

Edition commentée et annotée de Henri Poincaré, La science et l'Hypothèse (Préface, Chapitres 1 et 2)

Gabriella Crocco, Eric Audureau, Alain Michel

▶ **To cite this version:**

Gabriella Crocco, Eric Audureau, Alain Michel. Edition commentée et annotée de Henri Poincaré, La science et l'Hypothèse (Préface, Chapitres 1 et 2). 2020. halshs-02494965

HAL Id: halshs-02494965
https://shs.hal.science/halshs-02494965

Preprint submitted on 29 Feb 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

EDITION ANNOTEE ET COMMENTEE DE *LA SCIENCE ET L'HYPOTHESE* D'HENRI POINCARE

Introduction, Chapitres 1 e 2

(version préliminaire)

Gabriella Crocco, Eric Audureau, Alain Michel

Avant-propos i
Présentation de l'Introduction 5
INTRODUCTION 9
Postface de l'Introduction 13
Encadré: La convention 23
Présentation de la première Partie 25
Introduction au Chapitre I 27
Chapeau morphogénétique du chapitre I 31
CHAPITRE I SUR LA NATURE DU RAISONNEMENT MATHÉMATIQUE 33
Postface au Chapitre I 45
Encadré: L'induction mathématique chez Poincaré et les penseurs de son époque 53
Encadré: La distinction entre « analytique » et « synthétique » 55
Présentation chapitre II 57
Chapeau morphogénétique au chapitre II 63
CHAPITRE II LA GRANDEUR MATHÉMATIQUE ET L'EXPÉRIENCE 65
Postface au Chapitre II 77
Encadré: L'arithmétique et les nombres réels selon Kronecker 89
Encadré: Paul du Bois-Reymond et le calcul infinitaire 91
Encadré: Coupure et nombres irrationnels chez Dedekind 93

AVANT-PROPOS

Nous proposons ici la première partie d'une présentation annotée et commentée de *La science et l'hypothèse*. Bien que tout le sens de cette recherche ne puisse apparaître que lorsque aura été livré le commentaire de l'ensemble de l'ouvrage, plusieurs raisons nous ont convaincus d'en livrer dès à présent un premier aperçu.

La première est le volume assez inquiétant qu'a pris notre commentaire. On verra que lorsque Poincaré écrit une page, il nous en faut plus de quatre pour expliquer son propos, cela tout en restant avec le sentiment qu'il y aurait encore beaucoup à dire. Le produit final de ce travail devrait donc dépasser le millier de pages. Aussi nous paraît-il sage de commencer à le diffuser sous forme de fascicules.

La seconde est que la division que nous adoptons dans cette présentation correspond à celles choisies par Poincaré dans le plan de son ouvrage. Le présent commentaire concerne la première partie, *Le nombre et la grandeur*, ainsi que l'*Introduction*.

Enfin, ce groupe de chapitres, qui porte sur ce que l'on peut appeler la conception poincaréenne des fondements des mathématiques et qui forme la clé de voûte de toute l'épistémologie de l'auteur, renferme sans doute l'aspect le moins bien compris de son œuvre. Les commentateurs s'étant surtout concentrés, pour l'étude de ces matières, sur les écrits plus tardifs recueillis dans *Science et méthode* ou dans les *Dernières pensées*. Nous espérons convaincre le lecteur qu'en l'espèce Poincaré s'est formé dès le début des années 90 un corps de doctrine dont les appellations usuelles (pré-intuitionniste, semi-intuitionniste) ne rendent compte que très imparfaitement. L'originalité des vues du savant sur la nature des mathématiques nous a semblé une raison suffisante pour les faire connaître en tant que telles même si cette originalité ne peut apparaître dans toute son ampleur que lorsqu'on lie ces vues aux questions touchant les conventions et les lois de la physique mathématique.

Matériellement, notre commentaire se répartit comme suit. Pour chaque chapitre, nous donnons 1° une présentation morphogénétique ; 2° une présentation synoptique décrivant principalement sa composition; 3° des notes appelées par le texte de Poincaré ; 4° une postface décrivant, d'une part, le contexte historique dans lequel les idées du chapitre ont été développées, d'autre part, la postérité de ces idées dans les ouvrages ultérieurs de Poincaré ; 5° des encadrés sur les principales notions techniques rencontrées.

On s'étonnera peut-être de ne trouver dans la présente étude pratiquement aucune référence à la littérature secondaire. Ce ne fut pas facile car il est certain que notre approche du texte a été orientée par les travaux de nos pairs – comment ignorer les pages qu'un L.Brunschvicg ou un J.Vuillemin ont pu consacrer à notre auteur ? Mais le choix délibéré d'éclairer Poincaré par Poincaré ajouté à la profusion, déjà signalée, de notre commentaire nous interdisait de rentrer dans l'éclaircissement, l'analyse et la critique des interprétations, d'ailleurs de plus en plus nombreuses. Il nous suffira de dire que si chacune de celles dont nous avons pris connaissance contient sa part de vérité, aucune ne correspond suffisamment à l'image de Poincaré qui se dégage de nos analyses.

Si ce travail présente un intérêt, celui-ci est dû à la méthode que nous avons suivie au cours de son élaboration. Les pages qui suivent ont principalement été rédigées au cours des trois dernières années. Elles ont été discutées ligne après ligne au cours des séances du *Séminaire de philosophie des mathématiques* du Ceperc, qu'anime Gabriella Crocco, par les participants à ce Séminaire : Philippe Abgrall, Eric Audureau, Gabriella Crocco, Bernard Julien, Cyril Marilier, Alain Michel et Norma Yunez. Le principe a prévalu que toute rédaction, qu'il s'agisse de celle d'une simple note ou d'une postface, devait recevoir un assentiment unanime. Nous espérons avoir ainsi réduit au mieux les préjugés sur Poincaré dont chacun d'entre nous était inévitablement porteur.

Le projet de cette édition commentée et annotée a une plus longue histoire que celle décrite à l'instant. Il remonte à juin 2002 lorsque E.Audureau et G.Crocco en proposèrent l'idée à Gerhard Heinzmann, responsable, des Archives Henri Poincaré, à Nancy. L'idée fut accueillie avec enthousiasme et dès le début de 2003 plusieurs séances de discussions eurent lieu réunissant G.Heinzmann, Igor Ly, Philippe Nabonnand, Laurent Rollet et Scott Walter, pour les nancéiens et les trois responsables du présent travail pour les aixois. Les premières réunions eurent lieu avec une fréquence assez soutenue, mais, à partir du printemps 2004, nous dûmes constater que l'éloignement géographique de nos deux groupes constituait un obstacle matériel que dans notre enthousiasme initial nous avions sous-estimé. A la fin de l'année 2004, ce beau projet sombrait irrésistiblement dans l'enlisement. Audureau, Crocco et Michel continuèrent à y travailler ensemble de façon épisodique jusqu'à ce que Crocco prenne l'initiative de le mettre à l'ordre du jour du *Séminaire de philosophie des mathématiques*, le remettant ainsi sur les rails, jusqu'à ce qu'il puisse se conclure par une publication.

Pour l'essentiel, les textes de notre commentaire, notes incluses, sont le résultat d'une collaboration étroite entre Audureau, Crocco et Michel, et pour cette raison nous n'avons pas jugé bon d'identifier les contributions individuelles, ce qui aurait d'ailleurs été impossible. Les autres participants au Séminaire, outre leur contribution aux discussions et à la lecture critique des rédactions préliminaires, ont rédigé de façon ponctuelle certaines pages, notamment des encadrés. Pour la rédaction de certains passages (une partie des notes des chapitres I, II et IV), nous avons travaillé à partir de versions initiales dues à G.Heinzmann, I.Ly et P.Nabonnand. Nos conclusions, pour les raisons expliquées plus haut, n'engagent pas ces collègues. Le matériel des chapeaux morphogénétiques est, pour une grande part, emprunté à L.Rollet, *L'opportunisme scientifique*, Birkhäuser, 2002. La bibliographie complète et chronologique des écrits de Poincaré donnée dans le même ouvrage a été un outil précieux.

La pagination de *La science et l'hypothèse* est celle de l'édition actuellement disponible chez Flammarion.

E. Audureau, G.Crocco, A.Michel, Aix-en-Provence le 30 Mars 2009

PRESENTATION DE L'INTRODUCTION

L'introduction de *La Science et l'Hypothèse* est divisée en deux parties. Dans la première, qui s'étend jusqu'au §8, Poincaré, après avoir exposé que la question principale dont traite l'ouvrage est celle de la nature de la vérité scientifique, procède à un inventaire des différentes positions philosophiques concernant cette question, qu'il repousse explicitement. La seconde partie, s'appuyant sur les diagnostics de la première, présente la méthode et les éléments de doctrine développés dans l'ouvrage pour mettre à l'épreuve la thèse très générale que Poincaré veut défendre. La science nous fait connaître quelque chose de la réalité, mais ce qu'elle nous fait atteindre, ce ne sont pas les choses elles-mêmes, mais seulement les rapports entre les choses.

Les conceptions de la vérité scientifique inventoriées par Poincaré, toutes également rejetées, lui donnent l'occasion de préciser le cheminement qu'il est nécessaire d'accomplir de l'idéal scientifique du XVIII^{e} siècle à une compréhension moderne de la science, capable, tout en faisant place au constat de la nature éphémère des théories scientifiques, d'aboutir à une explication positive de sa valeur. L'importance, dans ce cheminement, de la juste appréciation du rôle des différents types d'hypothèses est soulignée par le titre même de l'ouvrage.

La première de ces conceptions de la vérité scientifique, décrite dans les trois premiers paragraphes, pourrait être qualifiée de déductiviste. Pour elle, les hypothèses n'ont qu'un rôle marginal dans la science. Il suffirait de s'appuyer sur « un petit nombre de propositions évidentes » (p. 23), c'est-à-dire sur quelques axiomes, « en empruntant à l'expérience aussi peu de matériaux que possible » (p. 23) pour parvenir à la vérité scientifique. Ce point de vue n'est pas seulement ingénu, comme peut l'être celui des gens du monde ou les lycéens, il est également rétrograde puisque c'est celui qu'adoptaient les savants un siècle auparavant.

Le scepticisme est moins condamnable que ce déductivisme en ce qu'il reconnaît, au moins, le rôle de l'hypothèse et met ainsi le doigt sur un élément essentiel de la vérité scientifique mais il ne vaut guère mieux. L'histoire des sciences montre sans doute que les théories sont éphémères, mais celles-ci, comme Poincaré le dit plus loin, « ne meurent pas tout entières » (p. 26). Concluant, du seul constat de la précarité des hypothèses, à l'inexistence de vérités scientifiques, le pessimisme sceptique ne reconnaît pas mieux que

l'optimisme déductiviste de la méthode axiomatique l'acuité du problème de la vérité scientifique.

La superficialité du scepticisme provient d'une absence de réflexion critique sur la nature des hypothèses, lesquelles sont de différents types. Il y a des hypothèses qui sont des généralisations empiriques exprimées dans le langage des mathématiques et qui deviennent, une fois confirmées, des lois fécondes de la science. Leur vérité, comme le chapitre X le précise, n'est jamais remise en question par l'effondrement des théories à l'intérieur desquelles elles ont été formulées, car elles expriment des rapports véritables dont la connaissance est à notre portée. Il y a ensuite des hypothèses qui guident notre imagination et fixent notre pensée. Aux chapitres IX et X, Poincaré précise que de telles hypothèses, qu'il qualifie d'indifférentes, sont exigées du fait de la faiblesse de notre esprit, et qu'elles constituent, parce qu'elles sont éminemment ontologiques, l'aspect le plus éphémère des théories scientifiques. Il y a, enfin, celles qui ne sont pas de véritables hypothèses mais des définitions déguisées, c'est-à-dire des conventions. La deuxième partie et la quatrième partie de l'ouvrage expliqueront la différence d'origine et de nature entre les deux principaux types de conventions, celle de la géométrie et celle de la mécanique.

Le mérite du nominalisme est d'avoir reconnu l'importance des conventions dans les principes fondamentaux de la science. Cependant il s'égare sur deux points. D'une part, il confond la liberté avec l'absence de responsabilité. La liberté avec laquelle nous introduisons des conventions dans notre science n'est pas absolue. Elle est conditionnée par l'ensemble de notre expérience et elle doit être orientée en vue de la simplicité de nos théories, cette simplicité nous portant à choisir les conventions les plus commodes. D'autre part, si la science ne peut se dispenser de conventions, elle ne peut être faite que de conventions. En le croyant, les nominalistes en arrivent à soutenir une conception paradoxale qui cumule les inconvénients du déductivisme et du scepticisme : les vérités scientifiques seraient à la fois certaines et stériles.

Or, pour Poincaré, c'est une évidence, la science n'est pas stérile. Sa capacité d'agir sur la réalité vient justement de ce qu'elle nous en fait connaître quelque chose. Il ne reste alors qu'un dernier écueil à écarter pour parvenir à une conception correcte de la science. C'est celui du dogmatisme naïf. Il est naïf de penser que la connaissance scientifique nous fasse connaître les choses elles-mêmes. Cette thèse revient à croire que le progrès scientifique consiste à trancher entre des hypothèses indifférentes, lesquelles ne concernent pas la nature, mais l'ontologie. Elles ne sont que « des images substituées à des objets réels

que la nature nous cachera éternellement » (ch. X, p. 174). L'anti-dogmatisme radical de Poincaré est un aspect essentiel de sa philosophie. Nous ne trouvons dans la nature ni la grandeur mathématique (p. 25, §11), ni l'espace (*Ibidem* §12), ni le temps (*La Valeur de la Science*, p. 21), ni les atomes (p. 166), ni les tourbillons (p. 167), etc.

Il ne reste donc qu'une issue : admettre que la science ne nous fait connaître que les rapports entre les choses. C'est ce que l'ouvrage se propose d'établir en suivant un plan annoncé au début de la seconde partie de l'Introduction.

Ce plan comporte quatre parties : *Le nombre et la grandeur*, *L'espace*, *La force* et *La nature*. Cet ordre n'est pas fortuit, c'est un ordre des raisons. Il part de la connaissance pure de l'arithmétique, dépourvue de toute convention, pour arriver aux lois physiques, qui dépendent des données brutes de nos sens. Les domaines intermédiaires de la géométrie et de la physique générale, ou physique des principes, qui sont étudiés dans *L'espace* et *La force*, dépendent, par contre, de façon essentielle des conventions, la nature de chacune de ces sciences devant être analysée en fonction de l'usage qu'elles font des différents types d'hypothèses.

Les deux extrêmes opposés des mathématiques pures et de la physique expérimentale reposent sur un principe commun. Ce principe revient à généraliser à partir de la répétition d'un nombre fini de données élémentaires semblables les unes aux autres. Dans le cas des mathématiques, ces données proviennent de l'esprit, c'est celui-ci qui les construit. Dans le cas de la physique, ces données proviennent de l'observation de la nature.

De même qu'en physique nous concluons au caractère général d'une propriété après l'avoir observée sur un nombre fini de cas, en mathématiques, puisque l'esprit « se sait capable de concevoir la répétition indéfinie d'un même acte dès que cet acte est une fois possible » (p. 41), nous formons des propositions générales à partir de vérifications sur un nombre fini de cas.

Dans les mathématiques pures, l'homogénéité des données est garantie par l'esprit. C'est cette homogénéité qui permet de conclure au caractère nécessaire de la généralisation. Par exemple, dans le cas du principe de récurrence, analysé au chapitre I, l'homogénéité des nombres est pure : c'est par l'adjonction, ou la répétition, du même « un » que sont obtenus tous les nombres. Par contre, dans le cas de la physique, l'induction empirique postule l'homogénéité de la matière, laquelle n'est jamais réelle, car il faudrait que les circonstances dans lesquelles se reproduit un phénomène soient toutes semblables, « mais cela n'arrivera jamais » (p. 26). L'homogénéité postulée de la matière est indispensable, mais

seulement vraisemblable. C'est pourquoi il ne faut pas s'étonner de trouver un chapitre sur le calcul des probabilités au sein de *La nature*, pourtant consacrée à la physique expérimentale, car les lois de la physique, du fait de la disparité entre l'inhomogénéité réelle de la matière et son homogénéité postulée, ne peuvent jamais être exactes, mais seulement probables. « De là le rôle considérable que joue dans les sciences physiques la notion de probabilité. » (p. 27)

Entre ces deux extrémités de la connaissance, régies par le nombre pur et le fait brut élémentaire, s'étend le large domaine de l'élaboration de la connaissance théorique qui les relie l'une à l'autre et qui dépend des conventions (« [dans ce vaste domaine] le nominalisme triomphe » (p. 26)). Ces conventions apparaissent dès l'Analyse, lorsque cette dernière n'est pas concernée uniquement par l'ordre pur. Pour appliquer les opérations de l'arithmétique à un continu, il faut imposer à ce continu le cadre de la grandeur, c'est-à-dire définir conventionnellement une distance entre les éléments de ce continu. On retrouve ce type de convention en Géométrie, dans la partie sur *L'espace*, lorsqu'on parle, par exemple, de l'équidistance de deux droites. Les conventions de la Mécanique ou de la Thermodynamique, qui sont discutées dans *La force*, ont une origine différente de celles de la Géométrie. Ces dernières ont été adoptées à la suite d'expériences de mécanique ou d'optique et « on ne peut à aucun titre les regarder comme des expériences de géométrie » (p. 152). Celles de la Mécanique sont des généralisations provenant directement des principes expérimentaux de cette science.

[23]

INTRODUCTION

Pour un observateur superficiel, la vérité scientifique est hors des atteintes du doute ; la logique de la science est infaillible et, si les savants se trompent quelquefois, c'est pour en avoir méconnu les règles.

Les vérités mathématiques dérivent d'un petit nombre de propositions évidentes par une chaîne de raisonnements impeccables ; elles s'imposent non seulement à nous, mais à la nature elle-même. Elles enchaînent pour ainsi dire le **Créateur**[1] et lui permettent seulement de choisir entre quelques solutions relativement peu nombreuses. Il suffira alors de quelques expériences pour nous faire savoir quel choix il a fait. De chaque expérience, une foule de conséquences pourront sortir par une série de déductions mathématiques, et c'est ainsi que chacune d'elles nous fera connaître un coin de **l'Univers.**[2]

Voilà quelle est pour bien des gens du monde, pour les lycéens qui reçoivent les premières notions de physique, l'origine de la certitude scientifique. Voilà comment ils comprennent le rôle de l'expérimentation et des mathématiques. C'est ainsi également que le comprenaient, il y a cent ans, **beaucoup de savants**[3] qui rêvaient de construire le monde en empruntant à l'expérience aussi peu de matériaux que possible.

Quand on a un peu plus réfléchi, on a aperçu la place tenue par l'hypothèse ; on a vu que le mathématicien ne saurait s'en passer et que l'expérimentateur ne s'en passe pas davantage. Et alors, on s'est [24] demandé si toutes ces constructions étaient bien solides et on a cru qu'un souffle allait les abattre. **Être sceptique**[4] de cette façon, c'est encore être

---

[1] La conception des rapports entre mathématiques et sciences de la nature évoquée ici ne peut pas être attribuée de manière spécifique à un auteur bien que le dernier trait (les vérités mathématiques enchaînent le Créateur) et celui qui suit immédiatement (le Créateur choisit les lois physiques de notre monde parmi des possibles) font penser aux idées d'un « observateur superficiel » qui aurait été influencé par Leibniz plutôt que par Descartes, qui semble au contraire évoqué par l'expression qui suit : « série de déductions mathématiques ».

[2] L'objectif polémique esquissé ici sera développé systématiquement dans le chapitre VII de *La Valeur de la Science* consacré à la physique des forces centrales, dans le cadre d'une « reconstruction historique » des grandes étapes de développement de la physique mathématique. Poincaré y rappellera comment cette conception est née de la mécanique céleste à la fin du XVIII^e^ siècle, en héritant de ses traits fondamentaux : mécanicisme, déterminisme, déductivisme, prétention injustifiée d'imposer à la nature un idéal immuable de simplicité « analytique », de la contraindre à rentrer dans un cadre mécanique harmonieux et simple de lois fondamentales (Poincaré cite à ce propos les travaux de Laplace *VS*. p. 124).

[3] Les observateurs superficiels de la fin du XIX^e^ siècle sont donc aux yeux de Poincaré « les gens du monde » qui prétendent parler de la science dans les salons, les lycéens qui reçoivent leur enseignement dans une école qui n'a pas renouvelé ses programmes. On observera à ce propos que la question de l'enseignement de la physique et des mathématiques était au centre des préoccupations des théoriciens comme l'attestent les nombreuses communications présentées au Second Congrès International des Mathématiciens qui s'est tenu à Paris en 1900 et les nombreux articles contenus dans la revue *L'Enseignement mathématique*. La conception de ces observateurs superficiels est celle de la fin du XVIII^e^ siècle, celle du déterminisme laplacien et du mécanicisme lagrangien. Pour plus de détails, voir la postface sur le contexte historique dans lequel s'insère l'intervention de Poincaré.

[4] Le sceptique est stigmatisé pour sa compréhension superficielle de la part importante que l'expérience a dans la science. Il croit en effet pouvoir soutenir que la connaissance n'est que contingente et que la science ne pourra jamais nous livrer de vérités. Il ne voit pas que les données de l'expérience, mises en forme dans le langage mathématique, permettent de formuler des hypothèses qui, une fois confirmées par l'expérience, deviennent des « vérités fécondes » survivant à l'effondrement des théories physiques. Poincaré commence ici sa revue des trois postures de ceux qui, en son temps, ont su reconnaître que l'idéal que l'on vient d'évoquer (note 2) n'est plus tenable : le sceptique, le nominaliste et le dogmatique naïf. Parce qu'ils sont incapables de comprendre l'usage véritable des hypothèses dans la science, ces derniers en donnent une image fausse et sont par là inaptes à répondre aux objections anti-rationalistes. Poincaré fait usage ici d'un vocabulaire philosophique très marqué, partiellement influencé par le débat qui avait lieu au même temps dans les pages de la *Revue de Métaphysique et de Morale*.

superficiel. Douter de tout ou tout croire, ce sont deux solutions également commodes, qui l'une et l'autre nous dispensent de réfléchir.

Au lieu de prononcer une condamnation sommaire, nous devons donc examiner avec soin le rôle de l'hypothèse ; nous reconnaîtrons alors, non seulement qu'il est nécessaire, mais que le plus souvent il est légitime. Nous verrons aussi qu'il y a **plusieurs sortes d'hypothèses**[5], que les unes sont vérifiables et qu'une fois confirmées par l'expérience, elles deviennent des vérités fécondes ; que les autres, sans pouvoir nous induire en erreur, peuvent nous être utiles en fixant notre pensée, que d'autres enfin ne sont des hypothèses qu'en apparence et se réduisent à des définitions ou à des conventions déguisées.

Ces dernières se rencontrent surtout dans les mathématiques et dans les sciences qui y touchent. C'est justement de là que ces sciences tirent leur rigueur ; ces conventions sont l'œuvre de la libre activité de notre esprit, qui, dans ce domaine ne reconnaît pas d'obstacle. Là, notre esprit peut affirmer parce qu'il décrète ; mais entendons-nous : ces décrets s'imposent à notre science, qui, sans eux, serait impossible ; ils ne s'imposent pas à la nature. Ces décrets, pourtant, sont-ils arbitraires ? Non, sans cela ils seraient stériles. L'expérience nous laisse notre libre choix, mais elle le guide en nous aidant à discerner le chemin le plus commode. Nos décrets sont donc comme ceux d'un prince absolu, mais sage, qui consulterait son Conseil d'État.

Quelques personnes ont été frappées de ce caractère de libre convention qu'on reconnaît dans certains principes fondamentaux des sciences. Elles ont voulu généraliser outre mesure et en même temps elles ont oublié que la liberté n'est pas l'arbitraire. Elles ont abouti ainsi à ce que l'on appelle le **nominalisme**[6] et elles se sont demandé si le savant n'est pas dupe [25] de ses définitions et si le monde qu'il croit découvrir n'est pas tout simplement créé par son caprice [(1)]. Dans ces conditions, la science serait certaine, mais dépourvue de portée.

S'il en était ainsi, la science serait impuissante. Or, nous la voyons chaque jour agir sous nos yeux. Cela ne pourrait être si elle ne nous faisait connaître quelque chose de la réalité ; mais ce qu'elle peut atteindre, ce ne sont pas les choses elles-mêmes, comme le pensent les **dogmatistes naïfs**[7], ce sont seulement les rapports entre les choses ; en dehors de ces rapports, il n'y a pas de réalité connaissable.

Telle est la conclusion à laquelle nous parviendrons, mais pour cela il nous faudra parcourir **la série des sciences**[8] depuis l'arithmétique et la géométrie jusqu'à la mécanique et à la **physique expérimentale**[9].

---

[5] La distinction de trois types d'hypothèses : les généralisations empiriques, les hypothèses ontologiques, appelées plus loin (p. 166) « hypothèses indifférentes », et les conventions, est essentielle pour comprendre correctement la nature de la science et ses objectifs. Poincaré souligne, à l'alinéa suivant, le caractère libre et non arbitraire des conventions dont il dira, plus loin dans l'Introduction, qu'elles sont à l'œuvre particulièrement en géométrie et en mécanique (deuxième et troisième parties de l'ouvrage). Quant aux deux autres types d'hypothèses, Poincaré attendra les chapitres IX et X (quatrième partie) pour en préciser la nature et la typologie. Dans cette introduction, il se contente de rappeler comment les généralisations empiriques sont essentielles aux sciences physiques proprement dites et comment elles reposent sur l'induction qui « nous fait atteindre la répétition d'un phénomène quand se reproduisent les circonstances où il avait une première fois pris naissance » (p. 27). Outre ces deux types d'hypothèses (les généralisations empiriques et les hypothèses ontologiques) spécifiquement à l'œuvre dans la physique mathématique**,** Poincaré mentionnera au chapitre IX des hypothèses « toutes naturelles et auxquelles on ne peut guère se soustraire » (p. 166), qui concernent des conditions très générales d'application des mathématiques à la physique : par exemple, l'influence des corps éloignés est tout à fait négligeable, les petits mouvements obéissent à une loi linéaire, l'effet est une fonction continue de sa cause, les lois des symétries. S'agit-t-il d'un nouveau type d'hypothèses qui ne serait pas traité dans l'introduction, ou bien d'exemples spécifiquement physiques de conventions (par opposition aux conventions propres à la géométrie et à la mécanique) ? Nous renvoyons au chapitre IX pour une discussion de ce problème.

[6] Le nominaliste, dont le représentant est Le Roy cité en note à la page suivante, voit bien que la science fait usage dans presque tous ses branches, de conventions, de décrets qu'elle impose à notre connaissance de la nature. Il croit naïvement aussi que ces décrets sont arbitraires et capricieux. Le terme nominaliste a été utilisé la première fois pour nommer la position de Le Roy (et Bergson) par Louis Couturat dans un article critique « Contre le nominalisme de Mr Leroy », paru dans la *Revue de Métaphysique et de Morale*, t VIII, janvier 1900, pp. 87-93.

[(1)] Voir M. Le Roy, Science et Philosophie. (*Revue de Métaphysique et de Morale*, 1901.) En réalité l'article en question a paru en 1899. C'est « Un positivisme nouveau » que Le Roy fait paraître dans la même revue en 1901**.**

[7] Le dogmatique en fin résume pour Poincaré l'attitude des scientifiques de sont temps qui n'ont pas encore définitivement renoncé à la conception déterministe, mécaniciste et atomiste de la fin du XVIII[e] siècle, ceux qui « savent qu'on n'atteindra les éléments ultimes des choses qu'en débrouillant patiemment l'écheveau compliqué que nous donnent nos sens ; qu'il faut avancer pas à pas en ne négligeant aucun intermédiaire, que nos pères ont eu tort de vouloir brûler les étapes, mais [qu']ils croient que quand on arrivera à ces éléments ultimes, on y retrouvera la simplicité majestueuse de la Mécanique céleste » (*La Valeur de la Science*, p.125).

[8] L'expression implique une idée d'ordre. Cet ordre renvoie à une organisation des sciences conçue selon des principes épistémologiques. Voir présentation et postface.

Quelle est la nature du raisonnement mathématique ? Est-il réellement déductif comme on le croit d'ordinaire ? Une analyse approfondie nous montre qu'il n'en est rien, qu'il participe dans une certaine mesure de la nature du raisonnement inductif et que c'est par là qu'il est fécond. Il n'en conserve pas moins son caractère de rigueur absolue ; c'est ce que nous avions d'abord à montrer.

Connaissant mieux maintenant l'un des instruments que les mathématiques mettent entre les mains du chercheur, nous avions à analyser une autre notion fondamentale, celle de la **grandeur mathématique**[10]. La trouvons-nous dans la nature, ou est-ce nous qui l'y introduisons ? Et, dans ce dernier cas, ne risquons-nous pas de tout fausser ? Comparant les données brutes de nos sens et ce concept extrêmement complexe et subtil que les mathématiciens appellent grandeur, nous sommes bien forcés de reconnaître une divergence ; ce cadre où nous voulons tout faire rentrer, c'est donc nous qui l'avons fait ; mais nous ne l'avons pas fait au hasard, nous l'avons fait pour ainsi dire [26] sur mesure et c'est pour cela que nous pouvons y faire rentrer les faits sans dénaturer ce qu'ils ont d'essentiel.

Un autre **cadre**[11] que nous imposons au monde, c'est l'espace. D'où viennent les premiers principes de la géométrie ? Nous sont-ils imposés par la logique ? Lobatchevsky a montré que non en créant les géométries non euclidiennes. L'espace nous est-il révélé par nos sens ? Non encore, car celui que nos sens pourraient nous montrer diffère absolument de celui du géomètre. La géométrie dérive-t-elle de l'expérience ? Une discussion approfondie nous montrera que non. Nous conclurons donc que ses principes ne sont que des conventions ; mais ces conventions ne sont pas arbitraires, et transportés dans un autre monde (que j'appelle le monde non euclidien et que je cherche à imaginer), nous aurions été amenés à en adopter d'autres.

En mécanique, nous serions conduits à des conclusions analogues et nous verrions que les principes de cette science, quoique plus directement appuyés sur l'expérience, participent encore du caractère conventionnel des postulats géométriques. Jusqu'ici le nominalisme triomphe, mais nous arrivons aux sciences physiques proprement dites. Ici la scène change ; nous rencontrons une autre sorte d'hypothèses et nous en voyons toute la fécondité. Sans doute, au premier abord, les théories nous semblent fragiles, et l'histoire de la science nous prouve qu'elles sont éphémères : elles ne meurent pas tout entières pourtant, et de chacune d'elles **il reste quelque chose**[12]. C'est ce quelque chose qu'il faut chercher à démêler, parce que c'est là, et là seulement, qu'est la véritable réalité.

La méthode des sciences physiques repose sur l'induction qui nous fait attendre la **répétition**[13] d'un phénomène quand se reproduisent les circonstances où il avait une première fois pris naissance. Si *toutes* ces circonstances pouvaient se

---

[9] Poincaré distingue le domaine des lois physiques proprement dites, qu'il appelle ici physique expérimentale, du domaine des principes représenté généralement mais pas uniquement par la mécanique. Voir chapitres VI et IX et la postface.

[10] La suite montrera que ce concept s'identifie chez Poincaré à celui de nombre. Dans le chapitre II, *La grandeur mathématique et l'expérience*, il proposera explicitement sa propre vision des problèmes liés à la mesure et à la mathématisation de l'expérience. Ces questions, vivement débattues à l'époque, sont au cœur de la conception des rapports entre mathématiques et physique propre à Poincaré. On soulignera la nature « critique » de la question qui est posée dans l'alinéa. A partir du constat d'un hiatus inéliminable entre le cadre mathématique des nombres réels (« le concept extrêmement complexe et subtil que les mathématiciens appellent grandeur ») et les données brutes de nos sens (qui par le biais de ce concept devraient devenir mesurables), Poincaré pose le problème de la légitimité de l'application des mathématiques à l'expérience. L'application des mathématiques aux faits de l'expérience, essentielle pour la détermination des lois physiques, ne dénature pas ce que ces faits ont d'essentiel. La raison ouvertement mais elliptiquement évoquée en est que les constructions mathématiques ne sont pas arbitraires et nous sont entièrement dues. Voir aussi la note 13 plus bas et le chapitre II (en particulier la discussion sur *le problème physique du continu* dans la Postface) pour plus de détails.

[11] C'est la deuxième fois que Poincaré emploie le terme « cadre ». Dans l'Introduction de *La Valeur de la Science* (p. 21), le temps et l'espace sont présentés comme des cadres. De façon générale, pour lui, un cadre est un ensemble ou un système de conventions.

[12] Cette question de ce qui survit à travers l'évolution des théories physiques est alors très débattue (voir par exemple Duhem, *La Théorie physique*. **cit**) Poincaré, s'il reconnaît la légitimité du débat, conclut contre l'idée de l'écroulement des théories. Pour lui il y a quelque chose qui demeure vrai dans le passage d'une théorie à une autre : ce sont les équations différentielles, qui expriment dans le langage des mathématiques, les relations objectives entre les phénomènes (voir chapitre X).

[13] L'usage du mot « répétition » est ici essentiel pour expliciter l'ellipse précédente (voir note 10) au sujets des raisons qui fondent notre confiance dans l'application des mathématiques à la physique. Une expérience intéressante pour la physique est une expérience qui peut être répétée, (*La valeur de la science* , ch. XI, *Science et Méthodes* Livre I, ch. 1) c'est-à-dire se reproduire dans des circonstances « analogues» (voir p. 159). D'où le double rôle des mathématiques dans la mise en forme de l'expérience a) par leurs raisonnements et leurs méthodes et b) par la théorie des probabilités. Plus loin dans le texte (ch. 4) Poincaré précisera que les mathématiques tirent leur vertu du fait de se conformer au principe de la répétition, de la possibilité de répéter indéfiniment la même opération car de là vient leur prise sur les faits d'expérience (p. 88). Il s'intéressera d'autre

reproduire à la fois, ce principe pourrait être appliqué sans crainte : mais cela n'arrivera jamais ; quelques-unes de ces circonstances feront toujours défaut. Sommes-nous absolument sûrs [27] qu'elles sont sans importance ? Évidemment non. Cela pourra être vraisemblable, cela ne pourra pas être rigoureusement certain. De là le rôle considérable que joue dans les sciences physiques la notion de probabilité. Le calcul des probabilités n'est donc pas seulement une récréation ou un guide pour les joueurs de baccara, et nous devons chercher à en approfondir les principes. Sous ce rapport, je n'ai pu donner que des résultats bien incomplets, tant ce vague instinct, qui nous fait discerner la vraisemblance, est rebelle à l'analyse.

Après avoir étudié les **conditions** dans lesquelles **travaille** le physicien,[14] j'ai cru qu'il fallait le montrer à l'œuvre. Pour cela j'ai pris quelques exemples dans l'histoire de l'optique et dans celle de l'électricité. Nous verrons d'où sont sorties les idées de Fresnel, celles de Maxwell, et quelles hypothèses inconscientes faisaient Ampère et les autres fondateurs de l'électrodynamique.

---

part vivement à la question des principes du calcul des probabilités en soulignant la nécessité d'expliciter les hypothèses sur lesquelles se fonde l'étude de ce « vague instinct qui nous fait discerner la vraisemblance ».

[14] Le double renvoi d'une part à l'analyse épistémologique des *conditions* du travail du physicien (la nature et la légitimité de ses instruments mathématiques et de ses hypothèses), d'autre part à l'analyse de sa propre *activité* et pratique scientifique concrète, est constant dans l'œuvre de Poincaré. Pour le scientifique Poincaré, l'analyse épistémologique des conditions de possibilité de son activité est un élément essentiel de cette activité même. Pour le mathématicien Poincaré, l'analyse concrète du travail des physiciens de son temps est un défi constant.

POSTFACE DE L'INTRODUCTION

I

L'*Introduction* de SH est un texte riche et capital dont la composition semble avoir été soigneusement méditée. On y distingue deux types de considérations. Les unes sont explicites, elles concernent la question de la vérité scientifique sous le double aspect de sa nature et de son objectivité, lesquelles sont analysées en fonction d'une classification des sciences (mathématiques et physiques). Avec ces considérations, Poincaré dessine non seulement les grandes orientations de l'ouvrage mais également celles de sa théorie de la connaissance que ses livres ultérieurs de philosophie des sciences ne feront que préciser, confirmer et développer. Aux côtés de ces indications explicites, nous trouvons des remarques allusives que l'étude du livre ne permet pas de préciser. On peut toutefois essayer d'en saisir la portée à l'aide d'indications sur le contexte scientifique et historique dans lequel l'ouvrage a pris naissance.

Remarques explicites

Dans les livres publiés ultérieurement par Poincaré certains thèmes centraux de SH paraissent avoir disparu. C'est notamment le cas de la discussion sur les différents types d'hypothèses, voire même sur le rôle de la convention que le savant ne souligne plus avec la même insistance. Toutefois ces ouvrages ne font que préciser et approfondir le schéma, suivi dans SH et exposé avec concision dans l'*Introduction*, selon lequel s'articulent organisation des sciences et vérités scientifiques. Ces précisions et approfondissements étant provoqués soit par l'évolution rapide, entre 1902 et 1912, des sciences physiques, soit par les controverses sur les fondements des mathématiques, soit, encore, par les développements des recherches scientifiques de Poincaré.

