquent laisse ouverte la question : la maturation psychique, les bases du savoir ou les soubassements de l'expérience ? Commence alors ce que j'ai appelé ailleurs une spirale régressive qui risque de nous mener loin. C'est un des tours que l'expérience joue au savoir, une façon dont l'antagonisme se manifeste.

Pour être tout à fait précis, je dois ajouter que, bien entendu, dans son sillage, le savoir crée de l'expérience, sa propre expérience. Dans mes recherches sur les activités numériques élémentaires, je me suis particulièrement attaché à étudier cette question. Je dois rajouter aussi que le savoir, et le savoir mathématique en particulier, est infime en regard de ce que fournit l'expérience. Je veux dire par là que l'expérience vous fait très vite tomber sur des questions difficiles voire impossibles mathématiquement. Pas besoin de chercher dans les grands problèmes scientifiques, ces petits jeux de nombres entiers qui vous emmènent aux confins des fonctions elliptiques et des formes modulaires¹. Il est assez simple, parce qu'accessible à l'intuition perceptive et logique, de trouver quel est le losange d'aire maximale inscriptible

¹ Il s'agit du Théorème de Fermat bien entendu.

dans une feuille A4 : c'est celui qui a pour grande diagonale celle du rectangle. Pourtant il est moins immédiat de démontrer que c'est bien là le losange d'aire maximale. Tous les mathématiciens sont friands de telles petites énigmes. Le savoir mathématique est schématique, très schématique (dans le langage commun on dit: théorique), ce qui n'enlève rien ni à sa complexité ni à son efficacité.

L'enseignement des mathématiques doit assurer d'une part que les élèves « embarquent », il s'agit d'embrayer le savoir, mais il faut éviter aussi que cela aille trop vite (ou trop vite trop longtemps), ou si vous me permettez de garder cette image, veiller à ce que le moteur ne se mette pas à tourner à vide, car alors tout vrombissant qu'il sera, l'élève n'avancera pas beaucoup. Il faut pour son propre développement que le savoir ait prise sur l'expérience. Je le répète, il s'en assure localement en se donnant prise sur lui-même, prise sur le milieu qu'il se crée dans son développement. En ce qui concerne les élèves, il faut donc des élèves qui soient tout à la fois bien disposés en regard du savoir et d'accord de s'engager dans les expériences qui l'accompagnent. Il faut par exemple que l'élève restitue dans le milieu des éléments acquis dans le savoir pour en faire de nouvelles expériences, et il faut aussi qu'il investisse le savoir de ses propres expériences. À défaut, si les signes du savoir viennent à manquer dans le milieu d'expériences, tout vient à s'écrouler.

L'enseignement des mathématiques à XX se trouvait démunie parce que ce dernier, alors âgé de 8 ans ne faisait pas mine de savoir compter. Pourtant il passait des heures à jouer à des jeux sur ordinateur. L'enseignement était démunie des signes dont il avait besoin pour s'amorcer et il ne les trouvait pas dans les activités annexes de XX. Ses enseignants se demandaient s'il "avait l'invariance du nombre".

Lorsque nous avons travaillé avec YY, 17 ans, qu'on nous avait signalé comme dyscalculique, cet élève avait passé par divers services de psychologie et médicaux, ce n'était pas un cas simple. J'essayais de montrer comment je m'y prenais à une jeune psychologue. Nous avons eu affaire à un élève qui était comme ballotté d'un registre à l'autre de signes, moins perdu à effectuer des calculs comme des sommes de doubles, mentalement, jusqu'à $512+512=1024$, qu'il réussissait du premier coup, qu'à effectuer des calculs élémentaires comme $10+10$ (qu'il arrivait à faire de tête ou en ligne mais en colonne cela donnait 0 et il s'arrêtait interdit devant une telle réponse) ou $99+1$ (qui donnait 110, parce que YY reportait sur l'addition en colonne la règle de multiplication en colonnes où on reprend les chiffres du multiplicateurs sur chaque chiffre du multiplicande). YY ne savait que choisir entre les deux réponses qu'il pouvait fournir à $9999+1$ écrit en colonne : 10000 ou 1111, selon qu'il additionnait par la droite ou la gauche, etc. Erreurs faciles à déceler, mais pour lesquelles justement il semblait n'avoir aucun contrôle (par calcul mental ou toute autre procédure facile). Erreurs faciles à interpréter (confusion dans les règles de l'addition et celles de la multiplication) que l'on rencontre relativement fréquemment chez d'autres élèves. Mais ici erreurs qui nous ont laissé désarçonnés par absence de mises en relations. Par exemple la psychologue qui m'assistait lui avait demandé de répondre à l'item : $6-i = 2$, puis en dessous $5-i = 1$. YY a trouvé les réponses 4, mais n'a pas su expliquer comment il se faisait que cela donne 4 à chaque fois. Nous avons toutes les difficultés du monde à lui faire montrer les relations entre les calculs qu'il faisait ou plutôt qui apparaissaient sur l'écrit. Pourtant nous avons réussi à l'intriguer et dans l'action lui faire faire des explorations numériques très élémentaires, mais c'est comme si pour lui, cela ne laissait pas de traces sur l'écrit, qui alors montrait quelque

chose d'autre sur quoi il perdait prise. Nous avons été finalement fort peu capables d'obtenir de lui qu'en cas d'erreur, même admise de sa part, il se corrige.

La plupart du temps l'enseignant qui veut faire participer ses élèves à la leçon, pose des questions, leur demande de faire certaines choses, puis à partir de là ne cesse d'enchaîner questions et demandes afin d'installer le milieu, de l'aménager, d'y mettre les signes sur lesquels l'expérience va pouvoir poursuivre son cours. Les élèves en difficulté nous désarçonnent lorsqu'ils ne répondent pas ou trop imparfaitement à de telles attentes. On va faire appel à un ailleurs, soit en reculant le curseur des objectifs dans une échelle de savoirs (prérequis didactiques), soit en recourant à des explications d'un autre ordre, psychologiques par exemple (prérequis non didactiques). M'inspirant de ce que les recherches piagétienne nous ont appris à faire, mon projet a été de chercher ces signes dans des expériences mathématiques autres, marginales par rapport à ce que l'on fait en classe, dans un autre découpage des savoirs que leur organisation scolaire. Toutefois, je le fais dans une toute autre perspective que celle des études de psychologie, d'épistémologie ou de sciences cognitives, non pas pour chercher à évaluer des niveaux de connaissance, ou pour valider un montage épistémologique plus proche d'un développement psychique supposé, mais plus simplement et pragmatiquement pour trouver d'autres signes pour nos échanges.

S'agirait-il d'adapter le savoir et les activités d'enseignement ? Je ne suis pas naïf et simpliste. Lorsqu'il s'est agi de travailler avec XX qui à 8 ans ne comptait pas, ou bien d'échanger avec ZZ, qui, parce que mutique, ne nous disait rien, je me suis trouvé devant de sérieux problèmes, tout comme leurs enseignants l'avaient été avant moi. Comment savoir alors comment elle compte et dénombre ? Comment elle se représente ce que vous lui demandez de faire ? Comment interpréter ce qu'elle vous écrit comme égalité si vous ne pouvez pas lui demander de se relire à haute voix ? Comment lui demander comment elle a fait etc. ?

Si momentanément j'ai pu résoudre quelques-uns de ces problèmes, si j'ai pu me souvenir de quelques-unes de nos réponses efficaces, et si quelque fois, j'ai pu croire en détenir une explication, ce n'est pas le cas de tous, loin de là. Je n'ai pas vraiment d'autre réponse à offrir que d'explorer, faire appel à autre chose, surprendre ces élèves à savoir certaines choses dont ils ne peuvent faire état simplement, à la demande.

Par exemple, est-ce que je puis repérer quand tel élève s'appuie manifestement sur les données numériques de la situation qui lui est proposée ? Quand le fait-il avec des quantités conséquentes et pas seulement des petits nombres ? Comment donc produire des signes de numérosité sur lesquels il manifeste des conduites numériques moins frustrées ? Et sinon qu'est-ce donc qui pourrait l'en empêcher ?

Avec XX par exemple, ce fut le travail avec des cartes à jouer. Il jouait à la bataille, et il reconnaissait les valeurs des cartes ordinaires. Avec un jeu de tarot pour lequel les cartes d'atout sont numériques (allant de 1 à 21), j'avais la possibilité de multiples explorations numériques et effectivement nous avons assisté à des conduites parfaites de dénombrement jusque vers 15. Pour un enfant que l'on disait non conservant ce n'était pas mal.

Un autre appel à l'expérience que j'ai tenté avec lui était justement des pliages de feuilles A4, pour un partage équitable entre les 4 participants de notre séance, ce qui nous a amené à des pliages de la feuille en 8, puis en 16, et jusqu'à 32.

Une explication plausible est la suivante : déplacement de l'enjeu. L'accès au nombre n'étant dans les deux cas plus directement dépendant du dénombrement et du comptage, l'enjeu portant sur la procédure de dénombrement et d'énumérations synchrones s'est trouvé allégé. Dans cette affaire la clé se trouvait dans la possibilité ou non de s'appuyer sur des représentations sémiotiques du nombre sur différents registres, afin de *diffusion de connaissance*.

Le déblocage s'était en effet réalisé au moment où j'avais demandé à XX : « dessine-moi cinq ». La question l'avait tellement surpris, que l'on puisse dessiner cinq ! Et pourtant cette question c'était lui-même qui me l'avait suggérée, parce qu'il avait tenu à me montrer son cahier de lecture où il apprenait les lettres de l'alphabet, sur ce cahier, il n'y avait pas encore de chiffres.

Prise dans une maille sémiotique plus riche, la procédure d'énumération n'était plus qu'un élément parmi d'autres, n'était plus le seul et unique moyen de **produire le nombre**. Tout portant moins à conséquence si elle venait à être mise en défaut, elle serait devenue plus disponible.

Pour YY aussi, une décentration des activités de calcul a permis de mettre en évidence une souplesse bien plus grande dans ses recherches et des mises en relations un petit peu moins frustrées. Nous les avons enrôlées dans une activité d'assemblage de tétraèdres et de cubes, afin de faire dénombrer tantôt le nombre de pièces nécessaires pour le doublement des dimensions des constructions, et tantôt les nombres de faces, arêtes et sommets de ces polyèdres et de leurs copies agrandies.

Pour ZZ, nous avons cherché d'autres canaux de communication, pas seulement autres registres sémiotiques, mais aussi d'autres modes de communication que directs de personne à personne.

Les ratés de l'enseignement, s'ils sont trop fréquents font que le savoir tarde à s'ouvrir de lui-même, les choses retombent trop fréquemment. Ce que j'ai qualifié d'écroulement est un processus d'appel à l'expérience qui, au lieu de nous renvoyer sur le savoir, s'abîme et finit par retomber toujours au même point. L'élève qui ne calcule pas nous oblige par exemple à lui donner des jetons ou lui laisser compter sur ses doigts, ce qui joue comme interprétant de sa tâche et le voilà répondant additivement à toutes les questions qu'on lui pose, quelles que soient les données et leur agencements. (Exemple : ces réponses additives à toutes les égalités lacunaires qu'on lui demande de compléter sans prendre en compte la forme de l'écrit et la place de la lacune.) L'enseignement cherche alors une base sur laquelle rebondir, mais cela peut l'amener à plonger assez loin. J'insiste pour dire que de tels mouvements sont souvent passagers, et que c'est sans doute leur fréquence qui sera décisive pour en apprécier le sérieux.

D'un autre côté, l'expérience a son mode propre de développement, d'accroissement et de diversification, relativement indépendant des processus de progression des savoirs scolaires. Il est possible que ce qui soit préjudiciable en cas de difficulté d'enseignement est que les filtres du savoir s'avèrent trop spécifiques, trop fermés, ou plutôt tarissent trop le flux de l'expérience. Par exemple, on insiste ainsi trop vite sur un seul registre sémiotique pour dire et agir sur le nombre, et on le fait tout autant avec les polyèdres réduits à n'être illustrés que par un seul type de matériel ou de dessin. Car ce filtre des expériences dans le savoir n'est

efficace qu'à la condition que les savoirs puissent féconder à leur tour l'expérience ainsi réquisitionnée. Par exemple que les écritures chiffrées des nombres fassent reculer l'horizon des traitements numériques.

Ou encore, cet exemple qui m'a frappé dans la résolution des problèmes de billes : « Laurent joue deux parties de billes, à la première partie il perd 2 billes, à la seconde il perd 5 billes, que s'est-il passé en tout ? ». Ce n'est pas pour tous les élèves qu'il suffit de la simple donnée de ces nombres: "perd 2 billes, perd 5 billes". Pour certains, il faut un moyen ou un autre de se les donner. Par exemple en se disant : « il avait ces deux billes qu'il a perdues, et il n'en a plus », ou encore, « un autre les a donc gagnées », ou encore, tout autre chose : l'élève marque sur ses doigts, une, deux, et puis prolonge à trois, quatre, cinq, et conclut : soit « il manque 3 billes », soit « et encore 3 billes », « il a perdu trois billes encore », soit encore, « il avait cinq billes, $2+3=5$. »

Les savoirs scolaires sont bien pauvres pour rendre une telle richesse d'interprétations, et les mathématiques les tiennent pour non pertinentes. Mes recherches ont défendu la thèse (qui n'est pas si originale) que si on veut exploiter intelligemment ce type de problèmes, il faut alors s'ouvrir plus à l'expérience. C'est avec de telles idées que je me suis donné pour but d'étudier et de mieux comprendre ce processus d'appel et d'exploitation de l'expérience. Et je dois dire que je fus et reste fort intrigué de constater que des élèves IMC qui n'avaient aucune sorte d'expérience matérielle aux jeux de billes proposaient pourtant, eux aussi, de telles interprétations « réalistes » de ces problèmes. La réponse me semble aujourd'hui résider dans la force des évocations narratives.

J'ai abordé cet objectif avec quelques idées que j'ai conjointes.

La première est que en faisant un appel plus large à l'expérience, on arriverait sinon à stopper du moins à ralentir le mouvement régressif dans le savoir.

La seconde idée est que comme ces ratés de l'enseignement ralentissent fortement le processus d'avancées dans le savoir, il serait utile de trouver dans les avancées de la constitution de l'expérience des voies à même de regagner une partie du temps perdu.

La troisième idée est d'examiner cela sur un thème où justement cet appel à l'expérience est explicitement fait dans la grande majorité des textes pédagogiques d'hier autant qu'aujourd'hui, l'enseignement de la géométrie à l'école primaire.

La quatrième idée est que lorsque l'enseignement et l'apprentissage se passent mal, on est amené à chercher des explications externes. Cela ne veut pas dire et de loin pas, externes aux mathématiques et aux expériences associées. On peut sans doute ne pas quitter aussi promptement le terrain de la didactique des mathématiques. Bien entendu, cela suppose que l'on soit soi-même ouvert à chercher des mathématiques ailleurs que dans le cadre très étroit des mathématiques scolaires.

Se demander si un élève est non conservant parce qu'on n'obtient pas de lui les signes du cadre très étroit des activités usuelles dans les petites classes est une question bien hâtive. Sur ce sujet, les psychologues savent se montrer plus circonspects que les enseignants ; mais voilà, ces derniers sont censés faire apprendre. Nous tous, sans exception, sommes plutôt ignorants des expériences en ces domaines élémentaires, et encore plus s'il s'agit de jeunes

enfants ou de handicapés. Non seulement la maturation psychique, mais encore les savoirs acquis nous ont éloignés de ces univers. Aucun de nous n'a spontanément pensé à la différence qu'il y a entre un comptage et un comptage continué. Piaget a négligé cet aspect des choses parce qu'il a tenu à écarter tous les aspects de comptage de ses explications. Il a fallu d'autres travaux pour que nous nous rendions à l'évidence. Plus que tout autre, l'enseignant est confronté aux possibilités qu'il a de recourir, faire appel ou provoquer des expériences chez ses élèves.

Il y a donc pour moi quelque chose à explorer dans l'expérience et un espoir que cela nous aide en cas de difficultés mathématiques, c'est dans ce cadre là que j'ai orienté mes recherches.

Dans les classes de l'enseignement spécialisé que je fréquente, l'enseignement et les leçons ne se passent pas toujours à satisfaction. Il faut toujours que les enseignants fassent montre d'astuces, de patience et d'efforts pour, souvent, des résultats décevants. Il ne faut pas croire que les choses se passent mieux lors de mes entretiens avec les élèves. De tels accrocs, trop fréquents, ralentissent et perturbent beaucoup le processus d'enseignement et d'apprentissage. Dans mes échanges cependant, je tente de compter les coups dans le registre de l'expérience sans m'en remettre entièrement au savoir comme cela se fait en leçon ordinaire. Voilà la différence. Et cette question motive toute ma réflexion sur les rapports du savoir et de l'expérience.

Certes les enseignants relativement insatisfaits de leur leçon vous dirons que néanmoins l'exercice n'aura pas été totalement inutile ayant donné l'occasion à l'élève d'exercer, de consolider etc. certains savoirs de base en deçà des objectifs visés. Dire cela n'est pas faux, mais reste dans la perspective du savoir, cela signifie que l'activité aura été pour l'élève occasion d'une expérience qui au moins a renforcé des savoirs existants. Mais cela ne dit rien sur l'expérience elle-même, et donc n'aidera nullement à y faire appel le cas échéant. Je dirais autrement encore les choses, le savoir reste le médiateur de l'enseignement apprentissage, on pourrait chercher à inverser les choses et faire en sorte que l'expérience le soit et que le savoir contrôle le processus.

Ceci suppose de travailler sur des « noeuds de savoir » en nous appuyant sur des liens sémiotiques, je veux dire des jeux de registres et d'interprétations.

Pour mes recherches j'ai fait le choix de ne pas enseigner. Je voudrais réexaminer cette décision à la lumière de ce que je viens d'écrire.

Episode 4

26.9.03 - 12.01.16

Exemples détaillés d'antagonisme savoirs - expériences : cercles/disques, pliages, symétries.

1° Critique de la manière de considérer les relations savoir - expérience dans les recherches classiques, tant en psychologie qu'en didactique

Je m'intéresse au cercle. Je connais peu de recherches sur le domaine, bien entendu Artigue et Robinet (1982), et quelques bribes d'études en psychologie. Je considère que les mathématiciens savent assez bien ce qu'est un cercle. Par ailleurs je ne suis pas directement intéressé à savoir ce que les psychologues ont trouvé sur le sujet, ni dans leurs recherches sur la perception, sur les coordinations de mouvements, ni même sur les questions de conceptualisation. Certes, je ne puis pas nier toute influence indirecte. D'ailleurs je trouve ce genre d'études passionnant. Mais voilà je ne suis pas psychologue, mon domaine d'étude est l'enseignement des mathématiques. Je ne tiens pas non plus à mettre la charrue avant les bœufs ni partir dans des considérations par trop sophistiquées.

Je ne cherche pas non plus à enseigner les savoirs relatifs au cercle, ou du moins pas à en faire la cible d'un enseignement. Ces savoirs ne me sont pas indifférents, mais je me concentre sur des effets moins directs de l'enseignement. En gros je m'intéresse à l'expérience que nous pouvons nous ménager mutuellement un sujet et moi lorsque nous engageons un échange à propos du cercle. Et si possible un interlocuteur très différent de moi, disons, par ses savoirs. Je m'intéresse à des expériences très accessibles, ce sont donc des expériences dont je puis imaginer que mon interlocuteur aura pu faire par ailleurs, voire spontanément, ou sinon du moins qui seront très faciles à lui faire faire, entre nous. Je ne me désintéresse pas pour autant de ses représentations (pôle psychologique), ou des savoirs dont je suis porteur. Ses représentations ne sont pas l'objet de mon étude, mais elles vont intervenir centralement dans nos propos.

Je pars du principe que la psychologie dans l'état de son développement actuel n'est pas à même de me rendre accessible tout ce qu'elle sait et qu'il faudrait sans doute savoir sur les représentations du cercle, je décide de ne pas attendre que cela soit établi, ni même de considérer cette avancée de la psychologie comme un prérequis indispensable à mon étude. Ma position n'est pas celle d'un naïf en la matière. Mais je décide d'y recourir quand le besoin s'en fera sentir.

En ce qui concerne les savoirs mathématiques sur le cercle, ma position est tout à fait analogue quoi que plus affirmée encore. Ce que je mets en jeu dans les situations et expériences que je propose est en premier lieu mon propre savoir que j'entends faire fonctionner pour les fins que je poursuis (de ce point de vue il y a transposition de ces savoirs).

Je me démarque ainsi d'une recherche didactique standard, que l'on inscrit dans la perspective d'enseigner tel ou tel savoir. Partant d'un objectif clair, et selon la théorie à laquelle on se réfère, on construit un enseignement comportant une séquence de situations qui sont des modèles déjà tout ajustés à ces savoirs, etc. De sorte que toute production et toute conduite dans les situations proposées seront par avance interprétables en termes du savoir visé.

Il convient de bien distinguer deux aspects à cette question. Le premier tient au fait de se donner par avance une cible de savoir que l'on voudra enseigner aux sujets, que la situation aura pour fonction de leur faire apprendre. Le second tient au fait que la réalité à propos de laquelle se tiendra cet enseignement sera un modèle taillé sur mesure pour ce savoir-là. Si les expérimentations de psychologie cognitive se distinguent des expérimentations didactiques sur le premier de ces aspects, elles sont semblables sur le second parce que les études cognitives cherchent des données démultipliées interprétables au regard de savoirs constitués. Ce qui veut dire que dans toutes ces expérimentations, la question de quel usage on fera ou pourra faire des savoirs mathématiques se trouve réglée par avance en amont de l'expérimentation.

En regard de leur manière de penser l'expérience, je qualifierai cette approche commune aux recherches de didactique et de psychologie d'*approche déductive*, pour lui opposer la mienne que je qualifierai volontiers d'*inductive*. Je préciserai ces termes ultérieurement. Le parti pris déductif est insuffisant pour qui s'intéresse aux phénomènes d'enseignement des mathématiques. En particulier, il n'est pas à même d'examiner tous les cas ou toutes les occasions où l'expérience viendrait à échapper au contrôle cognitif du modèle a priori, ou encore de toutes les « récupérations » des conduites de leurs élèves vers des savoirs identifiables, ainsi que les enseignants sont amenés à faire dans l'exercice de leur métier. Cette question est d'autant plus critique qu'en l'état des choses nous ne pouvons pas assurer à nos enseignants un savoir suffisant, ni en mathématiques, ni en psychologie, et que nous ne sommes pas encore capables de nous passer de leurs interventions auprès des élèves pour guider leurs apprentissages. Pour étudier cela, il m'a paru utile de tenter d'apprendre à faire un autre usage de mes savoirs mathématiques.

2° Ce que je propose.

Je pars de l'idée que les élèves ont une certaine expérience du cercle pour en avoir rencontré beaucoup dans leur milieu. Je pars du principe que cette expérience leur en donne une certaine connaissance, représentation du cercle, dans laquelle interviennent :

- a) Des éléments perceptifs que je ne saurais analyser finement : courbe fermée, régulière (quelque chose qu'on pourrait dire "de courbure constante"), ayant des propriétés d'équilibre (symétrie) etc. Si on peut supposer que ces attributs sont sans doute hiérarchisés, ils restent néanmoins relativement indifférenciés. Par exemple, à titre de bord d'un disque, le cercle est forcément fermé.
- b) Des expériences plus pragmatiques, comme rouler un cerceau, un cylindre ou un cône, tenir et tourner un volant, essayer de dessiner ou de fabriquer ó par exemple par découpage - des objets circulaires etc.
- c) Des expériences de relations de cercles avec soit des éléments externes (entre objets à bord rectilignes et objets à bords circulaires) ou constituants (points antipodaux, centres, secteurs, ou angles inscrits etc.).

Je pars du fait que je ne dispose pas de représentation (je ne dis pas que en m'informant je ne puisse m'en faire de meilleures approximations que celles que j'en ai) ni des expériences, ni des connaissances que les élèves auront du cercle. Mais que ces dernières ne me sont pas pour autant inaccessibles.

- a) Elles ne me sont pas totalement inaccessibles parce que les expériences d'autrui et les miennes se recoupent et que par conséquent, sur le champ où elles se recoupent, et moyennant l'accès à ma propre expérience, je puis trouver un accès. Cela pose la question de l'accessibilité à ma propre expérience qui bien entendu est fonction de mes connaissances et savoirs actuels
- b) Elles ne me sont pas totalement inaccessibles parce que je puis me faire une représentation de ce que le milieu peut occasionner comme expérience aux sujets.
- c) Elles ne me sont pas inaccessibles parce que je puis susciter chez des sujets de « nouvelles expériences » avec ces objets, entrant alors dans un processus d'actualisation d'expériences passées via les assimilations que ces actualisations susciteront.

Dès le moment où je vais interagir avec un sujet à propos des cercles, c'est-à-dire à propos d'objets et d'actions tenues sur ou à propos de ces objets, je mets en œuvre chacun de ces trois types d'accès, là encore de manière relativement indifférenciée.

