



**HAL**  
open science

# Logique et cryptographie: Russell, Wittgenstein, Gödel

Dominique Casajus

► **To cite this version:**

Dominique Casajus. Logique et cryptographie: Russell, Wittgenstein, Gödel. Flavia Carraro; Dominique Casajus; Adeline Herrou; Sophie Houdart; Isabelle Rivoal. Cryptographies, Société d'ethnologie, 2022. halshs-02614167

**HAL Id: halshs-02614167**

**<https://shs.hal.science/halshs-02614167>**

Submitted on 31 Jan 2021

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# **CRYPTOGRAPHIES**

**Société d'ethnologie**

**Nanterre**

Sous la direction de

**Flavia Carraro, Dominique Casajus,  
Sophie Houdart, Adeline Herrou, Isabelle Rivoal**

## Table des matières

Introduction.....	4
Flavia CARRARO, Dominique CASAJUS, Sophie HOUDART, Adeline HERROU, Isabelle RIVOAL.....	4
Références.....	17
Chapitre 1. Comment écrivait-ils ? Scribes anciens et déchiffreurs modernes. Le cas du déchiffrement du linéaire B* .....	21
Flavia CARRARO (LAS/EHESS) .....	21
Le linéaire B : un déchiffrement archéologique et cryptanalytique .....	21
L'invention d'une matrice digraphe et d'un texte bilingue virtuel .....	24
Les bilingues et les digraphes contextuels, et l'ajustement .....	27
L'interne et l'externe de la Grid .....	30
Secret et « non-su » : la situation des déchiffreurs .....	31
Langues mortes, écritures désuètes et lettres.....	34
La distance dans le déchiffrement .....	37
Références.....	38
Chapitre 2. Logique et cryptographie : Russell, Wittgenstein, Gödel.....	1
Dominique CASAJUS (IMAF/CNRS) .....	4
Russell : Greek exercises .....	4
Wittgenstein : Pages de droite, pages de gauche.....	8
Gödel : Codage sur codage.....	12
Le temps petit qu'il nous reste de vivre.....	14
Références.....	17
Chapitre 3. Cryptographie et institution. L'exemple des hackers.....	61
Nicolas AURAY († IMM/EHESS).....	61
La poste hacker.....	61
La critique de l'Etat et les nouvelles institutions bancaires virales : l'expérience Bitcoin...	65
Conjecture testable et tirage au sort : des fondements institutionnels pour les hackers ?	67
Conclusion .....	71
Références.....	72

Chapitre 4. Voiler le texte-matrice. Usage et transmission des livres religieux druzes.....	74
Isabelle RIVOAL (LESC/ CNRS).....	74
Un ésotérisme au cœur du social.....	75
Accueillir le texte : une « alchimie » .....	77
Quand le texte vomit son lecteur insincère .....	78
Transmette le texte .....	81
 Chapitre 5. Les charmes talismaniques de la ténuité pourpre .....	85
Brigitte BAPTANDIER (LESC/CNRS) .....	85
Du décryptage : de la divination à la langue graphique, puis à l'idéogramme .....	85
De l'encryptage : l'écriture talismanique taoïste.....	88
Les « écritures réelles » et la création : dissociation du signe originel et de sa graphie. 88	
Le Tableau talismanique de la Ténuité pourpre, ziwei 紫微. ....	91
La lettre volée.....	100
Références.....	105
 Chapitre 6. Du bon usage de la cryptographie : allusions poétiques dans le Japon classique et médiéval .....	108
Claire-Akiko BRISSET (Université de Genève).....	108
Chrysanthèmes au bord de l'eau .....	111
Un laque inspiré par le <i>Dit du Genji</i> .....	117
Références.....	124
 Chapitre 7. Les héros homériques manquaient-ils de volonté ? .....	126
Gérard LENCLUD (LAS/ EHESS) .....	126
1.....	126
2.....	130
3.....	132
4.....	137
5.....	139
Références.....	142

# Chapitre 2. Logique et cryptographie : Russell, Wittgenstein, Gödel.

Dominique CASAJUS (IMAF/CNRS)

Les écrits intimes appellent naturellement la cryptographie, tout comme ceux que l'amour et l'amitié réservent à une personne unique ou un cercle choisi. Telles, échangées entre le jeune narrateur de *Si le grain ne meurt* et son petit voisin du Val-Richer, ces épîtres « bizarres, mystérieuses, cryptographiées et qu'on ne pouvait lire qu'à l'aide d'une grille ou d'une clef<sup>1</sup> », ou bien ces logoglyphes compris d'elles seules que George Sand et ses condisciples du couvent des Anglaises inscrivaient « sur les cahiers, sur les murs, sur les couvercles de pupitre<sup>2</sup> », initiales des quatre ou cinq noms de leurs amies préférées. Stendhal, on le sait, y a libéralement et presque systématiquement recouru dans à peu près tout ce qu'il a écrit – journaux, marginalia, correspondance – et même les héros de ses romans s'y sont adonnés à l'occasion. Une manie dont Valéry s'amusait, qui ne voyait « dans ces habitudes qu'une comédie de cryptographie<sup>3</sup> ». Mais ne disait-il pas quelques pages plus loin, toujours à propos de Stendhal et de son goût des masques : « *En littérature, le vrai n'est pas concevable<sup>4</sup>* » Assurément. La littérature est d'un royaume où il est vain de s'interroger sur le vrai ou le faux, elle se nourrit du détour et de la feinte. La langue elle-même qu'on y parle n'est pas la nôtre, puisque, comme disait Proust, « les beaux livres sont écrits dans une sorte de langue étrangère<sup>5</sup> » – une extranéité qui est justement la marque de leur beauté. Il eût donc été facile de parler de « la cryptographie dans la littérature ». Trop facile. C'est pourquoi j'ai voulu tenir la gageure de m'aventurer dans un autre royaume, où l'on parle une langue dont toute ambiguïté est par principe exclue, une langue qui dénote mais ne connote pas. Je parlerai donc de logique, ou plutôt de quelques logiciens.

## Russell : Greek exercises

Commençons tout de même par un journal intime – un petit cahier de quelques dizaines de feuillets. Sa première page porte la date du 3 mars 1888. Orphelin, l'auteur a alors un peu moins de seize ans. Sa grand-mère l'élève à l'écart du monde dans une grande demeure que la reine Victoria a cédé à la famille. Ce qu'il a à confier à son cahier est grave, si grave qu'il ne souhaite pas que les siens en aient connaissance. Alors il le dissimule en transcrivant son anglais à l'aide de l'alphabet grec. Voici une translittération en caractères latins de la première phrase (où j'ai rendu le *théta* et le *chi* par *th* et *ch*), suivie de la traduction qu'il a ajoutée lui-même en 1948 ou 1949 :

« *Etin éti ét. Març thri. Grapsó abaut sam subzékex espescheli religes uanes boi nun interest eme.*

« Eighteen eighty eight. March three. I shall write about some subjects especially religious ones which now interest me. »

---

<sup>1</sup> GIDE, 1921, p. 56.

<sup>2</sup> SAND, 1855, p. 208.

<sup>3</sup> VALÉRY, 1930, p. 106.

<sup>4</sup> *Ibid.*, p. 112 ; italiques de l'auteur

<sup>5</sup> PROUST, 1971, p. 305.

On voit que le texte en caractères grecs n'est pas une translittération mais une transcription phonétique de l'anglais. Notons cependant que certains mots ne sont pas de l'anglais mais bel et bien du grec, comme *grapsô* pour *I shall write*, *hoi* pour *which* et *nun* pour *now*, *eme* pour *me*. On trouve ces caractéristiques tout au long du texte, mélange de traduction et d'une transcription phonétique un peu bricolée.

Le jeune scripteur s'appelle Bertrand Russell<sup>6</sup>. Son codage est loin d'être hermétique mais peut au moins suffire à décourager les regards fureteurs. Et pour le cas où sa grand-mère découvrirait le cahier, il lui a donné une apparence anodine en faisant figurer sur la première page, en alphabet latin : *Greek Exercises*. Précaution inutile. La vieille dame semble avoir toujours ignoré jusqu'à son existence<sup>7</sup>.