Ainsi *La Valeur de la Science*

a) reprend la question de l'intuition et de son rôle dans les mathématiques

b) approfondit « l'étude de ces cadres vides », objet principal de l'analyse mathématique, que sont l'espace et le temps en précisant la construction de l'espace représentatif et en justifiant le fait qu'il a trois dimensions, ceci après avoir livré l'analyse de la mesure du temps

c) revient plus longuement sur le thème (abordé au ch. IX de SH) de l'unité de la Nature dans ses liens avec la dialectique du simple et du complexe révélée par l'histoire de la physique ;

Poincaré lie alors explicitement la question de l'harmonie des lois[15] à celle de l'unité de la Nature pour défendre une conception intuitionniste de la connaissance de la Nature[16]

De même *Science et Méthode*

a) réexamine la question des rapports entre logique, arithmétique et analyse par le biais du rôle qu'y joue l'intuition

b) revient sur la relativité de l'espace car « tout le monde sait que l'espace est relatif, ou plutôt tout le monde le dit, mais que de personnes pensent encore comme si elles le croyaient absolu" (p. 3)

c) approfondit de nouveau la réflexion sur la crise de la mécanique, dont les principes sont de plus en plus contestés par la physique contemporaine

d) développe, avec la question très importante du choix des faits, l'image comparant la Science à une bibliothèque qui doit s'accroître sans cesse (SH, p. 160),

e) reprend l'analyse du concept de probabilité ; Poincaré ayant reconnu que ce qu'il en disait dans SH n'était pas satisfaisant.[17]

Enfin on retrouve dans les articles que Poincaré avait sélectionnés en vue d'un quatrième ouvrage, publié à titre posthume sous le nom de *Dernières pensées*, les quatre problèmes centraux traités dans SH: la vérité des lois, le continu, la nature de l'espace et du temps, les nouvelles difficultés de la mécanique résultant des hypothèses quantiques sur la constitution de la matière.

Considérant maintenant « la série des sciences depuis l'arithmétique et la géométrie jusqu'à la mécanique et la physique expérimentale », on peut déjà faire trois remarques.

D'abord, depuis l'*Encyclopédie* de D'Alembert et Diderot jusqu'à Boutroux, en passant par Comte et Ampère, la classification des sciences était de fait un exercice courant, sinon obligé, tout au long du XIX^{e} siècle. Il n'est donc pas étonnant que Poincaré propose la sienne.

---

[15] SH, ch. VIII, pp.144, 146, 149 et ch.XII, p. 216.

[16] « Cette harmonie que l'intelligence humaine croit découvrir dans la nature, existe-t-elle en dehors de cette intelligence ? Non, sans doute, une réalité complètement indépendante de l'esprit qui la conçoit, la voit ou la sent, c'est une impossibilité. Un monde si extérieur que cela, si même il existait, nous serait à jamais inaccessible. Mais ce que nous appelons la réalité objective, c'est en dernière analyse, ce qui est commun à plusieurs êtres pensants, et pourrait être commun à tous ; cette partie commune, nous le verrons ce ne peut être que l'harmonie exprimée par des lois mathématiques. C'est donc cette harmonie qui est la seule réalité objective, la seule vérité que nous puissions atteindre ; et si j'ajoute que l'harmonie universelle du monde est la source de toute beauté, on comprendra quel prix nous devons attacher aux lents et pénibles progrès qui nous la font peu à peu mieux connaître. » (*La Valeur de la Science*, p. 23)

[17] Dans sa réponse (*Mind*, 1906) au compte-rendu de SH donné par Russell (*Mind*, 1905)

Ensuite, on notera que le découpage proposé dans l'*Introduction* ne correspond pas exactement à celui adopté dans l'ouvrage. Dans l'*Introduction*, le raisonnement mathématique et « son caractère de rigueur absolue » est opposé aux cadres que nous imposons à la Nature. Le premier d'entre eux est la grandeur mathématique que Poincaré traite dans la première partie. Les deuxième et troisième parties montreront que la géométrie et les principes de la mécanique ajoutent de nouveaux cadres, c'est-à-dire des conventions, à cette première strate de conventions requise par la définition de la mesure. L'arithmétique pure est donc la seule science où la convention ne joue aucun rôle[18] et, à ce titre, elle méritait, en toute rigueur, d'être distinguée par une partie puisque la part des conventions dans les sciences est précisément le critère choisi par Poincaré pour diviser SH en différentes parties. La conjonction des deux termes, *nombre* et *grandeur*, dans l'intitulé de la première partie, atteste du compromis que représente la division en quatre parties finalement retenue.

Enfin, les intitulés des parties sont assez curieux. Poincaré aurait pu, de façon plus naturelle, les nommer *Arithmétique et analyse*, *Géométrie*, *Mécanique* et *Physique mathématique*. Il a préféré une nomenclature désignant les notions rencontrées par ces sciences : nombre, grandeur, espace, force, nature.

Ces remarques faites, on peut préciser la fonction de la classification de Poincaré dans ses relations avec le problème de l'unité de la science. A la fin du XVIII^{e} siècle, l'idée de science universelle a disparu au profit d'une pluralité de sciences constituées. Dès lors il ne peut plus s'agir de discuter *a priori* du déploiement de *la* science en fonction des différents objets de connaissance, mais de décrire les rapports entre *des sciences* qui échappent de plus en plus à un point de vue unitaire tantôt en les rapportant aux facultés qui les rendent possibles, tantôt en les classant suivant leur complexité croissante. Dans SH, Poincaré divise les sciences en fonction du rôle plus ou moins grand qu'y remplissent intuitions, conventions et généralisations empiriques. Ces deux dernières notions étant des formes d'hypothèses, c'est en démêlant soigneusement les rôles des différents types d'hypothèses que la question de l'unité de la science, condition de possibilité de son progrès (chapitres IX et X) sera réglée.

Remarques allusives

Poincaré ne donnant aucune indication sur l'adversaire qu'il désigne, dans les quatre premiers alinéas de l'*Introduction*, par les termes « gens du monde » et « lycéens », on se limitera à reconstituer sommairement la filiation historique de l'opinion générale qui semble

[18] Ce critère introduit entre l'arithmétique et l'analyse une distinction de nature que Poincaré maintiendra jusqu'à DP.

ainsi visée et à l'opposer au mouvement d'idées auquel se rattache le point de vue de Poincaré, ceci en prenant pour hypothèse que le sujet principal de ces réflexions polémiques concerne le statut de la mécanique.

A l'appui de cette dernière hypothèse, outre les multiples indications contenues dans SH, on peut invoquer le fait que Poincaré présente au Congrès international de philosophie de Paris, en 1900, une communication consacrée à la mécanique, laquelle recouvre tout le matériau de la troisième partie de SH, conclusions incluses.[19] Il faut d'ailleurs noter que le compte-rendu de ce Congrès, publié dans la *RMM* en_____, ne fait pas état des polémiques soulevées par l'intervention de Poincaré. Duhem y reconnaissait, à bon droit, et avec le soutien public d'Hadamard, sa propre doctrine. Mais il ignorait que cette intervention de Poincaré était complétée par sa communication au Congrès international de physique, tenu également à Paris en 1900 (reprise comme ch. IX et X de SH) où il précisait sa conception de la théorie physique. Or, sur ce plan, nous y reviendrons en temps voulu, les opinions des deux savants s'opposent radicalement que ce soit sur la vérité des lois, sur l'expérience cruciale, sur le rôle des mathématiques dans la physique ou sur l'écroulement des théories. Et là, Duhem ne s'y trompera pas puisqu'il verra, à juste titre, dans « La valeur objective de la science », *RMM*, **10** (1902), pp.263-93 (ch. X et XI de VS), une critique directe de sa doctrine « tout autant que celle de M. Le Roy ».[20] Les discussions sur les principes de la mécanique étaient donc au cœur de la réflexion sur les fondements des sciences.

Soulignons d'abord la place stratégique qu'occupe, dans l'ouvrage, la mécanique.

Sa situation d'intermédiaire dans un ordre gnoséologique qui va des mathématiques pures à la physique théorique et expérimentale est en correspondance avec sa place dans l'ordre d'exposition explicitement indiqué par Poincaré à la fin de l'introduction. Si la série des sciences adoptée par Poincaré exprime sans aucun doute une conception propre du système du savoir scientifique, elle est aussi, avec la situation particulière qu'y occupe la mécanique, un héritage de l'histoire .

Au début du XIX^{e} siècle, la pensée scientifique est dominée par une thèse qui est également admise dans le criticisme de Kant et dans le positivisme de Comte comme si elle allait de soi : la science de la nature inorganique ne commence pas avec sa partie concrète,

[19] Alors que les chapitres de SH sur les fondements des mathématiques et sur la nature de la géométrie reprennent des considérations développées par Poincaré plusieurs années auparavant, les réflexions de l'auteur sur le statut de la mécanique et de la théorie physique débutent en 1900.

[20] P.Duhem, *La théorie physique*, p. 227.

celle qui étudie les phénomènes astronomiques, physiques et chimiques, mais plutôt avec sa partie la plus simple, et donc préalable, la mécanique.

La mécanique est plus simple que la physique car ses notions fondamentales, masse, mouvement, force, sont elles-mêmes plus simples que celles liées aux phénomènes spécifiques de la chaleur, de la lumière, de l'électricité. Elle apparaît donc naturellement comme la discipline médiatrice grâce à laquelle se répandront dans les phénomènes physiques l'ordre et la clarté qui dérivent du traitement mathématique des relations. De fait c'est ainsi qu'on se représentait la cosmologie newtonienne, comme unissant dans un même système et fortifiant l'une par l'autre mécanique rationnelle et mécanique céleste.

Telle est bien la leçon commune de Kant et de Comte : la mécanique est une discipline de part en part rationnelle, comme l'arithmétique ou la géométrie[21].

On complètera ce constat par deux remarques.

1° D'un point de vue historique, la priorité de la mécanique n'entraîne pas d'univocité dans la formulation de l'idéal d'explication physique. La mécanique s'était constituée à partir de deux conceptions de la physique, celles de Descartes et de Newton, que tout oppose. La méthode cartésienne, qui dans un premier temps cède le pas à la méthode newtonienne, conduit ensuite directement à la mécanique analytique de Lagrange, puis à la physique analytique de Fourier, modèle à son tour pour le positivisme comtien. De manière générale, on voit le développement de la physique aux XVIII^{e} et XIX^{e} siècles engendrer plusieurs "modèles" possibles : cartésien (mécanisme proprement dit, par exemple chez Fresnel) ; newtonien (dynamisme de l'attraction et de la répulsion, avec Laplace et Poisson); mais aussi leibnizien (dynamisme de la force vive, avec Robert Mayer); analytique chez Lagrange (équation différentielle, qui peut être unique, chez Joseph Fourier) ; un peu plus tard, on aura le modèle statistique de Daniel Bernoulli (calcul des probabilités, avec Maxwell). Les thèmes des réflexions de Poincaré relatives à la physique reflètent assez fidèlement cette pluralité.

2° D'un point de vue épistémologique, le point important concerne la connexion de l'expérience et des mathématiques. C'est la manière dont elle détermine ce mode de connexion qui explique les succès de la mécanique, et son rôle de modèle pour la physique.

[21] Chez Kant, la doctrine des jugements synthétiques *a priori* légitime par les mêmes procédés les notions fondamentales de la mécanique et celles de la mathématique proprement dite, et c'est seulement une fois déduits les « premiers principes métaphysiques de la science de la nature » que se pose le problème du passage à la physique. Quant à A. Comte, il fait rentrer, dans son *Cours de Philosophie positive*, la mécanique rationnel1e, concurremment avec l'analyse et la géométrie, dans la mathématique. C'est seulement dans le second volume, c'est-à-dire à un stade ultérieur de l'exposé encyclopédique à un degré de plus dans la complexité des phénomènes et des méthodes, qu'il est traité de l'astronomie, puis de la physique.

En lui permettant de se porter au-delà de ses origines expérimentales, qui la voueraient à la contingence, l'imitation de la mathématique confère à ses propositions fondamentales une vérité nécessaire, et lui garantit la valeur d'une science[22]. C'est probablement à cette tradition que Poincaré se réfère, notamment dans le troisième alinéa de l'Introduction.

Au cours du XIXe siècle, l'établissement de cette connexion se révèle de plus en plus difficile, et le statut de la mécanique comme discipline scientifique de plus en plus précaire. Si Poincaré se sent tenu, au début du chapitre VI (p. 161), de souligner qu'« il va sans dire » que la mécanique ne peut être exposée comme une science déductive *a priori*, c'est que les notions de masse, force et mouvement ne peuvent aucunement prétendre à une définition univoque et simple, se conformant à des critères de clarté et de distinction. On peut voir là une manifestation aiguë de difficultés latentes qu'exprimait la multiplicité des conceptions de l'idéal d'explication physique mentionné à l'instant. Par ailleurs, les choses ne se présentaient pas mieux du côté de l'expérience, car les physiciens mêmes remettaient en question les bases de la physique expérimentale, la notion d'expérience cruciale et de fait scientifique, comme c'est le cas de Pierre Duhem.[23] Ces critiques donnaient objectivement du leste au développement des courants de « scepticisme » et de « nominalisme » invoqués de manière explicite par Poincaré dans son introduction. Elles remettaient en cause la possibilité, pour la physique, d'imiter les mathématiques.

Dès lors, un nouveau type de travail se dessine pour l'analyse au sens mathématique du terme. Il faut briser les cadres où celle-ci s'est trouvée enfermée et y forger des instruments nouveaux, adaptés à la nature des difficultés. Le travail de la physique mathématique se déplace vers le raffinement des techniques analytiques, un domaine qui se révèlera particulièrement fécond et dans lequel se distinguera le mathématicien Poincaré.

La nécessité de redéfinir le rôle et la fonction de l'ancienne mécanique commande chez Poincaré un travail critique dont les étapes sont données dans *La Science et l'Hypothèse*.

D'abord, il faut repenser le statut des mathématiques (de l'arithmétique et de l'analyse) de sorte qu'elles puissent constituer un langage sûr, fécond et réellement intersubjectif permettant de mettre en forme l'expérience.

---

[22] Ainsi, du Bois-Reymond n'hésitait-il pas à écrire: « les propositions de la mécanique sont mathématiquement démontrables, et portent en elles la même certitude apodictique que les propositions de la mathématique ? » (cité par L. Brunschvicg, *L'expérience humaine et la causalité physique*, p. 426)

[23] Pour Duhem, *La théorie*..., pp.224 et sq, à un fait expérimental peuvent correspondre plusieurs lois logiquement incompatibles et, inversement, à une loi peuvent correspondre des faits expérimentaux distincts.

Ensuite, il faut redéfinir la géométrie et abandonner son ancienne définition à la fois en termes de science *a priori* de l'espace et de science empirique des figures.

Enfin, il faut délimiter, à l'intérieur des théories physiques, ce qui est caduque et ce qui demeure.

Une thèse philosophique organise l'approche de Poincaré: la conception de l'objectivité comme système de relations entre les phénomènes, relations elles-mêmes vérifiées par l'observation ou l'expérience, et susceptibles ainsi de recueillir l'adhésion de « tous les sujets pensants ».

C'est cette thèse qu'on retrouve, dans le contexte de la réfutation du scepticisme et des spéculations sur la « faillite de la science », au fondement de la conception de la validité de la théorie physique que Poincaré expose au début du chapitre X de SH.

C'est encore cette conception qui fonde son analyse du fait scientifique, et son rejet de la position nominaliste radicale de Le Roy (« les faits sont "faits" par le savant »), dans le chapitre X de VS, lequel repose à son tour sur son interprétation des rapports de la science et du langage. On sait comment Poincaré s'exprime à ce propos : « le fait scientifique n'est que le fait brut traduit dans un langage commode ».[24] Les relations entre faits scientifiques, à la différence de celles qui relient entre eux les faits bruts (telles par exemple les relations qui ont lieu entre les corps), dépendent toujours de certaines conventions. Aucune de ces conventions, de par leur nature et de par leur origine, ne peut trahir l'essence du fait brut, ne peut le voiler à la raison.

La place centrale octroyée aux relations par rapport aux objets de la connaissance était un thème largement répandu au XIX^{e} siècle et on le retrouve chez Comte, Ampère et Renouvier. Ce qui fait l'originalité de Poincaré, c'est de l'avoir étayé en termes mathématiques par rapport à la physique de son temps.

Venons-en maintenant au courant de pensée philosophique auquel se rattache Poincaré.

Notons d'abord que bon nombre des articles qu'il recueille dans ses ouvrages épistémologiques ont d'abord paru dans la *Revue de Métaphysique et de Morale*, fondée par Xavier Léon (un proche d'Emile Boutroux, beau-frère de Poincaré) en 1893. L'accent mis, dès l'*Introduction* au premier numéro de cette revue, sur la nécessité de revenir à des théories générales de la pensée et de l'action, sur la revendication de l'idée de la philosophie comme

[24] VS, p.161.

discipline distincte des sciences, et sur la réévaluation de l'idée de système philosophique explique à lui seul le nom choisi de *Revue de Métaphysique et de Morale*. Cette idée de la philosophie n'implique aucunement une indifférence aux sciences. Boutroux avait réuni autour de lui, un cercle de penseurs qui, outre Poincaré, comprenait des scientifiques et historiens des sciences de premier plan (comme Gaston Milhaud, ou les frères Tannery), et cet intérêt pour les sciences se retrouve dans la revue. On lit en effet dans le texte d'Introduction évoqué ci-dessus qu'« elle [la philosophie] croit discerner dans la théorie de la connaissance les raisons profondes de l'évolution de la science, comme de la forme qu'elle a enfin reçue dans les temps modernes ; et d'autre part [qu'] elle recueille avidement les résultats généraux auxquels arrive chaque science spéciale, afin d'y chercher les linéaments d'une cosmologie ou d'une psychologie concrètes qui confirment ou renouvellent ses conceptions originales ; enfin [qu'] elle a une prédilection marquée – en souvenir de Platon et de Descartes, si l'on veut – une prédilection de sœur aînée, dirions-nous plutôt, pour les sciences mathématiques, ce grand art aux ressources inépuisable, né lui aussi de l'esprit humain » (*Revue de Métaphysique et de Morale* 1, p. 3).

La *RMM* se présente ainsi comme un troisième pôle de la réflexion philosophique, entre ceux de la *Revue philosophique* liée au positivisme français et la *Critique philosophique* liée au néocriticisme français. Les travaux des scientifiques du cercle de Boutroux, par leur seule existence, remettaient en cause la vision comtienne de l'évolution de la science et ne pouvaient qu'atteindre l'image positiviste de la science encore prédominante dans l'enseignement scientifique. C'est dans le cadre de ce projet de nature rationaliste mais ouvertement antipositiviste que prennent place les premières interventions « philosophiques » de Poincaré.

Un dernier point doit être souligné, qui explique peut-être pourquoi Poincaré, qui avait beaucoup à faire par ailleurs, a entrepris la publication de SH. Les limites et les difficultés de la mécanique rationnelle aboutissaient dans les faits à menacer le système même de la science, de telle sorte que ce n'était plus seulement l'interprétation de la causalité physique qui se trouvait remise en question, mais, d'une façon plus ample et plus générale, la valeur même de la science – un thème qui devait fournir son titre au second ouvrage philosophique de Poincaré, et dont il s'agit bien ici de donner une défense et illustration. On sent parfaitement cette intention dans tous les passages que Poincaré consacre, entre les développements nécessaires sur la justification de l'ordre suivi dans l'ouvrage et l'organisation des chapitres, à la critique du scepticisme et à l'évocation de la doctrine de

« quelques personnes » (le nominalisme). Examiner la fonction exacte en physique de l'hypothèse, déterminer le rôle de l'expérience dans la position des principes, montrer que la succession historique des théories laisse subsister un élément constant, c'est encore travailler à défendre le rationalisme scientifique.

Or, il est de fait qu'en cette seconde moitié du XIX^{e} siècle, les doutes élevés sur la valeur des systèmes scientifiques sont l'objet d'une exploitation au profit de ceux qui contestent la capacité de l'intelligence humaine à établir la vérité à l'aide de la seule raison. Des influences d'ordre politique et social favorisent un retour aux formules traditionalistes. Il n'est donc pas étonnant que le thème de la « faillite » (ou du moins des faillites partielles) de la science soit devenu une sorte de mot d'ordre à usage apologétique[25]. Poincaré a tenu à prendre toute sa part dans l'entreprise d'une défense rationaliste de la science. C'est aussi de cette manière, comme la trace de cet engagement, qu'il faut lire *La Science et l'Hypothèse*.

[25] L'expression " banqueroute de la science" a été utilisée pour la première fois en 1895 par Ferdinand Brunetière dans un ouvrage publié à Paris, et intitulé *La science et la religion*. Mais c'était pour protester contre l'exagération qu'elle implique. Il a tenu à s'en expliquer l'année suivante dans une conférence intitulée *La renaissance de l'idéalisme* (prononcée le 2 février 1896, recueillie ensuite dans *Discours de combats*, 1900-1907, première série). S'il y maintient que les sciences avaient connu "des faillites partielles", le contexte montre que ces dernières doivent être entendues relativement aux promesses initiales. Ces dernières sont interprétées par Brunetière comme des engagements pris par les sciences, et par leurs représentants, en particulier Descartes dans le *Discours de la Méthode*, Condorcet dans l'*Esquisse d'un tableau des progrès de l'esprit humain*, Renan dans *L'Avenir de la science*, "pour ne rien dire de M. Berthelot". Voir L. Bruncshvicg, op. cit. note 17.

LA CONVENTION

En toutes rigueur et conformité à ses origines, la notion de convention relève de la réflexion pratique. Elle signifie une relation d'accord qui s'établit, à la suite d'une libre et commune décision, entre deux ou plusieurs individus, l'accord ainsi créé déterminant au moins partiellement leurs volontés et leurs actes, et contribuant à faire de ces derniers un tout organisé et unifié. Dans le cas le plus fréquent, l'accord concerne l'identité d'une règle formelle, fixée et stabilisée ensuite par le droit dans ce qu'on appelle un « cadre juridique ».

Né dans la vie pratique et fixé par le droit, le concept ne s'introduit que tardivement dans le vocabulaire de la philosophie. On en trouve la première occurrence dans la tradition sceptique qui remonte à Protagoras, chez un auteur comme Hume (voir *A Treatise of Human Nature*, 1740, III (Of Morals), II, II (Of the Origins of Justice and Property) ; *An Enquiry concerning the Principles of Morals*, 1777, App III.) Par ailleurs, il faudrait évidemment faire la part qui convient aux conceptions épistémologiques d'auteurs dont on est sûr que Poincaré les connaissait, comme Comte, Cournot, ou Boutroux. La référence a sans doute paru insuffisante aux auteurs par exemple du *Vocabulaire technique et critique de la philosophie* de Lalande puisque l'édition initiale de leur ouvrage (1903), postérieur à *La Science et l'Hypothèse*, ne le mentionne pas, et ne le fera que dans les éditions plus tardives. Ce n'est semble-t-il que progressivement, dans les décennies qui suivent, sous l'influence de la « critique philosophique des sciences », notamment de Poincaré, que les auteurs se réclamant de la philosophie commencent à concevoir que la notion puisse être placée au fondement d'une doctrine de la connaissance.

Edouard Le Roy par exemple l'avait mise au premier plan, en 1899, de ses trois études, intitulées *Science et Philosophie*, de la Revue de Métaphysique et de morale. Mais on trouve déjà la référence au caractère conventionnel du choix des principes chez les auteurs, assez nombreux, qui réfléchissent, avant ou en même temps que Poincaré, aux principes de la géométrie et de la mécanique. Pour en rester à la mécanique, c'est notamment le cas des auteurs cités par Poincaré dans le chapitre IV de *La Science et l'hypothèse*, tels Mach, Kirchhoff ou les « mécaniciens du fil » comme Reech et Andrade. Evoquant le choix de certains coefficients dans les équations du mouvement, Kirchhoff (*Mechanik* (1ère éd. Leipzig, 1876 ; cité par Jouguet, *Lectures de mécanique*, tome II, p. 96) déclare : « La commodité (Zweckmässigkeit) de ce choix repose essentiellement sur une propriété des équations ci-dessus, qui remarque en note que l'usage de l'expression "Zweckmässigkeit" est caractéristique de la méthode de Kirchhoff »). De même, à propos d'un principe que nous appellerions de relativité de l'espace, Reech explique : « Nous serons naturellement conduits à faire servir à un tel usage l'état de mouvement rectiligne uniforme, et à rencontrer cette fameuse loi d'inertie de la matière, qui ne sera plus un principe ni un fait d'expérience, mais une pure convention, la plus simple de toutes celles parmi lesquelles nous nous trouverons obligés de la choisir. » (*Cours de mécanique d'après la nature généralement flexible et élastique des corps*, Paris, 1852, §41 ; voir encore : *Leçons de mécanique physique*, Paris, 1898, §54 ; cité par Jouguet, tome II, p. 150). On pourrait multiplier les exemples.

En fait, on a moins retenu de ces travaux de philosophie des sciences une véritable philosophie de la convention, ou même une analyse du concept, notablement absentes chez notre auteur (et qu'on trouverait plutôt chez les penseurs moraux et politiques, ou d'inspiration juridique et sociologique), que la promotion au rang de doctrine épistémologique de ce que l'on a pris l'habitude d'appeler « conventionnalisme ». Celle-ci relève presqu'entièrement du mouvement de critique des sciences qu'on vient d'évoquer. A la suite des événements théoriques intervenus dans la seconde moitié du XIX^{e} siècle – découverte des géométries non-euclidiennes, entreprise de réduction à l'arithmétique et même à la logique des branches les plus classiques des mathématiques, interrogation sur le fondement de la théorie physique –, cette critique visait d'abord les principes, réduits à de « simples conventions », dont le choix est dû à des considérations de simplicité et de commodité. Du point de vue d'un conventionnalisme authentique et complet, ces derniers critères se limitent à donner une explication de la cause des conventions. Or, une fois passé de la considération de la convention à celle de sa cause, il est de fait qu'on se trouve ramené à une doctrine proche de celles, bien identifiées, de l'utilitarisme et du pragmatisme – sujette aux mêmes équivoques et offerte aux mêmes critiques. C'est donc assez naturellement sur ce plan de l'explication donnée par Poincaré du choix des principes, plutôt que sur celui d'un examen des principes qui mettrait au jour leur aspect conventionnel, que s'est développée la

critique de ses positions. D'une part, les critères évoqués de commodité, de simplicité, etc., n'ont pas paru fournir une explication satisfaisante, au sens où elle serait dépourvue de toute équivoque. D'autre part, à partir du moment où la convention est évaluée par sa raison d'être, liberté se trouve donnée d'opposer à la connaissance par convention une connaissance d'un autre type, affectée d'une valeur plus haute en ce qu'elle nous mettrait en communication directe avec le « réel en soi ». Mais on s'éloigne alors d'un rationalisme. D'où la nécessité devant laquelle se trouvera Poincaré de se démarquer de certaines positions comme celles d'E. Le Roy, qui pouvaient passer pour des interprétations de son propre point de vue tout en montrant les signes d'une dérive antirationaliste de la doctrine de la convention. Les auteurs de l'époque qui se montrent alors critiques, ou simplement réticents, vis à vis de ce qui apparaît alors comme une variante de scepticisme, sont assez nombreux. Citons, entre autres exemples, pour leur modération et leur pondération, les réflexions d'un auteur par ailleurs aussi attentif à Poincaré que l'a été Léon Brunschvicg, *L'expérience humaine et la causalité physique*, Paris, 1ère éd. 1922, pp. 534-535.

On distingue aujourd'hui communément deux acceptions du mot convention.

Un premier sens, issu d'une longue tradition, renouvelée par les progrès de la logique formelle, de réflexion sur la définition nominale opposée à la définition réelle, est entièrement relatif à une théorie ou un système de connaissances donné. Un énoncé, voire un ensemble d'énoncés théoriques, sera dit « conventionnel » s'il est privé de contenu, au sens où il n'ajoute rien à la théorie, bien qu'il puisse par lui-même impliquer certains de ses énoncés. Quand nous introduisons par exemple dans le calcul propositionnel la définition de la disjonction en énonçant que la disjonction de deux énoncés est équivalente à la négation de la conjonction de leur négations : $(p \vee q) = \neg(\neg p \& \neg q)$, cette introduction n'ajoute rien au calcul, au sens où elle ne permet de dériver aucun théorème qui ne soit pas équivalent, moyennant la convention, à un théorème déjà dérivable. En ce sens, la définition n'ajoute rien à ce qu'est la condition même de tout convention : le langage, et on peut dire qu'elle est de nature purement linguistique.

Selon une seconde acception, plus générale, un énoncé, une règle, une théorie sont dits « conventionnels » quand ils ont fait l'objet d'une *décision*, sans que cette décision puisse être fondée par des arguments de nature théorique. Ainsi les unités de mesure sont conventionnelles en ce sens qu'elles sont les purs produits d'un choix : rien dans la structure de l'expérience ne fonde ce choix, bien que des raisons d'ordre pratique ou historique puissent l'expliquer. Une convention entendue ainsi, comme produit d'un libre choix, n'est pas nécessairement arbitraire. Elle est simplement sous-déterminée par rapport aux données de l'expérience. Une science peut en ce sens être dite « conventionnelle ». Poincaré considérait par exemple que la géométrie, contrairement au reste des mathématiques, et la mécanique étaient des sciences conventionnelles car rien dans l'expérience ne nous permet de fixer de manière univoque les notions de distance et de dimension (pour la géométrie), ou celles de masse et de force (pour la mécanique). Les axiomes de la géométrie ne décrivent pas pour Poincaré des caractéristiques de l'espace réel ou d'une forme de l'intuition. Ils peuvent être dits « conventions » en ce qu'ils sont choisis par commodité pour la description efficace, tantôt de nos perceptions sensorielles (cas de la géométrie euclidienne), tantôt de l'espace nécessaire à la physique (cas de la Relativité). Une convention entendue en ce sens de délibération rationnelle commode et justifiée ne peut pas prétendre à l'unicité. L'axiome des parallèles de la géométrie euclidienne est une « définition déguisée » de la notion de distance dans l'espace euclidien. La négation de cet axiome dans la géométrie de Riemann est une définition implicite de la notion de distance dans le cadre d'une des géométries non euclidiennes. Aucun des deux axiomes n'est vrai ou faux sans qu'aucun des deux ne soit cependant sans contenu. Leur contenu consiste précisément dans le fait de proposer un système de mesure pratique auquel l'observation peut se conformer, mais qu'elle ne peut d'aucune manière infirmer.

PRESENTATION DE LA PREMIERE PARTIE

Le titre de cette première partie introduit les deux notions mathématiques fondamentales sans lesquelles aucune connaissance de la nature ne serait possible et préfigure l'analyse de leurs relations telle qu'elle sera conduite plutôt dans le chapitre 2. Si en effet la question de la définition et de l'origine des nombres réels occupe une large partie de *La grandeur mathématique et l'expérience*, ce n'est pas du tout dans cette perspective que les nombres entiers de la série des naturels sont évoqués au chapitre *Sur la nature du raisonnement mathématique*. Les définitions et les lois de l'arithmétique élémentaire, considérées au chapitre 1, n'y sont traitées que de manière accessoire afin de mettre en relief, dans le domaine le plus pur des mathématiques, la nature du raisonnement mathématique en général. L'unité de cette première partie doit donc plutôt être recherchée, d'une part, dans l'analogie entre les opérations de répétition et d'intercalation discutée dans le cadre respectivement du raisonnement inductif et de la constitution des nombres réels, d'autre part dans une indication méthodologique qui vaudra pour l'ensemble de l'œuvre. Lorsqu'on se pose des questions épistémologiques sur la nature ou l'essence d'une certaine notion (le raisonnement mathématique ou le continu) c'est toujours vers l'origine et l'usage de ces notions dans le domaine le plus simple et plus pur où elles interviennent qu'il faut tourner l'analyse pour trouver une réponse satisfaisante.

INTRODUCTION AU CHAPITRE I

Ce chapitre établit la nature inductive du raisonnement mathématique. Par là se trouve justifiée sa fécondité, et affirmé son lien d'analogie avec la méthode expérimentale de la physique. Encore faut-il préciser les traits originaux de l'induction mathématique, qui rendent ces conclusions nécessaires.

Poincaré part d'un dilemme, traditionnel à son époque : une difficulté fondamentale de la science mathématique consiste dans le fait que la rigueur qu'on lui attribue en raison de son caractère déductif semble incompatible avec la fécondité qu'on en attend. Il constate d'emblée que la solution de type kantien qui consisterait à assigner le statut de jugements synthétiques *a priori* aux propositions liminaires (« axiomes »), est illusoire car elle ne ferait que méconnaître la nature réelle de la difficulté. En effet, la logique (la syllogistique) ne peut rien ajouter au raisonnement, donc on ne devrait retrouver dans tout jugement mathématique rien d'autre que le contenu des axiomes de départ.

La solution à ce dilemme, apparemment insoluble, ne pourra être trouvée que si on en change les termes. Ce ne sera pas par le biais de l'analyse des jugements mathématiques pris de manière isolée, ni par le biais de l'analyse des objets sur lesquels portent ces jugements, qu'on trouvera la clef du pouvoir créateur des mathématiques. Si l'on veut expliquer à la fois leur rigueur et leur fécondité, il faut s'interroger non pas sur la nature de ses axiomes ou de ses propositions primitives, mais sur la nature des raisonnements qui enchaînent ces propositions aux conclusions qu'on en tire.

Ayant ainsi déplacé la question, ce premier chapitre s'organise alors de façon naturelle autour de la comparaison de trois types de raisonnement mathématique, analysés dans le domaine où la pensée mathématique est demeurée à l'état le plus pur, celui de l'arithmétique : la vérification (section II), analytique et stérile ; la véritable démonstration, représentée ici par le principe de récurrence (sections III-VI), synthétique *a priori* et fécond ; enfin la construction (section VII), analytique mais non stérile.

Poincaré semble être guidé dans cette classification par une double couple d'opposés : le couple particulier/général et le couple simple/complexe. L'opposition traditionnelle, d'origine kantienne, entre jugements analytiques et jugements synthétiques *a priori*, explicitement évoquée par Poincaré tout le long du chapitre, recoupe chez lui ces oppositions plus fondamentales. Est synthétique *a priori* tout raisonnement qui va de manière

nécessaire du particulier au général sans rien postuler d'autre que les capacités de l'esprit. Est analytique tout raisonnement qui soit va du général au particulier par simple déduction syllogistique (la vérification), soit, sans nous faire changer de niveau de généralité, va du simple au complexe (la construction).

Le premier type de raisonnement, la **vérification**, illustré par la démonstration « leibnizienne » de la proposition que « 2 et 2 font 4 », est un procédé exclusivement analytique, allant du général au particulier. Une vérification n'a pour conclusion que des jugements singuliers, dans lesquels on a donné des valeurs spécifiques permettant de vérifier la vérité d'une proposition générale. D'où sa stérilité : dans une vérification, on se limite à appliquer des définitions, les lois logiques et les propriétés de l'identité. Rien de nouveau ne pourra jamais sortir de ce genre de raisonnements. Réduire les raisonnements mathématiques à des vérifications reviendrait à nier aux mathématiques le statut même de science.

La véritable **démonstration** mathématique est illustrée par le principe de récurrence. Poincaré donne comme exemple les démonstrations de l'associativité et de la commutativité de l'addition et de la multiplication sur les entiers positifs (section III). Toutefois, il précise (section IV) que ce même procédé est à l'œuvre en mathématique dans de nombreux autres principes présentant les mêmes caractères essentiels. Bien que le principe de récurrence soit le plus simple de cette catégorie de principes, on y voit déjà clairement apparaître toute sa puissance. Deux questions guident la suite de l'exposé.

D'abord la section V s'interroge sur le caractère essentiel du raisonnement par récurrence, caractère commun, d'ailleurs, aux autres formes de véritables démonstrations mathématiques fécondes. Tous ces raisonnements contiennent condensés, en une formule unique un nombre infini de pas élémentaires. C'est ce passage du fini à l'infini qui nous permet de « franchir d'un bond » autant d'étapes intermédiaires semblables. L'idée de l'infini mathématique (infini potentiel en l'occurrence) joue un rôle prépondérant dans la fécondité des démonstrations mathématiques et cela bien au-delà du domaine du calcul infinitésimal. Sans cette idée de l'infini, il n'y aurait pas de science mathématique du tout car celle-ci ne pourrait accéder à la généralité.

Ensuite la section VI s'interroge sur les conditions de possibilité d'un tel passage du fini à l'infini. La possibilité de tels procédés de démonstration est fondée sur l'intuition directe et évidente que l'esprit a de sa capacité de répéter un nombre indéfini de fois un même acte, une fois cet acte, librement choisi, conçu comme possible. Cette

caractéristique rend les véritables démonstrations mathématiques irréductibles au principe analytique de non-contradiction (qui échoue devant l'infini), irréductibles à l'expérience (elle aussi impuissante devant l'infini) et irréductibles à n'importe quelle forme de convention (car aucun choix ne nous est laissé dans la généralisation du fini à l'infini).