Je me pose la question de cette différenciation, c'est-à-dire de donner à l'expérience que je vais tenter de faire à propos de l'expérience de sujets sur le cercle le moyen de me faire une représentation plus différenciée de ces accès. En effet, la question du recouvrement interindividuel des expériences peut bel et bien être considérée comme un travail de différenciation. De même la question de l'actualisation des connaissances antérieures dans une nouvelle expérience est, elle aussi, exprimable comme une question de différenciation à l'occasion de processus d'assimilations et d'accommodations.

Exemples.

Pour vous permettre de vous faire une idée de mes recherches je vais prendre deux exemples d'observation. Le premier sera une observation récente, 2003, faite à propos du cercle avec une enseignante. Le second sera une observation de septembre 1998, faite avec une élève de l'ES - âgée de 8-9 ans et dont je me suis inspiré à la fin de l'entretien plus récent - avec l'enseignante. Ce second exemple ne porte plus sur le cercle. De fait, telle avait été mon intention, mais une difficulté imprévue de l'élève m'avait amené sur un autre terrain, celui des pliages. Voilà un cas de *tour-joué-par-l'expérience-au-savoir*, qui illustre parfaitement le caractère antagoniste que peut prendre parfois leurs relations. (Néanmoins, avec cette élève, ce ne fut là qu'un détour et ultérieurement j'avais pu recentrer nos échanges sur le cercle.)

3° Premier exemple: Observation avec une adulte enseignante.

Cadre de l'échange.

Ici, il s'agit d'échanges avec une enseignante relativement naïve en géométrie portant sur le cercle. Le cadre dans lequel se déroule cet entretien fait que d'entrée de jeu il sera question d'élèves. Pourtant je me donne trois clauses à ce type d'échanges.

- Une première clause que je mets à ce type d'échange stipule qu'il ne s'agira pas d'échanges directement dévolus à l'enseignement et l'apprentissage du cercle.

- Une seconde clause sera que ces échanges que nous aurons pourraient tout aussi bien se tenir tels quels entre un adulte, enseignant ou expérimentateur, et un ou plusieurs élèves, là encore sans visée directe d'enseignement/apprentissage.

- Une troisième clause sera que cet échange sera aussi dissymétrique que peut l'être un échange enseignant / élève, ou psychologue / sujet : non seulement leurs savoirs, connaissances, bagages expérientiels ne seront pas comparables, mais encore, s'ils partageront une certaine expérience, ce ne sera pas du tout dans la même perspective.

Récit d'un échange que j'ai tenu récemment avec une enseignante d'une classe spécialisée, de niveau primaire élémentaire.

Elle a fait des études jusqu'au baccalauréat, dit ne pas être à l'aise en maths. Elle a fait des études de pédagogie curative. Je la rencontre pour lui évoquer ma manière de travailler. Je lui parle de mon intérêt pour le cercle et lui fais part de surprises que j'ai eues sur cette question dans mes échanges avec des élèves et des étudiants. Je ne sais pas grand-chose de l'expérience qu'elle a des cercles, ni de ce qu'elle a retenu sur ce sujet à l'école.

3.1 dessiner un cercle à main levée.

Je table néanmoins sur l'expérience que je lui suppose pour lui demander de me dessiner à main levée un cercle sur une feuille de papier. Ce n'est pas un bien grand pari de ma part et, de fait, elle comprend ma demande, la question lui est familière, et elle s'exécute exactement comme je m'attendais. Sa familiarité avec la tâche fait qu'elle ne commente pas son dessin. La demande de dessiner le cercle à main levée laisse entendre implicitement que je ne m'attends pas à un résultat parfait.

À partir du moment où elle a produit un dessin qu'elle juge acceptable, je puis intervenir sur la trace laissée sur la feuille.

Par exemple, je remarque que, globalement parlant, la courbure est assez régulière, pas de bosses trop marquées, mais aussi pas de dissymétrie trop voyante (je reviendrai sur cet aspect). En outre, la courbe se referme bout à bout (pas de croisement de son trait). Au voisinage de sa fermeture, la courbe s'aplatit légèrement, témoignant du fait que sur la toute fin de son tracé, mon interlocutrice a rectifié son trajet afin de bien revenir à son point de départ, etc.

Par la simple observation de son tracé (autant en train de se faire que son résultat), je puis me faire une idée de quelques-unes des représentations à l'œuvre dans son exécution. C'est une interprétation bien sûr qui consiste pour moi à identifier certaines représentations qui me sont propres, en particulier de ce que j'aurais pour ma part retenu à m'observer moi-même en train de dessiner un cercle à main levée, à certains signes qu'elle laisse sur le papier. On pourrait parler d'une interprétation d'un *possible partage* de nos représentations respectives.

Il faut bien comprendre ce que, ci-dessus, j'entends par *possible*. Le partage n'est pas attesté par ce qui est advenu, et **je ne tire pas de l'observation une hypothèse explicative de ce qui s'est passé, mais une hypothèse pour guider mes interventions futures** : ce que j'observe peut me mettre sur la voie de quelque partage à venir. Ces mises en relations, je les fais pour moi de manière plus ou moins explicite

et formulée. Si, en outre, j'oy pense et repense volontairement et si, a fortiori, j'en fais état dans mon échange avec mes interlocuteurs, alors ces mises en relations auront pris corps, je les aurai signalées, et de ce fait elles vont agir à titre d'interprétants rhématiques des traces laissées par la personne dans l'exécution de son dessin.

On voit donc se détacher un des aspects de représentation du cercle, à savoir que c'est une courbe fermée, et son articulation avec d'autres aspects dont il se différencie progressivement comme celui de la régularité de cette courbe ou du caractère non dissymétrique de sa forme, etc.

Si je me centre sur la fermeture de la courbe, je puis proposer de nouvelles expériences de dessin à main levée. Un exemple parmi de multiples autres, je puis demander à mon interlocutrice de me dessiner un demi cercle, puis, celui-ci étant tracé, de me dessiner la moitié qui le complète. Si je choisis de me centrer sur un autre aspect de la représentation à l'œuvre dans le tracé, par exemple un jugement de forme, je puis demander au sujet de tenter un nouvel essai, ou plutôt de procéder à quelques corrections du dessin produit, ou encore de me dire ce qu'il ferait pour l'améliorer. En outre, je pourrais jouer sur le caractère plus ou moins explicite de ma question - et donc plus ou moins différencié - en lui demandant par exemple si pour améliorer le dessin, il pense qu'il préférera dessiner un cercle plus petit ou au contraire plus grand. Ce faisant je suggérerais quelque chose en rapport avec un autre aspect de la représentation du cercle qui est sa courbure. Ainsi, le sujet peut en effet s'imaginer être plus performant en jouant sur *retourner plus vite sur ses pas*, ou au contraire *adoucir la courbure*. À ces considérations viendront s'ajouter des considérations de contrôle, par exemple celui de la régularité du mouvement, soit dans un geste rapide, soit dans un geste très régulier, ou, autre exemple, celui de l'anticipation de l'emprise sur la feuille de l'anticipation de la courbe finale etc.

Bien entendu les réponses des sujets sont susceptibles de varier grandement, aussi bien entre différents sujets que pour un même sujet, selon les circonstances, ou encore selon le cours de l'expérience elle-même. Une étude systématique pourrait en dresser le catalogue et être fort instructive, quoi que ce ne soit pas non plus certain. Voilà des questions pour psychologues. Pour ma part, je resterai donc prudent et ne vais pas trop faire de cas de cette réponse pour qualifier la représentation que la personne se fait du cercle. En ce qui concerne mes interlocuteurs je me contente en fait de contrôler qu'une certaine expérience aura été faite. De fait, c'est donc la qualification de l'expérience qui m'importe, plus que celle de ce que le sujet aura pu en retirer. Ainsi je dispose désormais d'une esquisse d'expérience à même de faire jouer des questions de courbures et je disposerai de quelques informations vagues sur la sensibilité de mes interlocuteurs à cet aspect et dans ce contexte précis.

Ici, je n'irai pas plus loin dans les développements possibles de ces expériences de tracé à main levée. Je sais que l'on peut exploiter bien mieux encore ces idées, mais mon propos n'est pas de vanter ici les vertus géométriques du dessin à main levée. Ce qui m'importe plus sont les développements de ces petits moments expérimentaux, en fonction de ce qu'ils produisent. Je vais donc poursuivre mon exemple en vous montrant une manière d'infléchir l'expérience ainsi engagée, et ce toujours dans une perspective de différenciation des représentations du cercle.

3.2 découper un cercle dans une feuille de papier.

Je propose donc de changer de registre de tâche et je demande maintenant à mon interlocutrice de bien vouloir découper un disque dans une feuille de papier standard (par exemple A4), et, ce, du mieux qu'elle peut. Bien entendu la tâche change mais la mémoire de la tâche précédente reste (implicitement au moins, pas nécessaire que quoi que ce soit vienne la rappeler à nous), ce qui, forcément, nous engage, elle et moi, à observer ce qui va se passer. Nous disposons des traces dessinées et de ce que nous avons pu capter des conduites de tracé comme éléments de relations et de comparaisons. Au cours de l'expérience nos propres représentations ont évolué et nous abordons ce moment avec des critères bien plus différenciés que précédemment. Bien entendu nos représentations respectives ne se recoupent ou se rejoignent que très partiellement. Il en va de même du sens que prend à nos yeux notre échange.

Elle accomplit donc un découpage et garde en main un disque de papier. Je l'observe faire et constate, par exemple, qu'elle fait tourner sa feuille (plutôt que sa paire de ciseaux). Cela se comprend relativement à la tâche prescrite. Mais, si l'on veut bien comprendre en quoi notre nouvelle tâche diffère de la précédente, cela ne doit pas nous faire oublier que cela contraste totalement avec l'expérience précédente, puisque alors au contraire elle avait bien pris soin de maintenir sa feuille (et avait même dans cette intention évité de trop peser sur son stylo).

Lorsque plus tard je lui demanderai de me dire ce qui, selon elle, a été différent au cours de ces deux expériences, elle ne mentionnera pas le fait qu'elle ait tourné sa feuille, par contre elle me dira que le découpage se fait "en trois dimensions". Comme je lui demande de m'expliquer ce qu'elle veut dire par là, elle déclare qu'elle a produit un morceau de papier. Ceci est un bel exemple de représentation non différenciée où tout à la fois on trouve : l'idée que pour le découpage on doit soulever la feuille de la table, qu'un morceau de papier ne se détache du reste de la feuille où on le découpe que "dans la troisième dimension", ou encore que la feuille a alors deux faces et les ciseaux agissent "des deux côtés à la fois", alors que le stylo intervient sur le dessus de la feuille uniquement, ou encore que sa découpe aura produit un bord circulaire, celui du disque qu'elle garde en mains, et pas une ligne de tracé etc.

Je vous livre ici des formulations, fort maladroites au demeurant, d'aspects potentiellement recouverts par cette expression : "on est dans la troisième dimension". Toutefois, je n'attribue pas ces "représentations à mon interlocutrice", ce sont des représentations personnelles dans mon interprétation de ce qu'elle me déclare. Je ne prétends pas non que qu'il soit nécessaire ni pertinent de faire tous ces distinguo. Tout cela reste à considérer pragmatiquement en fonction du contexte et du tour que pourront prendre nos échanges.

Je souligne tous ces aspects qui n'ont même pas été exprimés par le sujet, ni, sur le moment, par moi-même. Notons au passage que nos représentations respectives se ressemblent par leur caractère bien peu différencié.

Je veux maintenant mentionner un autre lien entre les deux registres d'expériences de tracé de cercle : dessin de cercle, découpe de disque. Dans un cas comme dans l'autre, l'action et le jugement du résultat sont sous des contrôles perceptifs relativement similaires. (Certes, si on affine les choses, on ne manquera pas d'observer, dans le cas de la découpe que le sujet incline la tête comme pour suivre/anticiper le mouvement de ses ciseaux).

J'ai aussi pu observer une autre différence concernant cette fois-ci la manière que le sujet a eue pour boucler sa courbe.

Constatant que son découpage "tournait trop serré", le sujet a fait une découpe spiralée, c'est-à-dire qu'elle a découpé son papier sur plus d'un tour complet, et ce, afin de rejoindre tangentiellement les deux bouts. Il y a eu donc une toute autre manière d'obtenir une fermeture que lors du dessin. En fait si le bord du disque ainsi découpé était bien rond, donc assimilable à une courbe circulaire simple (quoique jugé moyennement satisfaisant car la forme présentait une dissymétrie évidente), il n'en a pas été de même de la trace laissée par les ciseaux dans le morceau de rebut. En gros celle-ci avait la forme d'un six. Mais comme elle s'est focalisée sur le disque obtenu et avait négligé la chute de papier, elle n'a pas relevé cet aspect (qui n'a pu lui échapper). Produire un cercle voulait dire surtout produire le bord d'un disque, bien plus ou avant que d'être celui du bord d'un trou.

Ce qu'elle me proposait comme réponse à ma question était bien significatif d'une représentation. On peut donc mesurer ici quelque chose de l'ordre de la différenciation. Là encore il est facile d'imaginer et même à chaud une relance de l'expérience, mais à nouveau je préfère ici vous proposer une bifurcation.

3.3 découper un secteur de cercle dans un feuillet de 8.

J'ai demandé alors à mon interlocutrice si elle pensait mieux s'en tirer en découpage si elle pliait préalablement sa feuille en deux, en quatre, voire en huit.

Pour en avoir fait l'expérience préalablement et en avoir été fort surpris, je dirais que c'est une idée toute théorique que je me suis forgée lors de ma scolarité. Pour ma part, je trouve assez difficile de découper un demi-cercle sur une feuille pliée en deux (le diamètre étant dans le pli). Par contre si le secteur est relativement petit je me faisais l'idée que ce serait plus simple de découper ainsi un arc de cercle, pensant plus aisé de "faire rond moins longtemps". À cela s'ajoutaient deux aspects de représentation. Tout d'abord d'une expérience à main levée, celle de dessiner un cercle en le segmentant en plusieurs arcs de cercles. Dessin impossible à réaliser ce qui m'amène à préférer un dessin à main levée d'un seul geste. Je me disais donc qu'avec l'astuce du pliage, et le découpage qui au contraire du dessin traversera mon feuillet de part en part, il me suffira de faire un seul arc de cercle, et "le tour sera joué"! L'autre élément de représentation provenait de ce que je sais que la découpe d'un cercle se fera perpendiculairement aux rayons, et que je pourrais donc penser arriver à contrôler perceptivement ma découpe, non seulement dans la direction de ma première entaille, ou celle de mon arrivée, mais encore en continu, pour autant qu'elle se fasse sur un secteur d'angle relativement fermé. Bien entendu ces idées sont sinon farfelues, du moins bien théoriques. Et j'ai bien ri lorsque passant à l'acte sur un secteur de 45° et relativement satisfait de mon arc de cercle, j'ai constaté le résultat déplié.

Avec mon interlocutrice ma surprise aura été autre. En effet si elle imaginait bien faire une découpe en demi-cercle (je rappelle que je lui avais demandé de dessiner un cercle en deux moitiés) et si elle était relativement satisfaite du résultat et si elle donnait des indications pertinentes pour corriger les défauts, elle a dit ne pas arriver à s'imaginer découper un cercle à partir d'un pliage en 4 et encore moins en 8 ou 16 !

Elle disait ne pas disposer d'image mentale lui permettant de voir comment les arcs allaient se mettre bout à bout.

J'ai alors pris une feuille pliée en secteur de 45° (pliée en 8), et lui ai demandé de guider ma main dans la découpe. Il est apparu qu'elle n'avait pas d'idée précise sur l'angle d'attaque de la découpe. Et lorsque je lui demandais si, selon elle, un ou plusieurs angles d'attaque pourraient convenir, elle m'a dit ne rien en savoir ! Finalement elle m'a indiqué une découpe et guidé ma main, juste pour voir ce que cela donnait. Elle n'a pas voulu se prononcer sur le résultat. Nous avons déplié et trouvé une jolie forme, ... comme une fleur, à 8 pétales, ou ces napperons que l'on trouve fréquemment sur les sous-tasses de nos tea-rooms.

Je ne sais si vous reconnaîtrez la forme, mais vous n'aurez qu'à essayer par vous-même.

Le fait est que mon interlocutrice qui disait ne pas pouvoir imaginer découper un cercle à partir d'un secteur a tout de suite reconnu cette forme de napperons, se souvenant de les avoir déjà rencontrés. Cela dit mon interlocutrice pouvait facilement identifier ce qui faisait que nous n'avions pas obtenu un disque (des joints non « tangents » entre les arcs de courbes, mais se répétant bien entendu régulièrement), ainsi que le moyen qu'elle pourrait envisager de lissage de la forme afin d'obtenir quelque chose de plus rond. Là encore un travail de différenciation de la représentation tout à fait banal mais remarquable justement dans son caractère quasi instantané.

Je relate cette nouvelle tournure de l'expérience pour une autre raison aussi, plus prometteuse, relativement aux représentations mathématiques.

À deux reprises déjà, j'ai insisté sur le fait que la forme de cercle se caractérisait par une absence de dissymétrie. Mathématiquement, on caractérise le cercle comme une figure qui comporte une infinité (continue) de symétries, serait-ce équivalent de dire qu'elle ne comporte aucune dissymétrie ? Car ce qui est perceptivement critique semble bien être cette dernière propriété, qui d'ailleurs se conjugue avec celle d'une régularité parfaite. Par contre, ce qui fait la particularité du napperon, c'est le fait que lui, eh bien il présente une multitude de symétries ! On entrevoit donc là encore d'autres développements, d'autres tours que pourra prendre notre échange. En particulier des développements vers d'autres figures géométriques toutes aussi fabuleuses que les cercles, je veux dire les étoiles (et, plus généralement, les polygones).

Je terminerai ma narration sur une toute autre surprise que m'a occasionnée cet entretien, surprise que je puis même qualifier de "surprise au carré" parce qu'elle a ramené notre échange exactement là où m'avait amené une élève psychotique passablement retardée sur le plan scolaire à propos de cette même expérience.

Comme mon interlocutrice me disait ne pas arriver à imaginer un moyen de découper un cercle dans une feuille pliée en 4 ou en 8, puis qu'à un autre moment de l'entretien, je lui ai demandé de guider ma main dans un découpage de secteur 1/8. Entre temps, il a bien fallu plier la feuille en 8. Une feuille de dimension A5.

J'ai donc, pris une feuille A5, l'ai pliée en 4 de manière standard, puis en 8 en rabattant un coin (à 45°). J'ai demandé à mon interlocutrice de faire le même pliage

que moi. Elle m'a dit ne pas m'avoir très bien vu faire, puis m'a demandé de lui montrer mon résultat. Elle a eu quelque difficulté à arriver à reproduire mon pliage, tantôt elle se concentrait sur la forme finale produite, et cherchait à la copier, tantôt elle se basait sur ce qu'elle avait retenu de mon action de pliage qu'elle cherchait à reconstituer. Je ne tirerai pas grand-chose du constat de cette confusion quant aux possibilités de mon interlocutrice si ce n'est qu'elle n'avait manifestement pas une grande habitude des pliages. En un mot elle n'était pas à l'aise dans ce type de tâches. Je ne puis m'empêcher de faire une relation entre cette non reconnaissance, momentanée sans doute, avec cette impossibilité qu'elle avait à imaginer découper un disque à partir de la découpe d'un secteur circulaire sur une feuille repliée en 4 en 8 ou plus.

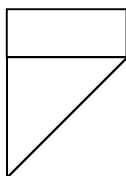
Dans le cas présent, mes propositions agissaient comme une initiation - qui n'est rien d'autre, justement qu'une mise en partage d'expérience.

Dans cet entretien de 2003 s'est reproduit quelque chose que j'avais pour la première fois pu observer en septembre 1998 avec une élève de 8-9 ans de l'enseignement spécialisé. Dans le même but de lui faire découper un secteur circulaire dans une feuille ainsi repliée, je lui avais présenté le pliage que je viens de décrire. Je me suis alors trouvé pris en flagrant délit de ne pas disposer de représentations suffisamment fines et différenciées de ce que je lui demandais de faire, et fus porté de surprises en surprises. Ce qui aurait dû être un apprentissage de routine s'est avéré hautement problématique pour l'élève. Et par la suite, au lieu de nous intéresser au cercle, nous nous sommes concentrés sur les figures laissées par les plis.

4° Récit d'un échange de 1998 avec une élève d'une classe spécialisée, de niveau primaire élémentaire.

Avertissement : Ici le lecteur aura énormément de difficultés à comprendre ce qui est relaté si il ne se met pas lui-même à tenter de reproduire les pliages et de comprendre les termes que j'utilise pour les décrire, comme par exemple : cornet.

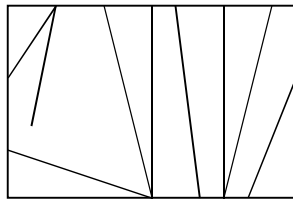
Dans la perspective de découper un disque de papier, il s'agissait de plier une feuille A5 en "secteur" de 45 ° ou si vous préférez "en cornet".



J'avais donc plié une feuille en 4, obtenu un feuillet A6, et ensuite plié à 45° (par rabattement bord sur bord de coin, de sorte que le pli se marque comme bissectrice des deux plis précédents). Ce qui donne un feuillet ayant un coin retourné, de forme d'un trapèze rectangle, à 8 feuillets sur la partie "en pointe" et à 4 feuillets sur la partie "rectangulaire" qui dépasse. Ce n'est plus tout à fait aussi simple que précédemment mais on pourrait dire que pour l'obtenir on plie deux fois en deux en largeur, puis une fois en deux en pointe des plis.

J'ai présenté mon feuillet à S. en lui demandant de bien vouloir l'examiner pour arriver à s'en confectionner un tout pareil.

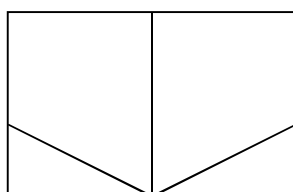
1er pliage. Elle prend mon modèle, l'examine, le déplie, puis le replie, pour ce faire la feuille et les marques des plis guident ses gestes. Puis elle garde mon modèle déplié, prend une feuille la plie en deux en largeur (comme je l'ai fait) et, première surprise, déplie ce qu'elle a fait. Elle ne compose donc pas deux plis de moitié. Puis elle cherche à obtenir des plis en biais de sa feuille. Le modèle qu'elle a sous les yeux présente un dessin de plis en étoile (4 droites concourantes à 45° et 90°) au centre de la feuille. Elle tâtonne, fait plusieurs tentatives (7 ou 8) plus ou moins marquées de plis en travers de sa feuille mais sans qu'aucun de ces plis ne se croisent - alors que la figure d'étoile de mon modèle est obtenue par le croisement de 4 plis. Il semble qu'elle essaye de reproduire à la fois des plis en biais, certains non parallèles au premier pli obtenu, 2 ou 3 plis de coins, et 1 ou 2 pliages "en pointe". Lorsque je lui demande de me montrer ce qu'elle cherche à faire, elle me montre le dessin de l'étoile, mais pas tant les branches de l'étoile que figurent les plis, que les angles que font deux branches adjacentes vers le centre. Elle abandonne.



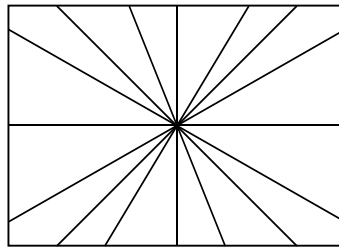
2ème pliage. Je lui propose un second essai. Elle commence alors par un pli de biais, repliant le coin droit inférieur. Son pli traverse toute la feuille dans sa largeur. Elle n'est pas satisfaite du résultat.



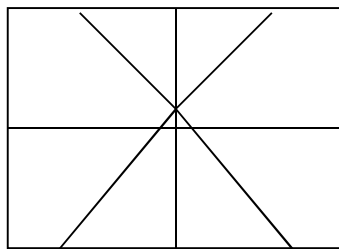
3ème pliage. Je lui propose un troisième essai. Elle plie sa feuille en deux en largeur - comme au premier essai et comme je l'ai fait et comme mon modèle se replie « de lui-même ». Puis elle rabat le coin gauche inférieur, grossièrement, pas à 45°. (Mon interlocutrice enseignante a fait exactement de même dans une de ses tentatives !) Lorsqu'elle déplie sa feuille elle n'a toujours pas un dessin d'étoile mais une figure de flèche évasée, dont la pointe se trouve sur le milieu du bord inférieur - 3 plis concourants au milieu du bord de la feuille, un vertical et symétriquement à ce premier pli, deux faisant environ 30° avec le bord de la feuille.



Nous avons alors une discussion, je lui demande de me dire la différence qu'elle fait entre copier et imiter. Elle me dit : « on copie des autres et on imite une personne », ce qui n'est pas ce que je voulais suggérer. Par une démonstration sur mon modèle que je plie et déplie, je tente de lui faire sentir la différence entre la reproduction des actes de pliages ou la reproduction de la figure des plis. Puis je prépare sous la table une feuille en la pliant, afin qu'elle ne puisse pas voir mes mouvements, je refais le premier pliage, mais plie encore une fois selon la bissectrice, j'obtiens un pliage "en cornet" dont la pointe a 22.5° . Je lui présente mon modèle déplié, les plis présentant un dessin étoilé à 16 branches au centre de ma feuille. Et je lui demande si elle arrivera à copier ce dessin par un pliage.



