



**HAL**  
open science

## Lectures et postérités de La Philosophie de l'algèbre de Jules Vuillemin

Sébastien Maronne, Baptiste Mèlès

► **To cite this version:**

Sébastien Maronne, Baptiste Mèlès. Lectures et postérités de La Philosophie de l'algèbre de Jules Vuillemin. *Philosophia Scientiae*, 24 (3), pp.236, 2020, <10.4000/philosophiascientiae.2471>. <halshs-03097020>

**HAL Id: halshs-03097020**

**<https://shs.hal.science/halshs-03097020v1>**

Submitted on 6 Oct 2025

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire HAL, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons CC BY-NC-ND 4.0 - Attribution - Non-commercial use - No Derivative Works - International License

# *Philosophia Scientiæ*

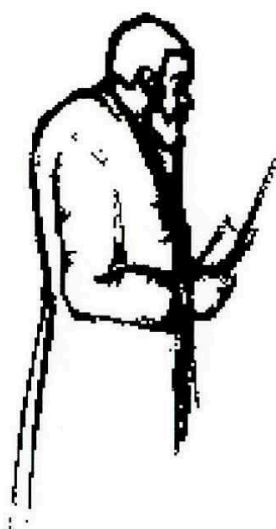
## *Lectures et postérités de* **La Philosophie de l'algèbre** *de Jules Vuillemin*

*Édité par Sébastien Maronne &*

*Baptiste Mèlès*

2020

*Vol. 24 Cahier 3*



*Revue publiée par les*  
*Archives Henri-Poincaré – Philosophie et*  
*Recherches sur les Sciences et les Technologies*  
*et le Centre National du Livre*

ÉDITIONS  
**KIMÉ**

# Lectures et postérités de *La Philosophie de l'algèbre* de Jules Vuillemin. Introduction

*Sébastien Maronne*

Institut de Mathématiques de Toulouse,  
Université Paul Sabatier, Toulouse (France)

*Baptiste Mèlès*

Archives Henri-Poincaré – Philosophie et Recherches  
sur les Sciences et les Technologies  
(AHP-PreST), Université de Lorraine, CNRS,  
Université de Strasbourg, UMR 7117, Nancy (France)

## 1 Un impact « profond et discret »

Roshdi Rashed écrivait en novembre 2004, dans la préface d'un recueil d'études consacrées à son ami décédé trois ans auparavant :

L'œuvre de Jules Vuillemin, rigoureuse et profonde, d'un accès certes souvent austère, a eu un impact à sa mesure : profond et discret. [Rashed & Pellegrin 2005, Préface, xiii]

Ce jugement, qui vaut pour l'ensemble de l'œuvre philosophique de Jules Vuillemin, ne saurait probablement être mieux illustré que par *La Philosophie de l'algèbre* [Vuillemin 1962].

L'impact « profond » de cet ouvrage se mesure aisément au statut de classique de la philosophie française des mathématiques qu'il a aujourd'hui atteint, rejoignant les grands textes de Brunshvicg, de Cavallès et de

Lautman<sup>1</sup>, mais il n'en est pas moins demeuré « discret ». Si l'ouvrage n'a pas été totalement ignoré par la critique, celle-ci s'en est tenue à des résumés positifs [Jacob 1963], [Grize 1964], [Robert 1968, 116–118], sans lui faire l'honneur d'une discussion critique, peut-être parce qu'« encore que d'une parfaite clarté, l'ouvrage de M. Vuillemin n'est cependant pas facile » [Grize 1964, 393]. La sobriété de cette réception contraste avec celle du précédent ouvrage, *Mathématiques et métaphysique chez Descartes* [Vuillemin 1960b], qui n'avait pas seulement été remarqué [Dopp 1960], [Pflug 1961], [Boyer 1962], mais aussi discuté de près, aussi bien dans l'éloge [Clavelin 1961] que dans la critique [Itard 1963]. Comment comprendre que le nouvel *opus*, qui plus est expressément annoncé comme le prolongement du précédent [Vuillemin 1960b, 141] et affichant des ambitions bien plus vastes encore, n'ait pas eu les mêmes honneurs et que plus d'un demi-siècle après sa sortie, les textes qui le discutent de près demeurent si rares<sup>2</sup> ?

La discrétion de l'impact de *La Philosophie de l'algèbre* a peut-être pour première cause, comme l'indique Roshdi Rashed, celle de son auteur même. Vuillemin ayant peu de goût pour l'auto-promotion, l'ambition indéniable de *La Philosophie de l'algèbre* est pour ainsi dire restée confinée dans ses pages. Vuillemin s'est contenté d'annoncer l'ouvrage dans les années 1959-1960, sous le modeste titre d'*Introduction à la philosophie de l'algèbre*, dans deux articles correspondant aux § 8–13 et 3–4 de l'ouvrage<sup>3</sup>, ainsi que dans l'ultime note des conclusions de son *Mathématiques et Métaphysique chez Descartes* [Vuillemin 1960b, 141]<sup>4</sup>. L'année de la publication de l'ouvrage, lors de sa Leçon inaugurale au Collège de France, Vuillemin en défend pourtant le programme de recherche, se proposant d'« accueillir en philosophie la notion de structure » car « nulle, mieux qu'elle, ne [lui] paraît susceptible d'éclairer

---

1. [Brunschvicg 1912], [Cavaillès 1994], [Lautman 2006]. Les années 1960 en France témoignent de la floraison de publications majeures consacrées à la philosophie des mathématiques puisque suivront en 1968 l'*Essai d'une philosophie du style* de Granger et les *Idéalités mathématiques* de Desanti [Granger 1968], [Desanti 1968].

2. Parmi les études réunies par Roshdi Rashed et Pierre Pellegrin dans l'ouvrage précédemment cité [Rashed & Pellegrin 2005], cf. [Schwartz 2005] et [Groszholz 2005]. Dans sa contribution consacrée à « la pensée de la physique de Jules Vuillemin », Alain Michel mentionne en outre une conférence qu'il avait consacrée à *La Philosophie de l'algèbre* lors du colloque d'hommage organisé à Clermont-Ferrand par Élisabeth Schwartz en 1999 [Michel 2005, 271, n. 1]. Voir également l'hommage rendu à la méthode de Vuillemin employée dans [Vuillemin 1960b] et [Vuillemin 1962] par les contributions publiées dans [Rashed 1991]. Plus récemment, enfin, cf. [Timmermans 2012], [Maronne 2014], [Schwartz 2015], [Mèlès 2016] et [Benis-Sinaceur 2018].

3. [Vuillemin 1960a, 20], [Vuillemin 1961, 302]. Dans le premier de ces deux textes, Vuillemin présente d'ailleurs le chapitre sur Lagrange comme le *second* chapitre de l'ouvrage, non comme le premier. On trouve également dans [Vuillemin 1959] un contenu correspondant aux § 52–56.

4. Voir aussi [Vuillemin 1960b, 127], où le projet de *La Philosophie de l'algèbre* est présenté sans que celle-ci ne soit évoquée.

les deux sortes de réflexion qu'on a reconnues propres au mathématicien<sup>5</sup>, non plus que le profit que la critique philosophique peut en tirer » [Vuillemin 1963, 21]. De ce programme, pourtant, jamais par la suite il ne revendiquera explicitement la réalisation. Tout au plus lui arrive-t-il à de rares occasions, toutes concentrées dans les années qui suivent la publication de ce premier *opus magnum*, d'y faire brièvement allusion [Vuillemin 1964b, 43, 56], [Vuillemin & Granger 1968, 162] et d'évoquer l'histoire et la philosophie de l'algèbre [Vuillemin 1963], [Vuillemin 1964a, 111]. Si l'*Anselme* de 1971 peut être clairement vu comme l'accomplissement du projet d'analyse interne du concept de Dieu promise dans le §25 de l'ouvrage de 1962 [Vuillemin 1971b, 6–9], la filiation n'est pas plus explicitement revendiquée que n'est repris le mot d'ordre de « critique générale de la raison pure<sup>6</sup> ». La disproportion est ainsi saisissante entre l'ambition débordante de l'ouvrage et la retenue adoptée par l'auteur à son sujet. Vuillemin n'est pas de ces auteurs qui sont en même temps leur plus fervent apôtre.

Une deuxième raison de l'impact discret de l'ouvrage tient sans doute à ses difficultés intrinsèques : sa technicité, sa densité de l'écriture, la rareté des indications de structure<sup>7</sup>. Aussi bien en histoire de la philosophie qu'en mathématiques, Vuillemin se montre plus soucieux de rigueur que de pédagogie. Plus d'un passage restera hermétique à qui n'est pas déjà familier des matières traitées. Le lecteur idéal de l'ouvrage doit donc connaître à la fois la théorie des équations, l'algèbre moderne, la géométrie et l'analyse, mais aussi Descartes et Fichte interprétés par Gueroult [Gueroult 1953, 1930], Platon, Aristote, Leibniz, Kant et Husserl. L'ampleur des problèmes philosophiques abordés – la créativité et le génie (chap. II), l'idée de Dieu (chap. III), la théorie des facultés et les degrés de la connaissance (chap. IV), le rapport entre image et concept (chap. V), la nature de l'espace (chap. VI), etc. – ainsi que la virtuosité des développements consacrés aux « analogies<sup>8</sup> » entre l'ordre philosophique et l'ordre mathématique<sup>9</sup> supposent du lecteur la mobilisation

---

5. À savoir celle consistant à « abstraire et à généraliser certaines méthodes utilisées dans un contexte particulier pour les développer de façon autonome » et celle « propre à la Métamathématique » [Vuillemin 1963, 17].

6. Voir le dossier « Théorie des ensembles et théologie : l'*Anselme* de Jules Vuillemin », dir. Sylvain Roudaut et Baptiste Mèlès, *Klesis*, 2020 (à paraître).

7. Il faut par exemple attendre le §49, dans la Conclusion de l'ouvrage [Vuillemin 1962, 466], pour comprendre rétrospectivement que l'ordre des quatre chapitres de la première section (§8–34) n'est pas tant dicté par la succession chronologique des mathématiciens ayant joué un rôle illustre dans la théorie des équations – Lagrange, Gauss, Abel, Galois – que par la suite des transformations que subissent respectivement les quatre règles de la méthode cartésienne.

8. « J'utiliserai les analogies de la connaissance mathématique pour critiquer, réformer et définir, autant qu'il se pourra la méthode propre à la Philosophie théorique » [Vuillemin 1962, 5].

9. Cf. par exemple la comparaison des méthodes respectives de Fichte et de Lagrange [Vuillemin 1962, chap. I, 102–122]. Les tableaux qui dans l'article de 1960 présentent de manière particulièrement synthétique et éclairante les trois séries des

des ressources rares – plus encore à notre époque – que sont la patience, la concentration, le travail et leur condition commune qu’est le temps. Temps indispensable à qui souhaite suivre les nombreux fils d’Ariane qui parcourent l’œuvre systématique de Jules Vuillemin, lesquels ne peuvent qu’échapper au lecteur pressé de morceaux choisis. C’est sans doute en partie dans cet état de fait que la réputation d’exigence et de difficulté, certes réelles, faite à l’œuvre systématique de Vuillemin trouve son origine. On pourrait donc écrire de *La Philosophie de l’algèbre* ce qu’écrivait Constantin Huygens à l’auteur de *La Géométrie* : « Il faut avoir passé par les grands vestibules du Temple, pour avoir le pied fait à pénétrer *in illa adyta*<sup>10</sup> ». Sentiment qu’Élisabeth Schwartz a exprimé en termes platoniciens :

*Que nul n’entre ici s’il n’est géomètre.* La devise rapportée par la tradition à l’Académie de Platon s’imposait immédiatement, et invinciblement, [...] aux étudiants que nous étions [...] il y a tout juste quarante ans, lorsque Jules Vuillemin, jeune Professeur quittant son université de Clermont-Ferrand, où il avait écrit ses grands ouvrages sur les mathématiques et la métaphysique de Descartes et de Kant, et mûri la somme que représente, en son œuvre, *La Philosophie de l’algèbre*, venait, nouvellement élu au Collège de France, faire cours à [l’École normale supérieure de jeunes filles de] Sèvres sur l’invitation de Claude Imbert, et nous enseigner la philosophie des machines simples. [Schwartz 2005, 1]

Une troisième difficulté, et non la moindre, tient à la tentation de subsumer cet ouvrage à un genre unique. Si le titre semble promettre sans ambiguïté un ouvrage de « philosophie des mathématiques », la suite des chapitres, épousant la succession chronologique des mathématiciens éponymes – Lagrange, Gauss, Abel, Galois, Klein, Lie – semble bien davantage lui donner l’apparence d’une « histoire des mathématiques ». L’auteur semble pourtant avoir d’entrée de jeu rejeté cette dernière lecture en distinguant la « philosophie théorique », qui « ne tient compte que de l’ordre des choses mêmes », de la « Psychologie et de l’Histoire des sciences », qui « n’étudient les connaissances que dans leur acquisition individuelle et collective » [Vuillemin 1962, 3]. Lorsqu’il annonce, en fin d’introduction, le plan des deux tomes, Vuillemin semble à nouveau opposer les ordres logique et historique :

Bien que, selon l’ordre des choses, les problèmes de la Logique précèdent ceux des Mathématiques pures au sens restreint, celles-ci ont historiquement précédé celle-là. La méthode apagogique que je suis ici imposera donc le droit et même le devoir de renverser cet ordre. Je traiterai donc de la connaissance pure mathématique avant d’en étudier le fondement logique.

---

méthodes génétiques de Lagrange et de Fichte n’ont malheureusement pas été repris dans *La Philosophie de l’algèbre* [Vuillemin 1960a, 22–23].

10. Cf. la lettre à Descartes du 24 mars 1637 [Descartes 1897-1913, I, 637].

Cette voie n'est pas rigoureuse, mais elle a paru inévitable dans un domaine assez nouveau, où il était difficile d'user de la méthode qu'il fallait définir. [Vuillemin 1962, 65]

Ce passage mérite quelque attention. Vuillemin ne prétend pas se soumettre à l'ordre historique, mais la « méthode apagogique » qu'il est en train de forger, laquelle est fondée sur l'usage « [des] analogies de la connaissance mathématique » [Vuillemin 1962, 5], le ramène, indirectement mais nécessairement, à un *certain* ordre historique. Vuillemin a continuellement insisté sur le fait que « l'ordre de l'acquisition [était] le plus souvent une image renversée de [l']ordre véritable » [Vuillemin 1962, 3]<sup>11</sup>. L'ordre de l'histoire des mathématiques offrirait ainsi l'image renversée, mais néanmoins fidèle, de celui de la philosophie théorique. Inverser l'ordre inverse à celui de l'histoire revient finalement à suivre un cours parallèle à l'histoire – non parce que les faits nous l'imposent, mais parce que la raison nous l'ordonne<sup>12</sup>.

*La Philosophie de l'algèbre* illustre donc bien l'une des formes que peut revêtir l'histoire des mathématiques : celle dont la méthode d'investigation est déterminée par un projet philosophique. Une histoire qui, comme l'indique le titre de l'ouvrage et de sa première partie, « *Réflexions* sur le développement de la théorie des équations algébriques », n'en est pas moins une philosophie.

## 2 Un tome II resté inédit

Une quatrième raison a rendu difficile, jusqu'à une date très récente, la pleine compréhension de *La Philosophie de l'algèbre* : c'est que l'ouvrage fut publié tronqué et l'est resté.

Si la couverture et la tranche du livre pouvaient laisser aux lecteurs de 1962 l'espoir d'un tome second, venant après celui consacré aux « Recherches sur quelques concepts et méthodes de l'algèbre moderne », celui-là ne verra jamais le jour. Un tel cas n'est certes pas unique dans l'histoire de la philosophie et la fiction s'est même parfois chargée de combler les lacunes de l'histoire : le livre II de la *Poétique* d'Aristote ayant fait l'objet d'un beau roman [Eco 1981], l'on peut encore rêver de l'*Hermocrate* de Platon<sup>13</sup> et de la deuxième partie du *Traité sur les principes de la connaissance humaine* de Berkeley. La tendance s'étant accélérée chez Husserl et ses disciples [Husserl 1891], [Husserl 1913, 5],

---

11. Voir aussi [Vuillemin 1948, 225–226], [Vuillemin 1984b, 8, 12], [Vuillemin 1986, vii], [Vuillemin 1991, 207], [Vuillemin 1999, 381]. Ce point est central dans l'interprétation de Descartes par Gueroult [Gueroult 1953, 22–28], [Gueroult 1955]. Vuillemin n'en reconnaît pas moins que la réversibilité des méthodes n'est pas transposable chez Descartes des mathématiques à la métaphysique et qu'elle disparaît dans la méthode des mathématiques structurales [Vuillemin 1962, 5–28, 468].

12. Ainsi s'expliquent les choix opérés par Vuillemin, comme le fait de passer presque totalement sous silence la contribution des algébristes anglais à l'algèbre des structures.

13. Platon, *Timée* 27a-c et *Critias* 108a [Platon 2008, 1988–1989, 257].

[Heidegger 1927, 39–40], [Sartre 1943, 676], [Sartre 1960], Gilbert Ryle pouvait en 1958 railler ses collègues du continent, dont

beaucoup pensent qu'il est de leur devoir d'élaborer le plus tôt possible quelque chose qu'on puisse considérer comme leur système ; et si leur effort ne va pas au-delà du tome I, qu'il est permis de laisser de côté tout ce qu'ils pourraient dire de concret sur l'application de leur système dans le détail. [Collectif 1962, 368]

Vuillemin aurait-il à son tour cédé à ce travers ?

Ce serait là, pour deux raisons, faire un mauvais procès à notre auteur. Avant même la publication du tome I, Vuillemin avait rédigé l'ensemble du manuscrit sous la forme d'un texte unique comportant deux parties divisées en chapitres continûment numérotés<sup>14</sup>. Cette version a ensuite connu plusieurs remaniements successifs. Sa première partie, perdue, donna naissance, sous une forme considérablement augmentée<sup>15</sup>, au premier tome de *La Philosophie de l'algèbre*, paru en 1962. La deuxième partie, initialement intitulée « De quelques structures d'Algèbre et d'Arithmétique et de leur utilisation en Théorie des nombres », fut remaniée suite à cette parution<sup>16</sup> mais demeura inédite. Le lecteur pourra se faire une idée du projet de Vuillemin et le comparer à la publication de 1962 en consultant la conclusion générale inédite de Vuillemin publiée dans le dossier documentaire. Vuillemin ne peut donc être suspecté de ne pas avoir poussé l'« effort » au-delà du tome I.

Quant aux « applications » de son système, Vuillemin les avait déjà développées dans le tome premier [Vuillemin 1962, 66] : portant sur les travaux géométriques de Klein et de Lie, elles lui avaient précisément « donn[é] l'occasion de poser le problème, si important et si négligé aujourd'hui, de la *Mathesis universalis* dans ses rapports avec la philosophie » [Vuillemin 1962, Introduction, 66]. L'étude silencieuse, patiente et exigeante étant incompatible

---

14. Le fonds Jules-Vuillemin, conservé aux Archives Henri-Poincaré (UMR 7117) à Nancy, contient dans la boîte V trois documents dactylographiés et partiellement manuscrits composant la deuxième partie et la conclusion de *La Philosophie de l'algèbre*. Pour une présentation détaillée de ces trois documents, voir le dossier documentaire qui contient la notice détaillée de Gudrun Vuillemin-Diem, ainsi que la contribution de Baptiste Mèlès dans le présent dossier.

À la demande des ayants droit, le manuscrit du tome II de *La Philosophie de l'algèbre* ne peut faire l'objet d'une diffusion, mais peut être communiqué *in situ* sur demande justifiée.

15. Six chapitres et soixante paragraphes dans la version publiée contre cinq chapitres et trente-deux paragraphes dans la version originale.

16. Les deux premiers chapitres furent réécrits, des pages furent ajoutées et de nombreuses corrections manuscrites furent apportées. Le titre fut changé en « Deuxième Partie. Structure, Infini, Ordre », du nom des trois sections en lesquelles il devait être divisé. Dans le dernier état du manuscrit, c'est la section consacrée à la notion de structure qui s'intitule « De quelques structures d'Algèbre et d'Arithmétique et de leur utilisation en Théorie des nombres et en Géométrie et des problèmes philosophiques qui s'y rattachent ».

avec le « *publish or perish* », l'abandon de la publication du tome II résulte donc bien d'une promesse tenue, celle du *pauca sed matura* de Gauss.

Il n'est pas jusque sur les raisons mêmes de l'abandon du tome II que Vuillemin ne se fût guère montré disert. Lors de la réédition de l'ouvrage en 1993, il supprime de la couverture la mention « tome I » et ajoute en quatrième de couverture le texte suivant :

Le tome premier de *La Philosophie de l'algèbre*, publié en 1962, a pour objet des recherches sur quelques concepts et méthodes de l'algèbre moderne.

La première partie contient une réflexion sur le développement de la théorie des équations algébriques, de Descartes à Galois. La seconde partie traite de la mathématique universelle à partir des travaux de Klein et de Lie. Elle en examine ce qu'on appelait au XVIII<sup>e</sup> siècle la « métaphysique ».

L'auteur se proposait d'examiner dans un tome second les trois concepts de structure, d'infini et d'ordre<sup>17</sup>. Cet examen l'eût conduit aux questions concrètes de la mathématique universelle.

D'autres travaux et des parutions récentes sur ces sujets l'ont dissuadé de publier la première section de ce second tome et de rédiger les deux autres.

Ces développements, d'ailleurs, n'auraient pas modifié pour l'essentiel la leçon du premier tome, dont la tâche est achevée en décrivant la révolution de pensée qui, au siècle dernier, a changé la nature de l'algèbre.

Ce texte pose malheureusement plus de questions qu'il n'apporte de réponses. Quels sont, en particulier, les « autres travaux et [...] parutions récentes sur ces sujets » qui auraient conduit à l'abandon du projet ? La formulation même combine deux ambiguïtés : s'agit-il d'abord d'« autres travaux » de Vuillemin ou bien d'autres auteurs, et ensuite de parutions « récentes » dans les années 1960 ou bien en 1993 ?

1. S'il s'agit d'autres travaux de *Vuillemin* récents dans les *années 1960*, alors Vuillemin pourrait parler des autres projets qu'il a nourris à cette époque : les recherches sur les antinomies qui ont conduit au *Russell* et à l'*Anselme*, celles sur l'abstraction qui ont mené à l'*Aristote* et à *La Logique et le monde sensible* [Vuillemin 1967, 1968, 1971a,b]. La décennie 1960 de Vuillemin fut extrêmement prolifique et l'on pourrait comprendre qu'un travail d'une telle ampleur que le tome II de *La Philosophie de l'algèbre* en eût pâti.
2. S'il s'agit d'ouvrages d'autres auteurs récents dans les *années 1960*, alors on peut penser, comme le suggère Gabriella Crocco dans sa

---

17. La première section « Structure » correspond vraisemblablement aux chapitres VI-IX qui figurent dans le document **A** (les chapitres VI et VII furent renumérotés en VII et VIII dans le document **B**), la deuxième, « Infini », aux chapitres X-XI, la troisième, « Ordre », au seul chapitre XII.

contribution, aux publications de Quine sur l'engagement ontologique, qui jouèrent un rôle important dans les réflexions de Vuillemin depuis les années 1960 jusqu'à l'élaboration de sa classification des formes de prédication [Vuillemin 1984a]; ou bien à l'avènement de nouvelles théories comme fondement des mathématiques, à commencer par la théorie des catégories, comme le suggèrent David Rabouin et Sébastien Maronne, même si dans l'ensemble de son œuvre Vuillemin en est resté à une mention très anecdotique de cette théorie [Vuillemin 1970].

3. S'il s'agit d'ouvrages de *Vuillemin* récents en 1993, alors on peut penser que la classification des systèmes philosophiques proposée dans *Nécessité ou contingence* et *What Are Philosophical systems?* [Vuillemin 1984b, 1986] aurait rendu obsolète l'achèvement de *La Philosophie de l'algèbre*.
4. S'il s'agit enfin de parutions d'autres auteurs proches de 1993, alors il pourrait être question de l'ouvrage de Hourya Benis-Sinaceur *Corps et modèles* [Benis-Sinaceur 1991] qui « de l'analyse classique à l'algèbre "moderne" et de celle-ci à la théorie des modèles, [...] trace le parcours singulier d'une alliance réussie des mathématiques et de la logique » en étudiant l'histoire de la théorie de la structure algébrique de corps réel clos, prolongeant ainsi, bien qu'en suivant une perspective plus historique, le chemin tracé par Jules Vuillemin.

Sur cette question, l'édition de 1993 nous réduit aux conjectures.

La question de savoir pourquoi Vuillemin a renoncé au tome II en suscite immédiatement une autre. Le renoncement à cette publication est-il le signe du caractère aporétique de l'ambitieux programme de *La Philosophie de l'algèbre* ou au contraire du fait qu'il ait été réalisé sous une autre forme ?

Comme le montre la Conclusion du tome I, les ambitions de Vuillemin ne se limitaient pas à ce que semble indiquer la formule de 1993, à savoir « décri[re] la révolution de pensée qui, au siècle dernier, a changé la nature de l'algèbre ». Il ne s'agissait en effet pas simplement de proposer une philosophie de la seule algèbre comme on aurait pu inventer une philosophie de la seule géométrie ou de la seule topologie : par-delà les révolutions de l'algèbre, Vuillemin voulait montrer comment l'avènement de la nouvelle mathématique non seulement transformait la philosophie des mathématiques tout entière, mais aussi et surtout annonçait un renouvellement profond de la philosophie pure en général.

On voit ainsi toute l'actualité que conserve ce programme d'embrasser non seulement l'histoire des mathématiques et leur philosophie, mais aussi la philosophie théorique et le problème de la connaissance.

### 3 Lire *La Philosophie de l'algèbre*

Une fois admis qu'il y a, plus que jamais, du sens à accorder à *La Philosophie de l'algèbre*, le temps, le crédit et l'attention qu'elle mérite, reste à savoir *comment* lire cet ouvrage foisonnant et complexe.

Une première approche est de comprendre l'ouvrage d'abord de façon interne, puis de le situer dans l'œuvre de l'auteur et plus généralement dans son époque. Baptiste Mèlès décrit ainsi la structure et l'évolution du projet de *La Philosophie de l'algèbre* en s'attachant à montrer la préservation du caractère systématique de l'ouvrage dans ses extensions successives. David Rabouin analyse le traitement par Vuillemin du « problème, si important et si négligé aujourd'hui, de la *Mathesis universalis* dans ses rapports à la philosophie » [Vuillemin 1962, 66]. Sébastien Maronne étudie *La Philosophie de l'algèbre* à l'aune de la genèse de la méthode structurale qui y est présentée en rapportant celle-ci à la méthode cartésienne et celle-là à l'ouvrage *Mathématiques et métaphysique chez Descartes*. Benoît Timmermans s'interroge sur l'application par Vuillemin de la propriété formelle d'associativité aux actes de la conscience morale. David Thomasette considère les prolongements de la notion d'abstraction structurale dans les études tardives de Vuillemin sur la notion d'espace représentatif conduites en particulier dans l'ouvrage posthume *Être et choix* [Vuillemin s.d.]. Gabriella Crocco aborde le problème du pluralisme en mathématiques et en philosophie en procédant à une comparaison méthodique des conclusions de *La Philosophie de l'algèbre* avec celles de *What Are Philosophical Systems ?*

Une deuxième approche consiste à étudier de manière critique l'histoire des mathématiques pratiquée par Vuillemin : Hourya Benis-Sinaceur et Emmylou Haffner montrent ainsi de quelle manière Vuillemin s'inscrit dans la ligne de Cavailles et examinent en historiennes le traitement philosophique auquel Vuillemin soumet l'œuvre mathématique de Dedekind. Simon Decaens étudie enfin la réception française de la théorie des treillis en France afin d'éclairer et de mieux comprendre les intérêts propres qui conduisent Vuillemin à voir en celle-ci une « algèbre de l'algèbre ».

Ce dossier thématique ne pouvait se clore qu'en laissant la parole à Jules Vuillemin et à sa veuve Gudrun Vuillemin-Diem, décédée le 16 novembre 2018. Dans un « Dossier documentaire », on trouvera ainsi la conclusion générale, restée inédite, des deux tomes de *La Philosophie de l'algèbre*, ainsi que la notice détaillée, rédigée par Gudrun Vuillemin-Diem, relative à la « Boîte V » du fonds Jules-Vuillemin, qui contient les documents relatifs au tome II de *La Philosophie de l'algèbre*.

En offrant au lectorat de Vuillemin le présent dossier, nous espérons ainsi contribuer « par le travail et pour le travail » [Rashed 1991, xii] à honorer *La Philosophie de l'algèbre* en la faisant sortir encore davantage de sa discrétion et en encourageant d'autres chercheurs à explorer sa profondeur.

## 4 Remerciements

Ce dossier est l'aboutissement d'un long travail et de l'union de nombreuses forces.

C'est en 2012, avec l'accord de Gudrun Vuillemin-Diem ainsi que de Françoise Létoublon et de Jean Vuillemin, enfants du philosophe, et en concertation avec Gerhard Heinzmann et le Comité scientifique du Fonds Jules-Vuillemin, que Thomas Bénatouïl a accueilli Baptiste Mèlès pour travailler sur l'exploitation scientifique du manuscrit du tome II de *La Philosophie de l'algèbre* dans le cadre d'un postdoctorat aux Archives Henri-Poincaré (UMR 7117) en 2012-2013. Celui-ci a alors réuni une équipe composée de Simon Decaens, Emmylou Haffner, Gerhard Heinzmann, Sébastien Maronne, Philippe Nabonnand, David Rabouin et David Thomasette. David Thomasette a ensuite organisé le 9 décembre 2016 à Nancy une journée d'études consacrée aux deux tomes de l'ouvrage, à laquelle participèrent Gabriella Crocco, Simon Decaens, Emmylou Haffner, Baptiste Mèlès, David Rabouin, Élisabeth Schwartz et Benoît Timmermans. Le travail sur l'ouvrage s'est poursuivi au sein du projet ANR VUILLEMIN <ANR-17-CE27-0017-01> (2017-2020) porté par Baptiste Mèlès, avec les postdoctorats de David Thomasette (2017-2019) et de Simon Decaens (2019-2020).

Nous exprimons toute notre reconnaissance aux ayants droit de Jules Vuillemin, <sup>†</sup>Gudrun Vuillemin-Diem, Françoise Létoublon et Jean Vuillemin, d'avoir autorisé et encouragé ce travail.

## Bibliographie

- BENIS-SINACEUR, Hourya [1991], *Corps et modèles. Essai sur l'histoire de l'algèbre réelle*, Paris : Vrin.
- [2018], Scientific philosophy and philosophical science, dans *The Philosophers and Mathematics : Festschrift for Roshdi Rashed*, édité par H. Tahiri, Cham : Springer, *Logic, Epistemology, and the Unity of Science*, t. 43, 25–66, doi : 10.1007/978-3-319-93733-5\_2.
- BOYER, Carl B. [1962], Compte rendu de Jules Vuillemin, *Mathématiques et Métaphysique chez Descartes, Isis*, 53(2), 267–268, doi : 10/d6vx6p.
- BRUNSCHVIG, Léon [1912], *Les Étapes de la philosophie mathématique*, Paris : Félix Alcan.
- CAVAILLÈS, Jean [1994], *Œuvres complètes de philosophie des sciences*, Paris : Hermann.
- CLAVELIN, Maurice [1961], Compte rendu de Jules Vuillemin, *Mathématiques et métaphysique chez Descartes, Revue Philosophique de la France et de l'Étranger*, 151, 509–519.
- COLLECTIF [1962], *La Philosophie analytique*, Cahiers de Royaumont, Paris : Éditions de Minuit.

- DESANTI, Jean-Toussaint [1968], *Les Idéalités mathématiques*, L'ordre philosophique, Paris : Seuil.
- DESCARTES, René [1897-1913], *Œuvres de Descartes*, Paris : Cerf, 11 vol., éd. de Ch. Adam et P. Tannery. Nouvelle éd., Paris : Vrin, 1964-1971. Reprint 1996.
- DOPP, J. [1960], Compte rendu de Jules Vuillemin, *Mathématiques et métaphysique chez Descartes*, *Revue philosophique de Louvain*, 58, 301–302.
- ECO, Umberto [1981], *Il Nome della rosa*, Milan : Bompiani.
- GRANGER, Gilles-Gaston [1968], *Essai d'une philosophie du style*, Philosophies pour l'âge de la science, Paris : Armand Colin.
- GRIZE, Jean-Blaise [1964], Compte rendu de Jules Vuillemin, *La Philosophie de l'algèbre. Tome Premier : Recherches sur quelques concepts et méthodes de l'Algèbre Moderne*, *Revue de Théologie et de Philosophie*, 14(6), 392–393.
- GROSHOLZ, Emily [2005], Jules Vuillemin's *La Philosophie de l'Algèbre* : The Philosophical Uses of Mathematics, dans *Philosophie des mathématiques et théorie de la connaissance. L'œuvre de Jules Vuillemin*, édité par R. Rashed & P. Pellegrin, Paris : Blanchard, 253–269.
- GUEROULT, Martial [1930], *L'Évolution et la structure de la doctrine de la science chez Fichte*, Paris : Les Belles lettres.
- [1953], *Descartes selon l'ordre des raisons*, Paris : Aubier, 2 vol.
- [1955], *Nouvelles réflexions sur la preuve ontologique de Descartes*, Paris : Vrin.
- HEIDEGGER, Martin [1927], *Sein und Zeit*, Halle : M. Niemeyer.
- HUSSERL, Edmund [1891], *Philosophie der Arithmetik, psychologische und logische Untersuchungen*, Halle-Saale : R. Stricker.
- [1913], *Ideen zu einer reinen Phänomenologie und phänomenologischen Philosophie*, Halle : M. Niemeyer.
- ITARD, Jean [1963], Compte rendu de Jules Vuillemin, *Mathématiques et métaphysique chez Descartes*, *Revue d'histoire des sciences et de leurs applications*, 16(2), 186–187.
- JACOB, André [1963], Jules Vuillemin, *La Philosophie de l'algèbre*, t.I : Recherches sur quelques concepts et méthodes de l'Algèbre Moderne, *Les Études philosophiques*, 18(3), 383–384.

- KAMBARTEL, Friedrich [1965], Die strukturtheoretische Interpretation der Mathematik und der philosophische Kritizismus. Zur Theorie eines Zusammenhanges bei J. Vuillemin [Zur Diskussion], *Archiv für Geschichte der Philosophie*, 47, 79–97.
- LAUTMAN, Albert [2006], *Les Mathématiques, les idées et le réel physique*, Paris : Vrin.
- MARONNE, Sébastien [2014], Pierre Samuel et Jules Vuillemin, mathématiques et philosophie, dans *Des mathématiques en Auvergne : histoire, progrès, interactions*, édité par Th. Lambre, Clermont-Ferrand : *Revue d’Auvergne*, t. 1, 151–173.
- MÉLÈS, Baptiste [2016], *Les Classifications des systèmes philosophiques*, Librairie philosophique, Paris : Vrin.
- MICHEL, Alain [2005], Les mathématiques et la constitution de la mécanique rationnelle : sur la pensée de la physique de Jules Vuillemin, dans *Philosophie des mathématiques et théorie de la connaissance. L’œuvre de Jules Vuillemin*, édité par R. Rashed & P. Pellegrin, Paris : Blanchard, 271–295.
- PFLUG, Günther [1961], Compte rendu de Jules Vuillemin, « La Philosophie de l’algèbre de Lagrange », *Mathématiques et métaphysique chez Descartes*, *Archiv für Geschichte der Philosophie*, 43(2), 200–205.
- PLATON [2008], *Œuvres complètes*, Paris : Flammarion.
- RASHED, Roshdi (éd.) [1991], *Mathématiques et Philosophie de l’Antiquité à l’Âge classique*, Paris : Éditions du CNRS.
- RASHED, Roshdi & PELLEGRIN, Pierre (éd.) [2005], *Philosophie des mathématiques et théorie de la connaissance. L’œuvre de Jules Vuillemin*, Sciences dans l’Histoire, Paris : Librairie Albert Blanchard.
- ROBERT, Jean-Dominique [1968], La philosophie à l’heure des sciences de l’homme : La réaction des philosophes, *Archives de Philosophie*, 31(1), 72–124, doi : 10.2307/43032937.
- SARTRE, Jean-Paul [1943], *L’Être et le Néant : essai d’ontologie phénoménologique*, Paris : Gallimard.
- [1960], *Critique de la raison dialectique. Tome I, Théorie des ensembles pratiques ; précédé de Question de méthode*, Paris : Gallimard.
- SCHWARTZ, Elisabeth [2005], Histoire des mathématiques et histoire de la philosophie chez Jules Vuillemin, dans *Philosophie des mathématiques et théorie de la connaissance. L’œuvre de Jules Vuillemin*, édité par R. Rashed & P. Pellegrin, Paris : Librairie Albert Blanchard, 1–28.

- [2015], Le *Descartes* de Jules Vuillemin et sa contribution à sa *Philosophie de l'algèbre 1, Les Études philosophiques*, 112(1), 31–50, doi : 10.3917/leph.151.0031.
- TIMMERMANS, Benoît [2012], *Histoire philosophique de l'algèbre moderne. Les origines romantiques de la pensée abstraite*, Paris : Classiques Garnier.
- VUILLEMIN, Jules [1948], *Le Sens du destin*, t. 21, Neuchâtel : Éditions de la Baconnière.
- [1959], Le problème phénoménologique : intentionnalité et réflexion, *Revue Philosophique de la France et de l'Étranger*, 149, 463–470, doi : 10.2307/41088874.
- [1960a], La philosophie de l'algèbre de Lagrange (réflexions sur le mémoire de 1770-1771), *Les Conférences du Palais de la Découverte*, Série D(71), 5–24, conférence faite le 6 février 1960.
- [1960b], *Mathématiques et Métaphysique chez Descartes*, Épiméthée, Paris : PUF.
- [1961], Sur la différence et l'identité des méthodes de la métaphysique et des mathématiques chez Descartes et Leibniz et sur la conception classique des principes de causalité et de correspondance, *Archiv für Geschichte der Philosophie*, 43(3), 267–302, doi : 10.1515/agph.1961.43.3.267.
- [1962], *La Philosophie de l'algèbre*, Épiméthée, Paris : PUF, réédité en 1993 avec une quatrième de couverture rédigée à cette occasion.
- [1963], *Leçon inaugurale faite le mercredi 5 décembre 1962. Chaire de philosophie de la connaissance*, Paris : Collège de France.
- [1964a], Perspective de la philosophie, *Janus*, 4, 103–112.
- [1964b], Sur les propriétés formelles et matérielles de l'ordre cartésien des raisons, dans *Études sur l'histoire de la philosophie, ses problèmes, ses méthodes ; en hommage à Martial Gueroult*, Paris : Fischbacher, 43–58.
- [1967], *De la logique à la théologie. Cinq études sur Aristote*, Nouvelle Bibliothèque Scientifique, Paris : Flammarion.
- [1968], *Leçons sur la première philosophie de Russell*, Philosophies pour l'âge de la science, Paris : Armand Colin.
- [1970], Compte rendu de Ch.F. Hockett, « Mathematics and Linguistics », in *Current Trends in Linguistics*, Vol. 3, Mouton, The Hague–Paris 1966, 155-304, *L'Âge de la science*, 3(2), 157.

- [1971a], *La Logique et le Monde sensible. Études sur les théories contemporaines de l'abstraction*, Nouvelle bibliothèque Scientifique, Paris : Flammarion.
- [1971b], *Le Dieu d'Anselme et Les Apparences de la raison*, Paris : Aubier.
- [1984a], Les formes fondamentales de la prédication : Un essai de classification, *Recherches sur la philosophie et le langage*, 4, 9–30.
- [1984b], *Nécessité ou contingence. L'aporie de Diodore et les systèmes philosophiques*, Paris : Minuit ; Fondation Singer-Polignac.
- [1986], *What are Philosophical Systems ?*, Cambridge ; Londres ; New York : Cambridge University Press.
- [1991], Replies, dans *Causality, Method and Modality. Essays in honour of Jules Vuillemin*, édité par G. G. Brittan, Dordrecht : Springer, 207–224, doi : 10.1007/978-94-011-3348-7\_12.
- [1999], Induction et existence physique, *Dialectica*, 53(3–4), 345–383, doi : 10.1111/j.1746-8361.1999.tb00191.x.
- [s.d.], *Être et choix. Éléments de philosophie réaliste*, Nancy : Archives Henri-Poincaré.
- VUILLEMIN, Jules & GRANGER, Gilles-Gaston [1968], Tendances de la philosophie des sciences en France depuis 1950, dans *Contemporary Philosophy. A Survey. La Philosophie Contemporaine. Chroniques*, édité par R. Klibansky, Florence : La Nuova Italia, 161–163.