Ce passage du particulier au général, reposant sur l'intuition de la répétition, fonde les mathématiques dans le sujet, lui confère son caractère à la fois synthétique et apodictique, lui confère son pouvoir créateur tout en en dévoilant l'analogie frappante avec l'induction empirique. La structure des raisonnements inductifs en physique et en mathématique est la même, la différence étant qu'en physique, l'induction repose sur l'hypothèse d'un ordre général de l'univers, tandis qu'en mathématique ce même ordre ne dépend que de notre esprit.

Le rôle de l'intuition de la répétition indéfinie d'un acte sera à maintes reprises évoqué dans le reste du livre, avec un renvoi explicite aux thèses énoncées dans ce chapitre : au chapitre II, à propos de la construction des nombres rationnels et réels par le procédé d'intercalation (page 53) ; au chapitre IV, (donc dans la deuxième partie : l'Espace) à propos de l'axiome d'homogénéité des groupes, qui garantit l'applicabilité des géométries à l'expérience (page 88) ; au chapitre IX (dans la quatrième partie sur la Nature) à propos des processus d'intégration / dérivation et du processus de généralisation des hypothèses physiques par le biais des mathématiques (pages 171-172). Bien que l'intuition de la répétition indéfinie ne soit pas mentionnée de manière explicite dans la partie sur la Force, l'examen des principes de la mécanique se ramène toujours chez Poincaré à une discussion sur l'ordre des équations différentielles lesquelles sont également obtenues par la répétition indéfinie d'un acte. L'analyse du premier chapitre de *La Science et l'Hypothèse* rayonne donc sur l'ensemble du texte. Elle explique, pour le domaine le plus simple des mathématiques, en quel sens celles-ci elles sont fondées dans le sujet. Elle nous donne la clef de la possibilité de la connaissance.

Le troisième type de raisonnement est la **construction**. C'est également un procédé analytique, mais non stérile. Elle procède du simple au complexe sans pour autant nous permettre de passer du particulier au général, comme le fait la véritable démonstration. En effet, à la différence de la vérification, la construction nous permet de construire, sur des éléments simples, des structures de plus en plus complexes. Toutefois, comme la vérification, la construction ne procède pas non plus du général au particulier, mais nous laisse au même

niveau de généralité car une construction complexe n'est pas plus ou moins générale que ses éléments, elle est seulement différente.

Dans la construction, le pouvoir de l'esprit de créer des symboles s'exerce dans toute sa puissance ; néanmoins la construction n'est qu'une condition nécessaire et non suffisante du développement des mathématiques. L'utilité d'une construction réside dans la possibilité qu'elle offre de démontrer des propriétés générales, en comparant les relations entre les éléments et les relations entre les composés. Une telle possibilité n'est réalisable que grâce à la véritable démonstration, au raisonnement par récurrence et à ses analogues. Eux seuls nous permettent de voir l'unité des éléments dans la diversité. Eux seuls nous permettent de voir, au-delà des constructions d'objets de plus en plus complexes, leurs propriétés communes.

CHAPEAU MORPHOGENETIQUE DU CHAPITRE I

Ce chapitre reprend l'article « Sur la nature du raisonnement mathématique » publié en 1894. Les modifications apportées par Poincaré au texte d'origine sont diverses et vont de simples changements typographiques au retrait ou à l'ajout de paragraphes. En voici le détail, section par section.

À la fin de la section I, Poincaré supprime un paragraphe de l'article de la *Revue de Métaphysique et de Morale* qui faisait référence au syllogisme hypothétique, ainsi que la note explicative qui l'accompagnait.

La section II demeure inchangée à quelques variantes près. En particulier le mot « vérification » est écrit en italique dans le texte de 1902.

La section III est, quant à elle considérablement modifiée : Poincaré supprime ainsi un paragraphe faisant référence à l'article de E. Ballue « Le nombre entier considéré comme fondement de l'analyse mathématique » (juste avant la sous-section consacrée à la définition de l'addition. « Qu'on me permette, pour mieux faire comprendre cette nécessité de rappeler une phrase d'un article de M. Ballue dans le dernier numéro de la revue (p. 321) : "Cette propriété que $4 \times 6 = 6 \times 4$ ne peut se démontrer à notre connaissance que par l'intervention des pluralités (c'est-à-dire d'après M. Ballue, par un appel à l'expérience). Qu'on se rappelle la figure ci-jointe (formée de 6 lignes de 4 points chacune) qui se trouve dans tous les traités d'arithmétique". Il y a une démonstration plus satisfaisante mais peu connue et c'est pourquoi je crois devoir reproduire ici, au risque d'être fastidieux, les démonstrations rigoureuses des propriétés fondamentales de l'addition et de la multiplication. » (RMM 1893, pp.374-5).

Les paragraphes du chapitre qui traitent de la commutativité de l'addition et de la définition de la multiplication (jusqu'à la fin de la section) font l'objet d'une simplification importante par rapport à l'article de 1894. Dans *La Science et l'Hypothèse*, Poincaré dispense le lecteur du détail des démonstrations et insiste tout particulièrement sur la notion de vérification analytique.

La section IV est identique à celle de l'article, à une variante typographique près. Les quelques modifications au sein des sections V et VI sont également d'ordre typographique.

La section VII présente également ces caractères, auxquelles s'ajoutent l'interversion de deux paragraphes et l'ajout d'une phrase (p. 44) par rapport à l'article d'origine (« La connaissance du théorème générale nous épargne ces efforts »). On notera par ailleurs que la présentation erronée d'une des formules de la fin du chapitre est probablement due à une erreur de composition.

[31]

CHAPITRE PREMIER

SUR LA NATURE DU RAISONNEMENT MATHÉMATIQUE

I

La possibilité même de la science mathématique semble une contradiction insoluble. Si cette science n'est déductive qu'en apparence, d'où lui vient cette parfaite rigueur que personne ne songe à mettre en doute ? Si, au contraire, toutes les propositions qu'elle énonce peuvent se tirer les unes des autres par les règles de la logique formelle, comment la mathématique ne se réduit-elle pas à une immense **tautologie**[26] ? Le syllogisme ne peut rien nous apprendre d'essentiellement nouveau et, si tout devait sortir du principe d'identité, tout devrait aussi pouvoir **s'y ramener**[27]. Admettra-t-on donc que les énoncés de tous ces théorèmes qui remplissent tant de volumes ne soient que des manières détournées de dire que A est A ?

Sans doute, on peut remonter aux axiomes[28] qui sont à la source de tous les raisonnements. Si on juge qu'on ne peut les réduire au principe de contradiction, si on ne veut pas non plus y voir des faits expérimentaux qui ne pourraient

---

[26] Tels étaient les termes du débat de l'époque : la fécondité des mathématiques, opposée à leur rigueur. Il est difficile d'indiquer avec précision qui est visé par Poincaré dans une telle reconstruction. Il est certain que Charles Renouvier avait défendu une conception finitiste, mécaniste et analytique (au sens kantien) des mathématiques, là où Jules Lachelier, par exemple, avait souligné l'impossibilité de réduire les mathématiques à la logique. Pour plus de détails, voir postface.

L'usage du terme "tautologie" renvoie évidemment à un contexte antérieur à la proposition de Wittgenstein (dans le *Tractatus logico-philosophicus*, en 1922) d'appeler "tautologie" toute proposition complexe dont la vérité est due à sa forme seule, abstraction faite de la valeur de vérité de ses propositions constituantes.

Pour saisir le sens que Poincaré donne à l'expression, le mieux est sans doute de se référer au *Vocabulaire technique et critique de la philosophie* d'André Lalande, dont l'édition, d'abord sous forme de fascicules dans le Bulletin de la Société française de philosophie, commence en 1902. Il y est indiqué qu'une tautologie désigne une "proposition identique, dont le sujet et le prédicat sont un seul et même concept" (sens A), avec une éventuelle nuance péjorative (sens C), qui la rapproche alors du simple "truisme", proposition dans laquelle le prédicat ne dit rien de plus que le sujet.

Il ne faudrait pas cependant sans doute aller jusqu'à penser qu'à l'époque toute référence au jugement d'identité soit affectée de cette nuance péjorative. Certes la tradition kantienne tend à cantonner la logique dite "formelle" dans le domaine des jugements analytiques, qui ne peuvent prétendre à la fécondité des jugements synthétiques de la science. Mais cette même tradition n'empêche pas un épistémologue comme Meyerson de concevoir la science comme le résultat d'un mouvement de réduction du réel à l'identique, et la tendance qu'exprime cette réduction comme un trait d'essence de la rationalité.

[27] Pour Poincaré à cette époque la logique est une discipline qui ne s'occupe que des formes, incapable d'ajouter quoi que ce soit au contenu sur lequel elle opère. Elle ne contient que la syllogistique, les axiomes de l'identité et de la substitution. Ce n'est qu'à partir de 1905 que Poincaré examinera les résultats et les méthodes des "logiques nouvelles" de Russell, Couturat, Peano (et son école), et Hilbert. Il admettra alors que les logiques nouvelles sont bien plus riches que la syllogistique, tout en doutant que l'on puisse donner le nom de Logiques à de telles extensions de nature, selon lui, mathématique. Il ajoutera d'autre part que de telles extensions introduisent subrepticement dans le raisonnement mathématique des cercles vicieux et donc des antinomies, par le biais des définitions non prédicatives (voir postface)

[28] Ici commence l'analyse d'une solution illusoire au problème évoqué au début. Cette analyse s'étend jusqu'au cinquième alinéa de cette section. Bien qu'elle admette une composante de nature synthétique dans les mathématiques, cette solution illusoire la confinerait dans les axiomes, sans mettre en cause la nature exclusivement déductive des raisonnements mathématiques. Les conséquences paradoxales de cette solution illusoire sont énumérées dans les trois alinéas suivants : a) aucun théorème ne pourrait être nouveau si dans sa démonstration n'intervenait un nouvel axiome ; b) le raisonnement mathématique, comme le syllogisme, ne

participer à la nécessité mathématique, on a encore la ressource de les classer parmi les jugements **synthétiques *a priori***[29]. Ce n'est pas résoudre la difficulté, c'est seulement la baptiser ; et lors même que la nature des jugements synthétiques n'aurait plus pour nous de mystère, la contradiction ne se serait pas évanouie, elle n'aurait fait que reculer ; le raisonnement syllogistique reste [32] incapable de rien ajouter aux données qu'on lui fournit ; ces données se réduisent à quelques axiomes et on ne devrait pas retrouver autre chose dans les conclusions.

Aucun théorème ne devrait être nouveau si dans sa démonstration n'intervenait un axiome nouveau ; le raisonnement ne pourrait nous rendre que les vérités immédiatement évidentes empruntées à l'intuition directe ; il ne serait plus qu'un intermédiaire parasite et dès lors n'aurait-on pas lieu de se demander si tout l'appareil syllogistique ne sert pas uniquement à dissimuler notre emprunt ?

La contradiction nous frappera davantage si nous ouvrons un livre quelconque de mathématiques ; à chaque page l'auteur annoncera l'intention de généraliser une proposition déjà connue. Est-ce donc que la méthode mathématique procède du particulier au général et comment alors peut-on l'appeler déductive ?

Si enfin la science du nombre était purement analytique ou pouvait sortir analytiquement d'un petit nombre de jugements synthétiques, il semble qu'un esprit assez puissant pourrait d'un seul coup d'œil en apercevoir toutes les vérités ; que dis-je ! on pourrait même espérer qu'un jour on inventera pour les exprimer un langage assez simple pour qu'elles apparaissent ainsi immédiatement à une intelligence ordinaire.

Si l'on se refuse à admettre ces conséquences[30], il faut bien concéder que le raisonnement mathématique a par lui-même une sorte de vertu créatrice et par conséquent qu'il se distingue du syllogisme.

La différence doit même être profonde. Nous ne trouverons pas par exemple la clef du mystère dans l'usage fréquent de cette règle d'après laquelle une même opération uniforme appliquée à deux nombres égaux donnera **des résultats identiques**[31].

---

procéderait que du général au particulier, tandis qu'on voit clairement que les mathématiques ne cessent de généraliser leurs résultats (cette question de la généralisation est examinée à la section VII plus bas) ; c) on devrait pouvoir apercevoir toutes les vérités mathématiques d'un seul coup d'œil.

[29] À supposer même que la notion de synthétique a priori (de nature apparemment problématique selon Poincaré chez Kant et ses épigones) soit éclaircie, la question de l'explication de la capacité créatrice des mathématiques ne serait pas résolue pour autant.

Cela dit, il faut se garder de voir là une référence directe à la doctrine kantienne de l'arithmétique. Premièrement rien ne laisse penser que Poincaré se réfère à Kant. Il est plus vraisemblable qu'il songe à des doctrines contemporaines inspirées du kantisme qui suivraient des lignes classiques, reçues en France à cette époque : l'acquisition d'information nouvelle ne peut avoir lieu que par synthèse dans l'intuition ; cette synthèse ne concerne que les jugements, donc les points de départ de la déduction, axiomes ou postulats. Les raisonnements mathématiques, eux, demeurent conçus sur le modèle exclusif de la syllogistique formelle. Deuxièmement Kant rejette la possibilité d'axiomes généraux pour l'arithmétique, puisqu'il identifie ses propositions primitives à l'ensemble infini des formules numériques singulières du genre 7+5=12. On pourrait remarquer de plus que l'intuition pure, telle qu'on la trouve introduite dans l'Esthétique transcendantale, présente une caractéristique originale, qui aurait pu recevoir l'approbation de Poincaré. À la différence du concept, auquel Kant l'oppose, c'est une représentation infinie. En ce qui concerne le nombre, cet infini est celui du temps, dans lequel a lieu l'acte de compter, qui est à l'origine de la suite des entiers. On notera enfin que ce n'est pas l'idée que la connaissance mathématique puisse reposer sur des jugements synthétiques a priori qui repousse Poincaré, mais le fait que de tels jugements puissent être identifiés à des axiomes. De fait, comme on le verra, il invoque dans la section VI le recours aux jugements synthétiques a priori pour justifier la créativité des mathématiques. Voir p. 39 du texte et les notes relatives.

[30] Il s'agit des trois conséquences de la pseudo solution « idéaliste » énumérées à la note 3 et évoquées dans les trois paragraphes précédents. D'où la conclusion : de la question de la nature des axiomes mathématiques, il faut passer à la question de la nature du raisonnement mathématique, et abandonner l'idée traditionnelle selon laquelle ce raisonnement n'est que syllogistique et déductif. Les sections III - V se chargeront de montrer que ce raisonnement, lorsqu'il est réellement fécond, est en réalité de nature inductive.

[31] Il s'agit ici d'un des axiomes concernant l'identité. Bien que ces axiomes n'appartiennent pas à la syllogistique, ils sont cependant analytiques et, pour cette raison, ne peuvent rendre compte de la fécondité du raisonnement mathématique. Dans le premier chapitre de *La valeur de la science*, Poincaré évoque un autre des axiomes définissant l'identité, celui exprimant la transitivité. Il le qualifiera de règle de la logique formelle tout en le disant dépendant d'une forme d'intuition. Vraisemblablement l'intuition en jeu dans les axiomes de l'identité, intuition qui en garantit l'évidence, c'est l'intuition en jeu dans toute manipulation symbolique concrète et finie. Nous voyons des signes et si nous les considérons comme se référant à des objets identiques, nous pouvons les substituer les uns aux autres de manière répétée. Nous appliquons des opérations (donc des manipulations finies sur des objets), de manière uniforme et nous considérons que les objets qui en résultent sont identiques. Ce sont là les intuitions nécessaires à l'usage de tout langage. C'est probablement pour cette raison que Poincaré les range sous le nom de règles de la logique formelle.

Tous ces modes de raisonnement, qu'ils soient ou non réductibles au syllogisme proprement dit, conservent le caractère analytique et sont par cela même impuissants.

[33]
II

Le débat est ancien ; déjà Leibnitz cherchait à démontrer que 2 et 2 font 4 ; examinons un peu **sa démonstration**[32].
Je suppose que l'on ait défini le nombre 1 et l'opération $x + 1$ qui consiste à ajouter l'unité à un nombre donné x.
Ces définitions, quelles qu'elles soient, n'interviendront pas dans la suite du raisonnement.
Je définis ensuite les nombres 2, 3 et 4 par les égalités :

$$(1)\ 1 + 1 = 2 ; \qquad (2)\ 2 + 1 = 3 ; \qquad (3)\ 3 + 1 = 4.$$

Je définis de même l'opération $x + 2$ par la relation :

$$(4) \qquad \boldsymbol{x + 2 = (x + 1) + 1}$$[33].

Cela posé nous avons :

$$2 + 2 = (2 + 1) + 1 \quad \text{(Définition 4)}$$
$$(2 + 1) + 1 = 3 + 1 \quad \text{(Définition 2)}$$
$$3 + 1 = 4 \quad \text{(Définition 3)}$$

d'où

$$2 + 2 = 4 \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

On ne saurait nier que ce raisonnement ne soit purement analytique. Mais interrogez un mathématicien quelconque : « Ce n'est pas une démonstration proprement dite, vous répondra-t-il, c'est une vérification ». On s'est borné à rapprocher l'une de l'autre deux définitions **purement conventionnelles**[34] et on a constaté leur identité, on n'a rien appris de nouveau. La *vérification* diffère précisément de la véritable démonstration, parce qu'elle est **purement analytique**[35] et parce qu'elle est stérile. Elle est stérile parce que la conclusion n'est que la **traduction des prémisses dans un autre langage**[36]. La démonstration [34] véritable est féconde au contraire parce que la conclusion y est en un sens plus générale que les prémisses.

---

[32] La démonstration qui suit n'est pas tout à fait identique à celle de Leibniz, (*Nouveau Essais*…, livre IV, vii, §10). En particulier la supposition du paragraphe suivant n'est pas explicite dans le texte de Leibniz.

[33] La définition de l'opération x+2 n'est qu'un cas particulier de la définition de l'addition donnée à la section III, plus bas : x+a=[x+(a-1)]+1. En donnant explicitement la règle pour a=2, Poincaré peut faire l'économie de la propriété de l'associativité de l'addition qui serait autrement nécessaire pour obtenir le résultat final. En effet à partir des seules définitions (1), (2) et (3) pour obtenir (2+2=4), sans l'axiome (4), on aurait besoin d'établir (x+1)+1=x+(1+1), qui est à son tour une instance de l'associativité de l'addition. Puisque par la suite Poincaré démontrera l'associativité à partir de la définition de l'addition et du principe d'induction son usage ici serait pédagogiquement malvenu.

[34] On peut penser qu'ici ce terme de *conventionnel* est un synonyme de *purement linguistique* au sens de privé de contenu. Cet usage renverrait ainsi à la première des acceptions logiques du terme convention présentées dans l'encadré de l'*Introduction*. Rien ne nous empêche d'échanger la définition de 2 avec celle de 3 à condition de renverser l'ordre de ces symboles dans la suite des nombres. Donc ces définitions n'ont pas réellement de contenu.

[35] Voir l'encadré *Analytique synthétique*. Les définitions (4) et (2) ont été rapprochées entre elles. On a donc utilisé les seules définitions et les lois de l'identité pour obtenir le résultat final. Par "vérification" Poincaré entend donc un raisonnement justificatif analytique, basé sur le syllogisme, la substitution, la définition nominale et allant du général au particulier. Toute conséquence particulière d'un théorème peut être *vérifiée* par des procédées analytiques. Il est intéressant de remarquer que Poincaré rejoint ici Frege, qui, en 1884, introduit le premier la définition "moderne" de la notion d'analytique, ne visant pas le contenu du jugement (Kant), mais « la légitimité de l'acte de juger » (*Fondements de l'arithmétique*,1884, §3). Toutefois la notion de vérification propre à Poincaré, ancrée exclusivement sur les règles du syllogisme, réduit le raisonnement purement analytique à un raisonnement stérile.

[36] On notera le recours aux notions de langage et de traduction pour expliquer la stérilité du processus appelé "vérification". Ce recours est significatif. Le langage est une pièce essentielle de son interprétation de la théorisation scientifique en général, mathématique en particulier. Poincaré expliquera un peu plus loin (p. 39)

L'égalité 2 + 2 = 4 n'a été ainsi susceptible d'une vérification que parce qu'elle est particulière. Tout énoncé particulier en mathématique pourra toujours être vérifié de la sorte. Mais si la mathématique devait se réduire à une suite de pareilles vérifications, elle ne serait pas une science. Ainsi **un joueur d'échecs**[37], par exemple, ne crée pas une science en gagnant une partie. Il n'y a de science que du général.

On peut même dire que les sciences exactes ont précisément pour objet de nous dispenser de ces vérifications directes.

III

Voyons donc le géomètre[38] à l'œuvre et cherchons à surprendre ses procédés.

La tâche n'est pas sans difficulté ; il ne suffit pas d'ouvrir un ouvrage au hasard et d'y analyser une démonstration quelconque.

Nous devons exclure d'abord la géométrie où la question se complique des problèmes ardus relatifs au rôle des postulats, à la nature et à l'origine de la notion d'espace. Pour des raisons analogues nous ne pouvons nous adresser à l'analyse infinitésimale. Il nous faut chercher la pensée mathématique là où elle est restée pure, c'est-à-dire en arithmétique.

Encore faut-il choisir ; dans les parties les plus élevées de la théorie des nombres, les notions mathématiques primitives ont déjà subi une élaboration si profonde, qu'il devient **difficile de les analyser**[39].

C'est donc au début de l'arithmétique que nous devons nous attendre à trouver l'explication que nous cherchons, mais il arrive justement que c'est dans la démonstration des théorèmes les plus élémentaires que les auteurs des traités classiques ont déployé le moins de précision et de rigueur. Il ne faut pas leur [35] en faire un crime ; ils ont obéi à une nécessité ; les débutants ne sont pas préparés à la véritable rigueur mathématique ; ils n'y verraient que de vaines et fastidieuses subtilités ; on perdrait son temps à vouloir trop tôt les rendre plus exigeants ; il faut qu'ils refassent rapidement, mais sans brûler d'étapes, le chemin qu'ont parcouru lentement les fondateurs de la science.

Pourquoi une si longue préparation est-elle nécessaire pour s'habituer à cette rigueur parfaite, qui, semble-t-il, devrait s'imposer naturellement à tous les bons esprits ? C'est là un problème logique et psychologique bien digne d'être médité.

Mais nous ne nous y arrêterons pas ; il est étranger à notre objet ; tout ce que je veux retenir, c'est que, sous peine de manquer notre but, il nous faut refaire les démonstrations des théorèmes les plus élémentaires et leur donner non la forme grossière qu'on leur laisse pour ne pas lasser les débutants, mais celle qui peut satisfaire un géomètre exercé.

DÉFINITION DE L'ADDITION. – **Je suppose**[40] qu'on ait défini préalablement l'opération $x + 1$, qui consiste à ajouter le nombre 1 à un nombre donné x.

---

que la puissance du raisonnement inductif peut se déployer du fait qu'on peut y énoncer une "formule générale". Il lui arrivera ensuite d'expliquer que la créativité mathématique est liée à cette capacité à énoncer des faits dans un langage bien choisi (*Science et Méthode*, ch. II). Enfin, on sait que sa conception du fait scientifique comporte à titre essentiel l'ingrédient linguistique : un fait scientifique n'est rien d'autre qu'un fait brut, traduit dans un certain langage (*La Valeur de la Science*, ch. X). La nécessité de l'intervention du langage fait sans doute partie des thèses unificatrices de sa "méthodologie scientifique". Pourtant cette intervention doit être limitée au cas où elle peut être conforme aux capacités de l'esprit. En effet, lorsque le langage, par le biais des définitions non prédicatives, dépasse les capacités du sujet, il en résulte des antinomies (voir postface).

[37] Le rapprochement des mathématiques avec le jeu en général, le jeu d'échecs en particulier, est souvent invoqué par les auteurs qui s'interrogent sur la signification et la portée de l'activité mathématique. Poincaré lui accorde assez de signification pour y revenir dans la section V et dans la conclusion du chapitre et pour lui consacrer des développements dans d'autres ouvrages (voir *La Valeur de la Science*, ch. I, p. 37, *Science et Méthode*, livre I, ch. III, p. 46-sq, livre II, ch. III, p. 158-sq). Voir aussi note 25.

[38] On utilise encore à l'époque de Poincaré ce terme pour désigner le mathématicien en général.

[39] C'est le thème de la pureté des disciplines mathématiques (voir Gauss **cit**, mais aussi C. Riquier *RMM* n.1 p. 347, 1893). Pour comprendre la nature du raisonnement mathématique, il faut examiner les parties les plus pures des mathématiques. La théorie des nombres est plus pure que la géométrie car elle ne repose pas sur des postulats conventionnels et, de plus, elle contient moins de définitions conventionnelles que la géométrie . Noter que le terme conventionnel est pris ici au deuxième sens logique décrit dans l'encadré, de l'Introduction . Elle est aussi plus pure que l'analyse car le rôle de l'expérience y est moindre. (Voir la *Présentation* et les notes du chap. II). Pour Poincaré, *pureté* signifie indépendance par rapport aux conventions et à l'expérience.

[40] G. Léchalas, critique dans un article de 1894, paru dans la *RMM*, la nonchalance avec laquelle procède Poincaré dans ces définitions. Pourquoi ne pas définir l'opération x+1 ? Pourquoi, plus loin, se donner sans explication l'opération a-1 ? Pourquoi ne pas définir le nombre 1 ? Poincaré répond dans la *RMM* en 1897 à ces objections : « Je n'ai pas défini le nombre 0, ni le nombre 1, ni l'opération +1 ; c'est avec intention ; ces définitions ne jouent aucun rôle dans mes recherches, et je pouvais, sans m'en occuper étudier le mécanisme du raisonnement mathématique, comme on pourrait étudier le mécanisme d'un moulin sans donner l'analyse

Cette définition, quelle qu'elle soit d'ailleurs, ne jouera plus aucun rôle dans la suite des raisonnements.

Il s'agit maintenant de définir l'opération $x + a$, qui consiste à ajouter le nombre a à un nombre donné x.

Supposons que l'on ait défini l'opération

$$x + (a - 1),$$

l'opération $x + a$ sera définie par l'égalité :

$$(1) \qquad x + a = [x + (a - 1)] + 1.$$

Nous saurons donc ce que c'est que $x + a$ quand nous saurons ce que c'est que $x + (a - 1)$, et comme j'ai supposé au début que l'on savait ce que c'est que $x + 1$, on pourra définir successivement et « par récurrence » les opérations $x + 2$, $x + 3$, etc.

[36] **Cette définition mérite un moment d'attention**[41], elle est d'une nature particulière qui la distingue déjà de la définition purement logique ; l'égalité (1) contient en effet une infinité de définitions distinctes, chacune d'elles n'ayant un sens que quand on connaît celle qui la précède.

PROPRIÉTÉS DE L'ADDITION. – *Associativité*. – Je dis que

$$a + (b + c) = (a + b) + c.$$

En effet le théorème est vrai pour $c = 1$; il s'écrit alors

$$a + (b + 1) = (a + b) + 1,$$

ce qui n'est autre chose, à la différence des notations près, que l'égalité (1) par laquelle je viens de définir l'addition.

Supposons que le théorème soit vrai pour $c = \gamma$, je dis qu'il sera vrai pour $c = \gamma + 1$, soit en effet

$$(a + b) + \gamma = a + (b + \gamma),$$

on en déduira successivement :

$$[(a + b) + \gamma] + 1 = [a + (b + \gamma)] + 1,$$

ou en vertu de la définition (1)

$$(a + b) + (\gamma + 1) = a + (b + \gamma + 1) = \boldsymbol{a + [b + (\gamma + 1)]}^{42},$$

---

chimique du blé qu'il a à moudre ». p. 60. Ce n'est donc pas le problème des axiomes de l'arithmétique qui est ici en jeu, mais seulement la donnée d'un exemple d'application du principe d'induction.

[41] Des définitions explicites, qu'il appelle « purement logiques » (du type "A= B et C et…," où une notion A est remplacée explicitement par d'autres la définissant), Poincaré distingue les définitions « par récurrence », qui, selon lui, enferment un nombre infini de définitions. C'est en effet grâce au pouvoir du langage que la forme générale de la définition de l'addition peut être écrite de manière correcte pour chacune des instances possibles de a.

[42] Les parenthèses du deuxième membre de l'identité, a+(b+ γ +1), sont mal placées. Il faut lire (a+(b+γ))+1.

Si on appelle: a+(b+1)=(a+b)+1 le cas 1, démontré immédiatement à partir de la définition de l'addition, et si l'on pose

(a+b)+γ=a+(b+ γ) (hypothèse d'induction) la démonstration est la suivante:

(a+b)+(γ +1)=((a+b)+ γ)+1	par le cas 1
((a+b)+ γ)+1=(a+(b+ γ))+1	par l'hypothèse d'induction
(a+(b+ γ))+1=a+((b+ γ)+1)	par le cas 1, avec l'identité utilisée de droite à gauche
a+((b+ γ)+1)=a+(b+(γ +1))	par le cas 1, avec l'identité utilisée de droite à gauche

La preuve est analytique, n'ayant utilisé que des identités appliquées à des hypothèses et à des résultats obtenus analytiquement à partir d'autres définitions. En supprimant l'hypothèse d'induction et en choisissant des valeurs pour c=2, c=3, etc., nous obtenons des vérifications successives du principe de l'associativité de l'addition. Le résultat général, pour tout c, n'est toutefois pas analytique, ce n'est pas le résultat d'une vérification, c'est le produit de l'induction mathématique.

ce qui montre, par une série de déductions purement analytiques, que le théorème est vrai pour $\gamma + 1$.

Étant vrai pour $c = 1$, on verrait ainsi successivement qu'il l'est pour $c = 2$, pour $c = 3$, etc.

Commutativité. – 1° Je dis que

$$a + 1 = 1 + a.$$

Le théorème est évidemment vrai pour $a = 1$, on pourrait ***vérifier*** **par des raisonnements purement** [37] **analytiques**[43] que s'il est vrai pour $a = \gamma$, il le sera pour $a = \gamma + 1$; or il l'est pour $a = 1$, il le sera donc pour $a = 2$, pour $a = 3$, etc. ; c'est ce qu'on exprime en disant que la proposition énoncée est démontrée par récurrence.

2° Je dis que

$$a + b = b + a.$$

Le théorème vient d'être démontré pour $b = 1$, on peut ***vérifier*** **analytiquement que s'il est vrai pour $b = \beta$**[44], il le sera pour $b = \beta + 1$.

La proposition est donc établie par récurrence.

DÉFINITION DE LA MULTIPLICATION. – **Nous définirons la multiplication**[45] par les égalités.

$$\begin{aligned} &a \times 1 = a \\ (2) \qquad &a \times b = [a \times (b - 1)] + a. \end{aligned}$$

L'égalité (2) renferme comme l'égalité (1) une infinité de définitions ; ayant défini $a \times 1$ elle permet de définir successivement : $a \times 2$, $a \times 3$, etc.

PROPRIÉTÉS DE LA MULTIPLICATION. – *Distributivité*. – Je dis que

$$(a + b) \times c = (a \times c) + (b \times c).$$

On vérifie analytiquement que l'égalité est vraie pour $c = 1$; puis que si le théorème est vrai pour $c = \gamma$ il sera vrai pour $c = \gamma + 1$.

La proposition est encore démontrée par récurrence.

Commutativité. – 1° Je dis que

$$a \times 1 = 1 \times a$$

---

[43] Hypothèse d'induction $\gamma+1=1+\gamma$

Démontrons que $(\gamma+1)+1=1+(\gamma+1)$

$(\gamma+1)+1=(1+\gamma)+1$ par hypothèse d'induction

$(1+\gamma)+1=1+(\gamma+1)$ par associativité

La vérification analytique ne concerne que le passage de γ à $\gamma+1$; le cas général : pour tout a, $a+1=1+a$, requiert à nouveau le principe de récurrence.

[44] Le premier pas de la démonstration pour b=1 est établi dans la note précédente.

L'hypothèse d'induction est ici : $a+\beta=\beta+a$.

Il faut démontrer : $a+(\beta+1)=(\beta+1)+a$.

$a+(\beta+1)=(a+\beta)+1$ par associativité

$(a+\beta)+1=(\beta+a)+1$ par hypothèse d'induction

$(\beta+a)+1=\beta+(a+1)$ par associativité

$\beta+(a+1)=\beta+(1+a)$ par le cas 1

$\beta+(1+a)=(\beta+1)+a$ par associativité

[45] Voir plus haut les remarques à propos de l'addition.

Le théorème est évident pour $a = 1$.

On vérifie analytiquement que s'il est vrai pour $a = \alpha$ il sera vrai pour $a = \alpha + 1$.

2° Je dis que

$$a \times b = b \times a.$$

[38] Le théorème vient d'être démontré pour $b = 1$. On vérifierait analytiquement que s'il est vrai pour $b = \beta$ il le sera pour $b = \beta + 1$.

IV

J'arrête là cette série monotone de raisonnements. Mais cette monotonie même a mieux fait ressortir le procédé qui est uniforme et qu'on retrouve à chaque pas.

Ce procédé est la démonstration par récurrence. On établit d'abord un théorème pour $n = 1$; on montre ensuite que s'il est vrai de $n - 1$, il est vrai de n et on en conclut qu'il est vrai pour tous les nombres entiers.

On vient de voir comment on peut s'en servir pour démontrer les règles de l'addition et de la multiplication, c'est-à-dire les règles du calcul algébrique ; **ce calcul est un instrument de transformation**[46] qui se prête à beaucoup plus de combinaisons diverses que le simple syllogisme ; mais c'est encore un instrument purement analytique et incapable de rien nous apprendre de nouveau. Si les mathématiques n'en avaient pas d'autre elles seraient donc tout de suite arrêtées dans leur développement ; mais elles ont de nouveau recours au même procédé, c'est-à-dire au raisonnement par récurrence et elles peuvent continuer leur marche en avant.

À chaque pas, si on y regarde bien, on retrouve ce mode de raisonnement, soit sous la forme simple que nous venons de lui donner, soit **sous une forme plus ou moins modifiée**[47].

C'est donc bien là le raisonnement mathématique par excellence et il nous faut l'examiner de plus près.

V

Le caractère essentiel du raisonnement par récurrence c'est qu'il contient, condensés pour ainsi [39] dire **en une formule unique**[48], une infinité de syllogismes.

---

[46] Ce sont les propriétés générales de l'addition et de la multiplication (et non pas les règles mêmes de l'addition et de la multiplication comme il est dit un peu hâtivement dans le texte) qui ont été démontrées par récurrence. Poincaré souligne ici l'opposition entre le calcul algébrique dans son ensemble et la syllogistique. Addition et multiplication sont des lois de transformation algébrique, qui transforment des objets en nouveaux objets. Les lois syllogistiques sont des règles logiques qui transforment des énoncés (du général au particulier, du négatif à l'affirmatif, etc.). Les transformations algébriques sont, pour Poincaré, beaucoup plus riches que les transformations logiques, mais elles demeurent analytiques. L'explication de cette dernière affirmation est donnée plus loin section VII. Elle découle du fait que les transformations algébriques ne permettent pas d'élever le niveau de généralité des raisonnements. Voir l'encadré *Analytique synthétique*.

[47] Dans l'article de 1905, repris dans le chapitre III de *Science et méthode*, "Les mathématiques et la logique", Poincaré proteste avec raison contre l'interprétation trop restrictive donnée par Russell de son analyse du raisonnement mathématique. Dans un compte rendu de *SH* paru dans Mind, (1905), Russell soutenait que : "Un nombre fini signifie un nombre auquel s'applique l'induction mathématique. Il y a des nombres infinis et l'on peut prouver à leur propos beaucoup de théorèmes, aussi bien qu'à propos de choses qui ne sont pas des nombres du tout; donc évidemment l'induction mathématique n'est pas ce qui rend compte de la fécondité des mathématiques" (page 414). La réplique de Poincaré n'est qu'une explicitation de ce paragraphe de *SH* : " Je ne voulais pas dire, comme on l'a cru, que tous les raisonnements mathématiques peuvent se réduire à une application de ce principe. En examinant ces raisonnements d'un peu plus près, on y verra appliqués beaucoup d'autres principes analogues, présentant les mêmes caractères essentiels. Dans cette catégorie de principes, celui de l'induction complète est seulement le plus simple de tous et c'est pour cela que je l'ai choisi pour type." (p. 818). L'intuition qu'a l'esprit de sa puissance de répéter indéfiniment un acte, une fois conçu comme possible, est à la base de tous ces principes analogues.

[48] En discutant dans cette section du caractère essentiel du principe de récurrence, Poincaré semble bien distinguer entre ce que le langage mathématique permet d'exprimer (la généralité d'une prémisse, la généralité d'un théorème) et la capacité de passer du fini à l'infini propre au raisonnement mathématique par récurrence. Le commentaire sur la définition de l'addition est de la même teneur que ce qui est dit ici à propos de la prémisse majeure. Le langage mathématique permet de l'exprimer d'une manière unique pour tous les cas réalisables à partir du nombre 1. Cependant, le raisonnement par récurrence ne se limite pas à exprimer une infinité de syllogismes, car il nous permet de *connaître* la vérité du théorème général en nous faisant passer du fini à l'infini

Pour qu'on s'en puisse mieux rendre compte, je vais énoncer les uns après les autres ces syllogismes qui sont, si l'ont veut me passer l'expression, disposés en cascade.