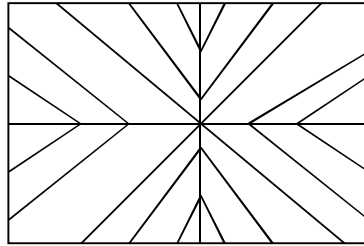
4ème pliage. De là, son premier essai consiste à effectuer un premier pli correct ainsi qu'un second transverse, lui aussi correct, cette fois elle a plié en quatre. Elle déclare que c'est facile. Mais surprise ! Elle déplie alors son second pli, et sur le feuillet en deux, elle rabat les deux coins inférieurs (si on suppose que le pli du feuillet est le bord de longueur inférieur). De plus elle effectue ces deux rabats l'un sur la face supérieure du feuillet et l'autre sur sa face inférieure. En fait le dessin que font les plis sur le feuillet sont en forme de flèche, tout comme précédemment. Mais comme le feuillet peut être déplié, elle obtient enfin une croix centrale à 8 branches - hélas pas à 16 comme le nouveau modèle qu'il s'agit de reproduire. Elle fait alors une seconde tentative.



Notons ici une observation très importante. Tous les plis que je fais sont effectués « bords sur bords », elle respecte ceci pour ce qui concerne les plis transverses parallèles aux bords de sa feuille, mais pas pour les plis en biais ni pour les rabattements de coins. Ce qui fait que ses plis ne sont jamais à 45° ni même en bissectrices de l'angle dans lequel il est fait.

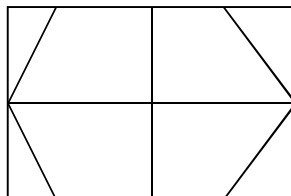
5ème pliage. Dans un second essai, elle plie en 4 puis sur le quart - enfin - elle plie en rabattant un coin, et cette fois bord à bord. Elle rencontre quelques difficultés de pliage avec l'épaisseur du feuillet. Puis elle déplie ce troisième pli, retrouve le feuillet rectangulaire (quart), et sur celui-ci, effectue un nouveau pli par rabattement du coin supérieur gauche, mais cette fois pas bord à bord. Elle obtient une sorte de cornet dont un bord dépasse, qu'elle rabat encore par enroulement. De sorte que, une fois

déplié le tout, les marques de ses plis convergent tous grosso modo sur le centre de son étoile.



Elle obtient en fait une étoile à 12 branches (en fait on dénombre 24 plis, mais 8 d'entre eux ne convergent pas exactement vers le centre de l'étoile) ce qui ne donne pas une impression aussi nette d'étoile que mon modèle. Cela provient du fait que j'ai toujours plié bord à bord et que cela m'est possible parce que j'enchaîne les plis sans déplier. Elle a fait de même pour ses 3 premiers plis, mais comme elle a déplié le 3ème avant de faire le 4ème, par rabat du coin, elle ne peut pas replier bord à bord sans refaire le même pli que précédemment - et alors elle ne peut obtenir plus de 8 branches à son étoile. Elle accommode son pliage au résultat cherché en tentant alors d'obtenir un cornet tel que celui du modèle, ce qui l'amène à faire 2 plis supplémentaires, et, par conséquent, 16 marques de plus sur la feuille dépliée (en tout 8 + 16, 24), dont 8 de trop, qui plus est non concourantes au centre.

6ème pliage. *Sa dernière tentative va nous ménager une surprise de taille et lui faire abandonner la partie. Elle plie en 4 comme le modèle, puis effectue son troisième pli par rabattement d'un des coins, mais, ayant rabattu le coin opposé au centre des deux premiers plis, la figure obtenue une fois dépliée le tout n'est plus en étoile.*



On voit combien il est difficile de contrôler les plis que l'on fait lorsqu'on effectue un pliage. Quiconque aura tenté de faire des pliages le sait d'expérience. À l'époque je n'étais pas du tout au clair sur ce que demandait cette tâche. Mes représentations étaient bien trop schématiques.

Le premier problème que cette élève a dû surmonter est de produire des plis de biais par rapport aux bords de sa feuille. Ce n'est que progressivement et par observation de mon modèle qu'elle a appris à les obtenir par rabattement d'un coin. Et là encore ce n'est pas tout de suite qu'elle a rabattu le coin bord à bord, produisant alors un pli bissecteur (donc à 45°).

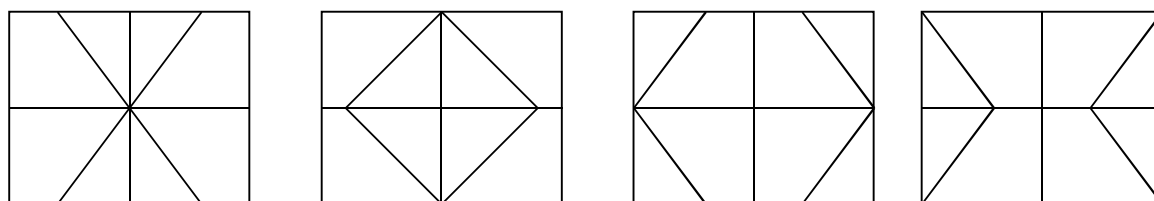
Le second problème et qui ressort très nettement dans cette observation c'est de savoir si les plis que j'ai effectués se combinent à la chaîne, les uns à la suite des autres sans déplier ou si il convient de déplier. C'est lié aussi à une question d'ordre. Ce qui est notable est que lorsque

l'élève déplie et replie mon modèle, ce sont les plis que j'ai faits, et l'ordre dans lequel je les ai enchaînés, qui dirigent ses gestes. Elle doit retrouver ceci et on voit fort joliment comment elle se risque progressivement à plier sur un feuillet en 2, puis en 4, et qu'elle reste comme en retrait d'un pliage par rapport au modèle.

Remarquez que ces deux premiers problèmes se sont manifestés quasiment de la même manière pour mon interlocutrice adulte.

Le troisième problème, qui pour moi, la chose la plus inattendue, fut le pliage sur lequel l'élève s'est découragée et a abandonné, soit le problème de savoir quel coin rabattre. Bien avisé l'observateur qui aurait pu voir la différence entre son pliage et le modèle, c'est-à-dire qui se serait avisé de considérer que les coins du feuillet en 4 sont tous différents et que cela allait porter à conséquence.

En ce qui me concerne ce qui m'a le plus surpris fut mon impréparation à cette expérience et je dirais presque mon propre aveuglement. Pris dans mon intention d'obtenir un pliage de secteur de disque ou de polygone, pris donc dans ce signe de secteur ó signe qui, nous l'avons vu, ne s'impose nullement de lui-même ó il ne m'était jamais venu à l'esprit tout d'abord qu'on pourrait faire autre chose que d'enchaîner trois pliages, et secundo concernant le troisième pliage, qu'on puisse le faire autrement que selon la bissectrice de l'angle formé par les deux premiers plis ! Ceci étant, ce qui me frappait c'est que pour avoir fait maintes fois de tels pliages je ne reconnaissais, une fois le tout déplié, que le dessin en étoile des traces de plis. Je n'avais aucune image en tête de ce que l'on obtenait si on pliait en rabattant au hasard un des coins du feuillet en 4.



Certes je disposais de tous les moyens pour déterminer ces dessins ó même mentalement - sans devoir essayer les 4 modes de pliages. Je me hasardais même à imaginer que l'on obtiendrait seulement 3 dessins, me laissant entraîner dans un faux raisonnement qui aurait voulu que le feuillet en 4 présente trois types de coins : celui à l'intersection des deux plis, celui qui lui est opposé, où vont se superposer les 4 coins de la feuille de départ, et celui des deux autres coins. Alors que ces deux-là ne sont nullement identiques.

Bref je n'y connaissais rien du tout parce que je n'avais jamais pris en compte des feuillets, que je ne m'étais jamais lancé dans le dessin de ces feuillets, etc. J'entretenais donc avec l'activité que je proposais aux élèves une représentation très fragmentaire et erronée, faite de croyances et de préjugés mathématiques, m'engageant à négliger et ne pas m'encombrer l'esprit de considérations trop concrètes et de représentations précises et suffisamment différenciées. **Le pliage que je proposais à l'élève de reproduire était déjà et déblée un**

secteur dans lequel je me proposais de tailler un secteur circulaire et pas du tout un feuillet obtenu à partir d'une feuille A4.

J'ai passablement médité sur cette expérience, et pour conclure je voudrais indiquer une des pistes de ma réflexion. Je reviens à cet étonnement à propos du pli d'un coin pour obtenir un carré à partir d'une feuille A4 (ceci est relaté à l'épisode 8) : cette idée n'est pas si évidente à trouver, mais par contre, elle est quasiment immédiatement adoptée une fois qu'on la présente. Ou encore cette élève qui reproduit un pliage (dont j'ai pu constater que des adultes réussissaient avec difficulté) alors qu'elle n'arrive tout simplement pas à reproduire le dessin des plis. Il y a là une sorte de principe d'économie pragmatique qui entre en jeu. Dans chacun des cas la simplicité des actes (supportés par les propriétés du milieu) a pris le pas sur la complexité des relations et représentations.

La surprise dont je vous ai fait part est comme l'effet retour de telles simplifications. Je fus obligé à élaborer une représentation notoirement plus différenciée ; et, à sa mesure, l'élève aussi. Jamais jusqu'alors je n'avais parlé de feuillet ! Ces représentations sont à la fois bien plus savantes ó même mathématiquement parlant - que celle de ma première approximation et bien plus basiques, empiriques, plus fidèles à la réalité de l'activité que nous avons engagée. Le développement cognitif opère bien en spirale au fur et à mesure qu'il s'élève vers des degrés d'abstraction, il s'enfonce encore plus dans les soubassements de nos expériences. Dit en termes de Peirce, lors de nos confrontations à une sécondéité qui nous résiste, au fur et à mesure que notre connaissance gagne en tiercité (généralité), elle affine sa prise en priméité (catégories abstraites).

À partir de là on peut imaginer de multiples expériences amusantes de mise en relation entre de tels pliages élémentaires et des dessins que laissent ces pliages sur la feuille.

5° dialectique savoir - expérience, moteur de recherche.

Ci-dessus, dans la première partie de cet épisode, je précisais mon projet en renvoyant dos à dos les références expérimentales des projets classiques en didactique des mathématiques et celles des projets en épistémologie génétique et/ou autres études cognitives. J'arguais que, dans tous ces cas, l'expérience qu'on allait tenter était *pré-interprétée* par les canons du savoir mathématique visé (il y a là une boucle, comme par téléologie). Je forçais même un peu le trait en disant que finalement ce n'était qu'en aval de l'expérience que les deux perspectives se distinguaient. Certes, mais cela signifie alors que bien que pré-interprétant chacune leurs expériences, elles ne le font pas de la même manière et que cela explique sans doute les malentendus et débats qui animent aujourd'hui encore didacticiens des mathématiques et psychologues de la cognition.

On peut donc dire que ces recherches sont quelque peu présomptueuses de l'expérience, même si chacune l'est à sa manière. On peut dire que dans les deux cas, une telle présomption repose sur le fait que l'expérimentateur se présente maître de sa propre expérience et se positionne comme quelqu'un qui a déblayé tout compris de ce qui va s'y passer, ou, du moins, que ce qu'il pourrait ne pas comprendre ne sera pas retenu et ne devrait pas porter à conséquence quant à l'interprétation des données et observations recueillies. Là encore je force un peu le trait. Pour être plus fidèle à leur projet, il faudrait dire que les expérimentateurs entendent laisser la porte ouverte aux seules incompréhensions qui comptent et qui soient susceptibles de questionner leurs théories de références. La différence est donc ici une différence de degré,

mais qui représente quand même un seuil qualitatif et que j'exprimerai par la question suivante : "par quoi donc entendons-nous nous laisser surprendre ?"

On ne mesure en effet pas le prix que l'expérimentation paye à vouloir ainsi contrôler l'expérience. Dit autrement, il y a peut-être d'autres modalités, en particulier moins directes, pour exercer son contrôle et rendre moins exceptionnelles, et par là moins critiques, les surprises qui peuvent nous arriver. Mais je préfère dire encore autrement les choses. Supposons donc qu'une théorie s'élabore et s'appuie sur un solide corpus expérimental, elle produira entre autre un appareil interprétatif dont l'utilité dépassera l'usage des seuls chercheurs ou scientifiques. Il n'en reste pas moins que, à moins que des ingénieurs et techniciens n'arrivent à proposer des instruments automatiques d'interprétation, des tables, des grilles d'analyses ou que sais-je encore ? , dans la plupart des cas, les utilisateurs devront fournir ce travail d'interprétation de leurs propres données. Le contrôle expérimental ne peut être ni total ni constant, il ne dure que le temps de l'expérimentation et ne se propage pas au dehors des laboratoires. Il faut donc à l'utilisateur apprendre à faire usage de la théorie autrement que ne le font les expérimentateurs pour leurs propres travaux. Comment donc se passent les expériences qui ne sont pas étroitement contrôlées et pré-interprétées par nos théories et savoirs ?

À propos du second exemple, portant sur le pliage avec une élève de l'ES, j'ai mentionné des surprises à rebondissement. Effectivement, comme j'observais cette activité pour la toute première fois, il y a bien des choses que je n'ai pas comprises sur le moment et bien des choses que j'ignorais encore quant à ce que représentait pour un élève de 8-9 ans de réaliser un pliage. La première surprise aura été non pas tant cette maladresse à reproduire des plis en étoile que le fait de s'être fixé cela comme but ! Je ne m'étais jamais imaginé que l'on puisse chercher à reproduire un pliage en essayant de reproduire le dessin des traces que les plis avaient laissées sur la feuille ! Et ... si j'ai bien compris ce qui s'est passé... c'est ce que, dans un premier temps, mon interlocutrice (l'élève) se proposait de faire. Mais comment m'imaginai-je que l'élève s'y prendrait pour reproduire mon pliage, qu'en avait-elle perçu etc. ? Pour ma part j'étais obnubilé par une idée toute théorique : le pliage comme un algorithme, le papier et l'agencement de ses plis comme une machine, et les traces laissées sur le papier comme sous-produit de l'opération. L'élève entendait produire, "directement", ce qui n'était, pour moi, que sous-produit ! Ci-dessus, j'ai introduit la distinction entre *approches inductive et déductive* lors de nos expérimentations. Je pourrais dire que, dans ce but de prendre la mesure de cette expérience de pliage que j'ai proposée à l'élève, je m'appuie sur la surprise pour sortir du cadre déductif avec lequel j'aborde mon observation pour prendre une voie plus inductive, à même de suivre la situation dans une possible dynamique. Et comme cela se passe avec surprises, j'en conclus que, dans ce processus, l'abduction joue aussi son rôle.

On peut dire autrement les choses. L'idée de départ, cette intention de faire jouer le pliage comme un petit algorithme sur un dispositif physico-mathématique porte avec elle une dimension sémiotique. Il y a dans l'expérience production de signes, seuls certains sont attendus, seront retenus, un filtre est installé avec la situation. Ces signes se trouvent sur des registres variés, ce seront soit des propriétés de la chose produite, par exemple la forme de trapèze rectangle de mon pliage, le fait que le coin soit rabattu bord à bord, qu'on le considère comme un "cornet", soit des gestes etc. Le dessin des traces laissées par mes plis sur la feuille de départ est un tel signe. J'aurais eu tendance à ne pas m'en soucier, pas plus que je ne me soucie du fait que certaines de ces traces sont "en crête" sur le papier et d'autres "en vallée", même si je sais bien qu'il en est ainsi pour l'avoir souvent remarqué et que je sais aussi que

ces traces sont des indices du pliage, l'ordre de la succession des plis, à cause des rabattements (des symétries) se retrouvant par des jeux de "dessus-dessous". Je note cela parce que mon interlocutrice (l'élève) a cherché dans cette direction dans un de ses essais. Pour moi, en fait le dessin étoilé laissé par les traces des plis n'était qu'une icône, et c'est bien cette icône qui est venue bousculer le dessin produit par le dernier malheureux pliage de l'élève.

Dans le jeu que je me suis fixé, ces surprises et ces incompréhensions que nous avons de ce qui se passe demandent alors à être interprétées et je cherche, si possible à chaud, à infléchir l'expérience vers une confirmation ou un démenti de ces dernières, non pas tant afin de justifier mes impressions mais afin de pouvoir rester aussi adéquat que possible dans mes échanges ultérieurs. Voilà pourquoi je parle de pilotage de l'entretien. Cela n'est nécessaire aussi, ne serait-ce que pour attester que quelque chose d'intéressant s'est passé là. Ainsi donc le jeu que je me propose m'éloigne toujours plus des pratiques standards d'expérimentation.

Ainsi, lors de l'entretien avec l'élève, il y a eu un moment de reprise où j'ai cherché à recentrer les choses, j'ai évoqué la différence que je fais entre imitation et copie puis, et aujourd'hui je m'étonne d'avoir procédé ainsi, j'ai proposé une tâche de copie. Ce qui est certain est que mon intervention a eu un effet suggestif et que depuis ce moment-là, l'élève a, progressivement, procédé par enchaînement de pliages ce qu'elle n'avait pas fait jusque-là.

Ce que je gagne du point de vue de l'interprétation n'est pas beaucoup plus qu'une indication de pertinence, pourtant pour moi, c'est significatif de l'adéquation de nos échanges.

Après cet entretien, j'ai poursuivi mon travail interprétatif en cherchant les dessins qui pouvaient faire les plis selon qu'on rabattait tel ou tel coin, j'ai vérifié qu'il y en avait bien quatre. Puis j'ai trouvé que leur structure interne reflétait bien la structure du pliage dont ils étaient produits et que cette structure se retrouvait lorsque l'on comparait les dessins entre eux. Je les ai appris, leur ai donné des noms. Puis je me suis avisé de changer de registre et au lieu de réaliser le dernier pli, j'ai coupé mes feuillets en suivant chacune des 4 bissectrices des coins et me suis retrouvé avec d'autres signes, le nombre de pièces produites par le découpage (de 3 à 5), et les formes de ces pièces. Ce qui m'a surpris alors, c'est de me trouver face à de nouvelles icônes dont je ne voyais pas d'emblée le lien avec les dessins de plis. Essayez par exemple d'imaginer le découpage qui correspond au dessin d'une croix centrale. Et surtout observez le "changement de perspective" que vous allez devoir faire. En fait vous devez réinterpréter les lignes qui représentent les branches de la croix en bord des pièces que vous aurez découpées.

Cette réinterprétation de lignes en bords me semble quelque chose d'essentiel dans toute expérience de la géométrie élémentaire. Comment cela se manifeste sur un pliage? Si vous pliez une feuille en deux, et bien le pli devient le bord de votre feuillet, et se transforme en ligne lorsque vous dépliez la feuille. Ce changement de statut est dû au fait que les signes sont pris dans leurs agencements avec d'autres et qu'ils n'ont jamais de signification isolée. De tels changements sont un exemple de ce que Peirce appelle action du signe.

Ainsi, je me suis beaucoup questionné sur ce qui se cache derrière l'évidence d'un simple pliage de feuille.

Autre exemple, mes observations m'ont montré que pour beaucoup d'élèves, mêmes âgés, il ne leur venait pas à l'idée de plier en diagonale pour obtenir un carré à partir d'une feuille rectangulaire. On peut discuter longtemps pour savoir si cette astuce est si évidente que cela. Mes observations permettraient de soutenir une discussion serrée sur ce sujet. Mais cette question m'importe bien moins que cet autre étonnement, à savoir que cette technique est très facile à enseigner et faire apprendre, même si parmi les sujets que j'ai interrogés, plusieurs se montraient incapables dans les circonstances de nos échanges à y penser. Et c'est bien le "il fallait y penser" qui m'intrigue ici (et de très longue date), c'est cet avènement de l'évidence si je puis dire qui reste pour moi mystérieux. J'entends déjà prononcé par certains de mes lecteurs l'expression: "ah ! ah !" ou de la part des fans de Peirce : "abduction". Je veux bien mais cela dit que pourrions-nous faire de ça ? (Cf. épisode 8).

Tout aussi facile à apprendre est le pliage d'une feuille A4 en deux, puis transversalement en 2, pour obtenir un feuillet de format A6. Certes à l'observation, les sujets se montrent très inégaux dans leur habileté à plier, et la précision du résultat. Je ne m'arrêterai pas ici sur cet aspect (non anodin) des choses. En fait on peut dire que ce pliage est si naturel parce qu'on répète deux fois le même acte. (Cf. épisode 6).

C'est un très joli exemple de ce que les piagéticiens appellent un schème. Un schème élaboré au point qu'il peut se réitérer deux fois sur un même objet, se composer, diraient les mathématiciens. Prenons ce pliage en partant d'une feuille A4. On effectue un pliage en deux dans la longueur. On obtient un feuillet double de forme A5. Il y a là une petite accommodation qui doit se faire (plusieurs modalités sont possibles) pour effectuer le même pliage sur le feuillet. À la fin, on obtient un feuillet de 4 feuilles de forme A6. Je serai très surpris d'apprendre que cette suite d'actions ne soit pas supportée par un contrôle perceptif et je conjecture que les propriétés de la feuille A4 rendent encore plus naturel ce mouvement (une étude expérimentale pour vérifier un tel point ne semble pas difficile à faire).

Par contre mes observations et les propos que j'ai recueillis de la part de sujets me montrent que, dans cet enchaînement de pliages, les feuillets sont assimilés aux feuilles. Dit autrement, tout se passe comme si le sujet effectuait deux fois le même pliage de feuille, ou encore que tant que l'épaisseur du feuillet ne gêne pas les mouvements, et puisqu'il est relativement aisé de maintenir plaqués l'un contre l'autre les 2 ou 4 feuillets, les sujets ne prenaient pas en compte la différence entre feuille et feuillet. Le feuillet est assimilé à la feuille.

Ces développements m'ont permis de reprendre cette activité de pliage avec d'autres élèves et à diverses reprises, selon un protocole renouvelé où en quelque sorte je soumetts aux élèves le problème que leur camarade avait rencontré ó et que de moi-même je ne me serais jamais formulé.

Je parie que si je demande quelques copies de mon pliage, soit en demandant plusieurs au même interlocuteur, soit en proposant à plusieurs interlocuteurs de faire le même pliage que moi, les traces des plis vont présenter au moins deux variantes. Pour ce faire je contrôle bien que mes interlocuteurs voient ma façon de plier et puissent facilement en reproduire les enchaînements. On le voit, l'expérience a bien changé depuis le premier accident.

Pour avoir fait plusieurs essais, dans des conditions variées, entretiens individuels, avec deux ou trois élèves, je me suis rendu compte qu'il ne fallait pas beaucoup

Je faisais pour voir apparaître au moins deux dessins distincts. Si je travaille avec une paire d'élèves, il est alors très facile de leur demander soit si ils peuvent reproduire leur propre pliage, soit s'ils peuvent reproduire le pliage de leur camarade. Les effets de surprises ont toujours été garantis. J'ai même tenté, à deux reprises au moins, cette expérience : une fois dans une classe d'une dizaine d'élève, une autre fois dans une classe ordinaire d'une vingtaine. Chaque fois avec succès. Je n'ai jamais tenté d'explorer ce que la version découpage pourrait donner.

Voici pour terminer un autre développement de cette situation parce qu'il représente un intérêt pour l'étude des isométries. Le nouveau protocole d'expérience s'amorce sur la demande de reproduire un pliage bien particulier. On plie une feuille A4 en 4 (format A6), puis on rabat un coin. On variera ensuite le pliage initial : 2, 4, 8, 16, 32, puis à chaque fois et pour autant qu'on ait choisi du papier suffisamment fin, demandera de rabattre un coin (et de varier les pliages selon lequel des coins on décide de rabattre). Puis on demande de décrire, voire reproduire par dessin, voire analyser le dessin que font les traces de plis sur les feuilles dépliées. Je laisse le lecteur faire ses propres expériences et j'espère qu'elles le surprendront comme elles m'ont surpris.

Je m'engagerai aussi à réfléchir à ces pliages enchaînés de la feuille A4, en 2, 4, 8, 16, réitérés afin de maintenir la proportion de la feuille initiale. Je reviens sur quelque chose d'analogue à la distinction bords / lignes que j'ai mentionné tout à l'heure. Mais ici je m'intéresse aux coins. Comment se distribuent les coins des feuillets aux différentes étapes de ces pliages si anodins ?

6° Conclusion

Ainsi, parti dans la perspective d'un savoir, le cercle, une expérience surprenante avec une élève de l'ES m'a amené sur le terrain de pliages de feuilles de format standard A4. La dialectique se poursuit par une reprise en main par le savoir, suscitant de nouvelles questions et de la poursuite d'autres expériences.