# Structure et évolution de *La Philosophie de l'algèbre* de Jules Vuillemin (tomes I et II)

Baptiste Méléès

Archives Henri-Poincaré – Philosophie et Recherches  
sur les Sciences et les Technologies (AHP-PRéST),  
UMR 7117, CNRS, Université de Lorraine,  
Université de Strasbourg, Nancy (France)

**Résumé :** Ouvrage dense et paru de façon tronquée, *La Philosophie de l'algèbre* de Jules Vuillemin (tomes I et II) peut sembler composite. Nous montrons au contraire que ce manifeste de la structure en philosophie n'est pas rhapsodie mais système : ses parties ne prennent tout leur sens que dans leur relation au tout. Loin de remettre en cause le résultat de l'analyse structurale, l'étude génétique met au jour un souci constant de préservation de la systémativité au fil des transformations successives.

**Abstract:** Jules Vuillemin's dense book *La Philosophie de l'algèbre* (volume I and II) was only partially published and may appear somewhat composite. In contrast, we show that this manifesto of structure in philosophy is systematic rather than rhapsodic—its component parts take their full meaning only when examined in relationship to the whole. Far from questioning the result of such structural analyses, genetic considerations reveal Vuillemin's effort to preserve systematicity through all the successive transformations.

## 1 Introduction

Ouvrage dense et technique, *La Philosophie de l'algèbre* de Jules Vuillemin [Vuillemin 1962], [Vuillemin s. d.] est d'une lecture d'autant plus ardue que deux tentations risquent de détourner le lecteur de la recherche de son sens plein. La première est d'y voir un ouvrage composite juxtaposant des analyses

---

hétéroclites, dont certaines ont d'ailleurs fait l'objet de publications préalables [Vuillemin 1959, 1960a, 1961], la seconde d'arguer de son caractère inachevé pour rejeter sur les tourments de la genèse les prétendus défauts de sa structure.

À rebours de ces deux tentations, nous soutiendrons que *La Philosophie de l'algèbre* est dans son intégralité douée d'une structure forte. Comme toute œuvre systématique, celle-ci ne peut être comprise par des morceaux choisis : chaque partie n'a de sens que dans son rapport au tout. Ce sera donc faire œuvre banale, mais à notre sens non inutile, que de se borner dans un premier temps à décrire la structure strictement interne de l'ouvrage, en espérant n'avoir « point fait œuvre d'érudition » [Vuillemin 1971, 12] et aussi peu que possible d'originalité.

Il ne saurait être question de négliger la philologie, tant il est vrai que « le rébarbatif établissement des textes ne per[d] pas son importance » pour la philosophie récente [Vuillemin 1990, 12]. Mais pour montrer que les considérations génétiques ne sont pas essentielles à la compréhension du texte, nous les rejetons dans un second temps et montrerons qu'elles confirment les conclusions de l'analyse structurale : l'ouvrage a crû non par agrégation d'éléments hétéroclites mais par enrichissement et transformation d'une structure globale satisfaite et transmise de manière récursive au moins depuis la plus ancienne version dont nous ayons la trace.

## 2 Structure

Décrire la structure de l'ouvrage suppose que l'on commence par distinguer la notion éditoriale de « tome<sup>1</sup> » et la notion logique de « partie ». Comme le montre la page de garde du volume paru en 1962, ce « tome premier » de *La Philosophie de l'algèbre* a pour titre « Recherches sur quelques concepts et méthodes de l'algèbre moderne ». Aussi bien la table des matières que la p. 67 montrent que ce tome contient d'abord une Introduction puis une première partie, « Réflexions sur le développement de la Théorie des équations algébriques », cette dernière étant donc *strictement* incluse dans le tome I. On en conclut premièrement que l'introduction n'est pas propre à la première partie mais que sa portée s'étend à *La Philosophie de l'algèbre* tout entière, deuxièmement que le tome I ne se confond pas avec la première partie, puisqu'il l'inclut strictement.

Ces considérations nous permettent de distinguer la composition éditoriale et la composition logique de l'ouvrage. *Logiquement*, l'ouvrage devait se composer de quatre moments : une Introduction générale, un développement en deux parties et une Conclusion générale. *Éditorialement*, l'ouvrage aurait dû occuper deux à quatre volumes : le volume que nous connaissons aurait

---

1. Le terme de « volume » eût d'ailleurs été plus exact.

été suivi d'« un autre volume ou [de] trois publications distinctes, ayant pour titre : *Structure, infini, ordre* » (§7, p. 66). Le tome I comprend l'Introduction générale et la première partie ; la ou les publications suivantes auraient contenu la seconde partie et la Conclusion générale. Délaissant désormais autant que faire se peut les considérations éditoriales, nous nous concentrerons sur la composition logique de l'ouvrage.

Nous verrons ainsi d'abord que l'Introduction générale pose le problème de l'ouvrage, qui est de savoir quelles leçons la philosophie peut tirer de la possibilité, attestée par l'algèbre moderne, d'une connaissance pure. Le développement bipartite décrit et analyse ensuite l'avènement de cette connaissance pure comme le passage d'une méthode génétique à une méthode structurale (première partie) puis de celle-ci à une méthode proprement axiomatique (seconde partie). La Conclusion répond enfin au problème posé par l'Introduction en montrant quelles perspectives l'évolution récente de l'algèbre offre sur l'évolution prochaine de la philosophie théorique.

La *Divine comédie* de Vuillemin décrit donc la voie qui mène la philosophie pure de l'Enfer au Purgatoire puis au Paradis, l'algèbre étant son Virgile et sa Béatrice.

## 2.1 Introduction générale : position du problème et point de départ historique

L'Introduction générale prend pour point de départ « l'affinité d'inspiration entre les Mathématiques pures et la Philosophie théorique » (§2, p. 5), disciplines qui se distinguent non seulement des connaissances et de la philosophie empiriques, mais également de celles qui, quoique *a priori* dans leur méthode, n'en empruntent pas moins leurs principes à l'expérience (§1-2).

Cette faculté commune qu'ont deux disciplines de s'abstraire de toute dépendance à l'expérience explique leur destinée commune. Comme l'illustrent les figures de Platon, Descartes, Leibniz et Kant, « l'histoire des Mathématiques et de la Philosophie montre qu'un renouvellement des méthodes de celle-là a, chaque fois, des répercussions sur celle-ci » (§2, p. 4). L'auteur propose donc naturellement de prolonger l'analogie en examinant quelles conséquences la philosophie théorique peut espérer tirer de la possibilité de la connaissance pure attestée par l'algèbre moderne.

Je me propose donc un double but :

1. j'examinerai comment une connaissance pure est possible eu égard à notre faculté de penser ;
2. j'utiliserai les analogies de la connaissance mathématique pour critiquer, réformer et définir, autant qu'il se pourra, la méthode propre à la Philosophie théorique. (§2, p. 5)

Reste à déterminer les conditions d'émergence de cette connaissance pure en montrant à partir de quelle méthode – et surtout en rupture avec laquelle – elle a pu advenir. C'est pourquoi l'auteur propose avant toute chose de retracer, « selon l'ordre chronologique, quelques méthodes de la connaissance pure ou *a priori* qui ont paru définir avec le plus de précision à l'époque classique les rapports de la Métaphysique et des mathématiques » (p. 5). Ces analyses révèlent l'apparition parallèle de la « méthode génétique » en philosophie (§ 3–5) et en mathématiques (§ 6).

Le premier temps est celui de l'apparition de la méthode génétique en philosophie, de Descartes à Fichte (§ 3–5). L'étude des rapports entre « mathématiques et métaphysique chez Descartes », qui avait donné son titre au livre de 1960 [Vuillemin 1960*b*], [Schwartz 2015], est systématiquement prolongée avec Leibniz et Kant.

Auteur	Mathématiques	Métaphysique
Descartes	p. 5–13	p. 13–28
Leibniz	p. 28–41	p. 41–50
Kant	p. 50–56	p. 56–60

Tableau 1 – Structure des § 3-5 de *La Philosophie de l'algèbre*

Vuillemin voit dans les trois étapes de ce parcours historique « une évolution qui a détaché peu à peu l'idée de son contexte représentatif et théologique, pour la réduire à un acte de l'intelligence » (§ 5, p. 59). Par ces « crises successives de la méthode philosophique » (§ 6, p. 60), la philosophie, renonçant à l'idée de fonder en Dieu la représentation, en est venue à la « méthode génétique », définie comme « méthode radicale, qui construit tous les concepts de la philosophie pure uniquement à partir des opérations du Moi fini » (§ 5, p. 59) et dont Fichte est le premier représentant. Mais bien loin que l'histoire ne s'achève, elle prend ici un nouveau départ : « dans la première partie de ce livre, je tenterai de montrer qu'une fois écarté le préjugé dogmatique de la représentation, un problème nouveau naît inexorablement du développement de la méthode génétique et que ce problème n'est autre que celui des structures » (§ 5, p. 60) [Vuillemin 1960*b*, 141]. Ainsi, de même que l'échec d'une fondation de la représentation en Dieu a mené à sa fondation dans l'esprit humain, l'échec de la méthode génétique qui en résulte conduira à la méthode structurale<sup>2</sup>.

Le second temps de la description de la méthode génétique est le récit de son émergence en mathématiques, de Descartes à Lagrange, parallèlement

2. Elisabeth Schwartz parle ainsi fort justement d'un « parallélisme dialectique » des cours respectifs de l'histoire des mathématiques et de la philosophie [Schwartz 2005, 23, 25].

à la philosophie pure (§6). Rompant avec la méthode encore mi-sensible mi-intellectuelle des mathématiciens du XVIII<sup>e</sup> siècle et leur « frénésie de l'ingéniosité » (p. 64), Lagrange « adopte un procédé uniforme pour toutes les sciences exactes » (p. 64, ainsi que §13, p. 116–117). En proposant de partir d'« un principe exprimé dans un algorithme, c'est-à-dire défini par certaines lois d'opérations », pour en dériver, « sans qu'on ait besoin de faire appel à aucune intuition sensible, [les] divers théorèmes qui composent les sciences », Lagrange, contemporain de Fichte, s'est fait l'apôtre en mathématiques de la méthode génétique.

Le point de départ étant ainsi fixé, l'auteur peut désormais décrire l'avènement – avéré en mathématiques, imminent en philosophie – d'une connaissance pure. Ce développement aura lieu en deux temps. La première partie, intitulée « Réflexions sur le développement de la théorie des équations algébriques », porte sur les « méthodes proprement dites » et leur « irruption ». La seconde, qui décrira les « objets et idées nouvelles que leur application a permis d'apercevoir », devrait s'intituler « Structure, infini, ordre » (§7, p. 65).

## 2.2 Première partie : de la méthode génétique à la méthode structurale

Pour décrire « l'irruption de ces méthodes nouvelles tirées de l'analyse abstraite », la première partie du développement procède en trois temps : elle analyse d'abord les règles de la méthode, ensuite certaines de ses mises en œuvre les plus exemplaires, enfin les leçons philosophiques que l'on peut en tirer.

### 2.2.1 Règles

Comme l'annonce Vuillemin dans le plan de l'ouvrage (§7, p. 66), la première section de la première partie, intitulée « Les règles de la méthode », décrit « l'avènement de la méthode de Galois » afin d'« examine[r] quelles règles ou quels préceptes l'experiment<sup>3</sup> ». Ce serait donc se méprendre gravement que de chercher dans les chapitres I à IV une histoire incomplète et partielle de la théorie des équations algébriques : au début de la Conclusion, le §49 révélera en effet que les quatre premiers chapitres de l'ouvrage, dont chacun porte un nom de mathématicien – Lagrange, Gauss, Abel, Galois – ne sont pas dictés par la chronologie, méthode rejetée d'entrée de jeu par l'auteur (§2, p. 3), mais épousent l'ordre des quatre règles de la méthode de la « mathématique matérielle » formulées par Descartes.

Première règle : à l'évidence cartésienne de *natures simples* se substitue l'étude *a priori* des structures, entrevue par Lagrange dans son analyse critique des méthodes de résolution algébrique des équations polynomiales (chap. I),

---

3. Voir la contribution de Sébastien Maronne dans le présent dossier.

même si la méthode génétique l'a empêché de concevoir la structure autrement que comme une genèse inversée. De même, l'intuition intellectuelle de Fichte, anticipation d'une notion de structure en philosophie, reste conditionnée de manière extrinsèque par le choc de la sensation (§ 13).

Deuxième règle : l'*analyse*, plutôt que d'être menée « jusqu'aux parcelles des difficultés », cible les « structures élémentaires nécessaires pour la résolution » (§ 49, p. 468), dont Gauss a montré l'exemple en réduisant le problème de la constructibilité des polygones réguliers à ce que l'on peut interpréter de manière moderne comme l'étude de groupes cycliques (chap. II), même si la persistance d'une conception aristotélicienne de la construction et d'un intuitionnisme extrinsèque (§ 20–22) l'ont empêché de mener à son terme l'élimination du génie (§ 15 et 18 ; § 49, p. 469). De même la philosophie doit-elle s'affranchir de toute faculté extrinsèque à la raison, le seul intuitionnisme viable étant celui, intrinsèque, de la limitation des procédés intellectuels (§ 20–22).

Troisième règle : la *synthèse*, de simple outil pédagogique, devient gage de pureté, comme le faisait Abel en faisant dépendre toute recherche de solutions d'une démonstration préalable de leur possibilité (chap. III) – méthode que la philosophie serait bien inspirée de suivre pour l'analyse du concept de Dieu (§ 25), comme le fera Vuillemin quelques années plus tard [Vuillemin 1971]<sup>4</sup>.

Quatrième règle : l'*énumération* des natures simples cède la place à celle des structures permettant la solution d'un problème, inventée par Galois lorsqu'il articula la décomposition des groupes à l'extension des corps (chap. IV). On peut, de manière analogue, examiner la portée et les limites de la notion de structure en philosophie (§ 34).

Vuillemin annonçait qu'« une fois écarté le préjugé dogmatique de la représentation, un problème nouveau apparaît inexorablement du développement de la méthode génétique et que ce problème n'est autre que celui des structures » (§ 5, p. 60) : la première section montre en effet que la méthode génétique de Lagrange est à la fois l'achèvement des règles cartésiennes de la méthode et l'amorce des transformations menant à la méthode structurale de Galois.

## 2.2.2 Applications

Après l'exposition des règles viennent ce que Vuillemin appelle modestement « quelques applications » (§ 7, p. 66). On l'excusera du peu : la section II ne décrit rien de moins que la mutation de la géométrie induite par l'étude abstraite des structures. Son titre cartésien de « Mathématique universelle » témoigne d'une transformation analogue à celle des « règles de la méthode » : de même que la théorie des proportions avait selon Vuillemin permis à Descartes de refonder la géométrie sur l'algèbre, l'algèbre des

---

4. Voir notre article « Les Anselme de Jules Vuillemin : de la critique générale de la raison pure à la classification des systèmes philosophiques » [Mèlès 2020].

structures reprend le programme cartésien de *mathesis universalis*<sup>5</sup>, du moins sous la forme de ce que les *Regulae ad directionem ingenii* annoncent comme « science générale qui explique tout ce qu'on peut chercher touchant l'ordre et la mesure, sans application à une matière particulière » [Descartes 1986, AT X, 378]. La méthode structurale renouvelle donc la *mathesis universalis* entendue comme programme, interne aux mathématiques, d'unification. La purification de l'algèbre a définitivement fait quitter à la géométrie l'image pour le concept (chap. V) et la description pour l'explication (chap. VI).

L'algèbre a d'abord transformé la méthode de la géométrie en l'affranchissant de toute dépendance à l'intuition sensible (chap. V) :

Nous avons développé la Théorie de Galois dans nous référer à des illustrations géométriques, tout en signalant l'analogie que cette Théorie permettait d'établir, par exemple, entre l'étude de l'équation  $x^4 - 2x^2 + 9 = 0$  et celle des symétries du rectangle. À vrai dire, de telles analogies instaurent entre le concept algébrique et l'intuition géométrique un rapport assez nouveau eu égard à celui qu'établit la Géométrie analytique. Il convient donc de les étudier systématiquement et de les saisir sous leur forme générale. (§ 35, p. 303)

Contrairement à la conception antique de la mathématique universelle, héritée de Platon (§ 40–41), les travaux de Klein montrent que l'image ne doit être conçue que comme un langage conventionnel. En révélant l'isomorphisme entre les polygones réguliers et les groupes de rotations dans le plan (§ 37) ainsi qu'entre les polyèdres réguliers et les groupes finis de rotations dans l'espace (§ 38–39), la « théorie de Klein », qui donne son titre au chapitre, a dépouillé l'image géométrique de toute utilité propre par rapport au concept algébrique. Désormais indépendante de toute intuition, fût-elle pure, et directement corrélée à la seule notion abstraite de structure, la géométrie, autrefois connaissance simplement *a priori* car « dépendant[e] de l'expérience pour [ses] notions et [ses] axiomes fondamentaux », a été promue par l'algèbre au rang de connaissance pure, « indépendant[e] de l'expérience pour [ses] principes primitifs comme pour [ses] enchaînements » (§ 1, p. 1).

En même temps qu'elle quittait définitivement l'image pour le concept, la géométrie passait « de la description à l'explication » (§ 42, p. 368) : d'étude idiographique des courbes, elle devint classification de structures abstraites. Vuillemin consacre ainsi le chapitre VI à étudier « l'application de cette nouvelle méthode, due essentiellement à Lie, à propos des “courbes W” » (§ 43, p. 369), Lie ayant substitué à la description *a posteriori* de la spirale logarithmique la dérivation *a priori* et générale de ses propriétés grâce aux liens entre groupes continus et courbes auto-projectives (§ 42–46). Ce renouvellement de la géométrie permet notamment de purifier le concept d'espace de toute origine empirique et absolue pour ne le rapporter qu'à ses

---

5. Voir dans le présent dossier la contribution de David Rabouin, « L'idée de *mathesis universalis* dans *La Philosophie de l'algèbre* I et II de Jules Vuillemin ».

propriétés abstraites : « La Théorie des groupes continus permet de résoudre rationnellement les problèmes concernant le réel ou du moins la “forme” qui s’impose à celui-ci. Elle fournit donc l’instrument mathématique approprié pour analyser le problème de l’espace » (§ 47, p. 399), comme le montre l’étude des axiomatisations de l’espace par Riemann, Helmholtz, Lie et Poincaré.

La deuxième section de la première partie montre ainsi qu’en appliquant les méthodes et concepts de l’algèbre nouvelle, la géométrie s’est à son tour approprié deux de ses principales vertus : l’indépendance par rapport à l’expérience sensible et la vertu explicative.

### 2.2.3 Leçons philosophiques

Le troisième temps de la première partie devait, selon l’Introduction générale, s’appuyer sur l’étude des règles de la méthode de Galois et de leur « extension » à la géométrie pour « poser le problème, si important et si négligé aujourd’hui, de la *mathesis universalis* dans ses rapports avec la philosophie » (§ 7, p. 66). Telle est la mission de la Conclusion.

Nous avons vu que l’Introduction du tome I portait sur l’ensemble de l’entreprise plutôt que sur la seule première partie. Il en va autrement de la Conclusion, dont la présentation typographique montre qu’elle est incluse dans la première partie – on pourrait même croire dans la deuxième section<sup>6</sup>, si par son contenu (notamment p. 465 et dans son premier moment, « Règles pour la direction de l’esprit ») elle ne tirait clairement les leçons de la première partie dans son ensemble. Le tome I contenait donc une Introduction générale à *La Philosophie de l’algèbre* mais une Conclusion restreinte à sa première partie.

À l’article défini près, la Conclusion porte le même nom que la section précédente : « La Mathématique universelle ». Gardons-nous pourtant de les croire redondantes : si la section précédente analysait la modernisation de l’idée de *mathesis universalis* comme programme d’unification interne aux mathématiques, la Conclusion se propose de rechercher le fondement philosophique des nouvelles méthodes mathématiques. Elle se donne pour programme, en termes cartésiens, de « contenir les premiers rudiments de la raison humaine, et s’étendre jusqu’à faire surgir des vérités de quelque sujet qu’on voudra » [Descartes 1986, AT X, 374]. Cette seconde *mathesis universalis*, qui prolonge la première en l’étudiant « dans ses rapports avec la philosophie », n’est donc plus tant entreprise d’unification interne aux mathématiques que de fondation externe. Une chose est de refonder la géométrie à la lumière de l’algèbre, une autre de fonder métaphysiquement cette science universelle. Comme l’avait vu Platon dans un passage que cite souvent Vuillemin, le mathématicien s’appuie sur les principes, le philosophe

6. Si l’on compare la police et la disposition des chapitres V et VI avec celle de la Conclusion, aussi bien p. 303, 366 et 465 d’une part que p. 580–581 de l’autre, la Conclusion semblera incluse dans la deuxième section, « Mathématique universelle ».

examine leur pertinence<sup>7</sup>. La seconde section et la Conclusion ne sont donc rien moins que redondantes : elles réalisent des parties complémentaires mais distinctes du programme de *mathesis universalis*.

La Conclusion procède en trois moments, qui correspondent aux « trois problèmes » posés par la première partie (p. 465). En prolongeant une remarque d'Élisabeth Schwartz, qui propose de comprendre le titre de l'ouvrage « par extension et métonymie tout à la fois » [Schwartz 2005, 3], nous comprendrons ces trois problèmes comme trois sens de l'expression « philosophie de l'algèbre ». D'abord sont tracés les contours de la philosophie *immanente* à l'algèbre moderne – les règles de sa méthode. Ensuite vient une philosophie *prenant pour objet* l'algèbre moderne, à la façon dont le jeune Husserl avait écrit une « philosophie de l'arithmétique ». Enfin peut-on tirer de ces analyses le programme d'une philosophie *digne de* l'algèbre moderne. Les trois philosophies de l'algèbre sont une philosophie *dans* l'algèbre, une philosophie *sur* l'algèbre, une philosophie *par* l'algèbre.

Le premier problème est ainsi celui des « préceptes de la méthode mathématique quand l'Algèbre devient formelle » ; il est traité dans la première section de la Conclusion, « Règles pour la direction de l'esprit » (§ 49–51), où Vuillemin lève en particulier le voile sur la structure quadripartite de la première section en la reliant expressément aux quatre règles cartésiennes de la méthode.

Le deuxième problème est celui des « positions philosophiques » qu'implique « l'existence d'une Algèbre formelle » ; il fait l'objet de la deuxième section, « Mathématiques et métaphysique » (§ 52–56), où l'auteur se livre à une critique de la philosophie mathématique de la phénoménologie, tant pour avoir prétendu fonder le droit sur le fait – les mathématiques sur la conscience – que pour avoir considéré qu'une entreprise de fondation impliquerait nécessairement l'unicité de l'édifice. Le philosophe doit prendre acte de l'une des principales leçons de l'algèbre moderne : la pluralité des choix d'axiomes possibles.

Le troisième problème est de savoir comment justifier l'application à la philosophie des préceptes de la méthode mathématique ; il est examiné dans la troisième section de la Conclusion, « L'idée d'ontologie formelle » (§ 57–60). La philosophie doit renoncer non seulement au dogmatisme analogique d'origine aristotélicienne, qui prétendait fonder sur la théologie l'unité de la science et de la philosophie (§ 57) et dont la philosophie moderne est heureusement revenue (§ 3–5), mais également au dogmatisme du phénomène, qui pensait pouvoir unir la science et la métaphysique par les méthodes du fini, autrement dit par la méthode génétique (§ 58). Si la philosophie ne veut pas renoncer à sa mission comme le fait l'existentialisme, radicalisation de la phénoménologie (§ 54 et 59), elle doit, par-delà la philosophie des mathématiques, faire sien le pluralisme de la connaissance pure dont l'algèbre moderne a montré l'exemple,

7. Platon, *République*, VII, 553c, passage auquel Vuillemin fait plusieurs allusions : § 2, p. 4 ; § 31, p. 278 ; § 50, p. 476.

c'est-à-dire étudier la pluralité des choix internes à la mathématique et leurs implications en philosophie théorique et pratique (§ 60).

Ces trois moments peuvent également être lus comme une réponse provisoire aux deux questions de l'Introduction générale. Le passage de la philosophie *dans* l'algèbre à la philosophie *sur* l'algèbre montre au lecteur, selon les termes du § 2, « comment une connaissance pure est possible eu égard à notre faculté de pensée ». Celui de la philosophie *sur* l'algèbre à la philosophie *par* l'algèbre consiste bien, quant à lui, à « utilis[er] les analogies de la connaissance mathématique pour critiquer, réformer et définir, autant qu'il se pourra, la méthode propre à la Philosophie théorique ». Cette cohérence interne a pu contribuer à faire croire, même aux lecteurs attentifs de Vuillemin, que le tome I pouvait se suffire à lui-même.

## 2.3 Seconde partie : de la méthode structurale à l'algèbre de l'algèbre

Le manuscrit du tome II, composé de sept chapitres – VII et VIII dans le ms. B, VIII [*sic*<sup>8</sup>] à XII dans le ms. A – puis une Conclusion, montre clairement que nous n'en étions qu'au milieu du chemin. La seconde partie de l'ouvrage, telle que l'annonçait le § 7 du tome I, devait décrire les « objets et idées nouvelles que leur application a permis d'apercevoir ». Dans son ultime état, le manuscrit porte bien le titre promis en 1962 : « Deuxième partie. Structure, infini, ordre<sup>9</sup> ».

En revanche, l'affirmation plus tardive de l'auteur – en quatrième de couverture de la réédition de 1993 – selon laquelle il aurait été « dissuadé de publier la première section de ce second tome et de rédiger les deux autres », n'est vraie que si l'on entend « rédiger » dans le sens exigeant de « parvenir à une version définitive ». Le manuscrit est en effet complet, si l'on en croit le critère – assurément algébrique – de la clôture par références internes.

### 2.3.1 Structure

Si la seconde partie a conservé le titre promis en 1962 de « Structure, infini, ordre », celui de sa première section semble s'être étoffé : le titre « Structure »

---

8. Dans l'état le plus ancien dont nous disposions (ms. A), les chapitres étaient numérotés de VI à XII. La numérotation a été décalée d'une unité lors de la réécriture des deux premiers chapitres (ms. B), probablement en raison de l'ajout d'un chapitre au tome I. Il existe donc deux chapitres VIII, que nous appellerons, selon leur ordre logique, VIIIa et VIIIb.

9. Ce titre peut dater des refontes de la première partie ou être ultérieur à la publication du tome I. Le plus ancien titre attesté dans les manuscrits pour la seconde partie est « De quelques structures d'Algèbre et d'Arithmétique et de leur utilisation en Théorie des nombres », titre qui deviendra, aux augmentations près que nous verrons, celui de la seule première section de la seconde partie.

s'est transformé en « De quelques structures d'Algèbre et d'Arithmétique, de leur utilisation en Théorie des nombres et en Géométrie et des problèmes philosophiques qui s'y rattachent ».

Comme le montre cet intitulé, Vuillemin se propose d'examiner la notion de structure selon les trois points de vue qui structuraient la première partie : d'abord la description des innovations mathématiques – les « quelques structures d'Algèbre et de Géométrie » faisant ainsi pendant aux « Règles de la méthode » du tome I – puis les « applications » – dans le tome I en géométrie (chap. V–VI), dans la présente section « en Théorie des nombres et en Géométrie » – et enfin « les problèmes philosophiques qui s'y rattachent » – tâche explicitement dévolue dans la première partie à la Conclusion (p. 465).

En pratique, dans les chapitres expressément consacrés à la notion de structure, Vuillemin va systématiquement regrouper les deux premiers moments – la description des structures et celle de leurs applications – dans un chapitre et traiter des « problèmes philosophiques » dans le suivant. Ce balancement permet de comprendre la composition logique de la section consacrée aux « divers problèmes mathématiques et philosophiques liés à la notion de structure » :

Parallèlement, on étudiera, [a] en correspondance avec [a1-2] le problème de l'extension de la notion de nombre, [a3] le problème philosophique de la définition et [b] en correspondance avec [b1-2] celui des invariants mathématiques et du dogmatisme des groupes [b3] celui des invariants phénoménologiques et du dogmatisme philosophique qui y est lié. (t. II, § 61, B2-3)

Le plan ainsi annoncé peut être clairement relié aux quatre premiers chapitres, en distinguant les deux moments mathématiques – règles et applications – du moment philosophique :

	1 et 2. Règles et applications mathématiques	3. Philosophie
a	VII. Les trois types d'extension de la notion de nombre	VIII[a]. Philosophie de la définition
b	VIII[b]. Structures gaussiennes, Théorie des nombres et Géométrie	IX. L'invariant phénoménologique et le problème de la réflexion

a1. Les trois types d'extension de la notion de nombre décrits dans le chapitre VII<sup>10</sup> sont d'abord le principe déjà « formaliste » de permanence des

10. Le tome I contient plusieurs renvois au chapitre VII : §13, p. 118 (renvoi à VII, §62) ; §15, p. 139 (ce que Vuillemin appelle les « chapitres I et II » semble être les chapitres VII et VIIIb) ; §18, p. 149 (vers VII et VIIIb et peut-être plus particulièrement VII, §66) ; §20 p. 172 (VII, §66) ; §22, p. 203 (VII, §63) et 206 (VII, §68) ; §55, p. 498 (VII, §63–64). C'est peut-être aussi le cas p. 137 (« comme on verra plus tard » au sujet des congruences de Gauss) et p. 202.

lois formelles de Hankel, ensuite le programme intuitionniste de Kronecker fondé sur une généralisation des congruences gaussiennes, enfin la méthode d'extension structurale, qui repose sur la construction de l'ensemble-quotient puis une identification à isomorphisme près.

a2. Le chapitre VII montre que les deux dernières extensions, seules légitimes selon Vuillemin – qui fait sienne la critique fregéenne du principe de Hankel –, sont des généralisations du calcul des congruences. Elles sont donc bien ce que promettait le titre de la section : un exemple d'« utilisation [...] de quelques structures d'Algèbre et d'Arithmétique [...] en Théorie des nombres ».

a3. Le chapitre VIIIa<sup>11</sup>, « Philosophie de la définition », porte quant à lui sur les « problèmes philosophiques qui [se] rattachent » aux extensions de la notion de nombre, et pour cela se propose de procéder en trois temps, où l'on reconnaîtra aisément les trois moments de la Conclusion de la première partie :

En réfléchissant sur les deux types légitimes d'extension de la notion de nombre [sc. la méthode de Kronecker et celle des extensions structurales], en les opposant tous deux à l'extension génétique [d'Euler] et en les distinguant l'un de l'autre, on s'efforcera de répondre aux trois sortes de problèmes généraux qu'a paru poser la constitution d'une Mathématique universelle : ceux de la méthode, ceux des rapports entre Mathématique et Métaphysique, ceux d'une ontologie formelle. (VIIIa, p. 34)

Le chapitre VIIIa commence ainsi par une sous-section « I. Questions de méthode », mais le manuscrit laissant bientôt la place à une version plus ancienne, baptisée par Gudrun Vuillemin « manuscrit A », les deux autres sous-sections ne sont pas plus explicitement marquées que ne le sont les sections « Infini » et « Ordre ».

Les deux chapitres suivants adoptent la même structure.

b1. Le chapitre VIIIb<sup>12</sup> décrit d'abord les invariants qui permettent la classification des structures que sont les formes quadratiques : « du point de vue arithmétique » le déterminant, « du point de vue algébrique » le rang, l'index d'inertie et la signature.

b2. Ayant exposé l'« idée nouvelle » de la classification par invariance relativement à des groupes de transformations, Vuillemin décrit une application importante de cette idée en géométrie : le programme d'Erlangen, entreprise de

---

11. Le chapitre VIIIa pourrait avoir été ajouté après une première rédaction de la première partie car nous n'avons identifié aucun renvoi du tome I à ce chapitre – à moins que Vuillemin n'ait décidé de séparer la partie philosophique, initialement intégrée au chapitre précédent ?

12. Le chapitre VIIIb semble avoir été à un moment de la rédaction – antérieur au ms. A – le deuxième de la seconde partie. Le tome I y renvoie plusieurs fois : § 15, p. 139, § 18, p. 149, § 30 p. 263 (VIIIb, § 46), § 34, p. 292 (VIIIb, § 48 à 49'), § 46, p. 393 (VIIIb § 48 à 49') et 395 (VIIIb, § 46), § 47, p. 402 (VIIIb, § 48) et 415 (VIIIb, § 47 A241).

classification des géométries selon leurs invariances par rapport aux différents groupes de transformation.

b3. Le chapitre IX est au VIIIb ce que le VIIIa était au VII : l'étude des « problèmes philosophiques qui [se] rattachent » à ces idées nouvelles<sup>13</sup>. Vuillemin s'y livre à une critique de la méthode phénoménologique de recherche des invariants par variation eidétique : Husserl aurait surestimé la lucidité de la conscience<sup>14</sup>. En étudiant les essences libérées de leurs applications, la phénoménologie a en effet perdu la garantie existentielle qui les accompagnait dans l'expérience ; celle-ci doit donc, comme en théorie des ensembles, limiter *a priori* la formation des concepts et, plutôt que d'en appeler au *deus ex machina* de la conscience (t. I, § 54), fonder logiquement tous les concepts fondamentaux de la phénoménologie ; le concept de temps ne doit ainsi pas être fondé sur l'expérience mais, par adjonctions successives, sur le concept logique d'ordre.

Le plan du § 61 cité plus haut et la symétrie intrinsèque des quatre premiers chapitres nous convainquent qu'ils formaient à eux seuls la totalité de la section « Structure ». Ils accomplissent également en intégralité le programme que le tome I assignait à cette section :

Étudiant d'abord quelques structures, dont les *Disquisitiones arithmeticae* de Gauss, fondamentales pour expliquer la découverte de Galois, fournissent les rudiments, je montrerai comment elles s'appliquent tant à l'Algèbre qu'à l'Arithmétique et sont supposées dans les principales Théories des nombres rationnels qui se forment à la fin du XIX<sup>e</sup> siècle. Je ferai voir surtout comment les idées de définition et d'invariant qui en résultent ont considérablement modifié nos représentations de l'abstraction et de l'objectivité. (t. I, § 7, p. 66)

### 2.3.2 Infini

À la suite immédiate de ces quatre chapitres composés de manière parallèle et pour lesquels seuls Vuillemin semble être parvenu à une rédaction quasi définitive, le manuscrit du tome II comporte trois chapitres, numérotés de X à XII, qui semblent accomplir précisément la tâche que le tome I annonce pour les sections « Infini » et « Ordre ». Même si l'absence de ces titres dans le ms. A nous condamne aux conjectures, les deux premiers de ces chapitres nous semblent traiter l'idée d'infini dans ses rapports avec celle de structure (chap. X) et d'ordre (chap. XI).

13. Le tome I contient plusieurs renvois au chapitre IX : § 21 , p. 180 (IX, § 55), 182 (*idem*) et 183 (IX, § 53, A261). Ici et par la suite, nous indiquons le nom du manuscrit avant chaque numéro de page.

14. Voir [Vuillemin 1962, 498–499] ainsi que les articles de Hourya Benis-Sinaceur et Emmylou Haffner, Gabriella Crocco, Sébastien Maronne, pour une comparaison de cette critique avec celle de Cavailles [Cavaillès 1947, 71–72].

Le chapitre X, intitulé « La théorie des nombres idéaux », montre d'abord comment l'étude des structures a permis l'introduction en algèbre de l'idée d'infini<sup>15</sup>. C'est en effet par des considérations *structurales* que Gauss et ses successeurs, cherchant à généraliser les théorèmes de réciprocité, ont mis au jour des domaines d'intégrité et généralisé le théorème de factorisation unique. Gauss démontra ainsi le théorème de réciprocité quadratique pour les entiers relatifs, le théorème de réciprocité biquadratique pour les entiers complexes  $a + bi$  ( $a$  et  $b$  étant des entiers relatifs) et le théorème de réciprocité cubique pour les entiers de la forme  $a + bp$ , où  $p$  est solution de l'équation  $y^2 + y + 1 = 0$ ; Kummer étendit la généralisation à des anneaux d'entiers algébriques enrichis de nombres complexes idéaux. Mais c'est à Dedekind que revint l'idée décisive de remplacer l'étude des nombres individuels soumis à l'opération arithmétique de divisibilité par la considération directe des systèmes *infinis* d'entiers algébriques – les idéaux – et de leur relation logique d'inclusion. Le chapitre X réalise ainsi le programme que le tome I annonçait pour la section « Infini » : montrer comment « l'extension des méthodes algébriques a permis d'annexer à cette science l'idée d'infini et de rejoindre une découverte qu'avait indépendamment suscitée l'Analyse concernant la notion d'ensemble<sup>16</sup> ». Citant Bell, Vuillemin observe qu'« un problème strictement fini est résolu en termes de classes infinies » [Bell 1945, 225], [Vuillemin s. d., A284]. Ainsi l'« idée nouvelle » de structure a-t-elle mené à celle d'« infini ».

Dans le chapitre XI, « La théorie des nombres naturels chez Dedekind », Vuillemin voit dans l'ouvrage de Dedekind *Was sind und was sollen die Zahlen?* la voie qui mène de l'idée d'infini à celle d'ordre<sup>17</sup>. L'outillage conceptuel pré-ensembliste de Dedekind lui permet de définir logiquement la notion de chaîne puis de leur appliquer une généralisation du théorème d'induction, que prolongera Zermelo avec son théorème du bon ordre. L'analyse par Vuillemin de la « démonstration » par Dedekind de l'existence d'un ensemble infini correspondant aux applications successives de notre pensée à une pensée initiale (chap. XI, § 60) confirme la leçon du chapitre XI : l'« idée nouvelle » d'infini conduit naturellement à l'idée d'ordre.

Nous proposons ainsi de voir dans les chapitres X et XI le passage, via l'idée d'infini, de l'idée de structure à l'idée d'ordre.

### 2.3.3 Ordre

C'est à l'analyse intrinsèque de l'idée nouvelle d'ordre qu'est consacré le chapitre XII<sup>18</sup>. « L'Algèbre générale », qui lui donne son titre, prolonge

15. Le tome I renvoie deux fois au contenu du chapitre X : § 22, p. 204 (X, § 56) et § 30, p. 260 (*idem*).

16. Le texte publié renvoie à la « Note II, *infra*, p. 526 » : la page est correcte mais il faut lire « Note I ».

17. Le tome I contient un renvoi au chapitre XI : § 34, p. 297 (XI, § 60); peut-être aussi § 20, p. 171 (XI, § 60 et 62).

18. Le tome I contient un renvoi au chapitre XII : § 30, p. 262 (XII, § 65).

l'entreprise dedekindienne d'introduction de notions logiques dans les mathématiques<sup>19</sup>, en l'appliquant à l'Algèbre même des structures dont elle procède :

Elle est d'abord Algèbre des structures et, comme telle, elle étudie les propriétés de ces structures, dans leurs variations relatives aux adjonctions d'axiomes de plus en plus particuliers. Au terme de l'évolution [...], elle se retrouve Algèbre au second degré, en ce qu'elle considère comme ses objets propres ces structures elles-mêmes, dans toute leur généralité. (chap. XII, § 64, A326)

L'Algèbre générale se caractérise donc par sa réflexivité : elle est une algèbre de l'algèbre. Plutôt que de raisonner à l'intérieur d'une algèbre particulière, l'Algèbre générale raisonne simultanément sur toutes les algèbres et étudie leurs rapports avec les sous-algèbres. Vuillemin voit en la théorie des treillis l'outil privilégié d'une telle entreprise<sup>20</sup>. Les treillis ne sont pas simplement une autre application rigoureuse de la méthode structurale : ils la dotent d'une pure réflexivité. Loin de se borner à décrire des objets donnés comme les équations et les courbes, ils permettent une analyse structurale des relations entre les structures mêmes et leurs sous-structures. Les théorèmes de représentation et de décomposition pour les algèbres de Boole permettent même aux treillis de prendre pour objet la logique même dans laquelle on raisonne. Ces objets permettent donc à la méthode structurale de devenir son propre objet.

L'algèbre n'est dès lors plus seulement réflexion structurale sur des objets mathématiques hérités du passé – équations ou figures. « Jetant l'échelle » de la théorie des équations dont elle provient historiquement, elle réfléchit désormais de manière structurale sur ses objets propres que sont les structures, redoublant de ce fait la sentence du tome I : « la définition de Hegel selon laquelle dans les mathématiques la réflexion demeure étrangère à son objet et qui fait de cette science une connaissance de l'entendement pourra, à juste titre, faire dresser les cheveux » (t. I, § 18, p. 159). Par la coïncidence finale de ses méthodes et objets, l'algèbre semble avoir atteint un état enfin stable, qu'en termes fichtéens ou hegelien on pourrait appeler le savoir absolu<sup>21</sup>.

Les mathématiques n'en restant pas moins, selon l'indépassable analyse de Platon, dépendantes d'hypothèses dont elles n'examinent pas le sens, c'est au

19. Vuillemin se garde pour autant de parler d'un logicisme de Dedekind : voir la contribution de Hourya Benis Sinaceur et Emmylou Haffner dans le présent dossier.

20. Sur la réception par Vuillemin de la théorie des treillis, voir la contribution de Simon Decaens dans le présent dossier.