Quelles sont les graves vérités qu'il estime si important de garder secrètes ? Eh bien, lisons la première page :

« 3 mars 1888. J'écrirai sur un certain nombre de sujets, en particulier des sujets religieux qui m'intéressent en ce moment. À la suite de diverses circonstances, j'en suis venu à examiner les fondements mêmes de la religion dans laquelle j'ai été élevé. Sur certains points, mes conclusions ont confirmé mes croyances, mais sur d'autres j'ai été irrésistiblement conduit à des conclusions qui non seulement ne pourraient que choquer les miens (*my people*)<sup>8</sup>, mais m'ont fait beaucoup souffrir. Il y a peu de points sur lesquelles je suis parvenu à des certitudes, mais mes opinions, même là où elles ne sont pas de fermes convictions, n'en sont pas loin. Je n'ai pas le courage de dire aux miens que je ne crois plus guère à l'immortalité de l'âme. J'avais l'habitude de parler librement avec Mr Ewen<sup>9</sup> de ce genre de choses, mais je ne peux plus désormais confier mes pensées à quiconque, et ceci [ce journal] est le seul moyen que j'ai d'ouvrir la soupape. J'ai l'intention de discuter ici de certaines de mes interrogations<sup>10</sup>. »

Telle est donc la chose terrible que les siens ne doivent pas apprendre : il a perdu la foi de son enfance. Des débris en subsistent certes, mais fondés uniquement sur des arguments rationnels, car il a fait « en toutes choses, le vœu de suivre la raison<sup>11</sup> ». L'ensemble du cahier est, de fait, une suite implacable de réductions à l'absurde. On doit bien croire en l'existence d'un dieu tout-puissant puisqu'il faut supposer un auteur aux lois immuables qui régissent l'univers. Mais il faut alors renoncer à croire en l'immortalité de l'homme car elle serait incompatible avec l'omnipotence divine ; renoncer aussi à croire en son libre arbitre, sous peine de l'imaginer capable de se soustraire aux lois de l'univers, chose impossible par définition. D'autant plus que, comme il n'y a pas de claire division entre l'homme et le protozoaire, on ne peut accorder le libre arbitre au premier sans l'accorder aussi au second. Du coup, l'homme n'a pas non plus d'âme car si on lui reconnaît une qualité le différenciant de la matière inerte, alors pourquoi pas aussi le libre arbitre ?

Autant que la perte de la foi, ce que dissimulent son codage et le titre trompeur de son cahier, c'est le fait que notre adolescent s'est échappé du monde clos où les adultes qui l'entourent auraient bien voulu le confiner. Du reste, la fréquentation de la bibliothèque de son grand-père,

---

<sup>6</sup> Pour le texte crypté, voir RUSSELL, 1988, p. 4 et planche hors-texte I.

<sup>7</sup> C'est du moins, selon les éditeurs des *Greek Exercises*, ce qu'il a confié plus tard à une correspondante (*in* RUSSELL, 1988, p. 3).

<sup>8</sup> Une note des éditeurs aux *Greek Exercises* précise (RUSSELL, *ibid.*, p. 373) que par « my people », il faut entendre ce qu'il lui reste de famille : sa grand-mère, comtesse Russell, sa tante Lady Agatha Russell, son oncle, l'Honorable Rollo Russel.

<sup>9</sup> Son précepteur, qui avait été chassé sans doute parce que suspect aux yeux de sa grand-mère (voir WILLIS, 1984, p. 130).

<sup>10</sup> RUSSELL, *op. cit.*, p. 5 ; ma traduction.

<sup>11</sup> *Ibid.*, p. 10

qu'on n'a pas pensé à lui interdire, l'avait très tôt fait accéder à un monde bien plus vaste que celui où il a grandi. Son frère aîné Franck, qui ne vit plus avec lui au moment où il commence l'écriture de son cahier, l'a aussi introduit aux *Éléments* d'Euclide, ce qui, dira-t-il plus tard, fut pour lui un événement aussi merveilleux qu'un premier amour<sup>12</sup>. Et le précepteur Ewen dont il est question dans la première page l'a même introduit aux géométries non-euclidiennes (ainsi qu'à Marx).

Cette foi fervente en la raison et la science s'exprime avec la même candeur dans deux textes, dont l'un a paru en 1901 sous le titre « Recent works in the Philosophy of Mathematics<sup>13</sup> », et l'autre, publié en 1907 sous le titre « The Study of Mathematics<sup>14</sup> », avait été écrit plusieurs années plus tôt. Le premier claironne comme autant de victoires les résultats récemment acquis par Cantor, Dedekind et Peano :

« Il y a deux cents ans Leibniz avait pressenti la science que Peano a perfectionnée et avait tenté de lui donner forme [...]. De ce qu'il a appelé la « Caractéristique Universelle », il espérait une solution à tous les problèmes et une fin à toutes les querelles. « Des lors, quand surgiront des controverses, disait-il, inutile d'instituer une discussion entre deux philosophes, pas plus qu'on ne le fait entre deux calculateurs. Car il suffira de prendre la plume à la main ou de s'asseoir devant les abaques et, après avoir au besoin convoqué un ami, de se dire l'un à l'autre : "Calculons !" » De nos jours, cet optimisme semble quelque peu excessif. [...] Mais si l'on considère l'étendue des domaines autrefois controversés, le rêve de Leibniz est devenu réalité. Dans toute la philosophie des mathématiques, qui était au moins aussi semée de doute que n'importe quelle autre branche de la philosophie, l'ordre et la certitude ont remplacé la confusion et l'hésitation qui régnaient autrefois<sup>15</sup>. »

Lorsque ces lignes parurent, Russell savait déjà que son propre optimisme avait été tout aussi excessif que celui de son grand devancier. Leurs rêves à tous deux n'étaient cependant pas insensés. Russell allait, non sans mal, apporter un peu d'ordre là où son seul tort était de croire qu'il régnait déjà. Quant à la Caractéristique Universelle, nous la retrouverons plus loin.

Le second article, où les mathématiques apparaissent dans leur inhumanité même comme pourvoyeuses de consolation et d'espérance, avait été écrit à l'orée d'une longue période de désenchantement :

« La contemplation de ce qui n'est pas humain, la découverte que notre esprit est capable de traiter une matière qu'il n'a pas créée, et surtout le fait de réaliser que la beauté appartient au monde extérieur tout autant qu'au monde intérieur, constituent le principal moyen de surmonter le terrible sentiment d'impuissance, de faiblesse, d'exil au milieu de puissances hostiles qui résulte trop souvent de la considération de la quasi-omnipotence des forces étrangères. Nous réconcilier, par l'exhibition de sa terrible beauté, avec le règne du destin – qui est simplement la personnification littéraire de ces forces – est le but de la tragédie. Mais les mathématiques entraînent encore plus loin de ce qui est humain, dans la région de la nécessité absolue à laquelle non seulement le monde réel, mais encore tous les mondes possibles, doivent se conformer ; et même là, elles construisent une habitation, ou plutôt trouvent une habitation érigée de toute éternité où nos idéaux sont pleinement satisfaits et nos meilleurs espoirs ne sont pas déçus. C'est seulement quand nous avons complètement compris notre entière

---

<sup>12</sup> RUSSELL, 1967, p. 36.

<sup>13</sup> RUSSEL, 1901.

<sup>14</sup> RUSSEL, 1907.

<sup>15</sup> RUSSELL, 2007a, p. 91 ; 1918a, p. 79-80 pour le texte anglais.

dépendance vis-à-vis de ce monde que la raison découvre que nous pouvons réaliser correctement le sens profond de sa beauté<sup>16</sup>. »

Les souvenirs de Platon sont ici évidents, et l'article s'ouvrait d'ailleurs par une longue citation des *Lois*. Mélancolie mise à part, on retrouve les mêmes idées dans une lettre du 12 mars 1912 à une dame dont nous allons bientôt reparler, Lady Ottoline Morrell :

« Mais je ne peux tout simplement pas supporter une vision limitée à cette terre. Je trouve la vie bien petite à moins de lui donner des fenêtres vers d'autres mondes. Je ressens cela intensément, et instinctivement [...]. J'aime les mathématiques essentiellement parce qu'elles ne sont pas humaines et qu'elles n'ont rien de particulier à voir avec cette planète et d'une manière générale avec l'univers des phénomènes (*with the whole accidental universe*) – parce que, comme le dieu de Spinoza, elles ne nous rendent pas notre amour pour elles. Je voudrais bien arriver à dire tout cela d'une manière qui puisse convaincre<sup>17</sup>. »

Le ton parfois funèbre de l'article paru en 1907, outre les désillusions d'ordre privé, avait une cause plus impersonnelle mais peut-être plus grave. L'auteur portait alors le deuil des naïves espérances exprimées dans le texte de 1901. Il avait cru contribuer lui-même au grand mouvement initié par Peano, Cantor et Dedekind, il avait achevé à la fin de 1900 un ouvrage triomphal, sa propre version des fondements des mathématiques, quand, au début de 1901, il commença à prendre conscience que quelque chose clochait dans toute cette affaire. On s'était débarrassé de paradoxes comme ceux de Zénon d'Élée, et voilà que d'autres paradoxes apparaissaient, plus dévastateurs encore. On avait déjà avant lui commencé à les repérer, mais il restera comme celui qui a pris le problème à bras le corps. Le plus connu de ces paradoxes est celui qui apparaît lorsqu'on considère « l'ensemble de tous les ensembles qui ne se contiennent pas eux-mêmes », dont on ne peut décider s'il se contient lui-même ou non. Ce paradoxe, comme tous ceux que la théorie des ensembles fait alors surgir, sont de la même forme que le paradoxe d'Épiménide : de celui qui dit « je mens », on ne peut décider s'il dit vrai ou non. Ils ont tous en commun de violer ce que Bourbaki appelle le principe du cercle vicieux : « Un élément dont la définition implique la totalité des éléments d'un ensemble, ne peut appartenir à cet ensemble<sup>18</sup> ». Ou bien, pour le dire dans le langage des propositions : une proposition ne doit pas porter sur elle-même<sup>19</sup>.