Il y a tout un champ d'expérience à explorer autour du pliage et du découpage de feuilles de papier, dans le croisement de propriétés géométriques : découpage de figures simples, jeu de similitudes, et arithmétiques. Certaines propriétés étant aisément saisies par des relations arithmétiques simples tandis que d'autres pas. On peut par exemple jouer sur les différentes figures que peuvent prendre des surfaces moitié d'une feuille A4, ne serait-ce que les demi-rectangles obtenus quand on plie dans la longueur et dans la largeur, ou les moitiés obtenues en pliant sur la diagonale.

Les feuilles de dimension A4 sont présentes partout dans l'environnement de nos élèves. Ce sont des artefacts qui ont cette propriété très remarquable que si l'on partage une feuille A4 en deux dans la longueur, on trouve deux moitiés de proportion semblable à la feuille de départ, de format A5. Cette propriété provient que la longueur vaut $\sqrt{2}$ la largeur. Tout cela est bien connu, et permet de nombreuses approches mathématiques.

Je m'intéresse à la dynamique de nos expériences, et pas tant à connaître le degré de familiarité des sujets avec les propriétés mathématiques des formats A4 des feuilles de papier, qui sont omniprésentes dans leur environnement.

Je ne m'intéresse pas aux formes pour leurs caractères "intrinsèques", mais surtout pour les liens et associations qui sont faits entre elles. Par exemple, non pas connaître le cercle tel qu'en lui-même mais bien en relation avec d'autres formes comme celle de ces napperons, ou celles des étoiles etc. Ou encore, cette idée que le cercle est plus une "figure qui n'a pas de dissymétrie" (je sais bien qu'une telle formulation n'est pas formellement parfaite) qu'une figure qui en posséderait une infinité. Parce que pour repérer une symétrie, ou une multitude de symétries nous nous repérons à des "singularités" (les mathématiciens me pardonneront une fois encore de cet abus de langage) et que ce qui est le plus frappant dans une forme de napperon ou en étoile etc. est qu'elle possède ces symétries, certes, mais en nombre fini, et pour les formes qui nous sont les plus familières, en nombre limité.

Il ne s'agit donc pas de nous limiter aux propriétés de la feuille A4, pour elle-même et en tant qu'actualisation singulière renvoyant à des propriétés mathématiques abstraites et générales (*une réplique* dans le vocabulaire de Peirce), mais ce que la connaissance de ces propriétés nous apporte dans l'expérience que l'on peut avoir sur des feuilles de papier d'autres formats. Par exemple, le format carré ne jouit pas de cette propriété du format rectangulaire A4. Pour le format carré, il faut un pliage en 4, etc., pour réobtenir un quart de format carré. Un carré plié en deux (parallèlement aux bords) a le format d'un rectangle, mais d'un rectangle d'un format très particulier lui aussi, puisqu'il se décompose lui-même en deux carrés.

Ce qui est en cause là-dedans est bien la mathématisation de notre expérience et des rapports trop séparés entre ce qui nous est donné à connaître "par voie inductive" et ce qui nous est donné à connaître "par voie déductive" (le joint se faisant dans cette figure peircienne qu'est l'abduction). À trop bien connaître déductivement les propriétés des rectangles, l'expérience que nous tirons inductivement des objets qui nous sont familiers se dissolvent et les liens entre les choses se perdent dans la médiation théorique, devenant par ce fait relativement inaccessibles. En reprenant l'exemple évoqué ci-dessus, un tel lien pour l'exemple des formes carrées ou A4 de nos feuilles de papier étant qu'un demi carré est un rectangle non carré mais double de carré et qu'un demi rectangle A4 peut lui être semblable (A5).

Certes la pertinence d'une telle relation n'est pas d'une portée énorme, et ne sera pas retenue comme une relation fondamentale dans les schématisations théoriques de la géométrie plane. C'est justement un de ces éléments d'expérience, facile d'accès, qui deviennent comme entièrement occultés par la médiation théorique et déductive. Or ce n'est pas le caractère d'évidence de ces propriétés qui ici est en cause.

On peut donc dire que mon questionnement sur l'expérience et ses dynamiques est aussi un questionnement sur l'évidence, et que ce que j'ai commencé à illustrer précédemment est bien que ce qui nous est évident est relativement indifférencié. Schématisme ou indifférenciation ? Là encore peu importe d'avoir une réponse définitive. De toutes les manières, le destin de cet aspect des choses est que cela devienne schématique (théorique), et même consciemment schématique (à nouveau ce critère de différenciation).

Référence faite dans le texte.

Artigue M. et Robinet J. 1982, Conceptions du cercle chez des enfants de l'école élémentaire, *Recherches en didactique des mathématiques*, 3(1), 5-60.

Episode 5

28.09.03 - 13.01.16

Réflexions 1 : Ouverture aux expériences.

Je me rends compte que je ne puis relater ces expériences sans donner des indications d'ordre théorique et indiquer progressivement et de manière ad hoc des points de théorie extrêmement importants.

Il y a deux obstacles à mes évocations.

1° **Le premier** est qu'il faudrait que les lecteurs se mettent à de petits pliages ou bricolages pour se rendre compte, mais qu'ils le fassent en essayant de ne pas tout de suite régler le problème mathématiquement.

L'obstacle est le suivant. Si je veux comprendre des choses sur le cercle comme la courbure, ou le fait que la tangente est perpendiculaire au rayon etc., alors j'ai bien meilleur temps de laisser de côté les aspects non pertinents parce que trop concrets et particuliers à la fois. Par exemple les questions relatives à comment je puis régler mon mouvement, soit de dessin, soit de découpage d'un cercle.

Si on y réfléchit, on se rend compte que dans l'enseignement des maths, l'objet mathématique (et les registres symboliques dans lequel on le cantonne, pour le cercle, une jolie figure de cercle au compas, des jolis tracés à la règle, ou des jolies équations en repère cartésien ou paramétrées etc.) est comme un point de convergence, un repère, à quoi on rapporte je dirais radialement, tout ce dont on pourrait avoir besoin dans des situations particulières.

Ainsi, on ne va pas tant que cela faire des liens et des relations directs entre diverses expériences du cercle que l'on a pu se faire, mais on va reconnaître ces expériences, chacune pour elle-même, telle que rapportée au cadre mathématique idéal. Les relations horizontales que l'on pourrait faire entre diverses expériences ne sont pas retenues, mais renvoyées à la médiation de l'objet mathématique idéal.

Ainsi si je découpe un cercle dans une feuille à partir d'un secteur, on reconnaîtra que la direction à donner à ma coupe doit être perpendiculaire au rayon par la propriété bien connue du cercle. D'autre part, on reconnaîtra par le fait que la courbure doit être constante le fait que je vais essayer d'infléchir le plus régulièrement possible la direction de mes ciseaux. Mais chacune de ces propriétés sera vue analytiquement, déliée, articulée sur l'objet idéal mathématique et dans ce que les mathématiques ont à dire du cercle, mais pas dans ce que l'expérience aurait, elle, à dire du cercle.

Ceci fait que la plupart des gens qui ont appris les mathématiques sont incapables de retrouver ces liens dans l'expérience sans passer par le savoir. Ce qui fait que si ils s'estiment peu sûrs de leurs savoirs, ils abandonnent et désinvestissent l'expérience commune, ils n'arrivent pas à la faire parler.

Cela d'autant plus que l'expérience a un caractère indifférencié (holistique) qui fait que les expériences sont reliées autrement que ne le sont les propriétés mathématiques qu'on peut y reconnaître.

C'est à cela que je me suis attaqué. Pourquoi?

a) Parce que d'une part psychologiquement ces relations horizontales et holistes dans l'expérience se font, ont lieu, et qu'il peut être utile d'apprendre à les reconnaître. Il y a même je dirais un hiatus entre les expériences propres de chacun et ses propres savoirs, des grandes disparités individuelles aussi à ce propos.

Ce hiatus est plus préjudiciable pour quelqu'un qui n'est pas très porté sur les maths que pour un mathématicien, c'est donc à mon avis un point extrêmement sensible pour les enseignants de maths et encore plus pour ceux du primaire.

b) Parce que si je m'en tiens à reproduire un enseignement des maths radial, je veux dire qui installe un objet math, appelé cercle à propos duquel on va nouer radialement diverses expériences au cours d'activités variées et segmentées (c'est par exemple ce modèle qui dirige l'enseignement de la division dans les manuels romands de 5ème depuis 1985, c'est de cette manière que les problèmes ont été réintroduits avec l'idée aussi de situation-problème), alors pour enseigner la géométrie je ne puis faire aucun appel à l'expérience tant que les objets maths ne sont pas installés. Or l'installation raisonnée des objets maths en géométrie plane ne se fait que tard dans la scolarité. Par conséquent je voudrais répondre à la question suivante : comment contrôler que l'école ait été pour l'élève de primaire l'occasion de faire des expériences géométriques et spatiales riches ? Éventuellement aussi qu'il ait eu l'occasion de faire l'expérience d'aspects particulièrement importants aux yeux de la géométrie. (On pourrait penser ici par exemple au fait qu'en combinant deux symétries on obtient soit une rotation soit une translation selon que les axes sont parallèles ou pas, etc.)

Si ce n'est pas un faux problème que je me pose, alors il me semble utile de pouvoir repérer les relations que l'élève fera dans l'expérience et de les travailler avec lui ou de les lui signaler sans que j'aie pour cela besoin de le renvoyer (radialement) à l'objet mathématique idéal. Mais il faut encore que je sois capable de le faire moi-même, que je puisse lire l'expérience autant horizontalement que radialement. Dans cette tâche les échanges avec d'autres, et des élèves en particulier me sont nécessaires.

Par exemple, un cercle possède-t-il des symétries ? Oui, et une infinité continue, dit la description idéalisée mathématique !

Maintenant, je prends l'idée qu'un cercle est quelque chose de très régulier, c'est-à-dire sans aspérités, rond mais sans bosses, convexe et sans creux, lisse, de courbure constante ... etc. Et je considère que cet amalgame de propriétés est plus fort dans l'expérience commune du cercle que celle de posséder une infinité de symétries. Quand je dis plus fort, je veux dire plus parlant dans certains contextes d'expérience familiers. Alors je me dis que l'idée qu'un cercle n'aurait pas de dissymétrie serait peut-être une traduction - idéalisée - plus pertinente. Je sais bien qu'il se trouve que cette traduction est moins rigoureuse que celle de dire que le cercle a une infinité de symétries. En effet, que veut dire "avoir une dissymétrie" ? Il suffit de couper un disque selon une corde non diamétrale pour avoir une dissymétrie ... (En passant, ce n'est pas rien de se rendre compte que les maths sont plus à l'aise pour dire ce qu'elles entendent par symétrie que pour proposer une définition de la dissymétrie). Donc l'idéalisation mathématique va éviter ce faux problème et par bonheur, la propriété de l'"infinité de symétries" ira fort bien (mais ne sera pas forcément très féconde).

Cet exemple montre bien comment le savoir taille et ne choisit dans l'expérience que ce qui lui convient et évite ce qui pourrait lui poser problème. On dira qu'il catégorise ...

Oui mais si on veut enseigner les maths en posant des problèmes et des problèmes sensés qui ont un substrat expérientiel, si on veut laisser cours à une dévolution, comment va-t-on trier le bon grain de l'ivraie ?

Un autre écueil idéaliste guette. C'est celui de me dire que les psychologues et cognitivistes vont pouvoir dresser le catalogue des représentations communes des sujets, et de me fournir même une graduation des conceptions selon leur prégnance au cours du développement des sujets ou au cours des contextes de leurs expériences. En psychologie, on a pu tenir de tels propos ! En principe ce sont des idées fécondes. Mais pratiquement c'est une toute autre paire de manches. Et je pense que c'est même une chimère que de penser y arriver un jour. Donc comment tirer parti de l'idée sachant qu'elle reste assez théorique ? On pourrait peut-être se suffire de dresser à grands traits ces catalogues et ces hiérarchies. Certes, et je ne vais empêcher personne de se lancer là-dedans. J'ai quelques doutes car il me semble que ce faisant, on reporte sur le plan psychologique ce que j'appelle cet idéalisme qui consiste à rapporter radialement et analytiquement les expériences faites à quelque objet idéal : ici au lieu de projeter sur l'objet mathématique, on vise des conceptions ou représentations.

J'attends pour voir. Que faire en attendant ?

Ainsi, ce que je cherche c'est : qu'est-ce que je puis faire sans trop savoir ? L'expression est parlante et en même temps fautive. En fait je cherche les moyens d'opérer une inversion. Non pas rapporter (ouvrir) l'expérience au savoir mais rapporter (ouvrir) le savoir à l'expérience (que ce savoir soit mathématique ou psychologique). C'est une démarche de reconnaissance et donc interprétative. Bien entendu, si je ramène mon savoir sur le champ d'expérience d'un sujet qui n'a pas mon savoir, alors je ne pourrais pas le lui communiquer, lui en faire état, lui dire en quoi je reconnais quelque valeur à son expérience. Cela veut dire que je suis obligé de faire confiance dans des processus de maturation de développement et aussi en ce que favoriseront ces expériences.

Bien entendu je ne prône pas qu'on ne fasse que cela avec les élèves. Tout d'abord ce phénomène de projection sur des idéalités n'est pas quelque chose qu'on ait choisi de faire, c'est bien plus profond que cela et représente sans doute un processus fondamental du développement cognitif. C'est quelque chose qui s'opère au cours et à la faveur de ses propres expériences. L'école ne fait qu'éliciter un processus naturel ; simplement elle le fait peut-être trop exclusivement.

Premièrement on ne va pas se débarrasser ainsi de son savoir et on ne peut éviter d'y projeter nos expériences. La question est d'arriver à ce que ces relations horizontales nous (re)deviennent manifestes, que nous arrivions à dépasser le moment de leur occultation par le savoir.

Secondement, et du côté cognitif, avec l'expérience se constitue pour chacun son petit catalogue. Par exemple, ces expériences de pliage que j'ai faites avec mon interlocutrice et une élève que je relate dans le quatrième épisode, je me suis rendu compte de deux choses.

a) En relisant mes notes et en réexaminant les pliages que l'élève avait faits en 1998, je me suis aperçu que, aujourd'hui, je comprenais bien mieux ce qui s'était passé, parce que tout

simplement des éléments que j'observais pour la première fois à l'époque me sont devenus familiers pour les avoir observés à nouveau depuis et, ce, dans des circonstances variées.

b) En relisant ces notes, je retrouvais les problèmes qu'avaient rencontrés la personne adulte avec qui j'ai échangé récemment (2003) et dont j'ai relaté notre entretien.

Il y a donc quelque chose de récursif puisque l'expérience se développe en se construisant et que des relations qui ont été horizontales se sont petit à petit radialisées sur les schémas et modèles qui se sont forgés ou installés en nous.

Cette remarque donne un sens nouveau à ma démarche de recherche. **Je cherche en fait à resserrer les liens entre ce qui se construit dans le savoir et ce qui se construit dans l'expérience.** Tout simplement dirais-je.

2° **Le second obstacle** est que si je fais ceci c'est parce que personnellement je n'ai pas trouvé d'autre réponse sensée à faire faire des maths dans les conditions d'enseignement spécialisé à des élèves toujours en assez grande difficulté. Et ça, tant qu'on ne s'y est pas affronté, on ne peut le comprendre. Je veux dire que c'est pour m'être trouvé confronté à ces cas difficiles que je mets espoir à cette piste de recherche, avec tous les risques qu'elle comporte (dont je suis assez conscient moi-même).

Réflexions 2 : Contrôles.

Pour le moment cela prend la forme de la proposition d'un autre schéma expérimental que celui auquel on fait partout référence et que je qualifie de déductif. Je monte des expériences "critiques" pour lesquelles je sais que tel ingrédient de savoir est présent et où, d'une manière ou d'une autre, les élèves y seront confrontés, ou plutôt où les connaissances associées à ce savoir seront mobilisées. Je suis exactement dans ma théorie de *savoir et connaissance* (Conne 92), avec, en sus, le fait que les situations que j'observe ne sont pas des modèles du savoir. Et si, lors de ces expériences, il y a communication de savoir c'est à titre de contrôle de la situation et pas autrement. Le savoir organise les relations entre connaissance et expérience. Et c'est aussi ce qui est central dans *perte de contrôle et prise de contrôle* (Conne 01-03). En effet, ce qui est essentiel, c'est que la situation peut échapper, au sujet, à l'expérimentateur, voire aux deux à la fois, etc. Et surtout, elle peut échapper au contrôle que l'expérimentateur exerce sur le contrôle de l'élève sur la situation.

Par exemple, suite à l'entretien relaté dans le document 4, voici une note d'un entretien avec deux élèves dont l'une est celle à qui j'ai proposé le pli de la feuille A5 "en cornet" (septembre 1998)

À S. et M. :

Je plie une feuille A4 en deux. Je leur demande ce que j'ai fait. Chacune me dit que j'ai "plié en deux". Mais ni l'une ni l'autre ne réussit à me répondre à la question : "pourquoi dit-on plier en deux?" Je coupe mon feuillet dans le pli, et je trouve deux parties. L'entretien continue alors sur l'anticipation de parties que l'on produit par des suites de pliage en deux. Et on voit M. plutôt multiplicative et S. additive. Etc.

En fait je suis constamment en train d'essayer de dépasser leurs réponses et leurs performances ou non performances. La situation se poursuit se développe comme si elle avait sa propre dynamique, ça c'est complètement différent d'une tâche complexe qui se décompose et s'analyse en une suite de sous-tâches ou d'un savoir que se déploie dans le temps en suite de prérequis etc.

Il y a pourtant nécessairement une base qui récupère les ruptures opérées par les "branches d'appel à performance", un substrat assimilateur et ici, sans doute, je joue sur les registres ou sur la richesse sémiotique.

Mais il y a plus. Je dis que je cherche des choses simples, je dis aussi de ces idées simples qui ne viennent pas directement à l'esprit, qui souvent ne viennent pas à l'esprit des gens, qui ne viennent pas à l'esprit de la plupart des gens, mais pour lesquelles on se dit après coup : "il suffisait d'y penser", des astuces si on veut, ce qui veut dire des idées qui sont très vite assimilées, à portée d'assimilation donc. Avec ce défaut que l'assimilation est souvent si forte qu'alors elle occulte toute compréhension.

Je fais au moins deux hypothèses à leur propos.

1° Sans doute que c'est ce qu'exprime la force avec laquelle les élèves veulent agir, faire, comme à tout prix, quitte à se perdre dans des actions inefficaces, qui n'aboutissent pas.

2° Il s'agit de jouer avec cela. Comment ? Considérer que cette idée est un signe. Considérer que ce signe est en concurrence avec d'autres, et que soit il prend le dessus et occulte les autres, soit il reste lui-même occulté. Mon travail serait alors de proposer des situations où pour moi ce signe est présent, et de jouer avec ce qui occulte ce signe ou, si il est perçu, ce que ce signe va occulter. De telle sorte que la situation ne va pas dépendre entièrement de ce signe, qu'elle ne se referme pas avec lui. On est bien dans une logique de relance. Soit le signe n'est pas saisi alors quelque chose n'advient pas et cela relance la situation, soit le signe est saisi et il s'agit de le restituer dans la situation.

Par exemple, le signe de l'enchaînement de pliage est saisi, c'est justement quelque chose qui manifestement ne va pas de soi et qui, une fois acquis, a un naturel qui fait écran. Le signe est remis en jeu par la production d'un autre signe celui de la différence des dessins laissés par les traces des plis. Bien entendu, on ne peut pas relancer la situation par des signes auxquels les sujets ne seraient pas sensibles. Ce qui veut dire que mon travail, entre les situations ou les séances, consistera justement en la production de signes auxquels ils pourraient être sensibles. Par exemple, une réflexion et une note de ma part sur une tâche de découpage qui fait apparaître la structure des plis aux quatre coins d'un feuillet in quarto de format A4.

De même "plier en deux est un signe" dont l'assimilation par les élèves leur occulte la signification du "en deux". Il en va de même sur les synonymes de "bords", "côtés", "lignes", "sommets", etc.

Le sens commun en didactique voudrait que ces signes dont l'assimilation est si prompte, mais qui ne tombent pas si aisément sous le sens, soient les lieux et moyens d'ajustements microscopiques, disons d'installation. Et sans doute, cela est inévitable pour beaucoup d'entre

eux. Par exemple savoir si une distance est la même lorsqu'on la parcourt dans un sens ou dans l'autre : on installe ceci.

J'ai le projet d'en choisir certains que je décide d'explorer et de remettre en question ou en doute, je cherche aussi la sensibilité des élèves à cela, car certains de ces signes, faisant écran, devront être déstabilisés, tandis que d'autres seront des états utiles et indispensables.

Mais il y a deux autres raisons à mon intérêt.

La première est que nous sommes toujours très étonnés de ce que nos interlocuteurs n'aient pas à l'esprit certaines de ces idées que, pour nous, représentent de tels signes. Donc une question de partage d'implicites autour de ces "évidences". L'évidence quand elle n'est pas partagée aveugle l'interaction. Donc pour le contrôle de ces signes, j'ai besoin de situations critiques.

La seconde est, j'y reviens, ce jeu des divers signes qui sont comme en concurrence : la déstabilisation d'un signe provenant de la manifestation d'autres signes. Et c'est ici que l'on ne peut pas parler de contextualisation. Certes, on peut dire qu'on va replonger le savoir dans un contexte situationnel où il fonctionne - quoi que je pense que le savoir contrôle plus qu'il ne fonctionne. Néanmoins ce plongement va faire se manifester des signes qui vont emporter la situation (la sémiose). Et si cela peut ainsi dévier, on ne peut pas dire que ce soit une contextualisation.

J. Brun dit que cette déviance est relative au jeu qu'il y a entre les deux systèmes de contrôles : *contrôle interne* (cognitif, dans lequel Brun va jusqu'à placer la signification que le sujet donne à ce qu'il fait) et *contrôle externe* (Brun 1997, 1998). Je ne suis pas certain que cela saisisse ce qui est en jeu. Certes dans le pliage d'une feuille A4 en 2, puis 4 etc., interviennent des éléments perceptifs, pas tous conscients, qui sont du type *interne*, et qui ne peuvent qu'échapper au processus de recherche du contrat, mais c'est le mot "contrôle" qui pose problème. Brun dit que la modélisation de Brousseau suppose un milieu dénué d'intention didactique. Le hic vient que le rapport à ce milieu est de toutes les manières sous le sceau d'une intention (celle-ci ou une autre, la relation est intention et c'est justement ce qu'exprime la nécessité d'un signe triadique).

Ce qui veut dire que, pour moi, le milieu et la situation ne sont pas des entités extensibles, sans fermetures, ruptures et transformations. Si par exemple mon interlocuteur arrive sans encombre à reproduire mon pliage et découper mon arc de cercle dans le feuillet, c'est que ce pliage est le signe d'un secteur, et que cela actualise quelque chose du savoir sur les secteurs de disques. Et si il n'y arrive pas, comme mon interlocutrice (adulte) de l'épisode 4, alors nous aurons affaire à une toute autre situation.

Dès que la question de savoir si la distance de A à B est ou non la même que la distance de B à A est posée et ouverte, c'est-à-dire non réduite par une réponse, on est dans une situation singulière à propos de la distance qui va appeler à un autre contrôle et amener sur le tapis d'autres savoirs que ceux qu'on a l'habitude de faire intervenir.

Dans ce sens, on peut dire que l'intention didactique représente toujours un biais (je prétends que finalement c'est idem dans toute expérimentation de type déductif), ou que, ce qui revient au même, l'ouverture de cette question par les moyens que j'ai imaginés, biaisent et déjouent inutilement ce que l'enseignement s'est ingénié à réussir : rendre l'entreprise d'enseignement

de la distance insensible à cette question. Et cela certes ce n'est pas par simple jeu de contrat qu'on l'obtient, mais par manipulation du milieu et scotomisation de la réalité (on sélectionne les expériences que l'on ménage aux élèves).

On pourrait dire que cette question ne se pose en définitive qu'à ceux qui savent d'emblée la résoudre. Certes c'est bien ainsi que j'y suis arrivé. Toutefois ce ne fut pas de but en blanc, mais bien plutôt à l'occasion d'une observation. Je me le rappelle fort bien :

Il s'agissait de mesurer à l'aide d'un double mètre la distance du tableau noir à une table qui se trouvait en face de ce dernier, à une distance de plus de 2 mètres. Un élève refusait de reporter le double mètre à partir de l'extrémité du premier report parce que pour lui, on ne pouvait pas mesurer autrement qu'à partir du tableau ou de la table, et pas depuis "le vide" entre les deux. Il lui fallait un appui au double mètre. Donc il a reporté le double mètre, marqué le point extrémité, puis comme il s'était suffisamment rapproché de la table, avait retourné son double mètre pour non seulement en appuyer une extrémité à la table, mais encore le tourner en sorte que la graduation commence bien à 0 à cette table. Ceci lui a causé des problèmes pour donner la mesure totale. Il aurait certes pu additionner 2m au nombre trouvé dans la seconde partie de sa mesure, mais ne le faisait pas, faute de signification à donner à cette double cote du point qu'il avait marqué entre ses deux mesurages.

Est-ce bien ici une question de contrôle interne, de signification apportée par le sujet à ce qu'il fait ? On peut dire ça...