21. L'échec final de la théorie des treillis nous semble paradoxalement confirmer les analyses de Vuillemin. Que la dialectique des mathématiques les ait menées à leur unification et à leur fondation dans un langage et une théorie réflexifs permettant de décrire les structures, leurs relations mutuelles et jusqu'aux logiques qui permettent de raisonner sur elles nous semble avoir été bien plutôt confirmé qu'infirmé par la théorie des catégories [Mélès 2012], comme par les candidates à sa succession telles que la théorie homotopique des types. Prolongeant la notion vantée par Vuillemin d'« homomorphisme » jusqu'à celles de foncteur et de transformation naturelle, ces dernières théories vont *au-delà* de la théorie des treillis : elles vont plus loin mais dans la même direction.

Section	Chapitres
I. Structure	VII, VIIIa, VIIIb, IX
II. Infini	X (Structure $\rightarrow$ Infini) XI (Infini $\rightarrow$ Ordre)
III. Ordre	XII

philosophe que revient cette tâche : « Le philosophe ne dit pas autre chose que le mathématicien : il en montre seulement le sens » (chap. XII, §64, A333). Ainsi Vuillemin peut-il soutenir, non sans quelque provocation, que « dans sa partie pure, la philosophie n'est que la théorie transcendantale de l'Algèbre abstraite et des treillis » (chap. XII, §64, A330), c'est-à-dire l'étude du rapport que les structures induites par les choix d'axiomes entretiennent avec la conscience.

Ainsi est achevé le programme qu'annonce le tome I. Le ou les volumes supposés traiter des « trois idées de structure, d'infini et de *logique* » devaient porter le titre « Structure, infini, *ordre* » (nous soulignons), la section « Ordre » devant montrer que « cette complication même [sc. l'annexion à l'algèbre de l'idée d'infini] conduisait spontanément à un rapprochement des Mathématiques et de la Logique et à l'étude algébrique de certaines structures logiques » – tâche bel et bien accomplie par le chapitre XII.

## 2.4 Conclusion générale

La « Conclusion » qui clôt le tome II est-elle générale – comme l'Introduction du tome I – ou bien restreinte à la partie qui la précède – comme la Conclusion du tome I ? D'un point de vue typographique, rien ne la distingue des chapitres qui la précèdent ; mais par son contenu sa portée dépasse clairement la seconde partie. Elle se présente on ne peut plus explicitement comme la réponse aux deux questions que posait l'Introduction générale (t. I, §2), précisant simplement le statut algébrique de la « connaissance pure » examinée dans l'ouvrage :

En étudiant le développement de l'Algèbre, j'ai voulu poser deux problèmes : 1) Quelle est la nature de la connaissance pure en Algèbre ? 2) dans quelle mesure la réponse à ce problème permet-elle d'espérer un renouvellement de la philosophie théorique ? (t. II, p. 355)

Les deux questions de l'Introduction donnent à la Conclusion un plan naturel.

### 2.4.1 Nature de la connaissance pure en Algèbre

L'histoire en trois étapes synthétisée dans le §70<sup>22</sup> est bien celle que retrace *dans son ensemble La Philosophie de l'algèbre*. La première partie décrivait le passage de la « théorie des équations » à l'« algèbre des structures » comme celui de la *méthode* « génétique » – dont les *objets* sont les équations et qui pose comme *principe* « la nature de notre esprit » – à la *méthode* « structurale », dont les *objets* sont les structures et qui autorise le libre choix des *principes*. La seconde partie décrit quant à elle le passage de « l'algèbre des structures » à « l'algèbre de l'algèbre », au sens de l'algèbre universelle, qui adopte la *méthode* « axiomatique<sup>23</sup> », dont les *objets* sont les algèbres et qui étudie pour elles-mêmes les propriétés des systèmes déductifs qu'engendrent les *principes* choisis.

La tripartition ici adoptée par Vuillemin pour résumer de manière transversale les deux parties du développement – méthodes, objets, principes – semble entrer en conflit avec le §7 du tome I, où Vuillemin distinguait les « méthodes proprement dites », dont il se propose de décrire « l'irruption », des « objets et idées nouvelles que leur application a permis d'apercevoir » et « qui correspondent à ces méthodes » (t. I, § 7, p. 65–66). L'on ne saurait pourtant soutenir que le tome I néglige les objets – qu'il s'agisse des structures comme celle de groupe, de classes d'objets comme les courbes  $W$  ou du nouveau statut de l'objectivité et de l'individualité – ni que le tome II néglige les méthodes – que l'on pense aux méthodes d'extension de la notion de nombre (chap. VII), de définition par abstraction (chap. VIIIa), à la méthode axiomatique (chap. VIIIb), à la méthode phénoménologique (chap. IX) et à la méthode dedekindienne de généralisation du théorème de factorisation unique (chap. X). Une première précaution sera donc de supposer orthogonales les deux distinctions entre méthode et objet avant de préciser leurs définitions respectives ; partons donc du tableau p. 34.

Pour résoudre le conflit apparent de ces deux couples de concepts homonymes, nous proposons de comprendre les « idées nouvelles » non pas comme les objets de premier niveau que constitue et manipule expressément la méthode décrite dans le tome I, mais comme ceux de second niveau qui résultent de l'application de la méthode et de ses objets à *eux-mêmes*, selon la méthode réflexive qui caractérise le dernier moment de l'histoire de l'algèbre.

22. Voir ce texte et le commentaire qu'en propose Sébastien Maronne dans le présent dossier.

23. La méthode axiomatique avait été distinguée de la première méthode structurale – illustrée par le programme d'Erlangen – dans les §49 et 49' de la seconde partie. Mais dès le tome I, Vuillemin montrait déjà certaines limites de la conception de l'espace à partir de la seule théorie des groupes (Helmholtz, Lie, Poincaré) : dans le prolongement du kantisme (analysé au §48), elle se limite arbitrairement aux espaces homogènes (c'est-à-dire à courbure constante), aux géométries archimédiennes et à l'infinésimal (§47, p. 426–430, et §48). La conception axiomatique de Riemann et surtout de Hilbert échappe à ces critiques.

	Partie I : « Méthodes proprement dites »	Partie II : « Objets et idées nouvelles »
A : Méthodes	de la méthode génétique à la méthode structurale	de la méthode structurale à la méthode axiomatique
B : Objets	de la théorie des équations à l'algèbre des structures	de l'algèbre des structures à l'algèbre de l'algèbre
C : Principes	de la nature de notre esprit au libre choix des principes	du libre choix des principes à l'étude des propriétés des systèmes déductifs

Les quatre combinaisons de la méthode et de l'objet seraient alors à comprendre comme suit :

1. la *méthode de l'algèbre des structures* (IA) s'exprime dans les « règles » dont le tome I décrit l'« irruption », les « applications » et les « leçons » ;
2. les *objets de l'algèbre des structures* (IB) sont ceux qu'elle manipule – les structures algébriques – ou qu'elle engendre – par exemple les classes de courbes ou d'espaces ;
3. la *méthode de l'algèbre de l'algèbre* (IIA) est l'utilisation des structures pour l'étude même des structures ; ainsi Dedekind dégage-t-il une structure de structure en remplaçant l'opération mathématique de division par la relation logique abstraite d'inclusion (chap. X, § 58, A286) et Wedderburn en raisonnant non sur des structures algébriques particulières mais sur des classes d'algèbres (chap. XII, § 64, A326–A329) ;
4. les *objets de l'algèbre de l'algèbre* (IIB) sont enfin ceux qui permettent l'application de ces dernières méthodes, c'est-à-dire la description systématique de cette activité réflexive ; tels sont selon Vuillemin les concepts de la théorie des treillis, car « on peut prévoir que la théorie des treillis jouera, sur le plan de l'Algèbre générale, le même rôle unificateur que la structure de groupe dans l'Algèbre abstraite » (chap. XII, § 64, A330).

La méthode axiomatique ne s'opposerait donc pas à la méthode structurale comme celle-ci à la méthode génétique : elle en serait bien plutôt une évolution interne, comme peut le laisser entendre l'assertion selon laquelle « lorsqu'on en tire toutes les conséquences, la méthode structurale doit être axiomatique » (t. II, Conclusion, § 70, A358).

### 2.4.2 Programme philosophique

Le court et extraordinairement dense §71, par lequel se termine la conclusion, montre, en écho au §2 du tome I, qu'à chaque étape de l'évolution récente de l'algèbre correspond un renouvellement de ses rapports avec la philosophie.

D'abord, parallèlement à l'avènement de la méthode génétique s'est imposé un premier dogmatisme, « appliqué[ant] à la connaissance philosophique des méthodes propres à une discipline particulière, les mathématiques » (t. II, Conclusion, §71, A361). Kant y a heureusement mis fin.

Ensuite, parallèlement à la méthode structurale est apparue l'entreprise phénoménologique, qui s'efforce « d'appliquer à la pensée les procédés de l'Algèbre des structures » ; inconsciente de ses propres limites, elle s'est soldée par un nouvel échec.

Enfin, l'algèbre moderne ayant fait sienne la critique de ses procédés, il revient désormais à la philosophie d'en faire de même. L'auteur se fixe quatre grandes questions : la fondation philosophique de la logique<sup>24</sup>, l'étude intrinsèque de l'idée de Dieu, la classification des systèmes philosophiques et l'étude de la signification de la logique dans la philosophie grecque.

Nous connaissons la suite [Vuillemin 1968, 1971, 1984, 1967]. À contre-pied d'une pratique courante en son siècle, Vuillemin aura donc finalement renoncé à publier son « programme philosophique », se contentant de le réaliser.

## 3 Évolution

*La Philosophie de l'algèbre* prise dans son ensemble est une structure soumise à une transformation inachevée. Les considérations génétiques qui suivent permettront de décrire cette transformation et de comprendre en quel sens on peut dire qu'elle est restée inachevée ; mais loin d'atténuer, elles confirmeront la thèse selon laquelle cette transformation était structurale : moins une genèse qu'une *évolution*.

Nous en voudrions pour preuve, dans le tome I, l'intégration successive des Notes au contenu des chapitres, et dans le tome II, les phases de la réécriture du manuscrit.

---

24. Projet annoncé sous le titre de *Philosophie de la logique* (t. I, p. 505) ou d'*Éléments de logique philosophique* (t. II, chap. VIIIa, A218 et chap. XII, A337). Peut-être est-ce aussi le projet annoncé dans le §7, p. 65 : « Je traiterai [...] de la connaissance pure mathématique avant d'en étudier le fondement logique. »

### 3.1 La préservation de la structure par enrichissement

Le manuscrit du tome II contient un document de travail qui semble témoigner des modifications successives qu'a subies le plan des « Notes » – c'est-à-dire des annexes – au tome I<sup>25</sup> :

- I. Sur la nature mathématique de l'infini [ajouté manuellement]
- II. Sur l'utilisation de la méthode directe de Lagrange pour résoudre les équations d'un degré inférieur à 5 [renuméroté de I en II puis raturé]
- III. Sur l'application du théorème de Lagrange à la solution de l'équation générale du troisième degré [renuméroté de II en III puis raturé]
- IV. Sur l'actualité de Fichte dans la philosophie mathématique [ajouté manuellement]
- V. [ajouté manuellement, sans titre]
- VI. Démonstration du théorème d'Abel [renuméroté de III en VI puis raturé]
- VII. À propos des nombres de Fermat [renuméroté de IV en VII puis raturé]
- VIII. Sur l'application de la théorie de Galois à la résolution des équations du deuxième et du troisième degré [renuméroté de V en VIII puis raturé]
- IX. Sur l'équation « pure » de Klein [renuméroté de VI en IX]
- X. L'équation du dièdre [renuméroté de VII en X]
- XI. Sur l'expression analytique des rotations de la sphère autour de son centre [renuméroté de VIII en XI]

La comparaison entre les modifications effectuées sur ce document et l'ouvrage publié permet de retracer certaines grandes lignes de la transformation du tome I.

Après une tendance à l'accroissement – Vuillemin ajoute aux Notes initialement dactylographiées les Notes I, IV et V –, leur nombre a considérablement décliné à mesure que Vuillemin intégrait leur contenu au corps du texte. La biffure des titres de Notes correspond ainsi probablement à l'intégration des

---

25. On peut d'abord se demander si, dans un état très précoce du projet, Vuillemin n'a pas prévu une « Note I » sur Husserl (citée dans A, chap. VIIIa, § 43, A216 n. 5), dont le contenu serait finalement devenu une note de bas de page du tome I (Conclusion, II, § 55, p. 501 n. 2). À un stade plus avancé de la rédaction, Vuillemin semble avoir utilisé deux copies dactylographiées d'une même liste de Notes pour retravailler sur l'une le plan des Notes de la seconde partie et sur l'autre celui de la première – probablement dans cet ordre, puisque la numérotation des Notes relatives à la seconde partie n'a pas été affectée par la modification de celles de la première. Vuillemin s'est contenté d'ajouter une note XVI, « Exemple de treillis constitué par tous les sous-ensembles d'un ensemble », renumérotant de ce fait les deux notes suivantes, avant d'ajouter ce qui s'est d'entrée de jeu – sans renumérotation – appelé Note XIX, « Idée générale des théorèmes de représentation ». On trouvera le plan complet des Notes dans la précieuse notice philologique de Gudrun Vuillemin, base de toute reconstitution sérieuse de la genèse du tome II.

Notes II à IV dans le chapitre I sur Lagrange (respectivement dans les §9, 8 et 12), des Notes VI et VII dans le chapitre II sur Gauss (§15) et de la Note VIII dans le chapitre IV sur Galois (peut-être le §29). Vuillemin a ensuite manifestement cessé de mettre à jour ce plan des Notes, mais nous pouvons deviner qu'il a promu les Notes IX à XI (restées non raturées sur le plan) comme §37, 39 et 38 du chapitre V sur Klein. Loin d'aboutir à un collage artificiel, tous ces développements se sont intégrés naturellement à la structure que nous avons décrite et c'est avec parcimonie que Vuillemin semble avoir ajouté dans un dernier moment les Notes II et III que le lecteur connaît :

- I. Sur la notion mathématique de l'infini
- II. Sur les constructions géométriques dans les *Éléments* d'Euclide
- III. Sur le « principe des relations internes »

Sachant comme il est trivial de rejeter des digressions en annexe mais ardu d'intégrer au développement des considérations extrinsèques, on mesure quels durent être les efforts de Vuillemin pour réduire à la portion congrue le nombre des Notes, ce qui n'avait pas été le cas pour *le Descartes*. Ce lourd investissement trahit le souci de Vuillemin d'unifier le discours en une structure unique<sup>26</sup>.

### 3.2 La préservation de la structure par réécriture

La rédaction du tome II a connu plusieurs phases, que Gudrun Vuillemin a retracées avec une admirable méticulosité philologique. Ces réécritures ont-elles mis en danger l'architecture de la seconde partie ?

La version la plus ancienne dont nous ayons la trace certaine est un sous-ensemble de la partie dactylographiée du manuscrit A. Elle commence à la fin du chapitre VIIIa (qui portait alors le numéro VII) et finit au chapitre XII. Il semble facile d'établir que cette portion du ms. A est antérieure à la publication du tome I : quand les renvois au tome I ne sont pas laissés en blanc (« voir plus haut, p. [sic] »), ils portent la pagination du manuscrit original du tome I, qui contenait six chapitres perdus ; la p. 244b du ms. A (A244b) cite ainsi une « p. 28 » que nous n'avons pas pu identifier, la page A259 une « p. 142 »

---

26. Le plan des Notes du tome II aurait probablement aussi dû subir une refonte. La Note relative au chapitre VII intitulée « Exemple pour illustrer la théorie de Kronecker » s'est d'abord appelée IX et semble ultérieurement avoir été renumérotée en II (p. B41) – peut-être après l'ajout de la Note I sur l'infini. Elle a été logiquement suivie d'une Note III, « Sur la définition des nombres rationnels par Russell », relative au chapitre VIIIa. Mais si l'ajout des deux dernières Notes du tome I a finalement décalé à IV la numérotation de la Note du Kronecker, la Note III sur Russell n'a pas été renumérotée en V comme on aurait pu s'y attendre ; peut-être parce qu'elle se trouve dans la partie finale que le ms. B hérite du ms. A sans avoir fait l'objet d'une refonte achevée.

qui correspond à la p. 290 du volume publié<sup>27</sup>. Nous pouvons appeler ce texte l'« état 0 » du livre. Malgré l'absence de certaines « applications » géométriques (§ 48 à 49') et de certaines leçons philosophiques (§ 55), on voit que l'essentiel de la structure y figurait déjà.

Cette version a ensuite fait l'objet de nombreuses modifications. Il est malheureusement difficile de dater les modifications manuelles ainsi que les ajouts de paragraphes et d'alinéas à cette base dactylographiée : corrections diverses, notes de bas de page aux chapitres VIIIb, X et XI, ajouts des paragraphes sur le programme d'Erlangen (§ 48 et 49 dactylographiés, § 49' manuscrit) dans le chapitre VIIIb, du § 55 dactylographié sur la phénoménologie du temps et les deux paragraphes dactylographiés de Conclusion. Certains sont probablement antérieurs à la publication du tome I<sup>28</sup>, d'autres contemporains ou postérieurs, mais dans la plupart des cas il est impossible de déterminer la part de ce qui aurait été modifié, de ce qui l'a été avant ou après la publication du tome I et, par-dessus tout, de ce qui aurait survécu sans modification – et qui est donc matériellement indiscernable – de l'état 0 au tome II. Le fait que les chapitres IX et XII ne contiennent que de rares corrections manuelles doit-il être interprété comme le signe d'un abandon précoce ou au contraire de leur maturité précoce ? Au moins un indice montre avec certitude qu'une partie du ms. A a été retouchée *après* la publication du tome I : dans le chapitre X, une référence manuscrite de la page A271–272, n. 1 renvoie à la pagination du volume publié. Une portion non nulle de « l'état 0 » a donc bien fait partie à part entière du projet de tome II.

Le contenu publié comme tome I semble avoir évolué parallèlement aux modifications portées sur le ms. A. Il semble notamment que Vuillemin ait ajouté tardivement au moins le chapitre V, peut-être aussi le VI du tome I. Dans le plan de l'état 0 du ms. A, la numérotation des chapitres commence à VI. Nous ne pouvons que conjecturer le contenu des cinq premiers. À supposer que les quatre premiers chapitres aient été les chapitres I–IV du tome I, le chapitre V pourrait être soit celui sur la théorie de Lie soit tout ou partie de ce qui est paru comme Conclusion du tome I. Il semble en tout cas certain que le chapitre V, sur la théorie de Klein, a été ajouté tardivement. Dans un plan des Notes que Vuillemin projetait d'ajouter à la première partie de l'ouvrage, des Notes alors numérotées IX, X et XI devaient porter sur « l'équation "pure" de Klein », « l'équation du dièdre » et « l'expression analytique des rotations de la sphère autour de son centre », ce qui correspond à une part importante du chapitre V publié. On observe par ailleurs que le chapitre publié « La théorie de Klein » renvoie presque exclusivement au chapitre IV sur Galois, et qu'inversement ce chapitre n'est cité presque que par le chapitre IV. Nous

27. La page B19 contient elle aussi une pagination en blanc, dans une note de bas de page qui n'est pas appelée depuis le texte. Il s'agit donc peut-être d'un résidu du ms. A.

28. En particulier les paragraphes § 48-49' et 55, auxquels renvoie le tome I (les premiers aux § 34, p. 292, § 46, p. 393 et § 47, p. 402 ; le dernier au § 21, p. 180 et 182).

proposons d'en inférer que le chapitre sur Klein a pris son autonomie à partir d'annexes au chapitre IV. Le ms. A ne contient d'ailleurs que deux références tardives aux chapitres sur Klein et Lie. L'une, située dans une partie ajoutée après coup – mais quand ? – au ms. A, mentionne les courbes W (VIIIb, § 48, A244f). L'autre, dans un ajout manuel à une page du ms. A qui a ensuite été réutilisée dans le ms. B, renvoie à la version publiée du chapitre V (VII, § 68, B21/A187). Vuillemin a donc enrichi la première partie sans fragiliser la structure d'ensemble.

Tous les indices prouvent, comme l'avait déjà conclu Gudrun Vuillemin, que le ms. B du tome II est postérieur à la publication du tome I. D'abord, ce manuscrit prolonge la numérotation du livre publié : la numérotation des chapitres commence à VII, celle des paragraphes à 61, celle des Notes à IV. De plus, tous les renvois à la première partie sont cohérents avec le livre publié, qu'ils soient notés de manière dactylographiée sur les pages propres à B ou de manière manuscrite sur les pages récupérées de A (B21/A187, B29/A196, B32 par collage, B33 par collage). Même en prenant en compte les rares modifications manuscrites sur les pages du ms. B qui ne sont pas héritées de A, le ms. B n'est pas encore une version définitive : certaines notes et références sont encore à préciser<sup>29</sup>. Mais la principale leçon de ce manuscrit nous semble être l'effort de renforcement de la structure par des tripartitions imbriquées : Vuillemin introduit la division de la seconde partie en « Structure, infini, ordre », recompose le chapitre VII pour le structurer en trois sections – formalisme de Hankel, intuitionnisme de Kronecker, logicisme de Frege et Russell – et entame la restructuration du chapitre VIIIa selon les trois moments de la Conclusion du tome I. La refonte entamée de la seconde partie non seulement préservait mais renforçait la structure d'ensemble tout en l'harmonisant aux modifications effectuées sur la première.

Résumons donc l'évolution du plan entre l'état 0 du ms. A, les modifications portées au ms. A et le ms. B :

1. L'« état 0 » est la plus ancienne trace dont nous disposons.
2. Dans un deuxième temps, trois paragraphes ont été ajoutés sur le ms. A, sans doute avant la publication du tome I, qui y renvoie : les paragraphes dactylographiés 48 et 49 à la fin du chapitre VIIIb, le § 55 dactylographié du chapitre IX sur la phénoménologie du temps et peut-être également les § 70–71 dactylographiés de la Conclusion.
3. Dans un troisième temps, postérieur à la publication du tome I, fut réalisé le ms. B : un paragraphe a été déplacé (l'ancien § 33 sur le programme pythagoricien de Kronecker a été déplacé après les § 34–36 sur le principe de permanence des lois formelles de Hankel) et deux ont été ajoutés au début du chapitre VII (§ 61–62 du ms. B) ; mais surtout, le ms. B introduit la tripartition « Structure, infini, ordre », la tripartition

---

29. À savoir chap. VII, B4, n. 2, B19, n. 2 et 3, B20, n. 2 ; chap. VIIIa, B34, n. 2, B35, n. 1, B41, n. 2, B42, n. 1 et 3, A210, n. 1 manquante, A212, n. 1, A213, n. 2.

du chapitre VII et entame la tripartition du chapitre VIIa parallèle à la Conclusion du tome I.

4. C'est aussi tardivement que dut être ajouté le paragraphe manuscrit 49', dont le titre, « Retour au problème de l'intuition spatiale en géométrie », pourrait d'ailleurs indiquer la postériorité par rapport au chapitre V du tome I sur la théorie de Klein. Vuillemin a interrompu la refonte de son manuscrit au milieu du chapitre VIIa.

Le texte a donc subi bien des transformations. Il n'est que plus saisissant de constater à quel point ces restructurations et enrichissements successifs, loin d'avoir lieu par agrégat et juxtaposition au détriment de la structure, montrent un souci constant non seulement de préserver, mais de renforcer la systématisme voulue dès le départ.

## 4 Conclusion

*La Philosophie de l'algèbre* est un ouvrage complet obéissant à une structure rigoureuse, que les réélaborations successives de chacune des deux parties ont préservée tout en l'enrichissant. C'est ce que nous semblent montrer tant une lecture attentive du texte que les considérations génétiques.

Les transformations qu'eût encore subies la structure ne nous sont que partiellement prévisibles ; mais la connaissance de la structure de départ et celle du morphisme en cours d'application n'en permettent pas moins de deviner quelle eût été dans ses grandes lignes la structure d'arrivée.

## Remerciements

Le présent travail a été financé par l'ANR VUILLEMIN <ANR-17-CE27-0017-01>. L'auteur remercie vivement Sébastien Maronne, qui par ses remarques et ses précieux conseils joua un rôle crucial dans l'élaboration de ce texte ; † Gudrun Vuillemin, Françoise Létoublon, Jean Vuillemin, qui ont confié aux Archives Henri-Poincaré le précieux fonds Jules-Vuillemin ; Thomas Bénatouil, qui a invité l'auteur en 2012 à initier l'exploration du manuscrit du tome II ; Gerhard Heinzmann et le Comité scientifique des Archives Jules-Vuillemin, qui ont permis ces recherches ; et plus généralement l'ensemble de l'équipe qui a procédé à l'étude du tome II : Simon Decaens, Emmylou Haffner, Gerhard Heinzmann, Sébastien Maronne, Philippe Nabonnand, David Rabouin et David Thomasette.

## Bibliographie

- BELL, Eric T. [1945], *The Development of Mathematics*, New York : Mc Graw-Hill, 2<sup>e</sup> éd.
- CAVAILLÈS, Jean [1947], *Sur la logique et la théorie de la science*, Paris : PUF.
- DESCARTES, René [1986], *Œuvres de Descartes*, Paris : Vrin, édition de Ch. Adam et P. Tannery.
- MÉLÈS, Baptiste [2012], Pratique mathématique et lectures de Hegel, de Jean Cavailles à William Lawvere, *Philosophia Scientiæ*, 16(1), 153–182, doi : 10.4000/philosophiascientiae.725.
- [2020], Les Anselme de Jules Vuillemin : de la critique générale de la raison pure à la classification des systèmes philosophiques, *Klesis*, à paraître, dossier « Théorie des ensembles et théologie : l'Anselme de Jules Vuillemin », dir. S. Roudaut et B. Mélès.
- SCHWARTZ, Elisabeth [2005], Histoire des mathématiques et histoire de la philosophie chez Jules Vuillemin, dans *Philosophie des mathématiques et théorie de la connaissance. L'Œuvre de Jules Vuillemin*, édité par R. Rashed & P. Pellegrin, Paris : Librairie Albert Blanchard, 1–28.
- [2015], Le Descartes de Jules Vuillemin et sa contribution à sa *Philosophie de l'algèbre 1*, *Les Études philosophiques*, 112(1), 31–50, doi : 10.3917/leph.151.0031.
- VUILLEMIN, Jules [1959], Le problème phénoménologique : intentionnalité et réflexion, *Revue Philosophique de la France et de l'Étranger*, 149, 463–470, doi : 10.2307/41088874.
- [1960a], La philosophie de l'algèbre de Lagrange (réflexions sur le mémoire de 1770-1771), *Les Conférences du Palais de la Découverte*, Série D(71), 5–24, conférence faite le 6 février 1960.
- [1960b], *Mathématiques et Métaphysique chez Descartes*, Épipiméthée, Paris : PUF.
- [1961], Sur la différence et l'identité des méthodes de la métaphysique et des mathématiques chez Descartes et Leibniz et sur la conception classique des principes de causalité et de correspondance, *Archiv für Geschichte der Philosophie*, 43(3), 267–302, doi : 10.1515/agph.1961.43.3.267.
- [1962], *La Philosophie de l'algèbre. Tome premier. Recherches sur quelques concepts et méthodes de l'algèbre moderne*, Épipiméthée, Paris : PUF.
- [1967], *De la logique à la théologie. Cinq études sur Aristote*, Nouvelle Bibliothèque Scientifique, Paris : Flammarion.

- [1968], *Leçons sur la première philosophie de Russell*, Philosophies pour l'âge de la science, Paris : Armand Colin.
- [1971], *Le Dieu d'Anselme et Les Apparences de la raison*, Paris : Aubier.
- [1984], *Nécessité ou contingence. L'aporie de Diodore et les systèmes philosophiques*, Paris : Minuit ; Fondation Singer-Polignac.
- [1990], Présentation générale du numéro « La Philosophie et son histoire », *L'Âge de la science. Lectures philosophiques*, 3 : La Philosophie et son histoire, 9–13.
- [s. d.], *La Philosophie de l'algèbre. II. Structure, Infini, Ordre*, Nancy.

# L'idée de *mathesis universalis* dans *La Philosophie de l'algèbre I et II* de Jules Vuillemin

*David Rabouin*

Laboratoire SPHERE, UMR 7219,  
Université Paris Diderot – CNRS, Paris (France)

**Résumé :** Dans *La Philosophie de l'algèbre* (1962), Jules Vuillemin présente sa démarche comme une manière d'instruire « le problème, si important et si négligé aujourd'hui, de la *mathesis universalis* dans ses rapports à la philosophie ». Il intitule d'ailleurs la seconde partie du traité « mathématique universelle », titre qu'il reprend pour la conclusion. Présentant le projet du second tome, il avance que cette étude devait le conduire « aux questions concrètes de la mathématique universelle ». Pourtant, à aucun moment, on ne voit Vuillemin expliciter la nature de ce problème. Le but de cet article sera de produire une telle explicitation en s'appuyant, en particulier, sur certains éléments avancés dans le manuscrit préparatoire du second tome.

**Abstract:** In his *Philosophie de l'algèbre* (1962), Jules Vuillemin presents his approach as a way of instructing “the problem which is so important and so neglected today of *Mathesis universalis* in its relation to philosophy”. Moreover, he calls the second part of the treatise “Universal Mathematics”, a title he also uses for the conclusion. When presenting the draft of the second volume, he suggests that this study should have led him “to the tangible questions of universal mathematics”. However, at no time does Vuillemin explain the nature of this problem. The aim of this article is to produce such an explanation particularly by relying on certain elements put forward in the preparatory manuscript for the second volume.

# 1 Introduction

À la fin de l'introduction au premier tome de sa *Philosophie de l'algèbre* [Vuillemin 1962, ci-après PA1], Jules Vuillemin présente sa démarche comme menant de « l'irruption de ces méthodes nouvelles tirées de l'analyse abstraite » (principalement autour de la théorie de Galois) à leurs « applications » dans les théories de Felix Klein et Sophus Lie. Il commente alors : « cette extension me donne l'occasion de poser le problème, si important et si négligé aujourd'hui, de la *mathesis universalis* dans ses rapports à la philosophie » [PA1, 66]. De fait, la seconde section de l'ouvrage s'intitule tout simplement « Mathématique universelle », le paragraphe 41 étant entièrement dédié à cette question. Ce titre est repris pour la longue conclusion qui fait suite (« La mathématique universelle ») où le problème d'une *mathesis universalis* apparaît effectivement comme central : la première partie de cette conclusion retrace le développement de l'ouvrage à l'aune du projet cartésien de « règles pour la direction de l'esprit » – même s'il s'agit en réalité plutôt des règles de la méthode – en s'appuyant sur les leçons données par l'étude de l'analyse mathématique post-galoisienne ; la seconde décrit et critique la proposition husserlienne d'une relance de la *mathesis universalis* ; tandis que la dernière revient sur différentes déterminations à travers l'histoire de la mathématique universelle dans ses rapports avec la métaphysique (pour esquisser une voie nouvelle au titre d'une « Critique générale »). Décrivant le second tome (finalement resté inédit) à l'occasion de la réédition du premier, la quatrième de couverture avance en 1993 :

L'auteur se proposait d'examiner dans un tome second les trois concepts de structure, d'infini et d'ordre. Cet examen l'eût conduit aux questions concrètes de la mathématique universelle.

Ceci confirme l'annonce faite à la fin du premier tome et montre que la *mathesis universalis* offrait, d'après l'auteur, un fil directeur à l'ensemble du projet.

Pourtant on ne voit à aucun moment Jules Vuillemin expliquer ce qu'il comprend sous ce problème, ni pourquoi il est à ses yeux « si important et si négligé » – ni, d'ailleurs, ce qu'il entend précisément par le terme même de « mathématique universelle ». Ses différentes occurrences semblent, à première vue, assez disparates. La seconde partie de PA1 commence *in medias res* et n'introduit l'idée qu'après cinquante pages de développements mathématiques. Vuillemin y avance alors que le *Timée* fournit « la première expression achevée de la Mathématique universelle » – une opinion qu'il ne justifie pas et qui est pourtant loin d'aller de soi. Il y oppose le point de vue moderne, appuyé sur la théorie des groupes, censée fournir le cœur d'une autre « mathématique universelle » sur laquelle rien de plus ne nous est dit. Revenant en conclusion à la définition cartésienne de la *mathesis universalis* comme « science de l'ordre et de la mesure », Vuillemin avance que cette caractérisation est encore trop attachée à l'idée de mesure, mais qu'elle a néanmoins « dégagé le caractère principal de la *mathesis universalis* : elle doit être la science des

autres sciences ». Il engage alors un dialogue avec la reprise de ce thème par Husserl, dans son rapport complexe à l'idée d'« ontologie formelle ». Or si ces déterminations, bien que tard venues dans le traité, semblent plus balisées, elles ne semblent pas reliées à première vue à la théorie des polyèdres réguliers exposée dans le *Timée* et réexposée par Klein au moyen de la théorie des groupes – ni même, plus généralement, aux développements de l'ensemble du premier tome qui paraissent très limités au regard du projet ambitieux d'une « science des autres sciences ».

Mon but, dans cet article, sera de collecter les différentes informations qui nous sont données pour tenter d'éclairer ce mystère, de les organiser et d'indiquer comment les documents subsistants sur le second tome [désormais PA2] peuvent nous aider à mieux les comprendre. Je commencerai par expliquer pourquoi Vuillemin pouvait s'épargner la peine d'explicitier le « problème de la mathématique universelle » en rappelant des éléments de contexte. De fait, cette question est alors au centre d'une reconstruction de l'histoire de la métaphysique, dans laquelle s'inscrit clairement la fin de PA1 et qui permet d'en mieux comprendre l'implicite. Je rappellerai ensuite que Vuillemin était déjà intervenu dans ces discussions dans son étude précédente, consacrée aux rapports entre *Mathématiques et métaphysique chez Descartes* [Vuillemin 1960], ce qui peut également expliquer pourquoi il n'y revient pas en détail ici. Aidé par ces éléments de contexte, je me pencherai alors sur la partie dédiée à la « mathématique universelle » dans PA1 pour en expliciter la cohérence au regard des questions précédemment évoquées. Finalement, je montrerai que ce qui subsiste des manuscrits préparatoires au second tome fournit des clefs sans lesquelles l'entreprise du premier tome reste assez difficilement compréhensible.

## 2 Une question partagée

On peut évoquer au moins deux raisons pour lesquelles la *mathesis universalis* n'est pas thématifiée comme telle dans *La Philosophie de l'algèbre*, tout en lui servant de fil directeur : la première est que ce thème est bien connu et tient même, à bien des égards, une place de premier plan sur la scène philosophique de cette époque ; la seconde raison rejoint la première, mais est plus directement liée au parcours propre de Jules Vuillemin ; en effet, PA1 prend directement la suite des questions abordées dans *Mathématiques et métaphysique chez Descartes* [Vuillemin 1960], où la mathématique universelle tenait déjà une place importante.

Quant au premier point, on peut rappeler le tableau que dresse Michel Foucault quelques années après la parution de *La Philosophie de l'algèbre* dans *Les Mots et les Choses* (1966) : « aux deux extrémités de l'épistémè classique, on a donc une *mathesis* comme science de l'ordre calculable et une *genèse* comme analyse de la constitution des ordres à partir des suites empiriques » – la seconde étant censée mener au moment « transcendantal »

et à « l'âge de l'histoire » qui s'ouvre à la fin du XVIII<sup>e</sup> siècle [Foucault 1966, 87]<sup>1</sup>. Une description comparable se trouve en arrière-plan de l'étude érudite que Hans Werner Arndt consacre plus spécifiquement au modèle mathématique en philosophie au XVII<sup>e</sup> siècle et dont on pourra rappeler l'ouverture :

L'influence de l'idée de « *mathesis universalis* » sur la réflexion et la construction des théories philosophiques relie notre époque au siècle des Lumières. Les conditions spécifiques sous lesquelles cette pensée a agi sur la philosophie théorique des XVII<sup>e</sup> et XVIII<sup>e</sup> siècles l'ont alors conduite à échouer sous la forme qu'elle tentait de prendre pour s'imposer. Elles la font aujourd'hui paraître à nos yeux – et déjà, d'une autre façon, à ceux de Kant – comme un rêve dogmatique.

La caractérisation d'une théorie philosophique comme « démonstration *more geometrico* » s'est trouvée associée à l'héritage plus large de la philosophie des Lumières des XVII<sup>e</sup> et XVIII<sup>e</sup> siècles. En particulier, il s'agit alors de ces doctrines que l'on désigne généralement du nom de systèmes « constructifs-rationalistes » de la Philosophie. [Arndt 1971, 1, ma traduction]

Ce tableau, qu'on trouverait chez nombre d'auteurs de l'époque – et d'aujourd'hui encore! – est très clairement hérité des penseurs post-kantiens de la fin du XIX<sup>e</sup> et du début du XX<sup>e</sup> siècle (au premier rang : Natorp, Cassirer, Husserl ou Heidegger). Tous voyaient dans la *mathesis universalis* de Descartes et/ou de Leibniz un des noms propres de ce qui s'était joué au XVII<sup>e</sup> siècle au titre de la constitution de notre modernité philosophique et scientifique – avec tout ce qu'elle pouvait porter de promesses, mais aussi de dogmatisme larvé et de naïveté métaphysique [Rabouin 2009, Introduction]. En ce qui concerne les aspects scientifiques qui vont plus particulièrement nous intéresser dans cette étude, on pourra se reporter au paragraphe f du chapitre 9 de la *Krisis* où Husserl rassemble plusieurs de ces déterminations. Il y décrit ce qu'il voit comme un développement simultané du calcul algébrique, devenu purement symbolique avec Viète puis Descartes, et de la physique mathématisée, le tout servant de prémices à ce qu'on pourrait désigner comme un « tournant formel » de la science et de la philosophie sur laquelle s'appuie le programme d'une *mathesis universalis* :

Ce processus de modification de la méthode, qui se déroule dans la praxis théorique de façon instinctive et irréfléchie commence déjà à l'époque de Galilée et conduit par un développement dont le mouvement est ininterrompu, au degré le plus élevé de l'« arithmétisation », où elle se dépasse elle-même : à la « formalisation » absolument universelle. Ceci se produit précisément grâce au développement et à l'extension de la théorie algébrique des nombres et des grandeurs, qui devient une « analyse » universelle

---

1. Pour Foucault, *mathesis* et *mathesis universalis* doivent être pris pour des termes équivalents.

et par là purement formelle [...]. Leibniz a le premier aperçu, précédant du reste de loin son époque, l'idée universelle fermée sur elle-même d'une pensée algébrique au plus haut sens du terme, l'idée d'une « *mathesis universalis* », comme il l'appelait ; il a le premier reconnu en elle la tâche de l'avenir, alors que c'est seulement à notre époque qu'elle s'est au moins approchée de sa réalisation systématique. Dans la totalité et la plénitude de son sens, elle n'est rien d'autre qu'une logique formelle développée dans toutes les directions. [Husserl 1976, 52–53]

Nous verrons par la suite l'importance de ce tournant pour Vuillemin lui-même. Il nourrit, en effet, la conclusion de l'ouvrage, dans un dialogue où la proposition husserlienne d'une relance de la *mathesis universalis* joue également un rôle central. Mais notons dès à présent un premier trait : pour nos auteurs, la mathématique universelle correspond à un moment de rupture typique de l'âge classique et dont l'émergence de l'algèbre symbolique est un des ingrédients essentiels. Puisqu'il sera beaucoup question de l'histoire de l'algèbre, on pourra d'ailleurs également rappeler que vers la même époque que la *Krîsis*, la « mathématique universelle » avait également servi de fil directeur à une histoire philosophique de l'algèbre proposée par Jakob Klein sur la période antérieure à celle qu'étudie Vuillemin (des Grecs à l'âge classique). Lui aussi avait mis fortement l'accent à cette occasion sur la transformation de l'objet mathématique en objet purement symbolique [Klein 1934-1936].

Les références en ce sens abondent, mais celles qui précèdent suffiront à indiquer un premier arrière-plan possible pour les déclarations laconiques de Vuillemin. Dans les années 1960, l'idée de *mathesis universalis* est étroitement liée à une certaine image de la pensée classique, aussi bien philosophique que scientifique, que partagent nombre de philosophes et d'historiens des sciences. Elle est censée marquer l'émergence d'une nouvelle forme de rationalité, qui se serait mise en place à l'âge classique et coïnciderait avec le développement de la « science moderne » (à la fois la physique mathématisée et, en amont, le type de formalisation procurée par l'algèbre symbolique) – par opposition avec une détermination ancienne, aristotélicienne, que l'on peut parfois associer à un autre âge de la « mathématique universelle<sup>2</sup> ». Elle paraît à ce titre inséparable de l'histoire des mathématiques et d'une certaine configuration dogmatique de la philosophie, qui entendait relancer l'entreprise métaphysique à l'aune de cette nouvelle norme de vérité – reconfiguration dont le moment critique kantien entendait marquer l'échec et la fin<sup>3</sup>. Ceci permettrait déjà

2. On verra que Vuillemin lui-même accepte une telle généalogie et distingue en conclusion trois moments clefs d'articulation de la *mathesis universalis* et de la métaphysique associés aux noms d'Aristote, de Descartes et de Husserl. Sur la position d'une « mathématique universelle » comme problème chez Aristote et son lien avec le projet d'une métaphysique, je me permets de renvoyer à [Rabouin 2009].