Énorme construction dont Russell édifia la partie logique tandis que Alfred Whitehead se chargeait de la partie proprement mathématique, les *Principia Mathematica* résolvaient à peu près le problème, au moyen de ce qu'on a pris l'habitude d'appeler la théorie des types. L'ouvrage propose d'étager toutes les propositions logiques dans une gradation infinie, où les propositions d'un degré (ou d'un « type ») donné sont censées ne porter que sur des propositions de degré inférieur. Pour le dire avec les mots de Bourbaki (qui parle d'« ordre » et non de « degré » ou de « type ») :

« Partant d'un « domaine d'individus » non précisés et qui peuvent être qualifiés d'« objets d'ordre 0 », les relations où les variables (*libres ou liées*) sont des individus, sont dites « objets du premier ordre » ; et de façon générale, les relations où les variables sont des objets d'ordre inférieur ou égal à  $n$  (une au moins étant d'ordre  $n$ ) sont dites « objets d'ordre  $n+1$  ». Un ensemble d'objets d'ordre  $n$  ne peut alors être défini que

---

<sup>16</sup> RUSSELL, 2007b, p. 82-83 ; 1918b, p. 68-69 pour le texte anglais

<sup>17</sup> Cité in MONK, 1996, p. 248 ; ma traduction.

<sup>18</sup> BOURBAKI, 1970, p. E1.65.

<sup>19</sup> Les deux formulations peuvent se ramener l'une à l'autre : à toute proposition, on peut associer l'ensemble des éléments qui la vérifient, et à tout ensemble  $E$ , on peut associer la proposition «  $x$  appartient à  $E$  ».



par une relation d'ordre  $n+1$ , condition qui permet d'éliminer sans peine les ensembles paradoxaux<sup>20</sup>. »

L'achèvement de l'ouvrage est contemporain de deux événements qui allaient avoir une grande importance pour la vie et l'œuvre de Russell. Au cours de l'été 1911, il fit la rencontre de Lady Ottoline Morrell, à qui il allait porter durant dix ans un amour imparfaitement rendu. L'autre événement, survenu le 18 octobre 1911, est aussi une rencontre. Il la relate le jour même à Ottoline Morrell : « ... un Allemand inconnu est arrivé, parlant très mal l'anglais mais refusant de parler allemand. Il a fait des études d'ingénieur à Charlottenburg, pendant lesquelles il s'est découvert une passion pour la philosophie des mathématiques et il est venu exprès à Cambridge pour suivre mes cours. » Cet inconnu va réapparaître dans les lettres à Ottoline Morrell, d'abord anonyme et mentionné seulement comme « Mon Allemand », « Mon ami allemand », « Mon ingénieur allemand », « Mon Allemand féroce », avant que Russell ne finisse par apprendre qu'il est en fait autrichien et ne se décide à donner à sa correspondante le nom du nouveau venu : Ludwig Wittgenstein<sup>21</sup>.

Avec l'épuisement où l'a mis l'écriture des *Principia*, ces deux rencontres contribuent à l'éloigner de la logique. Son désir de communion avec Ottoline Morrell, femme sensible et très religieuse avec une nuance de quiétisme, lui faisait paraître étriquées les réflexions formelles dont il s'était nourri jusque-là<sup>22</sup>. D'autant plus qu'il se convainquit très vite que Wittgenstein était beaucoup mieux à même que lui de poursuivre des travaux techniques de ce genre. Ses carnets et sa correspondance laissent entendre que, dans son admiration affectueuse pour son nouvel ami, il en était venu à voir en lui le disciple à qui il passerait le flambeau.

## Wittgenstein : Pages de droite, pages de gauche

Disciple de Russell, si Wittgenstein l'a jamais été, ce fut pour bien peu de temps. Il ne tarda guère à lui faire part de son scepticisme vis-à-vis de toute l'entreprise des *Principia* : « ... la théorie des types, lui écrivait-il en janvier 1913, doit être rendue superflue par une théorie convenable du symbolisme [...] montrant que les *choses* qui paraissent être d'*espèces différentes* sont symbolisées par différentes espèces de symboles, qu'il est impossible de substituer les uns aux autres<sup>23</sup> ». Rendre superflue la théorie des types suppose pour le moins qu'on soit parvenu à éliminer les paradoxes qui en avait fait naître la nécessité. De fait, la proposition 3.333 du *Tractatus logico-philosophicus* se conclut sur ce qui sonne comme un bulletin de victoire : « Ainsi se trouve éliminé le paradoxe de Russel. (*Hiermit erledigt sich Russell's Paradox*)<sup>24</sup> » L'ensemble de la proposition est assez sibyllin mais il me semble qu'elle s'éclaire si l'on prend en compte une vérité que le *Tractatus* a laissée dans l'implicite : la logique traite d'énoncés et non d'actes de langage. Or le paradoxe d'Épiménide (auquel les paradoxes envisagés par Russell se ramènent tous plus ou moins) naît d'un acte de langage. Il n'y a aucun sens à se demander si l'énoncé « je mens » est un mensonge car mentir n'est pas un énoncé mais un acte. En revanche, on peut se demander si la profération d'un tel énoncé en est un, et c'est alors qu'apparaît le paradoxe puisqu'il est impossible d'assigner une valeur à l'acte de langage ainsi accompli. Le cercle vicieux dont Russell voulait se garder tient à cette indécision et non pas au fait que la proposition « je mens » porterait sur elle-même. Mieux vaudrait dire que

---

<sup>20</sup> BOURBAKI, *ibid.*, p. E1.66 ; voir aussi RUSSELL, 1910.

<sup>21</sup> MONK, 2009, p. 49-51.

<sup>22</sup> Sur l'influence que Lady Ottoline Morrell exerce à cette époque sur Russell philosophe, voir MORAN, 1991 ; SEYMOUR, 1992 ; MONK, 2009, p. 47 *sq.* ; SCHWERIN, 1999.

<sup>23</sup> WITTGENSTEIN, 1971, p. 221 ; voir aussi Monk, 2009, p. 80-81.

<sup>24</sup> WITTGENSTEIN, 1993, p. 48 ; 1922, p. 56 pour le texte allemand. On renvoie à l'édition de 1922 plutôt qu'à celle, en principe princeps, de 1921, que Wittgenstein ne considérait pas comme définitive (voir note suivante).

celui qui l'énonce émet une opinion sur ce qu'il *fait*. De toute façon, comme Wittgenstein le relève en 3.332, « [a]ucune proposition ne peut rien dire à son propre sujet, puisque le signe propositionnel ne saurait être contenu en lui-même<sup>25</sup> ». En d'autres termes, quel que soit l'énoncé P, il est forcément différent de l'énoncé « je dis quelque chose au sujet de "P" ». Et la proposition 3.333 ne fait rien d'autre que transcrire cette remarque dans le symbolisme de la logique : un symbole de la forme  $F(F(u))$  ne peut pas représenter une proposition disant quelque chose d'elle-même, puisque la fonction externe F et la fonction interne F ont des arguments différents. Ce sont des choses d'espèces différentes, symbolisées par différentes espèces de symboles – différentes en ce que leurs positions syntaxiques respectives les distinguent<sup>26</sup>.

L'élimination du « paradoxe de Russell » avait été pour Wittgenstein l'aboutissement d'un long et douloureux labeur. En septembre 1913, craignant de mourir avant d'avoir pu le mener à bien, il supplia Russell de prendre sous sa dictée un état provisoire de ses réflexions, puis fit au printemps 1914 la même prière à un autre philosophe de Cambridge, Gabriel Edward Moore. Ils acceptèrent tous deux de se prêter au jeu, permettant ainsi qu'une première esquisse de ce qui allait être le *Tractatus logico-philosophicus* voie le jour, partie dictée devant eux, partie dactylographiée à leur intention. C'était là un simple brouillon, car l'ouvrage ne prit sa forme finale qu'en 1918. On en suit la lente élaboration dans ce qu'il nous reste des carnets de Wittgenstein : sur une période allant du 22 août 1914 au 10 janvier 1917, les pages de droite portent des réflexions dont la formulation s'approche peu à peu de ce que nous pouvons lire dans le *Tractatus*. Les pages de gauche sont réservées à un journal intime, le deuxième texte crypté qu'on évoquera ici<sup>27</sup> : du 9 août 1914 au 19 août 1916, son auteur y a relaté en usant d'un code très simple (*a* vaut *x*, *b* vaut *y*, *c* vaut *x*, etc.) ses tourments, ses accès d'amertume, ses résolutions morales, ses implorations à Dieu, et parfois les manifestations de ce qu'il appelle sa sensualité. Il s'était alors engagé dans l'armée autrichienne, non par patriotisme mais parce qu'il estimait qu'un philosophe doit savoir affronter le risque de la mort, et parce qu'il espérait que cet affrontement ferait de lui un autre homme.