Ce que je ne vois pas, c'est ce que les études d'inspiration psychologique peuvent nous apporter pour ce genre de questions. La nécessité de prendre en compte ces facteurs cognitifs ne fait pas l'ombre d'un doute ! Quant à savoir quelle psychologie nous serait utile, c'est une autre paire de manches. Je veux dire par là que si je sais maintenant que dans certaines conditions les sujets peuvent en venir à douter que la distance de A à B soit la même que celle de B à A, si je sais aussi un moyen d'arriver à le leur faire douter, je sais par ailleurs aussi que la grande majorité des gens apprennent les savoirs de mesure (longueur et distances) en passant à côté de ce problème, et ce jusqu'à ce que ces savoirs soient si bien installés que la question devient sinon inconcevable, du moins vide de toute pertinence. Autre exemple, pour savoir lequel de deux points sis hors d'une droite est plus proche de la droite, il n'est point besoin de définir la distance d'un point à une droite, ni, a fortiori, de faire des mesures, et, ce, même lorsque ces deux points ne sont pas du même côté de la droite. Certes, dans ce cas, "proche" est réduit à n'être qu'une relation d'ordre. Etc.

En fait la question est bien celle de la réalité du milieu.

Réflexions 3 : Milieu.

Un bon exemple parce qu'en apparence anodin est celui de plier une feuille A4 en quatre. Il y a mille manières de le faire, disons en 4 parts égales, mais les gens le feront plus par des plis parallèles aux bords que par des plis en diagonale, parce que c'est matériellement plus facile. Certes, mais pourquoi est-ce plus facile ? Parce que pour plier, ils se basent sur des reports et que pour cela, ils font usage implicitement du parallélisme et/ou de la perpendicularité des

bords. Donc ils utilisent implicitement les propriétés de la feuille A4 (on peut dire que ce sont des modèles implicites, des théorèmes en acte ou comme on voudra, peu m'importe).

Cela dit, pour certains ce sera plus "naturel" de plier la feuille en large (pli médian parallèle à la largeur du rectangle), puis en large de la moitié, donc faire des plis transverses pour obtenir des quarts. Là encore, ils sont "guidés" par la forme de la feuille et le fait que si je plie la feuille A4 en deux en large, j'obtiens encore une feuille rectangulaire de même proportion. Ce qui fait que **le second pli est analogue au premier** mais sur une moitié de feuille A4 (on peut dire que la manière de plier est invariante). Si j'avais plié en long, alors j'aurais une moitié assez longue et pour plier une fois encore en deux j'aurais fait un pli *moins analogue* : soit parce que c'est si long (en proportion) que je plie à nouveau en deux, mais en large, donc autrement, soit, si je le plie une nouvelle fois en long, j'aurais obtenu une bande encore plus longue (en proportion) etc.

Tout cela est donc réglé sur des perceptions des proportions de mes morceaux de feuille. Ainsi je ne travaille pas sur des feuilles matérielles qui seraient seulement du papier mais sur des feuilles qui ont une forme, etc. Il y a bien des représentations en jeu. Et ces représentations sont liées, puisqu'il y a des pliages plus ou moins analogues que je puis faire. De plus, je sais d'expérience qu'en pliant je vais arriver à une marque de pli rectiligne ce qui est encore une propriété du papier certes, mais qui implique de la perception, de l'expérience etc. donc de la représentation. Etc.

Dans un échange entre divers sujets, il faut aussi s'entendre sur les représentations qui seront à retenir.

Maintenant si je dis que ce milieu est fait de la feuille de papier que je plie, il n'est pas matériel puisque non seulement il y a du papier et un sujet, qui sont certes des entités matérielles, mais il y a une action de quelqu'un sur la feuille et cette action n'est pas en elle-même matérielle. De plus, cette action suppose que le sujet perçoive etc., donc encore des propriétés non matérielles. Il n'y a donc pas de milieu matériel en soi.

Par ailleurs, la matérialité du milieu n'est pas ce à quoi un sujet a accès. Lui a accès à quelque chose de sémiotisé. C'est donc une abstraction du chercheur et du modélisateur que de parler de milieu matériel. Une telle abstraction suppose tout un travail de différenciation. Par exemple, différencier une feuille de papier du feuillet qui est la même feuille, mais pliée en deux. Une différence notable est que le bord du feuillet comporte plus que les bords de la feuille d'où il provient : il y a certes les bords de la feuille de départ qui sont repliés sur eux-mêmes, mais il y a aussi ce qui sera les lignes de plis une fois le feuillet re-déplié. Et dans ces expériences, les plis ont aussi deux matérialisations, soit être le bord du feuillet soit être une marque sur la feuille une fois qu'elle sera dépliée.

Si maintenant je réitère mon pliage, et que je plie en deux un feuillet, je vais appliquer bord sur bord les bords du feuillet comme j'ai plié bord sur bord les bords de la feuille de départ. Etc.

Au bout du compte, pour décrire tout cela, j'ai donc du différencier feuillet et feuille et différencier bords de feuille et bords de feuillets. Ce travail de différenciation est ultérieur à celui d'apprendre à plier une feuille en quatre, parce que je puis apprendre à réaliser des plis sans avoir besoin de faire la différence.

Mais j'en aurais besoin pour décrire les actes de pliage, donc pour dire à quel milieu a affaire le sujet. On pourrait dire éventuellement que le milieu matériel n'est jamais un milieu pour l'élève mais pour l'observateur, mais cela ne change rien à la chose. C'est un milieu tel que se le représente l'observateur et il se le représente ainsi selon ce qu'il se propose d'observer.

Par exemple, fort de cette analyse des pliages, je me propose d'observer comment le pliage en deux puis en deux est pour les élèves : faire deux fois la même chose, et si c'est le cas, qu'est-ce que cette représentation va leur jouer comme tours, ou encore dans quelles situations ils vont devoir entamer un travail de différenciation. Etc. Je vais donc confronter une représentation du milieu telle que je l'ai modélisée selon mes propres représentations avec une autre, celle de l'élève.

En règle générale, on peut dire que ce à quoi on a accès à prime abord est toujours un milieu non différencié (c'est la signification des boucles de représentation de J. Brun dans son analyse des protocoles des deux distances - Brun J. & Conne F., 1990), ou, si on veut, munis de représentations non différenciées. Lorsqu'on modélise le milieu en voulant le dissocier des représentations que les sujets s'en font, on ne peut pas le faire en enlevant les représentations, mais en englobant les représentations non différenciées des sujets dans nos propres représentations abstraites et différenciées, donc un milieu n'est matériel que si il est plongé dans un espace de représentations plus complet et plus différencié que celui du sujet, ce n'est donc pas un milieu de "départ", sur lequel le sujet va construire.

L'illusion empiriste est de croire que le monde se donne à nous tel qu'on le connaît, tel que la science nous dit qu'il est.

Références faites dans le texte.

Brun J. 1997, De l'adaptation au jeu : la théorie des situations et les rapports enseignement /apprentissage. Colloque à Université de Montréal, 18 pages. Non publié.

Brun J. 1998, Equilibres des systèmes didactiques et contrôles internes et externes des sous-systèmes cognitifs le constituant (introduction Conne F.), Compétences complexes dans l'éducation et le travail : qu'est-ce que la pensée?, Suresne 1998, Cd-rom, Vergnaud et Gilis ed, 2003.

Brun J, Conne F. 1990, Analyses didactiques de protocoles d'observation du déroulement de situations. Education et Recherche, n°3, pp.261-186, Editions universitaires Fribourg.

Conne F. 1992, Savoir et connaissance dans la perspective de la transposition didactique, Recherches en didactique des mathématiques, 1992, n° 12 / 2-3, pp. 221-270.

Ce texte a été publié en 1996 comme 5ème chapitre du livre: Didactique des mathématiques de la collection *Textes de base en Pédagogie*, pp 275-338, sous la direction de J. Brun, Delachaux et Niestlé, Lausanne, Paris, 1996.

Conne F. 2001-2003, Interactions de connaissances et investissement de savoir dans l'enseignement des mathématiques en institutions et classes spécialisées. in *La spécificité de l'enseignement des mathématiques en adaptation scolaire*. Revue virtuelle, Education et Francophonie, Schmidt, S et Maury, c. eds, Volume XXXI, numéro 2, automne 2003.

Episode 6

02.10.03 - 13.01.16

Partage de feuilles A4 en moitiés

Ainsi donc est posée la question du rapport entre certains savoirs et le milieu. Par exemple, je veux travailler sur la notion de moitié et de partages en deux d'une feuille rectangulaire. Une idée sera de travailler sur le fait qu'il y a beaucoup de manières simples mais manifestement distinctes de partager une telle feuille de papier en deux moitiés. Le savoir en jeu s'exprimera de diverses manières : qu'une moitié de feuille peut prendre diverses formes, ou que toutes les moitiés sont égales entre elles, etc. On imagine facilement que l'établissement de tels constats se fera soit perceptivement, soit par des moyens de comparaisons de surfaces comme superposition, découpages et recombinaison (surfaces *équidécomposables*) soit, ce que je juge plus subtil, en considérant que comme les moitiés se complètent elles-mêmes pour donner le même tout, elles ne peuvent qu'être égales entre elles (surfaces *équicomplémentables*). Avec des élèves jeunes on peut espérer mettre en conflit des jugements perceptifs avec des constats de décomposition ou de dédoublement voire aussi mettre en conflit ces deux types de moyens de constater l'égalité de toutes les moitiés.

Prenons donc un artefact omniprésent dans les classes et dans le milieu des élèves, la feuille de dimension A4. La feuille A4 est un artefact non pas seulement parce que c'est un produit industriel, mais aussi, et pour mon propos surtout, parce qu'on a *inscrit* dans ses dimensions une relation mathématique résumable en ce rapport de la longueur à la largeur qui est comme $\sqrt{2}$ est à 1. Si on l'a voulu ainsi, c'est pour en faire usage en particulier pour une propriété associée : si je partage dans la largeur une feuille A4 en deux moitiés, j'obtiens une feuille de dimension réduite mais dont les proportions sont semblables à la feuille A4 : toujours le rapport de $\sqrt{2}$ à 1, on la dit de dimension A5. On peut de même facilement calculer (via le théorème de Pythagore) que la diagonale d'une feuille A4 vaut $\sqrt{3}$ la largeur.

Première description d'expériences.

Il s'agit d'activités de comparaison de moitiés de feuilles A4 qui s'est imposé à l'expérience. Il est assez aisé de plier une feuille en deux, bords à bords, et de la couper (coupe livre, ciseaux, marquer le pli pour faciliter l'action de déchirer.) À priori il n'y a pas de raisons de préférer un pli dans le sens de la largeur de la feuille à un pli dans le sens de la longueur.

Pour que mes lecteurs me comprennent bien je précise ce que j'entends par les expressions : découper *en large*, *découper en long*, que j'emploierai autant pour décrire un certain type de pliage qu'une découpe. On dit que l'on scie en long ou dans le sens de longueur d'un tronc lorsqu'on veut fabriquer des planches, si on veut faire du bois de feu, on sciera en travers du tronc, dans le sens de la largeur, je dirai donc qu'on le fait *en large*. Je dirai de même pour une découpe de feuille rectangulaire que je coupe ou plie *en long* lorsque ma découpe, ou bien mon pli, sera parallèle à la longueur. Je dirais *en large* lorsque la découpe, ou le pli, sera parallèle à la largeur de la feuille. Si je découpe, ou plie, en moitiés, ou encore au milieu, j'aurais peut-être aussi à dire que la découpe, le pli, sera médian(e) (longueur médiane, largeur médiane, en relation à ce que la médiane d'un triangle découpe le triangle en deux triangle d'aire moitié).

Si j'utilise la technique du pli marqué puis du déchirement pour partager la feuille, j'ai avantage à plier et déchirer en large, vu que c'est la ligne la plus courte donc sur laquelle le contrôle de mes gestes est le plus facile (mais la proportion longueur largeur intervient aussi dans ce contrôle).

Cela dit, revenons à notre feuille A4 et notre partage en deux moitiés avec la technique de pliage. Si j'opère un partage en large, j'obtiens deux moitiés qui ont cette particularité que leurs dimensions seront dans la même proportion que la feuille de départ. Elles seront perceptivement semblables (et elles le sont au sens mathématique du terme). J'obtiens donc par partages successifs des formats A5, A6, A7 etc. selon la convention adoptée par les imprimeurs. En effectuant un tel partage je découpe la longueur de la feuille en deux et elle devient la largeur de la nouvelle moitié. Et ainsi de suite **en alternance**.

Si par contre je fais le partage en long alors j'obtiens un rectangle moitié, perceptivement plus allongé que l'original. Et si je poursuis le découpage de la même manière, sans rien alterner, j'obtiendrai des rectangles, en proportions de plus en plus allongées. Or ces proportions dans les dimensions des rectangles jouent un rôle majeur dans la perception des rectangles. C'est un trait saillant des formes rectangulaires.

Je puis donc proposer aux élèves deux partages en moitiés l'un dans le sens de la longueur et l'autre dans le sens de la largeur ó par exemple en m'assurant que le partage se fasse soit sous les yeux de l'élève, soit que l'élève le fasse de lui-même (mais la variante qui propose deux moitiés déjà découpées sans évoquer comment je les ai obtenues est aussi envisageable bien entendu). Je puis alors demander à l'élève un jugement de comparaison des aires, sont-elles égales ? Sinon laquelle est la plus grande, et comment peuvent-ils en être certain ou encore comment peuvent-ils justifier leur réponse, etc.

Ici les expériences que j'ai pu faire avec des élèves mêmes adolescents ont été surprenantes et instructives. Pour certains la question n'est pas du tout évidente. Mais il y a mieux. En effet les propriétés mathématiques de ces feuilles font que leur longueur et leur largeur ne sont pas commensurables. Ce qui veut dire qu'une comparaison par équidécouposition infinie pourrait se présenter.

Imaginez (ou essayez) que vous comparez deux moitiés de feuilles A4, l'une découpée standard A5 et l'autre découpée dans le sens de la longueur. Selon la prégnance perceptive que vous attribuerez à la longueur ou à la largeur de la feuille, vous jugerez de leur inégalité ou leur égalité. On vous demandera alors de justifier votre réponse. Supposez alors que vous le fassiez en superposant vos feuilles. Pragmatiquement et perceptivement, il y a de fortes chances pour que vous les superposiez longueur sur longueur, largeur sur largeur, c'est-à-dire de telle manière à recouvrir une aire maximum. Mais vous pouvez aussi les superposer longueur sur largeur, largeur sur longueur. J'ai vu les deux procédés.

Si vous superposez de la seconde manière, longueur sur largeur et vice et versa, je dirai *en travers*, les parties qui dépassent seront disposées comme deux rectangles de dimension A6, en même position, donc perceptivement facilement repérables comme identiques. J'ai pourtant moins souvent observé cette superposition que la première (sans doute parce que la surface de la superposition est moindre dans ce second cas que dans le premier).

Si vous superposez de la première manière, alors vos chutes seront deux rectangles moindres que la moitié des rectangles à comparer mais qui ne seront pas perceptivement semblables, l'un des deux sera à nouveau plus allongé que l'autre. Il vous faudra alors réitérer la procédure de recouvrement et soit vous le ferez *en travers*, alors vous obtiendrez des parties qui dépassent perceptivement semblables et pourrez conclure, soit vous procéderez longueur sur longueur, largeur sur largeur, et vous aurez des formes perceptivement non semblables. Et ainsi de suite jusqu'à ce que perceptivement vous ne voyiez plus de différences. (Théoriquement ceci est infini, vu l'incommensurabilité des dimensions de la feuille de format A4 de départ).

Supposons cependant que des sujets persistent dans de tels découpages vouloir recouvrir les dimensions non commensurables sans être dissuadés. Pourquoi les en dissuader ? Pour avoir observé plusieurs fois des élèves à ce genre de tâches je peux dire même que certains trouvent cela très amusant et donc persistent par plaisir à faire de si petits découpages. Au bout d'un moment, ils estimeront les surfaces égales, soit en négligeant les interstices soit en disant que *petit égale petit*. D'ailleurs les morceaux n'auront plus de forme identifiable.

Comme c'est décrit ça a l'air improbable. Je n'ai pas fait d'observations systématiques sur un très grand nombre d'élèves (je n'ai pas les moyens de me lancer dans de telles recherches), mais, à deux ou trois reprises, j'ai observé des élèves superposer, découper, superposer, découper, superposer etc., jusqu'à avoir de tous petits morceaux (dont certains se sont perdus d'ailleurs) ! De toutes les manières ce qui m'importe d'observer est l'instant, le moment où la relation $\frac{1}{2}$ va s'imposer (donnée intuitivement par la perception, puis mise en opération activement par recouvrement ce qui suppose de positionner les pièces correctement et qui s'observe généralement par une anticipation explicite que fait le sujet, anticipation que je puis à loisir encourager ou tenter de déstabiliser).

Je suis donc plus sensible 1° à la rapidité avec laquelle l'idée du bon découpage va venir à l'élève et 2° la facilité avec laquelle ultérieurement il retrouvera cette idée. Le sens de l'expérience, au niveau où je prends les élèves est bien plus ce contrôle des jugements perceptifs par le savoir (ici en jeu les relations perceptives de moitié et les relations mathématiques d'égalités d'aires) que leur débrouillardise avec des séries infinies de recouvrements. Je dis bien contrôle. D'une part il faut apprendre à ne pas trop se fier à des relations perceptives (par exemple la prégnance des dimensions les plus grandes peut faire croire que la moitié la plus longue est la plus grande, bien des élèves interrogés en sont là et ce que je leur propose cherche à les faire évoluer sur ce point). D'autre part, il est utile aussi de chercher des indices perceptifs qui vous guident vers la solution (ici des rapports de moitié). Dit autrement la question est bien pragmatique, c'est celle de la pertinence de certains traits perceptifs dans nos jugements géométriques. Je crois que c'est bien là le problème qui se pose à tous les débutants en géométrie.

En résumé il y a de quoi observer les élèves et les relancer dans leur activité, par contre suggestions. Cette ouverture de mes préjugés savants est venue de mes expériences avec les élèves, je n'avais pas pensé à tout ça d'un coup. Bien entendu on peut développer pas mal de choses autour de cette idée. Je l'ai fait, ça roule très bien. Il y a des élèves qui ne s'en sortent pas, d'autres découvrent l'astuce, mais quelles que soient leur performance cela leur parle beaucoup et il n'y a aucune difficulté à dévoluer ce problème. C'est ce que j'appelle une activité adéquate, appropriée, pertinente.

Je voudrais creuser encore un peu l'interprétation de l'expérience du milieu feuille de dimension A4 en direction de ce rapport antagoniste entre savoir et expérience. En fait le savoir occulte et cache toujours beaucoup de l'expérience, en particulier parce qu'il favorise un type d'interprétations (il vaudrait mieux dire de sémiotique) et par conséquent privilégie les signes qui lui sont directement associés. Ainsi nous partageons des feuilles A4 en 2 en 4 etc. sans même y penser, sans penser ce que nous faisons, ou plutôt sans y apporter attention, ce qui veut dire très exactement pour Peirce sans les interpréter, sans les signifier, id est sans en faire un signe. C'est pourtant à ces signes que mes capacités d'observation des élèves vont se mesurer ! Ainsi ce contraste entre un partage en deux laissant invariante la proportion des dimensions avec cet autre partage qui allonge au contraire cette proportion etc., toutes ces choses qui jalonnent nos expériences et que nous ne voyons pas, parce que nos savoirs sont aussi nos illères !

Ainsi une expérience emporte avec elle toute une interprétation : faire l'expérience de quelque chose est un processus interprétatif. Dire qu'une expérience est ou non à la portée de quelqu'un tient à un tel processus, bref la question de l'accès à l'expérience est une question de signe. L'issue de l'expérience est tout aussi quelques signes, qui justement viendront schématiser les choses afin de soutenir en représentation des savoirs généraux.

En ce qui concerne mes recherches cela débouche sur un schéma de protocole.

En retour le savoir permet de schématiser ce genre d'expérience en une esquisse de protocole. (Excusez pour les redites).

A. Cadre général et qualification sémiotique.

1° Plis par rabattement de papiers de formes polygonales. (Légisigne.)

Le pliage se fait en rabattant une partie du morceau de papier (pour simplifier on le supposera de forme polygonale, cette restriction n'étant pourtant pas strictement nécessaire) sur une autre. En rabattant par recouvrement exact d'une partie sur une autre, on obtient des moitiés de ce morceau. Pour de tels pliages, on a besoin d'un contrôle dont on peut schématiser les règles ainsi.

On peut rabattre un côté de notre morceau de papier sur lui-même, et le rabattre avec exact recouvrement ou non; on peut rabattre un côté sur un autre, qu'ils soient adjacents ou non, éventuellement parallèles; on peut aussi rabattre un sommet sur un autre, ou un point sur un autre, qu'on aura marqués d'une manière ou d'une autre, sans qu'ils soient forcément sur le bord.

À cela on ajoutera qu'on peut enchaîner ou non les plis.

On joue donc sur des actions alternées de pliages et dépliages.

On peut interpréter un tel schéma comme "syntaxe d'action" ou en termes peirciens comme un légisigne.

2° Plis bissectrices, médiatrices, médianes. (Symbolique.)

On peut donner des significations à ces plis en termes de géométrie élémentaire des polygones.

Plier un côté sur lui même laisse une marque de pli perpendiculaire à ce pli; plier un côté sur un autre laisse une marque de pli bissectrice de l'angle que forment ces côtés, et, ce, même si ils ne se coupent pas; bien entendu plier un côté sur un côté parallèle laisse une marque de pli médian de la bande que forment ces côtés, c'est assimilable à une bissectrice; plier sommet sur sommet, ou point sur point, laisse une marque qui est médiatrice du segment qui relie ces sommets ou points.

Ces interprétations de la "syntaxe" décrite ci-dessus en font un modèle de cette petite géométrie, et la relation est ici symbolique.

La signification des marques des plis ainsi interprétées est relative aux formes des morceaux ou feuillets dans lesquels elles s'inscrivent. Elle sera différente si on se rapporte aux formes respectives des feuillets non dépliés, des feuillets seulement partiellement dépliés, ou du morceau de papier entièrement déplié.

3° Sur le pliage d'une feuille rectangulaire selon une de ses diagonales. (Dicent.)

Sur le plan de l'expérience et non plus des principes et des significations qu'on leur donne, on se trouve confronté à plein de choses, je pourrais dire d'événements, certains imprévus, etc. qui vont occuper notre esprit et qui ne sont ni syntaxiques, ni de géométrie des polygones.

Par exemple, il n'est pas aisé de plier un rectangle selon une diagonale, et ce, d'autant plus qu'il sera long. Si on examine les choses, on trouvera que la difficulté résulte de la conjonction de trois aspects au moins : la longueur du pli, le fait que les deux parties ne se recouvriront pas, l'angle aigu du triangle est petit.

Aucun de ces aspects n'étaient (et ne sont) pris en charge ni par la syntaxe, ni par l'interprétation géométrique.

4° En retour, explicitation géométrique de ce qui advient dans l'expérience.

Cela ne veut pas dire bien sûr qu'ils ne peuvent trouver une interprétation géométrique, ni qu'on puisse à leur propos imaginer quelques règles d'actions. Ainsi, un procédé permet de produire très facilement le pli diagonal, et je l'indique ici car il est peu connu, et, justement, il est tellement dicent qu'il surprend beaucoup de gens.

Règle d'action : on commence par plier le rectangle selon un pli médian obtenu en superposant deux de ses sommets opposés. (Notez que, dans le cas d'une feuille de format A4, la marque de ce pli va couper les bords - longueurs - du rectangle au 3/4.) Il n'y a pas de superposition des parties, bords à bords, mais la superposition des sommets suffit à contrôler parfaitement le pli. On plie ensuite ce "feuille" par superposition bords à bords (ou encore par superposition exacte du premier pli sur lui-même, ou encore comme bissectrice du coin du feuillet opposé au premier pli : voilà différentes manières de considérer ce second pli).

Evénement : lorsqu'on déplie la feuille, on obtient deux marques de plis médians dont l'une est une diagonale du rectangle.

Interprétation géométrique : le second pli laisse une marque sur la diagonale du rectangle; le premier pli laisse une marque sur la médiatrice de cette diagonale, c'est aussi une médiane du rectangle qui le divise en deux moitiés identiques et de même aire, symétriques l'une de l'autre par demi-tour. Les quatre parties que la combinaison de ces plis délimite dans le rectangle n'ont ni toutes la même forme, ni non plus toutes les mêmes aires. Plus précisément, elles sont deux à deux identiques par demi-tours.

Evénements :

a) On a plié en quatre par des plis médians sans pour autant délimiter de quarts.

b) La combinaison des plis est certes commutative, toutefois, ce sur quoi on joue pratiquement (id est pragmatiquement et empiriquement) est qu'il est bien plus aisé de procéder en commençant par le pli appliquant un sommet du rectangle sur son opposé.