3. À cause du contexte dans lequel évolue Vuillemin à cette époque, j'ai insisté dans ce qui précède sur l'héritage post-kantien, mais il importe de préciser que cette interprétation d'ensemble est partagée par nombre d'auteurs anti-kantiens (le

de justifier pourquoi Vuillemin voyait dans ce thème un problème à la fois important (il était considéré comme central dans le projet métaphysique classique réputé accompagner le développement de la science moderne) et négligé (il relevait, dans la France philosophique des années 1960, d'une époque clairement *révolue*). Cela permettrait également de comprendre pourquoi le projet même de *La Philosophie de l'algèbre*, qui prend acte d'un développement conjoint des mathématiques et de la philosophie, pouvait aller de pair avec la reprise de cette question.

Toute l'entreprise de Vuillemin consiste alors à faire valoir un tournant critique similaire à celui provoqué par Kant en philosophie, *mais advenu au cœur même des mathématiques* – et d'abord de l'algèbre elle-même, avec les travaux de Lagrange, d'Abel, puis surtout de Galois. Sous ce point de vue, il devient possible à la fois d'accorder à Kant la dénonciation des approches dogmatiques qui confondaient purement et simplement méthode philosophique et méthode mathématique *et* de refuser que le projet d'une « mathématique universelle », dans sa conjonction avec une métaphysique, dût être pour autant abandonné. C'est seulement dans les dernières pages de l'ouvrage [PA1, 506–518] que Vuillemin reprendra explicitement ce problème comme celui de la détermination d'une métaphysique depuis Aristote et sa mention furtive d'une possible « mathématique universelle » jusqu'à Fichte, en passant par Descartes puis Kant. Cela lui permettra d'annoncer, d'une manière encore un peu prophétique, la possibilité d'une « Critique générale » qui « aurait d'abord pour tâche d'accueillir les décisions métaphysiques de la Mathématique universelle et d'en étudier les motivations rationnelles » [PA1, 517]. Si son contenu reste encore obscur à ce stade, les attendus en sont donc clairs : il s'agit de repenser le projet d'une *mathesis universalis* compatible avec le tournant critique et n'ayant pas sacrifié trop vite le projet d'un adossement à des « décisions métaphysiques » (on notera dès à présent le pluriel).

Remarquons que le diagnostic d'un tournant critique des mathématiques, qui fonde l'approche de Vuillemin dans cette partie de l'ouvrage, n'était pas alors sans précédent. Nombre de mathématiciens de la fin du XIX<sup>e</sup> siècle avaient déjà souligné les limites de la référence mathématique chez Kant (encore trop dépendante d'un modèle euclidien où la construction des figures joue un rôle paradigmatique) et son incapacité corrélatrice à voir que la mathématique pouvait dépasser le niveau de la seule construction de concepts pour aller d'elle-même à leurs conditions de possibilité. Certains d'entre eux, au premier rang Hilbert, avaient alors souligné que l'approche structurale, sous sa forme

---

diagnostic de fin de l'âge métaphysique se déplaçant alors plutôt du côté de différentes variantes du positivisme). Philip Jourdain en a donné un tableau synthétique, comparable à celui qu'on a trouvé chez Husserl, en ouverture de la traduction anglaise de *l'Algèbre de la logique* de Louis Couturat [Couturat 1914]. Une telle détermination se retrouve chez divers auteurs de cette tradition comme Russell, Carnap ou Gödel – généralement dans une référence qui va plus naturellement à Leibniz qu'à Descartes. En France, c'est le nom de Couturat, que préface justement Jourdain, qui vient immédiatement à l'esprit.

axiomatique moderne, s'avérait justement capable de reprendre à sa charge la question critique, dès lors qu'on prenait soin de la détacher de son lien kantien à l'expérience sensible [Benis-Sinaceur 2018]. Une telle proposition avait néanmoins pour inconvénient de résorber entièrement l'enquête dans les mathématiques elles-mêmes. Husserl apparaissait alors comme ayant fait valoir une orientation alternative, en y discernant au contraire le ressort d'une relance du point de vue transcendantal. Ceci, il le saisit en tentant de penser à nouveaux frais l'articulation de la logique formelle moderne, mathématisée, et de la logique transcendantale, l'une et l'autre appuyées sur le concept central d'opération et sur son insertion dans une « théorie des multiplicités » gouvernées par des systèmes d'axiomes ou *mathesis universalis* [Gérard 2001]. Il s'agissait donc de repenser les systèmes axiomatiques modernes du point de vue des opérations d'une conscience et de certaines exigences, comme celle de « saturation », qu'un système formel ne pouvait pas porter par lui-même sans intervention de normes transcendantales primitives.

Cette détermination d'ensemble est rappelée de la manière la plus claire dans la conclusion générale qu'on trouve dans le second tome resté inédit de *La Philosophie de l'algèbre* :

L'idée de *mathesis universalis* a été, historiquement, l'une des origines du dogmatisme. Celui-ci appliquait à la connaissance philosophique des méthodes propres à une discipline particulière, les mathématiques. Tel est l'état de la question dans le premier moment de l'Algèbre : même si Kant a tort d'identifier alors connaissance mathématique et construction des figures dans l'espace euclidien, il a raison de dénoncer la confusion entre la connaissance philosophique qui procède par concepts et la connaissance mathématique particulière qui procède par construction de concepts.

À son second moment, l'Algèbre et la philosophie se rapprochent. On tente d'appliquer à la pensée les procédés de l'Algèbre des structures. Telle est l'idée mère de la phénoménologie. [PA2, § 71, 361]

En ce point, on le voit, Vuillemin a donc un interlocuteur privilégié. Car avant d'être son projet, le programme d'une reconsidération du problème de la *mathesis universalis* à l'aune d'une pensée transcendantale renouvelée fut d'abord celui de Husserl – qui pouvait même déclarer :

Le chemin qui m'a conduit à la phénoménologie fut essentiellement déterminé par la *mathesis universalis*. [Husserl 1993, 69]<sup>4</sup>

---

4. À dire vrai, il fut aussi, à bien des égards, celui d'autres auteurs que Vuillemin ne mentionne pas. Ainsi de Cassirer et de son projet d'une philosophie des formes symboliques. Hors de la sphère d'influence kantienne, l'idée d'une relance du projet de *mathesis universalis* accompagnait souvent l'évocation d'une actualisation du projet leibnizien de caractéristique universelle que semblait permettre le développement de la logique formelle moderne (Russell, Gödel ou Carnap) [Rabouin 2009, Introduction et Annexe II].

À ce titre, nous devons également garder à l'esprit que la période à laquelle écrit Vuillemin est celle durant laquelle le public français découvre un visage de Husserl qu'il connaissait mal, celui des *Recherches logiques* dont la publication est engagée en France en 1961 et avait été précédée, quelques années auparavant, par la traduction de *Logique formelle et logique transcendantale* (par Suzanne Bachelard) [Husserl 1957]. Or il ne fait pas de doute que ce dernier livre, abondamment discuté par Vuillemin dans sa conclusion, se plaçait très explicitement sous l'égide de la relance du projet d'une *mathesis universalis*, censée être au cœur du développement de l'algèbre symbolique et de son prolongement dans une logique formelle<sup>5</sup>.

En même temps, le passage cité de PA2 nous indique que la relance phénoménologique n'a pas été au bout de l'évolution de l'algèbre moderne en ce qu'elle n'a investi qu'un des aspects de la mathématique formelle, que l'appareil transcendantal devait dès lors se contenter de redoubler maladroitement. Elle n'a pas vu, en effet, la part de réflexivité propre que la mathématique s'avérait capable de porter par elle-même et qui conduisait – une fois constaté l'échec du programme de Hilbert – à une forme de pluralisme constitutif que la philosophie transcendantale ne pouvait plus se contenter de simplement enregistrer. En ce sens, on y reviendra par la suite, la phénoménologie, parce qu'elle tendait justement à résorber ce pluralisme, reste, aux yeux de Vuillemin, un dogmatisme<sup>6</sup>.

Ainsi, le projet de Vuillemin reprend très clairement l'héritage de la « mathématique critique » et sa prétention à replacer la recherche des conditions de possibilités au cœur de la mathématique elle-même, tournant dont Husserl est le contemporain, mais qu'il n'aura pas pleinement saisi [Benis-Sinaceur 2018]. Toute la conclusion de PA1 consiste précisément en un tel dialogue, dont *Logique formelle et logique transcendantale* est l'interlocuteur explicite. Vuillemin y montre comment l'intuitionnisme husserlien, intuitionnisme qu'il nomme « extrinsèque », agit comme cadre restrictif dans sa tentative de fondation philosophique des mathématiques<sup>7</sup>. À l'opposé, il fait valoir ce qui semble alors la seule voie propre à relever le défi hilbertien – voie déjà esquissée par Cavailles dans *Sur la logique et la théorie de la science* [Cavaillès 1997] –, soit l'élaboration d'une philosophie *immanente* à la réflexivité propre de la mathématique. Mais, à la différence de Cavailles et en conformité avec sa

---

5. Ce projet poursuit l'héritage de la « découverte du formel » avec l'algèbre symbolique, dont Viète et Descartes auraient été les initiateurs et dont Leibniz aurait perçu le premier, au titre de la *mathesis universalis*, la puissance constitutive [Husserl 1957, § 26, 111].

6. Titre du § 56 qui clôt la discussion avec la *mathesis universalis* de Husserl en conclusion [PA1, 502].

7. Cet intuitionnisme est dit « extrinsèque » au sens où les normes limitatives qu'il envisage sont d'ordre philosophique et agissent donc de l'extérieur à la pratique mathématique – par différence avec l'intuitionnisme « intrinsèque » des mathématiciens comme Brouwer ou Heyting, qui accompagne comme « de l'intérieur » la constitution d'une certaine pratique mathématique.

reprise du thème de la *mathesis universalis*, Vuillemin ne se contente pas d'y voir simplement le terreau pour une théorie de la connaissance. Elle correspond à ses yeux à une sphère de détermination authentiquement *métaphysique*, quoique interne au mathématique, détermination qu'il appartient au philosophe de saisir et d'explicitier. C'est cet aspect, encore nébuleux, que le second tome permet, comme nous le verrons, de saisir plus clairement.

## 2.1 La *mathesis universalis* de Descartes et Leibniz dans le projet de Vuillemin

Ces éléments viennent s'ajouter à un autre aspect qui peut expliquer la présence si importante de la *mathesis universalis* dans le projet de Vuillemin et que l'on peut séparer du premier. Lorsqu'on ouvre le premier tome de *La Philosophie de l'algèbre*, on est frappé, en effet, de le voir prendre directement la suite de certains thèmes évoqués dans le précédent ouvrage : *Mathématiques et métaphysique chez Descartes*. Avant d'en évoquer le contenu, je rappellerai simplement un passage de l'« avertissement » du livre :

Au fur et à mesure que j'avancais dans mon enquête et que ma note se transformait en ces réflexions, je sentais qu'une interprétation plus vaste était en jeu, que la classification des courbes et les solutions apportées aux problèmes de la différenciation et de l'intégration conduisaient à une théorie générale des proportions qui n'est rien d'autre que la fameuse Mathématique universelle, et qu'enfin cette théorie n'était pas sans influencer à son tour et même sans modérer très profondément l'ensemble de la métaphysique cartésienne. [Vuillemin 1960, 2]

Or dans l'introduction de PA1, juste après avoir posé le problème général des rapports entre mathématiques et philosophie dans la constitution d'une philosophie théorique pure, Vuillemin reprend justement le dialogue avec ce moment fondateur du dogmatisme rationaliste moderne, incarné par la confrontation des pensées de Descartes et de Leibniz. Il repart alors des thèmes évoqués dans l'étude de 1960 dont il résume rapidement les thèses. Au premier rang figure le fait, manqué par Kant, que la mathématique connaît un premier tournant avec Descartes qui la fait sortir de la dépendance aux constructions dans l'imagination et l'appuie sur une « intuition purement intellectuelle » [PA1, 12]<sup>8</sup>. Tandis que la position kantienne du synthétique *a priori* reste ancrée sur le modèle privilégié de la construction des figures, le dispositif cartésien en est déjà sorti en intellectualisant la construction sous la forme de critères qui peuvent être décrits à la fois en termes imaginatifs (le tracé de certaines courbes par mouvement continu) et en termes purement conceptuels (la donnée d'une ou plusieurs équations algébriques). En ce point, Vuillemin

---

8. On rappellera à ce propos la première phrase de la conclusion de [Vuillemin 1960] : « La Mathématique de Descartes est purement intellectuelle en son principe ».

partage donc le diagnostic de Husserl et de nombre d'auteurs que nous avons mentionnés dans la première section de cette étude : l'âge classique connaît un premier tournant avec l'émergence de l'algèbre symbolique et sa mise au service d'une réforme en profondeur de la nature même du géométrique (censée accompagner, à leurs yeux, le développement de la « science moderne », au premier chef de la physique mathématisée).

Ceci a permis chez Descartes une entente nouvelle de l'analyse mathématique et sa parfaite réversibilité de droit dans une synthèse qui, par là-même, perdait tout privilège :

[...] réduite à l'Algèbre des longueurs qui ne considère que l'ordre et la mesure dans les nombres, les figures, les astres, les sons ou n'importe quel objet, sans rien ajouter qui tienne à une matière particulière<sup>9</sup>, la méthode ne rencontre que des vérités données à l'intuition d'un esprit attentif sous forme de « natures simples », lorsqu'on procède analytiquement, et elle ne parvient qu'à des axiomes et à des définitions clairs et distincts, lorsqu'on procède synthétiquement. [PA1, 12]

La principale difficulté portée par le cartésianisme réside alors dans le fait d'appuyer la méthode sur les mathématiques tout en la déployant dans un domaine, la métaphysique, où elle rencontre immédiatement la question de l'infini – question précisément exclue de la mathématique cartésienne « de l'ordre et de la mesure ». Cela suppose de faire intervenir des principes extrinsèques à la méthode elle-même, comme le principe de causalité ou le principe de correspondance de l'idée à l'idéat. L'ouvrage de 1960 évoquait déjà cette tension pour finir, à partir du passage célèbre des *Méditations métaphysiques* où Descartes doit s'appuyer sur une analogie mathématique « archimédienne » pour porter sa réflexion métaphysique (note III) – indiquant ainsi, comme de l'intérieur de son système, les limites de l'exclusion qu'il souhaitait faire valoir contre une saisie mathématique de l'infini. Vuillemin y reviendra en conclusion de PA1 en pointant ce qu'il désigne alors, parmi les différents nouages historiques de la mathématique universelle et de la métaphysique, comme « le second cercle du dogmatisme<sup>10</sup> ».

Dans ce contexte, on voit très clairement le pas qu'est censé avoir franchi Leibniz : supprimer la dépendance trop étroite de la *mathesis universalis* cartésienne vis-à-vis de la mesure, pour l'ouvrir à une science de l'ordre pur [PA1, 33], qu'elle prenne la forme d'une combinatoire universelle ou d'une mathématique « qualitative » qui puisse s'étendre aussi bien à l'infini (analyse transcendante) qu'à la forme (*analysis situs*). On remarquera, au passage,

---

9. Ici, Vuillemin renvoie au passage correspondant de la quatrième des *Règles pour la direction de l'esprit* où Descartes décrit en fait la *mathesis universalis* [Descartes 1964-1974]. On voit donc au passage qu'il ne fait pas de différence entre cette dernière, la méthode et l'algèbre des longueurs exposée dans la *Géométrie*.

10. Titre du § 58. Le premier cercle, lié à la détermination aristotélicienne, est celui porté par l'analogie de l'être (§ 57).

que ce tableau est très similaire à celui que faisait déjà valoir Ernst Cassirer (puis, en France, Léon Brunschvicg) pour s'opposer aux interprétations trop étroitement « panlogiciques » de Leibniz que proposaient alors Couturat et Russell. Cette opposition avait d'ailleurs nourri le remarquable tableau dressé par Dietrich Mahnke dès 1925, lorsqu'il contrastait deux ententes de la « mathématique universelle » leibnizienne et posait la question de leur articulation à la métaphysique de l'individu [Mahnke 1925]<sup>11</sup>.

Le cœur du geste leibnizien devient alors la mise au centre des mathématiques d'un concept de correspondance fonctionnelle, censée permettre d'installer la mathématique universelle en position de « science générale des relations » (sans plus les limiter aux seules relations quantitatives<sup>12</sup>). Un point essentiel du dispositif est de rendre à nouveau possible le nouage de la pensée mathématique à la métaphysique via un principe d'ordre supérieur qui vaut dans l'une et l'autre (le principe de continuité en étant une des instances les plus célèbres). Sous cette détermination, on se heurte néanmoins à un nouveau problème qui est l'écart entre l'analyse des concepts pour nous et en soi (ou, si l'on préfère : dans l'entendement divin), problème qui rejaillit sur la question de savoir si le principe de continuité peut passer du règlement des phénomènes à l'organisation des choses en soi (notamment si l'on garde à l'esprit que les vérités mathématiques devraient être redevables, *sub specie divinitatis*, du seul principe de non contradiction). Vuillemin rappelle alors le dispositif monadologique qui permet d'exprimer la structure des phénomènes « bien fondés » dans l'activité de la substance percevante et agissante (seule « chose en soi » digne de ce nom pour Leibniz), mais il remarque que cette solution tombe sous les coups de la critique kantienne en tant qu'elle ne saurait justement prétendre atteindre à l'ordonnement des choses en soi vu comme déploiement des vérités éternelles dans l'entendement divin (ordonnement auquel appartiennent toutes les vérités mathématiques).

Nous retombons alors sur le diagnostic déjà mentionné de crise du dogmatisme ouvert par la philosophie kantienne. Mais Vuillemin montre également quelles tensions traversent cette dernière dès lors qu'elle se place sous le modèle d'une méthode « ostensive », tout en cherchant à distinguer radicalement les mathématiques et la philosophie au titre de la possibilité des constructions [PA1, 54–55]. De fait, le philosophe ne semble pouvoir prétendre à « l'ostensivité » qu'à maintenir cette exigence dans une forme d'équivocité par rapport à la possibilité de construction réelle des concepts,

---

11. Cet ouvrage tient une place importante dans la première version de cette partie de l'introduction publiée par Vuillemin l'année précédente [Vuillemin 1961].

12. Jusqu'à une époque récente, il s'est agi de la définition la plus répandue de la *mathesis universalis* leibnizienne [Leibniz 2018, 14]. Elle conduit assez naturellement à l'idée d'une fondation purement logique du mathématique (même si les conceptions de « logique » vont fortement varier d'un commentateur à l'autre). En 1960, Belaval avait proposé un état de l'art de cette interprétation [Belaval 1960], où il réconciliait dans un même tableau les orientations de Couturat/Russell et de Cassirer/Brunschvicg dont Vuillemin est familier [Vuillemin 1961].

qui seule échoit au mathématicien. Il doit, par ailleurs, l'ancrer dans une remontée aux conditions de possibilité de l'expérience sensible qui la rend irréductiblement indirecte (alors qu'elle devrait être *de jure* indépendante de cette expérience sensible). Cette équivoque entraîne deux problèmes sur lesquels le kantisme devait nécessairement échouer aux yeux de Vuillemin [PA1, 56] : l'attachement à cette donnée sensible qui la maintient sous la dépendance d'une forme irréductible de contingence (qui se manifeste clairement dans l'analyse de l'espace) et la possibilité même de son application hors du domaine de l'expérience sensible (notamment dans la fondation d'une morale).

Derrière ces deux problèmes se cachent bien évidemment les difficultés liées à la question d'une intuition intellectuelle refusée par Kant. Il reviendrait alors à Fichte d'avoir pris ces problèmes à bras le corps en replaçant le concept d'opération au centre de la philosophie et en y ancrant la possibilité d'une méthode authentiquement génétique<sup>13</sup>. Ce que Vuillemin veut indiquer, au terme de son introduction, est que les mathématiques ont connu un développement parallèle en ce qu'elles ont éprouvé de plus en plus le besoin d'organiser la diversité des phénomènes étudiés selon des raisons *a priori*, à même de rendre compte de la diversité des individus rencontrés. C'est ce cheminement qui est esquissé avec la méthode « génétique » de Lagrange, par laquelle il chercha à analyser les modalités de résolution des équations algébriques et avec laquelle le développement propre du livre s'ouvre. Sous ce point de vue, Galois marque assurément une étape décisive en ce qu'il permet de situer dans une structure mathématique (en l'occurrence, celle de groupe), le ressort profond de la genèse, inaugurant la méthode « structurale » moderne en mathématiques. Ces évocations conduisent à la conclusion de l'introduction déjà rappelée où Vuillemin annonce le traitement de ce problème « si important et si négligé » de la mathématique universelle<sup>14</sup>.

## 2.2 La mathématique universelle dans PA1

Il est très remarquable que l'idée de « mathématique universelle », dont on vient de voir l'importance dans le dispositif d'ensemble du livre, ne joue pourtant aucun rôle dans sa première partie, où est détaillée l'histoire de la théorie des équations et l'émergence progressive d'une méthode structurale à

---

13. On voit au passage que la phénoménologie husserlienne, elle aussi caractérisée par son attention à la centralité des opérations (voir citation ci-dessus p. 49), mais dans le cadre d'une théorie structurale où ces opérations sont pensées comme adossées à une théorie générale des multiplicités (ou *mathesis universalis*), devait bien être l'interlocuteur privilégié du projet – même si cet aspect ne devient clair à la lecture que lorsque nous parvenons à la conclusion de l'ouvrage.

14. Remarquons à ce propos qu'avant d'engager le dialogue avec Husserl, qui occupe les paragraphes 52 à 56, la conclusion de PA1 revient effectivement sur le dialogue avec le rationalisme classique en expliquant clairement en quoi cette approche peut à la fois être relancée et discutée (il est d'ailleurs très significatif que Vuillemin ne craigne pas de l'intituler « Règles pour la direction de l'esprit »).

partir de la méthode génétique en algèbre. Elle donne, en revanche, son titre à la seconde partie consacrée aux théories de Klein (chap. V) et de Lie (chap. VI). Vuillemin ne donne aucune explication à ce sujet et se contente d'introduire la notion après l'exposition de la théorie riemanienne des fonctions d'une variable complexe [PA1, 303–333] et de la manière dont elle peut être reliée, via l'équation cyclotomique (partition du cercle) et la théorie des groupes de substitution, à la question de la construction des polyèdres (convexes) réguliers vue comme problème de partition de la sphère [PA1, 333–358]. C'est dans ce cadre qu'il retrace la théorie de Klein sur les polyèdres (à partir du livre de ce dernier sur l'icosaèdre). Sont contrastés alors *deux* modèles pour une mathématique universelle (comme l'indique le titre du paragraphe 41) : celle qui se trouverait reliée au *Timée* de Platon et celle qui se trouverait reliée à la théorie des groupes, « introduction naturelle à l'idée que nous pouvons nous former aujourd'hui de cette même Mathématique universelle » [PA1, 359].

Lorsque l'on suit les développements de cette partie, on voit que le trait que Vuillemin veut mettre en avant est le rôle méthodologique de l'algèbre et le fait que la théorie géométrique moderne n'est plus liée à une représentation externe, imaginative, mais n'étudie que « les rapports internes entre les éléments, tels qu'ils résultent des opérations par lesquelles on définit le groupe » [PA1, 361]. Ainsi la « généralisation des modernes » est-elle d'un autre type que celle des Anciens, parce qu'elle a abandonné tout lien à l'intuition géométrique : « la théorie de Klein montre donc une universalité opératoire et abstraite, tandis que le Pythagorisme voulait découvrir une universalité réelle et concrète » [PA1, 364]. L'argument sera le même dans l'étude des théories de Lie, qui permettent d'aborder le problème de l'espace en termes de groupes continus de transformation. Dans l'un et l'autre cas, il s'agit de parvenir ainsi à des classifications purement *a priori*. En se détachant de l'intuition, la mathématique formelle se rend alors capable de conquérir le domaine d'une taxinomie purement rationnelle, cœur de la nouvelle mathématique universelle :

Tant que la mathématique s'en tenait aux individus, il pouvait sembler que sa méthode d'analyse était entièrement étrangère aux classifications. Longtemps, les philosophes opposèrent donc le concept biologique ou classificatoire et le concept mathématique ou analytique. Mais l'intervention des structures fait voir que c'est une seule et même chose d'assigner les causes des propriétés et de définir un concept dans une classification. Bien plus, ce qui est rationnel dans l'analyse ne dépend que de cette découverte de la hiérarchie des genres et des espèces, rendue à la vie par la théorie des structures.

De ce fait, la Mathématique se rapproche de la Logique. Étant la science des structures qu'on étudie en faisant abstraction des objets auxquels elles s'appliquent, elle peut avoir une portée universelle, comme la Logique elle-même, en vertu de son formalisme. Déjà esquissée par l'extension indéfinie qu'elle comportait soit en

elle-même soit dans ses applications, comme on l'a vu au chapitre précédent, l'idée de mathématique universelle se précise dès qu'on prend conscience du type d'abstraction qu'implique la théorie des structures. [PA1, 390]

On comprend alors mieux pourquoi le « problème de la mathématique universelle » ne pouvait pas se poser de l'intérieur de l'algèbre elle-même, mais devait parvenir à ses « applications » pour se révéler comme tel. Il s'agit, en effet, d'indiquer le caractère structurant de l'algèbre abstraite, en tant qu'elle permet d'élaborer des classifications *a priori* (non seulement dans le domaine des équations polynomiales, mais dans celui des polyèdres, celui des types d'espace, etc.) soutien d'une méthode authentiquement « universelle ». On voit également au passage pourquoi une telle méthode, d'apparence limitée, pourrait néanmoins se prévaloir d'une forme d'universalité qui la rapprocherait – sous réserve d'arguments supplémentaires sur lesquels nous reviendrons dans l'étude du second tome – du projet d'une « science de la science ». Sous ce point de vue, il est remarquable que Vuillemin n'ait pas engagé sa réflexion avec le problème de l'espace, mais avec la théorie de la variable complexe et l'introduction des surfaces de Riemann. Tandis qu'on aurait pu s'attendre à le voir désigner par « Théorie de Klein » le fameux « Programme d'Erlangen » qui classe les géométries à l'aide des groupes de transformations et de leurs invariants, Vuillemin laisse cet exemple de côté (il avait le projet d'y revenir dans la première partie du second tome, PA2, chap. VIII du manuscrit A, §48 à 49') pour se porter à un travail beaucoup plus spécifique : l'étude des solutions de la quintique à l'aide de la théorie des polyèdres réguliers revisitée par la théorie des groupes. Ce choix est tout à fait significatif à l'aune du problème de la *mathesis universalis* qu'il cherche à mettre en avant.

De fait, un des problèmes fondamentaux de la « mathématique universelle » est de clarifier la manière dont l'élaboration d'une « mathématique purement intellectuelle », qui s'engage avec Descartes, peut aller de pair avec un rapport maintenu à une forme d'intuition. La tentation est alors grande de s'appuyer sur la distinction cartésienne de l'imagination et de l'intellect pour faire valoir une sorte de vision directe des concepts qui permettrait d'en déplier les différentes déterminations (soit précisément ce que reproche Kant à ses prédécesseurs, arguant du fait qu'une telle contemplation semble ne laisser aucune place à la possibilité, pourtant avérée, d'une *invention conceptuelle* en mathématiques). Or, même si Vuillemin sacrifie parfois à ce vocabulaire et même si la référence appuyée à Fichte (puis à Husserl) oriente indéniablement dans ce sens, il voit bien également qu'un tel geste ne correspondrait pas aux conceptions de Descartes et Leibniz. Comme il le remarque lui-même, il arrive d'ailleurs à Descartes de distinguer *deux types* d'imagination, selon qu'elle est associée ou non aux objets géométriques ([PA1, 15], qui renvoie à la sixième des *Méditations*). Le problème n'est donc pas tant de reverser l'intuition du côté du seul intellect que de s'assurer que l'imagination peut évoluer en parallèle strict avec les processus intellectifs. Si

tel est le cas, comme il semble que ce le soit pour Descartes, alors l'imagination mathématique conserve toute sa puissance d'aide à l'entendement. Quant à Leibniz, il pousse cette détermination jusqu'à définir les mathématiques elles-mêmes comme science *de l'imagination* ([PA1, 28], qui renvoie à un texte où Leibniz caractérise la *mathesis universalis* comme une *logica imaginatio*). Dans l'un et l'autre cas est préservée la possibilité d'une imagination qui irait de pair avec l'intellect (plutôt que de l'arrêter) et dont les mathématiques (éventuellement réformées) sont justement exemplaires. Il ne semble donc pas du tout fortuit que la question de la mathématique universelle, même si elle n'est pas alors mentionnée explicitement, s'engage à partir de celle de l'imagination mathématique.

Le détour par la variable complexe a alors l'intérêt d'indiquer, bien plus clairement que ne l'aurait fait le problème de l'espace, la nature irréductiblement symbolique de l'imagination mathématique. Il s'agit, en effet, non seulement de créer une image *ad hoc* (les différents parcours de la variable étant représentés par Riemann au moyen de feuillettes superposées recouvrant le domaine de variation et recollés les uns aux autres le long des points de ramification), mais surtout de faire preuve d'invention conceptuelle – et même de montrer qu'il est possible, en mathématiques, de régler par la création d'une image un problème conceptuel profond (ici celui de l'uniformisation des fonctions multivaluées). Vuillemin s'étend donc longuement sur la nature de l'« image riemannienne » [PA1, 322]. Il insiste alors sur sa nature symbolique. Repartant d'un passage célèbre de Cauchy sur l'expression symbolique « qui ne signifie rien par elle-même ou à laquelle on attribue une valeur différente de celle qu'elle doit naturellement avoir », il commente :

[...] un nombre imaginaire est symbolique parce qu'il se réduit à un couple de nombres associés suivant certaines conventions. De même, une équation imaginaire est symbolique, parce qu'elle représente en réalité deux équations entre quantités réelles associées suivant des conventions définies. Or il semblerait *a priori* que des symboles, ainsi définis, ne pussent être rendus intuitifs par des images appropriées, et que l'intuition dût se limiter à illustrer des réalités intellectuelles correspondant aux quantités réelles. Mais l'idée du plan d'Argand-Cauchy et, d'une façon plus systématique, les recouvrements des surfaces de Riemann démontrent qu'en fait on a su pour ces concepts symboliques créer une intuition satisfaisante.

À la vérité, l'intuition mathématique tout entière est pourvue d'un caractère symbolique, au sens de Cauchy. [PA1, 312]<sup>15</sup>

---

15. On remarquera que cette dernière thèse n'est pas sans introduire de tension dans la manière dont Vuillemin lui-même ne cesse d'opposer la mathématique « intellectuelle » qui s'inaugure avec Descartes avec ce qu'il voit comme un réalisme des figures dans la géométrie ancienne. Si l'imagination mathématique est *toujours* symbolique, comme on peut en effet le concéder, elle devrait l'être depuis la géométrie ancienne – même si ces formes sont assurément différentes d'une période à l'autre.

On comprend mieux dans ces conditions en quoi la théorie des polyèdres réguliers revisitée par Klein fournit un exemple paradigmatique d'application de la « mathématique universelle » moderne : elle indique, en effet, un lien entre résolution des équations et élaboration d'une intuition symbolique propre qui donne à la théorie ancienne (où les polyèdres sont les objets à étudier) un sens complètement nouveau.

Les indications qui nous sont données sur la mathématique universelle dans ces développements sont éparées, mais Vuillemin les reprend dans la conclusion de PA1 (intitulée « La mathématique universelle ») en distinguant trois aspects. Le premier concerne le nouveau « Discours de la méthode » qu'induit le tournant formel de l'algèbre et qui reprend les déterminations esquissées dans l'introduction. En clin d'œil à Descartes, Vuillemin l'intitule « Règles pour la direction de l'esprit ». Il y résume la manière dont le rôle de la classification *a priori* à partir des structures a permis de réviser les préceptes de la méthode en les détachant du fantasme de la recherche de « natures simples », qui gouvernait à ses yeux le modèle cartésien de la méthode philosophique comme « analyse » (et plus généralement, l'idéal classique de l'« analyse »). Conformément à ce que nous venons de voir, il prend alors la peine de revenir sur la place de l'intuition, en insistant à nouveau sur le « rôle essentiellement symbolique et intuitif » de l'image mathématique tel qu'il apparaît exemplairement dans la représentation riemannienne des fonctions d'une variable complexe – les différentes réponses au problème d'Helmholtz-Lie fournissant l'autre exemple. Cet usage de l'intuition a néanmoins la particularité d'être toujours *de jure* intégralement résorbable dans une description conceptuelle abstraite, si bien que l'imagination ne s'y donne que comme une aide extrinsèque. La question reste donc ouverte de savoir si un rôle constitutif de l'intuition n'est pas également défendable. D'où le constat qui introduit à la discussion de Husserl :

Il ne reste donc qu'un seul sens selon lequel l'intuition peut recevoir un rôle non seulement subjectif ou symbolique, mais objectif et nécessaire en Mathématiques. C'est celui que lui reconnaît l'école intuitionniste, dans la mesure où elle aperçoit dans la suite des entiers naturels une donnée fondamentale et irréductible, une « synthèse *a priori* » que nulle analyse formelle ou logique ne saurait ramener à des éléments plus simples. Or il s'agit alors non plus de la représentation d'une réalité évidente pour tous, universelle et nécessaire, mais d'une décision métaphysique quoiqu'intérieure aux Mathématiques mêmes. Ainsi, la seule signification précise qu'on puisse reconnaître à l'intuition introduit nécessairement à la deuxième catégorie de questions que pose l'existence d'une Mathématique formelle, celles qu'elle pose au philosophe qui l'examine. [PA1, 479]

Ainsi, la détermination contemporaine de la *mathesis universalis* force à un dialogue avec l'« intuitionnisme » en tant qu'il veut maintenir en amont de la mathématique une intuition originaire. C'est dans ce contexte que

Vuillemin entreprend une discussion serrée avec les propositions de Husserl, qu'il rattache à cette ligne de développement. Le principal défaut de l'approche phénoménologique, à ses yeux, est de plaquer sur les mathématiques une détermination philosophique qu'il qualifie d'« extrinsèque » (par différence avec l'intuitionnisme intrinsèque des mathématiciens eux-mêmes, comme Brouwer ou Heyting, qui assument pleinement le fait de limiter *a priori* les pratiques mathématiques reçues comme légitimes : PA1, 171–172 et 495). Husserl n'a, en effet, aucun mal à accepter les méthodes symboliques modernes, en les reversant dans un type d'intuition propre, et il se rapproche sous ce point de vue de l'approche hilbertienne. Mais il est alors conduit à poser une exigence de « saturation » des systèmes d'axiomes qui suppose la décidabilité des jugements mathématiques et se heurte aux résultats démontrés par Gödel en 1931 [PA1, 499–500]. Ainsi, il ne se place ni du point de vue d'une métamathématique qui doit accorder après Gödel le pluralisme constitutif des interprétations, ni du point de vue d'un intuitionnisme intramathématique qui poserait une limitation constitutive dans les ressources dont peut se prévaloir le mathématicien [PA1, 494–495]. Sous ce point de vue, la phénoménologie reste irréductiblement une forme de dogmatisme (c'est l'objet du § 56, [PA1, 502–506]).

C'est sur cette base que Jules Vuillemin définit alors son propre programme :

L'analyse de la *mathesis universalis* et l'histoire du formalisme suggèrent une solution tout autre que celle de Husserl. Dogmatisme et scepticisme prônent tous deux un même idéal scientifique : celui d'une science et d'une philosophie complètement séparées de la Métaphysique. Le dogmatisme affirme cette séparation possible ; le scepticisme met en doute cette affirmation.

On essayera, pour résoudre critiquement ce problème, d'en renverser les termes en supposant que toute connaissance, quelle qu'elle soit, est de part en part métaphysique, en ce qu'elle implique à son principe des décisions et des choix qui n'appartiennent pas eux-mêmes à la juridiction intérieure de cette connaissance. [PA1, 504–505]

C'est donc tout naturellement que l'enquête se clôt par un retour sur ce qui, du point de vue du contexte analysé dans les deux premières sections de cet article, était la question la plus prégnante portée par la *mathesis universalis* à l'époque, soit son rapport à la détermination d'une métaphysique. Vuillemin repart alors, ce qu'il n'avait jamais fait auparavant, de la première mention connue d'une « mathématique universelle », chez Aristote, puis détaille les différentes apories portées par les propositions anciennes (analogie de l'être) et modernes (cercle du dogmatisme cartésien). Cela lui permet de préciser sa propre voie de sortie :

Une ontologie formelle demeure dogmatique, tant qu'elle est soutenue par une critique partielle de la raison pure. Cette critique

limite en effet étroitement l'usage objectif de la raison théorique à ce qu'en permettent de connaître des sciences « positives », elles-mêmes étrangères aux problèmes et aux décisions métaphysiques ; l'ontologie ne peut alors se constituer qu'en conflit avec ces limitations et par une méthode qui, invoquant l'expérience directe des choses en soi, s'oppose au caractère nécessairement indirect de la méthode critique.

Rien n'interdit toutefois de penser qu'une Critique générale de la raison pure est compatible avec le projet d'une ontologie formelle.

D'une part, les sciences dites « positives » et en premier lieu la Mathématique universelle relèvent de décisions métaphysiques. De l'autre, le dogmatisme étant lié, comme le prouvent ses cercles, à l'extension illégitime de l'usage de certains principes, renoncer à ses chimères n'oblige nullement, pour limiter cette extension à en appeler aux interdits particuliers, de la possibilité de l'expérience, extrinsèques par rapport à la raison pure. [PA1, 517]

Le premier tome s'achève donc par une déclaration programmatique en ce qui concerne la mathématique universelle. « Rien n'interdit de penser, écrit Vuillemin, qu'une Critique générale de la raison pure est compatible avec le projet d'une ontologie formelle » – cette critique générale ayant pour tâche, on l'a rappelé, « d'accueillir les décisions métaphysiques de la Mathématique universelle et d'en étudier les motivations rationnelles ». Rien ne l'interdit, en effet, mais rien ne le permet encore non plus. Car un tel projet suppose justement d'avoir à disposition une mathématique universelle *autre* que celle sur laquelle s'est appuyé Husserl (qui s'est contenté « d'appliquer à la pensée les procédés de l'Algèbre des structures »). C'est en ce point que les éléments livrés par la partie rédigée du second tome s'avèrent précieux. Sans eux, en effet, nous n'aurions tout simplement aucune idée de ce que Vuillemin vise par ce moment de dépassement critique de l'algèbre des structures.

### 2.3 La mathématique universelle dans le projet de PA2

De même que PA1 n'aborde le problème de la mathématique universelle, pourtant présenté comme un de ses fils directeurs, qu'après avoir séjourné longuement dans les méthodes de l'algèbre qui s'inaugurent avec Galois, de même le second tome, d'après ce qui en a été conservé, devait débiter *in medias res* par l'étude des développements de l'algèbre structurale : construction des nombres par extensions successives et théorie algébrique des nombres (chap. VI), suivi par une étude plus philosophique des modifications qu'une telle approche porte en termes de théorie de la définition (chap. VII) ; théorie des formes quadratiques et classification des géométries en termes de groupes de substitution (chap. VIII), suivi par une discussion philosophique sur les

méthodes de recherche d'invariants promues par la phénoménologie (chap. IX) ; théorie des nombres idéaux, conduisant aux constructions ensemblistes de Dedekind (chap. X), puis à la reconstruction des nombres naturels proposés par le même Dedekind (chap. XI). C'est finalement dans le dernier chapitre (XII), intitulé « L'algèbre générale » et dans la conclusion générale, que la mathématique universelle devait revenir sur le devant de la scène. Vuillemin en annonce les déterminations principales en ouverture du dernier chapitre :

J'ai tenté de montrer que, parmi les structures abstraites, celle qui avait joué le rôle unificateur le plus important en mathématiques était la structure de groupe. On verra que la relation la plus générale entre une Algèbre et ses sous-Algèbres s'appelle un treillis, et l'on peut donc prévoir que la théorie des treillis jouera, sur le plan de l'Algèbre générale, le même rôle unificateur que la structure de groupe dans l'algèbre abstraite. Mais elle a pour le philosophe une importance bien plus considérable. Le groupe était un objet exemplaire d'étude ; mais c'était par analogie seulement qu'on pouvait l'incorporer à l'étude de la pensée. Au contraire, comme la théorie des treillis ne fait usage que des concepts logiques les plus généraux, non seulement au point de vue technique, elle fait apercevoir l'infrastructure logique des mathématiques, mais elle fournit le modèle cohérent et exact de l'étude de la logique, et elle remplit enfin le programme que s'était fixé Aristote dans l'*Organon*. [PA2, 330]

Je reviendrai sous peu sur la manière dont cette description s'articule au projet d'une *mathesis universalis*, mais remarquons déjà qu'elle lève une part des tensions que nous avons relevées dans le parcours de PA1. On a vu, en effet, que l'idée de mathématique universelle est introduite dans PA1 sous la forme très spécifique de la théorie des polyèdres réguliers, revisitée par la théorie des groupes, tandis que la conclusion réinvestissait pourtant un sens bien plus ambitieux de « science des autres sciences ». Même s'il était possible de tisser des liens de l'une à l'autre en rappelant la détermination leibnizienne de la *mathesis universalis* comme « logique de l'imagination », force est de constater que ces liens pouvaient paraître ténus et jouer sur une équivoque du terme « logique ». Ce que nous apprend le début du chapitre XII de PA2 est que Vuillemin était parfaitement conscient de cette équivoque qui ne reposait que sur une analogie. Il ne pouvait en aller autrement, d'ailleurs, dans la mesure où la notion de groupe ne joue pas un rôle structurant en logique. Ce n'est pas le cas, en revanche, de la notion d'anneau (ou plus généralement d'algèbre<sup>16</sup>), qui a justement été l'objet principal du second tome. Ici, c'est bien *la même structure* qui vaut du côté des mathématiques et de la logique. Plus profondément peut-être, un célèbre théorème de représentation, découvert par Stone en 1936 et dont on verra l'importance pour Vuillemin, assurait une

16. Une algèbre sur un anneau (commutatif) est un module sur cet anneau dont la loi de composition est bilinéaire.

traduction systématique entre structure logique (algèbre de Boole, vue comme une certaine structure d'ordre), structure algébrique (anneau booléen) et structure topologique (espaces compacts totalement discontinus). Il permettait d'accéder à une unité remarquable des trois grandes « structures mères » bourbachiques, ouvrant ainsi la voie à ce qui pouvait apparaître comme les délinéaments d'une nouvelle « mathématique universelle<sup>17</sup> ».