Son espérance ne fut pas déçue : l'homme qui, le 21 août 1919, sort du *campo concentramento* où il a passé plusieurs mois aux mains des Italiens n'a plus grand chose à voir avec l'« ingénieur allemand » venu à Russell près de 10 ans plus tôt. Et la portée du *Tractatus* tel qu'il se présente à nous déborde largement celle des notes dictées en 1913 et 1914. Comme le dit Russell dans la préface, l'ouvrage, « [p]artant des principes de symbolisation et des relations nécessaires entre les mots et les choses en tout langage [...] traite d'abord de la structure logique des propositions et de la nature de l'inférence logique » puis passe successivement « à la théorie de la connaissance, aux principes de la physique, à l'éthique et finalement au mystique (*das Mystische*)<sup>28</sup> ».

Pour Ray Monk, la tonalité si particulière (appelons-la « mystique ») des dernières pages du *Tractatus* porte la marque des souffrances de la guerre. Il relève que, jusque-là confinées aux pages de gauche, les réflexions à caractère religieux font une soudaine apparition dans les pages de droite le 11 juin 1916, c'est-à-dire alors que la onzième armée autrichienne, où Wittgenstein avait demandé à servir en première ligne, supportait au prix d'énormes pertes tout le poids d'une vaste offensive

---

<sup>25</sup> WITTGENSTEIN, 1993, p. 48 ; 1922, p. 56. Le formalisme logique utilisé n'avait pas atteint en 1921 sa forme définitive (voir WITTGENSTEIN, 1921, p. 210).

<sup>26</sup> WITTGENSTEIN, 1993, p. 48 ; 1922, p. 56.

<sup>27</sup> La plus ancienne édition, qui n'était que partielle, du texte original des pages de gauche apparaît dans un article (BAUM, 1984) dont l'auteur a récemment publié une édition complète et longuement commentée de ces pages (BAUM, 2014). L'édition française du journal intime (WITTGENSTEIN, 2008) ne mentionne pas cette disposition selon les pages de droite et de gauche, pourtant attestée par d'autres témoignages à l'époque où elle a paru (voir, par exemple, WITTGENSTEIN, 2003, p. 3). L'édition de Baum donne une photographie de deux pages contiguës, une de droite et une de gauche (voir BAUM, 2014, p. 87).

<sup>28</sup> RUSSELL, 1993, p. 13

dans laquelle les Russes avaient mis leurs dernières forces. Assurément, ce qu'il y note ce jour-là fait un curieux contraste avec les entrées précédentes :

- « Que sais-je de Dieu et du but de la vie ?
- « « Je sais que le monde existe.
- « Que je suis en lui comme mon œil est dans son champ visuel.
- « Qu'il y a quelque chose en lui de problématique que nous appelons son sens.
- « Que ce sens ne lui est pas intérieur mais extérieur.
- « Que la vie est le monde.
- « Que ma volonté pénètre le monde.
- « Que ma volonté est bonne ou mauvaise.
- « Que donc le bien et le mal sont d'une certaine manière en interdépendance avec le sens du monde.
- « « Le sens de la vie, c'est-à-dire le sens du monde, nous pouvons lui donner le nom de Dieu.
- « Et lui associer la métaphore d'un Dieu père.
- « La prière est la pensée du sens de la vie<sup>29</sup>... »

On reconnaît là le style aphoristique du *Tractatus*, où plusieurs de ces maximes se retrouveront à peu près telles quelles. La tonalité des pages de droite reste la même dans la plupart des entrées suivantes, au moins jusqu'à celle du 2 août, date à laquelle Wittgenstein tire la leçon de l'évolution qu'il vient de vivre : « Mon travail s'est en vérité développé à partir des fondements de la logique jusqu'à l'essence du monde<sup>30</sup>. » De fait, il y a alors près de trois mois que le journal en clair ne traite plus guère de logique. Mais si quelque chose du journal crypté s'y est introduit, les deux parties des carnets ne se confondent pas : à gauche, des admonestations adressées à soi-même, des plaintes ou des prières ; à droite, une réflexion se prenant elle-même pour objet. Si les invocations cryptées à la miséricorde divine sont nombreuses durant les mois d'avril et de mai, l'entrée du 11 juin citée plus haut n'est plus une prière mais une suite d'interrogations sur ce qu'il en est de prier et sur ce qu'il faut entendre par « Dieu ».

Les remarques de Monk sont donc justes, et on peut même abonder dans son sens. L'entrée du 11 juin 1916 est suivie d'un long silence qui ne s'interrompt que le 5 juillet suivant, où il reprend sur la page de droite le cours de ses réflexions. Puis, le 6 juillet, on lit sur la page de gauche : « Tensions colossales au cours du dernier mois. Ai beaucoup réfléchi à tous les sujets possibles. Mais bizarrement je ne puis établir le lien avec mes modes de pensée mathématiques<sup>31</sup>. » Et il ajoute le lendemain, toujours sur la page de gauche : « Mais ce lien sera établi ! Ce qui ne peut se dire ne peut se dire ! (*Aber die Verbindung wird hergestellt werden ! Was sich nicht sagen lässt, lässt sich nicht sagen* <sup>f</sup>2 ». Établir ce lien, c'est effectivement ce que à quoi Wittgenstein est parvenu dans le *Tractatus*, mais sans le dire, et en disant même qu'on ne peut le dire. Cette entrée du 7 juillet 1916, cryptique à tous les sens du mot, semble montrer qu'il avait à cette date pris conscience de ce que serait le livre auquel il travaillait depuis plus de trois ans. Et cela s'est fait au pire moment de la guerre.

Mais quelque rôle qu'ait pu jouer l'ébranlement de la guerre<sup>33</sup>, le *Tractatus* se veut un traité cohérent, précisément parce que *le lien a été établi* : les aphorismes ultimes, tels 6.421 (« Il est clair

---

<sup>29</sup> WITTGENSTEIN, 1971, p. 139 ; 1961, 72-73 pour le texte allemand.

<sup>30</sup> WITTGENSTEIN, 1971, p. 149 ; 1961, 79 pour le texte allemand.

<sup>31</sup> Cité in MONK, 2009, p. 147. Je n'ai pas suivi ici le traducteur français des *Carnets secrets*, qui écrit « Labeur colossal ces derniers mois. » (WITTGENSTEIN, 2008, p. 116). Qu'il s'agisse « du » dernier mois ou « des » derniers mois ne revient pas au même, et le texte original est bien *Kolossale Strapazen im letzten Monat* (voir BAUM, 1984, p. 21 ; 2014, p. 84).

<sup>32</sup> WITTGENSTEIN 2008, p. 117 ; BAUM, *ibid.*, pour le texte allemand.

<sup>33</sup> Sur ce rôle, James C. Klagge est plus affirmatif encore que Ray Monk. Il écrit : « It is only after he is shot [Wittgenstein a essuyé un coup de feu le 25 mai 1916] that God and Death are first mentioned in the *Notebooks*

que l'éthique ne se laisse pas énoncer<sup>34</sup>. ») ou 6.522 (« Il y a assurément de l'indicible. Il se montre, c'est le Mystique. ») s'y présentent comme la continuation de développements amorcés avant 1916 et même avant août 1914. C'est que, pour Wittgenstein, la réflexion sur la logique fut dès l'origine inséparable d'une réflexion sur le langage. Le long martèlement des aphorismes qui se succèdent dans le *Tractatus* entend nous faire percevoir que si le langage nous permet de dire ce qui est susceptible d'advenir dans le monde (les « états de choses »), c'est au prix d'un manque situé en son cœur. Nos propositions sont, d'une certaine manière, une image des états de choses à propos desquelles elles sont énoncées : « Un nom est mis pour une chose, un autre pour une autre, et ils sont reliés entre eux, de telle sorte que le tout, comme un *tableau vivant*, figure un état de choses » (4.0311). Si une proposition peut figurer la réalité, c'est qu'elle partage avec elle ce que Wittgenstein appelle la forme logique, mais cette forme logique elle-même, elle ne peut la figurer (4.12). Il faudrait pour cela qu'elle se contienne elle-même, et nous avons vu que c'est impossible. En d'autres termes, une proposition peut exprimer tel ou tel état de choses, mais pas ce qui fait qu'elle le peut. D'autres propositions me permettraient de le faire, mais celles-ci à leur tour ne pourraient exprimer ce qui leur donne cette capacité. La régression à l'infini qu'on voit ici s'amorcer montre bien que ce n'est pas là l'affaire de telle ou telle proposition mais du langage lui-même : « Ce qui s'exprime dans la langue, nous ne pouvons par elle l'exprimer » (4.121). Et il serait vain d'imaginer une métalangue au moyen de laquelle nous exprimerions ce qui s'exprime dans la langue, car, comme Russell est contraint de l'admettre dans sa préface, nous entrerions dans une nouvelle régression à l'infini. Ce n'est pas telle ou telle langue ou métalangue qui est en cause, mais notre aptitude à dire le monde. Il y a de l'indicible dans le langage.