La surprise provient du fait que le pli produit sur le feuillet, et dont la trace finale sera la diagonale, est un pli bissecteur d'un coin (angle) du polygone que forme le bord externe du feuillet obtenu par le premier pli, mais ne l'est pas d'un coin des deux feuilles qui le constituent. Une fois le morceau entièrement déplié, la marque du pli ne sera pas bissectrice des coins du rectangle qu'elle relie.

c) Etc.

Dans ces dernières explications, j'interprète l'expérience elle-même et j'use du modèle géométrique pour comprendre ce qui se passe - et, en particulier, démontrer l'effectivité de mon petit algorithme. On est alors passé du niveau dicent de l'expérience à un niveau argumental.

Notes:

1° Autre légisigne symbolique, modèle grosso modo analogue de ces propriétés géométriques : les constructions à la règle et au compas. L'entier du propos ci-dessus peut être repris pour décrire ce cas. La résistance de l'expérience provient alors des limites instrumentales imposées : compas, règle non graduée, pas d'équerre. Notez que ces instruments ne sont pas que matériels, mais qu'ils sont supports d'actions spécifiques, tout comme le papier est support spécifique aux pliages. Dans le modèle règle-compas, pour construire une médiatrice d'un segment ou une bissectrice d'un angle, on construit les sommets d'un losange (ou d'un rhombe) dont une diagonale est la droite cherchée.

Dans le cas du pliage, notez que j'aurais aussi bien pu considérer une règle. C'est un instrument que les professionnels du pliage utilisent. Ils "cassent" leur papier le long de l'arête de cette règle, et peuvent alors "tirer" facilement n'importe quelle marque de pli entre deux points. Dans ce cas le pli de la diagonale d'un rectangle s'obtient directement. Dans ma description ci-dessus, j'ai exclu cet instrument de mes considérations.

Remarquez que par rapport aux "constructions à la règle et au compas", la "construction d'une diagonale du rectangle à l'aide de pliages" présente une interversion entre diagonale et médiatrice/bissectrice. En effet pour construire le pli sur la diagonale d'un rectangle, on construit la médiatrice d'un segment, lui-même, médiatrice de la diagonale cherchée (ou, on peut le voir aussi ainsi, on construit la bissectrice d'un angle, celui de la forme du bord externe du feuillet obtenu après le premier pliage).

2° Je renvoie le lecteur à mon article : *L'expérience comme signe didactique indiciel*, RDM 28/2, 2008, et au propos des pages 235-240 (à propos d'une confrontation à une expérience de pliage idoine de la propriété de la somme des angles d'un triangle). Cet exemple et cette analyse pourraient être entièrement reprises selon les termes proposés ci-dessus et on y retrouve, là aussi, une commodité dans le choix d'un pliage particulier pour illustrer la propriété de la somme des angles d'un triangle. Ceci illustre en outre le fait que dans la pratique de l'enseignement de la géométrie, l'expérience est généralement invoquée afin de démonstration, ce qui est bien une fonction indicielle.

B. Retour à l'expérience de comparaison des moitiés.

Je partage ou fais partager ma feuille A4 en deux moitiés en la coupant selon la diagonale, éventuellement avec des ciseaux, et si je partage deux autres feuilles A4 en une fois en long et une fois en large. Je demande à des sujets de comparer les aires de ces trois sortes de moitiés.

1° Si on procède par recouvrement des morceaux de feuilles, et que l'on compare les morceaux qui dépassent, on procèdera à la **recherche d'une équidécomposition**.

1.1 Moitié rectangulaire comparée à moitié triangulaire.

On pourra procéder à diverses tentatives de recouvrement d'une moitié par l'autre et, dans le cas d'un feuille de dimension A4, un seul des recouvrements possibles bord à bord donnera une réponse claire, celui pour lequel on fait recouvrir les moitiés exactement sur l'un des cathètes du triangle. Dans ce cas, les parties débordantes de chacune des moitiés sont égales, on le perçoit assez facilement et on peut s'en convaincre par un découpage. Les autres cas ne permettent pas de conclure. Il existe un recouvrement non bord à bord qui, très joliment, permet de conclure mais ceci se montre mieux avec un pliage.

Indication : plier le triangle rectangle de sorte à rabattre les cathètes sur eux-mêmes par leur moitié, de sorte que les angles non rectangles viennent se rabattre exactement dans l'angle droit. On a obtenu un feuillet de forme rectangulaire qui est le quart de notre feuille de départ et se trouve deux fois dans ses deux sortes de moitiés rectangulaires. Ceci m'a donné l'occasion d'une très jolie observation entre deux élèves de l'ES, là encore pas du tout anticipée de ma part.

1.2 Moitiés rectangulaires entre elles.

Si maintenant je cherche à comparer les moitiés rectangulaires de ma feuille, elles ont ceci de particulier qu'elles sont décomposables en deux quarts de feuille A4 (donc dimension A6) disposés respectivement "en long" et "en large". Je rappelle ce que j'ai décrit ci-dessus. Si je superpose les deux moitiés de feuille A4, de manière "transverse", longueur de l'une des

moitiés en travers de la largeur de l'autre (et vice et versa), cela apparaîtra aisément et je pourrais conclure à l'égalité. Si je dispose les deux moitiés de l'autre manière, longueur sur longueur, largeur sur largeur, je ne pourrais pas conclure. Pourtant les deux parties rectangulaires qui ne se recouvrent pas seront dans une relation identique à mes deux moitiés, à savoir que si on les recouvre en travers (longueurs sur largeurs), on pourra facilement conclure. Alors que si on "persiste" à les recouvrir longueur sur longueur et largeur sur largeur, on ne pourra pas conclure immédiatement. Et ainsi à l'infini, vu que les dimensions de la feuille A4 sont incommensurables.

Remarque concernant antagonisme savoir / expérience.

Ces relations sont générales, c'est-à-dire valables pour tout format de rectangle dont on compare les deux types de moitiés, et ce, indépendamment du fait que dans le cas des rectangles de format A4, ses dimensions soient incommensurables. Cette généralité suppose qu'on ait identifié les critères décisifs de cette expérience, et ceux-ci sont le fruit d'une abstraction schématisante permettant de filtrer le trop plein de relations que fournit l'expérience. Néanmoins le cas des formats A4 est intéressant du point de vue de l'expérience pour le contraste qu'il permet entre des comparaisons d'aires quasi immédiates et des découpages à l'infini. Les recouvrements qui "marchent" se distinguent donc clairement en regard de ceux qui se perdent à l'infini.

Là encore nous avons des relations à trois, et pas seulement une opposition duale entre savoir et expérience.

2° Equicomplémentarité par simple dédoublement

Comme nous avons affaire à des moitiés de feuilles de dimensions identiques, il est aisé de trouver que par dédoublement on aboutit au même tout. Pas certain cependant que tous soient convaincus parce que cela suppose qu'on ait bien différencié les choses : les moitiés sont différentes, par la forme, mais égales, par l'aire. On n'aura pas tant fait l'expérience que toutes les moitiés sont égales mais plutôt rattaché une expérience matériellement inaccessible à une propriété formelle donnée par définition. En effet ici l'équicomplémentarité consiste en une tautologie.

3° Relation entre les deux procédures.

Il y a donc ici tout un jeu entre diverses "compositions de formes". Équi-décomposition : des mêmes pièces de puzzle s'agencent de manières différentes pour donner des formes différentes. Équi-complémentation : la même forme se décompose en puzzles de formes différentes. L'objet de ces expériences est tout autant l'idée de forme que celle d'aire.

Conclusion sous forme de rebond.

Je ne veux pas conclure sans indiquer une autre piste, une autre sémiose qui s'ouvre ici. Je veux relater une observation très surprenante que j'ai faite avec un élève de 11 ans (toujours souffrant psychologiquement mais par contre bien plus à l'aise scolairement que ceux dont j'ai parlé dans cet épisode).

Ce qui se passe avec le partage en moitiés de rectangles A4 ne se retrouve pas avec des feuilles carrés. Le partage en feuilles moitiés donne ce type de rectangles que l'on obtient en

doublant un carré. On trouve deux types de quarts. On a donc des expériences contrastées et intéressantes selon les rectangles. Ce type de considération m'a permis l'an passé de saisir immédiatement quelque chose qui gênait un élève, qu'il n'arrivait pas à exprimer et que pour ma part je n'avais jamais observé jusque là.

Cet élève savait qu'en doublant un carré on obtenait un rectangle. Et il le savait si bien qu'il avait comme extrapolé, sans pouvoir vraiment cerner son erreur, qu'on devrait pouvoir partager tout rectangle en deux carrés moitiés. Si on examine de près son argumentation, on voit qu'à l'expérience les choses ont pris une tournure plus subtile (la connaissance est processus). En effet il savait que la feuille A4 était de forme rectangulaire (il avait toutes les peines du monde à prononcer ce mot). Et pour le justifier il a pris ce partage en deux comme critère, comme "test de rectangularité", si je puis dire ainsi. Il a bien entendu partagé sa feuille en large et a bien entendu aussitôt reconnu un rectangle (de la même proportion, mais A5). Il en fut perplexe, très perplexe. Il a alors essayé diverses choses. C'est cela surtout qu'il est intéressant d'observer.

Je me contenterai ici de relever deux pistes qui se sont esquissées et deux suites à cette expérience.

La première piste qu'il a tenté était de chercher à considérer que si le rectangle de dimension A4 ne se décomposait pas en 2 carrés, elle se décomposait en grossièrement 3 ou 4 carrés. Il a donc entièrement joué sur les imprécisions perceptives et des dessins à main levée. La piste n'a rien donné dans nos échanges.

Une autre piste qui s'est présentée et qui a survécu plus longtemps fut celle de pliage réitérés de moitiés ce qui a imprimé à la feuille de départ un quadrillage (de cases rectangles tous semblables à A4). Puis il a oscillé entre prétexter que ces cases étaient des carrés (plus les rectangles sont petits plus il est possible de les croire carrés) et compter deux cases comme une lorsque je lui demandais le nombre de cases du quadrillage. Ce que j'interprète comme une sorte de réitération de partition jusqu'à obtenir une figure qu'il pourrait considérer comme un carré, puis, en un mouvement inverse, une recomposition en rectangles doubles de carrés (comme si il essayait de sauver la relation qu'il avait faite).

J'ai été extrêmement surpris par cette observation (j'en fis immédiatement l'objet de mes cours des jours suivants) ; et je fus fort emprunté de savoir ce que je pourrais bien en faire.

Deux suites à cette observation.

D'un autre côté, elle tombait bien. En effet une des activités que je propose aux élèves est de découper des formes géométriques dans une feuille pliée en deux. Et pour obtenir un carré il faut alors découper un demi carré soit justement un de ces doubles rectangles. (Ce serait trop long de développer ici les aspects saillants de cette question. Mais de ces observations il en sera abondamment question par la suite.)

Le second développement fut une leçon sur les rectangles et carrés que le professeur a donné suite à cette observation et où il a pu faire admettre à cet élève qu'en mathématiques on définissait les rectangles "plus simplement" (et avant les carrés). Le faire admettre à cet élève croyez moi n'était pas une mince affaire !

Episode 7

03.10.03 - 12.01.16

Premiers pliages

Les discours didactiques et pédagogiques sont tout empreints d'appels au sens, à la signification, à l'ancrage des savoirs à des références concrètes, significatives, motivées. On chasse comme une sorcière la pédagogie qui, du haut de sa docte, voulait imposer son savoir faisant fi qu'il puisse être totalement déconnecté de ce qui fait réalité pour les élèves. On prône des apprentissages étayés par l'expérience, par laquelle devrait toujours s'opérer l'introduction de notions nouvelles. On a pensé trouver la parade en inventant ce terme d'institutionnalisation. Opération qui devrait clore tout enseignement, qui ne serait une imposition annoncée du savoir, qu'une récupération en savoir. A-t-on vraiment gagné au change ?

On ne pourra jamais faire l'expérience de tout. Il faut donc des principes qui, tranchant dans le vif de l'expérience, sélectionnent celles qu'il convient de faire faire aux élèves, celles avec lesquelles on entendra donner leur sens aux savoirs que l'on veut enseigner. Et, fait paradoxal, on demande aux savoirs mathématiques de nous dire lesquelles de ces expériences sont bonnes, voire nécessaires à faire (que j'aime à faire apprendre cette expérience utile au savoir), alors que la principale fonction du savoir est de nous épargner l'expérience. Il y a là comme une transmutation : comment faire partager à des non-initiés l'expérience du savoir, qui me garantit que ce ne sera pas pour eux encore et toujours l'expérience de leur ignorance ?

Un terrain où l'antagonisme savoir / expérience se manifeste le plus nettement est bien celui des erreurs et surtout de ces erreurs que dans les classifications on met dans la marge « autre », faute de savoir les interpréter. (Pour un traitement détaillé de cette question à propos d'erreurs de calculs lacunaires, voir Conne 1989). Le savoir calculer nous éloigne des erreurs de calcul, ne permet plus de saisir intuitivement le sens d'une réponse 2 à la question $3 + 1 = 8$, mais plus simplement encore, nous fait nous étonner nous savants, qu'un élève puisse répondre $7 = 8 + 9$ à $7 = 1 + 1$, alors qu'il sait parfaitement répondre à $4 + 5 = 9$ à $4 + 1 = 9$. Il y a toute une graduation des erreurs allant des plus accessibles au savoir, et je devrais plutôt dire accessibles à l'intuition du savant, vers les moins accessibles. Mon étude sur les égalités lacunaires a montré comment la recherche d'une interprétation aux réponses les moins accessibles avait été essentielle pour une compréhension approfondie des erreurs, même celles qu'on croit démentées comprendre et reconnaître.

Il y a antagonisme, didactiquement parlant parce que dans certains cas, l'enseignant doit entrer sur le terrain de l'erreur s'il veut enseigner le savoir ; il doit comprendre ce dont le savoir n'est non seulement dispensé, mais encore et surtout détourné ; on ne dira jamais assez que le savoir a aussi une fonction sélective, et je dirais même de censure, inhibitrice. J'ai raconté plusieurs fois la méfiance que les élèves me manifestent lorsque je leur enseigne des trucs, comme : « je te montre comment soustraire en additionnant ! ». Et je dirais que revenir à certaines expériences peut représenter, au regard du savoir, une transgression.

L'attitude du *regarder ce que ça donne* (Conne 1999) qui supporte la curiosité professionnelle du chercheur s'inscrit toujours contre le savoir. L'expression ne suggère pas un quelconque aveu d'ignorance, mais propose bel et un bien acte de suspension des intentions qu'on pourrait avoir, ou, autrement dit, de mise à distance du savoir. C'est un appel à une expérience dont le

savoir nous aurait dispensés. Je ne dirais jamais assez que pour moi ce ne fut que la seule réponse que je pouvais faire lorsque je me trouvais devant des élèves dont le handicap semblait les rendre imperméables aux mathématiques les plus élémentaires. Et ça le reste encore aujourd'hui. Ces adolescents, dont certains avaient quasiment 18 ans, dont le handicap était de l'ordre de ce que l'on appelle carence socio-culturelle, sont-ils totalement hermétiques aux demis, tiers, quarts, ou sixièmes de parts de tartes ? Regarder ce que ça donne sur des pliages : si je fais 1 pli, il délimite 2 parts, si je fais 2 plis, ils délimitent ? í eh bien ça dépend comment je plie, comment sont agencés mes plis, comment mon pliage est structuré : ça peut faire 3 parties, comme 4. Autre chose ? Et si je coupe, combien de morceaux ? Tiens cette bandelette, je la plie en deux. En large, qui aurait idée de plier une bandelette étroite en long ? Puis sans déplier je la plie encore en deux. Toujours en large, j'ai soigneusement pris une bandelette assez longue ó id est étroite - pour que cela passe pour naturel. Bon maintenant je coupe le long du second pli : combien de parties ? Quelle taille auront les parties ? 3 parties : $\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$. Mais le demi, a gardé un pli en travers, on pourrait le qualifier de ($\frac{1}{4} + \frac{1}{4}$). Sur le moment, et à chaud, les rencontrant pour la première ou seconde fois, je n'avais pas trouvé d'autre expérience de fractions à partager avec ces élèves. Par la suite, j'ai pu partager ce genre d'expérience avec des élèves autrement plus handicapés, psychologiquement, et d'autres encore, tous pour la plupart bien plus jeunes, 8, 10 ans. Mais j'ai aussi pu partager ces expériences avec des classes entières, et que fais-je d'autre maintenant que de les partager avec vous, lecteurs. Certes, ce n'est jamais tout à fait la même chose ni la même expérience.

Ce sur quoi je voudrais rappeler et insister, tant on a tendance à laisser cet aspect dans l'implicite, c'est que la toute première chose à faire est d'entrer en contact avec les élèves, d'établir un milieu de référence commun. Ce qui ne veut pas du tout dire identique pour chacun ; et, sur cette référence, partager une expérience pour laquelle il faudra que chacun des protagonistes démonte un peu ses savoirs. Le *regarder ce que ça donne* n'est que l'attitude qui accompagne une telle rencontre, il ne vient qu'en second, à titre de moyen, certes un moyen que le chercheur professionnel systématise, mais jamais plus qu'un moyen.

Ces remarques étant faites, je puis poursuivre ma narration. Qu'est donc devenue cette idée de pliage que j'avais eue au prétexte des fractions ? J'ai évoqué que j'en avais profité ultérieurement pour mettre au point une question en vue d'un test numérique. Plus précisément, une question concernant le versant sémantique de ce test, chose qui est si difficile à cerner, bien plus difficile que ne l'est le versant syntaxique. L'idée est fort simple, elle vaut ce qu'elle vaut. Je prends une bandelette ; et devant le sujet, je la plie en 2 ; puis sans déplier, je la plie encore en 2 ; puis la déplie entièrement et la plie approximativement en 3 (comme on le fait parfois de papier à lettre). Tous ces plis se font bien sûr en large. L'expérimentateur explique ce qu'il fait. Puis il déplie la bande. Sur la bande ainsi redéployée apparaissent les lignes des plis. L'épreuve a deux moments. Dans le premier moment, l'expérimentateur note sur le bord gauche de la bande le nombre **0** et sur le côté droit le nombre **100**. Il demande au sujet de considérer que la bande représente les nombres allant de 0 à 100, il montre les lignes de plis et évoque leur position dans la bande, il demande alors au sujet de bien vouloir inscrire la cote de la position de chaque pli par rapport au tout. Les cotes attendues sont **0**, **25**, **33/34**, **50**, **66/67**, **75**, **100**. Dans la seconde partie, l'expérimentateur propose de coter les bords de la bande avec les nombres **0** et **12**, et il demande la même chose. Les cotes attendues sont **0**, **3**, **4**, **6**, **8**, **9**, **12**. Je ne développerai pas plus loin cet exemple.

Mon principal souci lors de mes expériences et observations est celui de la reproductibilité, question qui a au moins trois facettes bien distinctes.

La première facette tient à ce que les élèves nous donnent à observer. Quel statut donner à ce qu'on a observé ? Cette conduite, cette erreur, cette idée que tel élève nous donne à voir, sont-elles fortuites ? Peut-on le voir reproduire en d'autres occasions ó et lesquelles - des conduites et réponses analogues ou proches ? Est-ce que d'autres élèves nous donneraient à faire des observations semblables, ou au moins comparables ? Etc.

La seconde facette tient à la manière dont l'expérimentateur s'y est pris. La démarche, les modes de faire que l'on peut systématiser et arrêter sur des canevas précis et rigoureux, mais aussi la part laissée à l'improvisation et par là, la question de savoir d'où vient donc ce qui anime cette improvisation, les idées et ouvertures qu'elle nous ménage.

La troisième facette, la plus difficile et délicate tient à la personne même de l'expérimentateur, de ses cadres interprétatifs, de sa problématique, etc.

Finalement, c'est le travail sur la seconde facette dont le compte rendu est le plus aisé, et qui est le plus accessible à autrui. C'est aussi sans doute la facette la plus commode pour la diffusion puisqu'elle permet à autrui de tenter de reproduire les expériences. On sait combien cette question est cruciale en matière de recherche, et difficile voire impossible en matière de sciences humaines. En ce qui me concerne, je ne suis actuellement pas en mesure de vous proposer un livre de recettes expérimentales, mais je puis dresser quelques esquisses de telles expériences et surtout montrer comment elles s'enchaînent les unes aux autres par association. Avec ce point essentiel que de telles associations se font dans cette tension savoir-expérience que je mets au cœur de ma narration.

J'ai donc repris cette expérience, mais en abandonnant le support des bandelettes et le prétexte général des fractions. J'ai renouvelé l'idée sur la base du dispositif de feuilles A4, pour m'intéresser à de simples dénombrements, dédoublements puis partages en moitiés. Ce furent des adaptations imposées par mes nouveaux interlocuteurs, à ce que je trouvais à faire pour les rencontrer sur un même terrain d'expérience. Il s'agissait pour une part d'élèves d'un centre thérapeutique de jour, psychologiquement souffrants, que je voyais individuellement ou par groupe de deux, perturbés scolairement au point de ne pas savoir faire grand chose en mathématiques. Ils avaient entre 8 et 11 ans. Leur détresse scolaire en maths était à ce point de faire douter de leurs capacités intellectuelles. Dans le domaine numérique les performances de ces élèves étaient très peu nombreuses, et encore on n'arrivait pas facilement à obtenir d'eux quelque chose qui puisse être qualifié de performance. Par exemple avec l'un d'eux, je me rappelle avoir essayé des jeux de dénombrement de sons ó nous lâchions des billes dans une boîte en carton sans les voir, et il s'agissait de dire combien il y en avait. C'est-à-dire des choses que l'on serait amené à faire avec de petits enfants voire de tous petits enfants. Mon raisonnement dans ce genre de choses est toujours celui de voir en quoi la variation des supports (du milieu) et des activités susciterait de la part de l'élève des réponses nouvelles, étonnantes et surtout susceptibles de donner prise à ce qui échappe faute d'obtenir de leur part les performances attendues.

Avec ces élèves, il était en particulier difficile de produire de la numérosité, de motiver l'intérêt à des quantités au-delà de la dizaine, et ce essentiellement à cause de leurs limites sur le plan technique : limites au dénombrement, limites à l'écriture des nombres, etc. Une de ces élèves, par exemple, a buté plus d'une année au moins sur le nombre 16 (apparemment pour des raisons de prononciation, ses parents étaient de langue italienne et les mots seize qu'on

peut tout aussi bien rapprocher de seidici ou de dicasette en italien) venaient sans cesse se télescoper dans ses comptages et au-delà semblaient perturber toute l'activité. Je me rappelle que, dans une activité de dénombrement de cases d'un dessin, pour laquelle nous avions convenu de noter au fur et à mesure les nombres dans les dites cases, elle s'est soudain levée pour identifier sur un calendrier affiché, la façon d'écrire les nombres de son comptage afin de les reporter sur sa feuille. Et cela de manière totalement inopinée, spontanée, et parce que me dira-t-elle plus tard, elle n'arrivait pas à lire de loin les nombres à deux chiffres (elle avait donc contrôlé déjà perceptivement les premiers numéros sans que je m'en rende le moins du monde compte). Mais voilà, tout cela prend un temps énorme, et en plus a toutes les chances d'être faux. Alors la question de produire de la numérosité devient un problème et un souci même ! Quelle expérience du nombre peut-on se construire sans s'y être confronté ?

Quelques années auparavant, dans le souci d'offrir une telle expérience à des élèves d'école enfantine, nous avons imaginé une enseignante et moi-même d'engager les élèves au dénombrement de 1000 cure-dents (c'était l'idée de l'enseignante). Nous avons donc vidé deux boîtes de 500 cure-dents devant les élèves, etc. Dans ce cas, la numérosité est imposée de l'extérieur, on vide un chargement venu d'ailleurs.

Pour mes expériences au centre de jour, je me suis dit que le pliage était un excellent moyen de produire de la quantité. On a une machine exponentielle. (Dans un épisode ultérieur, je raconterai comment la même chose s'est produite sur des étoiles, on retrouve en effet les mêmes principes avec mille variations, telle est la nature de l'improvisation). Mais comme dans un plat, les ingrédients d'une expérience sont divers, et en fait il y a bel et bien une cuisine et des combinaisons. Donc première idée, en multipliant les plis, multiplier les cases que leurs traces font apparaître, avec une relation modulable entre le nombre de plis et le nombre de cases, le cas le plus notoire étant une relation en puissances de 2, avec justement ce petit zeste de piment que serait la confusion entre suite des pairs et suite des puissances de 2. Ce qui fait que nous ne sommes pas devant une activité de dénombrement simple mais de double dénombrement, dénombrement des plis que l'on fait, dénombrement des cases qui apparaissent. En outre, il n'y aura pas que ces seuls signes qui soient susceptibles d'être dénombrés, car en faisant deux pliages je puis aussi faire apparaître 2 ou 3 plis ! Et encore faudra-t-il s'entendre sur ce qu'est un pli, qui pourrait empêcher quelqu'un de penser : pour deux pliages 4 plis, surtout si le dessin de leur marques est en croix, et que certaines marques de ces plis sont en creux (vallée) et d'autres en bosse (crête) ? Dans mon expérimentation, il y avait encore au moins deux autres ingrédients : le premier est banal, il s'agit des *doubles*, le second est plus étonnant, plus circonstanciel aussi (mais revient sans cesse), que j'exprimerai par : *le jeu perceptif rectangle / carré*.