Mais il y a plus, puisque ce nouveau développement de l'algèbre conduit naturellement à l'étude de l'organisation des structures elles-mêmes, vues de l'intérieur (notamment via la notion de quotient et de sous-structure, objet du §40 du chapitre VI) comme de l'extérieur (dans les rapports ou « morphismes » entre structures). Or cette organisation s'avère elle-même redevable de certaines structures (d'ordre), dont une forme générale est, d'après le passage que je viens de citer, celle de treillis<sup>18</sup>. Il devient dès lors possible de faire droit à une philosophie réellement immanente de l'algèbre qui accompagnerait ce nouveau moment de réflexivité (prolongeant le premier tournant « critique » inauguré avec l'algèbre galoisienne). Tel est ce que Vuillemin désigne comme le moment de l'« Algèbre générale » ou « Algèbre de l'algèbre » :

L'Algèbre abstraite demeurerait un objet pour la théorie de la connaissance. L'Algèbre générale n'est autre que cette théorie elle-même, exprimée sous la forme symbolique des mathématiques. Si la philosophie, dans sa partie théorique, ne se confond cependant pas avec l'Algèbre générale, ce n'est point qu'un écart demeure entre leurs objets, puisqu'elles étudient systématiquement les opérations de pensée en général sous la condition de leur validité objective, et qu'ainsi est rempli le rêve séculaire de la *mathesis universalis*, mais que l'analyse transcendantale doit manifester le rapport de ces enchaînements avec la conscience qui les pense, tandis que l'Algèbre proprement dite ne s'intéresse qu'à

---

17. C'est précisément un des domaines dans lesquels Pierre Samuel, interlocuteur privilégié de Vuillemin pour les aspects mathématiques, avait obtenu ses premiers résultats après-guerre (sa thèse porte sur les ultrafiltres et la compactification des espaces uniformes) [Maronne 2014]. On prendra garde néanmoins au fait que l'inspiration directe de Vuillemin dans ses pages est plutôt [Bell 1940], en particulier son chapitre 11, « Emergence of structural analysis », dont la source n'est pas bourbachique, mais provient de la « théorie des structures » d'Oystein Ore – elle-même équivalente à la théorie des treillis de Birkhoff (voir la contribution de Simon Decaens dans ce dossier thématique). Les écarts se manifestent notamment dans le vocabulaire, Vuillemin ne parlant justement pas de « filtre », comme faisaient les Bourbaki sous l'impulsion de Cartan, mais d'« idéal somme ».

18. Le paragraphe 64 s'ouvre sur un exemple de ce type : un théorème de Weddeburn établissant que toute algèbre associative sur un corps se décompose en la somme d'une Algèbre semi-simple et d'une sous-Algèbre invariante nilpotente. Ce résultat est ensuite rapproché, suivant la description de E. T. Bell, d'autres théorèmes de décomposition (Jordan-Hölder pour les groupes finis, Noether sur la factorisation en idéaux premiers des anneaux commutatifs).

la cohérence exprimée du symbolisme, en faisant l'économie d'une référence constante au sens.

Ainsi, dans sa partie pure, la philosophie n'est que la théorie transcendantale de l'Algèbre abstraite et des treillis. [PA2, 330]

On voit au passage en quel sens précis le programme de Vuillemin entendait prolonger et dépasser celui de Husserl en maintenant le principe d'une articulation entre logique formelle et logique transcendantale au lieu même de la *mathesis universalis*. Cette déclaration reste néanmoins encore très mystérieuse à ce stade dans la mesure où la réflexivité semble d'abord s'être à nouveau entièrement résorbée dans la mathématique elle-même. On peine à voir le rôle que pourrait encore jouer, sinon de manière totalement extérieure, « le rapport de ces enchaînements avec la conscience qui les pense ». Plus généralement, il reste encore à expliquer comment une telle évolution pourrait servir de soutien à l'approche *critique* annoncée à la fin du premier tome.

Pour expliquer cette détermination, Vuillemin se lance d'abord dans une description détaillée de la structure de treillis, telle qu'elle apparaît dans la théorie des idéaux (§ 65), puis pour elle-même (§ 66–69). La portée critique de cette théorie y apparaît alors progressivement : elle se révèle, en effet, apte à formaliser et classer les différents systèmes logiques, et en particulier les calculs logiques classique et intuitionniste, par l'intermédiaire des propriétés des structures d'ordre sous-jacentes. L'annonce de la fin du premier tome prend alors tout son sens, puisqu'il revient bien au philosophe d'exhiber les « décisions métaphysiques » que porte cette « mathématique universelle » d'un nouveau type sous la forme du choix de certaines structures. Sous ce point de vue, Vuillemin va donner une importance particulière au théorème de représentation de Stone (qui suppose d'avoir exhibé au préalable la structure de treillis sous-jacente à celle d'espace topologique), parce qu'il indique comment des résultats purement mathématiques peuvent dès lors se transcrire en résultats logiques et réciproquement. La dernière phrase de la partie l'indique clairement : « le théorème de Stone servira, en Logique, pour décider si un système déductif est catégorique. Son importance critique est donc considérable » [PA2, 354 a].

Dans la conclusion générale<sup>19</sup>, Vuillemin reprend son tableau du développement de l'algèbre en trois moments en étudiant tour à tour l'évolution des objets, des méthodes et des principes. Dans sa description de l'objet, il revient alors sur la réalisation du programme de la mathématique universelle :

Dans son troisième moment, l'Algèbre, faisant abstraction de la nature définie des structures, n'examine plus que les rapports qui lient une structure à ses sous-structures. Elle examine, par conséquent, l'idée de subsomption et de subordination, en son sens le plus général. Cette idée n'est autre que celle de ce que Kant appelait un jugement analytique, mais qu'il considérait comme si

---

19. Voir dans le présent dossier la conclusion de Vuillemin ainsi que l'analyse qui en est donnée dans les contributions de Sébastien Maronne et Baptiste Mélès.

évident ou si parfaitement étudié par Aristote, qu'il pensait que toutes les vérités qu'on pouvait encore découvrir à son propos ne touchaient qu'à la présentation et à l'élégance de l'exposé. Ce préjugé tenait à ce que le jugement analytique de l'ancienne logique ne portait que sur des exemples finis, pour aboutir aux truismes du syllogisme. [PA2, 357]

Il relie alors ce développement de la *mathesis universalis* moderne aux deux autres concepts (après celui de « structure ») qui devaient constituer les parties du second tome (infini et ordre) :

On notera que, surtout sous l'influence de Dedekind, le rapprochement qui s'est fait entre la logique et les mathématiques s'est fait par l'intermédiaire de l'infini. L'idée d'ordre pouvait enfin devenir l'objet d'une étude mathématique proprement dite, et, avec l'idée d'ordre, l'idée même de connaissance déductive que cette idée commande. L'Algèbre de l'Algèbre réalisait enfin le programme de la *mathesis universalis*, quand elle se proposait d'être une « doctrine de la science ». [PA2, 357]

Du côté des méthodes, le trait caractéristique de ce développement est l'extension de l'idéal d'une classification *a priori*, inséparable de l'axiomatique moderne, hors du domaine de l'algèbre et de la géométrie. Ainsi « l'algèbre de la raison » se trouve-t-elle en mesure d'étendre la relativité des connaissances mathématiques aux domaines qui semblaient jusqu'alors hors d'atteinte : l'arithmétique et la logique elles-mêmes [PA2, 359]. Cela conduit au fait que l'examen des principes doit désormais se faire sur fond de « plusieurs mathématiques possibles » [PA2, 362].

Fort de cette analyse, Vuillemin peut alors définir son propre « programme philosophique » (titre du dernier paragraphe, §71). De manière saisissante, on y retrouve les grandes questions qui l'ont effectivement occupé par la suite : la manière dont les déterminations modernes de la question de l'infini relancent certaines questions théologiques ; une « théorie comparée des systèmes philosophiques » et les éléments d'une « logique philosophique » [PA2, 361].

### 3 Conclusion

J'espère, dans cet article, avoir montré deux choses : d'une part, que le thème de la *mathesis universalis* constitue bien un fil directeur du projet de Vuillemin (conformément à ce qu'il avance explicitement) et quelles en sont les déterminations principales ; d'autre part que seul le second tome – du moins la partie qui est en préservée – en déploie le sens, au-delà des déclarations programmatiques du premier. Ce sens est celui d'une approche structurale achevée en « théorie des structures étudiées pour elles-mêmes » ou « algèbre de l'algèbre ».

On voit aussi, par là même, pourquoi Jules Vuillemin pouvait avoir abandonné un tel projet. De fait, la prophétie selon laquelle la théorie des treillis allait prendre une place aussi centrale que celle des groupes ne fut pas réalisée. Sous ce point de vue, l'orientation générale du développement que Vuillemin voulait tracer fut assez rapidement frappée d'obsolescence. La quatrième de couverture de 1993 rapporte cet abandon à d'autres travaux (de l'auteur lui-même, à ce qu'il semble) et à des « parutions récentes sur ces sujets » (qui, si l'on se réfère à la phrase précédente, devraient renvoyer aux « questions concrètes de la mathématique universelle »). Étant donné le vague de ces indications, on en est réduit à des spéculations. Mais ces spéculations ne sont pas sans intérêt pour qui voudrait attaquer aujourd'hui le « problème si important et si négligé » de la mathématique universelle.

Un point semble acquis à la lecture de la partie conservée du second tome : Vuillemin a indéniablement pensé que le concept de treillis, et plus généralement le domaine de « l'algèbre universelle », allait jouer un rôle central et unificateur dans le développement des mathématiques. En ce point, où il suit à la lettre les prédictions d'E. T. Bell, il s'est clairement trompé. En 1993, il ne pouvait plus s'agir de prendre en compte une littérature nouvelle dans ce domaine (l'algèbre universelle) et l'on peut conjecturer que les « publications récentes » dont parle Vuillemin renvoient donc plutôt à des ouvrages qui pourraient avoir justement remis en cause son diagnostic. Du côté mathématique, le candidat le plus attendu est alors l'émergence progressive de la théorie des catégories et, en particulier, les développements consécutifs aux travaux de Lawvere et Grothendieck sur la notion de *topos*, contemporains de la parution de PA1<sup>20</sup>.

Cela dit, une telle hypothèse laisse le mystère en l'état, puisque rien ne semblait empêcher Vuillemin de réviser son projet à l'aune de ce nouveau paradigme. La question fondamentale en ce qui concerne le projet d'une mathématique universelle est donc de savoir si cette révision aurait pu être *compatible* avec le projet initial. Or il semble que non, et je voudrais achever ce cheminement en esquissant brièvement pourquoi ce ne pouvait être le cas. Le modèle que suit Vuillemin dans *La Philosophie de l'algèbre* reste, en effet, attaché à l'idée d'une forme de prééminence de la logique sur les mathématiques [PA1, 65]. La logique fournit des règles générales de raisonnement qui peuvent ensuite être appliquées dans tel ou tel domaine, au premier chef dans les mathématiques. En ce sens, une théorie, même

---

20. Sur la continuité entre théorie des catégories et algèbre universelle, et la manière dont celle-là pouvait supplanter celle-ci, voyez les commentaires que Lawvere rédigea en 2004 pour la réédition de sa thèse de 1963 [Lawvere 1963]. Il faut également remarquer le point suivant : que le formalisme catégorique soit apte à capturer la notion bourbachique de « structure » en la généralisant au cas des « structures locales » était une intuition forte de l'école qui s'était développée en France autour de Charles Ehresmann et ces idées circulaient justement dans le milieu des praticiens de l'algèbre universelle dès le début des années 1960 : voyez notamment l'intervention de Jacques Riguet du 12 décembre 1960 au séminaire Dubreuil [Riguet 1960].

mathématique, des différentes formes de logique, associées à différents types de structure d'ordre, équivaut à une classification des formes de raisonnement. C'est pourquoi on peut associer cette classification à des choix qui s'effectuent *en amont* du mathématique et prennent, en dernière instance, leur source dans des « décisions métaphysiques ». Le projet critique renouvelé (qui nourrira le projet d'une classification des systèmes philosophiques) consiste alors non à choisir une de ces orientations, mais à en analyser la pluralité constitutive à l'aide d'instruments rationnels inspirés de la philosophie immanente des mathématiques elles-mêmes (dans le projet initial, ce qui est désigné tantôt comme « Algèbre de l'algèbre », tantôt comme « Algèbre de la raison »). Cette vision n'est pas accessoire dans le projet de Vuillemin : elle en constitue le cœur. Sans elle, il semble que le projet de « Critique générale » qu'il a en vue s'effondre aussitôt de lui-même.

Or c'est précisément un des aspects que l'émergence de la notion de *topos* dans les années 1960 a le plus profondément bousculés. Non seulement parce qu'elle proposait une autre façon de penser l'unité des structures algébriques, topologiques et d'ordre. Mais surtout parce qu'elle conduisait à une saisie de la logique assez différente. Comme y a insisté Jean Petitot, il ne s'agissait plus, en effet, de penser la logique comme réglant une syntaxe universelle, dont on pouvait ensuite étudier les différentes restrictions et interprétations [Petitot 1997]<sup>21</sup>. Dans le cadre catégorique, en effet, la forme de la syntaxe émerge directement de la structure du *topos* lui-même. Il en résulte qu'elle n'est plus astreinte à relever de *choix* (« métaphysiques » ou non). Le mathématicien se place dans un cadre intuitionniste ou classique en fonction du *topos* dans lequel il travaille. Même si rien ne l'empêche de suivre des principes « métaphysiques » à partir desquels il pourra accepter ou rejeter tel ou tel aspect de la pratique mathématique « ordinaire », ce type de décision n'opère plus comme ce qui tranche dans un pluralisme que seul le philosophe aurait la possibilité de pleinement penser. Le pluralisme est inscrit directement dans la pratique mathématique elle-même. Pour le dire autrement, la pluralité des structures est dès lors inscrite dans la pluralité des mondes mathématiques où le praticien évolue et non plus dans quelque analyse de « la raison » (ou du raisonnement).

La différence avec le pluralisme de Vuillemin peut sembler ténue, mais elle est, en fait, profonde. Pour la plupart des mathématiciens, la possibilité qui s'est ouverte avec ces développements est précisément de ne *plus* être contraints de choisir : le cadre intuitionniste s'avère être non pas l'objet d'une limitation, sur laquelle le mathématicien aurait à statuer en amont de sa pratique pour savoir s'il l'accepte ou non, mais un langage de description

---

21. Petitot insiste notamment sur le fait que l'approche catégorique permet une relance du projet husserlien d'un genre totalement différent de celui que critique Vuillemin. En permettant en effet de récupérer, de l'intérieur du mathématique, la forme des jugements perceptifs « morphologiques », elle permet de reverser dans la logique formelle bien des traits que Husserl voulait attacher à un transcendantal non mathématisable.

adapté à telle ou telle situation mathématique dans laquelle il se trouve – tandis que le langage classique se trouve plus adapté à telle ou telle autre situation. La différence essentielle dans l'élaboration d'une « critique » est que c'est alors, comme c'était déjà le cas chez Hilbert, de l'intérieur de la mathématique que le pluralisme émerge (et non plus de grandes orientations « philosophiques » dans la pensée) – mais en étendant cette fois ce pluralisme à la logique elle-même. Sous ce point de vue, la théorie des catégories peut se penser comme une véritable théorie de la relativité en mathématiques<sup>22</sup>. Ceci explique d'ailleurs, au moins pour partie, la situation de relatif désarroi dans laquelle pouvaient se trouver non seulement Vuillemin, mais plus généralement la philosophie des mathématiques depuis les années 1970, écartelée qu'elle était entre la persistance de discussions « fondationnelles » d'un autre âge – à laquelle la plupart des mathématiciens étaient devenus rapidement indifférents – et un repli sur des études de cas fournies par la pratique, mais inaptes à l'élaboration de considérations philosophiques générales (la pratique suffisant à porter par elle-même le pluralisme que le philosophe rêverait de dériver de grandes orientations dans la pensée). Or c'est peut-être là que se situe pourtant, si l'on suit la trajectoire de Vuillemin et si l'on veut la prolonger, le problème « si important et si négligé » d'une *mathesis universalis* aujourd'hui.

## Remerciements

Ce travail n'aurait pas pu voir le jour sans l'invitation de Baptiste Mèlès à participer au « Club Algèbre » qui s'est réuni de 2013 à 2015 pour déchiffrer et analyser le manuscrit que Vuillemin avait rédigé pour la première partie du second tome de *Philosophie de l'algèbre*. Qu'il en soit remercié, ainsi que tous les participants du groupe : Emmylou Haffner, Gerhard Heinzmann, Sébastien Maronne, Philippe Nabonnand et David Thomasette.

## Bibliographie

ARNDT, Hans Werner [1971], *Methodo scientifica pertractatum*, Berlin : de Gruyter.

BELAVAL, Yvon [1960], *Leibniz critique de Descartes*, Tel, Paris : Gallimard, nouvelle éd., 1976.

---

22. Ce parallèle a été développé par John Bell dans son article [Bell 1986]. Il y signale également un autre phénomène important survenu au début des années 1960 : la mise au point par Paul Cohen des méthodes de *forcing* pour la démonstration d'indépendance de certains axiomes que l'on pourrait vouloir ajouter à la théorie des ensembles standard (originellement « l'hypothèse du continu »). Une des interprétations possibles des résultats de cette méthode est que l'univers ensembliste n'est pas fixe, mais correspond à un cadre pour exprimer une pluralité de mondes mathématiques possibles.

- BELL, Eric T. [1940], *The Development of Mathematics*, New York : Mc Graw-Hill.
- BELL, John L. [1986], From absolute to local mathematics, *Synthese*, 69(3), 409–426, doi : 10.1007/BF00413980.
- BENIS-SINACEUR, Hourya [2018], Scientific philosophy and philosophical science, dans *The Philosophers and Mathematics : Festschrift for Roshdi Rashed*, édité par H. Tahiri, Cham : Springer, *Logic, Epistemology, and the Unity of Science*, t. 43, 25–66, doi : 10.1007/978-3-319-93733-5\_2.
- CAVAILLÈS, Jean [1997], *Sur la logique et la théorie de la science*, Paris : Vrin, G. Canguilhem, Ch. Ehresmann, et J. Sebestik pour l'édition présente.
- COUTURAT, Louis [1914], *The Algebra of Logic*, Chicago ; Londres : The Open Court Publishing Company, titre original *L'Algèbre de la logique*, 1905 ; trad. angl. par L. Gillingham Robinson, préface par P. Jourdain.
- DESCARTES, René [1964-1974], *Œuvres de Descartes*, Paris : Vrin, 11 vol., éd. de Ch. Adam et P. Tannery. Nouvelle présentation par P. Costabel et B. Rochot.
- FOUCAULT, Michel [1966], *Les Mots et les Choses*, Paris : Gallimard.
- GÉRARD, Vincent [2001], *Mathématique universelle et métaphysique de l'individuation. L'élaboration de l'idée de mathesis universalis dans la phénoménologie de Husserl*, Thèse de doctorat, Université Paris-Est Créteil.
- HUSSERL, Edmund [1957], *Logique formelle et logique transcendantale*, Paris : PUF, trad. fr. par S. Bachelard de *Formale und transzendante Logik*, 1929.
- [1976], *La Crise des sciences européennes et la phénoménologie transcendantale*, Tel, Paris : Gallimard, trad. fr. par G. Granel de *Die Krisis der europäischen Wissenschaften und die transzendente Phänomenologie*, 1935-1936.
- [1993], *La Phénoménologie et le fondement des sciences*, Paris : PUF, trad. fr. par D. Tiffeneau de *Die Phänomenologie und die Fundamente der Wissenschaften*, 1912.
- KLEIN, Jacob [1934-1936], Die griechische Logistik und die Entstehung der Algebra, *Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik ; Abteilung B : Studien*, 3(1–3), 18–105 (1934) ; 122–235 (1936).
- LAWVERE, F. William [1963], *Functorial Semantics of Algebraic Theories*, Thèse de doctorat, Columbia University, reprint in *Theory and Applications of Categories*, n° 5, 1–121, 2004.

LEIBNIZ, Gottfried Wilhelm [2018], *Écrits sur la mathématique universelle*, Paris : Vrin, traduction et notes sous la direction de D. Rabouin.

MAHNKE, Dietrich [1925], *Leibnizens Synthese von Universalmathematik und Individualmethaphysik*, *Jahrbuch für Philosophie und phänomenologische Forschung*, Halle : Max Niemeyer.

MARONNE, Sébastien [2014], Pierre Samuel et Jules Vuillemin, mathématiques et philosophie, dans *Des mathématiques en Auvergne : histoire, progrès, interactions*, édité par Th. Lambre, Clermont-Ferrand : *Revue d'Auvergne*, t. 1, 151–173.

PETITOT, Jean [1997], La neige est blanche ssi... Prédication et perception, *Mathématiques et sciences humaines*, 140, 35–50, doi : 10.4000/msh.2771.

RABOUIN, David [2009], *Mathesis universalis. L'idée de mathématique universelle d'Aristote à Descartes*, Paris : PUF.

RIGUET, Jacques [1960], Catégorisation de la notion de structures et de structures locales chez N. Bourbaki et C. Ehresmann, dans *Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres*, t. 14, 1–32.

VUILLEMIN, Jules [1960], *Mathématiques et Métaphysique chez Descartes*, Épiméthée, Paris : PUF.

— [1961], Sur la différence et l'identité des méthodes de la métaphysique et des mathématiques chez Descartes et Leibniz et sur la conception classique des principes de causalité et de correspondance, *Archiv für Geschichte der Philosophie*, 43(3), 267–302, doi : 10.1515/agph.1961.43.3.267.

— [1962], *La Philosophie de l'algèbre. Tome premier. Recherches sur quelques concepts et méthodes de l'algèbre moderne*, Épiméthée, Paris : PUF.



# Jules Vuillemin : de la méthode cartésienne à la méthode structurale

*Sébastien Maronne*

Institut de Mathématiques de Toulouse,  
Université Paul Sabatier, Toulouse (France)

**Résumé:** J'étudie la méthode structurale définie par Vuillemin dans *La Philosophie de l'algèbre* ainsi que les origines de cette méthode en partant de la quatrième règle du *Discours de la méthode* et de l'interprétation qu'en donne Vuillemin dans *Mathématiques et métaphysique chez Descartes*. J'analyse pour ce faire la conception de Vuillemin de l'histoire des mathématiques ainsi que les relations entre méthode et objets. J'examine d'autre part les différentes formes d'analyse et d'abstraction mentionnées par Vuillemin et leur rapport à la thématization au sens de Cavailles.

**Abstract:** I studied the structural method defined by Vuillemin in *La Philosophie de l'algèbre* and the origins of this method by considering the fourth rule of the *Discours de la méthode* and its interpretation given by Vuillemin in *Mathématiques et métaphysique chez Descartes*. To achieve this aim, I analyse Vuillemin's conception of the history of mathematics and the relationship between method and objects. I also examine the different forms of analysis and abstraction mentioned by Vuillemin and their relationship with Cavailles' thematization.

## 1 Introduction

### 1.1 Pourquoi Descartes ?

La figure de Descartes, philosophe et mathématicien, traverse l'œuvre de Jules Vuillemin, comme celle de plusieurs philosophes français des sciences de

---

la seconde moitié du xx<sup>e</sup> siècle<sup>1</sup>, depuis *Mathématiques et métaphysique chez Descartes* (1960), dont la conclusion annonce *La Philosophie de l'algèbre* (1962) publiée deux ans plus tard, jusqu'aux synthèses visant à proposer une classification de systèmes philosophiques, offertes dans le volume paru chez Minuit, *Nécessité ou contingence* (1984), puis dans son complément *What Are Philosophical Systems* (1986). Pourquoi Descartes ? Si on laisse de côté l'empreinte cartésienne dans la formation et les débats philosophiques de cette période<sup>2</sup> pour se concentrer sur les textes de Descartes et les commentaires qu'en donne Vuillemin, en les rapportant à l'ensemble de l'œuvre de ce dernier<sup>3</sup>, on identifie deux faisceaux de raisons qui conduisent Vuillemin à privilégier l'exemple cartésien comme point de départ de son projet d'une philosophie de l'algèbre<sup>4</sup>.

Le premier tient à la relation bien connue chez Descartes entre mathématiques et métaphysique. Le conditionnement diachronique de la philosophie théorique par les mathématiques pures<sup>5</sup>, pour ce qui regarde le renouvellement des méthodes de celle-là dans le traitement du problème de la connaissance, attesté selon Vuillemin par l'histoire des deux disciplines, est le postulat de départ de *La Philosophie de l'algèbre*. Comme « il est également connu que la méthode métaphysique de Descartes emprunte sans discontinuer à l'invention de la Géométrie Algébrique » [Vuillemin 1962, 4–5]<sup>6</sup>, on n'est guère étonné que Vuillemin ait pu partir de l'exemple prototypique de Descartes, d'autant que celui-ci revendique explicitement l'analogie de *méthode* voulue par celui-là, entre mathématiques et métaphysique, dans le *Discours de la méthode* [Descartes 1637, 19].

Le second faisceau de raisons tient à la lecture originale de la quatrième règle du *Discours de la méthode* comme un précepte régulateur portant sur les *méthodes* d'investigation d'un problème, plutôt que sur ses composantes, qui préfigure l'un des ingrédients de la méthode structurale définie dans

1. Granger traite dans son *Essai d'une philosophie du style* du style cartésien [Granger 1968, 43–55]. La première communication scientifique de Canguilhem, prononcée à l'occasion du congrès Descartes de 1937, a pour titre « Descartes et la technique » [Canguilhem 2011-, I, 490–498] : sur ce « texte pivot », voir [Roth 2013, 195–206]. Pour une étude consacrée à la figure de Descartes dans l'œuvre de Canguilhem, on pourra aussi consulter [Guillin 2015].

2. À ce sujet, voir [Van Damme 2002, chap. IV, 179–234].

3. Je m'inscris ici dans la ligne de [Schwartz 2015].

4. De l'aveu de Vuillemin lui-même : voir la conclusion de *Mathématiques et métaphysique chez Descartes* [Vuillemin 1960b, 141, en part. IV].

5. Sur la définition de la philosophie théorique donnée par Vuillemin, cf. [Vuillemin 1962, 2–4]. Les mathématiques pures recouvrent l'algèbre, la géométrie et l'analyse, mais aussi la théorie des ensembles et la topologie. Il est notable que Vuillemin choisisse d'y incorporer également la logique formelle ou mathématique, celles-là étant prises « au sens large ». Cf. [Vuillemin 1962, 2].

6. C'est précisément ce que s'est efforcé de montrer Vuillemin dans *Mathématiques et métaphysique chez Descartes* deux ans plus tôt. Il écrit ainsi dans son avant-propos qu'il « [espère] éclairer par Descartes savant Descartes philosophe » [Vuillemin 1960b, 2].

*La Philosophie de l'algèbre, a contrario* de la méthode génétique dont Descartes fait usage.

## 1.2 Quelle histoire des mathématiques ?

On observe dans les ouvrages de Vuillemin de nombreuses marques de l'attention minutieuse portée par lui au contenu mathématique des textes<sup>7</sup>, qu'il s'agisse des nombreuses notes mathématiques « techniques » reléguées en appendice, ou bien des analyses détaillées des raisonnements mathématiques procurées dans le développement de l'argumentation philosophique, cf. [Vuillemin 1960b, 142–183] et [Vuillemin 1962, *passim*].

### Une histoire récurrente des mathématiques instrumentalisée par la métaphysique

Si Vuillemin peut proposer l'éclairage d'un texte mathématique ancien au moyen des mathématiques contemporaines, à l'instar de Bourbaki<sup>8</sup>, les choix qu'il opère obéissent à des raisons mathématiques mais également métaphysiques, comme en témoigne, de manière particulièrement saisissante, l'« éclaircissement » apporté sur la définition cartésienne de la tangente dans *Mathématiques et métaphysique chez Descartes* :

À vrai dire, la définition cartésienne [de la tangente] ne s'éclaircit entièrement que si l'on en appelle à la définition algébrique formelle de la dérivée d'un polynôme<sup>9</sup>. Soit le polynôme  $A(x)$  appartenant à l'anneau  $K[x]$ . Formons le polynôme  $A(x + y)$  appartenant à l'anneau  $K[x, y]$ , où  $y$  est l'indéterminée. Le point

---

7. Cette démarche s'est appuyée sur un apprentissage des mathématiques conduit en particulier auprès de Pierre Samuel, qui fut professeur au même moment que Vuillemin à l'université de Clermont-Ferrand. Pierre Samuel apparaît dans les remerciements de [Vuillemin 1960b] et comme l'un des dédicataires de [Vuillemin 1962]. Vuillemin écrit d'ailleurs dans « Ma vie en bref » : « Under the direction of Pierre Samuel, who taught in the science faculty, I deepened my mathematical knowledge a little » [Vuillemin 1991, 3]. Sur Samuel et Vuillemin, cf. [Maronne 2014].

8. Vuillemin s'est appuyé pour l'histoire de la théorie des équations algébriques sur la notice historique publiée dans [Bourbaki 1950, 199–201] : voir [Vuillemin 1962, n. 1, 74]. Il cite également en bibliographie les *Éléments d'histoire des mathématiques* [Bourbaki 1960].

9. On retrouve une analyse semblable chez André Weil à propos de la controverse sur les tangentes entre Descartes et Fermat. Celle-ci est condamnée à nous apparaître sybilline tant qu'on n'a pas clarifié la distinction entre géométrie algébrique et géométrie différentielle [Weil 1980, 234]. Dans le même ordre d'idées, cf. [Weil 1981, 395] sur les origines de la géométrie algébrique.

de vue de Fermat et de Cournot consiste à écrire ces polynômes :

$$A(x) = \sum a_K x^K = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

$$A(x+y) = \sum a_K (x+y)^K = A(x) + yA_1(x) + y^2 A_2(x) + \dots$$

puis à les soustraire en négligeant les termes en  $y^2$ ,  $y^3$ , etc. :

$$A(x+y) - A(x) = yA_1(x)$$

C'est cette définition que refuse Descartes, car elle ne repose que sur une pseudo-égalité. Pour que  $y^2 \dots$  ne soit plus seulement négligeable, mais rigoureusement nulle, il suffit de considérer les congruences modulo  $y^2$ , c'est-à-dire l'anneau quotient  $K[x][y]/y^2$ .

Bien que cette idée des congruences soit étrangère aux Mathématiques de Descartes, une telle définition formelle et purement algébrique est bien dans l'esprit de la *Géométrie*. Il est vrai qu'elle contredit à la représentation géométrique de la tangente comme limite d'une sécante, mais l'idée-mère de la Géométrie analytique, c'est-à-dire la conception d'une correspondance fonctionnelle entre une équation et une courbe est secondaire, chez Descartes, par rapport à la théorie purement algébrique des proportions. [Vuillemin 1960b, 63–64]

Ce conditionnement des mathématiques par la métaphysique s'applique non seulement à l'interprète mais également aux acteurs. De nature à la fois théorique et pratique, il affecte les choix effectués par Descartes parmi les méthodes et les objets recevables en géométrie. En effet, force est de constater que la Géométrie cartésienne outrepassa *La Géométrie* [Descartes 1637a]. Descartes emploie ainsi dans ses lettres des méthodes infinitistes pour résoudre des problèmes faisant intervenir des courbes « mécaniques<sup>10</sup> », méthodes et objets qu'il avait auparavant exclus. La conclusion qu'en tire Vuillemin est que la raison d'un tel ostracisme n'est pas technique mais métaphysique [Vuillemin 1960b, 9–10]. Ce conditionnement métaphysique permet en outre d'expliquer l'absence d'une physique mathématique chez Descartes car les problèmes de la physique ne conduisent que rarement à des équations algébriques [Vuillemin 1960b, 93–95]. Dans les remarques de conclusion de *What Are Philosophical Systems*, Vuillemin écrira de manière suggestive à propos de l'exemple cartésien : « c'est bien une *action philosophique* plutôt qu'une défaillance technique qui est responsable du divorce entre le programme de Descartes et son accomplissement » [Vuillemin 1986, 130].

Dans *La Philosophie de l'algèbre*, Vuillemin amplifiera cette thèse et caractérisera la science, et donc la connaissance mathématique, en posant

10. Cf. [Vuillemin 1962, 56–73]. Les courbes mécaniques, qui ne peuvent pas être exprimées par une équation algébrique entre leurs coordonnées, sont exclues de *La Géométrie*. Sur la classification cartésienne des courbes, voir [Vuillemin 1960b, 77–98].

« qu'elle est de part en part métaphysique, en ce qu'elle implique à son principe des décisions et des choix qui n'appartiennent pas eux-mêmes à la juridiction intérieure de cette connaissance » [Vuillemin 1962, 505].

En considérant le témoignage autobiographique de « Ma vie en bref », dans lequel Vuillemin se démarque de la philosophie analytique anglo-saxonne, on doit ajouter que l'histoire de Vuillemin « qui n'est pas une histoire » n'est toutefois pas une logique car elle est fondée sur le commentaire et l'interprétation des textes mathématiques et philosophiques et apparaît assujettie à une contrainte de fidélité :

[...] Even those who applied the method of “rational reconstruction” to [scientific languages] more often imposed on them principles of their own choice. I resisted this violence done to history, and trusted in the sciences such as they are, and not such as they should be. Moreover, it is presumptuous to neglect the philosophical tradition. [Vuillemin 1991, 4]

J'examinerai dans les sections suivantes les raisons mathématiques et philosophiques au fondement de l'histoire *structurale* des mathématiques proposée par Vuillemin<sup>11</sup>.

### 1.3 La quatrième règle du *Discours de la méthode*

Dans le paragraphe précédant la conclusion de *Mathématiques et métaphysique chez Descartes* [Vuillemin 1960b, § 18, 135–138], Vuillemin propose une interprétation originale de la quatrième règle du *Discours de la méthode* [Descartes 1637, 19] en voyant celle-ci comme « un précepte réflexif et régulateur, qui porte donc sur les méthodes et non sur les problèmes » et en la rapprochant du passage suivant tiré du Livre III de la *Géométrie*<sup>12</sup> :

Il est vray que ie n'ay pas encore dit sur quelles raisons ie me fonde, pour oser ainsi assurer si une chose est possible ou ne l'est pas. Mais, si on prend garde comment, par la méthode dont ie me

11. Cette histoire structurale des mathématiques s'articule en outre avec une histoire structurale de la philosophie dans la ligne de Gueroult. Sur ce point, voir en particulier [Vuillemin 1963, V–VIII, 17–30]. Sur l'histoire structurale de la philosophie pratiquée par Gueroult et Vuillemin, cf. [Mélès à paraître].

12. Le fait que l'usage des préceptes de la méthode ait *effectivement* régi l'élaboration mathématique de *La Géométrie* a souvent été mis en doute au sein de l'historiographie, pour la simple raison que ces préceptes sont relativement généraux. Les *Regulae* ont pu aussi être convoquées comme complément philosophique à la *Géométrie* mais le problème est autre : les mathématiques auxquelles elles renvoient, exception faite des règles XIX à XXI, dont on n'a que les titres, ne correspondent pas à celles de la *Géométrie*. Sur ces questions, cf. [Israel 1998]. L'introduction du « repère cartésien » dans la résolution du problème de Pappus « pour [se] demesler de la confusion de toutes ces lignes » [Descartes 1637a, 382–383] offre une illustration remarquable du second précepte. L'interprétation de Vuillemin n'en a que plus d'intérêt.

sers, tout ce qui tombe sous la consideration des Géomètres se reduist a un mesme genre de Problemes, qui est de chercher la valeur des racines de quelque Equation, on iugera bien qu'il n'est pas malaysé de faire un dénombrement de toutes les voyes par lesquelles on les peut trouver, qui soit suffisant pour demonstrier qu'on a choisi la plus générale & la plus simple. [Descartes 1637a, 475]

Descartes a auparavant présenté sa « règle générale » de construction des problèmes solides, partant d'une équation du troisième ou du quatrième degré, au moyen d'un cercle et d'une parabole. Il a ensuite appliqué cette règle à l'invention de deux moyennes proportionnelles et à la trisection de l'angle avant d'affirmer *a contrario* que tous les problèmes solides se réduisent à ces deux constructions sur la base d'un examen exhaustif des trois types d'équations du troisième degré<sup>13</sup>. En effet, Descartes a introduit une équation (résolvante) « auxiliaire et indirecte » du troisième degré [Descartes 1637a, 457–461] lui permettant de réduire les équations du quatrième degré à celles du second, et donc de ne considérer, *in fine*, que le cas des équations du troisième degré. Vuillemin commente :

Toute l'histoire ultérieure de la théorie des équations consistera [...] à faire l'examen critique des méthodes de résolution [...] [et] montrera l'utilité de la dernière règle cartésienne, sorte de méthode de la méthode même, tout en signalant son usage imparfait. [...] l'algébriste n'établira sa règle d'énumération méthodique que sur l'analyse d'équations auxiliaires et indirectes, qui résulteront de la comparaison des méthodes, ou même qu'il aura à construire *a priori* pour résoudre des classes définies d'équations.

Ainsi la quatrième règle se détachera du corps des règles du *Discours*, celui-ci servant à déterminer directement les objets et les équations, celle-là servant à déterminer indirectement les structures et les méthodes. [Vuillemin 1960b, 137–138]

Les vertus de l'emploi de la quatrième règle du *Discours* se rencontrent donc dans l'usage d'une analyse *indirecte* et l'examen *critique* des méthodes de résolution, lesquels préfigurent certaines des composantes de la méthode structurale qui sera définie par Vuillemin dans *La Philosophie de l'algèbre*<sup>14</sup>.

---

13. [Descartes 1637a, 464–475]. Descartes par un procédé rhétorique dont il est coutumier renverse une fois de plus la perspective. Les deux problèmes de l'insertion de deux moyennes proportionnelles et de la trisection de l'angle ne sont donc pas seulement d'illustres exemples transmis par les Grecs à la postérité et donc marqués du sceau de la contingence historique : ils sont aussi les premiers dans l'ordre des raisons.

14. Cf. [Vuillemin 1962, 465–466]. Vuillemin insiste à nouveau sur le caractère précurseur de la quatrième règle du *Discours* dans [Vuillemin 1962, 65, 216].