Ce sont bien entendu des syllogismes hypothétiques.

Le théorème est vrai du nombre 1.

Or s'il est vrai de 1, il est vrai de 2.

Donc il est vrai de 2.

Or s'il est vrai de 2, il est vrai de 3.

Donc il est vrai de 3, et ainsi de suite.

On voit que la conclusion de chaque syllogisme sert de mineure au suivant.

De plus les majeures de tous nos syllogismes peuvent être ramenées à une formule unique.

Si le théorème est vrai de $n - 1$, il l'est de n.

On voit donc que, dans les raisonnements par récurrence, on se borne à énoncer la mineure du premier syllogisme, et la formule générale qui contient comme cas particuliers **toutes les majeures**[49].

Cette suite de syllogismes qui ne finirait jamais se trouve ainsi réduite à une phrase de quelques lignes.

Il est facile maintenant de comprendre pourquoi toute conséquence particulière d'un théorème peut, comme je l'ai expliqué plus haut, être vérifiée par des procédés purement analytiques.

Si au lieu de montrer que notre théorème est vrai de tous les nombres, nous voulons seulement faire voir qu'il est vrai du nombre 6 par exemple, il nous suffira d'établir les 5 premiers syllogismes de notre cascade ; il nous en faudrait 9 si nous voulions démontrer le théorème pour le nombre 10 ; il nous en faudrait davantage encore pour un nombre plus grand ; mais quelque grand que soit ce nombre nous finirions toujours par l'atteindre, et la vérification analytique serait possible.

Et cependant, quelque loin que nous allions ainsi, nous ne nous élèverions jamais jusqu'au théorème général, applicable à tous les nombres, qui seul peut [40] être objet de science. Pour y arriver, il faudrait une infinité de syllogismes, il faudrait franchir un abîme que la patience de l'analyste, réduit aux seules ressources de la logique formelle, ne parviendra jamais à combler.

Je demandais au début pourquoi on ne saurait concevoir un esprit assez puissant pour apercevoir d'un seul coup d'œil l'ensemble des vérités mathématiques.

La réponse est aisée maintenant ; un joueur d'échecs peut combiner quatre coups, cinq coups d'avance, mais, si extraordinaire qu'on le suppose, il n'en préparera jamais **qu'un nombre fini**[50] ; s'il applique ses facultés à l'arithmétique, il ne pourra en apercevoir les vérités générales d'une seule intuition directe ; pour parvenir au plus petit théorème, il ne pourra s'affranchir de l'aide du raisonnement par récurrence parce que c'est un instrument qui permet de passer du fini à l'infini.

Cet instrument est toujours utile, puisque, nous faisant franchir d'un bond autant d'étapes que nous le voulons, il nous dispense de vérifications longues, fastidieuses et monotones qui deviendraient rapidement impraticables. Mais il devient

---

comme il est dit plus bas. La justification de la possibilité d'une telle connaissance et sa nature apodictique ne sont évoquées qu'à la section suivante, lorsqu'il est question de la capacité de l'esprit de passer du fini à l'infini. Ce qui justifie le raisonnement par induction.

[49] La forme du raisonnement par récurrence résume donc une infinité de syllogismes (d'applications de *Modus Ponens*) chacun vérifiable analytiquement :

$P(1)$ $P(1)\supset P(2)$

$P(2)$ $P(2)\supset P(3)$

$P(3)$ $P(3)\supset P(4)$

$P(4)$ etc

La prémisse mineure du principe de récurrence correspond à la prémisse mineure du premier syllogisme P(1). La prémisse majeure est une écriture abrégée pour toutes les prémisses majeures de la cascade des syllogismes $P(n)\supset P(n+1)$. Le "n" contenu dans cette formule semble jouer le rôle de ce qu'on appellerait aujourd'hui en logique un paramètre : il représente un nombre particulier mais quelconque de la suite des nombres naturels. L'énoncé $P(n)\supset P(n+1)$ n'est pas pour Poincaré de type général (voir encadré *Principe d'induction*).

[50] Dans cette seconde occurrence (comme d'ailleurs dans la conclusion), la comparaison avec le jeu d'échecs a, semble-t-il, surtout pour fonction de souligner par contraste le trait spécifique des mathématiques : le passage nécessaire du fini à l'infini. Un tel passage est impossible pour le joueur qui ne prévoit à l'avance qu'un nombre fini de coups. C'est pour cela que, quels que soient ses dons, le joueur ne pourra faire des mathématiques sans avoir recours à la forme spécifique de raisonnement requise par cette activité. L'impossibilité, qui en résulte pour le joueur, de la garantie d'une "intuition directe" suffit à montrer le caractère propre de la faculté de connaissance requise pour faire des mathématiques et sa spécificité relativement à cette autre activité humaine qu'est le jeu. Il s'ensuit que les mathématiques ne sont pas simple combinaisons de symboles, mais bien plus que cela. Revenant sur le jeu d'échec à la fin du chapitre Poincaré ajoute qui ne pourra jamais y être question d'induction, puisque chacun des coup est différent.

indispensable dès qu'on vise au théorème général, dont la vérification analytique nous rapprocherait sans cesse, **sans nous permettre de l'atteindre**[51].

Dans ce domaine de l'arithmétique, on peut se croire bien loin de l'analyse infinitésimale, et, cependant, nous venons de le voir, l'idée de l'infini mathématique joue déjà un rôle prépondérant, et sans elle il n'y aurait pas de science parce qu'**il n'y aurait rien de général**[52].

VI

Le jugement sur lequel repose le raisonnement par récurrence peut être mis sous d'autres formes ; on peut dire par exemple que dans une collection [41] infinie de nombres entiers différents, **il y en a toujours un qui est plus petit que tous les autres**[53].

On pourra passer facilement d'un énoncé à l'autre et se donner ainsi l'illusion qu'on a démontré la légitimité du raisonnement par récurrence. Mais on sera toujours arrêté, on arrivera toujours à un axiome indémontrable qui ne sera au fond que la proposition à démontrer traduite dans un autre langage.

On ne peut donc se soustraire à cette conclusion que la règle du raisonnement par récurrence est **irréductible au principe de contradiction**[54].

Cette règle ne peut non plus nous venir **de l'expérience**[55] ; ce que l'expérience pourrait nous apprendre, c'est que la règle est vraie pour les dix, pour les cent premiers nombres par exemple, elle ne peut atteindre la suite indéfinie des nombres, mais seulement une portion plus ou moins longue mais toujours limitée de cette suite.

---

[51] Ce caractère essentiel, de résumer par une formule unique une infinité de pas élémentaires, dont chacun *vérifiable,* et de nous faire connaître la vérité de cette formule unique pour tous les cas possibles se retrouve dans le ch IX, à propos du processus d'intégration de l'analyse. Poincaré y affirme que lorsque nous avons à faire plusieurs fois une même opération élémentaire, les mathématiques nous permettent d'éviter cette répétition fastidieuse car elles nous font connaître d'avance le résultat par une sorte d'induction.

[52] C'est l'idée de l'infini qui permet de s'élever au niveau de la généralité. L'infini ici en jeu est, évidemment, l'infini potentiel, celui qui, pour le dire avec Jules Tannery, nous permet d'affirmer qu'après un nombre il y en a toujours un autre (« La notion de l'infini, dont il ne faut pas faire mystère en mathématiques, se réduit à ceci : après chaque nombre entier, il y en a autre » J. Tannery, *Introduction à la théorie des fonctions d'une variable*, 1886, p. VIII). Sans une telle idée d'infini, la science mathématique n'en serait pas une. Poincaré reprend ici la célèbre formule d'Aristote, puisque sa phrase implique que toute science est science du général. Notons toutefois que pour Poincaré c'est l'idée de l'infini qui est constitutive des sciences mathématiques et qui fonde sa généralité.

[53] Cette section examine ce qui rend possible pour nous le passage du fini à l'infini. La formulation équivalente du principe d'induction donnée ici, sert à souligner que l'infini, quel qu'il soit, est inéliminable du raisonnement mathématique par excellence.

La propriété de l'existence d'un plus petit élément d'un ensemble infini d'objets définis par récurrence permet de dériver par un simple raisonnement par l'absurde le principe d'induction. Un nombre entier (positif) est un nombre défini par réitération de l'opération successeur à partir de 1. Supposons que les prémisses du principe d'induction soient satisfaites pour une propriété P mais, en niant la conclusion du principe d'induction, admettons l'existence d'un ensemble E de nombres entiers positifs qui ne satisfont pas la propriété P : on se trouve alors acculé à une contradiction. L'ensemble E, en effet, par hypothèse doit posséder un plus petit élément, soit q, et par conséquent ce q, s'il est différent de 1, est tel que son prédécesseur possède la propriété P. Donc P(q-1) mais ¬P(q), ce qui est en contradiction avec l'assomption des prémisses du principe d'induction. Donc, si une *collection infinie* quelconque de nombres entiers a un plus petit élément, alors le principe d'induction est vérifié. La réciproque aussi est vraie, le principe du plus petit nombre est démontrable à partir du principe d'induction et de la définition axiomatique de nombre entier. Si l'on peut démontrer cela, on ne peut en aucun cas se dispenser du recours à l'infini, car c'est bien ce recours qui est mis en œuvre par le principe du plus petit nombre. Poincaré voit donc clairement la nature de ce que l'on appellera plus tard dans le cadre de la théorie des fonctions récursives le principe de minimalisation.

[54] Toutes les formes envisageables du principe d'induction demandent le recours à l'infini. Elles sont donc indémontrables à partir des principes logiques. C'est pour cette raison que ce principe est irréductible au principe de contradiction. En effet, comme il est dit plus bas, « c'est seulement devant l'infini que ce principe [le principe de contradiction] échoue ».

[55] L'expérience (elle aussi « impuissante devant l'infini » comme Poincaré l'affirme plus bas) ne donne que l'occasion d'étendre notre connaissance à ce que nous avons constaté sur un nombre fini de cas. Elle ne peut d'aucune manière justifier le passage du fini à l'infini, mais elle permet à l'esprit d'exercer sa capacité d'atteindre la suite indéfinie des nombres.

Or, s'il ne s'agissait que de cela, le principe de contradiction suffirait, il nous permettrait toujours de développer autant de syllogismes que nous voudrions, c'est seulement quand il s'agit d'en enfermer une infinité dans une seule formule, c'est seulement devant l'infini que ce principe échoue, c'est également là que l'expérience devient impuissante. Cette règle, inaccessible à la démonstration analytique et à l'expérience, est le véritable type du jugement **synthétique *a priori***[56]. On ne saurait d'autre part **songer à y voir une convention**[57], comme pour quelques-uns des postulats de la géométrie.

Pourquoi donc ce jugement s'impose-t-il à nous avec une irrésistible évidence ? C'est qu'il n'est que l'affirmation de la puissance de l'esprit qui se sait capable de concevoir la répétition indéfinie d'un même acte dès que cet acte est une fois possible. L'esprit a de cette puissance une **intuition directe**[58] et l'expérience ne peut être pour lui qu'une occasion de s'en servir et par là d'en prendre conscience.

Mais, dira-t-on, si l'expérience brute ne peut légitimer le raisonnement par récurrence, en est- il [42] de même de l'expérience aidée de l'induction ? Nous voyons successivement qu'un théorème est vrai du nombre 1, du nombre 2, du nombre 3 et ainsi de suite, *la loi est manifeste*, disons-nous, et elle l'est au même titre que toute loi physique appuyée sur des observations dont le nombre est très grand, mais limité.

On ne saurait méconnaître qu'il y a là une analogie frappante avec les procédés habituels de l'induction. Mais une différence essentielle subsiste. L'induction, appliquée aux sciences physiques, est toujours incertaine, parce qu'elle repose sur la croyance à un ordre général de l'Univers, ordre qui est en dehors de nous. L'induction mathématique, c'est-à-dire la démonstration par récurrence, s'impose au contraire nécessairement, parce qu'elle n'est que l'affirmation d'une propriété **de l'esprit lui-même**[59].

VII

Les mathématiciens, je l'ai dit plus haut, s'efforcent toujours de ***généraliser***[60] les propositions qu'ils ont obtenues, et pour ne pas chercher d'autre exemple, nous avons tout à l'heure démontré l'égalité :

---

[56] Poincaré ici livre le point central de sa doctrine concernant la spécificité du véritable raisonnement mathématique. Le jugement qui aboutit à la conclusion du principe de récurrence, à la différence des axiomes envisagés au début du chapitre, présente, selon Poincaré, les caractéristiques propres d'un jugement synthétique *a priori* : il étend notre connaissance, il est indémontrable, il est irréductible à l'expérience, il est apodictique, il est évident et il fait entrer en jeu l'idée d'infini.

[57] Le principe d'induction n'est pas conventionnel car on ne peut dire ni qu'il est sans contenu véritable (comme l'étaient les règles 2+1= 3 ou 3+1=4 de la section II plus haut), ni que la conclusion peut se tirer de différentes manières. En effet, puisque les prémisses sont toutes semblables, il n'y a qu'une seule manière de généraliser en passant à l'infini. Or, s'il n'y a pas une pluralité de choix possibles, il n'y a pas non plus convention. (Voir l'encadré *Convention*). Poincaré explicite sa pensée sur ce point au ch. III, lorsqu'il compare le principe de récurrence au cinquième postulat d'Euclide (p. 74).

[58] Essayons de préciser la nature de cette intuition directe telle que Poincaré la décrit ici.

Il ne s'agit pas d'une vision directe d'un objet, ou d'une collection d'objets (telle que pourrait être la vision d'un réaliste) ni d'une intuition passive (telle qu'est l'intuition pure chez Kant), qu'en tant qu'êtres humains nous ne pouvons pas ne pas ne pas avoir. Il s'agit de la conscience directe de la possibilité de concevoir la répétition d'un *acte*.

[59] Il est intéressant de remarquer que dans sa réponse à Léchalas en 1897 (*opus* cité), Poincaré concède à son interlocuteur que le principe de récurrence repose sur le principe de raison suffisante : puisqu'il ne saurait y avoir aucune raison pour empêcher de reproduire successivement les mêmes opérations sur la suite infinie des nombres, nous concluons au résultat général. Toutefois, Poincaré s'empresse de souligner que ce même principe de raison suffisante est également la source du principe d'induction empirique. Ce qui peut rendre nécessaire la conclusion dans le cas du raisonnement mathématique doit être recherché dans les capacités de l'esprit. L'esprit peut légiférer sans crainte sur la nature de l'ordre de ses propres actes. Ce qui rend seulement probable l'application du principe de raison suffisante dans le cas de l'induction empirique, c'est qu'il dépend d'un ordre hors de nous, d'une homogénéité que, comme d'ailleurs pour toutes les propriétés, nous ne pouvons attribuer à la nature qu'avec un certain degré de probabilité.

[60] Le propos de cette section est de distinguer la véritable généralisation du procédé que Poincaré appelle construction (voir *Postface*), dans lequel la généralisation n'est qu'apparente, car l'on passe du simple au complexe sans changer de niveau de généralité. Le début de la section rappelle que l'emploi propre du mot « généralisation » est pour Poincaré lié exclusivement au raisonnement par récurrence. C'est en ce sens que l'on peut montrer, *via* le principe de récurrence, le principe général a+b=b+a à partir de a+1=1+a. La suite de la section montre que tout autre emploi du mot « généralisation » dans la description du raisonnement mathématique lui semble impropre.

$$a + 1 = 1 + a,$$

et nous nous en sommes servi ensuite pour établir l'égalité

$$a + b = b + a,$$

qui est manifestement plus générale.

Les mathématiques peuvent donc comme les autres sciences procéder du particulier au général.

Il y a là un fait qui nous aurait paru incompréhensible au début de cette étude, mais qui n'a plus pour nous rien de mystérieux, depuis que nous avons constaté les analogies de la démonstration par récurrence avec l'induction ordinaire.

[43] Sans doute le raisonnement mathématique récurrent et le raisonnement physique inductif reposent sur des fondements différents, mais leur marche est parallèle, ils vont dans le même sens, c'est-à-dire du particulier au général.

Examinons la chose d'un peu plus près[61].

Pour démontrer l'égalité :

$$(1) \qquad a + 2 = 2 + a,$$

il nous suffit d'appliquer deux fois la règle

$$a + 1 = 1 + a,$$

et d'écrire :

$$(2) \quad a + 2 = a + 1 + 1 = 1 + a + 1 = 1 + 1 + a = 2 + a.$$

L'égalité (2) ainsi déduite par voie purement analytique de l'égalité (1) n'en est pas cependant un simple cas particulier : elle est autre chose.

On ne peut donc même pas dire que dans la partie réellement analytique et déductive des raisonnements mathématiques, on procède du général au particulier, au sens ordinaire du mot.

Les deux membres de l'égalité (2) sont simplement des combinaisons plus compliquées que les deux membres de l'égalité (1) et l'analyse ne sert qu'à séparer les éléments qui entrent dans ces combinaisons et à en étudier les rapports.

Les mathématiciens procèdent donc « par construction », ils « construisent » des combinaisons de plus en plus compliquées. Revenant ensuite par l'analyse de ces combinaisons, de ces ensembles, pour ainsi dire, à leurs éléments primitifs, ils aperçoivent les rapports de ces éléments et en déduisent les rapports des ensembles eux-mêmes.

C'est là une marche purement analytique, mais ce n'est pas pourtant une marche du général au particulier, car les ensembles ne sauraient évidemment être regardés comme plus particuliers que leurs éléments.

[44] **On a attaché, et à juste titre, une grande importance**[62] à ce procédé de la « construction » et on a voulu y voir la condition nécessaire et suffisante des progrès des sciences exactes.

Nécessaire, sans doute, mais suffisante, non.

Pour qu'une construction puisse être utile, pour qu'elle ne soit pas une vaine fatigue pour l'esprit, pour qu'elle puisse servir de marchepied à qui veut s'élever plus haut, il faut d'abord qu'elle possède une sorte d'unité, qui permette d'y voir autre chose que la juxtaposition de ses éléments.

Ou plus exactement, il faut qu'on trouve quelque avantage à considérer la construction plutôt que ses éléments eux-mêmes.

---

[61] Cet examen portera à mettre en lumière, dans le domaine de l'arithmétique, choisi au départ comme exemplaire, un troisième type de raisonnement. Dans l'exemple qui suit, du passage de (1) a+1=1+a à (2) a+2=2+a, il n'y a pas de généralisation (comme dans une véritable démonstration), mais il n'y a pas non plus de passage du général au particulier (comme dans la vérification). Donc un tel raisonnement n'est pas synthétique *a priori*, mais il n'est pas non plus syllogistique. Ce passage de (1) à (2) s'opère par combinaison, par complexification, par "construction".

Signalons ici une erreur typographique : le chiffre (1) doit être posé devant a+1=1+a pour que le raisonnement de Poincaré soit intelligible.

La construction classique des nombres entiers positifs et négatifs et des nombres rationnels par extension successive du domaine des opérations de soustraction et de division, aurait été peut être plus éclairante que cet exemple arithmétique. C'est d'ailleurs toujours relativement à une telle extension que l'on utilise le terme « généralisation » dans les traité du début du XX (voir la *Postface* pour plus de détails). Poincaré n'évoquera qu'au chapitre suivant la question des rationnels, d'où le choix de cet exemple.

Sur la notion d'analyticité utilisé tout au long de cette page, voir l'encadré *Analytique synthétique*.

[62] Une identification des auteurs auxquels Poincaré pourrait penser est proposée dans la *Postface*. Pour l'interprétation de ce paragraphe, voir la note suivante.

Quel peut être cet avantage ?

Pourquoi raisonner sur un polygone par exemple, qui est toujours décomposable en triangles, et non sur les triangles élémentaires ?

C'est qu'il y a des propriétés que l'on peut démontrer pour les polygones d'un nombre quelconque de côtés et qu'on peut ensuite appliquer immédiatement à un polygone particulier quelconque.

Le plus souvent, au contraire, ce n'est qu'au prix des plus longs efforts qu'on pourrait les retrouver en étudiant directement les rapports des triangles élémentaires. La connaissance du théorème général nous épargne ces efforts.

Une construction ne devient donc intéressante que quand on peut la ranger à côté d'autres constructions analogues, formant les espèces d'un même genre.

Si le quadrilatère est autre chose que la juxtaposition de deux triangles, c'est qu'il appartient au genre polygone.

Encore faut-il qu'on puisse démontrer les propriétés du genre sans être forcé de les établir successivement pour chacune des espèces.

Pour y arriver, il faut nécessairement remonter du particulier au général, en gravissant un ou plusieurs échelons.

[45] Le procédé analytique « par construction » ne nous oblige pas à en descendre, **mais il nous laisse au même niveau**[63].

Nous ne pouvons nous élever que par l'induction mathématique, qui seule peut nous apprendre quelque chose de nouveau. Sans l'aide de cette induction différente à certains égards de l'induction physique, mais féconde comme elle, la construction serait impuissante à créer la science.

Observons en terminant que cette induction n'est possible que si une même opération peut se répéter indéfiniment. C'est pour cela que la théorie du jeu d'échec ne pourra jamais devenir une science, puisque les différents coups d'une même partie ne se ressemblent pas.

[63] Le procédé analytique par construction est une condition nécessaire du progrès scientifique. La libre combinaison des symboles nous conduit à construire des objets de plus en plus complexes et à établir des relations de plus en plus abstraites entre ces objets.

Il n'est pas toutefois une condition suffisante de ce progrès, car sans une idée qui le guide, sans une unité de dessein dans lequel insérer ces constructions, elles pourraient se révéler des « vaines fatigues de l'esprit » dirait Poincaré, c'est-à-dire sans utilité épistémique. Poincaré ne donne pas de précisions sur cette capacité qui nous permettrait de voir l'unité d'un ensemble de constructions mathématiques (il parlera plus tard de la capacité à saisir les analogies). Il ne dit pas s'il s'agit d'une intuition et encore moins si cette intuition est identique ou analogue à celle dont il a été question dans le raisonnement par récurrence. Celle-ci est toutefois immédiatement invoquée, comme la seule pouvant nous faire comprendre l'intérêt d'une construction. « Il faut qu'on trouve quelque avantage à considérer la construction plutôt que ses éléments eux-mêmes » affirme Poincaré, et cet avantage consiste dans la démonstration générale des propriétés par lesquelles les différents types de constructions constituent les espèces d'un même genre. L'exemple qu'il donne est géométrique mais la théorie de nombres aurait pu tout aussi bien lui convenir. Au-delà des exigences liées à l'expérience (qui sont évoquées au chapitre II), la construction des nombres rationnels a une utilité interne aux mathématiques car elle fait apparaître les nombres naturels et les nombres rationnels comme les différentes espèces d'un même genre gouverné par les mêmes lois (associativité commutativité etc.). Pour arriver à ce résultat, il faut nécessairement remonter du particulier au général, il faut appliquer le raisonnement par récurrence ou ses analogues, tous fondés sur la même intuition.

POSTFACE AU CHAPITRE I

Deux questions complémentaires se posent pour une évaluation critique correcte des thèses de ce chapitre. La première concerne leur place dans le débat de l'époque de leur publication. La seconde porte sur leur postérité et leur lien éventuel avec les thèses formulées par Poincaré dans le contexte du débat plus tardif avec les "logisticiens" (Couturat, Russell, Peano) tel qu'il est relaté dans *Science et Méthode*.

En ce qui concerne la première question, il faut d'abord constater que le premier chapitre de *La Science et l'Hypothèse* paru, comme nous l'avons indiqué dans la *Présentation et morphogenèse de la première partie*, avec des modifications mineures, en 1894 sous forme d'article dans la *Revue de Métaphysique et de Morale* s'insère dans un débat sur la nature des mathématiques inauguré dès la première année de la parution de la revue, et lancé par une série d'articles dont trois au moins revêtent un intérêt certain pour la compréhension de ce premier chapitre.

Le premier de ces articles, dû à Charles Riquier, professeur de mathématiques à l'Université de Caen, paraît dans le premier numéro de 1893. Cet article s'intitulait « De l'idée de nombre, considérée comme fondement des sciences mathématiques »[64]. Riquier y reconnaît d'emblée sa dette envers Charles Méray et cite également Kronecker comme autre précurseur de ses propres idées (ce qui pourrait expliquer la référence erronée de Poincaré à p. 55). Ces deux rappels sont importants. Méray, l'un des représentants les plus importants, à l'époque, de la tradition lagrangienne et algébrique en analyse, est en particulier le premier mathématicien à avoir donné, en 1869, une définition correcte des nombres irrationnels comme limites de suites de nombres rationnels. Son essai s'inscrit dans l'idée tout à fait lagrangienne de l'élimination des résidus d'intuition géométrique dans la formulation de l'analyse. En ce sens Méray est l'un des acteurs du mouvement de la rigueur propre à l'arithmétisation de l'analyse. Ce qui distingue le travail de Méray de celui de l'école berlinoise et de Kronecker c'est qu'il installe, comme Lagrange, l'algèbre, et non pas l'arithmétique, au cœur des mathématiques. Bien sûr, l'idée de nombre naturel est le point de départ des mathématiques. Toutefois la démarche des mathématiques est guidée par les exigences d'abstraction, de rigueur et de généralisation qui sont propres à l'algèbre.

[64] *RMM*, 1893, n.1 pp. 346-368.

Selon Riquier, les mathématiques se divisent en deux parties : la mathématique pure, c'est-à-dire l'analyse mathématique, fondée sur la notion de nombre naturel ; la mathématique appliquée qui regroupe la géométrie, la mécanique et la physique mathématique.

Les extensions successives de la notion de nombre, qui constituent l'analyse pure (Riquier parle de généralisations en suivant Méray et c'est ce mot qui est utilisé par Poincaré à plusieurs reprises dans la section VII), sont essentiellement motivées du point de vue logique par ce que Riquier appelle la « commodité analytique » (opus cité, p. 348), c'est-à-dire les exigences de complétude, de symétrie, de distributivité et d'associativité propres aux opérations algébriques fondamentales. L'ensemble des mathématiques pures (comprenant l'arithmétique et l'analyse) peut donc être expliqué complètement en termes de la notion de nombre naturel et du processus de "généralisation" tel qu'il est mis en œuvre par l'algèbre.

Lorsque dans la section VII, Poincaré discute le procédé de construction et critique l'idée que la condition suffisante du progrès des mathématiques puisse être identifiée avec le passage du simple au complexe par « construction » ou extensions analytiques successives, il semble s'attaquer directement aux conceptions de Riquier, d'ailleurs incompatibles avec le mouvement même de progrès mathématique. Comme il le dit explicitement dans son « Analyse des travaux scientifiques de Henri Poincaré faite par lui-même »[65] les résultats majeurs dans la résolution des équations algébriques supérieures au quatrième degré, dans l'intégration des différentielles algébriques et dans l'intégration des équations différentielles avaient demandé la même conversion des esprits: « Après de longs et vains efforts pour les ramener à des problèmes plus simples, les géomètres se sont enfin résigné à les étudier par eux mêmes, et ils ont été récompensé par le succès » (Œuvres, Tome I, p. II). Poincaré lui-même n'avait pu résoudre le problème de l'intégration des équations différentielles qu'en adoptant une analyse qualitative des solutions et par conséquent en abandonnant la procédure « analytique » traditionnelle, qui prétendait résoudre tous les problèmes par décomposition du complexe au simple.

Le deuxième article est publié par Ernest Ballue, professeur au lycée de Lorient.[66] L'article paru dans la section consacrée aux discussions, veut donner une

[65] Acta Mathematica, t.38, p. 1-135, 1921, republié dans Henri Poincaré Ouvres Tome 1, Editions Jacques Gabay

[66] E. Ballue, « Le nombre entier considéré comme fondement de l'analyse mathématique **»,** *RMM* 1893, pp. 317-328 Il faut ici signaler que ce même article fut âprement critiqué par Frege par un texte qui paru dans *Revue de Métaphysique et de Morale* en 1895.

explication des thèses "trop techniques"[67] présentées par Riquier dans sa propre contribution. Ballue souligne que la notion de nombre naturel, au fondement des mathématiques pures selon Riquier, est à son tour fondée sur la notion empirique de multiplicité. Cette notion empirique serait même nécessaire, d'après Ballue, pour démontrer les propriétés d'associativité et de commutativité des opérations arithmétiques. La référence explicite de Poincaré à cet article de Ballue, présente dans la version de 1894,[68] sera éliminée dans le chapitre I de *La Science et l'Hypothèse*. Néanmoins, les exemples d'application du principe d'induction de la section III répondent directement à Ballue à propos de la nature prétendument empirique de ces démonstrations. Lorsqu'en 1897, Poincaré répondra dans la *Revue de Métaphysique et de Morale*, aux critiques de Léchalas, défenseur des thèses de Ballue, il affirmera à propos de son article de 1894 : « Le but que je me suis proposé, ainsi que mon titre l'indique, est simplement d'étudier le mécanisme du raisonnement mathématique , et ce que j'ai dit ne s'applique pas plus particulièrement à l'arithmétique qu'à tout autre partie des mathématiques. Je n'ai pas voulu répondre à M. Ballue ; je n'avais pas connaissance de son article quand j'ai écrit le mien ; après l'avoir lu, j'ai seulement ajouté une phrase où je le cite incidemment, mais le sujet que je traite est absolument différent du sien. » (*RMM*, 1897 , p. 60).

Probablement piqué au vif dans son orgueil par l'idée qu'un de ses propres articles puisse être interprété comme une réponse philosophiquement insatisfaisante aux thèses d'un professeur de lycée,[69] Poincaré se retranche derrière une affirmation assez invraisemblable à la lecture du passage sur Ballue dans le texte de 1893 (rapporté dans la *Présentation et morphogenèse)*. Il n'en reste pas moins que l'idée que les mathématiques

[67] « Dans un article très intéressant, paru dans le numéro de Juillet de cette revue, M. C. Riquier a exposé les extensions successives que les mathématiciens ont fait subir à l'idée de nombre, et fait comprendre comment l'analyse toute entière peut se déduire de la notion de nombre entier. Mais cet excellent article présente un défaut — M. C. Riquier ne m'en voudra pas de le signaler— un défaut assez grave pour nombreuse catégorie de lecteurs : il est trop technique » Opus cité, p. 348.

[68] Voir la Présentation morphogénétique.

[69] Entre autres, Léchalas affirme de manière assez irrespectueuse « Ces réflexions nous amènent à insister sur une lacune de l'étude que nous discutons [le texte de Poincaré]. Cette étude, en effet, n'indique nullement comment les combinaisons artificielles d'écritures auxquelles elle conduit peuvent servir à établir la science *des pluralités*, pour nous servir de l'expression adoptée par M. Ballue dans l'article si vraiment philosophique auquel répond M. Poincaré. Peut-être nous répliquera-t-il que le véritable mathématicien n'a pas à s'occuper de ces notions inférieures qui touchent à,la réalité, car il semble qu'en ce moment un mouvement très marqué se produit dans les esprits pour prendre le contre-pied de la thèse d'Hegel, d'après laquelle tout ce qui est réelle est rationnel , et déclarer que le réel est inintelligible et échappe à notre connaissance. Pour nous, qui sommes rebelles à ce mouvement, nous ne saurions nous soustraire à l'examen de cette question, examen pour lequel le travail de M. Ballue nous sera particulièrement utile.» G . Léchalas « Notes sur la nature du raisonnement mathématique », *RMM*, 1894, n.2 pp. 709-718.

puissent être expliquées par le double recours à l'expérience et au pouvoir combinatoire de l'algèbre était en France bien établie au sein de la tradition lagrangio-comtienne, et c'est surtout à cette tradition que Poincaré s'oppose.

Le troisième article paraît dans le premier numéro de *Revue de Métaphysique et de Morale*. Il est signé par Gaston Milhaud et il s'intitule « Le concept de nombre chez les Pythagoriciens et les Eléates ».[70] L'essai de Milhaud commence par une idée qui est aussi développée par Poincaré : la science débute toujours par des faits d'observation. Pour obtenir une explication scientifique de ces faits, l'esprit substitue aux données des sensations des concepts sophistiqués, qu'il élabore pour construire des théories. Ainsi, l'expérience est toujours l'occasion de la production des nouveaux langages scientifiques. Un des objectifs polémiques de cet article est la théorie des nombres de Charles Renouvier.[71] Renouvier était alors une des figures philosophiques françaises centrales, représentant d'un mouvement néo-kantien, essentiellement intéressé par les aspects de la philosophie morale et politique de Kant, et en particulier, par les questions de la liberté et du libre arbitre. De fait, la conception de Renouvier sur la théorie de la connaissance se distingue nettement de celle de Kant. Renouvier niait la nature synthétique *a priori* des jugements mathématiques, arrivant jusqu'à considérer cette partie de la doctrine kantienne comme une de ses erreurs majeures. D'une part, il réduisait l'ensemble des mathématiques à un développement analytique (syllogistique) du principe de non-contradiction, de l'autre, il bannissait des mathématiques le concept d'infini au point de ramener le concept même de continu à un ensemble fini d'éléments discrets.[72] L'insistance de Poincaré sur l'usage nécessaire de l'infini (potentiel) pour rendre compte de la fécondité des raisonnements mathématiques répond de manière directe à cette conception analytique et finitiste des mathématiques. La force de ce courant de pensée au sein du débat français est d'ailleurs attestée par le fait que Couturat consacre l'intégralité du livre III de l'ouvrage *De l'infini mathématique* (1896) –lequel se présente sous la forme d'un dialogue entre le *finitiste* et l'*infinitiste*– à la *Critique de l'infini* de Renouvier, Evellin, Pillon pour ne citer que les plus connus.

[70] RMM, 1893, n. 1, pp 140-156.

[71] Milhaud dit de la théorie de Renouvier qu'elle est un exemple moderne de la manière dont peut survivre la pensée mythique et préscientifique des Pythagoriciens. Ibidem p. 149.

[72] Le finitisme de Renouvier est partiellement affilié au finitisme de Cauchy tel qu'il est énoncé par exemple dans la trosième des *Sept leçons de physique générale*, Turin 1833.

Le point de vue de Poincaré, par de nombreux aspects, est étonnamment proche de celui défendu par Emile Boutroux dans son cours à la Sorbonne de 1892-93, *De l'idée de loi naturelle dans la science et la philosophie contemporaines*. Il se précise par l'opposition aux trois points de vue que l'on vient d'évoquer, l'algébrisme lagrangien de Méray et Riquier, l'empirisme de Ballue et le finitisme analytique de Renouvier. L'infini potentiel, l'intuition de la répétition, la structure inductive du raisonnement mathématique sont autant d'antidotes à ces idées.

Malgré leur enracinement dans le contexte français des débats de l'époque, les thèses annoncées dans ce chapitre ont une portée qui dépasse largement ce contexte. Elles sont en effet également le résultat de la réflexion du grand mathématicien sur son propre travail. Ses écrits postérieurs ne font qu'élargir, préciser et actualiser le point de vue de Poincaré dans un cadre qui dépasse largement les frontières françaises. Nous nous limitons ici à deux exemples.

Dans le premier chapitre de la *Valeur de la science*, tiré d'une communication de 1900 au II^{e} Congrès international des mathématiciens, Poincaré, d'abord, souligne de nouveau que pour faire des mathématiques, comme pour faire n'importe quelle autre science « il faut autre chose que la logique pure. Cette autre chose », dit-il « nous n'avons pour la désigner d'autres mots que celui d'intuition ». Il affirme ensuite que, s'il est coutumier d'opposer esprit d'analyse et esprit de géométrie comme analyse et synthèse, comme certitude et invention, il est aussi vrai que les analystes sont aussi des inventeurs et que dans ce travail d'invention l'intuition du nombre pur (le nouveau nom pour l'intuition qui est à la base du principe de récurrence) joue un rôle essentiel. L'invention est impossible sans l'intuition, et l'intuition pure du nombre, en elle même irréductible à la nature déductive de la logique, est une des formes de l'intuition.

Les analyses de 1905 recueillies dans *Science et Méthode* renouvellent l'opposition entre logique et intuition à la lumière du concept d'infini actuel.

Les thèmes abordés dans le chapitre *Les derniers efforts des logisticiens* (liv. II, ch.V) sont particulièrement significatifs. D'abord, Poincaré montre (section VIII) que les prétendues démonstrations du principe d'induction cachent un recours aux définitions non prédicatives et donc qu'elles impliquent un cercle vicieux. Ensuite, en des termes qui rappellent de près le premier chapitre de *La Science et l'Hypothèse* il conclut ainsi à la section XII :

« Une démonstration vraiment fondée sur les principes de la Logique Analytique se composera d'une suite de propositions : les unes, qui serviront de prémisses, seront des identités ou des définitions ; les autres se déduiront des premières de proche en proche ; mais bien que le lien entre chaque proposition et la suivante s'aperçoive immédiatement, on ne verra pas du premier coup comment on a pu passer de la première à la dernière, que l'on pourra être tenté de regarder comme une vérité nouvelle. Mais si l'on remplace successivement les diverses expressions qui y figurent par leur définition et si l'on poursuit cette opération aussi loin que l'on peut, il ne restera plus à la fin que des identités, de sorte que tout se réduira à une immense tautologie. La logique reste donc stérile, à moins d'être fécondée par l'intuition. Voilà ce que j'ai écrit autrefois ; les logisticiens professent le contraire et croient l'avoir prouvé en démontrant effectivement des vérités nouvelles. Par quel mécanisme ?