C'est donc parce les énoncés langagiers partagent avec le monde une « forme logique » dont ils ne peuvent rien dire que le langage peut dire le monde. Là réside ce qui lie dans le *Tractatus* la méditation sur la logique à la méditation sur le langage. Cette forme logique se laisse voir avec une particulière netteté dans ce que Wittgenstein appelle les propositions logiques, et qu'il vaudrait peut-être mieux appeler les propositions *qui ne sont que* logiques, à savoir les tautologies. Une proposition de la forme « p ou non-p » (par exemple : « Il pleut ou il ne pleut pas ») est vraie quelle que soit la valeur de vérité de « p », mais ne m'apprend rien sur le monde : je ne saurais dire après l'avoir entendue quel temps il fait. En revanche, elle m'apprend quelque chose sur la façon dont fonctionne le langage, et cette leçon dépasse le cas particulier des tautologies. Il y a un lien formel entre la valeur de vérité d'une proposition complexe et les valeurs de vérité des propositions qui la composent (par exemple, si « p » est vraie et « q » fausse, « p implique q » ne peut être que fausse ; mais si « p » est fausse, « p implique q » est vraie, que « q » soit vraie ou fausse), les tautologies n'étant que le cas limite des propositions complexes dont la valeur de vérité est indépendante des valeurs de vérité des fonctions composantes. De tels faits autorisent Wittgenstein à dire que les propositions du langage ordinaire satisfont à la logique.

Il est difficile sur ce point d'être plus opposé au Russell des *Greek Exercises*. Ce qui correspond au journal crypté de Russell, c'est chez Wittgenstein le silence, et ce silence devient perceptible au moment où quelque chose de son journal crypté bascule dans son journal en clair. Russell croit que tout, y compris ce que Wittgenstein appelle le mystique, peut être mis en mots et fondé en raison. Nous avons vu comment, dans les *Greek Exercises*, les articles de sa foi sont l'aboutissement de syllogismes souvent bien spécieux. Il ratiocine de la même manière dans quelques-unes de ses lettres à Ottoline Morrell, en la sommant de justifier des croyances auxquelles il est incapable de comprendre qu'elle n'adhère que par un mouvement où la raison n'a pas sa part

---

(May 6 et July 5, respectively) [*Notebooks* = notes prises sur les pages de droite]. He had been calling on God regularly (in the coded remarks) since he entered the service, but it is apparently mortal danger that propelled the concepts into the philosophical *Notebooks*, from where they then found a place in the *Tractatus*. » (KLAGGE, 2011, p. 8). Voir aussi SOMAVILLA, 2010 ; LARA, 2011.

<sup>34</sup> On suit dans tout ce paragraphe WITTGENSTEIN, 1993, sans renvoyer à chaque fois à la page, l'indexation de l'auteur rendant un tel renvoi inutile.

(à moins qu'il ne le comprenne que trop bien, mais c'est une autre histoire). Il n'est pas étonnant que sa préface au *Tractatus* parle à peu près uniquement du volet logique de l'ouvrage. Le reste lui a échappé.

## Gödel : Codage sur codage

Voilà qui nous ramène à la logique et aux paradoxes dont Wittgenstein pensait se débarrasser au moyen d'un symbolisme adéquat. Sur ce point, la pratique des mathématiques lui a plutôt donné raison contre Russel. Dans leurs versions les plus élaborées, les langages formels que les mathématiciens avaient commencé à mettre au point dès avant la publication des *Principia Mathematica* constituent bel et bien un tel symbolisme. Les démonstrations y consistent en manipulations presque mécaniques permettant, à partir de formules tenant lieu d'axiomes, d'aboutir à d'autres formules chargées de figurer les théorèmes. Moyennant quoi, le risque de voir surgir un paradoxe peut être écarté de façon plus économique que dans la théorie des types. Il suffit pour cela que les formules appelées à représenter les axiomes de la théorie des ensembles aient été conformées de telle sorte que la formule traduisant l'énoncé « l'ensemble de tous les ensembles qui ne s'appartiennent pas n'est pas un ensemble » soit un théorème<sup>35</sup>. Ce qui signifie que les « ensembles » ainsi définis ne répondent pas exactement à l'intuition qu'on peut avoir d'un ensemble, puisque nous voilà face à une collection d'objets (« les ensembles qui ne s'appartiennent pas eux-mêmes ») qui n'est pas un ensemble : l'adéquation entre les mathématiques telles qu'on les pratiquait jusque-là et le jeu formel auquel elles se ramènent désormais n'est pas parfaite ; la rigueur et la sécurité sont à ce prix.

Les énoncés des langues formelles ainsi fabriquées (je m'en tiendrai ici à l'une d'entre elles, que j'appellerai L) sont, d'une certaine manière, une transcription codée d'énoncés de la langue naturelle. Ainsi, dans la formule «  $\forall x \forall x' (Sx=Sx' \Rightarrow x=x')$  », le lecteur percevra sans peine l'écho de l'énoncé : « lorsque deux nombres entiers ont le même successeur, ils sont égaux » ; tout comme il percevra l'écho de « 0 n'est le successeur d'aucun nombre » dans la formule «  $\forall x \text{ non-}(Sx=0)$  ». Mais il s'égarerait peut-être en disant que c'est là ce que *signifient* nos formules, car cette « signification » ne joue aucun rôle dans les démonstrations susceptibles de les mobiliser. On peut donc aussi bien voir en elles des artefacts typographiques dépourvus de signification et destinés à être manipulés selon des règles purement formelles. C'est d'ailleurs la manière de voir que Wittgenstein a préconisée dans des écrits postérieurs au *Tractatus*. Bien entendu, tout cela n'est vrai qu'en principe ; même si les mathématiciens savent que toutes leurs démonstrations sont susceptibles de prendre la forme de séquences dépourvues de signification, aucun d'entre eux ne pousserait la rigueur (ou la folie) jusqu'à se priver du secours de la langue naturelle. Sans parler du fait que, parmi toutes les manipulations certes mécaniques auxquelles ils soumettent leurs formules, seule leur intuition sait les guider vers celles qui s'avéreront fécondes.

En 1931, la rigueur même de ce dispositif permit au logicien Kurt Gödel de réintroduire au cœur des mathématiques quelque chose qui ressemblait beaucoup aux paradoxes qu'on s'était fait fort de déloger. Il avait dû au préalable élaborer un codage qui lui permit d'attribuer à toute formule un nombre entier qu'on a pris l'habitude d'appeler son numéro de Gödel. On peut ici parler de cryptographie au second degré puisque ce codage vient se superposer à celui dont sont issus les énoncés de L. Pour commencer, un numéro est attribué à chacun des symboles élémentaires de L. Par exemple, « 0 » reçoit le numéro 1, « = » le numéro 3, « S » le numéro 5, « x » le numéro 11, etc. Le numéro de la formule «  $Sx=0$  » est alors  $2^5 \times 3^{11} \times 5^3 \times 7^1$  (où 2, 3, 5 et 7 interviennent comme étant

---

<sup>35</sup> C'est du moins la solution adoptée par Bourbaki dans ses *Éléments de mathématiques*. On peut imaginer d'autres solutions. Et, de toute façon, rien n'empêche de combiner la théorie des types avec une écriture formalisée.

les quatre premiers nombres premiers) ; d'une manière générale, celui de la formule composée de  $n$  signes de numéros respectifs  $a_1, a_2, \dots, a_n$  est  $2^{a_1} \times 3^{a_2} \dots \times p_n^{a_n}$ , où  $p_n$  est le  $n^{\text{ème}}$  nombre premier ; on peut semblablement attribuer un numéro à toute suite de formules<sup>36</sup>. Aux manipulations mécaniques de formules à quoi se ramène la démonstration des théorèmes, il devient alors possible de faire correspondre des opérations arithmétiques sur les numéros de Gödel de ces formules. Par exemple, le fait que la suite de formules de numéro  $n$  est la démonstration de la formule de numéro  $m$  se traduit par une certaine relation entre les nombres  $n$  et  $m$  qui est elle-même susceptible d'être exprimée dans L. Nous voilà en mesure de lire certaines formules de L comme des énoncés métamathématiques, c'est-à-dire des énoncés portant sur les formules de L. Le rêve de la Caractéristique Universelle s'est donc, pour partie, réalisé : il y a au moins une controverse que nous pouvons trancher en prenant la plume et en nous asseyant devant des abaques (ou ce qui en tient lieu aujourd'hui), c'est celle de savoir si une démonstration mathématique est correcte ou non<sup>37</sup>.

Pour finir, Gödel est parvenu à fabriquer une formule (donnons-lui le nom de G) qui, lue selon le codage qu'il avait mis au point, s'interprétait comme « La formule dont le numéro de Gödel est celui de G n'est pas démontrable ». Pour être plus précis, G ne parlait pas directement de son propre numéro de Gödel (ce serait techniquement impossible, pour des raisons très analogues à celles qui font qu'aucune proposition ne peut parler d'elle-même<sup>38</sup>). Elle portait sur une autre formule, H, dont elle disait : « quel que soit l'entier  $n$ ,  $n$  n'est pas le numéro de Gödel d'une suite de formules qui démontre la formule qu'on obtient en soumettant H à une certaine manipulation » (Ce qui signifie que G est de la forme «  $\forall n f(n)$  », détail sur lequel nous reviendrons plus loin). Mais comme H avait été conformée de telle façon que la formule obtenue en la soumettant à la manipulation en question se trouvait être G, le résultat restait bien que, lue selon le codage de Gödel, G affirmait sa propre non-démonstrabilité. Gödel montrait ensuite que ni G ni non-G ne sont démontrables, ce qu'on exprime en disant que G est indécidable. Il existe donc des problèmes arithmétiques que les formalismes destinés à assurer la rigueur des mathématiques ne permettent pas de trancher.