## La méthode génétique et ses limites

Cet emploi de la quatrième règle est néanmoins entravé par la méthode génétique et l'intuitionnisme « intrinsèque » à l'œuvre dans la géométrie cartésienne : c'est ce que nous enseigne *La Philosophie de l'algèbre* qui évoque celui-ci<sup>15</sup> et caractérise celle-là, chez Lagrange et Fichte [Vuillemin 1962, 112–122], répondant ainsi aux deux dernières questions posées par Vuillemin dans *Mathématiques et métaphysique chez Descartes* :

Quelles sont les limites que rencontre la méthode génétique ?  
 Quelles structures méthodiques les lui imposent ? [Vuillemin 1960b, 141]

Vuillemin définit de manière parfaitement claire, dans la conclusion d'une première version de *La Philosophie de l'algèbre*<sup>16</sup>, l'idéal méthodique génétique qu'on aperçoit chez les mathématiciens du XVII<sup>e</sup> et du XVIII<sup>e</sup>, malgré les débats et les querelles portant sur l'analyse et la synthèse :

Étant donné un individu complexe, il faut pouvoir le décomposer en ses éléments, puis le recomposer entièrement à partir de cette analyse élémentaire. Tel est le double mouvement de la « méthode génétique ». Son défaut tient uniquement à ce que la particularité du point de départ cache, la plupart du temps, les raisons du succès ou de l'échec de l'analyse. L'entendement ne réussit que par une divination heureuse, ce qui donne lieu à la théorie du génie. [Vuillemin 1962a, 358]

On sait que Descartes considérait deux problèmes comme impossibles *géométriquement* : la quadrature du cercle et la rectification des courbes géométriques. Le premier de ces problèmes ne peut être construit que « mécaniquement » avec la quadratrice : c'est ce qui permet à Descartes d'exclure une

15. Cf. [Vuillemin 1962, 171–173]. L'intuitionnisme à l'œuvre chez Descartes est intrinsèque car les critères qu'il emploie pour restreindre l'usage de la raison sont internes aux mathématiques (« [procéder] par égalités absolues et [rejeter] les égalités de Fermat »), et ne font pas appel à une faculté extérieure. *A contrario*, l'intuitionnisme de Kant est « extrinsèque ». L'intuitionnisme, mathématique et philosophique, chez Descartes, ainsi que chez Kant, sera abordé dans le détail dans [Vuillemin 1984, 208–230]. Sur l'intuitionnisme cartésien, voir aussi [Belaval 1960].

16. Nous désignerons dans la suite cette première version sous le vocable de « *La Philosophie de l'algèbre [état 0]* ». On trouve dans la boîte V du fonds Vuillemin trois documents dactylographiés A, B et C, comportant de nombreuses corrections et annotations manuscrites, qui composent la deuxième partie de cette première version. Celle-ci contenait deux parties. La première partie, aujourd'hui disparue, a constitué le matériau de *La Philosophie de l'algèbre*. Une deuxième partie, inédite, qu'on trouve dans le document A, [Vuillemin 1962a], fut remaniée après la publication du premier tome : les deux premiers chapitres furent réécrits (c'est le document B, cf. [Vuillemin 1962b]), des pages furent ajoutées, et de nombreuses corrections manuscrites furent apportées. Pour une présentation détaillée, cf. dans le présent dossier la contribution de Baptiste Mèlès ainsi que la notice de Gudrun Vuillemin-Diem dans le dossier documentaire consacré au tome II de *La Philosophie de l'algèbre*.

telle solution dans le cadre de son intuitionnisme « intrinsèque » fondé sur le critère du clair et du distinct, cf. [Vuillemin 1960b, 90–93] et [Vuillemin 1962, n. 3, 184–185]. Néanmoins, rien n’assure qu’on ne puisse pas disposer d’une construction alternative légitime géométriquement : c’est tout le problème des démonstrations d’impossibilité dans le cadre d’une méthode génétique<sup>17</sup>. En revanche, l’intuition exprimée par Descartes dans *La Géométrie* selon laquelle « la proportion qui est entre les droites & les courbes n’estant connue & mesme, ie croy, ne le pouvant estre par les hommes » [Descartes 1637a, 412] fut contredite assez rapidement par la rectification donnée par van Heuraet de courbes algébriques qu’on trouve, ironie du sort, dans le premier volume de la seconde édition latine de la *Géométrie* de van Schooten parue en 1659.

Cette confirmation et ce démenti établissent que l’intuitionnisme joint à la méthode génétique participent non seulement de l’imperfection mais aussi de l’incertitude de la géométrie cartésienne. Comme l’écrira Vuillemin dans *La Philosophie de l’algèbre*, « les prétentions [génétiques] sont démenties par l’apparition de bornes qui surgissent irrationnellement de la marche même de l’entendement » [Vuillemin 1962, 115].

## 2 Vers la méthode structurale

### 2.1 Méthode cartésienne et méthode structurale

C’est en partant de cet « usage imparfait » cartésien de la quatrième règle pour construire les problèmes solides que Vuillemin va opérer la reconstruction d’une histoire nécessaire de la théorie des équations algébriques, dans la première section de la première partie de *La Philosophie de l’algèbre* intitulée « Les règles de la méthode » [Vuillemin 1962, 69–300]. Le titre n’est pas anodin<sup>18</sup> : chacun des quatre chapitres composant cette section, respectivement consacrés au théorème de Lagrange, au théorème de Gauss, à la méthode générale d’Abel, et à la théorie de Galois, « exprime » un des quatre préceptes de la méthode des mathématiques modernes, lesquels sont présentés bien plus loin au sein de la conclusion de *La Philosophie de l’algèbre* [Vuillemin 1962, § 49, 466–472] dans une section au titre éminemment cartésien « Règles pour la direction de l’esprit ». Non contents de renvoyer à quatre auteurs, ces

---

17. Comme on le sait bien, l’exclusion cartésienne est confirmée par la démonstration, bien ultérieure, de la transcendance de  $\pi$ .

18. Vuillemin n’explique pourtant, à aucun moment, la signification de ce titre et la correspondance mise en évidence *infra*. Dans le § 7 de l’Introduction, où il présente le plan du livre, il se contente d’écrire que dans la première partie, « [il] étudie d’abord l’avènement de la méthode de Galois et examine quelles règles ou quels préceptes l’expriment » [Vuillemin 1962, 66]. En conclusion, il écrit : « Les théories de Lagrange, de Gauss, d’Abel et de Galois concernant la question des équations n’ont servi qu’à expliquer *respectivement* le sens des quatre préceptes suivants » [Vuillemin 1962, 466].

quatre préceptes font donc clairement écho aux quatre préceptes cartésiens du *Discours de la méthode*.

On trouve déjà exprimée dans le célèbre texte de Bourbaki, « L'architecture des mathématiques », une analogie formelle entre la méthode cartésienne et la méthode (structurale) axiomatique, fondée en particulier sur le « classique balancement de l'analyse et de la synthèse » :

Puisant comme [la méthode expérimentale] à la source cartésienne, [la méthode axiomatique] « divisera les difficultés pour les mieux résoudre » ; dans les démonstrations d'une théorie, elle cherchera à dissocier les ressorts principaux des raisonnements qui y figurent ; puis, prenant chacun d'eux isolément, et le posant en principe abstrait, elle déroulera les conséquences qui lui sont propres ; enfin, revenant à la théorie étudiée, elle en combinera de nouveau les éléments constitutifs précédemment dégagés, et étudiera comment ils réagissent les uns sur les autres. Il n'y a, bien entendu, rien de neuf dans ce classique balancement de l'analyse et de la synthèse ; toute l'originalité de la méthode réside dans la manière dont elle est appliquée. [Bourbaki 1948, 38]

Comme on le sait bien, Bourbaki présente en outre dans ce texte sa théorie des structures. S'agit-il du point de départ de Vuillemin dans sa réflexion sur la méthode des mathématiques<sup>19</sup> ?

Alors que les trois premiers préceptes de la méthode cartésienne régissent les mathématiques classiques du XVII<sup>e</sup> et du XVIII<sup>e</sup> siècles<sup>20</sup>, les préceptes de la méthode structurale sont repérés par Vuillemin au sein des mathématiques du XIX<sup>e</sup>, bien que les structures en soient absentes, à travers les interprétations structurales, modernes, qui en sont données<sup>21</sup>. Vuillemin indique en effet dans l'introduction avoir partagé *La Philosophie de l'algèbre* en deux parties, « suivant qu'il s'agissait des méthodes proprement dites [le tome I, publié, de *La Philosophie de l'algèbre*] ou, au contraire, des objets et des idées

---

19. L'article de Bourbaki figure dans les références de [Vuillemin 1962] mais n'est pas cité.

20. Selon Vuillemin, avant Lagrange, les géomètres du XVIII<sup>e</sup> siècle mésusent des trois premières règles de la méthode cartésienne en confondant les natures simples et les courbes particulières, la méthode et l'invention, et en n'assujettissant pas véritablement l'usage de la méthode à la raison, laquelle devrait rendre compte, en particulier, des échecs et des réussites dans la résolution des problèmes. Lagrange, en réintroduisant l'usage de la quatrième règle, va enclencher le passage de la méthode génétique cartésienne à la méthode structurale. Cf. [Vuillemin 1962, 61–65 ; 73].

21. Vuillemin s'appuie ainsi sur l'exposé moderne de la théorie de Galois qu'on retrouve, si l'on s'en tient aux références citées par Vuillemin [Vuillemin 1962, 240], dans [Bourbaki 1950, chap. V, 70–191]. Connaissant les relations qui lient Vuillemin et Samuel, il n'est pas anodin que Samuel soit l'auteur de la pénultième version de ce chapitre : cf. [Samuel 1948b]. Une autre source de Vuillemin est le traité classique [van der Waerden 1950, I, chap. VII, 153–192].

nouvelles que leur application a permis d'apercevoir – [le tome II, *non publié*] » [Vuillemin 1962, 65–66]<sup>22</sup>.

Cette reconstruction est donc également, pour ainsi dire, combinatoire, en tant qu'elle est déterminée par une contrainte forte : identifier parmi les développements mathématiques du XIX<sup>e</sup> siècle consacrés à la théorie des équations quatre préceptes « miroirs » de ceux de la méthode cartésienne<sup>23</sup>, dont la forme reproduit, qui plus est, très fidèlement celle des énoncés cartésiens en dépit de la divergence sur le fond<sup>24</sup>.

Cette histoire nécessaire et récurrente, fondée sur le plan à la fois mathématique et philosophique, est parfaitement assumée par Vuillemin. Il s'agit bien de « réflexions » sur le développement de la théorie des équations algébriques que Vuillemin propose, qui n'en sont pas moins fondées sur « les mathématiques telles qu'elles sont » (voir *supra*, section 1.2, p. 75).

## 2.2 Les préceptes de la méthode structurale

Dans l'interprétation de Vuillemin, les trois premiers préceptes de la méthode cartésienne renvoient respectivement à l'intuition des natures simples (proportions et équations) [Vuillemin 1962, 16], l'analyse, la synthèse, ces deux dernières opérations à l'œuvre dans la résolution d'un problème géométrique étant parfaitement réversibles l'une dans l'autre [Vuillemin 1962, 5–28, 468], tandis que le quatrième précepte régule l'usage des trois premiers.

Qu'en est-il de la méthode exposée par Vuillemin dans *La Philosophie de l'algèbre*? Cette méthode est celle de la mathématique moderne formelle<sup>25</sup>. Elle est donc *structurale*<sup>26</sup>. Ses quatre préceptes incorporent, en écho à

22. Vuillemin renvoie ainsi au tome II pour l'analyse des structures qui « affleurent » dans l'œuvre de Gauss [Vuillemin 1962, 149]. Cf. [Vuillemin 1962a, chap. VI et VIII].

23. Faute d'espace, je ne peux malheureusement pas discuter ici le choix des textes et des auteurs opérés par Vuillemin. Sans entrer dans les détails, il me paraît toutefois clair que Vuillemin s'est appuyé sur l'histoire donnée par Bourbaki dans [Bourbaki 1950, Notice historique, 199–205] qu'il cite comme on l'a vu auparavant dans la note 8, p. 73.

24. Comparer par exemple « le premier est de ne recevoir une solution pour satisfaisante... » à « le premier estoit de ne recevoir jamais aucune chose pour vraie ». On notera également en passant l'usage ironique du vocabulaire cartésien dans le commentaire au premier précepte : « c'est en effet une *prévention* ou du moins une *précipitation* de croire qu'au fur et à mesure qu'on augmente le degré d'une équation algébrique, on augmente seulement la complication des expressions algébriques qui seront ses solutions, car l'existence de solutions algébriques dépend elle-même de structures abstraites, celles des groupes de substitutions qui n'ont pas de rapport immédiat avec la théorie des équations » [Vuillemin 1962, 467].

25. Vuillemin oppose la mathématique formelle critique des Modernes à la mathématique « matérielle » dogmatique des Classiques : cf. [Vuillemin 1962, 471–472]. La première porte sur les structures tandis que la seconde porte sur les individus.

26. Vuillemin n'emploie pourtant que deux fois l'expression « méthode structurale » dans *La Philosophie de l'algèbre* bien qu'une telle désignation aille de soi.

Descartes, des opérations, comme l'analyse et la synthèse, qui sont déterminées par les structures sous-jacentes aux problèmes et leur usage répond à des normes épistémologiques, comme l'explication ou la pureté.

Ceci ressort des commentaires de Vuillemin, qui suivent immédiatement l'exposé des préceptes [Vuillemin 1962, 467–472], et dont la structure est invariablement la même : Vuillemin opère une comparaison avec Descartes et rappelle les leçons à tirer des chapitres correspondants<sup>27</sup>.

Le premier précepte détermine les conditions pour recevoir « une solution pour satisfaisante » plutôt qu'une « chose pour vraie », comme c'était le cas chez Descartes. Ce précepte impose donc l'usage d'une analyse (second précepte) qui « montre la raison ou la cause<sup>28</sup> dans une structure définie ». Or les structures, en tant qu'elles sont définies par un système d'axiomes, ne sont ni simples, ni soumises au critère cartésien d'évidence, que ce soit globalement ou à travers leurs axiomes. D'autre part, les structures appartiennent à un ordre rationnel et formel entièrement séparé de celui, concret, des individus auxquels elles s'appliquent. Vuillemin en tire trois conséquences qu'il va dérouler tout au long de ses commentaires des préceptes<sup>29</sup>, et qui caractérisent la méthode des mathématiques modernes par opposition à celle, génétique, des mathématiques classiques.

---

Cf. [Vuillemin 1962, 273] ainsi que [Vuillemin 1962, 114] où la méthode structurale est illustrée par la troisième série dans les deux systèmes de Lagrange et Fichte, *a contrario* de la méthode génétique, illustrée par les deux premières séries. On retrouve la même expression dans [Vuillemin 1960a, 20]. Cf. également [Vuillemin 1962a, chap. IX, 268e; conclusion, 358, 361]. Vuillemin affirme dans cette conclusion que la méthode structurale est « critique » (p. 361) et « doit être axiomatique » (p. 358).

27. Bien que Vuillemin affirme que de tels préceptes sont « assez clairs par les exemples qui les ont illustrés » [Vuillemin 1962, 466], on ne peut bien comprendre les commentaires qui suivent qui si l'on a bien en tête les chapitres en question. Le fait que les préceptes apparaissent seulement à la page 466 tandis que le chapitre sur Galois s'achève page 300 ne facilite guère la compréhension. Cette première partie de la conclusion intitulée « Règles pour la direction de l'esprit », est indépendante des deux autres qui sont consacrées à la mathématique universelle. Elle renvoie clairement à la section première « Les règles de la méthode » en la concluant. Cette structure en diptyque de *La Philosophie de l'algèbre* me paraît témoigner de la genèse de l'ouvrage.

28. Vuillemin renvoie en note [Vuillemin 1962, n. 3, 469] aux *Seconds Analytiques* d'Aristote où ce thème, classique dans la tradition de la philosophie des mathématiques, se trouve élaboré pour la première fois. Sur les démonstrations causales de Arnauld à Bolzano, on pourra consulter [Mancosu 1996, 100–105].

29. Et ce, de manière « non distincte ». Par exemple, le fait de rapporter Lagrange au premier précepte pourrait paraître paradoxal dans la mesure où ce dernier emploie une méthode génétique. Mais c'est bien la *transition* initiée par Lagrange d'une méthode à l'autre qui intéresse Vuillemin : en accordant à celui-là le caractère réflexif de ses analyses sur la résolution des équations algébriques, en tant qu'elles sont fondées sur l'examen critique des méthodes à l'œuvre – lequel culmine avec la définition de la résolvente [Vuillemin 1962, 78–86] –, Vuillemin montre que l'emploi de la quatrième règle du *Discours* [Vuillemin 1962, 73] débouche sur la première règle de la méthode structurale.

1. « L'évidence des "natures simples" qu'on supposait au principe des mathématiques [est récusée] » : une fois les natures simples rejetées, l'intuition conçue par Descartes comme la représentation intellectuelle d'une nature simple perd son rôle objectif, pour ne « conserver [qu'] un rôle purement subjectif et psychologique<sup>30</sup> ». Les structures ultimes auxquelles l'analyse d'un problème doit parvenir sont en effet élémentaires mais ne sont pas simples, et si l'entendement permet de les apercevoir, seule la raison permet de rendre compte de leur apparition, et non l'intuition. On doit donc « réserver le mot de raison à la faculté de penser une structure<sup>31</sup> ».
2. L'identité générique entre les éléments de l'ordre analytique et de l'ordre synthétique et la réversibilité parfaite des méthodes qui en résulte, qui caractérisait la méthode génétique, disparaît dans la méthode structurale. En effet, « nous constatons qu'un groupe et une équation n'appartiennent pas au même genre d'êtres et qu'une structure n'est qu'une "cause" très lointaine d'événements » (p. 468). On est ainsi confronté à une nouvelle analyse structurale qui diffère, dans son essence, de l'analyse géométrique classique<sup>32</sup>.
3. Un principe de relativité est importé au sein de la connaissance algébrique par la nouvelle méthode : le procédé d'adjonction de Galois montre que le problème de la résolubilité d'une équation doit être rapporté à une structure formelle, celle de corps. Une théorie de la vérité-correspondance doit être abandonnée : « le vrai c'est ce qu'on peut déduire d'une structure » (p. 472). Mais, plus important, les décisions du mathématicien, regardant le corps d'adjonction, qui pourraient paraître à la fois libres et arbitraires, sont *a posteriori* déterminées, lorsqu'elles sont effectives, par la théorie mathématique elle-même.

---

30. Cf. [Vuillemin 1962, 476–477]. Le rôle de l'intuition des structures dans la résolution des problèmes a naturellement été souligné par les mathématiciens, au premier rang desquels Bourbaki, dans une perspective opposée à celle du formalisme logique : cf. [Bourbaki 1948, 42–43].

31. Vuillemin consacre un long développement à cette distinction entre entendement et raison dans le chapitre dévolu à Lagrange [Vuillemin 1962, 115–116]. À nouveau, on retrouve ce caractère explicatif mis en avant par Bourbaki au sujet de la méthode axiomatique. Le but de celle-ci est de fournir « l'intelligence profonde des mathématiques », ce qui va bien au-delà de l'énoncé cartésien selon lequel « le caractère externe des mathématiques est de se présenter sous l'aspect de cette "longue chaîne de raisons" », cf. [Bourbaki 1948, 37]. Vuillemin écrit, comme en écho, dans *La Philosophie de l'algèbre* : « Les mathématiques sont moins une longue chaîne de raisons qu'une composition faite de différentes structures » [Vuillemin 1962, p. 471].

32. Dans la conclusion de *Mathématiques et métaphysique chez Descartes*, Vuillemin avait déjà écrit à propos de l'impossibilité de la résolution par radical de l'équation du cinquième degré : « De cette difficulté, les Mathématiques ne triompheront qu'en concevant une méthode nouvelle, où l'analyse des structures précède et fonde l'analyse des problèmes particuliers » [Vuillemin 1960b, 141].

Vuillemin écrit ainsi :

[...] les idées de corps conjugués séparables et de normalité<sup>33</sup> corrigent ce qu'il y avait d'arbitraire dans le procédé général de l'adjonction [chez Galois] : elles délimitent *a priori* les adjonctions convenables, c'est-à-dire requises pour un problème déterminé : l'extension du corps de base, qui, d'abord, paraissait ne dépendre que des décisions du mathématicien, trouve dans la nature même des problèmes auxquels il doit répondre des limites naturelles, de sorte que la relativité des corps, en premier lieu établie par rapport à une décision purement conventionnelle, est finalement fondée sur la spécificité des équations proposées.  
[Vuillemin 1962, 231]

N'est-ce pas là dire que le mathématicien dont l'invention est effective, en ce qu'elle résout le problème que ce dernier a choisi d'affronter, est à la fois libre et « en tout mené » par les mathématiques et leur développement ?

## De la réflexion en mathématiques

Une même préoccupation traverse ces quatre préceptes, c'est celle de la réflexion en mathématiques<sup>34</sup> : ce sont en effet les structures qui rendent compte *nécessairement* à l'issue de l'expérience mathématique, telle qu'elle se déploie dans l'histoire, des méthodes de résolution des problèmes. Vuillemin insiste en outre sur le fait qu'il ne saurait y avoir de génie, sinon par provision et dans un sens psychologique, en mathématiques, en prenant pour exemple prototypique Gauss<sup>35</sup> :

Le procédé de Gauss [pour définir les conditions de construction des polygones réguliers] nous donne le pourquoi de la solution et non seulement son comment. Elle dépend en effet non pas d'une intuition simplificatrice, mais des rapports de subordination entre les structures<sup>36</sup> et, à ce titre, de l'ordre des choses plutôt que de

33. Rappelons qu'« une extension  $E$  d'un corps  $K$  est galoisienne sur  $K$  si elle est algébrique et si  $K$  est le corps des invariants du groupe des  $K$ -automorphismes de  $E$  » et que cette propriété est équivalente au fait que  $E$  est normale et séparable : cf. [Bourbaki 1950, § 10, « Extensions galoisiennes », déf. 1 et prop. 1, 145]. Dans la présentation moderne, on considère, de manière plus générale, le groupe des automorphismes d'un corps, et non plus le groupe des permutations des racines d'une équation algébrique.

34. Sur la réflexivité mathématique et philosophique chez Vuillemin, cf. [Benis-Sinaceur 2018, 56–60].

35. Cf. [Vuillemin 1962, 149–152]. Vuillemin se fonde sur cette thèse pour répondre à la célèbre critique de Hegel contre la méthode mathématique dans l'introduction de *La Phénoménologie de l'esprit*, énonçant que la réflexion y demeure étrangère à son objet [Vuillemin 1962, 159].

36. Ces « rapports de subordination » renvoient à la décomposition du groupe de Galois de l'équation correspondant à la construction de l'heptadécagone régulier. Ce

l'art de la science. Aussi une fois trouvée, élimine-t-elle le génie en révélant au grand jour ses principes – même si tel n'a pas été le cas immédiatement chez Gauss [...]. [Vuillemin 1962, 469]

À nouveau, dans sa *Leçon inaugurale* au Collège de France du 5 décembre 1962, Vuillemin posera le problème de l'autonomie de la philosophie de la connaissance vis-à-vis de la science en soulignant l'existence de deux sortes de réflexion appartenant, en propre, aux mathématiques et aux mathématiciens. La première accompagne une pratique rationnelle effective, en ce qu'elle permet de résoudre un problème au moyen d'une méthode, et se déploie à travers deux opérations, l'abstraction et la généralisation. La seconde relève de la métamathématique [Vuillemin 1963, 17–21]. Selon Vuillemin :

Nulle, mieux [que la notion de structure], ne paraît susceptible d'éclairer les deux sortes de réflexion qu'on a reconnues propres au mathématicien, non plus que le profit que la critique philosophique en peut tirer. [Vuillemin 1963, 21]

C'est donc dans un nouveau type d'abstraction, fondé sur la considération des structures, que va se réaliser l'idéal réflexif des mathématiques modernes. Mais quelle abstraction et quelles structures ?

## 2.3 Méthodes et objets

Comme on l'a déjà vu, selon Vuillemin, la méthode ne cesse pas d'accompagner la pratique mathématique en se réalisant par la suite dans ses théories et ses objets. On retrouve cette idée déjà exprimée chez Descartes sous la forme d'une norme : la méthode de résolution d'un problème doit être fondée dans la théorie ou, pour employer le langage cartésien, dans la « nature » des objets considérés<sup>37</sup>.

Dans la conclusion de *La Philosophie de l'algèbre [état 0]*, Vuillemin précise la nature de la connaissance pure en algèbre en rapportant celle-ci à son objet, sa méthode et ses principes<sup>38</sup>, et en résumant les différentes étapes dans l'évolution respective de chacune de ces composantes.

L'évolution des objets [Vuillemin 1962a, 355–357] est déclinée en trois « moments » principaux :

Le premier accomplit le projet cartésien ; il aboutit à Lagrange. Le second est illustré par Galois. Dedekind et Birkhoff représentent le troisième. [Vuillemin 1962a, 355]

---

groupe est cyclique d'ordre 16 : c'est ce qui *explique* qu'une telle construction soit possible à la règle et au compas. Voir [Vuillemin 1960b, 139–149].

37. Ainsi la méthode des normales de Descartes « est tirée d'une connaissance de la nature des équations ». Cf. la lettre à Mersenne de janvier 1638 [Descartes 1897-1913, I, 190].

38. La première phrase de l'introduction de *La Philosophie de l'algèbre* ne considérera que deux de ces aspects (si l'on rapproche « origine » de « principes ») : « Les connaissances peuvent être divisées selon leur origine ou selon leur méthode » [Vuillemin 1962, 1].

Le fait que Vuillemin ait choisi de présenter des moments plutôt que des périodes mérite d'être noté. Ce sont bien des espaces de temps brefs ou, à tout le moins, entièrement déterminés en tant qu'ils sont illustrés par un auteur, qui témoignent du passage d'une période à une autre qui l'intéressent au premier chef. De tels passages, que d'aucuns pourraient nommer révolutions, sont annoncés par des prémices qu'on rencontre dans l'ordre de la méthode. Le premier et le deuxième moments sont traités dans *La Philosophie de l'algèbre* [Vuillemin 1962, chap. I–IV] – bien que Vuillemin affirme dans l'introduction qu'il ne s'y occupe que des méthodes. Le troisième l'est dans la deuxième partie de *La Philosophie de l'algèbre [état 0]* [Vuillemin 1962a, chap. X–XII].

C'est ensuite sur l'opération d'abstraction que Vuillemin fait porter son attention :

L'algèbre des structures met au contraire en jeu un second type d'abstraction<sup>39</sup>, qui établit la cause ou raison d'être des propriétés liées aux individus, en la cherchant dans les structures algébriques auxquelles ils obéissent. [Vuillemin 1962a, 355–356]

Il s'agit de l'abstraction évoquée dans la *Leçon inaugurale*. On retrouve la même idée exprimée dans *La Philosophie de l'algèbre* au sein des deux premiers préceptes de la méthode<sup>40</sup>, mais sans que le terme d'abstraction n'y soit employé [Vuillemin 1962, 467–468].

Vuillemin décrit ensuite l'évolution des méthodes, qui s'achève sur le parachèvement de la méthode structurale en une méthode proprement axiomatique [Vuillemin 1962a, 357–359] :

Lorsqu'on en tire toutes les conséquences, la méthode structurale doit être axiomatique. Autrement dit, elle doit examiner systématiquement et *a priori* les conséquences d'une structure donnée par des postulats définis. [...] Mais le développement conséquent de la méthode axiomatique exigeait deux conditions qui n'ont été réalisées véritablement que dans le troisième moment de l'Algèbre [l'étude des structures pour elles-mêmes et la relativité de la connaissance]. [Vuillemin 1962a, 358]

À nouveau, la relativité de la connaissance dont il est question ici est abordée par Vuillemin dans le deuxième moment de l'algèbre [Vuillemin 1962, 472].

Si l'on maintient une solidarité entre les méthodes et les objets, et qu'on introduit, en complément des « moments » de transition, les périodes, on peut résumer le triptyque de Vuillemin de la manière suivante :

---

39. Comparée à la double abstraction de l'algèbre cartésienne opérée par l'usage du calcul littéral concomitant à l'économie de l'intuition des figures : cf. [Vuillemin 1962a, 355].

40. À nouveau, le registre des objets se mêle à celui des méthodes.

- **Première période, de Descartes à Lagrange** : équations algébriques, méthode génétique ;
- **Deuxième période, de Lagrange à Galois** : structures (implicites), méthode structurale (pré-axiomatique) ;
- **Troisième période, de Galois à Dedekind et Birkhoff** : algèbres<sup>41</sup>, méthode structurale axiomatique,

ceci au prix d'un double « brouillage » entretenu, d'une part, par les allers-retours incessants de Vuillemin entre méthodes et objets, d'autre part, par sa lecture rétrospective des méthodes<sup>42</sup> qui ne portent pas tant sur un domaine d'objets, qu'elles n'assurent le passage graduel d'une période à une autre.

Vuillemin conclut avec l'évolution des principes [Vuillemin 1962, 359–360]. Ceux-ci sont relativisés du fait de l'emploi de la méthode axiomatique :

Les principes mêmes des mathématiques [...] cesseront alors d'apparaître attachés intuitivement à la nature de notre esprit. S'ils sont liés à une structure, on devra essentiellement examiner plusieurs mathématiques possibles, en tant qu'on les utilisera ou qu'au contraire on en fera l'économie. [Vuillemin 1962a, 359]<sup>43</sup>

On retrouvait déjà cette solidarité entre méthode et théorie chez Cavaillès<sup>44</sup>, en particulier dans *Méthode axiomatique et formalisme* [Cavaillès 1938]<sup>45</sup>, à la différence importante près que ce dernier ignore les acteurs d'une telle méthode, les mathématiciens [Benis-Sinaceur 2019, 159sq.], alors que Vuillemin tâche de rapporter la conscience mathématicienne à l'œuvre dans l'invention d'une méthode aux concepts mathématiques qui en révèlent les raisons de l'« effectivité » dans les développements mathématiques à venir<sup>46</sup>.

41. Au sens de l'algèbre universelle.

42. Pour une autre proposition d'interprétation du rapport entre méthodes et objets, cf. dans le présent dossier la contribution de Baptiste Mèlès.

43. Je cite ici la conclusion en prenant en compte les corrections manuscrites de simple forme de Vuillemin.

44. Sur « Vuillemin, continuateur de Cavaillès », cf. la contribution d'Hourya Benis-Sinaceur et Emmylou Haffner dans le présent dossier.

45. Comparer avec : « Doublant le champ thématique se trouve le système des *méthodes* impossibles à préciser autrement que par l'intuition centrale qui dirige les variations de leurs applications et qui constitue l'unité profonde – mais cette fois saisissable dans l'action – d'une théorie » [Cavaillès 1938, 178]. Cf. également « La pensée mathématique » [Cavaillès 1994, 594]. On trouve dans ce dernier texte une réaction intéressante d'Hyppolite aux conférences de Lautman et Cavaillès concernant « le développement de la théorie des équations de Viète à Galois » [Cavaillès 1994, 620–621].

46. Une solution possible à cette hétérogénéité, qui s'appuie sur l'intentionnalité de la conscience, a été proposée par la phénoménologie husserlienne. Elle est critiquée par Vuillemin [Vuillemin 1962, 491–495] et a été rejetée auparavant par Cavaillès [Benis-Sinaceur 2019, 162sq].

## 3 La méthode structurale en acte ?

### 3.1 Méthode et structures

Vuillemin ayant dégagé la méthode structurale des limbes mathématiques du XIX<sup>e</sup> siècle en s'appuyant sur les travaux de Lagrange, Gauss, Abel et Galois, on pourrait s'attendre à ce qu'il exemplifie son usage au sein des mathématiques modernes structurales proprement dites, conformément au programme qu'il a annoncé [Vuillemin 1962, 65–66].

Force est de constater qu'il ne le fait pas vraiment dans la deuxième partie de *La Philosophie de l'algèbre [état 0]* intitulée « De quelques structures d'Algèbre et d'Arithmétique ». Dans cette partie, non publiée, il aborde certes un matériau mathématique plus contemporain, qui concerne en particulier les structures d'ordre et la théorie des treillis de Birkhoff, cf. [Vuillemin 1962a, chap. XII, L'algèbre générale, 322–354], mais celui-ci relève déjà d'un nouveau moment, celui de l'algèbre de l'algèbre. De cette absence, il est permis de tirer deux hypothèses, à défaut de conclusions qui nécessiteraient un examen détaillé que n'autorise pas le format de cette contribution.

La première est de nature génétique et voit le « tour de force » de la reconstruction nécessaire de la section « Les règles de la méthode » comme une élaboration tardive résultant de l'extension de la première partie de *La Philosophie de l'algèbre [état 0]* qui n'apparaissait pas ou, à tout le moins, était beaucoup moins marquée, dans le projet initial<sup>47</sup>.

La conclusion de *La Philosophie de l'algèbre [état 0]* que nous venons d'examiner en témoigne assurément. Les préceptes de la méthode n'y sont pas même mentionnés. On retrouve bien certains éléments de ceux-là mais dans la partie consacrée à l'évolution des *objets* de la connaissance algébrique<sup>48</sup>. Quant à la partie abordant l'évolution concurrente des méthodes, la (première) méthode structurale n'y est évoquée qu'au travers d'une phrase où elle est réduite à l'analyse structurale dont le propre est de « passer du réel

47. Il semble en revanche que Vuillemin avait bien l'intention de continuer à dérouler ce fil de la méthode *après La Philosophie de l'algèbre*. Le chapitre VIII « Philosophie de la définition » de la deuxième partie inédite révisée qu'on trouve dans le document B (cf. *supra* n. 16, p. 77) cite ainsi explicitement les trois problèmes de la conclusion de *La Philosophie de l'algèbre* [Vuillemin 1962b, 34]. Si le titre d'une première partie, interne aux chapitres, intitulée « Questions de méthode », figure immédiatement à la suite, on ne trouve pas d'autres titres indiquant que les deux parties suivantes aient été rédigées par Vuillemin. Ce dernier s'est contenté de reprendre les deux derniers paragraphes du chapitre d'origine dans le document A [Vuillemin 1962a, §§ 43–44, 211–223]. Cf. la notice de Gudrun Vuillemin-Diem dans le dossier documentaire consacré au tome II de *La Philosophie de l'algèbre*.

48. Le rapport de la structure aux individus auxquels celle-là s'applique porte deux conséquences : « la notion d'opération est dégagée de ses illustrations particulières » ; « tout individu est relatif à une structure qui détermine *a priori* son degré de discernabilité ». Cf [Vuillemin 1962a, 356].

au possible » [Vuillemin 1962a, 358]<sup>49</sup>, avant de faire place à la méthode structurale axiomatique.

La seconde réponse à cette absence est de nature conceptuelle. Prenant sa source dans les réflexions de Vuillemin sur le génie en mathématiques, elle renvoie à la double question de l'identification et de la pérennité d'une méthode *générale* en mathématiques<sup>50</sup> : si l'on admet un effet « retard » dans la réflexion mathématique par rapport aux méthodes d'invention, on serait alors fondé à penser que la méthode des mathématiques contemporaines ne saurait être trouvée *hic et nunc*, mais seulement identifiée dans un développement futur qui pourrait être, dans le cas de l'algèbre abstraite, la théorie des catégories<sup>51</sup>. Suivant cette perspective récurrente assumée par Vuillemin, l'épistémologie historique consisterait à reconstruire les méthodes « effectives » à partir des « idées<sup>52</sup> nouvelles qui [leur] correspondent » [Vuillemin 1962, 66]<sup>53</sup>.

D'autre part, si la méthode des mathématiques est sujette à des renouvellements, comme la méthode philosophique, qu'en est-il de la fréquence et de la

49. Vuillemin mentionne ici Abel. On retrouve le même jugement dans *La Philosophie de l'algèbre* à propos de la démonstration et du style d'Abel : cf. [Vuillemin 1962, 208–209]. Cela montre que des éléments du chapitre consacré à Abel dans [Vuillemin 1962, chap. III, 207–221] étaient déjà présents dans [Vuillemin 1962a].

50. J'entends ici distinguer la méthode génétique et la méthode structurale des nombreuses méthodes locales à l'œuvre dans la pratique mathématique. Ce sont par exemple, pour Cavaillès, « le calcul desarguien en géométrie projective élémentaire, le procédé général de la diagonale ou la linéarisation dans la théorie de Cantor, le procédé de la chaîne pour Dedekind » [Cavaillès 1938, 178]. Ce qui fait la force et l'originalité de la contribution de Vuillemin est que sa méthode constitue non seulement un moyen terme entre la méthode globale axiomatico-déductive et les nombreuses méthodes locales, mais qu'elle s'ajuste à la fois à la réalité de la pratique, comme celles-ci, et à un champ étendu, comme celle-là.

51. Dans les années 1950, la distance temporelle nécessaire pour effectuer un tel examen réflexif manquait assurément à Vuillemin. Si l'on pense, comme lui, que la réflexion de l'épistémologue doit s'appuyer, nécessairement, sur une réflexion mathématique *a posteriori* du génie incarné dans un moment mathématique, on serait porté à penser qu'il ne saurait exister de philosophie des mathématiques contemporaines, et que la métaphore hégélienne, devenue banale, de l'envol crépusculaire de la chouette de Minerve est en fin de compte d'une vérité amère pour la philosophie des mathématiques. Sur le rôle laissé par le mathématicien au philosophe, voir [Vuillemin 1963, 18–20].

52. Vuillemin emploie concurremment les termes « idées », « objets » [Vuillemin 1962, 65] et « concepts » (qu'on pense au sous-titre de *La Philosophie de l'algèbre*) pour désigner le produit ou corrélat d'une méthode effective. Je n'entre pas ici dans une analyse conceptuelle, fine, de ces variations.

53. Les mathématiques seraient alors le règne du « plagiat par anticipation ». Là où Le Lionnais écrit « Il nous arrive parfois de découvrir qu'une structure que nous avions crue parfaitement inédite avait déjà été découverte ou inventée dans un passé lointain. Nous nous faisons un devoir de reconnaître cet état de choses en qualifiant les textes en cause de plagiat par anticipation », l'épistémologue écrira « il nous arrive toujours... ».

nature de ceux-là (en laissant de côté le foisonnement des méthodes « locales » de résolution de problèmes) ? L'histoire sur la longue durée des mathématiques qu'on pourrait dégager du projet de Vuillemin d'une philosophie de l'algèbre paraît identifier deux époques : celle de la méthode génétique appliquée à la mathématique matérielle, et celles de la méthode structurale appliquée à la mathématique formelle [Vuillemin 1962, 288]. Au sein de chacune de ces deux méthodes, on rencontre une analyse et une abstraction<sup>54</sup>.

### 3.2 Quelles structures ?

Laissons à présent de côté le « tour de force » des préceptes de la méthode structurale, pour nous en tenir à la notion de structure qui joue un si grand rôle dans le projet de Vuillemin. Quel terminus *ad quem* pouvait-il choisir, au sein des mathématiques proprement structurales, après la *Moderne Algebra* de Van der Waerden [van der Waerden 1930] ? Parmi les théories proposant une élucidation de la notion de structure, on en dénombre trois possibles<sup>55</sup> qui ont été étudiées dans le détail par Corry dans la seconde partie de son ouvrage classique *Modern Algebra and the Rise of Mathematical Structures* [Corry 2004, 253–380] : la théorie des structures algébriques d'Ore et celle des treillis de Birkhoff, la théorie des (espèces de) structures de Bourbaki, et la théorie des catégories<sup>56</sup>.

---

54. Si l'on prend en compte dans l'analyse *La Philosophie de l'algèbre [état 0]* (voir *supra* section 2.3, p. 85), se pose la question de distinguer deux méthodes structurales et deux mathématiques formelles, la seconde de celles-là, axiomatique, portant sur les formes des formes, à savoir les algèbres de structures. De manière plus générale, on peut s'interroger sur la possibilité d'un enchaînement indéfini de telles abstractions que Cavallès qualifiait de thématization et sur lesquelles reviendra Gardies en les rapportant à l'*echtesis* platonicienne (voir *infra* section 4, p. 94). Je considère, en m'appuyant sur le texte de Vuillemin et en me focalisant sur l'opération plutôt que sur le résultat, qu'il n'existe à proprement parler que deux mathématiques, l'une matérielle et l'autre formelle, laquelle s'étagé en différentes composantes produites par les abstractions successives.

55. Et une quatrième notoirement ignorée comme aurait pu l'écrire Vialatte. J'y reviendrai.

56. Ces théories des structures étaient en outre relativement antagonistes, si l'on en croit leurs promoteurs respectifs. Dieudonné écrit ainsi à propos de la théorie des treillis dans sa préface à la traduction française de l'*Algèbre* de Birkhoff et Mac Lane : « Il semble par contre que les auteurs auraient pu sans inconvénient omettre le chapitre sur les "lattices" auxquels toute une école américaine voue une prédilection persistante, malgré le peu d'intérêt que présente cette théorie dans les autres branches des mathématiques ». Cf. [Birkhoff & Mac Lane 1970, xiv]. Mac Lane a émis de son côté un jugement critique sur la généralité stérile de la théorie bourbakiste des espèces de structure. Cf. [Mac Lane 1971, 103].

Vuillemin n'aborda pour ainsi dire jamais la dernière, dont les premières élaborations, dans la ligne de l'une et l'autre des deux autres théories, avaient déjà été produites avant *La Philosophie de l'algèbre*<sup>57</sup>.