Pourquoi en appliquant à leurs raisonnements le procédé que je viens de décrire, c'est-à-dire en remplaçant les termes définis par leurs définitions, ne les voit-on pas se fondre en identités comme les raisonnements ordinaires ? C'est que ce procédé ne leur est pas applicable. Et pourquoi ? Parce que leurs définitions sont non prédicatives et présentent cette sorte de cercle vicieux caché que j'ai signalé plus haut. Les définitions non prédicatives ne peuvent pas être substituées au terme défini. Dans ces conditions, la logistique n'est plus stérile, elle engendre l'antinomie. C'est la croyance à l'existence de l'infini actuel qui a donné naissance à ces définitions non prédicatives » (pages 166-167).

L'illusion de pouvoir dépasser le socle sûr de l'intuition de l'infini potentiel par le truchement du langage, et des définitions non prédicatives en particulier, ne conduit qu'à des antinomies. "Il n'y a pas d'infini actuel" (SM p.112) et l'infini potentiel suffit à rendre compte de la créativité des mathématiques.

Enfin, Poincaré n'a pas directement discuté, dans sa correspondance avec Zermelo, du statut de l'induction mathématique dans la théorie des ensembles. On pourrait montrer cependant que la situation y est proche de celle des *Principia mathematica* de Russell. L'induction mathématique n'est l'objet direct d'aucun axiome des systèmes formels usuels décrivant la théorie des ensembles mais est plutôt déduite de la définition de l'ensemble des entiers naturels comme le plus petit des ensembles inductifs[73]. La définition

[73] Techniquement, pour obtenir une telle définition, on identifie le nombre zéro avec l'ensemble vide et on choisit de représenter un nombre par l'ensemble qui contient exactement les nombres qui lui sont inférieurs. Le successeur d'un nombre est alors l'ensemble qui contient exactement ce nombre et ses prédécesseurs. On appelle

ensembliste des entiers naturels est cependant imprédicative et fait un usage de la notion d'ensemble infini en acte. Elle tombe donc sous les mêmes critiques que Poincaré avaient adressées à Russell. La définition suppose de plus que la classe des ensembles inductifs soit non-vide. Ce fait ne peut être démontré et doit être posé comme principe dans la théorie des ensembles (axiome dit de « l'infini »).

ensuite *inductif* tout ensemble qui contient le zéro et qui contient le successeur d'un nombre *n* dès qu'il contient le nombre *n*. L'ensemble des nombres entiers naturels est alors défini comme l'intersection de tous les ensembles inductifs.

L'INDUCTION MATHEMATIQUE CHEZ POINCARE ET LES PENSEURS DE SON EPOQUE

Le principe d'induction mathématique affirme la légitimité d'un *raisonnement mathématique* à propos des entiers naturels (l'« induction mathématique » ou « récurrence ») qui consiste à reconnaître qu'une propriété est vraie de tous les entiers sitôt qu'elle remplie les deux conditions suivantes :

1) Elle est vraie pour le premier entier (0 ou 1 suivant la convenance).
2) Elle est vraie pour un entier dès qu'elle est vraie pour le nombre qui le précède immédiatement.

Ce principe rend également légitime un nouveau mode de *définition mathématique* qui exploite la structure de succession des entiers. C'est ainsi que Poincaré définit p35-36 l'addition sur les entiers, d'une part en précisant ce que signifie « ajouter zéro », et d'autre part en donnant la règle qui permet de savoir ce que signifie ajouter un certain nombre n, sitôt qu'on sait ajouter le nombre qui le précède.

Pourquoi Poincaré donne-t-il une telle importance à ce principe dans l'économie de *La Science et l'Hypothèse* ?

Quand sort l'article de Poincaré, peu de travaux épistémologiques concernaient de manière spécifique l'induction mathématique même si ce mode de raisonnement avait une longue histoire derrière lui dont les origines sont encore aujourd'hui controversées[74]. En revanche, le *problème de l'induction*[75] était au cœur des débats dans les cercles philosophiques de cette fin de XIXe siècle et du début du vingtième siècle[76]. Ce problème concerne avant tout l'induction *expérimentale*, raisonnement qui ne conclut que de manière probable, et que tous ces auteurs différenciaient bien de l'induction mathématique qui conclut de manière certaine. A partir de cette base commune, deux attitudes se dessinaient en fonction du poids accordé à l'un ou l'autre des deux sens du mot « induction »[77]. Ceux qui prenaient comme trait distinctif de l'induction qu'elle ne conclut que de manière probable (par opposition à la déduction) refusaient à la récurrence mathématique le statut de processus inductif. Au contraire, pour ceux qui prenaient pour seul critère de l'induction le passage du particulier au général, la question du statut inductif de la récurrence mathématique était pertinente.

Si on suit ces derniers auteurs et qu'on applique le problème de l'induction au cas particulier de l'induction mathématique, ce problème prend alors une autre tournure. Il ne s'agit plus de justifier une inférence qui n'est que probable parce qu'elle extrapole, mais plutôt de dénouer l'apparent paradoxe qui réside dans le fait de concevoir un processus qui conclut de façon certaine tout en faisant passer de prémisses particulières à une conclusion générale[78]. Ce problème admet deux types de réponses et les enjeux épistémologiques sont

---

[74] Pour plus d'information à ce sujet, nous conseillons la lecture du début de l'article de Roshdi Rached, « L'induction mathématique : Al-Karaji, As-Samaw'al », *Archive for History of Exact Sciences,* 9 (1972), p. 1-21, qui contient de précieuses informations historiques et réflexions critiques sur l'origine du principe d'induction des mathématiques grecques jusqu'au XVIIème siècle.

[75] Problème philosophique développé au XVIIIe siècle par Hume, il consiste à justifier le mouvement amplifiant propre aux sciences expérimentales par lequel on passe de l'observation de quelques faits particuliers à l'assertion d'une loi générale. C'est ce qu'on peut appeler « induction expérimentale », pour la différencier de l'induction mathématique.

[76] Le problème de l'induction était resté un thème important en philosophie depuis son élaboration par Hume. Dans le contexte français de la fin du XIXe siècle, il faut remarquer notamment le travail de Jules Lachelier *Du fondement de l'induction* (thèse soutenue en 1871). L'induction avait une place importante dans les cours professés à la Sorbonne à la période de rédaction de l'article de Poincaré (voir par exemple le cours d'Emile Boutroux, professé en 1892-1893, « *De l'idée de loi naturelle dans la science et la philosophie contemporaine* ») L'intérêt pour l'induction s'amplifiera encore dans les 15 ans suivant la mort de Poincaré (avec les travaux de A. Lalande(1921-1922), J. Nicod (1923), M. Dorolle(1927), Bachelard(1927), etc.)

[77] D'après A. Lalande, dans *Les théories de l'induction et de l'expérimentation*, le mot « induction » est la transcription du grec apagwgh qu'Aristote utilisait de manière technique dans deux sens partiellement divergents (cf. *Topiques*, I, 12 1O5a10-20 et *Premiers analytiques,* 2,23,68b15) qui sont à l'origine de l'ambigüité de sens qui persistait à l'époque de Poincaré et au-delà (voir le *Vocabulaire technique et critique de la philosophie*, dirigé par A.Lalande)

[78] Cf. La Science et l'hypothèse, p32

importants. Certains auteurs[79] défendaient une position logiciste à l'égard de la nature des mathématiques, perpétuant une tradition philosophique héritée de Leibniz. Pour ces auteurs, les mathématiques n'étaient qu'une branche spécialisée de la logique et ils se trouvaient forcés d'affirmer que la forme inductive des raisonnements par récurrence n'était qu'illusoire[80] ; un raisonnement logique ne devant pas conduire à une conclusion plus générale que les prémisses. D'autres auteurs[81] adoptaient au contraire une posture épistémologique d'inspiration kantienne, et voulaient accorder aux mathématiques un statut indépendant de la logique afin d'expliquer la production de connaissances mathématiques nouvelles (la logique étant conçue comme stérile). Ces auteurs prenaient alors au sérieux la forme inductive du raisonnement par récurrence, signe du caractère extra-logique des mathématiques.

Dans *La Science et l'Hypothèse*, Poincaré se place dans cette dernière catégorie de penseurs. Son argumentation n'en est pas moins originale. Les mathématiques dépassent le cadre de la logique non seulement en vertu de leurs axiomes propres, mais surtout en raison de la « vertu créatrice » (p32) des raisonnements proprement mathématiques dont la récurrence est le prototype. Pour justifier le caractère extra-logique du raisonnement par récurrence et sa forme inductive, Poincaré avance les arguments suivants :

1) L'induction mathématique permet de contenir en une seule formule une infinité de syllogismes (p39) : elle est un instrument qui permet de passer du fini à l'infini (p40).

2) Le principe d'induction mathématique est primitif. Toute tentative pour le démontrer échoue ou s'appuie sur un autre principe de même statut (p40-41)

3) On ne peut parvenir à une vérité mathématique générale par la construction, si on n'y ajoute pas une induction mathématique ou un procédé similaire (p44-45)

4) Enfin, si le principe d'induction mathématique n'est ni dérivable de l'expérience (sinon il serait incertain) ni dérivable de principes logiques, c'est qu'il est acquis par un jugement synthétique[82] *a priori*. En effet, il n'est que « l'affirmation de la puissance de l'esprit qui se sait capable de concevoir la répétition indéfinie d'un même acte une fois que cet acte est une fois possible » (p41)

Dans ses ouvrages philosophiques ultérieurs, Poincaré conservera la même position à l'égard du principe d'induction mathématique et apportera de nouveaux arguments. Dans *Science et Méthode*, il précisera que le principe d'induction mathématique ne saurait être vu comme une définition implicite de la classe des nombres. En effet, une telle définition ne serait valable que si l'on pouvait montrer qu'elle n'implique aucune contradiction, ce qui n'est possible qu'en ayant recours au principe de l'induction que l'on cherche à établir. Enfin, Russell objectera à Poincaré que la récurrence ne procèderait pas du particulier au général puisque la seconde prémisse de ce raisonnement serait déjà générale (en tant qu'elle nécessite de montrer une corrélation entre une propriété du nombre n et du nombre (n+1), *quel que soit* le nombre « n » considéré). En fait, dans cette prémisse, il s'agit de donner *une même règle générale* qui permette de passer de n à n+1, indépendamment de la spécificité du n choisi. Par contre, l'universel intervenant dans la conclusion est d'une autre nature puisque la démonstration du fait que n vérifie bien la propriété testée a une forme nouvelle pour chaque nombre n, chaque démonstration devant incorporer la démonstration pour le nombre qui précède. La position de Poincaré est donc toujours tenable pourvu qu'on insiste sur la différence entre ces deux types de généralité (ou d'universalité).

[79] C'est le cas notamment de Frege dans ses fameux *Fondements de l'arithmétique* puis de Bertrand Russell. Couturat sera le porte-parole en France de la pensée logiciste et Poincaré polémiquera expressément avec Couturat et Russell à partir de *la Valeur de la science*.

[80] Il revient à B. Russell dans ses comptes-rendus de *La Science et l'hypothèse*, de tirer la conclusion du logicisme concernant la nature du raisonnement par récurrence : ce dernier doit n'être inductif qu'en apparence.

[81] C'est notamment le cas d'Emile Boutroux dans son cours de 1892-1893 (voir note 3 ci-dessus)

[82] Cf. encadré synthétique/analytique

LA DISTINCTION ENTRE « ANALYTIQUE » ET « SYNTHETIQUE »

Les mots analyse et synthèse ainsi que les adjectifs dérivés « analytique » et « synthétique » recouvrent un ensemble de distinctions dont la signification et le domaine d'application ont varié tout au long de l'histoire des mathématiques et de la philosophie. Nous nous limiterons à mentionner les aspects de cette évolution qui, depuis le XVIIIe siècle, semblent être impliquées par l'usage qu'en fait Poincaré.

L'article *Analyse* de l'Encyclopédie rédigé par d'Alembert distingue, entre autres, une acception logique d'une acception mathématique du mot analyse.

L'acception logique au sens traditionnel « c'est ce qu'on appelle dans les écoles la méthode qu'on suit pour découvrir la vérité ; on la nomme autrement la méthode de résolution. Par cette méthode, on passe du plus composé au plus simple ; au lieu que dans la synthèse on passe du plus simple au plus composé ». A ce sens traditionnel, l'auteur de l'article en oppose un autre, emprunté à la logique d'Etienne de Condillac[83] et hostile à l'idée que l'analyse consiste toujours à passer du plus composé au plus simple. En ce deuxième sens : « L'analyse consiste à remonter à l'origine de nos idées, à en développer la génération et à en faire différentes compositions ou décompositions pour les comparer par tous les côtés qui peuvent en montrer les rapports » (I, 401). C'est aussi le sens envisagé par Poincaré d'une part lorsqu'il affirme que « l'analyse ne sert qu'à séparer les éléments qui entrent dans [les] combinaisons et à en étudier les rapports »[84] et d'autre part lorsqu'il utilise l'adjectif analytique pour qualifier le procédé par construction et pour en décrire la nature (SH p.43).

L'acception mathématique distinguée par d'Alembert renvoie de manière générale à « la méthode de résoudre les problèmes mathématiques, en les réduisant à des équations » ; cette résolution, est-il dit plus loin, appelle le secours de l'Algèbre ou calcul des grandeurs en général, de manière qu'« Analyse et algèbre sont souvent regardée comme synonymes ». (I, 400). Il est toutefois précisé que l'analyse se divise par rapport à son objet en analyse des quantités finies (ou Algèbre proprement dite) et analyse des quantités infinies appelée aussi *la nouvelle analyse* dont une des branches est le calcul infinitésimal. Cet instrument est considéré comme relevant essentiellement de l'art de raisonner, agissant « au moyen d'un petit nombre de données et [en] employant des signes abrégés et faciles » par lesquels « les liaisons des idées y sont exprimées » « et les diverses opérations qu'y sont requises sont effectuées par la combinaison de ces signes ». Poincaré semble bien faire référence à la nature analytique des procédés algébriques, exclusivement symboliques et combinatoires, lorsqu'il parle de la nature analytique des règles du calcul algébrique (« ce calcul est un instrument de transformation qui se prête à beaucoup plus de combinaisons diverses que le simple syllogisme, mais c'est encore un instrument purement analytique et incapable de nous apprendre rien de nouveau » (SH p. 38).

Par ailleurs, l'*analyse*, ayant très vite été développée pour elle-même, se transforma en la branche des mathématiques appelée théorie des fonctions, actuellement connue sous le nom d'*analyse* ou *analyse mathématique*. Ce sens est celui auquel renvoie, au XIXe siècle, la distinction des géométries. Une géométrie susceptible d'être présentée en termes axiomatiques est dite synthétique (en **l'**honneur**,** probablement**,** de l'usage ancien par les mathématiciens grecs du couple analyse - synthèse) par opposition aux géométries « analytiques **»,** qui utilisaient essentiellement les moyens de l'*analyse mathématique*. C'est vraisemblablement à ce sens du terme « analytique » que Poincaré fait référence lorsqu'il écrit : « Ces géométries de Riemann, si intéressantes à divers titres, ne pourraient donc jamais être que purement analytiques et ne se prêteraient pas à des démonstrations analogues à celles d'Euclide. »[85]

La distinction entre « analytique » et « synthétique » recouvre enfin aussi une distinction kantienne, différente de celles que nous venons d'exposer. En effet, Kant oppose ce qu'il appelle « jugement analytique » à ce qu'il appelle « jugement synthétique ». Cette différence concerne en vérité la manière de rapporter un prédicat à un sujet : si le prédicat est contenu dans le sujet, alors le jugement qui attribue le premier au second sera dit « analytique » ; dans le cas contraire, le jugement sera dit « synthétique ». Ainsi, tandis que les *jugements analytiques* n'apportent rien de nouveau, les *jugements synthétiques* font progresser la connaissance. Kant soutient par ailleurs que « les jugements mathématiques sont tous synthétiques »[86] et il oppose à ces derniers les raisonnements, qui reposent sur le principe logique de contradiction et sont, par conséquent, analytiques.

---

[83] Pour Condillac l'*analyse* consiste non seulement à décomposer, mais encore à composer : « Analyser, c'est décomposer, comparer et saisir les rapports. Mais l'analyse ne décompose que pour faire voir, autant qu'il est possible, l'origine et la génération des choses. Elle doit donc présenter les idées partielles dans le point de vue où l'on voit se reproduire le tout qu'on analyse. » CONDILLAC Étienne (de), *Cours d'Études au Prince de Parme*, cours V, seconde partie, chapitre IV, paragraphe 1.

[84] POINCARÉ Jules Henri, *La Science et l'Hypothèse*, chapitre III, section intitulée « Les géométries de Riemann », paragraphe 3.

[85] POINCARÉ Jules Henri, *La Science et l'Hypothèse*, chapitre premier, section VII, paragraphe 9.

[86] KANT Emmanuel, Critique de la Raison pure, introduction & Prolégomènes à toute Métaphysique future qui pourra se présenter comme science, première partie.

Poincaré semble reprendre à son compte cette conception, en accordant au terme « synthétique » le sens de « fécond » et au terme « analytique » le sens de « stérile », notamment lorsqu'il soutient que « tous [les] modes de raisonnement […] [qui] conservent le caractère analytique […] sont […] impuissants »[87].

Cependant, l'association d' « analytique » à « déductif » **(**Poincaré parle par exemple de « partie […] analytique et déductive des raisonnements mathématiques »[88]**),** ne se retrouve pas chez Kant. Poincaré conçoit la *synthèse* comme *inductive* et permettant de *passer du particulier au général*. En revanche, selon lui, l'*analyse* est *déductive* et nous fait *passer du général au particulier*. En ce sens**,** *analytique* correspond à: *réductible aux lois de la logique formelle*, c'est-à-dire encore à: *conforme aux lois de la syllogistique aristotélicienne, lois de substitution et lois de l'ident*ité. On ne peut pas exclure ici une influence de la thématique induction/déduction développée dans la tradition philosophique française, en particulier chez Lachelier et Boutroux.

[87] POINCARÉ Jules Henri, *La Science et l'Hypothèse*, chapitre premier, section I, paragraphe 8.

[88] POINCARÉ Jules Henri, *La Science et l'Hypothèse*, chapitre premier, section VII, paragraphe 8.

PRESENTATION CHAPITRE II

I

Avec la discussion sur la grandeur, nous rencontrons le premier cadre que nous imposons à l'expérience : le continu mathématique des nombres réels, qui est une construction symbolique, une création de l'esprit, dont la seule condition d'existence est la non-contradiction.

L'esprit a procédé à cette construction pour rendre compte de manière cohérente des données de l'expérience. Le continu mathématique des nombres réels permet, en effet, d'éliminer à la fois les contradictions du continu physique « tiré des données brutes de l'expérience, [que] sont nos sensations » (p.51) et celles provenant de « notions empiriques plus au moins élaborées » propres « aux propositions dites intuitives » (p.55).

Le cadre symbolique et conventionnel de la grandeur mathématique organise l'expérience tout en s'y appliquant. Poincaré a soulevé cette question dès l'*Introduction* : comment concilier la divergence entre « les données brutes de nos sens et ce concept extrêmement complexe et subtil » qu'est la grandeur mathématique sans « tout fausser » ? Il nous livre la réponse dans ce chapitre. D'une part, ce qui importe dans l'expérience, c'est-à-dire dans la mesure des grandeurs, c'est qu'elle ne connaisse pas de limites. Des observations de plus en plus fines doivent toujours, par principe, nous laisser la possibilité de discerner des différences de mesures auparavant indiscernables (p.52). L'important, dans la construction des nombres rationnels et réels, est qu'elle repose sur l'intuition de la répétition indéfinie, celle-là même qui fonde le raisonnement par récurrence (p.53). Cette intuition permet d'intercaler un nombre infini d'échelons entre deux nombres entiers donnés et « la seule propriété de ces échelons qui intervienne dans [les] raisonnements [des mathématiciens], c'est celle de se trouver avant ou après tels autres échelons » (p.48). C'est donc cette conformité entre la structure de l'expérience (la possibilité de pouvoir la répéter indéfiniment pour dépasser tout niveau donné d'approximation de la mesure) et la structure du cadre de la grandeur (il n'y a aucune raison intrinsèque de s'arrêter dans le processus d'intercalation) qui nous garantit que « nous ne risquons pas de tout fausser » en appliquant le cadre de la grandeur mathématique à l'expérience.

Malgré la netteté des intentions de Poincaré, les difficultés du chapitre restent très nombreuses, la plupart d'entre elles s'expliquant par deux facteurs.

1) La composition assez déconcertante du chapitre. Ecrit d'abord rapidement en 1893 pour la RMM, sa reprise dans SH s'accompagne de très importantes modifications (voir le chapeau morphogénétique), et le résultat laisse un sentiment de décousu.

2) Une ambiguïté profonde dans le propos de Poincaré. Il semble expliquer au lecteur non mathématicien les nouvelles idées de l'analyse arithmétisée dans une présentation consensuelle invoquant les idées de différents mathématiciens. Mais, d'abord, les vues de ces mathématiciens (Jules Tannery, Dedekind, Kronecker) sont inconciliables, ensuite, les conceptions de Poincaré sont elles-mêmes différentes de celles de chacun de ces mathématiciens et, enfin, les idées de Poincaré, contrairement à celles de Dedekind, ont été abandonnées par les mathématiques actuelles.

II

Tout du long, le chapitre parle du continu. Cependant il s'intitule *La grandeur mathématique et l'expérience*. L'explication de cette apparente disparité permet de comprendre les idées clés développées par Poincaré au cours du chapitre.

- La mesure des grandeurs conduit à des paradoxes insurmontables.
- Le continu des mathématiciens a été inventé pour éliminer ces paradoxes.
- C'est donc l'expérience, celle de la mesure et de ses paradoxes, qui a fourni l'occasion à l'esprit de créer le continu mathématique.

En se guidant sur cette unité de contenu, et en gardant présentes à l'esprit les observations précédentes, on peut diviser le chapitre en quatre parties. La première, censée décrire la construction des nombres réels, s'étend jusqu'à la p.55. La seconde ne comporte que la section sur *La grandeur mesurable* où Poincaré introduit pour la première fois dans le corps de l'ouvrage le concept de convention. La troisième, également constituée d'une seule section, les *Remarques diverses*, donne un bref aperçu des conséquences et des indécisions de l'arithmétisation du continu. La dernière, enfin, où Poincaré explique, contre toute attente, ce qu'il entend par une *coupure*, comprend les deux dernières sections sur les continus physique et mathématique à plusieurs dimensions.

III

La première partie du chapitre est décomposée elle-même en deux parties. D'abord, la description du continu mathématique, destinée à restituer les idées des « mathématiciens de l'Ecole de Berlin », ne présente en vérité qu'une description incorrecte de celles de Dedekind.

Ensuite, l'exposé des motifs qui sont à l'origine de ce nouveau concept de continu mathématique constitué d'une collection infinie d'individus « *extérieurs* les uns aux autres ».

Les deux premiers alinéas présentent l'orientation nouvelle des mathématiques où l'étude des grandeurs continues est désormais dévolue à l'arithmétique pour s'affranchir des difficultés traditionnelles liées aux représentations géométriques ou cinématiques.

Cette nouvelle approche consiste à partir de la structure ordinale des nombres entiers et à intercaler entre deux nombres consécutifs un nombre illimité de termes pour obtenir ainsi les nombres rationnels. Entre ces termes « déjà en nombre infini », il faut, dit Poincaré, en intercaler d'autres pour obtenir les nombres irrationnels. Bien que ce continu des mathématiciens réponde aux exigences de rigueur, indispensables, de l'analyse, il est la source d'une certaine insatisfaction puisqu'il « est tout autre chose que celui des physiciens et celui des métaphysiciens » (p.48).

L'intercalation ne permet pas de construire un continu mathématique, elle donne seulement le critère de la possibilité de construction de n'importe quel élément de ce continu. Pour parvenir à la construction proprement dite, il faut compléter cette procédure, que Poincaré appelle « définition ». Donner ce complément est l'objet de la section suivante sur la *Définition des incommensurables*.

Cette section s'ouvre par un rappel sur le programme d'arithmétisation de l'analyse, développé surtout par les mathématiciens allemands, et à l'égard duquel Poincaré formule d'emblée une réserve d'ordre épistémologique: l'expérience, dans la création du continu, n'y aurait aucune part. Observons que lorsque Poincaré donne son assentiment à l'autre aspect épistémologique de ce programme, « le continu mathématique [est] une pure création de l'esprit », il invoque une concordance de vues en grande partie illusoire (voir l'encadré sur Dedekind). Il se propose ensuite de restituer ce qu'il croit être la construction des nombres irrationnels de Dedekind. Ce qui lui donne l'occasion d'exprimer son anti-dogmatisme, en soulignant à deux reprise le caractère symbolique de cette construction. La première fois pour rappeler, comme y insiste l'*Introduction*, que « les mathématiciens n'étudient pas des objets mais des relations entre objets » (p.49) La seconde fois pour signaler qu'il ne faut voir dans un « nombre incommensurable » qu'un simple symbole « c'est-à-dire quelque chose de très différent de l'idée que l'on croit se faire d'une quantité, qui doit être mesurable et presque tangible ». (Ibidem). Ce deux rappels à l'anti-dogmatisme introduisent un point de doctrine important : pour expliquer un concept scientifique, il ne suffit pas de le définir

rigoureusement, il faut également justifier son usage. Il reste donc à expliquer pourquoi ces symboles, comme d'ailleurs ceux définissant les nombres rationnels, ont acquis une sorte « d'existence concrète » (p. 50). Il reste à voir comment l'expérience a donné l'occasion d'inventer ces structures symboliques. Ce sera le but des deux sections suivantes.

La section sur *Le continu physique* expose les paradoxes qui ont donné à l'esprit l'occasion de créer le continu mathématique. La notion de continu physique, l'idée qu'un bout de ficelle ou que le contenu d'un verre d'eau forment un tout solidaire « divisible à l'infini », nous est connu par l'intermédiaire de nos sens. Elle se caractérise par le fait que les parties contiguës de ce continu sont indiscernables. Si l'extrémité de mon doigt parcourt un bout de ficelle, je dirai que ce morceau de ficelle est continu tant que la sensation du contact avec la ficelle ne sera pas interrompue. Or cette indiscernabilité des sensations, caractéristique du continu physique, pervertit toute méthode de mesure puisqu'elle conduit à abandonner le principe selon lequel deux grandeurs égales à une même troisième sont égales entre elles. C'est la nécessité d'éliminer ce désaccord avec le principe de contradiction qui justifie la création du continu mathématique.

Dans la section sur *La création du continu mathématique* Poincaré distingue le continu du premier ordre, des nombres rationnels, du continu du deuxième ordre, des nombres irrationnels « qui est le continu mathématique proprement dit ». L'idée que l'ensemble des nombres rationnels puisse former un continu semblera pour le moins curieuse. Pour Poincaré, elle correspond à une division quasi-naturelle entre paradoxes de la *sensation* et paradoxes de l'*imagination*. Les rationnels remplissent la fonction d'un continu car en intercalant un nombre infini d'entre eux, ceci bien que « nous n'ayons jamais eu à compter qu'un nombre fini d'objets », nous éliminons les paradoxes de la sensation. La création du continu du deuxième ordre répond également au besoin d'éliminer des contradictions. Le point d'intersection de deux courbes, lorsque ses coordonnées sont irrationnelles, ne pourrait exister si l'on s'en tenait au continu du premier ordre. Contrairement aux précédentes, ces contradictions n'ont pas directement leur origine dans l'imperfection de nos sens mais dans l'application du continu du premier ordre aux propositions intuitives de la géométrie. L'imagination géométrique associée à une ligne présente « les caractères du continu physique, c'est-à-dire qu'on ne pourra se la représenter qu'avec une certaine largeur. » Aussi le mathématicien doit-il faire « un effort de plus : sans renoncer tout à fait au secours des sens, il veut arriver au concept de la ligne sans largeur ». Le continu mathématique du second ordre permet de dépasser le stade de cette imagination géométrique, dont la source est l'expérience.

Il permet ainsi d'éviter de conclure à des propositions dont la vérité paraît intuitive, comme « deux lignes qui se traversent ont un point commun » (p.54), mais qui seraient mathématiquement incorrectes si on s'en tenait au continu du premier ordre.

IV

Dans la section sur *La grandeur mesurable* qui constitue la deuxième partie du chapitre, Poincaré nous avertit que jusqu'ici il ne s'est intéressé qu'à « l'ordre dans lequel les termes sont rangés ». Autrement dit, la question de la nature du continu ne dépend que de l'ordre. Si l'on veut appliquer les opérations arithmétiques usuelles aux éléments de ce continu, il faut introduire la notion de distance. Cet enrichissement de la structure du continu est conventionnel car la notion de distance n'est pas déterminée univoquement par les opérations arithmétiques. Elle n'est assujettie qu'à un certain nombre de propriétés formelles des opérations arithmétiques comme, par exemple, la commutativité de l'addition.

v

Les *Remarques diverses*, qui forment la troisième partie du chapitre, montrent que pour Poincaré les considérations précédentes n'épuisent pas la question du continu et elles confirment que l'orientation de sa pensée suit une voie différente de celle des analystes allemands et, donc, de celle prévalant aujourd'hui. Ce n'est pas, conformément à son anti-dogmatisme, l'élucidation définitive de la nature du continu qui intéresse Poincaré, élucidation qu'il juge d'ailleurs impossible, mais uniquement la question d'une définition cohérente du concept de fonction différentiable.

Avec la première remarque, Poincaré consolide la distinction capitale autour de laquelle il a construit son propos. En toute rigueur, on pourrait créer de nouveaux continus mathématiques d'ordre quelconque, « mais ce serait un vain jeu de l'esprit ». Si la fécondité des mathématiques s'explique par la faculté créatrice de l'esprit, comme l'a montré le premier chapitre, celle-ci n'entre en jeu que lorsque l'expérience la sollicite. Aussi la définition rigoureuse d'un continu du troisième ordre n'a pas à être expliquée car il s'agit d'« une simple curiosité ».

La seconde remarque précise cette idée. Avec le concept de continu mathématique du second ordre, l'arithmétisation de l'analyse a permis de forger un concept de différentiabilité exempt de contradiction. Mais cette solution a pour corrélat indésirable l'existence de fonctions continues nulle part différentiables. Ce désaccord entre l'intuition, ou l'imagination,

et l'analyse pourrait être éliminé avec des artifices analogues à ceux qui ont permis la définition des continus mathématiques du premier et du second ordre. Ces courbes n'ayant qu'un rôle marginal, on s'est accommodé d'un *statu quo* où l'intuition a été sacrifiée au profit de la rigueur de l'analyse.

VI

La dernière partie du chapitre sur le continu à plusieurs dimensions semble être une simple généralisation de ce qui a été dit précédemment au sujet des rapports entre le continu physique et le continu mathématique. Mais, si ces développements n'invalident nullement les analyses précédentes, puisque le continu mathématique à plusieurs dimensions est sorti du continu physique à plusieurs dimensions « par un processus tout pareil à celui (…) étudié au début de ce chapitre » (p.60), le continu physique y remplit un rôle tout nouveau.

Précédemment, ce sont des raisons négatives, les paradoxes de la sensation ou de l'imagination qui ont été invoquées pour justifier la création du continu mathématique. Ici, par contre, l'indiscernabilité des sensations est à l'origine d'un concept nouveau, celui de *coupure*, lequel permet d'édifier une nouvelle science mathématique l'*Analysis Situs*, c'est-à-dire la topologie (algébrique).

On remarque d'abord que Poincaré recourt aux notions, relevant du continu mathématique, de *point* et de *ligne* pour expliquer analogiquement celles, relevant du continu physique, d'*élément* et de *chaîne*, tandis que précédemment les notions propres au continu physique servaient d'appui à l'explication des concepts analytiques plus abstraits.

Le caractère discernable ou indiscernable d'un ensemble de sensations permet ensuite de définir la coupure, laquelle permettra à son tour de classer les continus physiques, c'est-à-dire de distinguer les objets matériels eu égard à leur nombre de dimensions. Ce concept de dimension, fondé sur l'indiscernabilité d'un ensemble de sensations, sera exploité au chapitre IV, lorsque Poincaré élaborera sa distinction entre espace représentatif et espace géométrique.

CHAPEAU MORPHOGENETIQUE AU CHAPITRE II

Le chapitre 2 reprend l'article ``Le continu mathématique´´ qui fut publié en 1893 dans le premier numéro de la *Revue de métaphysique et de morale*. Lors du lancement de cette revue, Xavier Léon et Élie Halévy souhaitaient bénéficier de la collaboration de savants renommés et il semble que Bergson leur conseilla de demander un article à Poincaré. Un échange entre Halévy et Léon daté d'octobre 1892 en témoigne :

``J'ai vu Bergson et j'ai vu Couturat. Bergson se propose pour le second numéro mais ne veut pas entendre parler du I^{er} pour des raisons de temps et des raisons de prudence sémitique. Couturat m'a rapporté les livres en déclarant qu'il se sentait tout à fait incapable de discuter avec Renouvier, il remet la discussion à un an. Voilà où j'en suis et je commence à sentir la lourdeur de ma mission. Bergson est d'ailleurs on ne peut mieux disposé et plus aimable : il travaillera pour la Revue à mettre au point quelque théorie de la perception extérieure qui paraîtra un jour en volume et dont sa thèse n'est qu'un extrait. Mais malgré toute ma vive insistance je n'ai pu le décider à me donner rien de ferme pour le mois de décembre des promesses et des encouragements c'est beaucoup, mais c'est trop peu. Il m'engage à voir Boutroux pour lui arracher un article ainsi qu'à Poincaré. Il voudrait pour lancer la Revue les trois noms de Ravaisson, Boutroux (essentiel dit-il comme porte-parole puisqu'il est notre maître à tous, et il m'a promis d'aller le voir à ce sujet) Poincaré – je ne demande pas mieux, mais encore faut-il les avoir´´. (SimP1991, p23).

Pour une évaluation de l'importance de cet article, il conviendrait d'examiner en détail le grand nombre d'articles publiés sur ce sujet dans la *Revue de métaphysique et de morale* et dans la *Revue philosophique de la France et de l'étranger* autour des années 1890.

Les modifications apportées à l'article dans le chapitre correspondant de *La science et l'hypothèse* sont relativement nombreuses mais d'inégale importance. Outre de nombreuses variations typographiques (ajout ou retrait des italiques par exemple), on notera que Poincaré a modifié ou supprimé plusieurs références bibliographiques significatives et que toutes les mentions des travaux de Kronecker ont été remplacées par des mentions à ceux de Dedekind sauf une. On notera également que les derniers paragraphes sont des ajouts. Voici le détail des principales modifications section par section.

L'introduction ne présente que quelques variantes typographiques.

La section I ``Définition des incommensurables´´ se caractérise surtout par l'introduction de

références à Dedekind, en remplacement de Kronecker. De plus, la dernière phrase du troisième paragraphe avant la fin de la section présente manifestement une coquille d'impression. On peut y lire ``… carré soit encore plus rapproché que 2´´ alors qu'il faudrait lire ``… carré soit encore plus rapproché de 2´´ (cette coquille est absente dans l'article de la RMM). Enfin, dans le dernier paragraphe, Poincaré supprime une référence aux travaux du père Carbonnel.

La section II ``Le continu physique´´ ne présente que des variations typographiques.

La section III ``Création du continu mathématique´´ est à peu près inchangée si ce n'est les quatre derniers paragraphes qui présentent des différences notables.

La section IV ``La grandeur mesurable´´ n'existait pas dans l'article de la *Revue de métaphysique et de morale*. Elle se compose en fait, à part égales de paragraphes tirés de la section suivante (pour le début) et de paragraphes spécialement rédigés pour la fin. En particulier Poincaré supprime dans le chapitre de SH la référence explicite au travail d'Helmholtz. Dans le texte de 1893, après avoir discuté du rapport de la définition de l'addition au choix conventionnel de la notion d'équidistance entre différents échelons d'une grandeur continue, Poincaré affirme : « Je ne veux pas ici traiter de cette question en détail ; cela m'entraînerait trop loin de mon sujet ; ce nouvel attribut que l'on ajoute ainsi au concept de continu mathématique n'en fait pas en effet partie essentiel.

Je me bornerais donc à renvoyer à une œuvre magistrale de von Helmholtz ; je veux parler de son *Jubelschrift* écrite en l'honneur d'Eduard Zeller et intitulée *Zahlen und Messen* » (*op. cit*. p.3).

Le début de la section V ``Remarques diverses´´ présente des différences par rapport à l'article puisque les premiers paragraphes du texte d'origine ont été utilisés pour composer la section précédente. On remarque par ailleurs quelques variations typographiques.