L'augmentation par doublement est quelque chose de profond en math et dans la nature. Ici elle est une machine à produire des quantités qui est assez différente de cette autre machine à produire des quantités qu'est, au travers de la récitation, la numération parlée (la numération parlée est une machine à produire quantité de nouveaux noms de nombres). On peut interpréter certaines activités de dénombrement comme l'expérience de la confrontation à diverses machines à produire de la numérosité. Tout comme dans l'imaginaire des mathématiques d'avant 1970 où je plantais les piquets d'une clôture, pour produire nombre d'intervalles entre les piquets, dans ma version post moderne, je plie une feuille et fais apparaître des signes : des lignes, des colonnes, des cases, qui sont en nombre, en quel nombre ? Les dénombrer c'est produire un nombre, si possible égal, de noms de nombres, il y a des méthodes (ou techniques) pour le faire etc.

Le doublement est pour moi d'abord une idée, je puis la spécifier en disant que ce peut être l'idée d'un accroissement. Tout comme le +1 qu'à force de projeter devant soi nous fait aller à l'infini, et peut nous donner une idée d'une progression sans fin d'une quantité donnée au départ (et même de rien), le doublement nous fait aller plus vite et loin que les bottes de sept lieues (mais on ne pourra pas cette fois partir de rien), si vite que son allure bouscule la numération parlée tatillonne (à peine avez-vous enfin prononcé mille vingt quatre que le compteur marque au moins 2048, mais voici déjà 4096 ...).

Un autre aspect essentiel du point de vue sémiotique, est que le doublement est produit cumulatif du même, í jusque dans les plis : je plie en deux, je plie encore en deux, je plie encore en deux, je fais chaque fois le même pliage (sur quelque chose d'autre qui se présente toujours de la même manière et ne fera sentir sa résistance que lorsqu'il deviendra épais). On a produit plein d'artefacts sur ce signe du doublement, et la feuille A4 en est un, elle qui reste la même, je veux dire toujours en mêmes proportions, dans toutes ses partitions en moitiés, pour autant qu'on le fasse toujours en large. C'est à ce point que vient se nouer les relations carrés-rectangles, l'artefact A4 y est peut-être bien pour quelque chose.

J'ai souvent demandé aux élèves si la feuille A4 que je leur tendais était de forme carrée, puis leur ai demandé ce qu'il faudrait faire pour obtenir une forme carrée à partir de cette feuille. J'ai posé cette question de nombreuses fois et de multiples façons, variant aussi le moyen pour obtenir le carré : pliage, découpage, dessin à main levée, dessin avec règle, dessin avec règle et mesure, dessin sur papier blanc ou quadrillé, et jusqu'à imaginer un jeu à deux adversaires, etc. Comme je ne cherche pas des données pour cataloguer les conceptions du carré chez l'enfant, et encore moins à construire des tests diagnostic etc., je cultive les variations et l'adaptation aux conditions et contextes que je rencontre. Je teste la fécondité et la solidité de principes simples variables autant qu'on le désire. Je sais que le grand danger est d'introduire des biais dans l'observation. Mais je ne me soucie que d'une chose réellement, de ce qu'empêchent ou produisent de tels biais. Et je commence par tenter de repérer tout simplement des effets. Car supposez que je travaille avec un enfant à qui on n'arrive pas à enseigner les maths. Supposez que je l'observe et que certains biais dans mon observation me suggèrent des interprétations erronées, et m'empêchent par exemple de trouver ce qui pourrait aider cet élève à apprendre. Si je ne l'ai jamais vu apprendre, si tout ce que l'on a tenté avec lui a échoué pour cause d'interprétations non pertinentes, comment pourrais-je faire ? Et lorsque je demande : comment donc cet élève apprend-il les maths ? Je ne reçois pas vraiment de réponse, juste une collection d'impressions (ce qui n'est pas rien loin de là).

Dit autrement, de qui et en vertu de quelle norme suis-je redevable de mes biais d'observation et d'interprétation ? Des personnes à qui elles s'adressent. Si mes observations et interprétations viennent à étayer je ne sais quel diagnostic, alors j'en serai responsable. Mais tel n'est pas mon but, je n'ai pas les moyens de cela parce que je suis encore bien trop ignorant moi-même. C'est donc dans le petit cercle de mes interlocuteurs, id est moi-même, les enseignants concernés par les élèves avec qui je travaille, les élèves et quelques-uns de mes collègues. Les biais d'observation et d'analyse sont alors à considérer non pas tant au regard des photos prises qu'au regard de la recherche et de sa progression.

Ces tâches demandant à produire un carré à partir d'une feuille de dimension A4 sont l'occasion de multiples surprises. La toute première que j'ai eue fut celle-ci (qui se produit régulièrement) : l'élève a pris sa feuille et l'a pliée en deux. Puis il a jugé le résultat, dit que cela n'allait pas. Là où certains élèves plient d'autres coupent cela dépend des situations et de ce que je demande ou permets. Ce qui est intéressant de voir c'est ce que les élèves vont alors

faire (je me contre fous de leur performance, ou plutôt je m'intéresse à ce qu'ils considèrent pour eux-mêmes comme performance, ce qui dans certaines situations m'a totalement piégé, mais cela je le raconterai plus tard). Les sujets emploient de multiples manières pour exprimer cela, mais toutes reviennent à considérer que la forme est trop longue pour être un carré. (Dire que les côtés d'un carré sont égaux est plus difficile et, partant, dire que ce n'est pas un carré puisque les côtés ne sont pas tous égaux). Alors comment faire ? Plusieurs élèves, parfois même sans qu'on ait eu le temps de dire quoi que ce soit, plient ou coupent une nouvelle fois. Ils le font en large (et ont souvent tourné leur feuille ou feuillet d'un quart de tour), parce que ils essayent de réduire la longueur de leur feuille. Je ne l'ai pas tout de suite compris, mais c'est bien cela qui semble diriger les tentatives des élèves, ce qui varie sont les moyens engagés pour le faire, et aussi soit la correction du même moyen, ici serait de plier en 2, puis en 2, puis en 2, etc. ou au contraire le changement de moyen. Le pliage ou découpage en deux, soigneusement fait ou non, peut aller un moment (le pliage deviendra de plus en plus difficile avec l'épaisseur et les marques laissées seront de moins en moins visibles, ce qui a son importance dans l'expérience). Au bout d'un moment l'élève s'arrête et dit qu'il a un carré. Perceptivement la forme est suffisamment petite pour supporter l'illusion (consciente ou inconsciente pour l'élève, j'ai vu les deux cas). À cela s'ajoutent les imprécisions des pliages ou découpages ce qui rend toute vérification matérielle inutile.

Ce qui est intéressant est que la même tâche mais avec des modalités de dessin ou de découpe, pour laquelle des élèves ne se lancent pas dans le pliage en moitiés mais se contentent de réduire à l'égal la longueur du rectangle à la dimension de sa largeur, ces élèves, lorsqu'on leur demande d'améliorer leur production corrigent souvent en « coupant encore plus » et ce jusqu'à terminer avec un petit bout de papier grossièrement carré, et ce avec le même jugement que tout à l'heure. Bien entendu, c'est induit par la tâche et le support. Comment voulez-vous améliorer un morceau à peu près carré sans le rogner un peu plus et toujours un peu plus ? Ainsi, que le moyen engagé suive le principe de réduction à moitié ou celui de rogner la longueur, ce qui importe de voir est qu'une même logique semble s'imposer. Et bien sûr la première méthode est un moyen bien plus rapide que la seconde pour obtenir un morceau de papier si petit qu'il puisse passer pour un carré. Par contre la seconde est sous contrôle perceptif des proportions, alors que le pliage en deux échappe à ce contrôle ! (C'est bien là la vertu de toutes les activités de pliage que j'ai imaginées et c'est pourquoi selon moi elles sont porteuses pour l'apprentissage de la géométrie).

Ainsi donc, une fois que j'ai pu observer la conduite, peu me chaut de savoir si c'est une conduite normale, usuelle, etc. Je dirais que la première fois que je la rencontre c'est une conduite inattendue, et que je ne sais interpréter. Certes je vais essayer de la voir se reproduire ó les bébés font déjà cela en lâchant régulièrement leurs cuillères ó et comme les bébés je ne vais pas trop me faire de scrupules à provoquer à nouveau l'effet, ou encore à le laisser pour tel autre effet qui deviendrait plus prégnant. Parce que l'élève plie en deux sa feuille pour avoir un carré, ou qu'il lui rogne un bout, ce qui m'importe n'est pas la réponse mais son prolongement sa reprise, sa reproduction, sa correction et les représentations qui se manifestent à ces réglages là Et si je me rends compte que la même logique est à l'œuvre dans les deux cas, alors je pense tenir quelque chose. Et tout d'abord, un jeu. Car je serais d'autant moins enclin à mes biais suggestifs si c'est cette logique là qui m'importe, logique de dévolution du contrôle puisque je regarde comment le sujet soit reproduit, soit corrige sa performance. Un jeu avec les consignes parce que j'avais demandé à l'élève de produire le plus grand carré possible dans une feuille A4, exigence que ses corrections lui auront fait oublier. Ce qui motivera la recherche d'une autre procédure de correction.

Comme nous jouons un jeu à trois, je puis aussi jouer du milieu. Par exemple pourquoi ne poserais-je pas la même question en proposant dès le départ une feuille carrée ? Si l'élève me dit : c'est déjà un carré, je lui demanderais de bien vouloir m'en convaincre. Ici il y a un critère qui m'intéresse, le pli par la diagonale, facile sur une feuille carrée, un tout petit peu moins sur une feuille rectangulaire. J'ai vu bien des gens connaître ce pli comme technique pour déterminer la partie à couper d'une feuille rectangulaire pour lui donner une forme carrée. L'utiliser comme critère, je l'ai vu trouvé spontanément par une élève de l'enseignement spécialisé (mais lors d'une séance non filmée ni protocolée, avec le prof. comme témoin et ce fut de toute beauté). J'ai vu bien peu de gens m'expliquer la raison ou le pourquoi de cette technique et bien moins nombreux encore ceux à me dire que c'est un moyen d'égaliser la longueur à la largeur en marquant la cote de la largeur sur la longueur (cf. épisode 8). On ne se contentera pas de montrer et d'enseigner cette technique aux élèves, mais il sera bon de la leur expliquer autrement que comme savoir-faire, et de contrôler que l'explication porte, c'est-à-dire rencontrer quelque chose dont les élèves ont fait l'expérience, par exemple, la recherche de réduction de longueur d'un rectangle pour lui donner la forme d'un carré.

D'autres expériences sont envisageables comme présenter une feuille carrée et demander à l'élève d'en faire un rectangle (qui me tendra donc la feuille intacte en me disant c'est un carré donc déjà un rectangle ? Je n'en demande pas autant bien sûr). Mais il y a mieux à faire, du moins pour confronter mon interprétation que les élèves chercheraient à rogner les longueurs : demandons aux élèves de faire un trou carré dans leur feuille, ..., et pour corriger un trou, ils ne pourront que l'agrandir, donc devront augmenter la largeur du trou. (De cela je parlerai dans un autre épisode.) Voilà surtout que se dessine une structure dans les expériences.

Références faites dans le texte.

Conne F. 1989, Comptage et écriture en ligne d'égalités numériques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 9 (1), 71-116.

Conne F. 1999, Faire des maths, faire faire des maths et regarder ce que ça donne, In F. Conne & G. Lemoyne (Sous la dir.) *Le cognitif en didactique des mathématiques*, pp. 31-69. Montréal : Presses Université de Montréal. 367p.

Episode 8

Pliage d'un carré dans une feuille aux dimensions ordinaires¹

2003-2009

Voici un texte en deux parties relatif à des expériences très simples de géométrie de pliages. La première partie est une évocation présentée du point de vue d'un échange observateur élève. La seconde partie propose quatre suggestions qui donnent à repenser la portée de la première évocation.

1° Évocation d'une expérience.

1.1 Obtenir un carré, à l'œil, par mesure, par le croisement de deux feuilles semblables, par pliage.

Supposons qu'un enseignant, pour une raison ou une autre veuille faire fabriquer un carré à partir d'une feuille ordinaire et qu'il se dise qu'il y a là une belle occasion de questionner ses élèves sur la manière dont ils pourraient le faire. Deux grands types de réponses seront données, des réponses qui reposent une procédure à l'œil il c'est-à-dire une réduction de la feuille pour laquelle atteigne approximativement une taille carrée - ici nous avons pu observer tout une gamme de moyens mis en œuvre - et des réponses qui reposent sur une mesure - là on peut envisager une gamme de moyens allant de l'emploi d'un double décimètre, le report en équerre (ou en L) de deux feuilles semblables en travers l'une de l'autre, leur recouvrement est le carré cherché, le recours au rabat à l'équerre d'un coin de la feuille.

1.2 Mathématique et procédure du rabat à l'équerre d'un coin d'une feuille rectangulaire.

Supposons que l'enseignant veuille diriger les élèves sur cette manière relativement simple et pratique d'obtenir une feuille carrée que je nommerai : *le rabat à l'équerre (d'un coin de la feuille)*. Notons que le rabat du coin peut s'envisager de deux manières, qui sont en quelque sorte duales en tant que pliages. Soit on rabat le coin en appliquant la largeur du rectangle sur sa base (longueur), soit on rabat le coin en appliquant la longueur du rectangle sur la largeur opposée au coin rabattu. Dans le premier cas, un triangle est rabattu sur sa partie complémentaire dans le rectangle (de la forme d'un trapèze rectangle). Dans le second cas, c'est cette partie en forme de trapèze qui sera rabattue sur sa complémentaire (de forme triangulaire). On aura en quelque sorte interverti le dessus et le dessous du pliage. Les plis se marqueront dans chacun des deux coins adjacents au coin rabattu².

¹ Une première version de la première partie a été publiée dans Conne, Favre & Giroux 2006.

² On ne peut pas réaliser matériellement une symétrie plane autrement qu'en passant par une rotation de ce plan d'un demi tour dans l'espace autour d'une charnière qui passe par l'axe de symétrie. Le pliage opère ce demi tour sur la seule partie de la feuille que l'on rabat, elle opère en quelque sorte à moitié ce demi tour. On peut réaliser le demi tour sur l'entier de la feuille en y collant une tige le long de l'axe et en faisant tourner le dispositif (feuille + tige). Si on colle deux tiges faisant un certain angle et que l'on fasse faire deux fois un demi tour au morceau de papier, c'est comme si on l'avait fait tourner d'un angle double de celui que font les charnières autour d'un axe perpendiculaire aux (plan) de celles-ci et passant par leur intersection.

Notons tout d'abord qu'il s'agit ici bel et bien d'une construction géométrique, qui confie au pliage et au rabattement du bord rectiligne les rôles dévolus classiquement à la règle et au compas. Notons ensuite que dans ce pliage, le morceau de papier fournit à la construction son instrument, c'est ce que je veux marquer en disant : à l'équerre.

Préside donc à cette construction un théorème, qui combine en fait deux propriétés mathématiques.

- La première est relative à la forme de la feuille de papier, au positionnement de la partie rabattue par rapport à la partie fixe, à la position du pli ainsi produit : si on rabat en pliant bord sur bord un coin de la feuille (dans notre cas en ramenant le bord latéral de la feuille sur le bord longitudinal), le coin rabattu se positionnera à l'équerre sur la base du rectangle et le pli coïncidera avec la bissectrice du coin adjacent au coin rabattu (bissectrice de l'angle entre la largeur et la base sur laquelle on l'applique).
- La seconde est une propriété du carré : sa diagonale le décompose en deux triangles rectangles isocèles égaux.

Dans le même geste on a confectionné et appliqué une équerre carrée, reporté longueurs et angles de cette équerre sur la feuille rectangulaire afin d'y délimiter le triangle qui complétera notre équerre en un carré. La procédure qui lie les deux propriétés mathématiques comporte trois étapes.

- Le pli sur la bissectrice du coin de la feuille rectangulaire assure au rabat qu'il ait la forme d'un triangle rectangle isocèle (équerre carrée).
- La découpe le long du bord produit le dupliqué du triangle rectangle isocèle rabattu.
- Une fois déplié, le rabat et son dupliqué seront en positions symétriques par rapport au pli, et ceci nous assure que le morceau obtenu aura bien la forme d'un carré.

Dans la feuille de papier, élément constitutif du milieu, se conjuguent diverses propriétés :

- Des propriétés matérielles : le papier se pliera comme son matériau le permet, le pli se marquera rectilignement, etc.
- Des propriétés morphologiques : le morceau est rectangulaire ce qui veut dire qu'il a des bords rectilignes, parallèles deux à deux et que ses coins sont à angle droit.
- Des propriétés pratiques : on ajuste le rabat de manière à ce que le pliage fasse appliquer exactement telle partie (bord, point, etc.) sur telle autre. Ceci positionnera les pages du feuillet l'une par rapport à l'autre et déterminera la position du pli par rapport à la forme du morceau.

Ainsi donc les propriétés mathématiques schématisant cette procédure lient entre elles des propriétés matérielles, morphologiques et pratiques.

1.3 Équivalence des procédés de construction du carré évoqués ici.

J'exprimerai ces équivalences comme des *faits de pliage*.

- Un des faits de ce pliage s'exprime en termes de reports de mesure de segments. En effectuant ce rabat, on reporte la largeur sur la base du rectangle, mais, de concert, on reporte la même mesure sur l'autre longueur du rectangle. Cela est dû au fait que le pli est à 45° de cette base ou, considéré autrement, que nous avons un rabat selon une équerre carrée. Le bord replié du coin rabattu est à angle droit de la base du rectangle.

- Un autre des faits de ce pliage s'exprime en termes de symétrie. Le rabat à l'équerre opère comme la superposition à l'équerre de deux feuilles rectangulaires identiques. Par ce pliage, on a rabattu un des coins du rectangle sur la partie complémentaire du rectangle ó de la forme d'un trapèze rectangle - qui, elle, est restée fixe. On peut déplier ce feuillet de deux manières : soit en procédant à rebours du pliage effectué, soit en dépliant la partie du feuillet jusqu'ici restée fixe et en laissant fixe la partie du feuillet rabattue. (Pratiquement, en mettant un doigt sur le coin du rabat afin d'en faire un point fixe lors du dépliage, on peut déplier le feuillet de dessous, et constater la symétrie ainsi obtenue). Dans le premier cas, on revient à la position de départ de la feuille, sans intervertir son recto et son verso. Dans le second, la feuille vient prendre une nouvelle position et son recto et son verso s'échangent. Cette composition de deux rabats, revient à faire pivoter d'un demi-tour dans l'espace la feuille autour de la charnière que représente le pli. Ce demi-tour correspond à une symétrie plane (la symétrie plane est la restriction de ce demi-tour spatial au seul plan du morceau de papier). L'axe du pli étant à 45° des bords de la feuille, la nouvelle position du morceau rectangulaire sera à l'équerre de sa position initiale (il sera dans une position symétrique par rapport à sa position initiale, selon la symétrie marquée par le pli). Le rabat à l'équerre du coin de la feuille de papier réalise donc quelque chose d'équivalent au recouvrement perpendiculaire de deux feuilles semblables.

1.4 Procédé de construction, procédé de vérification.

Plus haut, j'ai affirmé que « les propriétés mathématiques schématisant cette procédure lient entre elles des propriétés matérielles, morphologiques et pratiques. » Il faut ajouter alors que ces liaisons se font dans les connaissances des sujets qui participent à cette expérience, en particulier dans l'organisation des gestes du plieur. Ces propriétés ó aussi clairement analysées - sont bien évidemment inaccessibles aux élèves, et peu d'enseignants s'en feront une idée très claire. À ces mathématiques-là, on n'accède qu'indirectement, en multipliant les angles d'approches où ces propriétés géométriques seront en jeu. Une de ces approches est la suivante.

Considérons un élève qui aurait appris à procéder ainsi, sans trop comprendre ce qui est en jeu. Certes il accomplirait correctement sa tâche, mais quelle signification donner à une telle performance ? Sa procédure est garantie par les mathématiques, or comme nous venons de le constater ces dernières ne lui sont tout au plus que très vaguement accessibles. Qu'est-ce donc qui peut convaincre les élèves et les enseignants que cette procédure est bien adéquate ?

- Tout d'abord une appréciation perceptive, on aboutit bien, si on se donne suffisamment de peine à une forme carrée.

Seulement ceci ?

- Non parce que ce qui a été présenté ici comme un moyen de construction (algorithme de construction) pourrait fonctionner comme moyen de vérification (protocole de test), comme critère pour décider si tel morceau de papier rectangulaire est un carré ou non et ceci parce que le rabattement par ce pli reporte longueur sur largeur et permet de vérifier ainsi leur égalité³. Ceci dépasse donc l'accord perceptif.

La construction s'assure par avance que son produit sera conforme à ce que vérifie le test. **Le lien que l'on peut donc faire entre ces deux valeurs de la procédure : construction ou vérification, est donc un moyen pour indiquer son idée directrice :**

- *Production* : il s'agit d'égaliser les côtés du rectangle pour obtenir un carré, c'est-à-dire réduire la longueur du rectangle.
- *Test* : le pliage procède selon l'indication de l'égalité entre les côtés d'un carré.

De là provient aussi la conviction intuitive ó et correcte ó que le plus grand carré que l'on peut obtenir dans un morceau rectangulaire a exactement pour côté la largeur de ce rectangle.

Qu'est-ce qui pourrait advenir, éventuellement de surprenant, dans un moment d'enseignement de cette petite procédure ?

Tout autant la facilité avec laquelle certains élèves vont arriver à l'apprendre et surtout vont l'adopter, que la difficulté que d'autres auront à le faire. Je pense qu'il est fort rare qu'un élève arrive à la trouver lui-même. En particulier, j'ai pu observer dans le contexte de l'ES que beaucoup d'élèves ne la connaissaient pas, et cela pour des élèves de tous âges.

1.5 Produire une chose de forme carrée avec précision.

Nous avons compris ce qui rend cette procédure si peu probable à être spontanément trouvée, mais qu'est-ce donc qui la rend alors si facilement assimilée ? Certes le pliage n'est pas très difficile à opérer. Mais est-ce que cela suffit ? Comme nous l'avons dit, intervient un jugement perceptif, et en ce sens d'ailleurs cela renforce l'élève dans l'idée de se fier à ce type de jugement. Mais intervient conjointement autre chose, à savoir une procédure

³ Si on est assuré que notre morceau de papier est de forme rectangulaire, ce test suffira à vérifier si il est carré ou non. Sinon, ce ne serait qu'une vérification partielle. Pour en être tout à fait assuré il faudrait y associer d'autres mesures encore : mesures des angles, ou d'autres reports des côtés. Nous laissons au lecteur le soin de rafraîchir à ce propos ses savoirs en géométrie élémentaire. Quant à nous, nous avons omis ces précisions afin de ne pas trop alourdir notre propos. Si on veut bien comprendre la procédure, il est utile de se demander pourquoi le test du pliage n'est que partiel. Pour construire un carré dans une feuille de papier dont le bord est de forme quelconque, il faudrait recourir à trois pliages au moins.

organisée, invariable et par là relativement formelle et qui a toutes les marques de la précision.

On a produit **une forme í**

*Elle ne produit pas seulement **UN carré**, une forme perceptivement carrée.*

í précise í

*Mais encore elle le produit précisément, elle produit **avec une certaine précision UNE CHOSE DE FORME carrée** (une forme précise).*

í en procédant de considérations idéales.

*Et même, elle produit **précisément LE carré**.*

À l'école, tout concourt à s'en convaincre, on le croit, et certains vont jusqu'à faire de cette croyance un savoir. Voilà donc ce qu'il est donné à connaître et savoir dans cette petite expérience de pliage, voilà sa réalité. Voilà aussi la réalité dans laquelle va se mouvoir nécessairement toute interaction que l'enseignant aura avec ses élèves à propos d'un tel pliage. C'est aussi cela qu'il pourra apprendre, lui, de l'écoute attentive et de ses échanges avec eux à ce sujet.

1.6 Quelques observations auprès des élèves.

Ainsi par exemple, certains élèves vont lui proposer, pour obtenir un carré, de plier leur feuille en deux (de manière à réduire la longueur). Pliage plus simple et plus à portée de l'intuition des élèves, procédure elle aussi formelle et précise, et pour laquelle nous avons pu régulièrement observer que les élèves espéraient qu'il en sortirait une forme carrée ; puis alors leur surprise à ne pas y arriver ; í et les suites qui en résulteront⁴. Ce faisant il apprendra en quels termes les élèves semblent aborder ce problème : *comment réduire la longueur du rectangle afin de l'égaliser à la largeur ?* La procédure décrite ci-dessus les surprend parce qu'elle aboutit à ce que la demi longueur devient largeur d'un nouveau rectangle. Et par là, on tire des indications précieuses concernant les représentations que se font les élèves du carré et du rectangle⁵.