## Une autre abstraction

Vuillemin se réfère d'autre part à Bourbaki dans *La Philosophie de l'algèbre* lorsqu'il aborde la notion d'opération interne au sein du paragraphe clef intitulé « De l'idée de structure algébrique dans son rapport avec l'abstraction : la notion générale d'opération » [Vuillemin 1962, 257–263]. Partant de « l'idée de groupe abstrait, telle que Galois l'a définie, ou plutôt telle que les Modernes l'ont axiomatisée<sup>58</sup> », Vuillemin insiste sur le fait que la notion d'opération interne sur un ensemble  $E$ , définie comme une fonction de  $E \times E$  dans  $E$  est l'« idée mère de la notion de structure<sup>59</sup> » et que « les éléments du groupe sont toujours des opérations » :

[...] l'idée de structure paraît résulter d'une abstraction formelle au second degré. N'importe quel élément de  $E$  peut être mis en correspondance avec n'importe quel autre élément, et cette correspondance donne toujours un résultat défini. Ainsi, l'opération est comme abstraite de son résultat : comme le dit Galois, les permutations désignent les substitutions, mais comme je puis composer n'importe quelle permutation avec n'importe quelle autre, cette liberté indique qu'en réalité j'opère avec les substitutions et non les permutations mêmes, autrement dit, que les éléments du groupe sont toujours des opérations, bien qu'on puisse désigner ces opérations par leurs résultats. [Vuillemin 1962, 260–261]

Le théorème bien connu de Cayley – que Vuillemin ne mentionne pas – procurerait une manière de comprendre cette thèse dans le cas d'un groupe abstrait (et non plus seulement d'un groupe de permutations). Ce théorème énonce que tout groupe  $G$  est isomorphe à un groupe de transformations<sup>60</sup>.

57. En particulier, Samuel avait publié en 1948 un article intitulé « On universal mappings and free topological groups » dans lequel on trouve présentées les notions de problèmes et d'application universels avec un point de vue (pré-)catégorique : cf. [Samuel 1948], [Corry 2004, 354–356], et [Maronne 2014]. Cet article est à l'origine des rédactions de Bourbaki sur ce même thème. En témoigne un « rapport sur les applications universelles » dont le rédacteur est très vraisemblablement Samuel au regard des similitudes avec l'article cité auparavant : cf. [Samuel 1948 ?].

58. Cf. [Vuillemin 1962, 257]. Cette remarque est révélatrice.

59. Cf. [Vuillemin 1962, 260] Vuillemin paraît tirer cette idée de l'introduction de Bourbaki [Bourbaki 1950, 1–2] qu'il cite à cette occasion.

60. Il suffit de considérer par exemple l'ensemble des translations à gauche  $\varphi_a : g \rightarrow ag$  pour  $a \in G$ . Si  $G$  est fini,  $\varphi_a$  correspond à la permutation donnée par la  $a^{\text{ème}}$  ligne de la table de multiplication du groupe et l'analogie esquissée par Vuillemin prend tout son sens. Sur la table de multiplication d'un groupe, cf. [Birkhoff

Vuillemin aurait alors en tête la notion de représentation (linéaire) d'un groupe et, de manière plus générale, celle d'opération d'un groupe sur un ensemble. L'abstraction envisagée ici, à l'origine de l'idée de structure, est très différente de celle déjà évoquée dans la section précédente<sup>61</sup>, et paraît relever, en partie, d'une thématization, bien que Vuillemin n'emploie pas ce terme<sup>62</sup>.

Vuillemin ne considère d'autre part la théorie mathématique et logique des structures d'ordre et des treillis, en s'appuyant en particulier sur les contributions de Birkhoff et Curry<sup>63</sup>, que dans *La Philosophie de l'algèbre [état 0]*<sup>64</sup>. Vuillemin cite en particulier la théorie des treillis de Birkhoff lorsqu'il définit l'algèbre générale, véritable « algèbre de l'algèbre », en tant qu'elle fournit une « théorie des relations entre les théories elles-mêmes » [Vuillemin 1962a, 329]. Quelles sont les raisons d'un tel choix ?

## Une nouvelle analyse classificatoire

L'une de ces raisons, sinon peut-être la principale, qui est d'ordre téléologique, tient vraisemblablement au fait que le problème fondamental de la philosophie théorique que vise Vuillemin se confond avec celui de la décomposition élémentaire d'une théorie [Vuillemin 1962, 331]. Il faut en effet se souvenir que l'examen de l'histoire de la méthode en mathématiques est propédeutique au renouvellement de la méthode de la philosophie théorique. On est donc ramené, écrit Vuillemin, au problème de l'analyse philosophique et de la réduction du complexe au simple exprimé par la deuxième règle du *Discours de la méthode*<sup>65</sup>. Or la théorie abstraite des treillis constitue le résultat ultime du développement des théorèmes de *décomposition* des structures (Jordan-Hölder, Noether) [Vuillemin 1962, 332]<sup>66</sup>.

---

& Mac Lane 1953, 128–129] qui figure dans la bibliographie de [Vuillemin 1962]. Vuillemin a d'ailleurs mentionné auparavant, en passant, les tables de multiplication des groupes [Vuillemin 1962, 260].

61. Sur l'abstraction structurale, voir aussi la contribution de David Thomasette dans le présent dossier.

62. En effet, l'opération sous-jacente à la translation à gauche  $\varphi_a$  « devient à son tour point d'application d'une opération supérieure » : la composition des applications  $\varphi_a$ . Cf. *Sur la logique et la théorie de la science* [Cavaillès 1947, 30–34], ainsi que [Benis-Sinaceur 2019, 135–146].

63. Cf. [Birkhoff 1948] et [Curry 1952]. Ces deux références figurent dans *La Philosophie de l'algèbre*.

64. Cf. [Vuillemin 1962a, chap. XII, L'algèbre générale, 322–354]. Sur Vuillemin et la théorie des treillis, cf. dans le présent dossier la contribution de Simon Decaens.

65. « Telle est la voie dans laquelle la Mathématique moderne cherche et détermine la réponse qu'on peut donner à la question que Descartes posait implicitement en formulant la seconde règle du discours de la méthode » [Vuillemin 1962a, 332].

66. Vuillemin donne ici une citation *in extenso* de l'ouvrage de Bell intitulé *The Development of Mathematics* : cf. [Bell 1945, 260–261]. Dans son analyse de la théorie des treillis, Vuillemin apparaît clairement dépendant de la présentation de Bell [Bell 1945, chap. 11, « Emergence of Structural Analysis », 245–269]. Dans cet ouvrage, Bell

Cette nouvelle analyse classificatoire, qui porte sur les structures et non plus sur les individus, rapproche la mathématique de la logique. Elle est évoquée par Vuillemin dans *La Philosophie de l'algèbre* :

Longtemps, les philosophes opposèrent donc le concept biologique ou classificatoire et le concept mathématique ou analytique. Mais l'intervention des structures fait voir que c'est une seule et même chose d'assigner les causes des propriétés et de définir un concept dans une classification. Bien plus, ce qui est rationnel dans l'analyse ne dépend que de cette découverte de la hiérarchie des genres et des espèces, rendue à la vie par la théorie des structures. [Vuillemin 1962, 390]

Dans sa recherche d'une théorie mathématique moderne des structures en résonance avec ses préoccupations philosophiques concernant les problèmes de décomposition et de classification des théories, on comprend donc la raison pour laquelle Vuillemin put se tourner vers la théorie des treillis, avant que le développement des mathématiques modernes, et de la théorie des catégories, ne lui donnent tort<sup>67</sup>. On peut rapporter cette « sélection » à la description des tendances générales de l'algèbre moderne des structures donnée par Mac Lane dans la conclusion « What is algebra ? » de son article « Some recent advances in Algebra<sup>68</sup> ».

Parmi les recherches modernes consacrées aux structures, la première concerne :

the number and interrelations of the subsystems of a given system, either subsystems just like the whole system (lattice of subgroups), or subsystems with especially characteristic properties (set of integers, maximal orders, ideals, subfields of an algebra, etc.). [Mac Lane 1939, 18]

---

a choisi de présenter certains thèmes tirés du développement des mathématiques sur les conseils avisés de « professionnels » [Bell 1945, vii]. Pour davantage d'informations sur Bell, cf. [Dauben & Scriba 2002, 272–273 ; 359–361].

67. La méthode de la philosophie théorique ne saurait emprunter qu'à une théorie mathématique féconde. « Les parutions récentes sur [le concept] de structure » auxquelles Vuillemin réfère dans la quatrième de couverture de la réédition de *La Philosophie de l'algèbre* de 1993 pourraient ainsi concerner la théorie des catégories.

68. Cf. [Mac Lane 1939]. Cet article est cité dans [Bell 1945, n. 13, 259]. La description faite par Mac Lane est analysée par Corry dans son ouvrage [Corry 2004, 255–258]. Une autre source possible pour Vuillemin pourrait être l'exposé d'Øystein Ore sur « l'algèbre abstraite » paru chez Hermann en 1936. On y retrouve dans la dernière section « Structures » les idées exprimées par Vuillemin : « [...] j'ai insisté particulièrement sur les propriétés structurelles, c'est-à-dire, sur les *théorèmes de décomposition*. Il suffit d'un coup d'œil pour vérifier que les résultats concernant les systèmes différents, que nous avons étudiés, sont, en beaucoup de façons, semblables. [...] Observons d'abord que dans les théorèmes de décomposition ne figurent jamais les éléments du système considéré » [Ore 1936, 50].

C'est bien la voie qui a été choisie par Vuillemin<sup>69</sup>.

## 4 Épilogue : l'extension structurale des ensembles de nombres

Le chapitre VII de la deuxième partie inédite de *La Philosophie de l'algèbre* intitulé « Les trois types d'extension de la notion de nombre<sup>70</sup> » offre un épilogue à *La Philosophie de l'algèbre* à différents titres. D'une part, le problème classique qui y est considéré est l'occasion pour Vuillemin de montrer comment substituer une extension structurale à une extension génétique dans la ligne de son projet<sup>71</sup>. D'autre part, « le problème de l'extension des notions mathématiques [...] correspond à la fois au problème de la définition structurale par abstraction relative à des classes d'équivalence et au problème de la classification et de la subordination des structures » [Vuillemin 1962b, 38].

Vuillemin présente ainsi de manière détaillée deux extensions structurales de l'ensemble  $\mathbb{N}$  des entiers naturels qui lui permettent de définir successivement l'ensemble  $\mathbb{Z}$  des entiers relatifs et l'ensemble  $\mathbb{Q}$  des nombres rationnels en ne s'appuyant que sur un ensemble produit et une structure quotient obtenue à partir de celui-ci au moyen d'une relation d'équivalence appropriée [Vuillemin 1962b, 29–33]<sup>72</sup>. Cette extension structurale répond à

---

69. Dans son analyse, Corry mentionne une élaboration alternative du concept de structure due à Marc Krasner : cf. [Corry 2004, n. 3, 254 et n. 7, 257]. Marc Krasner fut professeur de mathématiques à l'université de Clermont-Ferrand de 1960 à 1965, donc au même moment que Vuillemin. On peut lire la belle notice nécrologique que lui a consacrée Dieudonné, qui fut son ami : cf. [Dieudonné 1986]. Les travaux de Krasner portent à la fois sur une généralisation de la théorie de Galois et sur la logique mathématique. Cf. par exemple [Krasner 1938, 1962, 1968-1969]. Sur Krasner et les structures, on peut consulter [Guillaume 2009, 204–221]. Les travaux de Krasner auraient pu ainsi offrir un riche matériau aux analyses de *La Philosophie de l'algèbre* de Vuillemin : on ne devrait jamais quitter Clermont-Ferrand.

70. Vuillemin y a signalé, à la main, trois parties [Vuillemin 1962b, resp. 4, 15, 29] qui correspondent aux trois types d'extension : extension génétique et inversion des problèmes, extension et méthode des congruences, extension structurale.

71. On peut également penser à l'opposition soulignée par Hilbert entre méthode axiomatique en géométrie et méthode génétique en arithmétique qui ouvre le chapitre II de *Méthode axiomatique et formalisme* de Cavailles : cf. [Cavaillès 1938, 76–77].

72. Vuillemin applique pour être exact la construction à  $\mathbb{N}^*$  et non à  $\mathbb{N}$ . Il a corrigé systématiquement une première notation  $E$  qui reprenait celle de Bourbaki utilisée dans [Vuillemin 1962, 260], lorsqu'il était question de la définition d'une opération interne dans  $E$  comme fonction définie sur l'ensemble produit  $E \times E$ . On trouve du reste une référence manuscrite en note à cette page [Vuillemin 1962b, 29]. Les inventions indépendantes du « procédé du couple numérique » par Hamilton en 1836 et Gauss en 1831 mentionnées dans des notes manuscrites figure dans [Bell 1945, chap. 8 « Extensions of Number », 179–180].

un principe de parcimonie ontologique *a contrario* d'une extension génétique, dans laquelle « de nouveaux individus [sont] mystérieusement engendrés à cette seule fin » [Vuillemin 1962b, 32].

## Abstraction, analyse et thématization selon Gardies

On peut remarquer, comme le note Gardies dans son ouvrage paru en 2001, *Qu'est-ce que et pourquoi l'analyse ?*, que l'abstraction en jeu dans de telles constructions relève d'une thématization fondée sur la reconnaissance d'une relation d'équivalence : les différents nombres ainsi construits (entiers naturels, relatifs, rationnels, ...) ne se situent pas « au même niveau d'existence » [Gardies 2001, 171]<sup>73</sup>. Ce phénomène de thématization permet en outre de comprendre une seconde forme d'analyse qui partage certaines de ses caractéristiques avec l'analyse structurale. Selon Gardies, on rencontre chez Fermat et Descartes, concurremment à l'analyse classique réversible en la synthèse, une seconde forme d'analyse qui procède à partir d'une propriété générale vers les objets géométriques [Gardies 2001, 122–128]. Cette propriété générale, qui s'exprime sous la forme de l'équation générale du second degré à deux inconnues, dans le cas de l'étude des lieux solides ou des courbes solutions du problème de Pappus à quatre lignes, est érigée en une entité nouvelle et thématisée<sup>74</sup>. Celle-ci peut être étudiée pour elle-même, sans pour autant considérer les objets en relation [Gardies 2001, 140–141]. Ainsi :

[...] le retournement qu'évoque l'étymologie même du terme *d'analyse* [...] ne [figure] plus la simple inversion de la démarche synthétique censée primitive et comme naturelle, mais l'accession à des entités mathématiques radicalement neuves, dont se [laissent] ensuite déduire, comme conséquences, les propriétés des objets sur lesquels s'[est] appuyée leur thématization. [Gardies 2001, 177]

Abstraction, thématization, analyse : voici que trois pièces maîtresses du dispositif de Vuillemin apparaissent à présent harmonieusement ajustées.

## Vers les catégories

Mais qu'en est-il de la raison d'être et de la nécessité de telles extensions structurales ? Les deux constructions appliquées par Vuillemin peuvent être interprétées comme étant celles du groupe des différences ou symétrisé d'un monoïde commutatif (noté additivement) et du corps des fractions d'un anneau intègre appliquées respectivement à  $\mathbb{N}$  et à  $\mathbb{Z}$ . Ces deux problèmes sont des problèmes d'application universelle<sup>75</sup> dont les ensembles  $\mathbb{Z}$  et  $\mathbb{Q}$  ainsi construits

73. Gardies rapproche ce procédé de thématization de l'*ecthesis* platonicienne : [Gardies 2001, 174].

74. Gardies se réfère explicitement à Cavailles : cf. [Gardies 2001, 131].

75. Comme nous l'avons vu, Samuel est à l'origine de la formalisation de tels problèmes. Cf. [Samuel 1948] et n. 57, p. 90.

sont les solutions à isomorphisme unique près<sup>76</sup>. S'ouvre ici une nouvelle étape dans le développement de la Philosophie de l'algèbre, celui de la théorie des catégories.

## Remerciements

Je tiens à remercier chaleureusement Baptiste Mèlès pour ses remarques et commentaires précieux qui ont enrichi et clarifié le contenu de cette contribution.

## Bibliographie

- BELAVAL, Yvon [1960], *Leibniz critique de Descartes*, Tel, Paris : Gallimard, nouvelle éd., 1976.
- BELL, Eric T. [1945], *The Development of Mathematics*, New York : Mc Graw-Hill, 2<sup>e</sup> éd.
- BENIS-SINACEUR, Hourya [2018], Scientific philosophy and philosophical science, dans *The Philosophers and Mathematics : Festschrift for Roshdi Rashed*, édité par H. Tahiri, Cham : Springer International Publishing, *Logic, Epistemology, and the Unity of Science*, t. 43, 25–66, doi : 10.1007/978-3-319-93733-5\_2.
- [2019], *Jean Cavailles. Philosophie mathématique*, Philosophies, Paris : PUF, 2<sup>e</sup> éd. revue et augmentée.
- BIRKHOFF, Garrett [1948], *Lattice Theory*, New York : American Mathematical Society, 2<sup>e</sup> éd.
- BIRKHOFF, Garrett & MAC LANE, Saunders [1953], *A Survey of Modern Algebra*, New York : Macmillan, éd. révisée.
- [1970], *Algèbre 1. Structures formelles*, Paris : Gauthier-Villars, préface de J. Dieudonné. Trad. fr. par J. Weil.
- BOURBAKI, Nicolas [1948], L'architecture des mathématiques, dans *Les Grands Courants de la pensée mathématique*, édité par F. Le Lionnais, Paris : Cahiers du Sud, 35–47, réimprimé chez Hermann, Paris, 1998. Les références renvoient à cette édition.
- [1950], *Éléments de mathématiques*, t. II : Algèbre, Paris : Hermann, 4 vol., chap. I–VI.

---

76. Soit l'injection canonique  $i : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$  ainsi construit. Pour tout homomorphisme injectif  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow G$ , où  $G$  est un groupe, il existe un *unique* homomorphisme  $\tilde{\varphi}$  tel que  $\varphi = \tilde{\varphi} \circ i$ .  $\mathbb{Z}$  est donc « le plus petit » groupe contenant le monoïde commutatif  $\mathbb{N}$ .

- [1960], *Éléments d'histoire des mathématiques*, Paris : Hermann.
- CANGUILHEM, Georges [2011-], *Œuvres complètes (6 tomes)*, Paris : Vrin.
- CAVAILLÈS, Jean [1938], *Méthode axiomatique et formalisme. Essai sur le problème du fondement des mathématiques*, Paris : Hermann, republié dans [Cavaillès 1994, 1–202].
- [1947], *Sur la logique et la théorie de la science*, Paris : PUF, édité par G. Canguilhem et Ch. Erehresmann, 2<sup>e</sup> éd., avec une préface de G. Bachelard, Paris, PUF, 1960. Republié dans [Cavaillès 1994, 473–560].
- [1994], *Œuvres complètes de philosophie des sciences*, Paris : Hermann.
- CORRY, Leo [2004], *Modern Algebra and the Rise of Mathematical Structures*, Bâle ; Boston ; Berlin : Springer, 2<sup>e</sup> éd.
- CURRY, Haskell B. [1952], *Leçons de logique algébrique*, Paris : Gauthier-Villars.
- DAUBEN, Joseph W. & SCRIBA, Christoph J. (éd.) [2002], *Writing the History of Mathematics : Its Historical Development*, Bâle : Birkhäuser.
- DESCARTES, René [1637], Discours de la méthode, dans *Discours de la méthode pour bien conduire sa raison, et chercher la vérité dans les sciences, plus la Dioptrique, les Météores et la Géométrie qui sont des essais de cette Méthode*, Leyde : I. Maire, 1–78, édité dans [Descartes 1897-1913, VI, 1–78]. Les références renvoient à cette édition.
- [1637a], La Géométrie, dans *Discours de la méthode pour bien conduire sa raison, et chercher la vérité dans les sciences, plus la Dioptrique, les Météores et la Géométrie qui sont des essais de cette Méthode*, Leyde : I. Maire, 297–413, édité dans [Descartes 1897-1913, VI, 367-485]. Les références renvoient à cette édition.
- [1897-1913], *Œuvres de Descartes*, Paris : Cerf, 11 vol., éd. de Ch. Adam et P. Tannery. Nouvelle éd., Paris : Vrin, 1964-1971. Reprint 1996.
- DIEUDONNÉ, Jean [1986], Marc Krasner, *Cahiers du séminaire d'histoire des mathématiques*, 7, 29–30, [http://www.numdam.org/item/CSHM\\_1986\\_\\_7\\_\\_29\\_0/](http://www.numdam.org/item/CSHM_1986__7__29_0/).
- GARDIES, Jean-Louis [2001], *Qu'est-ce que et pourquoi l'analyse ? Essai de définition*, Librairie Philosophique. Problèmes et Controverses, Paris : Vrin.
- GRANGER, Gilles-Gaston [1968], *Essai d'une philosophie du style*, Philosophies pour l'âge de la science, Paris : Armand Colin.

- GUILLAUME, Marcel [2009], La logique mathématique en France entre les deux guerres mondiales : quelques repères, *Revue d'Histoire des Sciences*, 61(1), 177–219, doi : 10.3917/rhs.621.0177.
- GUILLIN, Vincent [2015], « Descartes à travers mes âges ». Retour sur quelques lectures cartésiennes de Canguilhem, *Revue de métaphysique et de morale*, 87(3), 307–328, doi : 10.3917/rmm.153.0307.
- ISRAEL, Georgio [1998], Des *Regulae* à la *Géométrie*, *Revue d'Histoire des Sciences*, 51(2–3), 183–226, doi : 10.3406/rhs.1998.1322.
- KRASNER, Marc [1938], Une généralisation de la notion de corps, *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 17, 367–385.
- [1962], Le définitionnisme, *Annales scientifiques de l'Université de Clermont*, 7(1), 55–81, [http://www.numdam.org/item/ASCFM\\_1962\\_\\_7\\_1\\_55\\_0/](http://www.numdam.org/item/ASCFM_1962__7_1_55_0/).
- [1968-1969], Endothéorie de Galois abstraite, *Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres*, 22(6), 1–19, [http://www.numdam.org/item?id=SD\\_1968-1969\\_\\_22\\_1\\_A4\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SD_1968-1969__22_1_A4_0).
- MAC LANE, Saunders [1939], Some recent advances in algebra, *The American Mathematical Monthly*, 46(1), 3–19, doi : 10.2307/2302916.
- [1971], *Categories for the Working Mathematician*, New York : Springer, 2<sup>e</sup> éd.
- MANCOSU, Paolo [1996], *Philosophy of Mathematics & Mathematical Practice in the Seventeenth Century*, New York : Oxford University Press.
- MARONNE, Sébastien [2014], Pierre Samuel et Jules Vuillemin, mathématiques et philosophie, dans *Des mathématiques en Auvergne : histoire, progrès, interactions*, édité par Th. Lambre, Clermont-Ferrand : *Revue d'Auvergne*, t. 1, 151–173.
- MÉLÈS, Baptiste [à paraître], Des ensembles aux morphismes. Structure et évolution de l'histoire structurale de la philosophie, dans *La Philosophie ventriloque*, édité par V. Debuiche, Presses Universitaires de Provence.
- ORE, Øystein [1936], *L'Algèbre abstraite*, Actualités Scientifiques et Industrielles : Exposés d'analyse générale, Paris : Hermann.
- ROTH, Xavier [2013], *Georges Canguilhem et l'unité de l'expérience. Juger et agir (1926-1939)*, Paris : Vrin.
- SAMUEL, Pierre [1948], On universal mappings and free topological groups, *Bulletin of the American Mathematical Society*, 54, 591–598, doi : 10.1090/S0002-9904-1948-09052-8.

- [1948 ?], Rédaction n° 041. Rapport sur les applications universelles, <http://archives-bourbaki.ahp-numerique.fr/items/show/450>.
- [1948b], Rédaction n° 109. Algèbre. chapitre V. Corps commutatifs (état 4), <http://archives-bourbaki.ahp-numerique.fr/items/show/517>.
- SCHWARTZ, Elisabeth [2015], Le Descartes de Jules Vuillemin et sa contribution à sa *Philosophie de l'algèbre 1, Les Études philosophiques*, 112(1), 31–50, doi : 10.3917/leph.151.0031.
- VAN DAMME, Stéphane [2002], *Descartes. Essai d'une histoire culturelle d'une grandeur philosophique*, Paris : Presses de Sciences Po.
- VAN DER WAERDEN, Bartel Leendert [1930], *Moderne Algebra*, Berlin : Springer.
- [1950], *Modern Algebra*, New York : Ungar, 2 vol.
- VUILLEMIN, Jules [1960a], La philosophie de l'algèbre de Lagrange (réflexions sur le mémoire de 1770-1771), *Les Conférences du Palais de la Découverte*, Série D(71), 5–24, conférence faite le 6 février 1960.
- [1960b], *Mathématiques et Métaphysique chez Descartes*, Epiméthée, Paris : PUF.
- [1962], *La Philosophie de l'algèbre. Tome premier. Recherches sur quelques concepts et méthodes de l'algèbre moderne*, Epiméthée, Paris : PUF.
- [1962a], *La Philosophie de l'algèbre [2A]. Deuxième partie. De quelques structures d'Algèbre et d'Arithmétique et de leur utilisation en Théorie des nombres*, inédit, document A : chapitres VI–XII ; Conclusion.
- [1962b], *La Philosophie de l'algèbre [2B]. Deuxième Partie. Structure, Infini, Ordre*, inédit, document B : Section Première « De quelques structures d'Algèbre et d'Arithmétique et de leur utilisation en Théorie des nombres et en Géométrie et des problèmes philosophiques qui s'y rattachent », Chap. VII–VIII.
- [1963], *Leçon inaugurale faite le mercredi 5 décembre 1962. Chaire de philosophie de la connaissance*, Paris : Collège de France.
- [1984], *Nécessité ou contingence. L'aporie de Diodore et les systèmes philosophiques*, Paris : Minuit ; Fondation Singer Polignac.
- [1986], *What are Philosophical Systems ?*, Cambridge ; London ; New York : Cambridge University Press.
- [1991], Ma vie en bref, dans *Causality, Method and Modality. Essays in honour of Jules Vuillemin*, édité par Brittan G. G. Jr, Dordrecht ; Boston ; London : Kluwer, 1–4, doi : 10.1007/978-94-011-3348-7\_1.

WEIL, André [1980], History of mathematics : Why and how, dans *Proceedings of the International Congress of Mathematicians [1978]*, Helsinki : Acad. Sci. Fennica, 227–236, publié également dans *Œuvres scientifiques*, New York ; Heidelberg, Berlin : Springer, 1980, vol. III, 434–442.

— [1981], Sur les origines de la géométrie algébrique, *Compositio Mathematica*, 44(1–3), 395–406.



# Associativité et liberté dans *La Philosophie de l'algèbre* de Jules Vuillemin

*Benoît Timmermans*

Fonds National de la Recherche Scientifique – Université  
Libre de Bruxelles Bruxelles (Belgique)

**Résumé :** Qu'est-ce qui conduit Vuillemin, dans sa *Philosophie de l'algèbre*, à considérer la propriété formelle d'associativité comme caractéristique des actes de la conscience morale ? Quelles traces cette thèse a-t-elle laissées dans son œuvre ? L'article suggère quelques pistes d'interprétations possibles.

**Abstract:** Why does Vuillemin consider in his *Philosophie de l'algèbre* the formal property of associativity as characteristic of acts of moral consciousness? What traces of this thesis remain in his work? The paper outlines some possible interpretations.

Le projet de Jules Vuillemin de retracer dans sa *Philosophie de l'algèbre* la révolution de pensée qui a bouleversé au XIX<sup>e</sup> siècle les mathématiques peut laisser transparaître une certaine tension. D'une part, le dessein de rapporter les mathématiques pures à la philosophie théorique [Vuillemin 1962, 5, désormais cité en abréviation : PA] conduit à considérer la mathématique formelle comme capable de faire voir, « sinon les mécanismes de l'invention elle-même, du moins les raisons d'être objectives de sa possibilité » [PA, 477]. D'autre part, l'enquête sur la mathématique formelle conduit aux postulats selon lesquels « il y a plusieurs mathématiques » et « pas de connaissance neutre » : toute science est « partielle », engagée dans des choix qui la rapportent à la « liberté humaine » [PA, 505–506]. Sans doute n'est-on nullement tenu de voir une opposition insurmontable entre ces thèses qui, au fond, relèvent d'une hésitation philosophique et humaine presque immémoriale entre *nécessité ou contingence*, pour reprendre le titre d'un autre grand ouvrage de Vuillemin [Vuillemin 1984]. L'auteur lui-même n'échappe pas à cette tension, c'est-à-dire à la nécessité, pour suivre son enquête, de s'engager. Ainsi choisit-il,

s'agissant de mettre en garde contre la confusion entre opposition logique et opposition réelle, de dénoncer le mouvement par lequel les philosophies de Fichte et de Schelling ont « vicié » [PA, 284] l'idée de groupe : ce mouvement, caractéristique de la « folie inscrite au cœur de la philosophie romantique » et de sa « confusion de pensée », a conduit la philosophie, écrit Vuillemin, à « sa pire mésaventure » [PA, 284–285]. On pourrait, de façon tout aussi engagée, soutenir que le débat sur la différence entre opposition logique et opposition réelle, plus précisément sur la possibilité d'un anéantissement ou au contraire d'un équilibre réciproque entre facteurs ou puissances opposés, a justement joué un rôle important dans ce qui a été appelé par Knittermeyer la première crise du romantisme allemand [Knittermeyer 1929, 353–357]. Cette crise a provoqué la dissidence, par rapport au groupe des schellingiens, d'un autre cercle constitué par Eschenmayer – disciple de Fichte –, Oken, Steffens, von Esenbeck et Goethe. Ce cercle ayant aperçu dans la dialectique des mouvements ou formes de la nature une logique préfigurant par certains aspects celle des groupes, il n'est pas interdit de penser qu'il a pu contribuer à féconder le bouleversement des mathématiques qui s'est déroulé tout le long du XIX<sup>e</sup> siècle, et encore jusqu'à Hermann Weyl [Timmermans 2012]. Mais à côté de ces choix de point de départ ou d'orientation des enquêtes, le plus intéressant est peut-être d'explorer comment apparaît au sein de chaque enquête et se tisse, à chaque fois de façon différente, le lien entre les nécessités et les contingences dont il est question plus haut. C'est cette question que je voudrais aborder à propos de la *Philosophie de l'algèbre* de Jules Vuillemin, non de façon générale ou exhaustive, mais en m'attardant sur un passage qui, au premier abord, peut sembler anecdotique ou accessoire au regard de la dynamique d'ensemble de l'ouvrage.

Au § 34 de la *Philosophie de l'algèbre*, une proposition vient surprendre, voire intriguer le lecteur.

On peut [...] se demander à bon droit, écrit Jules Vuillemin, si la propriété formelle d'associativité n'est pas susceptible de caractériser les actes de la conscience morale dont je fais abstraction ici, c'est-à-dire les catégories de la liberté. [PA, 299]

Quel sens peut-il y avoir à lier ainsi l'associativité à la conscience morale et aux catégories de la liberté ? Le geste n'étonne-t-il pas d'autant plus dans un livre dont le projet global est d'examiner en quoi l'algèbre ou la théorie des groupes aide à déterminer les conditions de possibilité d'une « connaissance pure » et d'une méthode propre à la « philosophie théorique » [PA, 5] ? Enfin, la raison même du lien entre associativité et liberté telle qu'elle est invoquée en cet endroit peut paraître tenue : ce lien existe, écrit Vuillemin, parce que, dans la réflexion, « l'associativité fait défaut » [PA, 299]. La proposition, cependant, ne semble pas lancée à la légère. Même si elle ne constitue pas le cœur de l'argumentation du livre, elle est annoncée quelques pages plus haut et relancée ou prolongée en aval. En amont, le début du § 34 la prépare par ces mots :

[...] la structure de groupe s'appliquera éventuellement aux « catégories » aristotéliennes de l'action et de la passion et, plus

généralement, aux opérations qui déterminent le monde de la moralité. [PA, 292–293]

Une note de bas de page précise :

Ces notions, introduites par Kant, sont fondamentales. Elles permettent de pressentir l'articulation de la philosophie pratique et de la philosophie théorique. [PA, 293, n. 1]

La suite du texte laisse pour un temps de côté ces notions fondamentales mais, en aval, près de 200 pages plus bas, Vuillemin revient sur la raison apparemment ténue du lien entre associativité et liberté – une raison à laquelle il tient manifestement – et en esquisse quelques enjeux :

On aura soin de remarquer toutefois que les structures des opérations de la réflexion sont dépourvues des caractères principaux que possèdent les structures de la Mathématique formelle. L'associativité surtout leur fait défaut. [...] Cette [...] différence est l'occasion d'imaginer que si l'on peut espérer qu'il est légitime d'appliquer à la philosophie les préceptes de la méthode mathématique, il convient de chercher les fondements de ce droit non pas dans une correspondance particulière et pour ainsi dire matérielle entre deux disciplines aussi différentes, mais dans un rapport très général et touchant aux principes les plus fondamentaux de la science. [PA, 476]

Sans chercher à trancher définitivement les questions qui viennent d'être soulevées, je me limiterai ici à suggérer et parcourir brièvement quelques pistes d'interprétation qui toutefois nous entraîneront toutes au-delà de la *Philosophie de l'algèbre*.

Commençons par le raisonnement qui conduit à la proposition du §34. En cohérence avec le projet global du livre, ce paragraphe pose la question de savoir si « la méthode philosophique est en droit d'utiliser les notions de groupe et de structure » [PA, 292]. Le texte s'appuie d'abord sur l'analyse, au §30, de la différence entre groupe et groupoïde. Le groupoïde est ici pris au sens de Speiser [Speiser 1922] et de Brandt [Brandt 1927], c'est-à-dire comme une structure comprenant toutes les propriétés du groupe sauf celle de fermeture, l'opération agissant sur l'ensemble n'étant pas définie pour toute paire d'éléments de cet ensemble. Plus exactement, Vuillemin, entend par groupoïde une structure dans laquelle « l'opération demeure assujettie à la disposition de certains éléments » [PA, 259]. Par exemple, des segments orientés mais fixes dans l'espace ne peuvent se composer pour former un polygone que si l'extrémité de l'un coïncide avec l'origine de l'autre ; si tel n'est pas le cas, l'opération de composition polygonale n'est pas applicable. La notion d'opération dépend donc ici de la disposition des éléments auxquels elle s'applique, elle est en quelque sorte restreinte par cet assujettissement. Le groupe, en revanche, s'affranchit de ces restrictions puisque l'opération y est toujours possible, quel que soit le résultat de la précédente opération. Par là,

il nous invite à penser l'opération dans son abstraction, détachée des éléments auxquels elle s'applique, mais capable en même temps de déterminer ce que nous pourrions en connaître, comme le montre la théorie de Galois [PA, 288]. En conséquence :

Examiner si les facultés de la connaissance peuvent donner lieu à une structure de groupe, c'est examiner d'abord si on peut les regarder comme des opérations à proprement parler. [PA, 293]

Le § 34 s'emploie à cet examen en distinguant nos facultés de connaissance selon le critère de la *réitérabilité* qui, contrairement à ce qu'on pourrait croire, ne caractérise pas tous nos modes de pensée. On peut, pour suivre Vuillemin dans ses raisonnements, tenter de les traduire dans un langage mathématique plus courant. La question posée est de savoir si nos facultés de connaissance correspondent à des transformations qui, appliquées à elles-mêmes, donneraient encore une transformation du même type, ce qu'il appelle la réitérabilité. La composition de deux transformations correspond à l'opération binaire susceptible de constituer un groupe. Avec la propriété de réitérabilité, c'est donc la composition d'une même transformation avec elle-même qui est examinée. Vuillemin subdivise nos modes de pensée en trois grandes classes [PA, 294] : les impressions (objets de la connaissance empirique), les représentifications (réactivations de ces impressions), et les opérations de la connaissance (objets de la connaissance pure). Parmi ces classes, seule la troisième, et même une partie seulement de ses membres, satisfait au critère de la réitérabilité. Les impressions, en tant que « représentations simples », non reconnues comme passées, ne peuvent pas être réitérées, ce ne sont donc pas des opérations [PA, 294]. L'impression d'une impression n'a en effet pas le même statut que l'impression de départ, ce n'est pas une transformation du même type. Les représentifications, en tant que réactivations des impressions, par exemple par la mémoire, semblent réitérables, mais le souvenir du souvenir d'un événement n'étant pas la même chose que le souvenir de cet événement, elles donnent plutôt lieu à une création continue qu'à un système d'opérations réitérables. Vuillemin en arrive alors aux opérations de la connaissance, objets de la connaissance pure, en prenant soin toutefois de préciser que la « théorie de ces opérations, en rapport avec l'application des structures, est fort délicate et n'entre pas dans le cadre de ces réflexions » [PA, 295]. Sujet réservé, peut-être, au moins pour partie, à une étude prenant place dans ce qui devait constituer le tome II de la *Philosophie de l'algèbre*. Parmi les opérations de la connaissance, les « opérations transcendantales itérables à l'infini », du type « je pense que », « je juge que », etc., sont bien des opérations en ce qu'elles produisent une objectivation de l'acte précédent [PA, 299], mais elles ne sont pas associatives. En effet, le fait de grouper différemment des actes de réflexion successifs : « Je pense (que je pense que je pense  $p$ ) » et « Je pense que je pense (que je pense  $p$ ) » est « simplement dépourvu de sens » [PA, 299]. Vuillemin suit ici la leçon de Frege pour qui une proposition énonçant une réflexion indéfiniment réitérée perd sa référence, remplacée par sa signification [Frege

1952, 142, 193]. Ceci limite considérablement, d'après Vuillemin, l'intérêt des réflexions itérables à l'infini qui, bien qu'elles se suivent ou s'emboîtent l'une dans l'autre, ne constituent pas un groupoïde parce que le fait de les regrouper ou de les ordonner en sous-ensembles n'apporte rien :

À la différence des opérations qui entrent dans la théorie des groupes, les opérations réflexives sont caractérisées par la propriété d'être non réversibles, liées et non associatives. Cette dernière qualité nous empêche même de regarder la conscience comme un groupoïde. [PA, 299–300]

L'idée que la réflexivité du « je pense », comme d'ailleurs l'intuition intellectuelle ou l'intuition signe du génie, ne constituent pas les « raisons d'être objectives de la possibilité de l'invention » [PA, 477] est comme on le sait l'un des grands thèmes de la *Philosophie de l'algèbre*. Mais la question demeure de savoir pourquoi, par ce mouvement excluant de la catégorie des groupoïdes les réflexions indéfiniment réitérées, la propriété d'associativité se trouve, presque comme en passant, rattachée à la conscience morale, à la philosophie pratique et aux catégories de la liberté.

Une première piste d'interprétation – peut-être la plus naturelle – est que Vuillemin utilise l'un des traits ou propriétés de la structure de groupe (l'associativité) pour approfondir la critique de la « méthode génétique » amorcée depuis le début de son livre. La méthode génétique n'est pas seulement un « empirisme larvé » dont la faiblesse apparaît « chaque fois qu'un philosophe ne parvient à un universel qu'en conservant le souvenir de son origine contingente » [PA, 118]. Elle participe aussi d'une philosophie, celle de Fichte, qui assujettit « toute la métaphysique à la notion d'opération » [PA, 59] en concevant l'intuition philosophique comme activité pure de la raison, entièrement dépourvue de passivité. L'accent mis sur la notion d'opération peut évidemment intéresser une étude comme celle de Vuillemin centrée sur les concepts et méthodes de l'algèbre moderne. Or Vuillemin a remarqué que, par leur caractère actif ou opératoire, l'intuition et la réflexion philosophiques « sont également libres, et l'abstraction résulte du même arbitre qui est le secret de la possibilité de la conscience de soi » [PA, 111]. Cependant il a aussi prévenu que cette liberté est celle d'un moi « entièrement fermé en soi-même » [PA, 284, note], et noté que si l'on peut apercevoir dans la philosophie de Fichte l'axiome de fermeture, on n'y retrouve ni celui de l'élément inverse ni celui de l'élément neutre [PA, 283]. Quant à la question de l'associativité, son traitement a explicitement été reporté aux pages qui nous intéressent ici : « Pour l'axiome d'associativité, voir plus bas, p. 298 » [PA, 283, note].