Un corollaire immédiat de ce théorème est que ces formalismes ne nous permettent pas non plus de démontrer la non-contradiction des mathématiques, résultat qui a suscité une foule de commentaires à prétention philosophique ou anthropologique. Voilà donc que les mathématiciens s'avouent incapables d'établir la validité ultime de leur activité ! Mais alors, il en est *a fortiori* de même pour tous les autres domaines du savoir<sup>39</sup> ! Eh bien, tant que nous y sommes, proclamons qu'aucun système social ne peut dire la vérité sur lui-même, et que Gödel nous impose de nous

---

<sup>36</sup> L'unicité de la décomposition en facteurs premiers implique que cette mise en correspondance des formules – et des suites de formules – de L avec l'ensemble des entiers est univoque. Soit, par exemple, le nombre 270. Je n'ai qu'à le décomposer en facteurs premiers et ranger ces nombres premiers par ordre croissant (ce qui donne  $2^1 \times 3^3 \times 5^1$ ), pour voir qu'il est le numéro de la formule composée, dans cet ordre, des trois signes de numéros respectifs 1, 3 et 1 (soit « 0=0 »). Certains nombres entiers ne sont pas des numéros de Gödel, mais dès lors qu'un nombre est un numéro de Gödel (et je n'ai qu'à lire sa décomposition en facteurs premiers pour savoir si c'est le cas ou non), il n'y a pas d'ambiguïté sur la formule qu'il représente. D'autres codages sont possibles – voir l'amusant codage imaginé dans HOFSTADTER, 1980, p. 268 – mais le codage imaginé par Gödel a l'élégance de faire intervenir l'un des plus vieux théorèmes connus.

<sup>37</sup> Du moins en principe. En pratique, c'est une autre histoire.

<sup>38</sup> Cela tient à ce que l'entier  $n$  est représenté dans L par un symbole de la forme SSSS...S0 (où « S » est répété  $n$  fois), manière d'exprimer qu'il est le suivant du suivant du suivant, etc. de 0. Le numéro de Gödel d'une formule contenant un tel symbole serait un produit dont l'un des facteurs serait lui-même le produit de  $n$  nombres premiers consécutifs élevés chacun à la puissance 3 (si on a attribué à « S » le numéro 3). Un tel numéro serait forcément supérieur à  $n$ . Autrement dit, le numéro de Gödel d'une formule parlant de  $n$  est forcément supérieur (et même très supérieur !) à  $n$ .

<sup>39</sup> Après tout, c'est peut-être vrai, mais ce n'est en rien une conséquence du théorème de Gödel.

ouvrir à la transcendance. C'est à très peu près l'antienne qu'un Régis Debray<sup>40</sup> et quelques autres ont entonnée dans des textes qu'ils se mordent sans doute aujourd'hui les doigts d'avoir commis. Il n'y a pas lieu de revenir sinon pour en rire sur ces inepties, dont Bouveresse<sup>41</sup> ou Sokal et Bricmont<sup>42</sup> ont montré une bonne fois pour toutes l'inanité. Elles visaient à tirer des conclusions extra-mathématiques d'un théorème qui ne prétendait pas parler d'autre chose que d'arithmétique élémentaire. Se souvenant qu'il avait été anthropologue, Paul Jorion<sup>43</sup> s'est lancé récemment dans une entreprise inverse : plutôt que de chercher à appliquer les mathématiques à des domaines qui n'en relèvent en aucune manière, il s'est invité en ethnographe dans l'atelier du mathématicien. L'entreprise n'a pas, à mon avis, porté les fruits qu'il en espérait, mais elle mérite d'être examinée. Cet examen me demande d'entrer plus avant dans le détail de la démonstration de Gödel.

## Le temps petit qu'il nous reste de vivre

Une première précision s'impose. La ressemblance entre notre théorème et le paradoxe d'Épiménide, relevé par maints commentateurs à commencer par Gödel lui-même, n'est que superficielle. Ce théorème établit certes l'indécidabilité d'une formule se décodant comme « je ne suis pas démontrable », tout comme Épiménide avait jadis montré que l'on ne peut décider si la profération de « je mens » est un mensonge ou non. Mais, en réalité, seul un abus de langage nous autorise à dire, comme trop d'auteurs le font (et comme je me suis permis, pour simplifier, de le faire quelques lignes plus haut), que la formule  $G$  parle d'elle-même. Tant qu'on la considère comme un élément de  $L$ ,  $G$  n'est qu'une suite de symboles typographiques. Lorsque, relue selon le codage de Gödel, elle parle de la démontrabilité d'une certaine formule, elle devient un énoncé métamathématique, c'est-à-dire un énoncé qui dit quelque chose sur cette petite portion du monde qu'est la langue  $L$ . Mais lue ainsi, elle cesse d'être un élément de  $L$  pour devenir un énoncé (codé) de la langue naturelle. Mieux vaudrait noter  $G^*$  la formule  $G$  lue de cette manière et dire que  $G^*$  affirme la non-démontrabilité de  $G$ . Bien que constituées de la même suite de symboles,  $G$  et  $G^*$  appartiennent à deux langues différentes, et c'est seulement dans la langue à laquelle appartient  $G^*$  qu'on peut parler de l'indécidabilité de  $G$ . De plus et surtout, ce n'est pas le fait que  $G^*$  signifie «  $G$  n'est pas démontrable » qui prouve l'indécidabilité de  $G$ . Pour y parvenir, Gödel a eu besoin d'un laborieux raisonnement où il ne s'est nulle part autorisé de la « signification » de  $G^*$ . Les propriétés particulières qu'il a dû donner à  $G$  pour que  $G^*$  puisse signifier «  $G$  n'est pas démontrable » ont certes joué un rôle, mais elles l'ont joué dans un raisonnement en bonne et due forme. Et si rien ne nous interdit de *commenter* le théorème de Gödel en comparant  $G^*$  au « je mens » d'Épiménide, un commentaire n'est pas une démonstration. C'est pourquoi, lorsqu'il proteste – avec raison, du reste – que « [s]eul le mathématicien peut dire qu'une proposition est démontrable, [et qu']une proposition ne peut pas dire cela d'elle-même<sup>44</sup> », Paul Jorion enfonce une porte qui n'a jamais été fermée. Et, contrairement à ce qu'il semble croire, sa protestation n'invalide nullement le théorème de Gödel, étant donné que celui-ci n'a jamais imaginé que ce que  $G^*$  disait de  $G$  tenait lieu de démonstration<sup>45</sup>.

---

<sup>40</sup> DEBRAY, 1981.

<sup>41</sup> BOUVERESSE, 1998.

<sup>42</sup> SOKAL & BRICMONT, 1997, p. 237 *sq.*

<sup>43</sup> JORION, 2009, Chap. IV.

<sup>44</sup> JORION, *op. cit.*, p. 313. L'auteur cite ici DAVAL et GUILBAUD, 1945, p. 45.

<sup>45</sup> Le seul reproche que l'on peut faire au beau livre déjà cité de Douglas Hofstadter (1980) est que l'auteur omet de souligner ce point, et donne l'impression que l'analogie entre  $G^*$  et « je mens » suffit à prouver l'indécidabilité de  $G$ .

Ce n'est pas le seul point où Paul Jorion affirme avoir pris Gödel en défaut. Dans le commentaire que celui-ci fait de son propre théorème avant d'en donner la démonstration effective, on trouve quelques assertions assurément hasardées. Ainsi, il affirme que, quoique non démontrable, G peut être « décidée par des considérations métamathématiques<sup>46</sup> », ce qui lui conférerait une manière de vérité. En réalité, pour que G soit vraie ou fausse, il faudrait qu'elle dise quelque chose sur le monde, et ce n'est pas le cas. Par contre, G\*, qui affirme la non-démonstrabilité de G, dit assurément la vérité. La formulation de Gödel est donc abusive, comme Shanker et, semble-t-il, Wittgenstein avant lui, s'en étaient aperçus<sup>47</sup>. Mais, de façon significative, elle apparaît dans la présentation succincte et simplifiée qui figure en préambule de sa démonstration et non dans la démonstration elle-même. Il n'y a donc aucune raison d'affirmer avec Jorion que Gödel s'imaginait posséder, par une grâce spéciale réservée à quelques initiés, une aptitude particulière à discerner la vérité d'une proposition qu'il n'avait pourtant pas démontrée. Du reste, la meilleure preuve que G ne saurait être tenue pour vraie (ni non plus pour fausse) est que, comme ni G ni non-G ne peuvent être déduits des axiomes de L, on peut très bien adjoindre soit l'une soit l'autre de ces formules à notre liste d'axiomes pour constituer un nouveau langage formel où elle sera, comme axiome, démontrée. Or les mathématiques que je constituerais à partir d'un système d'axiomes auquel j'aurais adjoint non-G ne seraient ni plus ni moins vraies que celles que je constituerais en leur adjoignant G. Les théorèmes que j'y démontrerais me sembleraient peut-être un peu bizarres, mais pas plus bizarres que les théorèmes des géométries non-euclidiennes<sup>48</sup>. Et cela, bien sûr, Gödel le savait parfaitement<sup>49</sup>.