Les deux dernières sections (``Le continu physique à plusieurs dimensions´´ et ``Le continu mathématique à plusieurs dimensions´´) ne se trouvent pas dans l'article d'origine.

[47]

CHAPITRE II

LA GRANDEUR MATHÉMATIQUE ET L'EXPÉRIENCE

I

Si l'on veut savoir ce que les mathématiciens entendent par un continu, ce n'est pas à la géométrie **qu'il faut le demander**[89]. Le géomètre cherche toujours plus ou moins à **se représenter les figures qu'il étudie**[90], mais ses représentations ne sont pour lui que des instruments ; il fait de la géométrie avec de l'étendue comme il en fait avec de la craie ; aussi doit-on prendre garde d'attacher trop d'importance à des accidents qui n'en ont souvent pas plus que **la blancheur de la craie**[91].

---

[89] On peut distinguer ici deux niveaux de lecture. Le premier, et le plus immédiat pour un lecteur actuel, consiste à voir dans le propos de Poincaré un simple rappel. C'est désormais à l'analyse, conçue comme une discipline reposant sur la seule donnée des nombres entiers (arithmétisation de l'analyse), qu'est dévolue l'étude du continu. En 1893, date de publication de l'article ayant donné naissance au chapitre, et *a fortiori* en 1902, cette orientation de la recherche mathématique était admise par la plupart des mathématiciens mais, n'ayant pris corps qu'au cours du dernier tiers du XIX^{e} siècle, elle n'était sans doute pas assimilée par le public plus large constituant le lectorat de SH (Professeurs de Lycée, physiciens, philosophes, ingénieurs, etc...). Mais l'emploi, dans ce paragraphe et le suivant, d'une terminologie philosophique (représentation, étendue, accident, pureté d'une discipline) invite à voir dans cette remarque une observation plus profonde dépassant l'intention de la simple vulgarisation. Il ne suffit pas de reconnaître l'intérêt de l'arithmétisation de l'analyse, essentiel pour la clarification de la notion de fonction continue (cf. « L'œuvre mathématique de Weierstrass », *Acta Mathematica*, **22**, pp.1-18, 1898). Il faut également avoir présent à l'esprit que pour les objets de la géométrie, discipline qui pour Poincaré est régie par les groupes de transformation, la continuité est devenue une propriété contingente. On savait en effet, en particulier grâce aux travaux de Poincaré, qu'il était possible de définir des groupes de transformations vérifiant des axiomes « géométriques » sur des ensembles d'éléments discrets..

[90] Les représentations peuvent être concrètes (la figure dessinée sur le tableau) ou mentales, lorsque, par exemple, la figure ne peut être dessinée (cf. plus bas la fin de la n.38). Ces représentations appartiennent à l'imagination que, plus bas, Poincaré distinguera classiquement de la sensation (section *Création du continu mathématique, Deuxième stade*). Si le géomètre peut difficilement se passer de ces instruments, il y a toutefois une hétérogénéité essentielle entre les objets dont traite la géométrie, en tant que science déductive avec ses raisonnements purement abstraits et généraux, et les images associées à ces objets. Appuyer le raisonnement sur l'imagination, se représenter des figures créées pour le besoin d'un entendement fini et limité, voilà des nécessités bien réelles, mais qui ne doivent pas nous faire oublier les risques présentés par un tel support imaginatif, par une intuition qui, faute d'être pure, n'a aucun caractère nécessaire (cf. VS, pp.32-33, la discussion sur les différents types d'intuition). Il sera d'ailleurs question dans la deuxième des *Remarques diverses* de ce chapitre d'une de ces contradictions persistantes entre le concept de continuité dû à l'analyse arithmétisée et le concept intuitif de différentiabilité que l'imagination associe *ipso facto* à toute courbe.

[91] Le géomètre ne rencontre le continu que comme une propriété accidentelle des images sur lesquelles reposent ses raisonnements. Puisque ces images ne sont, du point de vue de la théorie, qu'accidentellement impliquées dans cette science, les propriétés de ces images sont également accidentelles comme le fait qu'un triangle soit tracé à la craie blanche sur un tableau noir.

L'analyste pur n'a pas à craindre cet écueil. Il a dégagé la science mathématique **de tous les éléments étrangers**[92], et il peut répondre à notre question : Qu'est-ce au juste que ce continu sur lequel les mathématiciens raisonnent ? Beaucoup d'entre eux, qui savent réfléchir sur leur art, l'ont fait déjà ; M. **Tannery**[93], par exemple, dans son *Introduction à la théorie des Fonctions d'une variable*.

Partons de l'échelle des nombres entiers ; entre deux échelons consécutifs, **intercalons un ou plusieurs échelons intermédiaires**[94], puis entre ces échelons nouveaux d'autres encore, et ainsi de suite indéfiniment. Nous aurons ainsi un nombre **illimité**[95] de termes, ce seront les nombres que l'on appelle fractionnaires, rationnels ou commensurables. Mais ce n'est pas assez encore ; entre ces termes qui sont pourtant déjà en nombre infini, il faut encore en intercaler d'autres, que l'on appelle irrationnels ou **incommensurables**[96].

---

[92] L'analyse étant arithmétisée, la seule intuition qui y est à l'œuvre est celle de la répétition. Pour cette raison, ses objets ne contiennent aucun élément étranger à l'entendement, et cette discipline est pure (cf. n.x, ch.I), bien que les concepts qu'elle étudie, ici le continu, aient leur origine dans l'expérience.

[93] L'ouvrage de Tannery, publié en 1886, était pour les mathématiciens français de l'époque un ouvrage de référence. L.Couturat, *De l'infini mathématique*, (chap IV, fin de la section 4), par exemple, y renvoie. A l'étranger, l'ouvrage était également connu à ce titre ; Dedekind et Kronecker s'y réfèrent. Il est permis de penser qu'à cette époque Poincaré ne connaissait pas directement les travaux de Dedekind, auteur plusieurs fois cité dans le chapitre, sur la construction des nombres réels, mais qu'il s'appuie sur les informations données par Tannery dans la préface de son traité. Tannery admet d'ailleurs explicitement ne pas avoir lu le travail de Dedekind mais d'en connaître seulement l'existence par Joseph Bertrand. En 1887, Dedekind, dans la préface de la première édition de *Was sind und was sollen die Zahlen* (tr. fr . *Les nombres, que sont-ils et à quoi servent-ils*, Bibliothèque d'Ornicar, Le Seuil, 1979), reproche à Bertrand et à Tannery de s'être complètement mépris sur ses conceptions. Pour l'analyse des vues de Tannery, leur place dans le mouvement de la construction des nombres réels et leur comparaison avec celles de Poincaré et d'autres auteurs influents, voir la postface ainsi que les notes suivantes.

[94] Première mention de cette opération théorique de l'intercalation d'un échelon entre deux échelons distincts. Poincaré ne va cesser d'y recourir (pp. 48, 53, 56 et 57). Le terme *échelons* renvoie vaguement à l'expression employée par Tannery lorsque celui-ci parle de « donner sa place [à un nombre irrationnel] dans l'échelle des nombres » (Préface p.10). Toutefois l'insistance sur la répétition de l'intercalation dans le processus de création des nombres rationnels et irrationnels est propre à Poincaré. Son but, comme on le verra, est de rapprocher ces intercalations successives de la répétition indéfinie d'un même acte une fois que celui-ci a été possible, dont il a été question au ch. I. Pour Poincaré, la possibilité de construction des nombres rationnels et irrationnels repose donc sur la même procédure que celle expliquant la fécondité des mathématiques, ceci même si la définition des nombres irrationnels est plus complexe que le raisonnement par récurrence sur les nombres entiers ou la définition des nombres rationnels.

[95] Les termes *indéfiniment* et *illimité* renvoient à la conception de l'infini en puissance que Poincaré partage avec Tannery. Ce dernier l'exprime ainsi: « la notion d'infini, dont il ne faut pas faire mystère en mathématiques, se réduit à ceci : après chaque nombre [entier] il y en a un autre » (Préface, p. 8). Cependant, dans l'alinéa suivant, Poincaré va dire du continu qu'il est une collection infinie d'individus, ce qui pourrait laisser croire qu'il pense à l'infini en acte. Il semble donc y avoir une certaine ambiguïté dans son propos. Laxisme dans l'expression ou indécision de la pensée ? De nombreux éléments plaident en faveur de la première possibilité. D'abord, plus loin, p.53, Poincaré dit qu'un continu est formé d'un nombre indéfini de termes. Ensuite, on notera son désintérêt significatif pour les nombres cardinaux transfinis de Cantor, ceci bien qu'il en connaisse l'existence (J.Cavaillès, *Correspondance Cantor-Dedekind* in *Œuvres complètes de philosophie des sciences*, Hermann, 1994, p.180). De même, on ne trouve pas dans le présent chapitre, comme chez Cantor, la distinction entre infini en puissance et infini en acte. Enfin, plus tard, SM (Liv.II, ch.V, sec.XII), « Cournot et les principes du calcul infinitésimal », RMM 13, pp.293-306, 1905, et DP (ch. IV), précisant sa pensée à l'occasion de controverses avec Couturat, Hilbert, Russell, Zermelo et d'autres, Poincaré énoncera clairement et défendra fermement le postulat suivant: « Il n'y a pas d'infini actuel ». L'infini ne peut donc être objet de connaissance positive bien que, sous sa forme privative de négation du fini, il soit, via la répétition indéfinie, l'instrument de cette connaissance positive.

[96] Poincaré emploie fréquemment les expressions *nombre commensurable*, *nombre incommensurable*. Cette nomenclature est incorrecte. Ce sont les grandeurs qui sont commensurables ou incommensurables. Pour les nombres, les termes corrects sont *rationnels* et *irrationnels*.

Cet alinéa est introductif, ce qui explique que les expressions «Mais ce n'est pas assez » et « il faut » ne soient pas encore justifiées ; elles le seront dans la section *La création du continu mathématique.*

Il est important de remarquer qu'avec ce procédé de la répétition de l'intercalation, Poincaré ne veut – ni ne peut – procéder à l'inventaire des éléments constituant ce que l'on appelle aujourd'hui la droite réelle ; l'intercalation

[48] Avant d'aller plus loin, faisons une première remarque. Le continu ainsi conçu n'est plus qu'une collection d'individus rangés dans un certain ordre, en nombre infini, il est vrai, mais ***extérieurs* les uns aux autres**[97]. Ce n'est pas là la conception ordinaire, où l'on suppose entre les éléments du continu une sorte de lien intime qui en fait un tout, où le point ne préexiste pas à la ligne, mais la ligne au point. De la célèbre formule, le continu est l'unité dans la multiplicité, la multiplicité seule subsiste, l'unité a disparu.[98] Les analystes n'en ont pas moins raison de définir leur continu comme ils le font, puisque c'est toujours sur celui-là qu'ils raisonnent depuis qu'ils se piquent de rigueur. Mais c'est assez pour nous avertir que le véritable continu mathématique est tout autre chose que **celui des physiciens et celui des métaphysiciens**[99].

---

d'échelons ne permet de déterminer que la position d'un nombre réel particulier, celui dont, pour ainsi dire, on a besoin, et non pas de caractériser l'ensemble des nombres réels.

[97] Il y a deux idées nouvelles dans le continu arithmétisé : il est constitué d'un nombre infini d'individus et ces individus sont extérieurs les uns aux autres. Le continu arithmétisé rompt donc avec une longue tradition puisque, d'une part, d'Aristote jusqu'alors, par définition, un nombre était toujours fini et que, d'autre part, en un certain sens, la conception pythagoricienne est ainsi restaurée contre celle des Eléates et d'Aristote. On notera que dans le premier numéro de la RMM, où paraît l'article de Poincaré, les débats sur les paradoxes de Zénon occupent le premier plan (voir la postface). La conception aristotélicienne, élaborée pour dépasser les paradoxes de Zénon, où un continu n'est pas actuellement composé d'éléments distincts, prévalait chez de nombreux penseurs. Voir, par exemple, P.Tannery et Lachelier.

[98] Cette conclusion, qui renvoie à la question discutée n.7, ne s'impose pas d'elle-même. On sait que pour un cantorien, la multiplicité des éléments du continu forme évidemment une unité : un ensemble qui, en tant qu'unité, peut être élément d'un nouvel ensemble. Pour rejeter cette idée, comme le fait Poincaré, il faut admettre que l'ensemble infini des individus extérieurs les uns aux autres ne peut former une entité achevée passible d'une connaissance mathématique, ce qui revient, par implication, à rejeter l'infini actuel. Ce n'est que lorsqu'on a écarté l'infini actuel que la remarque de Poincaré prend son sens puisqu'on pourra alors poser la question dans les mêmes termes que Lachelier : dans un continu qu'est-ce qui est premier, l'unité ou les éléments ? Avant l'arithmétisation du continu (telle que la conçoit Poincaré), la primauté était donné à l'unité, avec l'arithmétisation elle est nécessairement donné aux éléments, (« Sur les deux derniers arguments de Zénon d'Elée » RMM 1910, n.18, p.354).

[99] Ce jugement est définitif : ces trois continus ne pourront jamais en faire un seul.

Alors que Poincaré reviendra ultérieurement à plusieurs reprises sur les différents thèmes abordés dans l'ouvrage (Cf. la postface de l'*Introduction*), il ne le fera jamais pour la question du continu mathématique qui, de son point de vue, est définitivement tranchée dans ce chapitre. Dans la section III du ch.I de VS, il sera encore plus péremptoire à ce sujet. Parlant de la place de l'arithmétisation dans l'histoire de l'analyse, il se demande : « Avons-nous atteint la rigueur absolue ? A chaque stade de l'évolution nos pères croyaient aussi l'avoir atteinte. S'ils se trompaient, ne nous trompons-nous pas comme eux ? » et il conclut « dans l'Analyse d'aujourd'hui, quand on veut se donner la peine d'être rigoureux, il n'y a plus que des syllogismes ou des appels à cette intuition du nombre pur, la seule qui ne puisse nous tromper. On peut dire qu'aujourd'hui la rigueur absolue est atteinte. »

En constatant que le continu des mathématiciens n'est pas celui des physiciens et des métaphysiciens, Poincaré se prononce sur une question qui, pour lui, est importante puisqu'elle concerne la justification des mathématiques. A ce sujet, il dira dans VS (ch.VI, p.104) que les mathématiques ont un triple but : fournir un instrument pour l'étude de la nature ; aider le philosophe à approfondir les notions de nombre, d'espace et de temps ; procurer des jouissances analogues à celles que donnent la peinture et la musique. Dans SM (p.31), il reprendra cette idée dans les termes suivants : « Nous [les mathématiciens] ne pouvons oublier quel doit être notre but ; selon moi, ce but est double : notre science confine à la foi à la philosophie et à la physique, et c'est pour nos deux voisines que nous travaillons. » A l'appui de ces textes on peut noter que Poincaré n'a publié aucun traité de mathématiques, mais exclusivement des ouvrages de physique mathématique (son *Calcul des probabilités*, 1912, devant être considéré comme un ouvrage de physique) et de philosophie (si l'on excepte un roman de jeunesse et son recueil *Savants et écrivains*).

L'invocation du point de vue du philosophe est fréquente chez Poincaré. A ce propos, il peut être tentant de rapprocher la présente observation de Poincaré de cette autre que l'on trouve aux ch. V, p.100, et VII, p.137, de SH où il oppose, au sujet du mouvement absolu de rotation, les points de vue du physiscien et du philosophe. La différence est ici que il n'existe pas d'autres voies que l'arithmétisation pour construire un concept de continuité exempt de contradiction, tandis que la rotation absolue, qui n'est qu'une convention commode, peut toujours être éliminée au profit de la rotation relative pour donner droit au point de vue du philosophe.

Il n'en reste pas moins qu'en mentionnant cette disparité entre le continu des mathématiciens et ceux des métaphysiciens et des physiciens, Poincaré signale une conséquence insatisfaisante du continu mathématique

On dira peut-être aussi que les mathématiciens qui se contentent de cette définition sont dupes de mots, qu'il faudrait dire d'une façon précise ce que sont chacun de ces échelons intermédiaires, expliquer comment il faut les intercaler et démontrer qu'il est possible de le faire. Mais ce serait à tort ; la seule propriété de ces échelons qui intervienne dans leurs raisonnements (1), c'est celle de se trouver avant ou après tels autres échelons ; elle doit donc seule aussi **intervenir dans la définition**[100].

Ainsi, il n'y a pas à s'inquiéter de la manière dont on doit intercaler les termes intermédiaires ; d'autre part, personne ne doutera que cette opération ne soit possible, à moins d'oublier que ce dernier mot, dans le langage des géomètres, signifie simplement **exempt de contradiction**[101].

Notre définition, toutefois, n'est pas complète encore, et j'y reviens après cette trop longue digression.

[49] DÉFINITION DES INCOMMENSURABLES. – Les mathématiciens de **l'École de Berlin**[102], M. Kronecker en particulier, se sont préoccupés de construire cette échelle continue des nombres fractionnaires et irrationnels sans se servir d'autres matériaux que du nombre entier. Le continu mathématique serait, dans cette manière de voir, une pure création de l'esprit, où l'expérience n'aurait aucune part.

La notion du nombre rationnel ne leur semblant pas présenter de difficulté, ils se sont surtout efforcés de définir le nombre incommensurable. Mais avant de reproduire ici leur définition, je dois faire une observation, afin de prévenir l'étonnement qu'elle ne manquerait pas de provoquer chez les lecteurs peu familiers avec les habitudes des géomètres.

Les mathématiciens n'étudient pas des objets, mais des relations entre les objets ; il leur est donc indifférent de remplacer ces objets par d'autres, pourvu que les relations ne changent pas. La matière ne leur importe pas, **la forme seule les intéresse**[103].

---

puisqu'il conclura la seconde des *Remarques diverses* du chapitre (p.58) en regrettant que l'on ait sacrifié l'intuition au profit de l'analyse. Il reste une question. Y a-t-il pour Poincaré une conception du continu qui soit à même de satisfaire le physicien et le métaphysicien ? On trouvera des éléments de réponse dans la postface.

(1) [Note de Poincaré] Avec celles qui sont contenues dans les conventions spéciales qui servent à définir l'addition et dont nous parlerons plus loin.

[100] De l'intercalation ne résulte que des relations de précédence et de succession entre échelons. Avec cette opération Poincaré ne fait apparaître que la structure d'ordre dense d'un continu. En effet, la définition des rationnels doit simplement se conformer aux trois propriétés suivantes (dont Dedekind souligne qu'elles ne sont pas indépendantes) : 1° les nombres rationnels doivent satisfaire une relation d'ordre. 2° entre deux nombres rationnels différents, il y a une infinité de nombres différents. 3° tout nombre rationnel a divise l'ensemble des nombres rationnels en deux classes distinctes, l'une contenant tous les rationnels $a_1<a$, l'autre contenant tous les rationnels $a_2>a$ où a appartient à l'une ou à l'autre des deux classes. Comme l'indique sa remarque faite en note, Poincaré dissocie, comme nous le verrons, cette propriété d'ordre dense, qui appartient nécessairement à tout continu, des opérations algébriques sur les éléments constituant ce continu, lesquelles dépendent de conventions.

[101] Cette identification entre possibilité d'une notion mathématique et non contradiction pourrait faire penser à la doctrine de Hilbert. Si ce rapprochement semble bien justifié pour les notions figurant dans les propositions de la géométrie, il n'en va pas de même pour celles de l'analyse. Ces dernières, contrairement aux premières, ne pouvant, en général, être démontrées par un nombre fini de déductions, le principe de contradiction, Poincaré l'a dit p.41, ne peut s'y appliquer ; il est insuffisant pour garantir la possibilité de la notion. Ici, la possibilité de la notion est justifiée par la répétition, laquelle est, pour ainsi dire, *sui generis* non contradictoire puisqu'il s'agit d'un acte dont l'esprit a une intuition directe.

[102] Poincaré, qui emploie le pluriel, pourrait penser, en dehors de Kronecker, à Weierstrass (1823-1891) comme autre mathématicien berlinois. Il connaissait, au moins indirectement par Hermite, le contenu des cours non publiés de Weierstrass. Rappelons (Cf. le chapeau morphogénétique) que dans l'article de la RMM le nom de Kronecker figurait partout où nous lisons dans le présent chapitre celui de Dedekind (qui n'enseignait pas à Berlin). Comme la première version du mémoire de Kronecker, *Uber den Zahlenbegriff*, a paru dans le même recueil d'hommages à E.Zeller que l'essai de Helmholtz *Zählen und Messen* que Poincaré, dans l'article de la RMM, mentionne avec trop d'enthousiasme (« une œuvre magistrale ») pour ne pas l'avoir lu, on peut supposer qu'il connaissait à cette époque au moins l'existence de l'article de Kronecker. Dans « L'œuvre mathématique de Weierstrass » *Acta Mathematica* **22**, pp.1-18, (1998), il critiquera sévèrement les vues de Kronecker. On doit cependant noter que Poincaré pouvait être sensible à un aspect de la doctrine de Kronecker. Celui-ci, contrairement à Dedekind, isole radicalement ce qui relève de l'arithmétisation de ce qui dépend de la mesure. Pour ces deux derniers points, voir l'encadré *L'arithmétique et nombres réels selon Kronecker*.

[103] La définition de la science donnée dans l'*Introduction* (la science ne nous fait pas connaître les choses mais seulement les rapports entre les choses) s'applique *a fortiori* aux mathématiques. Notons que si la remarque de Poincaré exprime évidemment ses propres convictions, l'idée selon laquelle ce n'est pas la matière, mais la forme qui intéresse les mathématiciens ne lui est pas propre. On la trouve également, par exemple avec Lagrange et Comte, dans les traditions scientifiques et philosophiques qu'il combat dans l'ouvrage.

Si l'on ne s'en souvenait, on ne comprendrait pas que M. Dedekind désigne par le nom de *nombre incommensurable* **un simple symbole**[104], c'est-à-dire quelque chose de très différent de l'idée que l'on croit se faire d'une quantité, qui doit être mesurable et presque tangible.

Voici maintenant quelle est **la définition de M. Dedekind**[105] :

On peut répartir d'une infinité de manières les nombres commensurables en deux classes, en s'assujettissant à cette condition qu'un nombre quelconque de la première classe soit plus grand qu'un nombre quelconque de la seconde classe.

Il peut arriver que parmi les nombres de la première classe, il y en ait un qui soit plus petit que tous les autres ; si, par exemple, on range dans la première classe tous les nombres plus grands que 2 et 2 lui-même, et dans la seconde classe tous les nombres plus petits que 2, il est clair que 2 sera le plus petit de tous les nombres de la première classe. Le nombre 2 [50] pourra être choisi comme symbole de cette répartition.

Il peut se faire, au contraire, que parmi les nombres de la seconde classe, il y en ait un qui soit plus grand que tous les autres ; c'est ce qui a lieu, par exemple, si la première classe comprend tous les nombres plus grands que 2, et la seconde tous les nombres plus petits que 2 et 2 lui-même. Ici encore, le nombre 2 pourra être choisi comme symbole de cette répartition.

Mais il peut arriver également que l'on ne puisse trouver ni dans la première classe un nombre plus petit que tous les autres, ni dans la seconde un nombre plus grand que tous les autres. Supposons, par exemple, que l'on mette dans la première classe tous les nombres commensurables dont le carré est plus grand que 2 et dans la seconde tous ceux dont le carré est plus petit que 2. On sait qu'il n'y en a aucun dont le carré soit précisément égal à 2. Il n'y aura évidemment pas dans la première classe de nombre plus petit que tous les autres, car quelque voisin que le carré d'un nombre soit de 2, on pourra toujours trouver un nombre commensurable dont le carré soit encore plus rapproché que 2.

Dans la manière de voir de M. Dedekind, le nombre incommensurable

$$\sqrt{2},$$

n'est autre chose que le symbole de ce mode particulier de répartition des nombres commensurables ; et à chaque mode de répartition correspond ainsi un nombre commensurable ou non, qui lui sert de symbole.

Mais se contenter de cela, ce serait trop oublier l'origine de ces symboles ; il reste à expliquer comment on a été conduit à leur attribuer une sorte d'**existence concrète**[106], et, d'autre part, la difficulté ne commence-t-elle pas pour les

---

[104] C'est inexact. Pour Dedekind les nombres irrationnels ne sont pas de simples symboles. Poincaré a sans doute pris cette idée chez Tannery. Voir la postface.

[105]Voir la n.5. Il ne s'agit pas de la définition de Dedekind, mais de celle de Poincaré, laquelle satisfait les trois conditions mentionnées dans la n.12 à cette différence près que la dernière clause de 3°, « *a* appartient à l'une ou à l'autre des deux classes », n'est plus vérifiée ici puisque *a*, étant irrationnel, ne peut appartenir à une classe de rationnels. Pour la définition de Dedekind voir l'encadré *Coupure et nombres irrationnels chez Dedekind*.

[106] Après avoir indiqué pourquoi ces nombres sont de simples symboles, Poincaré pose la question de l'origine de ces symboles, ceci pour expliquer, et dissiper, l'idée trompeuse selon laquelle ils pourraient avoir une existence concrète.

L'intercalation des échelons ne livre qu'une condition de possibilité de ces nombres pour nous. Le symbole qui sert de nom au nombre, et par lequel on désigne cette construction subjective, permet de passer du plan de la subjectivité à celui de l'intersubjectivité ou de la communicabilité. Les nombres étant les produits de notre seul esprit conformément à une règle, laquelle nous assure que ces symboles ne désignent pas des notion contradictoires, rien ne peut nous permettre d'affirmer que ces nombres peuvent se trouver en dehors de nous. Pour parler comme les philosophes, cette définition ne donne qu'un critère d'essence et non pas un critère d'existence. C'est d'ailleurs pourquoi la difficulté commence avec les nombres fractionnaires (qui n'existent pas plus que les nombres réels). Il n'en reste pas moins que l'esprit n'a pas créé spontanément les nombres rationnels et les nombres réels et les symboles qui leur sont associés. L'origine de ces définitions est dans le continu physique. Cette origine est concrète car elle réside dans une matière que nous ne pouvons connaître que par la sensation et que nous concevons comme divisible à l'infini. Plus loin (section *Le continu physique à plusieurs dimensions*) Poincaré va préciser la notion de continu physique en introduisant la distinction, dérivée également de la sensation, entre continu et discontinu.

En présentant ses vues sur la nature symbolique des nombres irrationnels, Poincaré les a prêtées erronément à Dedekind. Pour Dedekind, les nombres irrationnels ne sont pas de simples symboles. Ces symboles sont les noms des points de la droite réelle dont l'existence doit être posée. Sans que l'on puisse parler à ce sujet d'existence concrète, puisque la droite réelle n'est pas une droite matérielle, il faut admettre qu'il n'y a pas là un critère d'essence, mais un postulat d'existence de l'objet « droite » constitué d'une infinité en acte de points. Toute la différence entre les fondateurs allemands de l'analyse contemporaine et Poincaré tient dans ce fait. Pour ce dernier, la droite achevée, soit comme objet mathématique soit comme ensemble infini en acte de points, n'existe pas et ne peut exister. Une droite n'est rien d'autre que la structure d'ordre dense créée par notre esprit à

nombres fractionnaires eux-mêmes ? Aurions-nous la notion de ces nombres, si nous ne connaissions d'avance une matière que nous concevons [51] comme divisible à l'infini, c'est-à-dire comme un continu ?

LE CONTINU PHYSIQUE.[107] – On en vient alors à se demander si la notion du continu mathématique n'est pas tout simplement tirée de l'expérience. Si cela était, les données brutes de l'expérience, qui sont **nos sensations, seraient susceptibles de mesure**[108]. On pourrait être tenté de croire qu'il en est bien ainsi, puisque l'on s'est, dans ces derniers temps, efforcé de les mesurer et que l'on a même formulé une loi, connue sous le nom de **loi de Fechner**[109], et d'après laquelle la sensation serait proportionnelle au logarithme de l'excitation.

Mais si l'on examine de près les expériences par lesquelles on a cherché à établir cette loi, on sera conduit à une conclusion toute contraire. On a observé, par exemple, qu'un poids A de 10 grammes et un poids B de 11 grammes produisaient des sensations identiques, que le poids B ne pouvait non plus être discerné d'un poids C de 12 grammes, mais que l'on distinguait facilement le poids A du poids C. Les résultats bruts de l'expérience peuvent donc s'exprimer par les relations suivantes :

$$A = B, \qquad B = C, \qquad A < C,$$

qui peuvent être regardées comme la formule du continu physique.[110]

Il y a là, avec le principe de contradiction, un désaccord intolérable, et c'est la nécessité de le faire cesser qui nous a contraints à inventer le continu mathématique.

On est donc forcé de conclure que cette notion a été créée de toutes pièces par l'esprit, mais que c'est l'expérience qui lui en a fourni **l'occasion**[111].

Nous ne pouvons croire que deux quantités égales à une même troisième ne soient pas égales entre elles, et c'est ainsi que nous sommes amenés à supposer que A est différent de B et B de C, mais que l'imper-[52] fection de nos sens ne nous avait pas permis de les discerner.

CRÉATION DU CONTINU MATHÉMATIQUE. – *Premier stade*. – Jusqu'ici il pourrait nous suffire, pour rendre compte des faits, d'intercaler entre A et B un petit nombre de termes qui resteraient discrets. Qu'arrive-t-il maintenant si nous

---

laquelle on adjoint une définition conventionnelle de l'égalité entre intervalles. Penser, à l'inverse, que la droite puisse exister, c'est tomber dans le dogmatisme naïf dénoncé par Poincaré dans l'*Introduction*. On reconnaîtra la part de vérité de son point de vue si on note que, depuis la définition par Dedekind des nombres réels jusqu'à nos jours, la question de l'existence d'objets immatériels n'a jamais cessé de provoquer des discussions qui, si elles ont été insensiblement évacuées des mathématiques elles-mêmes, n'en paraissent pas moins justifiées.

[107]Cette brève section sur *Le continu physique* ne semble au premier abord qu'être destinée à introduire la raison pour laquelle on doit imposer le continu mathématique à l'organisation de l'expérience. Mais, en vérité, dans la suite du chapitre comme dans celle de l'ouvrage (ch.IV), ainsi que dans ses livres ultérieurs, Poincaré, contrairement au cas du continu mathématique, reviendra constamment sur les propriétés du continu physique. La raison principale de cet intérêt soutenu réside dans le problème de la justification de la tridimensionnalité de l'espace qui l'occupera jusqu'à la fin.

[108] C'est le début d'un raisonnement par l'absurde : si les sensations étaient mesurables la loi de l'identité serait contredite.

[109] Selon la loi de Weber, une excitation E provoque une différence perceptible minimale δE qui est proportionnelle à E. A cette loi, Fechner ajoute la condition que le seuil de discernement de deux sensations voisines $S(E+\delta E) - S(E)$ demeure constant. D'où $dS = k dE/E$ et la loi de Fechner-Weber : $S = k \ln E$, où k est une constante dépendant de la modalité de la sensation. La sensation est donc proportionnelle au logarithme de l'excitation.

[110] Formule que Poincaré, dans une lettre à G.Mouret (« Les géométries non euclidiennes », *Revue générale des sciences pures et appliquées*, **3**, pp.74-75, 1892), oppose à celle du continu mathématique qui est A<B<C. Dans la même lettre, il précise que si l'on traduit les expériences de Fechner « en équations *sans coup de pouce* », ces équations seront celles qu'il donne comme formule du continu physique. Opinion qu'il exprimera plus radicalement dans DP, p.68: « La loi de ces continus [physiques] est la loi de Fechner, que je dépouillerai du pompeux appareil mathématique qui l'entoure d'ordinaire pour la réduire au simple énoncé des données expérimentales sur lesquelles elle repose. » (Chapitre Pourquoi l'espace a trois dimensions ? section 2 : Le continu et les coupures). Cette lois de Weber-Fechner avait suscité de nombreux débats dans la communauté scientifique européenne. Voir *Postface*.

[111] On rapprochera ce passage du dernier alinéas de la p.41. Le continu mathématique n'est donc pas donné dans la nature, il n'est pas non plus le produit de l'expérience et il n'est pas inné, bien que l'esprit le crée de toutes pièces.

avons recours à quelque instrument pour suppléer à l'infirmité de nos sens, si par exemple nous faisons usage d'un microscope ? Des termes que nous ne pouvions discerner l'un de l'autre comme étaient tout à l'heure A et B, nous apparaissent maintenant comme distincts ; mais entre A et B devenus distincts s'intercalera un terme nouveau D, que nous ne pourrons distinguer ni de A ni de B. Malgré l'emploi des méthodes les plus perfectionnées, les résultats bruts de notre expérience présenteront toujours les caractères **du continu physique**[112] avec la contradiction qui y est inhérente.

Nous n'y échapperons qu'en intercalant sans cesse des termes nouveaux entre les termes déjà discernés, et cette opération devra être poursuivie indéfiniment. Nous ne pourrions concevoir qu'on dût l'arrêter que si nous nous représentions quelque instrument assez puissant pour décomposer le continu physique en éléments discrets, comme le télescope résout la voie lactée en étoiles. Mais nous ne pouvons nous imaginer cela ; en effet, c'est toujours avec nos sens que nous nous servons de nos instruments ; c'est avec l'œil que nous observons l'image agrandie par le microscope, et cette image doit, par conséquent, toujours conserver les caractères de la sensation visuelle et par conséquent ceux du continu physique.

Rien ne distingue une longueur observée directement de la moitié de cette longueur doublée par le microscope. Le tout est homogène à la partie, c'est là une nouvelle contradiction, ou plutôt c'en serait une si le nombre des termes était supposé fini ; il est clair en effet que la partie contenant moins de termes que le tout ne saurait être **semblable au tout**[113].

[53] La contradiction cesse dès que le nombre des termes est regardé comme infini ; rien n'empêche, par exemple, de considérer l'ensemble des nombres entiers comme semblable à l'ensemble des nombres pairs qui n'en est pourtant qu'une partie ; et, en effet, à chaque nombre entier correspond un nombre pair qui en est le double.[114]

Mais ce n'est pas seulement pour échapper à cette contradiction contenue dans les données empiriques que l'esprit est amené à créer le concept d'un continu, formé d'un nombre **indéfini de termes**.

Tout se passe comme pour la suite des nombres entiers. Nous avons la faculté de concevoir qu'une unité peut être ajoutée à une collection d'unités ; c'est grâce à l'expérience que nous avons l'occasion d'exercer cette faculté et que nous en prenons conscience ; mais, dès ce moment, nous sentons que notre pouvoir n'a pas de limite et que nous pourrions compter indéfiniment, quoique nous n'ayons jamais eu à compter qu'un nombre fini d'objets.

De même, dès que nous avons été amenés à intercaler des moyens entre deux termes consécutifs d'une série, nous sentons que cette opération peut être poursuivie au delà de toute limite et qu'il n'y a pour ainsi dire aucune raison intrinsèque de s'arrêter.

Qu'on me permette afin d'abréger le langage, d'appeler continu mathématique du premier ordre tout ensemble de termes formés d'après la même loi que l'échelle des nombres commensurables. Si nous y intercalons ensuite des échelons nouveaux d'après la loi de formation des nombres incommensurables, nous obtiendrons ce que nous appellerons un continu du deuxième ordre.

Deuxième stade. – Nous n'avons fait encore que le premier pas ; nous avons expliqué l'origine des continus de premier ordre ; mais il faut voir maintenant pourquoi ils n'ont pu suffire encore et pourquoi il a fallu inventer les nombres incommensurables.

Si l'on veut s'imaginer[115] une ligne, ce ne pourra [54] être qu'avec les caractères du continu physique, c'est-à-dire qu'on ne pourra se la représenter qu'avec une certaine largeur. Deux lignes nous apparaîtront alors sous la forme de deux bandes étroites, et si l'on se contente de cette image grossière, il est évident que si les deux lignes se traversent, elles auront une partie commune.

---

[112] Poincaré reprend les réflexions exposées précédemment au sujet de nos sensations immédiates pour maintenant les généraliser à celles produites par la médiation d'instruments scientifiques. La question du hiatus entre continu physique et continu mathématique n'est donc pas marginale mais essentielle pour l'élaboration du concept de mesure des grandeurs variant continûment. Le continu mathématique ne nous dévoile pas une part de la réalité. Mais si *nous* devons nous servir d'instruments, c'est toujours par le biais de *nos* sens que nous les utiliserons. Par conséquent, les expériences de mesure de grandeurs ne pourront jamais échapper à ces contradictions du continu physique, telles qu'elles apparaissent avec l'usage grossier de nos sens. Le continu mathématique est donc un cadre que nous *devons nécessairement* imposer à l'expérience. A ce titre, il diffère des autres cadres relevant de l'analyse, comme, par exemple, ceux de l'espace ou de la grandeur mésurable, car pour ces derniers demeure une latitude de choix que l'on ne tranche qu'au nom de la seule commodité. (Voir l'encadré *Convention*)

[113] La première contradiction consistait à violer le principe selon lequel deux quantités égales à une même troisième sont égales entre elles. La seconde revient à affirmer que la partie est égale au tout. Ces contradictions sont intolérables car elles reviennent à rejeter ce qu'Euclide appelait des notions communes et que Poincaré (ch.III, p.63) appelle des « propositions d'analyse » qui sont « des jugements analytiques *a priori* ». Mais, en définitive, la contradiction avec la seconde notion commune est levée puisque nous avons un nombre infini de termes dans la partie comme dans le tout.