On pourra ensuite les surprendre à la trivialité de la tâche qui consisterait à produire un morceau de papier rectangulaire à partir d'une feuille carrée, et d'autres tâches encore, plus faciles ou plus difficiles à faire.

Cette interprétation exploratoire du milieu aura pour conséquence de différencier⁶ deux aspects critiques de la mathématique cognitive :

- Une condition de rapport (l'égalité ou non des dimensions qui distinguent rectangle et carré).

⁴ L'enseignant apprendra alors à jouer des dimensions des feuilles rectangulaires à donner à ses élèves etc.

⁵ On peut par exemple demander aux élèves de dessiner ou de découper un carré, souvent ils les font assez petits de sorte que les différences dues à l'imprécision soient moins perceptibles.

⁶ On pourrait même dire délier en faisant un clin d'œil il au langage thérapeutique.

- Une condition de taille.

La difficulté à coordonner les deux conditions est qu'elles imposent chacune un positionnement de la forme à produire par rapport à la forme du morceau de papier. Dans le feu de l'expérience, de telles relations restent en grande partie implicites ó mais pas nécessairement en deçà du seuil de conscience.

Mes collègues et moi avons appris alors la richesse des situations géométriques qui demandent aux élèves de combiner ainsi une condition de forme à produire avec une condition de taille, avec la tâche générique :

« Produis ó dessins, découpe, etc. ó telle figure qui soit la plus grande que tu puisses obtenir sur cette feuille de papier. »

Tâches toujours fort révélatrices de la dynamique des représentations que se font les élèves de ces différentes figures géométriques telles qu'elles se révèlent sur un support en papier (sur lequel on trace des traits, par pliage et/ou par dessin).

2° suggestions d'expériences (2008).

Voici des prolongements de ce qui est vient d'être évoqué et qui donneront l'occasion aux lecteurs d'approfondir leur compréhension lors d'expériences effectives. Les principes de ces explorations sont les suivants de deux types essentiellement : agir au niveau de certaines règles d'exploration, agir au niveau de logiques d'exploration.

1) Au niveau des règles d'exploration :

a) Pour répliquer et généraliser ce genre d'expérience, on peut agir sur des combinaisons de deux des trois axes suivants : *le but, la procédure* et *les conditions d'application* de la procédure. Nous retrouvons la distinction classique but, moyen, mais en rendant explicites les conditions d'application des règles.

b) On joue tour à tour sur les trois différents axes, afin de comprendre leur jeu. C'est donc solidairement que ces expériences sont intéressantes et pas isolément.

1.1. L'analogie de chercher à obtenir un carré dans une feuille A4, mais en substituant losange (ou autre) à carré. Exemple :

Trouver par pliage le losange de plus grande aire qu'une feuille rectangulaire (par exemple A4) peut contenir.

1.2. Ici on change les conditions et on adapte le but en fonction de ce changement : A4 -> carré / carré -> A4. Exemple :

À partir du plus grand carré obtenu dans une feuille A4 par la procédure du pli du coin, trouver le plus grand rectangle de dimension semblable à A4 dans le carré.

Une variante pour les collègues québécois : trouver par pliage le plus grand rectangle de dimension semblable à A4 sis dans une feuille de dimension US.

1.3. Ici on change les conditions, et on tente d'appliquer au plus près la procédure. Exemples :

Partir d'une feuille de dimension non rectangulaire et appliquer la procédure du pli du coin. Qu'est-ce que ça donne ?

Chercher à obtenir le plus grand carré, ou le plus grand losange dans une feuille de la forme d'un parallélogramme.

Obtenir un carré (voire le plus grand carré) dans un morceau de papier qui n'a pas de forme définie (bords qui ne forment pas de courbe particulière).

1.4. Ici analogue à 1.3 mais en simplifiant la procédure (et éventuellement changeant les conditions).

Prendre une feuille rectangulaire A4 (mais n'importe quelle forme rectangulaire, ça va aussi). On plie selon un pli qui passe par le coin gauche en bas de la feuille. On découpe tous les morceaux qui dépassent, donc tous les morceaux qui ne sont pas superposés. On déplie. Quelle est la forme du morceau ainsi déplié ?

2) Au niveau de logiques d'exploration :

Une autre manière d'aborder les choses est de jouer sur des schémas directeurs de représentation, qui permettent de saisir la logique de telles expériences (et non plus de jouer sur des variables, qui sont des règles d'expériences).

Nous avons vu l'idée selon laquelle on transforme un rectangle en carré en diminuant sa longueur de manière à l'égaliser à sa largeur. Augmenter un morceau de papier de forme rectangulaire en un morceau de forme carrée en lui adjoignant des morceaux, nous amène à chercher la forme de morceaux qu'il faudrait lui appondre. Sur le dessin les choses se présentent autrement.

Mais d'autres schémas directeurs de représentations sont envisageables afin de penser l'expérience, Par exemple partir du schéma directeur qui veut qu'un rectangle ou un parallélogramme soient des portions de bandes, et qui renvoie les symétries à des figures de croisement de telle bandes.

À Suivre í

Addendum (2009).

L'exploration comporte une fonction de variation, on peut varier les données du problème, mais on peut aussi varier les moyens mis en òuvre pour le résoudre. Ici l'important est de faire des variations et de distinguer ce qui est variation mineure, de détail, et variation majeure. Et pour susciter cela, de tenter toute variation serait-elle considérée comme mineure.

Là aussi une boucle, comment varier la variation pour passer de variations mineures à variations moins mineures. Le but est de décentrer les gens du résultat.

Obtenir le plus grand carré dans une feuille rectangulaire de dimensions variées et pas seulement A4.

Alors que pour le carré le test pour vérifier si la forme est carrée peut facilement devenir une procédure de production d'un carré, cela devient bien plus difficile lorsque le test de vérification de forme demande plus d'un pliage comme on pourra le constater en prenant le test pour vérifier si un rectangle est de dimensions semblables à A4.

On donne le test par pliage pour vérifier si les dimensions d'une feuille rectangulaire sont semblables à A4. On prend une feuille de ces dimensions et on vérifie par le test. Montrer comment transformer un rectangle de dimensions semblables à A4 en un rectangle de dimensions différentes, en marquant, dépliant et repliant. Trouver à faire un carré sans déplier.

On donne le test par pliage pour vérifier si les dimensions d'une feuille rectangulaire sont semblables à A4. Transformer par pliage, un rectangle en rectangle semblable à A4. Chercher des variations, mêmes légères pour y parvenir. Examiner les plis et les figures qu'ils font.

ETC.

Référence faite dans le texte.

Conne F., Favre J.-M. & Giroux J. 2006, Répliques didactiques aux difficultés d'apprentissage en mathématiques : le cas des interactions de connaissances dans l'enseignement spécialisé. In P.A. Doudin et L. Lafortune (éds) *Intervenir auprès d'élèves ayant des besoins particuliers*, chap. 6, pp. 118-141. Montréal: Presses Université du Québec.

Episode 9

20.01.2016

Schémas d'actions/savoir/expérience

Dans l'épisode 6, rédigé en 2003, j'ai proposé un nouveau regard sur les expériences de pliage, qu'il me semble utile de commenter, afin d'indiquer que toutes les questions traitées jusqu'ici restent pour moi ouvertes. Je répète ci-dessous le nouveau paragraphe (inséré dans l'épisode 6) et en donne deux commentaires, un peu comme ceux que j'ai exposés dans l'épisode 5.

A. Cadre général et qualification sémiotique.

1° Plis par rabattement de papiers de formes polygonales. (Légisigne.)

Le pliage se fait en rabattant une partie du morceau de papier (pour simplifier on le supposera de forme polygonale, cette restriction n'étant pourtant pas strictement nécessaire) sur une autre. En rabattant par recouvrement exact d'une partie sur une autre, on obtient des moitiés de ce morceau. Pour de tels pliages, on a besoin d'un contrôle dont on peut schématiser les règles ainsi.

On peut rabattre un côté de notre morceau de papier sur lui-même, et le rabattre avec exact recouvrement ou non; on peut rabattre un côté sur un autre, qu'ils soient adjacents ou non, éventuellement parallèles; on peut aussi rabattre un sommet sur un autre, ou un point sur un autre, qu'on aura marqués d'une manière ou d'une autre, sans qu'ils soient forcément sur le bord.

À cela on ajoutera qu'on peut enchaîner ou non les plis.

On joue donc sur des actions alternées de pliages et dépliages.

On peut interpréter un tel schéma comme "syntaxe d'action" ou en termes peirciens comme un légisigne.

2° Plis bissectrices, médiatrices, médianes. (Symbolique.)

On peut donner des significations à ces plis en termes de géométrie élémentaire des polygones.

Plier un côté sur lui même laisse une marque de pli perpendiculaire à ce pli; plier un côté sur un autre laisse une marque de pli bissectrice de l'angle que forment ces côtés, et, ce, même si ils ne se coupent pas; bien entendu plier un côté sur un côté parallèle laisse une marque de pli médian de la bande que forment ces côtés, c'est assimilable à une bissectrice; plier sommet sur sommet, ou point sur point, laisse une marque qui est médiatrice du segment qui relie ces sommets ou points.

Ces interprétations de la "syntaxe" décrite ci-dessus en font un modèle de cette petite géométrie, et la relation est ici symbolique.

La signification des marques des plis ainsi interprétées est relative aux formes des morceaux ou feuillets dans lesquels elles s'inscrivent. Elle sera différente si on se rapporte aux formes respectives des feuillets non dépliés, des feuillets seulement partiellement dépliés, ou du morceau de papier entièrement déplié.

3° Sur le pliage d'une feuille rectangulaire selon une de ses diagonales. (Dicent.)

Sur le plan de l'expérience et non plus des principes et des significations qu'on leur donne, on se trouve confronté à plein de choses, je pourrais dire d'événements, certains imprévus, etc. qui vont occuper notre esprit et qui ne sont ni syntaxiques, ni de géométrie des polygones.

Par exemple, il n'est pas aisé de plier un rectangle selon une diagonale, et ce, d'autant plus qu'il sera long. Si on examine les choses, on trouvera que la difficulté résulte de la conjonction de trois aspects au moins : la longueur du pli, le fait que les deux parties ne se recouvriront pas, l'angle aigu du triangle est petit.

Aucun de ces aspects n'étaient (et ne sont) pris en charge ni par la syntaxe, ni par l'interprétation géométrique.

4° En retour, explicitation géométrique de ce qui advient dans l'expérience.

Cela ne veut pas dire bien sûr qu'ils ne peuvent trouver une interprétation géométrique, ni qu'on puisse à leur propos imaginer quelques règles d'actions. Ainsi, un procédé permet de produire très facilement le pli diagonal, et je l'indique ici car il est peu connu, et, justement, il est tellement dicent qu'il surprend beaucoup de gens.

Règle d'action : on commence par plier le rectangle selon un pli médian obtenu en superposant deux de ses sommets opposés. (Notez que, dans le cas d'une feuille de format A4, la marque de ce pli va couper les bords - longueurs - du rectangle au 3/4.)

Il n'y a pas de superposition des parties, bords à bords, mais la superposition des sommets suffit à contrôler parfaitement le pli. On plie ensuite ce "feuillet" par superposition bords à bords (ou encore par superposition exacte du premier pli sur lui-même, ou encore comme bissectrice du coin du feuillet opposé au premier pli : voilà différentes manières de considérer ce second pli).

Événement : lorsqu'on déplie la feuille, on obtient deux marques de plis médians dont l'une est une diagonale du rectangle.

Interprétation géométrique : le second pli laisse une marque sur la diagonale du rectangle; le premier pli laisse une marque sur la médiatrice de cette diagonale, c'est aussi une médiane du rectangle qui le divise en deux moitiés identiques et de même aire, symétriques l'une de l'autre par demi-tour. Les quatre parties que la combinaison de ces plis délimite dans le rectangle n'ont ni toutes la même forme, ni non plus toutes les mêmes aires. Plus précisément, elles sont deux à deux identiques par demi-tours.

Événements :

a) On a plié en quatre par des plis médians sans pour autant délimiter de quarts.

b) La combinaison des plis est certes commutative, toutefois, ce sur quoi on joue pratiquement (id est pragmatiquement et empiriquement) est qu'il est bien plus aisé de procéder en commençant par le pli appliquant un sommet du rectangle sur son opposé.

La surprise provient du fait que le pli produit sur le feuillet, et dont la trace finale sera la diagonale, est un pli bissecteur d'un coin (angle) du polygone que forme le bord externe du feuillet obtenu par le premier pli, mais ne l'est pas d'un coin des deux feuilles qui le constituent. Une fois le morceau entièrement déplié, la marque du pli ne sera pas bissectrice des coins du rectangle qu'elle relie.

c) Etc.

Dans ces dernières explications, j'interprète l'expérience elle-même et j'use du modèle géométrique pour comprendre ce qui se passe - et, en particulier, démontrer l'effectivité de mon petit algorithme. On est alors passé du niveau dicent de l'expérience à un niveau argumental.

Notes:

1° Autre légisigne symbolique, modèle grosso modo analogue de ces propriétés géométriques : les constructions à la règle et au compas. L'entier du propos ci-dessus peut être repris pour décrire ce cas. La résistance de l'expérience provient alors des limites instrumentales imposées : compas, règle non graduée, pas d'équerre. Notez que ces instruments ne sont pas que

matériels, mais qu'ils sont supports d'actions spécifiques, tout comme le papier est support spécifique aux pliages. Dans le modèle règle-compass, pour construire une médiatrice d'un segment ou une bissectrice d'un angle, on construit les sommets d'un losange (ou d'un rhombe) dont une diagonale est la droite cherchée.

Dans le cas du pliage, notez que j'aurais aussi bien pu considérer une règle. C'est un instrument que les professionnels du pliage utilisent. Ils "cassent" leur papier le long de l'arête de cette règle, et peuvent alors "tirer" facilement n'importe quelle marque de pli entre deux points. Dans ce cas le pli de la diagonale d'un rectangle s'obtient directement. Dans ma description ci-dessus, j'ai exclu cet instrument de mes considérations.

Remarquez que par rapport aux "constructions à la règle et au compas", la "construction d'une diagonale du rectangle à l'aide de pliages" présente une interversion entre diagonale et médiatrice/bissectrice. En effet pour construire le pli sur la diagonale d'un rectangle, on construit la médiatrice d'un segment, lui-même, médiatrice de la diagonale cherchée (ou, on peut le voir aussi ainsi, on construit la bissectrice d'un angle, celui de la forme du bord externe du feuillet obtenu après le premier pliage).

2° Je renvoie le lecteur à mon article : *L'expérience comme signe didactique indiciel*, RDM 28/2, 2008, et au propos des pages 235-240 (à propos d'une confrontation à une expérience de pliage idoine de la propriété de la somme des angles d'un triangle). Cet exemple et cette analyse pourraient être entièrement reprises selon les termes proposés ci-dessus et on y retrouve, là aussi, une commodité dans le choix d'un pliage particulier pour illustrer la propriété de la somme des angles d'un triangle. Ceci illustre en outre le fait que dans la pratique de l'enseignement de la géométrie, l'expérience est généralement invoquée afin de démonstration, ce qui est bien une fonction indicielle.

B. Commentaire général

Ce qui est neuf dans ma proposition sur pliages est de trois ordres.

a) Le premier est de considérer l'expérience comme interprétant, ou occasion aux interprétants de nous venir à l'esprit, en particulier de manière dicente, comme événements.

b) Le second est de proposer une boucle qui renverse la fonction du modèle, l'expérience n'est plus le cadre d'un modèle venant illustrer le savoir (par exemple jeux de pliages pour faire de la géométrie élémentaire des bissectrices et médiatrices), mais modèle construit afin que le savoir puisse rendre compte de ce qui arrive dans l'expérience. Non plus paraphraser le savoir dans un modèle, mais faire parler le savoir en tant que modélisant.

c) C'est alors une boucle et pas une simple balance dialectique parce que l'enchaînement se fait sur le légisigne :

Partant, **primo**, du schéma catégoriel des types de pliages que l'on se propose de faire - et auxquels on se propose de se limiter aussi - et, **secundo**, après une première interprétation comme modèle géométrique, puis, **tertio**, provocation d'un événement de mise à l'épreuve d'une expérience - le pli en diagonale, on compose un nouveau légisigne

primo bis - le petit algorithme - analogue à une classique construction à la règle et au compas - qui rend compte de ce qui, dans l'expérience, **tertio bis**, résiste au savoir, **secundo bis**, et auquel ce dernier est indifférent - donc à quoi il est "aveugle".

Dans le savoir il est indifférent de plier d'abord ainsi puis ensuite ainsi, c'est commutatif. Et la question n'y a pas de pertinence. Mais, pratiquement, les deux

modes ne sont pas équivalents, vu tout ce qui, de l'expérience, n'a pas été retenu dans le modèle.

Il faudrait encore croiser ce type d'analyse, verticale, ou quasi : légisigne symbolique, dicent avec les niveaux du phanéron - un schéma est une forme, donc iconique alors qu'un modèle est symbolique.

C. Commentaire de chercheur.

1° Je suis content d'avoir, je crois, trouvé une perspective plus satisfaisante (et elle met en cause le schéma Petitot Descaves - voir annexe ci-dessous- , ce qui pour moi n'est pas rien, et elle replace schéma vs modèle et expérience, et elle peut s'intégrer au giron des logiciens pour qui la triade est syntaxique, sémantique, pragmatique, ce qui est rassurant).

2° Incrire l'expérience dans le schéma peircien c'est ce que j'ai toujours essayé de faire et ce dès 2003, mais alors j'étais assez maladroit avec les notions de Peirce.

Dans les épisodes de l'automne 2003, dont les 8 précédents, je présentais encore les choses en parlant d'antagonisme savoir/expérience, idée qui prolongeait celle d'antagonisme sujet/milieu, etc. Néanmoins ces réflexions se tenaient dans la suite de mes thèses sur savoir et connaissance (Conne 92) pour lesquelles déjà trois termes étaient en jeu: *connaissance*, *savoir*, *situation* ; avec cette affirmation : *le savoir dispense de la connaissance* (formule volontairement ambiguë vue que le terme "dispenser" pourra être pris aussi bien son sens transitif, qu'en son sens intransitif).

Formule dont un des corolaires est aussi : *le savoir dispense d'avoir à faire l'expérience de tout*.

Par exemple, les règles que l'on se donne, si on les applique correctement, ce qui demande un certain apprentissage, nous font passer à côté de tout un pan réel de l'expérience, et ce d'autant plus qu'on aura du se consacrer à leur apprentissage, ce qui accapare pas mal de son expérience.

Cette affirmation et ses conséquences sont au coeur de toutes les réflexions présentées dans ces épisodes. Ainsi, petit à petit, expérience est venue se substituer à situation ...

Ce qui est significatif ici est de considérer l'expérience comme interprétant - cela rejoint d'ailleurs quelque chose sur lequel Jacinthe Giroux a beaucoup insisté (Giroux 2008) et bien plus tôt que je ne l'ai fait, à savoir considérer situation comme sémiose. Avec le concept de *conduites atypiques*, elle examine la dynamique des interactions entre sujets et milieu comme sémioses. Tandis que pour ma part, j'examine comme sémioses, les relations entre connaissance / savoir / expérience. Ainsi, dans mon interprétation actuelle, l'expérience a supplanté l'idée de situation vu que situation ne considère qu'une relation univoque au savoir, ce que j'appelle l'illustration en un certain modèle (ce que j'ai clairement relevé dès ma thèse, Conne 1981).

Et en fait, *regarder ce que ça donne* (Conne 1999), c'est justement bien la même chose que *expérience vue comme interprétant*.

Considérer les événements qui surviennent à l'expérience comme des interprétants, que l'on décrit trop souvent comme signes qui nous viennent à l'esprit, c'est considérer la connaissance comme interaction esprit - réalité selon une idée piagétienne, ni mentaliste, ni empiriste.

La description de la boucle que j'ai faite à propos du pliage en 2 puis du pliage selon la diagonale, illustre une sémiose.

3° Jusqu'ici, je situais expérience en second niveau du phanéron, en second niveau de la graduation verticale du tableau des signes de Peirce. Ce qui change ici est de considérer la dimension des constituants du signe, donc la graduation horizontale du tableau des signes. Et cette fois je traite sans les dissocier les trois composantes du signe.

J'avais tenté une première combinaison en parlant de règles, expérience, logique, option que j'abandonne désormais.

4° Il est un reproche classique et traditionnel fait à l'école de ne proposer que des problèmes de maths dont les solutions sont toujours des nombres bien ronds, donc le côté irréaliste, artificiel, voir inapplicable de ce qu'on y fait apprendre de maths.

Et ceci tient, justement, à la composante légisigne-schématique (iconique) et à l'ambivalence fonctionnelle - lors des sémioses qu'est la mise en œuvre des actions ainsi réglées - du symbole-modèle qui est attaché à ce légisigne.

Bref, il n'y a pas simple antagonisme entre savoir et expérience, mais bel et bien conflit, et jeu triadique.

5° Exemple :

Par l'observation, le questionnement et l'analyse d'expériences effectives en classe, ma thèse (Conne 1981) montre l'impertinence des diagrammes de Venn comme illustration de la logique. Mais, impertinence ne signifie pas non pertinence non plus dès lors que les diagrammes de Venn proposent des modes d'actions et de production de choses qui seront interprétées à l'aune de la logique. Ma thèse montre ainsi que ce modèle (Venn), pour autant qu'on le dissocie de la signification qui lui est attribuée a priori par cet enseignement (logique des ensembles), me permet d'interpréter quelques événements, dont des productions d'élèves, que j'ai pu relever lors de ces expériences comme étant bel et bien ceux d'une expérience de logique. Le modèle permet aussi de considérer ce que, pour des raisons trivialement fonctionnelles, il laisse échapper.

La conclusion générale que je tire dans le point b) du commentaire général ci-dessus, recouvre donc aussi ce que j'avais trouvé dans ma thèse en disant que même si dans l'enseignement des ensembles de l'école primaire, on avait quelque chose de très bancal pour illustrer et enseigner la logique, les élèves que j'avais observés avaient pour autant bien fait expérience de logique.

Annexe: Schéma Petitot Descaves

(Descaves 1992, p.13 ; et cité dans Conne & Lemoyne 1999, p12).

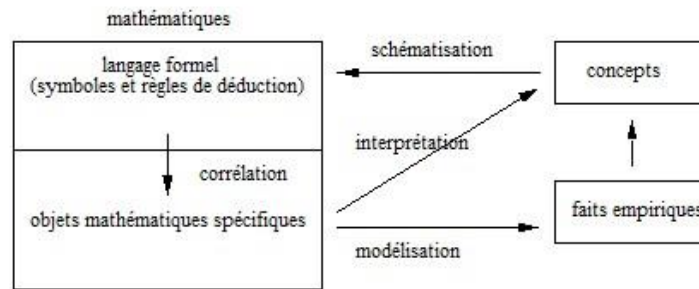


fig 1 : schématisation et modélisation

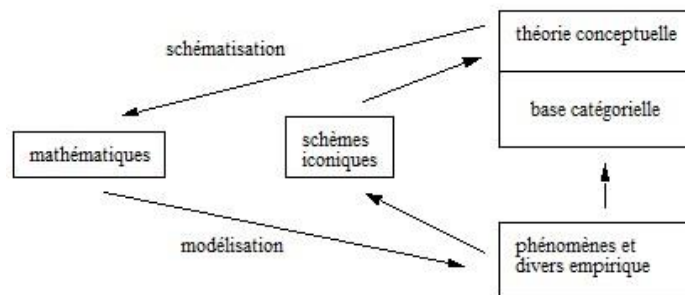


fig 2 : le jeu à quatre des relations entre réalité et mathématiques

Références faites dans le texte.

Conne F. (1981) La transposition didactique à travers l'enseignement des mathématiques en première et deuxième année de l'école primaire. Thèse de doctorat. Lausanne. Conne / Couturier - Noverraz, (publiée en 1986). 462 pages.
<http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01066233>

Conne F. 1992, Savoir et connaissance dans la perspective de la transposition didactique, *Recherches en didactique des mathématiques*, 12 (2.3), 221-270.

Ce texte a été publié en 1996 comme 5ème chapitre du livre: *Didactique des mathématiques* de la collection *Textes de base en Pédagogie*, pp 275-338, sous la direction de J. Brun, Delachaux et Niestlé, Lausanne, Paris, 1996.

Conne F. 1999, Faire des maths, faire faire des maths et regarder ce que ça donne, In G. Lemoyne & F. Conne (Sous la dir.) *Le cognitif en didactique des mathématiques* pp. 31-69. Montréal : Presses Université de Montréal. 367p.

Conne F., Lemoyne G. 1999, Introduction. In G. Lemoyne & F. Conne (Sous la dir.) *Le cognitif en didactique des mathématiques*, pp. 7-28. Montréal : Presses Université de Montréal. 367p.

Descaves A. 1992, *Comprendre des énoncés, résoudre des problèmes*, Illustrations Pef, 191p. Hachette.

Giroux J. 2008, Conduites atypiques d'élèves du primaire en difficulté d'apprentissage, *Recherches en didactique des mathématiques* 28(1), 9-62.