Pourtant, insiste Jorion, Gödel se trahit, il nous met « la puce à l'oreille lorsqu'il affirme qu'il n'est pour rien dans l'encryptage du commentaire au sein de la proposition commentée<sup>50</sup> (qu'il s'agit en fait d'un “simple hasard”) : s'il n'en est lui l'auteur, c'est que, prophète des Temps modernes, une vérité transcendante a trouvé par son truchement le moyen de se révéler<sup>51</sup> ». Encore un point sur lequel je ne puis lui donner raison. Gödel n'a jamais affirmé qu'il n'était pour rien dans le fait que G\* parle de G. Il s'est contenté, toujours dans son préambule à l'usage du grand public, de relever que G n'affirme pas directement sa non-démonstrabilité. Si la forme de G nous garantit bien qu'elle affirme la non-démonstrabilité d'une certaine formule, ce n'est qu'« accessoirement (et, en un sens, de manière contingente)<sup>52</sup> » que la formule dont la démontrabilité est ainsi affirmée se révèle être G elle-même. Mais ce n'est là qu'une manière de décrire la façon dont la démonstration se déroule. Elle suit deux fils relativement indépendants. Le premier fil, celui autour duquel elle s'organise pour l'essentiel, aboutit au résultat suivant : G (ou plutôt G\*) affirme que, en transformant une certaine formule H de façon spécifique, on obtiendrait une formule non-démontrable. Parallèlement, un autre fil fait apparaître « accessoirement » que la manipulation en question transformerait H en G. Lorsque les effets de la transformation opérée sur H se révèlent soudain, au terme d'une suite d'équations dont on ne voit d'abord pas très bien où elles vont nous mener, le lecteur a le curieux sentiment d'être pris par surprise. Mais Gödel n'a jamais voulu faire croire à personne que cette surprise, dont bien d'autres théorèmes offrent l'équivalent, était un don des dieux ou le fruit du hasard. Je ne suivrai donc pas Jorion lorsque, tout à son souci de donner

---

<sup>46</sup> GÖDEL, 1989, p. 112

<sup>47</sup> SHANKER, 1989.

<sup>48</sup> Il y aurait une différence cependant, c'est qu'elles ne vérifieraient pas la propriété appelée oméga-consistance. Mais on pourrait les pratiquer, et d'ailleurs, on les a effectivement pratiquées. De plus, une version améliorée du théorème de Gödel, mise au point dès 1936, fait disparaître ce problème.

<sup>49</sup> Voir GÖDEL, *op. cit.*, p. 130 *sq.*)

<sup>50</sup> Comprendre : qu'il n'est pour rien dans le fait que G (ou G\*) parle de G.

<sup>51</sup> JORION, *op. cit.*, p. 326.

<sup>52</sup> GÖDEL, *op. cit.*, p. 111, note 2. Le texte original dit : *gewissermassen zufällig* (GÖDEL, 1931, p. 175, note 15), qui peut effectivement se traduire par « en quelque sorte par hasard » ou « par accident », mais la traduction adoptée par les éditeurs français correspond mieux, me semble-t-il, à ce que Gödel pouvait avoir en tête.



un tour anthropologique à son propos, il poursuit en comparant Gödel à ce chamane fameux qui, aux dires de Lévi-Strauss, grugeait son public par les surprises qu'il lui ménageait<sup>53</sup>. D'ailleurs, en deuxième lecture, le sentiment du lecteur est différent : chacune des équations qui se succèdent sous ses yeux accroît d'un degré la force avec laquelle l'inévitabilité de la conclusion prochaine s'impose à lui, tandis que, en connaisseur qu'il commence à devenir, il salue l'ingéniosité de l'ouvrier. Qui n'a pas éprouvé des sentiments analogues après deux auditions successives d'une pièce de musique qu'il n'avait jamais entendue auparavant ? Surprise d'abord, abandon à l'irrémissible ensuite, doublé de l'admiration pour le savoir-faire du compositeur. Et, dans un cas comme dans l'autre, le souvenir de la surprise persiste. Cette surprise, Hofstadter l'a mise en scène avec beaucoup d'humour sans en tirer les conclusions de Jorion<sup>54</sup>. Concédonsons à celui-ci que Gödel a été un moins bon vulgarisateur que Hofstadter<sup>55</sup>. Mais cela ne nous apprend pas grand chose sur son théorème, et surtout ne l'invalide en rien.

Faut-il pour autant renoncer à parler en anthropologue de toute cette histoire comme Paul Jorion s'était, non sans courage, proposé de le faire ? Peut-être pas, mais à condition de faire preuve de l'humilité que doit s'imposer quiconque parle de mathématiques. Rappelons-nous que G est de la forme «  $\forall n f(n)$  »,  $f(n)$  étant une fonction propositionnelle qui, lorsqu'on l'interprète selon le codage de Gödel, se lit : «  $n$  n'est pas le numéro de Gödel d'une démonstration de G<sup>56</sup>. » Or, de fait, il n'y a aucun risque qu'un entier quelconque soit le numéro de Gödel d'une formule qui démontre G puisque G n'est pas démontrable. Là est la raison pour laquelle Gödel écrit dans son préambule que G peut être décidée par des moyens extra-mathématiques, ce qui est tout à fait vrai pourvu qu'on accole un astérisque à « G ». Et pourtant, la formule «  $\forall n f(n)$  » n'est pas démontrable. Autrement dit, la démontrabilité pour tout  $n$  de «  $f(n)$  » n'implique pas la démontrabilité de «  $\forall n f(n)$  » (laquelle formule se lit pourtant, dans la pratique usuelle : « quel que soit l'entier  $n$ , alors il vérifie  $f(n)$  » : L n'est décidément pas un codage parfait). La suite infinie des vérifications de  $f(n)$  ne saurait être une démonstration, tout simplement parce que, quand je resterais à ma table de travail jusqu'à la fin des temps, je n'en viendrais jamais à bout. Or une démonstration dans L est une suite forcément finie de formules qui, se succédant selon certaines règles, aboutit à la formule qu'on veut démontrer. Dans les mathématiques moins strictement formalisées qu'on a pratiquées jusque vers la fin du XIX<sup>e</sup> siècle, G est, si l'on veut, démontrable (ou, du moins, la chose peut se discuter) ; dans la langue L, elle ne l'est pas<sup>57</sup>. Quoi que les mathématiciens puissent penser des objets dont ils s'occupent, qu'ils les tiennent pour des êtres appartenant au monde inaltéré des idées – comme le faisait le jeune Russel et comme Gödel l'a proclamé avec de plus en plus de force au fil des années<sup>58</sup> – ou pour de simples artefacts typographiques – comme le faisait Wittgenstein –, leurs artisanales démonstrations se déroulent dans le temps fini des choses humaines. À sa manière, humble, ceci est un constat anthropologique.

---

<sup>53</sup> Pour l'histoire de ce chamane, voir LEVI-STRAUSS, 1974.

<sup>54</sup> HOFSTADTER, *op. cit.*, p. 448

<sup>55</sup> Du reste, la démonstration que Gödel esquisse dans son préambule est fort différente de celle qu'il développe ensuite. Son préambule vulgarise une autre démonstration que celle qu'il propose ! Pour une version développée de cette démonstration esquissée par Gödel, voir par exemple COHEN, 1966, 39 *sq.* Elle est beaucoup plus expéditive que la démonstration de Gödel, mais parle peut-être moins à l'intuition.

<sup>56</sup> Comme on l'a vu, G (ou G\*) ne dit pas directement cela, mais ce qu'elle dit revient bien à cela.

<sup>57</sup> Ce que Paul J. Cohen commente en disant : Z1 [le nom qu'il donne au formalisme mathématique qu'il utilise] « does not exhaust the set of all acceptable arguments » (COHEN, 1966, p. 41). Pour atteindre la rigueur formelle, il a fallu accepter de circonscrire plus étroitement l'ensemble des preuves recevables.

<sup>58</sup> Sur le platonisme de Gödel, voir par exemple GÖDEL, 1969 ; CASSOU-NOGUES, 2004 ; BOUVERESSE, 2006. Accordons à Jorion que Gödel était platonicien dès l'époque où il a démontré son théorème, mais entre le Gödel qui a démontré son théorème et le Gödel qui l'a commenté, il y a toute la distance que Proust mettait dans son *Contre Sainte-Beuve* entre le moi qu'un auteur a manifesté dans sa vie et le moi qu'il a manifesté dans son œuvre. Ce que nous savons du premier ne nous apprend rien sur le second (PROUST, 1971, p. 221-222).