[114] Ce raisonnement ne remet pas en cause le rejet par Poincaré de l'infini actuel souligné à la note la 7. La correspondance entre les nombres entiers et les entiers pairs peut être vérifiée terme à terme sans que l'on ait à s'appuyer sur l'équipotence des ensembles des entiers et des entiers pairs. Voir DP La logique de l'infini, section 2, p.110-1 où l'affirmation est justifiée par la nature prédicative de la loi de correspondance.

[115] Après avoir discuté, dans le *Premier stade*, des limites de la sensation, Poincaré considère maintenant celles de l'imagination.

Mais le géomètre pur fait un effort de plus : sans renoncer tout à fait au secours de ses sens, il veut arriver au concept de la ligne sans largeur, du point sans étendue. Il n'y peut parvenir qu'en regardant la ligne comme la limite vers laquelle tend une bande de plus en plus mince, et le point comme la limite vers laquelle tend une aire de plus en plus petite. Et alors, nos deux bandes, quelque étroites qu'elles soient, auront toujours une aire commune d'autant plus petite qu'elles seront moins larges et dont la limite sera ce que le géomètre pur appelle un point.

C'est pourquoi l'on dit que deux lignes qui se traversent ont un point commun et cette vérité paraît **intuitive**[116].

Mais elle impliquerait contradiction si l'on concevait les lignes comme des continus du premier ordre, c'est-à-dire si sur les lignes tracées par le géomètre ne devaient se trouver que des points ayant pour **coordonnées**[117] des nombres rationnels. La contradiction serait manifeste dès qu'on affirmerait par exemple l'existence des droites et des cercles.

Il est clair, en effet, que si les points dont les coordonnées sont commensurables étaient seuls regardés comme réels, le cercle inscrit dans un carré et la diagonale de ce carré ne se couperaient pas, puisque les coordonnées du point d'intersection sont incommensurables.[118]

Cela ne serait pas **encore assez**[119], car on n'aurait ainsi que certains nombres incommensurables et non pas tous ces nombres.

Mais représentons-nous une droite divisée en deux demi-droites. Chacune de ces demi-droites apparaîtra à notre imagination comme une bande d'une certaine [55] largeur ; ces bandes empièteront d'ailleurs l'une sur l'autre, puisqu'entre elles il ne doit pas y avoir d'intervalle. La partie commune nous apparaîtra comme un point qui subsistera toujours quand nous voudrons imaginer nos bandes de plus en plus minces, de sorte que nous admettrons comme une vérité intuitive que si une droite est partagée en deux demi-droites, la frontière commune de ces deux droites est un point ; nous reconnaissons là la conception de Kronecker, où un nombre incommensurable était regardé comme la frontière commune de deux classes de nombres rationnels.

Telle est l'origine du continu du deuxième ordre, qui est le continu mathématique proprement dit.

Résumé. – En résumé, l'esprit a la faculté de créer des symboles, et c'est ainsi qu'il a construit le continu mathématique, qui n'est qu'un système particulier de symboles. Sa puissance n'est limitée que par la nécessité d'éviter toute contradiction ; mais l'esprit n'en use que si l'expérience lui en fournit une raison.

Dans le cas qui nous occupe, cette raison était la notion du continu physique, tirée des données brutes des sens. Mais cette notion conduit à une série de contradictions dont il faut s'affranchir successivement. C'est ainsi que nous sommes contraints à imaginer un système de symboles de plus en plus compliqué. Celui auquel nous nous arrêterons est non seulement exempt de contradiction interne, il en était déjà ainsi à toutes les étapes que nous avons franchies, mais il n'est pas non plus en contradiction avec diverses propositions dites intuitives et qui sont tirées de notions empiriques plus ou moins élaborées.

LA GRANDEUR MESURABLE. – Les grandeurs que nous avons étudiées jusqu'ici ne sont pas *mesurables* ; nous savons bien dire si telle de ces grandeurs est plus grande que telle autre, mais non si elle est deux fois ou trois fois plus grande.

Je ne me suis en effet préoccupé jusqu'ici que de [56] l'ordre dans lequel nos termes sont rangés. Mais cela ne suffit pas pour la plupart des applications. Il faut apprendre à comparer l'intervalle qui sépare deux termes quelconques. C'est

---

[116] Cette intuition concerne l'imagination, il s'agit d'une intuition empirique. Ce n'est pas la géométrie en tant que telle qui est à la source de la création du deuxième stade du continu, mais l'imagination géométrique.

[117] En mentionnant les coordonnées Poincaré semble ne pas respecter la division discursive qu'il a précédemment introduite entre, d'abord, la question du continu pur et, ensuite, celle de la mesure, qu'il va traiter dans la section suivante, puisque l'usage des coordonnées suppose fixé une unité, un étalon de mesure, sur chacun des axes de coordonnées. Mais il ne s'agit ici que de faire valoir le fait qu'il y a des échelons manquants dans le continu du premier ordre.

[118] Le point d'intersection est inexistant puisque ses coordonnées, qui valent $\sqrt{2}/2$ ne sont pas rationnelles. L'emploi des nombres entiers pour ordonner les sensations conduisait à une contradiction que l'ordre dense des rationnels a permis de lever. Ici l'emploi des rationnels pour déterminer les positions respectives des points de la droite et du cercle, telles que l'imagination se les représente, conduit également à une contradiction que le continu du second ordre va permettre d'éliminer. Il y a cependant une différence entre ces deux cas. Pour le paradoxe de la sensation on constate l'absence d'échelons (de points) que la création du continu mathématique du premier ordre vient suppléer, tandis qu'avec le paradoxe de l'imagination c'est l'existence de l'échelon (du point d'intersection) qui est trompeuse du point de vue des échelons du continu de premier ordre.

[119] Avec l'exemple donné, Poincaré a montré qu'il y avait, à l'origine du continu du deuxième ordre, un certain type d'intuition géométrique lié à des constructions déterminant des nombres algébriques. Ce n'est pas assez, car l'origine de ce continu est plus vaste ; elle inclut les raisonnements déterminant des nombres transcendants. A l'origine du continu de second ordre, il y a donc la généralisation de l'intuition géométrique qui associe un point à n'importe quelle division de la droite en deux demi-droites. Il faut donc considérer que *toutes* les façons de diviser l'ordre dense des rationnels en deux classes complémentaires, munies elles-mêmes du même ordre dense, déterminent le symbole d'un nombre réel.

à cette condition seulement que le continu devient une grandeur mesurable et qu'on peut lui appliquer les opérations de l'arithmétique.

Cela ne peut se faire qu'a l'aide d'une *convention* nouvelle et spéciale. On *conviendra* que dans tel cas l'intervalle compris entre les termes A et B est égal à l'intervalle qui sépare C et D. Par exemple au début de notre travail, nous sommes partis de l'échelle des nombres entiers et nous avons supposé que l'on intercalait entre deux échelons consécutifs *n* échelons intermédiaires ; eh bien, ces échelons nouveaux seront par convention regardés comme équidistants.

C'est là une façon de définir l'addition de deux grandeurs ; car si l'intervalle AB est par définition égale à l'intervalle CD, l'intervalle AD sera par définition la somme des intervalles AB et AC.

Cette définition est arbitraire dans une très large mesure. Pourtant elle ne l'est pas complètement. Elle est assujettie à certaines conditions et par exemple aux règles de commutativité et d'associativité de l'addition.[120] Mais pourvu que la définition choisie satisfasse à ces règles, le choix est indifférent et il est inutile de le préciser.

REMARQUES DIVERSES. – Nous pouvons nous poser plusieurs questions importantes :

1° La puissance créatrice de l'esprit est-elle épuisée par la création du continu mathématique ?

Non : les travaux de **Du Bois-Reymond**[121] le démontrent d'une manière frappante.

On sait que les mathématiciens distinguent des infiniment petits de différents ordres et que ceux du deuxième ordre sont infiniment petits non seulement d'une manière absolue, mais encore par rapport à ceux du premier ordre. Il n'est pas difficile d'imaginer des infiniment petits d'ordre fractionnaire ou [57] même irrationnel, et nous retrouvons ainsi cette échelle du continu mathématique qui a fait l'objet des pages qui précèdent.

Mais il y a plus ; il existe des infiniment petits qui sont infiniment petits par rapport à ceux du premier ordre et infiniment grands, au contraire, par rapport à ceux de l'ordre $1 + \varepsilon$, et cela quelque petit que soit ε. Voilà donc des termes nouveaux intercalés dans notre série, et si l'on veut me permettre de revenir au langage que j'employais tout à l'heure et qui est assez commode, bien qu'il ne soit pas consacré par l'usage, je dirai que l'on a créé ainsi une sorte de continu du troisième ordre.

---

[120] Pour vérifier que AB plus AC est égal à AD, il faut prendre une règle *r* de longueur AB que l'on reporte sur CD pour constater que ses extrémités coïncident avec les points C et D. Cette définition est arbitraire car elle suppose qu'on puisse vérifier que les extrémités de la règle coïncident *exactement* avec A et B puis avec C et D. Ce qui est impossible puisque l'imperfection de nos sens ne permet pas de dresser de tels constats. Dans la lettre à Mouret, citée n.22, Poincaré est plus explicite sur ce point : « M.Mouret (...) s'attaque à la notion primordiale de l'égalité qu'il veut faire dériver de l'expérience (...). J'avoue que je ne puis me décider à croire que cette proposition : Deux quantités égales à une même troisième sont égales entre elles, soit un fait expérimental que des expériences plus précises infirmeront peut-être un jour. J'aime mieux conclure avec Helmholtz [dans *Zählen und Messen*] que nous donnons le nom d'égalité à tout ce qui dans le monde extérieur est conforme à l'idée préconçue que nous avons de l'égalité mathématique ».

Dans « Réponse à quelques critiques », *RMM*, **5**, pp.59-70, (1897), où il répond, entre autres, à Lechalas qui lui reproche de ne pas avoir donné de définition de l'égalité dans « Sur la nature du raisonnement mathématique », Poincaré donne explicitement les règles que doit satisfaire toute notion d'égalité : « Je n'ai pas donné (...) la définition du signe = ; si j'avais cru nécessaire d'en donner une, j'aurais adopté celle de Helmholtz dans sa célèbre *Jubelschrift* intitulée « Zählen und Messen ».

Voici à peu près comment il s'exprime :

On appellera égalité une relation jouissant des propriétés suivantes :

1° Si l'on a $a=b$, on aura $b=a$.

2° Si l'on a a=b et $b=c$, on aura $a=c$.

Maintenant, dans les applications, on conviendra d'appeler égalité telle ou telle relation, et on en aura le droit dès qu'on aura constaté que cette relation jouit des propriétés que je viens d'énoncer. (...) La définition de l'égalité est indifférente au point de vue où je me place. C'est une sorte d'élément étranger que j'ai cherché à éliminer les plus possible et si je préfère celle de Helmholtz, c'est parce que c'est pour ainsi dire un minimum de définition. » (pp.60-61).

[121] Pour une description des conceptions de Du Bois-Raymond, tombées aujourd'hui en désuétude, voir l'encadré. Avec ces remarques, Poincaré veut faire apparaître, sous une forme différente de celle exposée dans la première partie du chapitre, la nature par principe inachevée de tout continu mathématique. C'est là une conséquence directe du fait qu'on ne peut définir un continu mathématique sans faire intervenir l'infini, au sens d'indéfini. Or celui-ci comme le dit Poincaré est « un *devenir* » (SM, p.153). Insistons sur le fait que les vues de Poincaré sont sur ce plan, comme sur bien d'autres concernant les fondements de l'analyse, radicalement opposées au point de vue actuel où l'on se demande combien il y a de points sur la droite (hypothèse du continu de Cantor).

Il serait aisé d'aller plus loin, mais ce serait un vain jeu de l'esprit ; on n'imaginerait que des symboles sans application possible, et personne ne s'en avisera. Le continu du troisième ordre auquel conduit la considération des divers ordres d'infiniment petits est lui-même trop peu utile pour avoir conquis droit de cité, et les géomètres ne le regardent que comme **une simple curiosité**[122]. L'esprit n'use de sa faculté créatrice que quand l'expérience lui en impose la nécessité.

2° Une fois en possession du concept du continu mathématique, est-on à l'abri de contradictions analogues à celles qui lui ont donné naissance ?

Non, et j'en vais donner un exemple.[123]

Il faut être bien savant pour ne pas regarder comme évident que toute courbe à une tangente : et en effet si l'on se représente cette courbe et une droite comme deux bandes étroites, on pourra toujours les disposer de façon qu'elles aient une partie commune sans se traverser. Que l'on imagine ensuite la largeur de ces deux bandes diminuant indéfiniment, cette partie commune pourra toujours subsister et, à la limite pour ainsi dire, les deux lignes auront un point commun sans se traverser, c'est-à-dire qu'elles se toucheront.

Le géomètre qui raisonnerait de la sorte, consciemment ou non, ne ferait pas autre chose que ce que nous [58] avons fait plus haut pour démontrer que deux lignes qui se traversent ont un point commun, et son intuition pourrait paraître tout aussi légitime.

Elle le tromperait cependant. On peut démontrer qu'il y a des courbes qui n'ont pas de tangente, si cette courbe est définie comme un continu analytique de deuxième ordre.

Sans doute quelque artifice analogue à ceux que nous avons étudiés plus haut aurait permis de lever la contradiction, mais, comme celle-ci ne se rencontre que dans des cas très exceptionnels, on ne s'en est pas préoccupé. Au lieu de chercher à concilier l'intuition avec l'analyse, on s'est contenté de sacrifier l'une des deux, et comme l'analyse doit rester impeccable, c'est à l'intuition que l'on **a donné tort**[124].

LE CONTINU PHYSIQUE À PLUSIEURS DIMENSIONS.[125] – J'ai étudié plus haut le continu physique tel qu'il ressort des données immédiates de nos sens, ou, si l'on veut, des résultats bruts des expériences de Fechner ; j'ai montré que ces résultats sont résumés dans les formules contradictoires.

---

[122] On rapprochera cette remarque de celle de SM, p.153 où l'auteur nous dit, avec un certain dédain, que Cantor « s'est amusé à comparer [l]es nombres cardinaux transfinis ». Ces réserves expriment à nouveau (cf. n.11) la conviction profonde de Poincaré que la construction de nouveaux concepts mathématiques doit répondre à des exigences réelles : « la science mathématique (...) n'a pas uniquement pour objet de contempler éternellement son nombril ; elle touche à la nature et un jour ou l'autre elle prendra contact avec elle ». Si avec cette doctrine Poincaré exprime l'une des facettes de ses convictions philosophiques (anti-dogmatisme et constructivisme), il faut également reconnaître qu'elle est en accord avec l'esprit général des mathématiciens français de l'époque, préoccupés beaucoup plus par les questions concrètes de l'enseignement et des application que par le développement des mathématiques abstraites. Il n'en reste pas moins qu'il ne ferme pas définitivement la porte à la « simple curiosité » du continu du troisième ordre : si, dans le futur, l'expérience la sollicitait la faculté créatrice de l'esprit serait légitimée à introduire les nouveaux symboles correspondant au continu du troisième ordre.

[123] L'exemple de courbes continues nulle part différentiables auquel pense Poincaré est vraisemblablement celui de la courbe de Weierstrass : où $a>1$ est un entier impair, b est une constante positive inférieure à 1 et $ab>1$.

[124] Dans l'exemple concernant le deuxième stade du continu, p. 54, nous avions une contradiction entre la connaissance géométrique et les données de l'imagination. Ici, la contradiction est entre la définition rigoureuse de la continuité et l'imagination du géomètre au sujet des courbes et des tangentes. La nature exceptionnelle de ces courbes (le fait qu'elles ne soient pas employées dans la description de la nature) nous conduit à la solution indiquée par Poincaré. La définition rigoureuse, mais artificielle, de la continuité, qui rend ici le paradoxe possible, ne soulèvera jamais de difficultés dans l'application de l'analyse à la physique, puisque l'observation ne pourra jamais être suffisamment précise pour faire la différence entre ce genre de courbes (produites par des savants) et les courbes différentiables. Poincaré développe cet argument dans l'article « Cournot et les principes du calcul infinitésimal » commenté dans la *Postface*.

[125]Rappelons que cette section et la suivante ne figuraient pas dans l'article de la RMM et admettons que cette adjonction surprend un peu. En effet, ces pages n'ajoutent rien au problème traité explicitement dans le chapitre (Le recours inévitable à l'arithmétisation du continu et à des conventions pour pouvoir disposer d'une théorie satisfaisante de la mesure des grandeurs). Par ailleurs, ces pages auraient pu être écrites dès l'époque de la parution de l'article de la RMM puisqu'elles ont pour objectif de présenter l'idée clé de la topologie et que, dès 1892, Poincaré publiait un résumé de son grand mémoire de 1895 *L'Analysis situs* (Voir plus bas la n.). On doit donc se demander pourquoi Poincaré a procédé à cet ajout.

On pourrait penser qu'il y a là une transition naturelle avec les questions traitées dans *L'espace* puisque Poincaré y aborde la question des dimensions de l'espace et qu'il y trouve l'occasion de donner, dans le dernier

$$A = B, \qquad B = C, \qquad A < C.$$

Voyons maintenant comment cette notion s'est généralisée et comment a pu en sortir le concept des continus à plusieurs dimensions.

Considérons **deux ensembles quelconques de sensations**[126]. Ou bien nous pourrons les discerner l'un de l'autre, ou bien nous ne le pourrons pas, de même que dans les expériences de Fechner un poids de 10 grammes pouvait se distinguer d'un poids de 12 grammes, mais pas d'un poids de 11 grammes. Je n'ai pas besoin d'autre chose pour construire le continu à plusieurs dimensions.

Appelons *élément* un de ces ensembles de sensations. Ce sera quelque chose d'analogue au *point* des mathématiciens ; ce ne sera pas tout à fait la même chose cependant. Nous ne pouvons pas dire que notre élément soit sans étendue, puisque nous ne savons [59] pas le distinguer des éléments voisins et qu'il est ainsi entouré d'une sorte de brouillard. Si l'on veut me permettre cette comparaison astronomique, nos « éléments » seraient comme des nébuleuses, tandis que les points mathématiques seraient comme des **étoiles**[127].

---

alinéa du chapitre, la définition de ce qu'il appelle « la géométrie » dans cette seconde partie de l'ouvrage. Mais, si tel était le cas, il aurait pu se contenter de quelques lignes, lesquelles, d'ailleurs, auraient mieux été placées dans cette seconde partie.

Il est plus vraisemblable que Poincaré ait voulu mettre en valeur la conception du continu proposée dès l'article de la RMM. Comme la différence entre géométrie qualitative (*Analysis situs*) et géométrie métrique est identique à celle entre continu pur et droite métrique (p.60, première phrase de la section *Le continu mathématique à plusieurs dimensions*) on voit que la continuité de la droite, telle que la conçoit Poincaré, repose sur un concept topologique. Conciliable avec, et même tributaire de, l'arithmétisation du continu cette conception, nous l'avons vu, s'écarte de la conception analytique du continu de « l'École de Berlin » et de Cantor. Or entre 1893 et 1902, Poincaré, ne serait-ce qu'à l'occasion des Congrès de Paris (des philosophes et des mathématiciens) de 1900, n'a pu que constater qu'il n'était pas suivi sur ce terrain. Bien au contraire, ce sont les idées allemandes (inventaire complet de la droite réelle) qui semblent s'imposer inexorablement. L'exemple le plus marquant, et c'est loin d'être le seul, en est donné par Hilbert qui, dans sa conférence au Congrès des mathématiciens, place au premier rang des problèmes mathématiques à résoudre celui de l'hypothèse du continu de Cantor. Poincaré pouvait difficilement se dispenser de réagir ; ceci d'autant qu'il avait des raisons supplémentaires et complémentaires de le faire. Il publie, en effet, la même année que SH, un compte-rendu des *Fondements de la géométrie* de Hilbert où l'un des reproches principaux qu'il adresse à l'ouvrage est le suivant. « Les axiomes de l'ordre sont présentés comme dépendant des axiomes projectifs, et ils n'auraient plus aucun sens si l'on n'admettait pas ces derniers, puisqu'on ne saurait ce que c'est que trois points en ligne droite. Et cependant il existe une géométrie particulière, purement qualitative, et qui est absolument indépendante de la Géométrie projective, qui ne suppose connues ni la notion de droite, ni celle de plan, mais seulement de lignes et de surface ; c'est ce qu'on appelle l'*Analysis situs*. Ne serait-il pas préférable de donner aux axiomes du deuxième groupe [ceux de l'ordre] une forme qui les affranchit de cette dépendance et qui les séparât complètement du premier groupe ? Il reste à savoir si cela serait possible, en conservant à ces axiomes leur caractère purement logique, c'est-à-dire en fermant la porte à toute intuition. » (O.P. XI, p.97). Les divergences de vues entre Poincaré et les mathématiciens allemands ne portent donc pas uniquement sur la nature du continu, mais également sur les fondements de la géométrie et pour celui-ci analyse et géométrie ont pour fondement commun l'*Analysis situs*.

Il eut été pédant et surtout inutile de le faire remarquer pour le continu à une dimension car, derechef, « Ce n'est pas assez, en effet, qu'une science soit légitime : il faut que l'utilité ne puisse en être contestée. » (*Analysis situs*, O.P. VI, p.193). Or, l'utilité de l'*Analysis situs* (des variétés à plusieurs dimensions) est incontestable. Poincaré en a tiré, entre autres, le meilleur parti pour l'étude qualitative des solutions des équations différentielles, ce qui, pour lui, comme nous le verrons dans la troisième partie, forme le cœur de la physique mathématique. De plus, l'*Analysis situs* rend les « services que nous demandons d'ordinaire aux figures de la géométrie », c'est-à-dire de suppléer à l'infirmité de notre esprit en recourant à nos sens, lorsque nous devons étudier des objets possédant plus de trois dimensions (Id., p.194). En somme tout autre chose que de s'amuser à compter les cardinaux transfinis.

[126] Plus haut, dans la section sur *Le continu physique*, Poincaré raisonnait sur des sensations isolées. Ici, il considère des ensembles de sensations.

[127] A la différence des points du continu mathématique, les points du continu physique empiètent les uns sur les autres, ils ne sont pas extérieurs les uns aux autres, à cause du caractère irrémédiablement indiscernable des sensations contiguës. Ces sensations contiguës que Poincaré appelle « éléments » seront les points de l'espace représentatif du ch.IV.

Cela posé, un système d'éléments formera un *continu*, si l'on peut passer d'un quelconque d'entre eux à un autre également quelconque, par une série d'éléments consécutifs enchaînés de telle sorte que chacun d'eux ne puisse se discerner du précédent. Cette *chaîne* est à la *ligne* du mathématicien ce qu'un *élément* isolé était au point.

Avant d'aller plus loin, il faut que j'explique ce que c'est qu'une ***coupure***[128]. Envisageons un continu C et enlevons-lui certains de ses éléments que pour un instant nous regarderons comme n'appartenant plus à ce continu. L'ensemble des éléments ainsi enlevés s'appellera une coupure. Il pourra se faire que grâce à cette coupure, C soit *subdivisé* en plusieurs continus distincts, l'ensemble des éléments restants cessant de former un continu unique.

Alors il y aura sur C deux éléments, A et B, que l'on devra regarder comme appartenant à deux continus distincts et on le reconnaîtra parce qu'il sera impossible de trouver une *chaîne* d'éléments consécutifs de C partant de A et allant en B, et chaque élément étant indiscernable du précédent, *à moins que l'un des éléments de cette chaîne ne soit indiscernable de l'un des éléments de la coupure et ne doive par suite être exclu*.

Il pourra se faire au contraire que la coupure établie soit insuffisante pour subdiviser le continu C. Pour classer les continus physiques, nous examinerons précisément quelles sont les coupures qu'il est nécessaire d'y faire pour les subdiviser.

Si on peut subdiviser un continu physique C par une coupure se réduisant à un nombre fini d'éléments tous discernables les uns des autres (et ne formant par conséquent ni un continu, ni plusieurs continus), nous dirons que C est un continu *à une dimension*.

[60] Si au contraire C ne peut être subdivisé que par des coupures qui soient elles-mêmes des continus, nous dirons que C a plusieurs dimensions. S'il suffit de coupures qui soient des continus à une dimension, nous dirons que C a deux dimensions, s'il suffit de coupures à deux dimensions, nous dirons que C a trois dimensions, et **ainsi de suite**.

Ainsi se trouve définie la notion du continu physique à plusieurs dimensions, grâce à ce fait très simple que deux ensembles de sensations peuvent être discernables ou **indiscernables**[129].

LE CONTINU MATHÉMATIQUE À PLUSIEURS DIMENSIONS. – Celle du continu mathématique à *r* dimensions en est sortie tout naturellement par un processus tout pareil à celui que nous avons étudié au début de ce chapitre. Un point d'un pareil continu nous apparaît, on le sait, comme défini par un système de *n* grandeurs distinctes que l'on appelle ses coordonnées.

Il n'est pas toujours nécessaire que ces grandeurs soient mesurables et il y a par exemple une branche de la géométrie où on fait abstraction de la mesure de ces grandeurs, où on se préoccupe seulement de savoir par exemple si sur une courbe ABC, le point B est entre les points A et C et non de savoir si l'arc AB est égal à l'arc BC ou s'il est deux fois plus grand. C'est ce qu'on appelle l'***Analysis Situs***.

C'est tout un corps de doctrine qui a attiré l'attention des plus grands géomètres et où l'on voit sortir les uns des autres une série de théorèmes remarquables. Ce qui distingue ces théorèmes de ceux de la géométrie ordinaire, c'est qu'ils sont purement qualitatifs et qu'ils resteraient vrais si les figures étaient copiées par un dessinateur malhabile qui en altérerait grossièrement les proportions et remplacerait les droites par un trait plus ou moins courbe.

C'est quand on a voulu introduire la mesure dans le continu que nous venons de définir que ce continu est devenu l'espace et que la géométrie est née. Mais je réserve cette étude pour la deuxième partie.

[128] Cette notion ne doit pas être confondue avec la notion de coupure de Dedekind. Voir l'encadré *Coupure et nombres irrationnels selon Dedekind*.

[129] Précédemment le continu physique, qui présentait un désaccord intolérable avec le principe de contradiction, était un obstacle à la connaissance rationnelle. Ici, il est investi d'un rôle tout différent, et positif, puisque l'indiscernabilité de ses points (des sensations) est à l'origine de la définition du concept de dimension.

POSTFACE AU CHAPITRE II

On traitera deux questions.

La première concerne la postérité, dans le reste de l'œuvre de Poincaré, des problèmes discutés dans ce chapitre. Les difficultés liées à la définition des nombres réels et à l'arithmétisation du continu ne font pas l'objet d'une reprise systématique dans les autres ouvrages « philosophiques » de Poincaré, comme le sont, par contre, les problèmes liés au statut de la géométrie, de la mécanique, de la logique. D'où l'importance de l'article de 1905 sur les principes du calcul infinitésimal, que nous commenterons dans la suite.

La deuxième concerne le contexte historique dans lequel ce chapitre à été rédigé. Une analyse exhaustive de ce contexte historique demanderait que l'on prenne en compte le débat qu'à la fin du XIX siècle anime mathématiciens et philosophes sur le concept de continu. Dans les limites de cette postface, nous nous contenterons de mentionner quelques faits essentiels, de notre point de vue, à la compréhension de l'intervention de Poincaré.

L'intervention de Poincaré dans la RMM en 1893, intervention qui constitue la source de ce chapitre, évoque trois sortes de problèmes liés à la compréhension du continu et de son rapport au nombre : philosophique, mathématique, physique. Poincaré mentionne explicitement les problèmes liés à la compréhension philosophique du continu, comme d'une unité qui précède toutes ses parties et dont aucun élément ultime n'est discernable. Concernant le problème mathématique, il cite les travaux de Tannery, de « l'école de Berlin » et de Dedekind, sur l'arithmétisation de l'analyse. Il relève explicitement la nécessité de comprendre l'origine du continu mathématique dans sa relation aux problèmes de la mesure des grandeurs. Dans le texte de 1893, il mentionne par ailleurs les travaux d'Helmholtz**,** en particulier *Zahlen und Messen*. Il conviendra d'examiner de près, au point de jonction de ces trois problèmes, les traits originaux d'une position qui n'est ni celle de Tannery ou de Dedekind, ni celle d'Helmholtz, ni celle de Bergson. Elle apparaît clairement si on rapproche le passage de l'introduction de SH concernant le cadre de la grandeur, du chapitre II de SH, de

sa source de 1893, et des deux textes d'hommage à Weierstrass et à Cournot [130]**.** On comprend alors que la stratégie de Poincaré consiste à relier *le problème mathématique* aux *problèmes physiques et philosophiques du continu*, tout en indiquant que des solutions spécifiques doivent être formulées pour chacun d'eux.

La solution du problème mathématique du « continu » aboutit à une « discrétisation » de la continuité, les paradoxes qui pourraient surgir de cette situation étant résolus grâce à l'infinité des termes intercalés. De ce point de vue, pour Poincaré, il n'y a pas de différence théorique entre la nature dense**,** mais incomplète**,** des rationnels et la « complétude » des réels. La distinction tient seulement au fait que l'introduction des rationnels et celle des réels répondent à des paradoxes de type différent: respectivement ceux de la sensation et ceux de l'imagination. La réponse mathématique aux problèmes de fondements de l'analyse résulte de son arithmétisation et est jugée entièrement satisfaisante pour le mathématicien, ainsi que Poincaré le déclare ouvertement dans l'écrit de 1905**[131].** C'est celle d'une construction sophistiquée et ouverte de tous les individus nécessaires pour satisfaire le besoin de l'entendement de donner un cadre cohérent aux données de l'expérience. L'entendement ne peut raisonner que sur des individus discrets et identifiables. La sensation et l'imagination ne nous donnent accès qu'à des points nébuleux qui empiètent les uns sur les autres et qui, pour cette raison, ne sont pas susceptibles de supporter des conditions d'identification. Notre capacité de concevoir la répétition indéfinie de l'acte d'intercalation comble ce hiatus.

La résolution mathématique du problème du continu ne lève pas toutefois les problèmes, physique et philosophique, qui sont signalés, mais traités de manière seulement implicite en 1893 et en 1902. L'article de 1905 reprend explicitement la question: « Est-ce à dire que l'étude des difficultés aujourd'hui vaincus, et des efforts qu'on a faits pour lutter contre elles, soit désormais dépourvue de tout intérêt ou n'ait plus qu'un intérêt historique ? Il s'en faut de beaucoup ; il semble qu'en s'arithmétisant, en s'idéalisant pour ainsi dire, la mathématique s'éloignait de la nature et le philosophe peut toujours se demander si les procédés du calcul différentiel et intégral, aujourd'hui complètement justifiés au point de vue logique, peuvent être légitimement appliquées à la nature. Le continu que nous offre la nature

[130] « L'œuvre mathématique de Weierstrass », Acta Mathematica n.22 1898, pp.1-18 et « Augustin Cournot et les principes du calcul infinitésimal » paru en 1905 dans la RMM et republié de façon posthume dans *Dernières pensées* pp. 300-324.

[131] « Ce sont les récents progrès de la théorie des fonctions qui ont fait disparaître les dernières difficultés [de compréhension des principes du calcul infinitésimal] ; le jour où on a défini le nombre incommensurable d'une façon satisfaisante, de façon à parfaire ce que l'on a appelé l'arithmétisation de l'analyse mathématique, les derniers voiles ont été levés, à tel point que nous avons aujourd'hui peine à comprendre ce qui a pu autrefois paraître obscur » DP , p. 301.

et qui est en quelque sorte une unité est-il semblable au continu mathématique, tel que l'ont défini les plus récents géomètres, et qui n'est plus qu'une multiplicité d'éléments, en nombre infini, mais extérieurs les uns aux autres et pour ainsi dire logiquement discrets ? » *DP*. p. 302

Le problème physique du continu concerne la réelle adaptation de ce cadre mathématique aux données de l'expérience. Comment sommes-nous sûrs de ne pas tout fausser ? Ou que l'expérience ne nous amènera pas à abandonner ce cadre conventionnel ? « Si l'on admet que les phénomènes naturels peuvent être représentés par des nombres et par conséquent par des fonctions mathématiques, les règles du calcul infinitésimal pourront être appliquées à ces fonctions et cela en toute rigueur […] mais il reste précisément à savoir s'il existera une fonction mathématique susceptible de représenter les phénomènes avec une précision indéfinie» (*DP* p. 302). En effet**,** et c'est tout le point de l'article de 1893, et du texte de SH, l'observation nous donne, non pas un nombre, mais une sensation qui n'est justement pas exprimable elle-même par un nombre, étant indiscernable d'autres sensations trop voisines (*DP*, *Ibidem*). Seulement dit Poincaré, nous admettons que cette imprécision n'appartient qu'aux sensations elles-mêmes, que « leur cause inconnue est susceptible d'être exactement représentée par un nombre » (Ibidem p. 303). Cette croyance, « ce postulat » (p.304) « sur lequel repose toute la science » (Ibidem p. 306**),** est soutenu par deux faits complémentaires**:** d'une part le constat de notre capacité à *répéter* nos expériences en diminuant la marge d'incertitude grâce à des instruments de plus en plus sophistiqués; d'autre part le fait que l'imprécision même de nos sens, grâce auxquels nous nous servons de ces instruments, nous garantit que cette imprécision ne sera jamais complètement éliminée : « Quelque multipliées et quelque précises que soient nos expériences, elles seront toujours étanchées de certaines erreurs qu'on pourra réduire, mais non pas annuler. Il y aura donc toujours moyen de représenter les observations, quelles qu'elles soient, par des fonctions qui s'en écarteront moins que ne comporte l'incertitude des mesures et qui jouiront de la continuité, de la propriété d'avoir des dérivées, de toutes les propriétés des fonctions analytiques. Une fonction quelconque étant donnée, on peut toujours trouver une fonction analytique[132] qui en diffère aussi peu que l'on veut. Ainsi le physicien peut toujours appliquer les règles du calcul infinitésimal sans craindre un démenti de l'expérience ». *DP***,** p.307.

[132] Dans « L'œuvre mathématique de Weierstrass » Poincaré affirme à propos des fonctions analytiques « Aujourd'hui […] on distingue deux domaines, l'un sans limites, l'autre plus restreint, mais mieux cultivé. Le premier est celui de la fonction en général, le second celui de la fonction analytique. Dans le premier, toutes les fantaisies sont permises et à chaque instant nos habitudes sont heurtées et nos associations d'idées rompues ; nous y apprenons ainsi à nous défier de certains raisonnements par à peu près qui paraissaient convaincants à nos pères ; à nous abstenir de telles conclusions qui leur auraient paru légitimes. Dans le second, au contraire, ces

La résolution du problème physique du continu ouvre à son tour le problème philosophique de la nature de *ces causes inconnues* susceptibles d'être mesurées par des nombres : « C'est assez pour le physicien » ajoute Poincaré à la fin du passage cité plus haut dans le texte « ce n'est pas assez pour le philosophe […]. » *Ibidem* p. 307. La question n'est plus tant ici d'ordre épistémologique, que d'ordre ontologique. Quelle conception pouvons-nous nous faire du rapport entre nous et le monde réel, au-delà de la forme mathématique que nous avons imposée à nos expériences ? Quelle explication rationnelle peut donner satisfaction à l'esprit face à la conception de la loi impliquée par la résolution du problème physique du continu ? Tel est le problème philosophique du continu selon Poincaré. L'article de 1905 invoque à ce propos la conception des infiniment petits de Cournot, en ayant soin de rapporter sa distinction entre ordre rationnel et ordre logique. Le recours aux infinitésimaux ne peut pas résoudre les problèmes « logiques » des fondements de l'analyse, mais il peut rendre satisfaction à l'esprit dans sa recherche d'explication. Poincaré livre sa propre conception à la fin de l'article. Les infiniment petits, qui sont la véritable raison des choses, ne sont pas des atomes, ni des infinis en acte (comme le soutient Cournot**),** mais de purs et perpétuels devenirs, « comme les infiniment petits leibniziens » (p.318). « Pour nous, dit Poincaré, qui ne croyons pas à la possibilité de concevoir un monde extérieur indépendamment du sujet pensant, ce serait la solution la plus simple et la plus naturelle. La raison première fuirait toujours devant l'esprit qui la cherche sans jamais pouvoir l'atteindre, et ce serait l'infiniment petit leibnizien qui symboliserait mieux cette fuite éternelle », Ibidem p. 318[133].

Les problèmes mathématique, physique et philosophique, du continu sont intimement reliés. Toutefois leur solution ne doit pas être recherchée dans une source unique. L'explication rationnelle qui convient à la raison (explication qui résout le problème philosophique) ne peut pas être utilisée par l'entendement dans son besoin de rigueur (problème mathématique), ni être appliquée à la sensation caractérisée par l'imprécision et la

conclusions sont permises ; mais *nous savons pourquoi* ; il a suffi de placer au début une bonne définition ; et on a vu reparaître une rigoureuse logique. » p. 5

[133] Il est intéressant de rapprocher ce passage de celui de la *Théorie générale des fonctions* (section 28, p. 81) de Du Bois-Reymond discutant des différentes options que l'Idéaliste a à sa disposition pour rendre compte du concept de limite. Après avoir mentionné « les analystes du siècle dernier » qui ont pris tout à fait au sérieux le concept d'infiniment petit en tant que quantité réelle extérieure au domaine commun des quantité, Du Bois-Reymond affirme « Plus tard des analystes, qui représentent une opinion intermédiaire, considèrent l'infiniment petit non pas sans doute comme une quantité ordinaire, mais au contraire comme une quantité qui s'écoule, en mouvement vers le zéro, saisie sur le point de s'évanouir, par conséquent comme quelque chose que nous avons appelé illimité en petitesse. »

grossièreté de ses données (problème physique). Néanmoins, l'oubli de la liaison profonde qui caractérise ces trois aspects du problème, autant que la négligence de l'interdépendance entre ces trois solutions, ont des conséquences fâcheuses sur la pratique de la science dans son ensemble.

Jusqu'à quel point cette façon de poser le problème du continu et de le résoudre est-elle nouvelle en 1893 ?

Il convient pour répondre à cette question distinguer le débat allemand du contexte français.

Le développement de la physique et de l'analyse au XVIII et XIX siècle conduit à repenser les notions de continu et de continuité relativement à au moins trois aspects. Le premier vise la question plus proprement mathématique de l'éclaircissement des principes de l'analyse et de la définition des nombres réels ; le second concerne plus le débat philosophique (ontologique et épistémologique) sur espace, temps, infini, continuité et nombre ; le troisième porte sur le statut à la fois mathématique, physique et philosophique des concepts de quantité et de grandeur mesurable.

La distinction de ces trois aspects au regard de ce qu'a été la réalité du débat en Allemagne, plutôt que du fait ou du droit, relève d'une illusion rétrospective tout à fait artificielle.

D'une part, on remarquera que, contrairement à la situation française, la plupart des traités allemands de cette époque concernant la question des fondements des mathématiques sont écrits à l'occasion de problèmes qui relèvent directement de recherches d'analyse. C'est en traitant la théorie des fonctions elliptiques, la théorie des intégrales des équations aux différences partielles et les séries de Fourier approchant des fonctions avec un nombre quelconque de points de discontinuité que respectivement Weierstrass, Du Bois-Reymond et Cantor (pour ne citer que quelques exemples) approchent le problème des fondements. Ce fait a comme conséquence directe un très grand engagement théorique et, donc, philosophique des mathématiciens qui ont participé au débat sur ce problème.

D'autre part, les divisions théoriques engendrées par ce débat tiennent à la profondeur et à l'ampleur des problèmes qui, depuis la naissance de l'analyse, s'étaient accumulés autour du concept de fonction, sous couvert d'un développement exceptionnel et foisonnant de la discipline.

La remise en question théorique au tournant du XIX aboutira à la notion moderne de fonction, définie comme pure correspondance entre un domaine d'arguments et un co-domaine de valeurs, et où toute question de représentation de la loi de correspondance ou de calculabilité de ses valeurs est évacuée. Elle aboutira aussi à la constitution d'une hiérarchie de classes de fonctions en relation à leurs propriétés. D'un côté en effet, la découverte des fonctions pathologiques par Riemann et Weierstrass conduira à distinguer la classe des fonctions dérivables à la fois de la classe des fonctions continues et de la classe des fonctions intégrables. D'un autre côté, la question des rapports entre analyse et physique mathématique conduira à délimiter le domaine privilégié des fonctions analytiques comme sous-classe des fonctions dérivables, dans laquelle calculabilité et représentabilité se marient, pour le bonheur des applications physiques.

Derrière cette dernière distinction, il y a tout le débat qui est au centre de la réflexion de Poincaré et de sa reconstruction historique et théorique des problèmes des fondements.

Le langage de l'analyse au début du XIX siècle pouvait encore être considéré comme fondé à la fois par l'intuition géométrique et par l'intuition arithmétique. Une fonction étant, au sens eulérien du terme, une composition finie ou infinie d'opérations, la clarté de sa définition était garantie par leur origine arithmétique (addition, multiplication et exponentiation et leurs inverses) ou leur représentabilité géométrique (différentiation, intégration, sinus, cosinus, tangent etc.).

Même lorsque le concept de fonction s'élargit jusqu'à englober des fonctions quelconques, indépendamment de leur expression algébrique ou mathématique déterminée, la représentabilité par une courbe est toujours le soutien indispensable pour rendre féconde l'étude de cette correspondance entre points d'une variété.[134]

L'existence des fonctions pathologiques et la nature totalement irrégulière des fonctions pouvant être suggérées par la physique portait à penser que les deux sources traditionnelles du langage de l'analyse devaient être soumises à critique. Ce n'est donc pas un hasard si la question des rapports entre nombres et grandeurs**,** et par conséquent de la distinction entre mathématiques pures et appliquées**,** divise les deux premières grandes tendance du débat sur les fondements : les tenants de l'arithmétisation de l'analyse (Weierstrass, Kronecker, Dedekind ou Cantor)[135] de ceux qu**i,** comme Du Bois-Reymond et

[134] C'est bien là la conception de Riemann à laquelle se réfère Poincaré, et qui, en France, sera soutenue par Cournot. Voir Préface p. XI et p.3 de son *Traité élémentaire de la théorie des fonctions et du calcul infinitésimal*.

[135] Le débat entre les tenants de l'arithmétisation, on le sait, ne relève pas moins de contrastes entre ceux qui gardent l'analyse de la grandeur géométrique comme le paradigme pouvant nous dévoiler l'essence de la

Helmholtz pensent que la résolution des problèmes des fondements passe par une redéfinition rigoureuse des notions de quantité et de grandeur, plus particulièrement de grandeur géométrique. L'arithmétisation exclut la source géométrique, en mettant l'accent sur la nécessité de la rigueur. Les tentatives d'une définition rigoureuse de la notion de grandeur géométrique visent, en revanche, à garantir dans les fondements même de l'analyse le rapport entre mathématiques pures et mécanique.[136]

Cette double perspective (arithmétisation d'une part et théorie rigoureuse de la grandeur d'autre part) ouvre à son tour le problème des « facultés » impliquées par l'usage des procédés de l'analyse et la question ontologique du statut des entités postulées par l'utilisation dans le langage des notions de limite, de fonction, de variable et de séries infinies. De là, c'est toute la question des rapports entre langage, connaissance et réalité qui doit être repensée.

Enfin, quant à la capacité des philosophes de langue allemande de l'époque à se saisir de ces questions ou à apporter leur contribution à ce débat, ce n'est pas ici le lieu d'en tenter une évaluation. On remarquera seulement que la distinction entre mathématiciens et philosophes est du moins problématique lorsqu'on la rapporte à des figures telles que celles de Bolzano, Helmholtz et de Frege, par exemple, et que l'impact des travaux de philosophes ou d'historiens de la philosophie comme Eduard Zeller ou Hermann Cohen est loin de pouvoir être restreint aux seuls philosophes.[137]

Le panorama français de la deuxième moitié du XIX^{e} siècle invite par contre à un diagnostic beaucoup plus nuancé.

On remarque d'abord que les premiers travaux sur les fondements de l'analyse et sur la notion de nombre réel sont caractérisés par un souci essentiellement didactique et pratique, qui ne semble pas guidé par des réflexions ou des choix théoriques innovateurs.

Tel est le cas des textes de Joseph Bertrand *Traité d'Arithmétique* (1849 qui connaît 12 éditions) et *Traité de calcul différentiel et intégral* (Tome 1, *Calcul différentiel* 1864 et Tome 2 *Calcul intégral* 1870). Dans la longue introduction historique à son premier texte, Bertrand

---

continuité (Dedekind) de ceux qui fondent sans compromis l'analyse sur le concept de nombre entier (Weierstrass et Kronecker), de ceux qui cherchent à fonder l'analyse sur le concept d'ensemble par une explicitation rigoureuse de la nature de l'infini (Cantor).

[136] C'est d'ailleurs sur ce sujet**,** et par une référence explicite à la nécessité de réactualiser la lettre des doctrines kantiennes sur la nature *a priori* des intuitions de l'espace et du temps**,** que débute *Zahlen und Messen,* l'ouvrage de Helmholtz cité par Poincaré dans le texte de 1893.

[137] L'article d'Helmholtz paraît dans un volume d'hommage à Zeller en 1887. Il n'est pas inutile de rappeler qu'Emile Boutroux a suivi les cours de Zeller à l'université de Heidelberg et qu'il a ensuite traduit en français son œuvre majeure**;** *La philosophie des Grecs*.

considère que la question de la rigueur en analyse a été réglée par le Marquis de l'Hôpital et fait usage sans aucune réticence du langage des accroissements infinitésimaux. Dans le deuxième texte, Bertrand utilise la définition d'Euclide V pour la définition des nombres réels, sans s'interroger sur sa véritable étendue.

Tel est le cas aussi des travaux de Charles Méray, déjà mentionnés dans la postface au ch. 1 (« Remarques sur la nature des quantités définies par la condition de servir de limites à des variables données »**,** paru dans la *Revue des sociétés savantes* en 1869, et *Nouveau Précis d'analyse infinitésimale* 1872). Si Méray revendique la nécessité de fonder l'analyse sur des bases rigoureuses ce n'est que pour réactualiser la condamnation **l**agrangienne de l'intuition et pour remettre l'algèbre au centre des mathématiques. Sa définition des « quantités incommensurables » comme « limites idéales » des séries convergentes s'accompagne de l'affirmation que ces limites n'existent pas réellement ou sont seulement fictives lorsqu'elles ne sont pas rationnelles.

Tel est enfin le cas de l'ouvrage de Jules Tannery (*Théorie des fonctions d'une variable* 1886) cité par Poincaré et objet de remarques élogieuses de la part de Couturat et de Borel[138]. Tannery affirme explicitement**,** dans l'introduction de son ouvrage**,** avoir fait un travail « d'arrangement et de réduction », destiné essentiellement à des fins pédagogiques. Sa définition des rationnels n'est que le développement d'«une indication donnée par M. Joseph Bertrand dans son excellent *Traité d'arithmétique*, qui consiste à définir un nombre irrationnel en disant quels sont tous les nombres rationnels qui sont plus petits et tous ceux qui sont plus grands que lui ».

Quant à la question de la « métaphysique du calcul » qui avait agité Lagrange, d'Al**e**mbert ou Carnot, elle ne semble survivre que dans la réflexion d'Augustin Cournot. Dans trois textes parus à dix ans de distance l'un de l'autre (*Traité de la théorie des fonctions et du calcul infinitésimal* 1841, *Essais sur les fondements de nos connaissances et sur les caractères de la critique philosophique* 1851, *Traité de l'enchaînement des idées fondamentales dans la science et dans l'histoire* 1861), ce dernier développe une conception des rapports entre infinité et grandeurs inspirée d'une vision dynamique du changement fortement orientée par Leibniz. A partir d'elle, il élabore une théorie originale des infinitésimaux qu'Hermann Cohen citera en terme élogieux dans son *Le principe de la méthode infinitésimale et son histoire*.

[138] L.Couturat *De l'infini mathématique* page 1-3**;** E. Borel « Préface » de *Science et religion,* qui recueille les écrits philosophiques de Tannery.

Le tournant du siècle semble être marqué par un changement de cap important. Le livre d'Emile Borel « Leçons sur la théorie des fonctions », publié en 1898, résume avec précision le travail de Cantor et en montre l'importance pour le développement même de l'analyse. Le changement n'a pas dû aller de soi, si on en juge par ce que dit Borel dans l'introduction de la quatrième édition, p.10: « Lorsque la première édition de ce Livre a paru, plusieurs de mes maîtres m'ont considéré comme un dangereux révolutionnaire et j'ai spécialement remercié Jules Tannery de m'avoir autorisé à professer ces leçons à l'Ecole Normale ».

Du point de vue de la philosophie, le XIX^{e} siècle en France est « le siècle des cloisons étanches »[139] avec la science. Une discussion soutenue sur les problèmes de la continuité de l'espace et du temps a lieu dans le dernier quart du siècle, mais les questions débattues portent essentiellement sur la possibilité et la définition de la continuité d'un point de vue métaphysique, et sur l'analyse logique des paradoxes zénoniens liés à l'infini et à la continuité, d'une manière tout à fait extérieure au travail des mathématiciens de l'époque.

Le débat philosophique français sur ces questions est monopolisé d'une part par les tenants du courant finitiste issu de la philosophie néo-criticiste de Renouvier (déjà mentionné dans la postface au chapitre l), d'autre part par le spiritualisme post-kantien de Jules Lachelier auquel il convient de rattacher la réflexion de Bergson. Ces deux tendances, réactions à l'éclectisme dogmatique cousinien, étaient indéniablement les plus ouvertes à une réflexion sur la science, les moins enclines à une attitude, à la fois « hautaine et craintive », prétendant ériger la philosophie en une doctrine achevée et se suffisant à elle même.[140] Malgré cette incontestable ouverture, le néocriticisme et le post-kantisme français de l'époque partent tous les deux du constat, paradoxal dans cette fin du XIXe siècle, que la science demande une conception déterministe et mécaniste du monde. D'où un débat qui se trouve biaisé dès le départ par l'opposition entre déterminisme scientifique et liberté morale, telle qu'elle avait été posée par Charles Renouvier. On en a deux exemples emblématiques avec *Infini et quantité* de F. Evellin paru en 1880 et *Etudes sur l'espace et le temps* de G. Lechalas.

[139] « Jules Lachelier » par E. Boutroux, RMM, 1, 1921, p. 19.

[140] Voir à ce propos le diagnostic de Boutroux dans l'article cité à la note 1, p. 3-4, ainsi que le jugement de Bréhier dans le troisième volume de son *Histoire de la philosophie*: « Cousin est orateur plus que philosophe, et sa pensée, comme on l'a remarqué, est le fruit naturel de cette éducation purement formelle et humaniste, à peu près étrangère à la culture scientifique, que l'on donnait dans les lycées impériaux ». p. 578. .

Enfin, dernier trait du débat français, il n'y a pas de connexion entre le travail de conceptualisation des principes de l'analyse et les débats théoriques sur les problèmes de la mesure et des grandeurs mesurables. Lorsqu'en 1875, Jules Tannery ouvre la discussion avec Théodule Ribot sur la loi de Fechner-Weber et ces applications à la psychophysiologie dans les pages de *La revue scientifique de la France et de l'étranger*, il semble ignorer totalement le débat allemand.[141] La traduction par Gaston Milhaud en 1887 de l'ouvrage de Du Bois Reymond**,** dans lequel est menée une discussion critique sur la loi de Fechner-Weber**,** ne semble pas avoir par la suite retenu les esprits.

Du côté français, Poincaré représente une tentative originale de médiation avec le débat allemand. Il sait, par Hermite, l'importance pour l'analyse des travaux de Cantor et de Weierstrass. D'une longue méditation du développement du concept moderne de fonction analytique élaboré par « Gauss, Cauchy, Riemann et Weierstrass »[142], il sort convaincu de la nécessité de ne pas disjoindre l'approche intuitive de Riemann, basé sur l'usage des images géométriques (« avant tout une méthode de la découverte »[143]) de l'approche rigoureuse de Weierstrass**,** fondée sur la démonstration.

A cause de sa conviction de la fécondité des images géométriques, Poincaré est extrêmement sensible aux entreprises de Helmholtz et de Du Bois-Reymond cherchant à éviter de couper le concept de grandeur géométrique de ses bases dans l'analyse. Il reste cependant sceptique, étant donné le caractère paradoxal, inexact et inaccompli, de la perception [144], sur la possibilité de fonder l'analyse sur les aspects quantitatifs de cette dernière. D'où l'originalité de sa conception « tripartite » du problème moderne du continu.

---

[141] L'*Essai sur les données immédiates de la conscience*, d'Henri Bergson, paru en 1888, montre bien l'attention que les philosophes français de l'époque accordent à ces disciplines naissantes que sont la psychophysiologie et la psychologie expérimentale, qui renouvellent la discussion entre déterminisme et libre-arbitre propre au spiritualisme français. Bergson connaît les travaux de Wundt, d'Helmholtz, et de Fechner et en fait une critique originale. Mais les questions sont analysées de manière totalement indépendante du débat mathématique. Dans le temps même où, en Allemagne, les querelles faisaient rage à propos de la définition de la notion de nombre, Bergson affirme sans la moindre hésitation qu'un nombre est une collection d'unités (p.56) et que l'ordre croissant des nombres naturels exprime le fait « qu'il existe entre eux des rapports de contenant à contenu » p.2.

[142] « L'œuvre mathématique de Weierstrass » p. 6. Constatant que Gauss, n'ayant rien publié de son vivant, n'a pu exercer aucune influence quant à la théorie des fonctions analytiques, Poincaré remarque : « La théorie de Cauchy contenait en germe à la fois la conception géométrique de Riemann et la conception arithmétique de Weierstrass, et il est aisé de comprendre comment elle pouvait, en se développant dans deux sens différents, donner naissance à l'une et à l'autre » (p. 6-7). Un peu plus loin il ajoute : « Entre ces trois conceptions [celle de Cauchy, de Riemann et de Weierstrass] gardons-nous de choisir. Avec l'instrument de Riemann, l'intuition verra d'un seul coup d'œil l'aspect général des choses ; comme un voyageur qui examine du haut d'une montagne la topographie de la plaine qu'il va visiter et apprendre de la sorte à s'y orienter. Avec l'instrument de Weierstrass, l'analyse éclairera successivement tous les recoins et y fera pénétrer l'absolue clarté ». Ibidem p. 7.

[143] Ibidem p. 7.

[144] Ibidem page 5.

L'ARITHMETIQUE ET LES NOMBRES REELS SELON KRONECKER

Pour Kronecker (1823-1891) en oubliant le jugement de Gauss : « La mathématique est la reine des sciences et l'arithmétique la reine de la mathématique. Celle-ci condescend de temps en temps à rendre service à l'astronomie et aux autres sciences de la nature, mais le premier rang lui revient en toutes circonstances »[145], on a fait perdre insensiblement au concept de nombre, sous l'effet de ses applications à la géométrie et à la mécanique, sa véritable nature. C'est, en effet, pour répondre aux besoins de ces deux sciences que l'on a intégré les grandeurs irrationnelles et les grandeurs continues à l'algèbre et à l'analyse. L'effet de cette intégration a donné lieu à un état confus de la mathématique puisqu'il viole les distinctions de principe formulées par Gauss : l'arithmétique a pour objet unique le nombre car celui-ci n'est que le produit de notre esprit, tandis que l'espace et le temps, dont traite la géométrie et la mécanique, ont une réalité en dehors de notre esprit, lequel ne peut donc leur dicter ses lois. Ces lois régissant un concept différent de celui de nombre, savoir le concept de *grandeur*.

La tâche principale que s'impose Kronecker est alors de restaurer, ou d'instaurer, une science reposant sur le seul « concept de nombre pris dans son sens le plus étroit », c'est-à-dire sur le concept de nombre entier positif. L'arithmétique ainsi conçue englobe l'algèbre et l'analyse car « on parviendra un jour à "arithmétiser" le contenu de ces disciplines mathématiques ».

Le finitisme strict de Kronecker lui permet de définir facilement le concept de nombre (cardinal) à partir du « point de départ naturel » que sont les nombres ordinaux. Soit une collection donnée d'objets discernables. Les nombres ordinaux permettent d'associer univoquement une désignation à ces individus : *le premier*, *le deuxième*,..., *le nième*. La dernière désignation employée dans cette opération de comptage correspond au nombre d'ordinaux utilisés et peut être prise comme la quantité d'objet de la collection et sera le nombre cardinal *n* des objets de la collection. Contrairement au nombre ordinal, le nombre cardinal est un invariant de la collection. En effet, à l'occasion d'un nouveau comptage, on peut désigner par *le premier* un objet distinct de celui que désignait cet ordinal lors du premier comptage (p.ex. *le troisième*). De sorte que les comptages induisent des ordres qui ne sont pas identiques. Par contre, tout comptage se terminant par le *nième*, le cardinal de la collection sera toujours identique. A l'aide de cette caractérisation des cardinaux, Kronecker établit les règles d'addition et de multiplication des nombres (cardinaux), c'est-à-dire leur associativité et leur commutativité.

Seuls les nombres entiers positifs ayant droit de cité, comment sont introduits les autres nombres ? Ici, Kronecker exploite encore une idée de Gauss, celle de congruence. Les nombres négatifs sont évités en remplaçant -1 par une indéterminée x et l'égalité par le signe de congruence de Gauss modulo (x+1). L'égalité

$$7-9 = 3-5$$

devient alors

$$7+9x \equiv 3+5x \ (\text{mod}.x+1).$$[146]

Cette relation permet de retrouver immédiatement l'égalité où x n'est plus une indéterminée mais une grandeur. Un procédé identique s'applique aux nombres rationnels, cas pour lequel Kronecker invoque, à l'appui de ses conceptions, la position de J.Tannery : « une

[145] Nous utilisons la traduction française de « Über den Zahlbegriff », *Journal für die reine und angewandte Mathemati*k, 1887, vol.**101**, pp.337-55, donnée par J.Boniface, Les constructions des nombres réels, Ellipses, 2002, pp.152-68.

[146] Nous conservons les notations de Kronecker.

fraction ne peut pas être regardée comme la réunion de parties égales de l'unité ;... une fraction est un ensemble de deux nombres entiers rangés dans un certain ordre. »

Le cas des nombres algébriques relève d'un traitement plus élaboré qu'on ne peut exposer ici. Notons cependant l'intention de Kronecker de donner une « analyse plus précise du concept de racines réelles des équations algébriques ». La « prétendue existence » de ces racines « repose entièrement sur la possibilité de les isoler ». C'est ce que permet l'arithmétique en déterminant des intervalles suffisamment petits pour que chacun d'entre eux ne contienne qu'une seule de ces racines. Ceci toujours sans qu'il ne soit besoin de connaître la valeur de la racine, laquelle n'est pas donnée par un nombre, mais mesurée par une grandeur. L'essentiel étant que la détermination des intervalles contenant chacune des racines ne dépende que de l'arithmétique (de fonctions entières à coefficients entiers) et que les racines ainsi déterminées satisfassent les relations « être plus petit que » et « être plus grand que », comme il est légitime de l'attendre lorsqu'on veut comparer des grandeurs mesurées par des irrationnelles.

On voit que ce programme d'arithmétisation de l'analyse, bien qu'il réponde, comme le ch.II de SH, aux difficultés de la mesure de grandeurs variant continûment, est animé par des intentions toute différente de celles de Poincaré. Tandis que pour ce dernier les mathématiques sont au service de ses deux voisines, la physique et la philosophie, pour Kronecker, il en va tout autrement. Si les mathématiques sont, à la rigueur, redevables de la philosophie, puisque « c'est sur le plan d'un travail philosophique préparatoire... qu'il faut développer les concepts de nombre, d'espace et de temps », elles n'ont pas à se soucier des difficultés qu'elles rencontrent lorsqu'elles « condescendent à rendre service aux sciences de la nature ». L'arithmétique de Kronecker ne reposant sur rien d'autre que notre faculté de pouvoir compter un nombre d'objets reconnus comme discernables, elle est résolument à l'abri des paradoxes propres à la mesure des grandeurs. Mais peut-elle tenir ses promesses, c'est-à-dire « arithmétiser » le contenu de l'analyse ? Sur ce point, le jugement de Poincaré est sans appel : « Kronecker a fait bien des découvertes ; mais s'il y est arrivé, c'est en oubliant qu'il était philosophe et en délaissant lui-même ses principes qui étaient d'avance condamnés à la stérilité »[147]. En d'autres termes, la méthode de Kronecker ne permet de parvenir ni au niveau de la démonstration, ni même à celui de la construction.[148]

[147]" L'œuvre mathématique de Weierstrass", *Acta mathematica*, **22**,1898, 17.

[148] Voir la présentation et les notes du chapitre I.

PAUL DU BOIS-REYMOND ET LE CALCUL INFINITAIRE

Professeur de mathématiques à l'Université de Freiburg in Baden, et frère d'Emil du Bois-Reymond le physiologiste, Paul du Bois-Reymond acquit une partie de sa notoriété de mathématicien grâce à la présentation et à la défense d'un système de nombres infiniment petits et infiniment grands, qu'il appelait « calcul infinitaire ». Avec celui, d'inspiration bien différente, de Giuseppe Veronese, évoqué par Poincaré dans le chapitre III comme exemple de géométrie non archimédienne, c'est un des deux systèmes qui, en cette période – disons de 1870 à 1914 – retint l'attention, souvent critique et parfois négative (en premier lieu Cantor lui-même), des mathématiciens.

Les publications les plus importantes de P. du Bois-Reymond à ce sujet vont de 1870-1, date de son premier mémoire (*Sur la grandeur relative des infinis des fonctions*, Annali di matematica pura ed applicata, 4, series IIa, pp. 338-353) à 1882, date de parution de son ouvrage *Die allgemeine Functiontheorie* (Erster Teil, mais il n'y aura jamais de deuxième partie) – qui donne une sorte de vue d'ensemble, d'un point de vue à la fois mathématique et philosophique[149], de la question, et dont G. Milhaud et A. Girot devaient donner une traduction française cinq ans après (1887, *Théorie générale des fonctions*, Nice). Ce dernier fait suffit à attester l'ampleur de la diffusion et du succès de la théorie de du Bois-Reymond, et à expliquer la référence de Poincaré. E. Borel, dont les liens avec Poincaré sont connus, avait incorporé les principaux résultats à ses *Leçons sur la théorie des fonctions* (1898 pour la 1e éd., il y en aura de nombreuses autres), un ouvrage qui avait lui-même connu un vif succès et largement contribué à diffuser les concepts de la théorie cantorienne des ensembles[150].

On ne peut donner ici qu'une idée assez sommaire du « calcul infinitaire ». Pour plus de détails, le lecteur devra se reporter aux mémoires originaux et aux études spécialisées[151].

C'est dans un mémoire de 1875 (*Über asymptotische Werthe, infinitäre Approximationen und infinitäre Auflösung der Gleichungen*, Mathematische Annalen, 8, pp. 360-414) que du Bois-Reymond introduit la référence explicite à des nombres actuellement infinis. Jusque-là, exploitant l'analogie avec les suites de nombres réels, il s'était borné à étudier, d'un point de vue assez général, le comportement de suites continues de fonctions ordonnées selon les limites, éventuellement infinies, de leurs quotients. Comparant la croissance de deux fonctions par considération des limites de leurs quotients, du Bois-Reymond s'autorisait à parler d'une fonction f « ayant une infinité plus grande » qu'une autre fonction g. En 1875, le domaine où prennent sens ces quantités qui expriment les diverses infinités des fonctions est explicitement posé et nommé « infinitaire ».

L'infinité de la fonction f est considérée comme supérieure, ou égale, à celle de g selon que le quotient $\square$ est infini ou égal à un nombre n fini, c'est-à-dire selon que $\square$ ou = $\square$, n étant un nombre réel fini, et on notera : $g(x) \square f(x)$ dans le premier cas, $f(x) \square g(x)$ dans le second. Par exemple, e^x a un infini plus grand que la fonction x puisque $\square$, et logx a un infini plus petit que x puisque $\square$, donc $\log x \square x \square e^x$, ou encore $x \square x^p$ quel que soit le nombre réel p>1. En revanche, on a $cx^r \square x^r$ quels que soient les réels c et r. Il existe des fonctions qui croissent plus lentement que toute combinaison de logarithmes, et des fonctions qui croissent plus rapidement que toute combinaison d'exponentielles. Du Bois-Reymond peut établir à ce propos un théorème général :

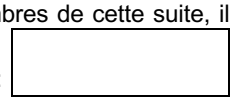
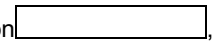
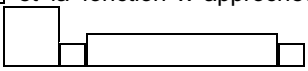
Étant donnée une échelle de croissance de fonctions quelconques [soit une famille infinie de fonctions $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$, telle que, pour tout r, on ait $\square$, il existe des fonctions qui croissent ou décroissent plus lentement ou plus rapidement que toute fonction de l'échelle donnée [on pourra déterminer une fonction g qui devient infinie avec x, mais plus lentement que toute fonction de la famille λ_n].

---

149 L'ouvrage est sous-titré: « métaphysique et théorie des concepts mathématiques fondamentaux: quantité, limite, argument et fonction », et comporte en guise de conclusion des « considérations finales sur la métaphysique des concepts fondamentaux. »

150 Borel publiera aussi sur ce thème un ouvrage entier consacré à la croissance des fonctions (*Leçons sur la théorie de la croissance*, Paris, 1910). Du Bois-Reymond avait trouvé aussi un écho en Angleterre, où Hardy, qui professait une vive estime pour le mathématicien allemand, s'était chargé de faire connaître ses travaux, tout en consacrant lui-même plusieurs mémoires à la théorie des « ordres d'infinité ».

151 Pour une bibliographie et une étude critique, voir Gordon Fisher, *The Infinite and Infinitesimal Quantities of du Bois-Reymond and their reception*, Archive for History of Exact Sciences, 1981, vol. 24, n°2, pp. 101-163).

Le mémoire de 1877 (*Über die Paradoxen des Infinitärcalcüls*, Mathematsche Annalen, **11**, pp. 149-167), approfondit l'analogie avec les nombres ordinaires, en précisant les différences. Du Bois-Reymond montre que, si on peut approcher un nombre quelconque, soit ½, de plusieurs façons différentes par une suite z_1, z_2, …, de telle sorte que tout nombre, aussi proche soit-il de ½, se trouve entre deux nombres de cette suite, il n'en est pas de même avec les fonctions associées aux infinis. Ainsi, si on forme la suite :  les exposants p/p+1s'approchent de 1, mais on voit assez facilement qu'il existe des fonctions dont les infinis tombent entre tous les infinis de la suite  et la fonction x approchée par cette même suite : p ex la fonction , puisqu'on a toujours :  x. Cette dernière s'approche donc plus de x que toute fonction de la suite 

« Ce fait, commente du Bois-Reymond, que l'on ne peut concevoir de suite de fonctions permettant de s'approcher sans limite d'une infinité donnée a certainement quelque chose d'étrange pour nous. Car il serait … tout à fait contraire à l'intuition de supposer qu'il y a nécessairement une lacune, par exemple autour de la droite y=x. On peut toujours remplir cette lacune dans nos pensées en accompagnant la droite y=x jusqu'à l'infini. » (DBR1877, p. 157 ; cité par G. Fisher, op. cit. note 3, p. 109). La conception et la formulation sont assez proches de celles de Poincaré dans le chapitre II, engendrant le continu mathématique par intercalations successives à partir des lacunes du continu physique, grâce à le « puissance créatrice de l'esprit »..

Opposant, dans son ouvrage sur la théorie générale des fonctions, l'« idéaliste » à l'« empiriste », il attribuera typiquement à l'idéaliste l'affirmation de l'existence actuelle de quantités infiniment petites ou infiniment grandes.

COUPURE ET NOMBRES IRRATIONNELS CHEZ DEDEKIND

Au début de son essai, *Continuité et nombres irrationnels*, Dedekind constate qu'en dépit du fait que le calcul différentiel s'occupe des grandeurs continues, on ne trouve nulle part d'explication de ce qu'est cette continuité. De plus « les présentations les plus rigoureuses du calcul différentiel ne fondent pas leurs démonstrations sur la continuité, mais font au contraire appel, plus ou moins inconsciemment, à des représentations géométriques ». Il se propose donc de remédier à cette situation en donnant une « définition véritable de l'essence de la continuité » dont « l'origine véritable est dans les éléments de l'arithmétique ».

Dedekind note d'abord l'analogie entre les relations « être plus grand » et « être à droite » définies respectivement sur l'ensemble des nombres rationnels et sur les points de la droite. Si nous désignons ces deux relations par *R*, et l'ensemble des éléments sur lequel elles sont définies par *E* alors nous avons :

1. Si qRp et rRq alors rRp

2.Pour tout p et tout r, il existe une infinité de q tels que rRq et qRp

3. Soit p un élément de E, alors tous les éléments de E se décomposent en deux classes E_1 et E_2 qui contiennent chacune une infinité d'éléments ; E_1 contient tous les éléments p_1 tels que pRp_1 ; E_2 contient tous les éléments p_2 tels que p_2Rp. p peut appartenir à E_1 ou à E_2 ; dans chaque cas on aura, pour tout p_1 et tout p_2, p_2Rp_1.

Cette analogie entre les deux relations devient elle-même une véritable relation, ajoute Dedekind, lorsqu'on choisit un point origine 0 sur la droite et une unité de longueur pour mesurer les distances. On peut ainsi associer à chaque rationnel a un point p de la droite.

La réciproque est évidemment fausse, « la droite D est infiniment plus riche en individus-points que le domaine Q des nombres rationnels n'est riche en individus-nombres », puisqu'elle contient une infinité de points dont la distance est mesurée par un nombre irrationnel, et « il faut raffiner fondamentalement l'instrument Q, qui avait été construit par la création des nombres rationnels [à partir des entiers positifs], par une création de nouveaux nombres de manière à ce que le domaine des nombres obtiennent la même *complétude* ou la même continuité que la droite ». La création de ces nouveaux nombres ne doit s'appuyer que sur les rationnels, et donc en dernier lieu sur les entiers positifs, et non pas, comme c'était l'usage, dit Dedekind, sur la notion, mal définie, de grandeur extensive.

La clé de cette création réside dans la réciproque de la proposition 3 ci-dessus lorsqu'on l'interprète sur le domaine des points de la droite : « Si l'on répartit tous les points de la droite en deux classes telles que chaque point de la première classe soit située à gauche de chaque point de la deuxième classe, alors il existe un point et un seul qui engendre cette partition de tous les points de la droite, cette découpe de la droite en deux parties. »

Ce n'est donc plus le point qui engendre la partition, mais la partition qui engendre le point de coupure. Dedekind souligne qu'on ne peut démontrer cette proposition. Il s'agit d'un axiome « par lequel nous reconnaissons d'abord à la ligne sa continuité, par lequel nous incorporons la continuité à la ligne. »

Revenons à la proposition 3 où E et R sont l'ensemble Q des nombres rationnels et la relation < (« plus petit que »). On appelle *coupure* la répartition entre de Q en deux classes Q_1 et Q_2 engendrée par un élément a de Q et on la désignera par (Q_1,Q_2). Chaque nombre rationnel a engendre une coupure (plus exactement deux coupures, selon que a appartient à Q_1 ou à Q_2). Il est clair qu'il y a une infinité de coupures de Q qui ne sont pas engendrées par des nombres rationnels. C'est le cas de toutes celles qui sont engendrées par la condition suivante où c est un entier positif qui n'est pas le carré d'un nombre entier et n est un entier positif :

$$n^2 < c < (n+1)^2$$

On aura en effet une coupure (Q_1,Q_2) telle que chaque élément a_2 appartenant à Q_2 est un rationnel positif dont le carré est $> c$ et où Q_1 contiendra tous les autres rationnels.[152]

L'ensemble continu de ce que Dedekind appelle les nombres *réels* est alors caractérisé par les trois propriétés ci-dessus, communes aux points de la droite et aux nombres rationnels, auxquelles on ajoute la transposition (des points de la droite aux nombres) de la proposition réciproque de 3 :

4. Si on décompose le système R de tous les nombres réels en deux classes R_1 , R_2 telle que chaque nombre r_1 de la classe R_1 soit plus petit que chaque nombre r_2 de la classe R_2, alors il existe un et un seul nombre qui engendre cette décomposition.

On voit donc que pour Dedekind, contrairement à ce qu'en pense Poincaré, les choses engendrées par les coupures ne sont pas de purs symboles. Ils désignent des couples de classes infinies de nombres dont l'existence est garantie par l'axiome de continuité de la droite. Un axiome que Poincaré aurait vraisemblablement repoussé, s'il avait connu le mémoire de Dedekind, puisque ce type de postulat dogmatique, comme on le verra mieux dans la seconde partie de SH, est totalement étranger à sa pensée. On constate également que le terme de *coupure* désigne chez Poincaré et chez Dedekind deux notions qui n'ont pratiquement que le nom de commun.

On dit souvent de la caractérisation de Dedekind qu'elle est une construction des nombres réels. Il entretient lui-même cette idée en soulignant que l'arithmétique toute entière repose sur l'acte simple de compter qui permet de créer la suite infinie, « nécessaire, ou au moins naturelle » des entiers positifs. Mais il faut observer que sa tentative, dans un essai ultérieur, de démontrer l'existence de nombres infinis, lesquels sont indispensables pour définir les points de la droite par une coupure, repose sur un paralogisme. L'existence de nombres infinis ne se démontre pas, elle doit être posée par un nouvel axiome. La construction des réels n'est donc pas une construction au sens de Poincaré. Ni, d'ailleurs, en aucun sens intelligible.

[152] Par exemple, avec $c=2$, on a $1<2<4$ et Q_2 est l'ensemble des rationnels > √2.