De plus, et c'est un autre signe de cette limitation, on peut remarquer que la pratique des mathématiques, si formalisée soit-elle et justement à cause de la formalisation à laquelle elle est parvenue, n'est pas immune à des phénomènes d'autoréférence présents de diverses manières dans la vie sociale. Car si, comme j'y ai insisté, il serait abusif de dire que G parle d'elle-même, il n'en est pas moins vrai que le codage de Gödel nous permet de faire des mathématiques dans le moment même où nous en parlons puisque ce que nous disons d'elles utilise le langage de l'arithmétique. Autrement dit, nous faisons des mathématiques tout en nous regardant faire des mathématiques. C'est aussi, au fond, ce que Russel et Wittgenstein ont fait quand ils ont codé leurs journaux. Leur codage était le signe tangible qu'ils portaient un regard particulier sur ce qu'ils étaient en train d'écrire – et ce dans le mouvement même de leur écriture. Écrire en prenant un point de vue inhabituel sur ce qu'on écrit, n'est-ce pas aussi une définition de la littérature ? Le royaume où je me suis aventuré n'est pas celui de la littérature, mais les jeux de langage auxquels on s'adonne de part et d'autre de leur commune frontière se ressemblent parfois.

## Références

BAUM (Wilhelm), 1984, « Neue Quellen zur Weltanschauung des grossen Philosophen », *Zeitschrift Für Katholische Theologie*, vol. 106, n° 4, p. 3-22.

BAUM (Wi.), 2014, *Wittgenstein im Ersten Weltkrieg. Die « Geheimen Tagebücher » und die Erfahrungen an der Front (1914-1918)*, Vienne, Litab Verlag.

BOURBAKI (Nicolas,) 1970 *Éléments de mathématiques. Théorie des ensembles*, Paris, Hermann.

BOUVERESSE (Jacques,) 1998, « Qu'appellent-ils "penser" ? », *Les Cahiers rationalistes*, 528, p. 5-14, 529, p. 5-20.

BOUVERESSE (J.), 2006, « Utopie et réalité : Leibniz, Gödel et les possibilités de la logique mathématique », in *Essai V - Descartes, Leibniz, Kant*, Marseille, Agone, p. 141-165.

CASSOU-NOGUES (Pierre), 2004 *Gödel*, Paris, Les Belles Lettres.

COHEN (Paul J.), 1966, *Set theory and continuum hypothesis*, New York, W. A. Benjamin, Inc.

DAVAL (Roger), GUILBAUD (Georges-Théodule), 1945 *Le raisonnement mathématique*, Paris, PUF.

DEBRAY (Régis), 1981 *Critique de la raison politique*, Paris, Gallimard.

GIDE (André), 1921 « Si le grain ne meurt. Fragments. VI », *La Nouvelle Revue Française*, Tome XVI, Janvier-juin 1921, p. 39-66.

GÖDEL (Kurt), 1931, « Über formal unentscheidbare Sätze der *Principia Mathematica* und verwandter Systeme I », *Monatshefte für Mathematik und Physik* 38, p. 173-198.

GÖDEL (K.), 1969, La logique mathématique de Russell, *Cahiers pour l'analyse* 10, p. 84-107.

GÖDEL (K.), 1989, « Sur les propositions formellement indécidables des *Principia Mathematica* et des systèmes apparentés I », in NAGEL (Ernest), NEWMAN (James R.), GÖDEL (K.), GIRARD (Jean-Yves), *Le théorème de Gödel*, Paris, Éditions du Seuil.

- HOFSTADTER (Douglas R.), 1980 *Gödel, Escher, Bach : an Eternal Golden Braid*, Harmondsworth, Penguin Books Ltd.
- JORION (Paul), 2009 *Comment la vérité et la réalité furent inventées*, Paris, Gallimard.
- KLAGGE (James C.), 2011, *Wittgenstein in Exile*, Massachusetts Institute of Technology.
- LARA (Philippe de), 2011, « Les religions de Wittgenstein », *ThéoRèmes* [En ligne], 1 | 2011, mis en ligne le 23 janvier 2012, consulté le 18 janvier 2013. URL : <http://theoremes.revues.org/255>.
- LEVI-STRAUSS (Claude), 1974, « Le sorcier et sa magie », in *Anthropologie structurale*, Paris, Plon, p. 183-203.
- MONK (Ray), 1996 *Bertrand Russell. The Spirit of Solitude*, Londres, Jonathan Cape.
- MONK (R.), 2009, *Wittgenstein : le devoir de génie*, Paris, Flammarion (traduction de *Ludwig Wittgenstein : the Duty of Genius*, Londres, Pinguin Books, 1991).
- MORAN (Margaret), 1991, « Bertrand Russell meets his Muse : the Impact of Lady Ottoline Morrell (1911-12) », *Russell : the Journal of Bertrand Russell Studies* 11 (2), p. 180-192.
- PROUST (Marcel), 1971, *Contre Sainte-Beuve*, Paris, Gallimard.
- RUSSELL (Bertrand), 1901, « Recent Work in the Philosophy of Mathematics », *The International Monthly* 4, 1901, p. 83-101.
- RUSSELL (B.), 1907, « The Study of Mathematics », *New Quarterly* 1, p. 29-44
- RUSSELL (B.), 1910, « La théorie des types logiques », *Revue de Métaphysique et de Morale* XVIII, p. 53-83.
- RUSSELL (B.), 1918a, « Mathematics and the Mathematicians », in *Mysticism and Logic and other Essays*, Londres, Longmans, Green and CO, p. 74-96 (reedition de RUSSELL, 1901).
- RUSSELL (B.), 1918b, « The Study of Mathematics », in *Mysticism and Logic and other Essays*, Londres, Longmans, Green and CO, p. 58-73 (reedition de RUSSELL, 1907).
- RUSSELL (B.), 1967, *The Autobiography of Bertrand Russell. 1872-1914*, Londres, Unwin Brothers Ltd.
- RUSSELL (B.), 1988, *The collected papers of Bertrand Russell, Vol. 1: Cambridge Essays, 1888-99*, Londres, Routledge, 1988.
- RUSSELL (B.), 1993, « Introduction », in *Wittgenstein, Tractatus logico-philosophicus*, Paris, Gallimard, p. 13-28.
- RUSSELL (B.), 2007a, « Les mathématiques et les métaphysiciens », in *Mysticisme et logique*, Paris, Librairie philosophique J. Vrin, p. 87-103 (traduction de RUSSELL 1901).
- RUSSELL (B.), 2007b, « L'étude des mathématiques », in *Mysticisme et logique*, Paris, Librairie philosophique J. Vrin, p. 60-85 (traduction de RUSSELL 1918b).

- SAND (George), 1855, *Histoire de ma vie*, tome 12, Paris, Victor Lecou.
- SCHWERIN (Alan), 1999, « A Lady, her Philosopher and a Contradiction », *Russell : the Journal of Bertrand Russell Studies* 19 (1), p. 5-28.
- SEYMOUR (Miranda), 1992, *Ottoline Morrell : Life on the Grand Style*, Londres, Hodder & Stoughton.
- SHANKER (Stuart G.), 1989, « Wittgenstein's Remarks on the Significance of Gödel's Theorem », in *Gödel's Theorem in Focus*, SHANKER (S. G.) (dir.), Londres & New-York, Routledge, p. 155-256.
- SOKAL (Alan), BRICMONT (Jean), 1997, *Impostures intellectuelles*, Paris, Odile Jacob.
- SOMAVILLA (Ilse), 2010, « Wittgenstein's Coded Remarks in the Context of his Philosophizing », in *Wittgenstein after his Nachlass*, VENTURINHA (Nuno) (dir.), Londres, Palgrave Macmillanp. 30-50.
- VALÉRY (Paul), 1930 *Variété II*, Paris, Gallimard.
- WILLIS (Kirk), 1984, « The Adolescent Russell and the Victorian Crisis of Faith », *Russell : the Journal of Bertrand Russell Studies* 4 (1), p. 123-135.
- WITTGENSTEIN (Ludwig), 1921, « Logisch-Philosophische Abhandlung », *Annalen der Naturphilosophie*, 14, p. 185-262.
- WITTGENSTEIN (L.), 1922, *Tractatus Logico-Philosophicus*, with and Introduction by Bertrand Russel, Londres, Routlege & Kegan Paul.
- WITTGENSTEIN (L.), 1961, *Notebooks 1914-1916*, édition de G. H. von Wright et G. E. M. Anscombe, traduction en anglais de G. E. M. Anscombe, New-York, Harper & Brothers.
- WITTGENSTEIN (L.), 1971, *Carnets 1914-1916*, Paris, Gallimard.
- WITTGENSTEIN (L.), 1993. *Tractatus logico-philosophicus*, Traduction, préambule et notes de Gilles-Gaston Granger, Introduction par Bertrand Russel, Paris, Gallimard.
- WITTGENSTEIN (L.), 2003, *Public and Private Occasions*, KLAGGE (James C.), NORDMANN (Alfred) (éd.), Maryland, Rowman & Littlefield Publishers.
- WITTGENSTEIN (L.), 2008 *Carnets secrets 1914-1916*, traduits de l'allemand et présenté par Jean-Pierre Cometti, Cadenet, Les Éditions Chemin de ronde.