La mise en évidence de la non-associativité de la réflexion pourrait donc s'inscrire dans la continuité de l'examen des faiblesses de la méthode génétique, et donner en même temps à Vuillemin l'occasion de réactiver un thème qui lui tient à cœur. On sait, au moins depuis le livre de 1954 sur *L'Héritage kantien et la révolution copernicienne* [Vuillemin 1954], le souci de Vuillemin de penser la tension mais aussi la cohérence du lien entre nature et liberté ou efficacité

et devoir – une cohérence déjà relativement masquée chez Kant, mais plus encore chez ses successeurs par de multiples déplacements : chez Fichte du Moi fini vers le Moi absolu, chez Cohen du principe des grandeurs intensives vers la chose en soi, chez Heidegger de l'historicité vers la temporalité. Contre ces déplacements, la conclusion de *L'Héritage kantien* en appelle à une « révolution ptolémaïque » qui réenracinerait la philosophie dans le fini :

Alors cesseraient peut-être les déplacements et le philosophe n'aurait plus besoin de remplacer le savoir par la foi, car il aurait en effet commencé par substituer au *Cogito* humain dans un univers de dieux, le travail humain dans le monde des hommes. [Vuillemin 1954, 306]

Je ne peux m'empêcher de citer ici la réflexion de Gilles-Gaston Granger commentant ce passage :

C'est bien en effet une révolution ptolémaïque que doit effectuer la philosophie des sciences, en passant d'une doctrine du *cogito* à une doctrine du concept [...]. Il doit être possible [...] de maintenir la valeur objective d'une science, tout en rendant compte à la fois de son histoire et de la vocation formelle qu'elle comporte. Il faudrait, croyons-nous, substituer à l'analyse transcendantale des conditions de la perception, prolongée chez Kant en une méditation de la mécanique rationnelle, une analyse des conditions de la *praxis*. [Granger 1960, 17]

La question de la cohérence du lien entre théorie du concept et conditions de la praxis ou du travail humain est donc bien visible à cette époque, comme d'ailleurs dans cette proposition fameuse du § 56 de la *Philosophie de l'algèbre* :

[...] toute connaissance [...] est de part en part métaphysique en ce qu'elle implique des décisions et des choix qui n'appartiennent pas eux-mêmes à la juridiction de cette connaissance. [PA, 505]

Une illustration de cette liaison entre connaissance et métaphysique ou même, d'après Vuillemin, entre vérité et décision, réside dans le procédé d'adjonction découvert par Galois, c'est-à-dire la décision d'adjoindre ou non telle ou telle quantité au corps des nombres susceptibles de résoudre une équation algébrique [PA, 472]. Par ce procédé, l'algèbre formelle « substitue aux intuitions de l'entendement l'ordre d'une raison composant entre elles des opérations [...] incarnant des décisions qu'on peut prendre et pour lesquelles la vérité, hors de toute adhésion matérielle, se résout dans la compatibilité formelle » [PA, 472].

À ce stade, toutefois, on perd un peu de vue la question du lien direct entre associativité et liberté. L'associativité n'est après tout qu'une des propriétés de la structure de groupe, et les opérations d'adjonction et de décomposition propre du groupe, si importantes dans la théorie de Galois, obéissent elles-mêmes à des règles spécifiques. La décision d'adjonction, si on peut l'appeler

ainsi, dépend de propriétés plus élaborées des corps que celle de la seule associativité. Sans doute pourrait-on éventuellement, en élargissant quelque peu la portée et le sens de l'associativité, la considérer comme la possibilité offerte de dégager certaines différences, certaines structures, en découpant de façon particulière un enchaînement indistinct. La piste d'interprétation prendrait plutôt, alors, la forme d'une hypothèse : si l'on entend par associativité la possibilité de découper, de modifier un groupement d'opérations consécutives sans affecter le résultat de leur combinaison, ne peut-on concevoir que l'associativité offre la possibilité de sélectionner, mettre en exergue, faire ressortir tels ou tels objets, tels ou tels ensembles d'opérations, sans que ce choix change fondamentalement le résultat ? « Vérité » et « décision », pour parler comme Vuillemin [PA, 297, 472], semblent ici cohabiter, et peut-être la conscience a-t-elle effectivement besoin de cette cohabitation pour approcher la réalité, s'y confronter, se la représenter de telle ou telle façon, de la même façon que chez Piaget l'associativité, associée à la capacité de « détour », ouvre la voie à diverses stratégies possibles de construction d'ensembles ou de groupements, voire de coopération et de construction de normes [Piaget 1950, 23].

Je n'ai pas trouvé de texte de Vuillemin qui dise explicitement cela, qui affirme que l'associativité serait en quelque sorte corrélative de notre rapport pratique au monde, et que cette associativité précéderait ou permettrait des stratégies de coopération ou de construction de normes. Mais si l'on admet que la *Philosophie de l'algèbre* s'inscrit dans la tendance, partagée à l'époque par plusieurs auteurs, à lier théorie du concept et conditions de la *praxis*<sup>1</sup>, si l'on se rappelle par exemple la recommandation de Piaget d'expliquer les « principes logiques » à partir non d'une « constatation de fait ou d'une sensation » mais d'une « mentalisation progressive de l'action » [Piaget 1950, 23], la question peut se poser de savoir en quoi pourrait bien consister « l'action » à l'origine du principe d'associativité. Cette action, on l'imagine assez naturellement, revient sans doute à associer, regrouper de diverses manières possibles des opérations, ou encore à expérimenter par des opérations les possibilités multiples de regrouper celles-ci. Ainsi, l'attention se déporte de la propriété d'associativité vers l'opération d'associer ou de s'associer, et une deuxième piste d'interprétation vient à se dessiner.

Il existe bien, en effet, des textes où Vuillemin situe l'opération d'attacher, de rapprocher ou de se rapprocher – même par habitude, affinité ou impulsion – à la racine de diverses formes d'organisation, qu'elles soient sociales, individuelles, ou logiques. Par exemple, dans *L'Être et le Travail* en 1949, Vuillemin se réfère explicitement à Durkheim pour expliquer que :

[...] loin que la conscience d'objet procède de la conscience de soi, c'est la conscience de soi qui dérive historiquement de cette conscience d'objet que le Nous commun a formée au cours des âges. Loin que la coopération ait produit l'association en évoluant,

---

1. Voir par exemple [Roth 2013] sur Canguilhem.

loin que le collectif soit issu du social comme le suppose le nominalisme, « il y a une vie sociale en dehors de toute division du travail, mais que celle-ci suppose... Ce qui rapproche les hommes, ce sont des causes mécaniques et des forces impulsives comme l'affinité du sang, l'attachement à un même sol, le culte des ancêtres, la communauté des habitudes, etc. C'est seulement quand le groupe s'est formé sur ces bases que la coopération s'y organise ». [Vuillemin 1949, 136]<sup>2</sup>

Vingt ans plus tard, la primauté du caractère opératoire de l'action d'associer relativement aux objets ou contenus associés resurgit dans *La Logique et le Monde sensible*, qui consiste non pas à « défaire régressivement ce qu'on suppose que l'association a fait », mais à faire voir que « les données associatives sont elles-mêmes fonctions abstraites » [Vuillemin 1971, 256], c'est-à-dire résultant d'une opération de mise en ordre, classification ou comparaison des vécus élémentaires<sup>3</sup>. Ainsi, non seulement notre intuition sensible du monde, mais aussi sa compréhension logique, et même la conscience que nous avons de nous-mêmes, la réflexivité du « je pense », que la tradition cartésienne voit comme fondatrice de notre rapport au monde, trouveraient leur racine commune dans l'opération d'associer. Ces réflexions, certes plus centrées sur l'opération psychologique d'associer que sur la propriété formelle d'associativité, peuvent paraître éparses, dispersées dans des contextes différents. Elles réapparaissent pourtant en plusieurs endroits de la *Philosophie de l'algèbre*. La fin du § 34, qui clôture donc le développement autour de la propriété formelle d'associativité, porte déjà l'indice du glissement de cette propriété vers nos modes de représentation :

[...] les opérations réflexives sont en effet caractérisées par la propriété d'être non réversibles, liées et non associatives. Cette dernière qualité nous empêche même de regarder la conscience comme un groupoïde. Note : [...] On trouvera dans Husserl quelques réflexions sur ces problèmes. Mais elles m'ont paru viciées par la confusion permanente que Husserl fait entre les ingrédients psychologiques d'une représentation (les éléments nécessaires pour la penser effectivement) et ses composantes intentionnelles pures. [PA, 300]

Près de 200 pages plus loin, le § 54 revient sur la question au travers d'une *Remarque sur l'évolution de la pensée de Husserl : constance du thème intuitionniste dans son œuvre*. La remarque reprend pour une large part les conclusions d'un important article paru en 1959 dans la *Revue Philosophique* intitulé « Le problème phénoménologique : intentionnalité et réflexion » [Vuillemin 1959]. Vuillemin y explique que la question initiale de Husserl de savoir quels sont les fondements des calculs abstraits s'est progressivement

2. La citation est extraite de [Durkheim 1893].

3. Vuillemin renvoie à [Carnap 1928, § 93].

transformée et qu'au cours de cette transformation la question a été menacée par la prépondérance croissante du « Je pense » ou de la réflexivité. Pour conserver son économie primitive, pour ne pas perdre en chemin ou sacrifier ce qui fait la spécificité de notre rapport intentionnel au monde, le système de Husserl semble avoir opéré un mouvement de compensation :

Plus le Moi pur recevait d'attributions, plus les éléments synthétiques de la conscience se trouvaient rapportés à des niveaux élémentaires de l'expérience. [PA, 493]

Ainsi s'est installée au cœur de la conscience intentionnelle, et notamment de notre rapport logique au monde, une dualité entre une tendance à la réflexion pure, et la reprise d'expériences élémentaires de vie, d'habitudes de liaisons d'affections ou de perceptions, qui figurent, écrit Vuillemin, « la survivance et la reprise des impressions associatives » [PA, 493]. « De la même façon, l'ancienne association d'idées des empiristes retrouve sa place dans la description de la conscience intentionnelle, au niveau de la conscience du temps interne » [PA, 493]. Les dernières phrases de l'article de 1959, non reproduites dans la *Philosophie de l'algèbre*, valent la peine d'être reproduites car elles pourraient éclairer l'enjeu de ce qui est discuté ici :

Le système de Husserl demeure composite ; il ajoute la réflexion à l'intentionnalité, comme Kant ajoute le concept à l'intuition. Mais l'union de ces facultés demeure enfouie dans les profondeurs de l'esprit. [...] Après Gödel, deux voies restaient ouvertes. La première est en partie parcourue : on y abandonne la Logique aux Mathématiciens. Pour le reste, on devient sceptique ou psychologue. On ne semble pas avoir exploré l'autre voie, qui conduirait à reprendre la question husserlienne et peut-être à y répondre, en assurant l'une par l'autre la vérité et la liberté. [Vuillemin 1959, 470]

« Assurer l'une par l'autre la vérité et la liberté » serait donc éventuellement possible, si l'on suit Vuillemin, en recourant à des mécanismes de compensation du formalisme de la réflexion par la reprise d'impressions associatives ? Ce qui émerge ici comme une nouvelle hypothèse pourrait alimenter une troisième piste d'interprétation.

Avec cette piste nous revenons une nouvelle fois à l'endroit dont nous sommes partis, le § 34 de la *Philosophie de l'algèbre*. On se souvient que dans ce paragraphe les impressions, qui constituent l'un des trois modes de pensée avec les représentifications et les opérations de la connaissance, sont justement laissées de côté au motif qu'elles ne sont pas des opérations. Ce faisant on pourrait dire que Vuillemin est en quelque sorte fidèle à Poincaré qui affirmait dans un passage célèbre, cité d'ailleurs dans la *Philosophie de l'algèbre* [PA, 458] :

Le concept général de groupe [...] s'impose à nous, non comme forme de notre sensibilité, mais comme forme de notre entendement. [Poincaré 1902, 93]

Toutefois il ne faut pas perdre de vue que, pour Poincaré, un certain groupe en tout cas, à savoir le groupe des déplacements, peut bien être généré par nos impressions. Plus précisément, le groupe des déplacements est produit lorsque nous sommes amenés à *corriger* ou *compenser* certaines de nos impressions sensibles, que Poincaré appelle *changements externes de sensations*, en y associant des *changements internes* qui viennent pour ainsi dire rétablir l'impression première, ou du moins donner l'impression qu'on est capable de la rétablir. Par exemple, un corps rigide disparaissant du champ de vision d'un observateur peut réapparaître dans ce champ, ou donner l'impression à l'observateur qu'il pourrait réapparaître, si l'observateur fait opérer à son corps le mouvement adéquat pour voir à nouveau l'objet. L'observateur corrige volontairement les modifications qu'il a sous les yeux par des modifications inverses, associant par compensation ce qui paraît se dissocier sous ses yeux, à savoir le groupe des mouvements rigides [Poincaré 1902, 81–88]. De ces modifications inverses peut naître l'idée non seulement de la géométrie euclidienne, mais aussi d'autres géométries. Par exemple, un corps qui se déformerait de façon suffisamment réglée pour qu'un observateur puisse compenser les déformations par des changements internes de sensations corrélatifs aux déformations initiales pourrait induire la construction d'un groupe de déplacements non-euclidiens [Poincaré 1902, 88–92]. Ainsi l'association par compensation, processus actif et volontaire – distinct en cela de l'association des empiristes classiques –, permet de construire les invariants de divers types de groupes [Pacherie 1997]. Néanmoins, si l'expérience nous guide dans nos choix d'une géométrie plutôt qu'une autre, d'un groupe de déplacements plutôt qu'un autre, et joue à ce titre un rôle indispensable, elle n'est qu'une occasion nous engageant dans cette voie :

La géométrie [...] a pour objet certains solides idéaux, absolument invariables [...]. La notion de ces corps idéaux est tirée de toutes pièces de notre esprit et l'expérience n'est qu'une occasion qui nous engage à l'en faire sortir. [...] parmi tous les groupes possibles, il faut choisir celui qui sera pour ainsi dire l'*étalon* auquel nous rapporterons les phénomènes naturels. L'expérience nous guide dans ce choix qu'elle ne nous impose pas ; elle nous fait reconnaître non quelle est la géométrie la plus vraie, mais quelle est la plus *commode*. [Poincaré 1902, 93–94]

Nous voilà loin, semble-t-il, des questions d'intentionnalité et de réflexivité chez Husserl, de la mise en contact de la vérité et de la liberté, des philosophies théorique et pratique, et même de l'associativité. Pourtant, la dernière hypothèse que je voudrais soumettre est que, dans un travail ultérieur à la *Philosophie de l'algèbre*, Vuillemin découvre le rôle particulier et décisif

que joue l'associativité dans l'émergence des notions qui viennent d'être évoquées. En 1972, Vuillemin publie dans la revue *Synthese* un article sur « La philosophie de l'espace de Poincaré » [Vuillemin 1972]. Dans cet article il ne se contente pas de simplement présenter ou résumer les conceptions de l'espace de Poincaré, plus spécifiquement sa théorie de la compensation des changements externes par associations de changements internes. Il insiste sur la nouveauté de sa propre perspective par rapport non seulement à Poincaré, mais aussi à Sophus Lie. « Poincaré, écrit-il, brouille ou estompe souvent la distinction entre impressions de changements internes et déplacements internes » [Vuillemin 1972, 166]. Tout changement interne, même s'il peut être compensé par un autre changement interne, n'est pas susceptible de générer un groupe. Qu'est-ce qui marque, alors, la différence ? Qu'est-ce qui fait que certains changements génèrent d'abord un groupoïde puis éventuellement un groupe, et d'autres non ? Réponse : l'associativité. Plus précisément, alors que les impressions de changement internes sont *en général* non associatives, il arrive que ces impressions présentent une forme de congruence ou de contiguïté temporelle en enchaînant ou « concaténant » leurs états finaux et initiaux. Alors, seulement, elles se révèlent associatives :

The succession of two sequences of kinesthetic impressions S and T makes sense only if the final state of the first sequence S happens to be psychologically indiscernible from the initial state of the second sequence T. Then and only then are we allowed to consider as a new continuous sequence of kinesthetic impressions the composition U of S and T. In this case, we shall say the two sequences are concatenated. In general, it is false that any two internal changes of impressions could be concatenated, but if three such changes can, then we notice that concatenation is associative :  $S(TU) = (ST)U$ . [Vuillemin 1972, 165]

Si, en plus, les impressions de changements internes sont partout définies, elles forment non plus un groupoïde, mais le groupe des déplacements internes. Vuillemin illustre le passage du groupoïde au groupe par trois exemples déjà donnés dans la *Philosophie de l'algèbre* [PA, 260–262] : passage des permutations (associables seulement si leurs états finaux et initiaux coïncident) aux substitutions (toutes combinables entre elles) ; passage des nombres ordinaux (engendrés par l'opération  $+1$  appliquée seulement au prédécesseur immédiat du nombre) aux nombres cardinaux (engendrés par une infinité de couples de nombres tels que la soustraction entre les deux membres du couple donne toujours le cardinal en question) ; passage des segments orientés fixes aux vecteurs. Mais l'important, ici, est que c'est bien l'état de congruence ou d'enchaînement des états initiaux et finaux qui permet l'émergence de l'associativité, sans laquelle aucun groupe n'est possible. Or on se souvient que l'enchaînement ou répétition de l'opération de réflexion appliquée à elle-même ne révélait quant à lui aucune associativité. Cette façon de *distinguer* l'associativité comme affectant seulement certains types

d'impressions ou opérations attire l'attention. On pourrait dire que, de même qu'il est intéressant de repérer, distinguer des sous-groupes commutatifs à l'intérieur d'un groupe non-commutatif, Vuillemin s'intéresse ici aux cas où il y a associativité dans un contexte non associatif. Par exemple, une algèbre de Lie n'est pas associative, mais un groupe de Lie l'est [Vuillemin 1972, 168–169]. Par là, estime Vuillemin, « nous avons mis en contact une nouvelle théorie de l'association par compensation et les exigences des idéalizations irréductibles de l'esprit » [Vuillemin 1972, 169]. Les « exigences des idéalizations de l'esprit » désignent ici les capacités d'abstraction nécessaires pour penser notamment des espaces illimités et continus. Si l'on voulait parler de ces exigences comme le fait Poincaré, on réaffirmerait simplement la nécessité du lien de la notion de groupe aux formes de l'entendement. L'approche de Vuillemin utilise une optique plus précise : l'association par compensation soutient nos capacités d'abstraction parce qu'elle fait émerger corrélativement les notions de *relativité*, de *conventionnalité* et d'*objectivité*. Relativité, car « l'espace, relationnel, doit être construit comme organisation de données successives » [Vuillemin 1972, 169]. Conventionnalité, car ces données sont classées d'après les changements de positions que *nous* pouvons compenser, ou *estimons pouvoir* compenser, par changement interne de nos impressions. Objectivité, car de tels changements de position, ou déplacements, prennent alors la forme d'un groupe, dont les invariants font apparaître les propriétés objectives des choses. On peut donc aussi imaginer, écrit encore Vuillemin, « des groupes plus larges, c'est-à-dire des conventions plus générales, et par là obtenir de nouveaux objets invariants de ces nouveaux groupes » [Vuillemin 1972, 169]. Et d'insister, à la suite de Poincaré, sur le fait que cette question des déplacements, ou de la transitivité de la relation de congruence entre les déplacements, implique « une représentation “active” des changements de coordonnées » [Vuillemin 1972, 178], ce qui distingue bien sûr cette conception de l'associationnisme « passif » des empiristes classiques.

L'associativité comme propriété structurelle de notre rapport au monde, comme garante du niveau élémentaire de nos affections vitales, ou comme procédé d'organisation actif et conventionnel de l'objectivité : les trois pistes d'interprétation ici rapidement parcourues ne divergent pas nécessairement. En 2004, Jacques Bouveresse écrivait que chez Vuillemin « ce dont nous avons besoin pour combler l'abîme entre l'objet transcendant et la connaissance » est « d'approcher indéfiniment un être intelligible à l'aide d'associations » [Bouveresse 2005, 69]. Bouveresse remarquait que ces associations se font par contiguïté ou ressemblance. Sans doute pourrait-on ajouter, au vu de l'article de Vuillemin sur Poincaré, que les associations par contiguïté temporelle, ou concaténation [Vuillemin 1972, 165], jouent un rôle décisif lorsque les objets qu'on cherche à connaître peuvent être situés dans un espace géométrique grâce au groupe qui lui est associé. Quoi qu'il en soit, Bouveresse renvoie à cette déclaration de Vuillemin datant de 1998 :

Un être fait d'idées appelle ainsi une connaissance faite d'associations. Ce paradoxe apparent, qui retarda un temps mon adhésion au credo réaliste, en est un renforcement aujourd'hui. Il porte sur un article unique qui résume une philosophie des mathématiques : Il existe un monde intelligible. [Vuillemin 2001, 122]

S'il existe un monde intelligible, la liberté s'éprouve peut-être face à des choses qui, suivant les façons dont on les groupe ou les associe, restent les mêmes, mais prennent néanmoins des formes ou configurations différentes qu'il dépend de nous de faire apparaître. Que cette liberté d'associer n'enlève rien à l'objectivité ou à la réalité du monde, mais en dépende presque entièrement, fait sans doute partie de ces vérités qu'on n'a pas fini d'expérimenter.

## Bibliographie

- BOUVERESSE, Jacques [2005], Jules Vuillemin entre l'intuitionnisme et le réalisme, dans *Philosophie des mathématiques et théorie de la connaissance. L'œuvre de Jules Vuillemin*, édité par R. Rashed & P. Pellegrin, Paris : Blanchard, 45–79.
- BRANDT, Heinrich [1927], Über eine Verallgemeinerung des Gruppenbegriffes, *Mathematische Annalen*, 96(1), 360–366, doi : 10.1007/BF01209171.
- CARNAP, Rudolf [1928], *Der logische Aufbau der Welt*, Berlin : Weltkreis.
- DURKHEIM, Émile [1893], *De la division du travail social : étude sur l'organisation des sociétés supérieures*, Paris : Alcan.
- FREGE, Gottlob [1952], *Translations from Philosophical Writings of Gottlob Frege*, Oxford : Blackwell, trad. angl. par P. Geach et M. Black.
- GRANGER, Gilles-Gaston [1960], *Pensée formelle et sciences de l'homme*, Paris : Aubier.
- KNITTERMEYER, Heinrich [1929], *Schelling und die romantische Schule*, Munich : Reinhardt.
- PACHERIE, Élisabeth [1997], Du problème de Molyneux au problème de Bachy-Rita, dans *Perception et intermodalité. Approches actuelles de la question de Molyneux*, édité par J. Proust, Paris : PUF, 253–294.
- PIAGET, Jean [1950], *Introduction à l'épistémologie génétique. Tome 1. La pensée mathématique*, Paris : PUF.
- POINCARÉ, Henri [1902], *La Science et l'Hypothèse*, Paris : Flammarion, 1968.

- ROTH, Xavier [2013], *Georges Canguilhem et l'unité de l'expérience. Juger et agir (1926-1939)*, Paris : Vrin.
- SPEISER, Andreas [1922], *Die Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung. Mit Anwendungen auf algebraische Zahlen und Gleichungen sowie auf die Krystallographie*, Bâle ; Boston ; Stuttgart : Birkhäuser, rééd. 1980.
- TIMMERMANS, Benoît [2012], *Histoire philosophique de l'algèbre moderne. Les origines romantiques de la pensée abstraite*, Paris : Classiques Garnier.
- VUILLEMIN, Jules [1949], *L'Être et le Travail. Les conditions dialectiques de la psychologie et de la sociologie*, Paris : PUF.
- [1954], *L'héritage kantien et la révolution copernicienne*, Paris : PUF.
- [1959], Le problème phénoménologique : intentionnalité et réflexion, *Revue Philosophique de la France et de l'Étranger*, 149, 463–470, doi : 10.2307/41088874.
- [1962], *La Philosophie de l'algèbre. Tome premier. Recherches sur quelques concepts et méthodes de l'algèbre moderne*, Épiméthée, Paris : PUF.
- [1971], *La Logique et le Monde sensible. Études sur les théories contemporaines de l'abstraction*, Nouvelle bibliothèque Scientifique, Paris : Flammarion.
- [1972], Poincaré's philosophy of space, *Synthese*, 24(1), 161–179, doi : 10.1007/BF00540147.
- [1984], *Nécessité ou contingence. L'aporie de Diodore et les systèmes philosophiques*, Paris : Minit ; Fondation Singer Polignac.
- [2001], *Mathématiques pythagoriciennes et platoniciennes*, Paris : Blanchard.

# Abstraction structurale et idéalisme matériel.

## Vuillemin et le problème de l'espace

*David Thomasette*

Archives Henri-Poincaré – Philosophie et Recherches  
sur les Sciences et les Technologies  
(AHP-PreST), Université de Lorraine, CNRS,  
Université de Strasbourg, UMR 7117, Nancy (France)

**Résumé:** L'objectif de cet article est de montrer que la réflexion engagée par Jules Vuillemin sur les structures algébriques dans les années 1960 lui permettra de dégager une conception structurale de l'abstraction, dont il tirera une compréhension nomologique de l'objectivité. Ces deux concepts seront alors convoqués bien des années plus tard pour proposer une construction de l'espace représentatif, que Vuillemin conçoit comme une réfutation de l'idéalisme matériel de Berkeley. La possibilité de retracer la genèse de nos notions spatiales et de leur garantir une certaine objectivité serait ainsi rendue possible par un emprunt aux méthodes de l'algèbre moderne, conformément à l'esprit de *La Philosophie de l'algèbre*.

**Abstract:** The objective of this article is to show that Jules Vuillemin's study of algebraic structures in the 1960s would enable him to identify a structural conception of abstraction from which he derived a nomological way of understanding objectivity. These two concepts will then be revisited many years later to propose a construction of the representative space that Vuillemin conceives as a refutation of Berkeley's material idealism. The possibility of retracing the genesis of our spatial notions and of guaranteeing them a certain objectivity would thus be made possible by borrowing from the methods of modern algebra, in accordance with the spirit of *La Philosophie de l'algèbre*.

# 1 Les « analogies de la connaissance mathématique »

*La Philosophie de l'algèbre* [Vuillemin 1962] se présente, à bien des égards, comme une œuvre pionnière qui ne s'inscrit à proprement parler ni dans le domaine de l'histoire des mathématiques, ni dans celui de la philosophie des mathématiques. À partir d'une étude libre et parfois audacieuse de l'algèbre moderne, Vuillemin propose d'établir un certain nombre d'analogies entre connaissance mathématique et philosophie théorique.

Le recours au terme « analogie » pourrait d'abord surprendre et même inquiéter. Comme Bouveresse l'a montré<sup>1</sup>, bien des auteurs jugent légitime d'utiliser des résultats scientifiques comme caution pour des thèses philosophiques qui leurs sont propres. Il ne fait pas de doute que Vuillemin était parfaitement conscient de ce genre de dérives, tout comme il se méfiait de l'excès de formalisme en philosophie [Vuillemin 1983]. Sa position, comme souvent, se veut alternative : rejeter à la fois la tendance à l'obscurantisme qui ignore purement et simplement les progrès des sciences, et la tendance au positivisme, qui voit dans les sciences des réponses indiscutables et définitives aux problèmes philosophiques classiques. Si la philosophie doit tirer des *leçons* des sciences, elle ne peut le faire qu'avec vigilance et, comme le montre l'ouvrage, à la suite d'une réflexion critique.

Ce projet s'insère par conséquent de manière tout à fait cohérente dans le vaste programme de « philosophie à l'âge de la science » dans lequel Vuillemin s'était engagé dès le début des années 1950<sup>2</sup>. La richesse et la fécondité d'une philosophie doit selon lui se mesurer à sa capacité à se saisir des connaissances scientifiques de son temps. Bien des années plus tard, Vuillemin sera conduit à clarifier de la manière suivante sa conception du rapport entre science et philosophie :

Je suis très préoccupé par les rapports entre la philosophie et la science. [...] Une constatation historique s'impose. Les systèmes de philosophie coupés de la science aujourd'hui ont tous un caractère commun : ce sont des squelettes de systèmes. Ils se réduisent à deux ou trois clés qui ouvrent toutes les portes et qui correspondent à des propositions très abstraites. [...] Dès que l'on pratique un peu l'histoire de la philosophie, on constate que les philosophes classiques ont souvent participé activement à la vie scientifique de leur temps. En tout cas, il est impossible de les étudier et de les comprendre si on ne prend pas en compte leur

---

1. Sur ce point, voir par exemple [Bouveresse 1999], qui a sans doute raison de faire remarquer que le « pompon » en la matière revient à la surexploitation des théorèmes de Gödel.

2. On peut considérer que [Vuillemin 1955] marque le point de départ de son étude détaillée des rapports existants entre science et philosophie.

rapport avec les données scientifiques. On ne comprend pas Kant si l'on ne s'interroge pas sur la représentation très précise qu'il se faisait de la science de son temps<sup>3</sup>.

Pour bien comprendre un philosophe, Vuillemin historien de la philosophie insiste sur l'importance d'étudier celui-ci en lien avec la science de son époque, méthode qu'il a mise en pratique avec Kant et la physique [Vuillemin 1955], Descartes et les mathématiques [Vuillemin 1960] ou encore Carnap et la logique [Vuillemin 1969]. De nombreux passages de *La Philosophie de l'algèbre* s'efforcent ainsi de maintenir un parallélisme entre histoire de la philosophie et histoire des mathématiques, afin que l'une et l'autre s'éclaircissent réciproquement.

Mais c'est aussi et surtout pour l'élaboration de sa propre philosophie que Vuillemin cherche à identifier les idées, les méthodes et les résultats nouveaux élaborés par la science de son temps. On sait par exemple à quel point l'étude des théorèmes de complétude et d'incomplétude de Gödel<sup>4</sup> et de la mécanique quantique<sup>5</sup> ont joué un rôle crucial dans son engagement platonicien tardif. Cependant, contrairement aux théorèmes de Gödel, qui sont des résultats mathématiques<sup>6</sup>, ce sont les méthodes qui intéressent Vuillemin dans le premier tome de *La Philosophie de l'algèbre*, qu'il intitule « Recherches sur quelques concepts et méthodes de l'algèbre moderne ». Or, puisque « l'histoire des Mathématiques et de la Philosophie montre qu'un renouvellement des méthodes de celles-là a, chaque fois, des répercussions sur celle-ci » [Vuillemin 1962, 4], il reste à déterminer quels concepts et méthodes de l'algèbre moderne permettront d'affronter à nouveaux frais les problèmes classiques de la philosophie. La science ne peut donc fournir des solutions mais seulement des outils.

L'ouvrage de Vuillemin foisonne de réponses à cette question. On se limitera, dans le cadre de cette étude, à l'un de ces apports, sur lequel insiste l'auteur à la fin de son introduction, car il jouera un rôle important dans la suite de son œuvre :

Je ferai voir surtout à propos [de la notion de structure] comment les idées de définition et d'invariant qui en résultent ont considérablement modifié nos représentations de l'abstraction et de l'objectivité. [Vuillemin 1962, 66]

---

3. Entretien avec Didier Éribon pour le journal *Le Monde* [Vuillemin & Éribon 1984].

4. Pour une synthèse de l'interprétation que fait Vuillemin de ces théorèmes, voir [Vidal-Rosset 2005].

5. Vuillemin n'a jamais achevé son texte le plus développé portant sur la mécanique quantique, auquel il travaillait à la fin de sa vie. Il a néanmoins publié quelques articles sur la question, en particulier [Vuillemin 1985, 1989]. Des remarques se trouvent également dans [Vuillemin 1984, 338–340].

6. On peut bien entendu ajouter que ces résultats supposent eux-mêmes des méthodes spécifiques comme l'arithmétisation de la syntaxe ou l'argument diagonal.

Comprendre quel déplacement conceptuel l'algèbre moderne a fait subir aux notions d'abstraction et d'objectivité, tel est l'un des objectifs principaux de l'ouvrage de Vuillemin.

## 2 Abstraction empirique et abstraction structurale

Les problèmes gravitant autour de la notion d'abstraction semblent avoir été, au moins dans les années 1960–1970, au centre des préoccupations de Vuillemin. Comme on l'a mentionné, l'un des objectifs de *La Philosophie de l'algèbre* [Vuillemin 1962] est en effet de montrer comment les notions de définition et d'invariant issues de l'algèbre moderne « ont considérablement modifié nos représentations de l'abstraction et de l'objectivité ». Quelques années plus tard, Vuillemin publie *De la logique à la théologie* [Vuillemin 1967] dont la seconde étude est en partie consacrée à la conception particulière qu'Aristote se faisait de l'abstraction. Plus tard encore, c'est *La Logique et le Monde sensible* [Vuillemin 1971] qui est présentée comme un examen de « quelques théories contemporaines de l'abstraction », couronnant plusieurs années d'enseignement sur ce thème au Collège de France.

En 1962, l'objectif affiché par Vuillemin est de comprendre quelle conception nouvelle de l'abstraction peut nous permettre d'envisager l'évolution de l'algèbre. Vuillemin nous invite sur ce point, au §30, intitulé « De l'idée de structure algébrique dans son rapport avec l'abstraction : la notion générale d'opération », à distinguer deux types d'abstractions, ce qu'il résume plus loin de la manière suivante :

Nous sommes donc fondés à distinguer deux sortes d'abstraction. La première est empirique et matérielle. Elle sert par exemple à classer les êtres vivants. La seconde est structurale et sa meilleure illustration est la Théorie des groupes. Elle peut être appelée, avec plus de précision, *formalisation*, parce qu'elle ne dégage les structures de la gangue des problèmes individuels qu'à la condition d'abstraire deux fois : elle porte et sur les éléments du groupe, qu'on remplace par des symboles entièrement formels et sur les opérations mêmes, qui d'ailleurs viennent se confondre avec ses éléments. [Vuillemin 1962, 288]

La première sorte d'abstraction, « matérielle et empirique », est une opération de l'esprit permettant de remonter d'un ensemble d'éléments particuliers à une propriété essentielle commune à ces éléments. Elle correspond à ce que Vuillemin identifie chez Aristote comme l'opération de généralisation, par laquelle un individu se voit prédiqué sous une espèce, comme dans l'énoncé « Socrate est un homme » [Vuillemin 1971, 11–23]. En termes ensemblistes, la copule « est » possède alors le sens de l'appartenance. Elle peut être

prolongée par l'opération d'inclusion, comme dans l'énoncé « L'homme est un animal », où une espèce est subsumée sous un genre. Dans le premier cas, les individus à partir desquels on abstrait une propriété sont tous les porteurs concrets de celle-ci.

Pour mesurer la différence entre les deux sortes d'abstractions distinguées par Vuillemin, on peut d'abord considérer l'abstraction qui permet de former la notion de vecteur à partir de celle de couples de points (qu'on appelle « bipoints ») « équipollents » dans un plan  $E$ . On dit que deux bipoints  $(A, B)$  et  $(C, D)$  sont équipollents lorsque le quadrilatère  $ABDC$  est un parallélogramme. La relation d'équipollence est une relation d'équivalence et ses classes d'équivalence, qui forment donc une partition de l'ensemble  $E \times E$ , permettent de définir les vecteurs. On obtient ainsi, par abstraction, un vecteur  $\vec{u}$ , qu'on peut noter  $\overrightarrow{AB}$ , en tant que classe d'équivalence de tous les bipoints équipollents à  $(A, B)$ . Dans ce cas, Vuillemin fait remarquer que « le mathématicien n'établit [...] aucune différence entre classer et abstraire » [Vuillemin 1971, 24].

À partir d'éléments matériellement déterminés, les bipoints  $(A, B)$ ,  $(C, D)$ , etc., l'abstraction empirique permet de former un nouvel objet mathématique, un vecteur  $\vec{u}$  qui est une classe de bipoints représentant toutes les possibilités de se transporter d'un point du plan à un autre selon une certaine distance dans une certaine direction et selon un certain sens. La relation d'équivalence a donc permis, en quelque sorte, de gommer la matérialité des objets initiaux. Le point de départ (état initial) et le point d'arrivée (état final) du vecteur sont maintenant indéterminés.

La seconde sorte d'abstraction, « structurale », sur laquelle Vuillemin veut attirer notre attention, mobilise un procédé différent. Tout se passe en effet comme si ce qui se présentait comme un objet au premier niveau était conçu comme un acte ou une opération au second niveau. L'abstraction structurale permet en effet de « passer du résultat au mouvement qui l'engendre et s'en dégage » [Vuillemin 1962, 261]. Autrement dit, l'élément sur lequel elle opère n'est plus une classe de bipoints mais une opération de translation dans tout ce qu'elle a de dynamique. Par conséquent, les éléments à partir desquels on abstrait sont déjà le produit d'une abstraction, et ont la particularité d'être des opérations non matériellement déterminées. De ce fait, il devient possible de composer chaque opération avec chaque autre opération de cette classe, ce qui était impossible avec le premier type d'abstraction. En effet, il était par exemple impossible de former une figure avec des couples de points dont le point final de l'un ne coïncidait pas exactement avec le point initial du suivant.

Cette possibilité de combiner entre eux tout élément d'un ensemble afin d'obtenir un nouvel élément de cet ensemble est la caractéristique fondamentale d'un groupe, qui illustre cette abstraction de second ordre. Comme l'indique en effet Vuillemin, « les éléments du groupe sont toujours des opérations » [Vuillemin 1962, 261]. Rappelons qu'on définit un groupe comme un ensemble muni d'une loi de composition interne associative (ici notée  $\circ$ ),

possédant un élément neutre et dans lequel tout élément est symétrisable. Il répond donc aux quatre axiomes suivants [Vuillemin 1962, 257] :

1. *Axiome de fermeture* : la loi  $\circ$  est une application de  $E \times E$  dans  $E$  qui associe à tout couple  $(a, b)$  de  $E \times E$  un élément  $c$  de  $E$  ;
2. *Axiome d'associativité* : pour tout triplet  $(a, b, c)$  d'éléments de  $E$ , on a :  $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$  ;
3. *Axiome de l'élément neutre* : il existe un élément  $e$  de  $E$  tel que pour tout élément  $a$  de  $E$ , on a :  $a \circ e = e \circ a = a$  ;
4. *Axiome de l'élément symétrique* : pour tout élément  $a$  de  $E$ , il existe un élément symétrique  $a'$  dans  $E$  tel que  $a \circ a' = a' \circ a = e$ .

La distinction vuilleminienne entre les deux abstractions successives n'est pas sans rappeler celle que propose Cavallès dans *Sur la logique et la théorie de la science* entre les deux modes de création de concepts en mathématiques [Cavallès 2008, II]. D'une part, en effet, le paradigme opère par généralisation et permet d'élaborer des objets de plus en plus abstraits, comme le fait la première abstraction. D'autre part, la thématization, elle, permet à des actes de devenir objets d'actes de niveaux supérieurs [Mélès 2013, 192], à l'image de la seconde abstraction.

Chez Vuillemin comme chez Cavallès, la différence décisive entre ces deux modes tient au fait que le premier est entièrement tributaire de l'expérience, alors que le second peut s'en détacher. En effet, on ne peut abstraire matériellement qu'à partir d'un ensemble d'éléments donnés empiriquement, ainsi l'abstrait ne peut être que directement tiré du concret. En revanche, la possibilité de composer librement des opérations permet d'imaginer n'importe quelle combinaison sans avoir besoin de la rencontrer dans l'expérience. C'est sur cette possibilité infinie de combinaisons que repose la puissance de l'abstraction structurale, qui permet de se dégager de la « gangue des problèmes individuels », contrairement à l'abstraction empirique, qui reste toujours tributaire du donné à partir duquel on abstrait.

### 3 Théorie de l'espace et structures algébriques

Une philosophie à l'âge de la science attentive à l'évolution de l'algèbre verra donc sa conception de l'abstraction bouleversée par cette approche structurale, qui se trouve illustrée par la théorie des groupes. Il reste à montrer

en quoi ce nouvel outil<sup>7</sup> permet de renouveler l'approche de certains problèmes philosophiques traditionnels.

Et en effet, Vuillemin énonce au § 34 les sept « propositions positives » qu'on peut formuler en ayant recours à ce type d'abstraction. Il existe un certain nombre de domaines où le philosophe peut retrouver des structures de groupe relatives à l'espace (I), la qualité (III), la moralité (IV), l'expérience (V), la théorie de la perception (VI) et la logique (VII). Le temps (II), en revanche, comme la plupart des « opérations de la connaissance » mentionnées plus loin dans le même paragraphe, ne possède pas de structure de groupe : le premier est en effet asymétrique, alors que les secondes n'ont souvent même pas de loi de composition interne. Elles ne peuvent donc pas même prétendre au titre de groupoïde, entendu comme groupe dans lequel la loi de composition ne serait pas partout définie.

Malheureusement, la manière dont ces propositions « résultent » de ce qui précède n'est pas explicitée par Vuillemin, à l'exception de la première, portant sur l'espace, qui doit faire l'objet d'une justification ultérieure :

Proposition I. L'espace a une structure de groupe ; cette structure est complexe. Nous l'étudierons en rapport avec la Théorie de Felix Klein. [Vuillemin 1962, 292]

Vuillemin renvoie alors en note aux paragraphes § 36 et suivants, effectivement consacrés à l'étude de la théorie de Klein, « et surtout » au tome II, qui traitera en effet du programme d'Erlangen. La preuve que l'espace possède une structure de groupe n'est pas fournie dans les passages indiqués pour le tome I, mais plutôt à l'occasion de l'étude de la théorie de Lie aux § 47–48, qui concluent la seconde section. Cependant, Vuillemin limite son propos à l'analyse historique du problème de Helmholtz-Lie et à la mise en évidence de l'intérêt que celui-ci présente pour un réexamen de la théorie kantienne de l'espace. Ces paragraphes sont les premières réflexions développées de Vuillemin sur le problème de l'espace. Il ne cessera d'y revenir jusqu'à ses derniers textes. On soutiendra ici que c'est relativement à ce problème que la réflexion de Vuillemin sur les structures algébriques, et en particulier sur la théorie des groupes, trouvera l'un de ses aboutissements les plus féconds. Les réflexions engagées dans *La Philosophie de l'algèbre* semblent ainsi avoir permis de mettre en place les principaux éléments de sa future théorie de l'espace.

Cette affirmation n'a rien d'évident car Vuillemin publie quelques années plus tard une série d'articles visant à examiner, parallèlement à son enseignement au Collège de France, les systèmes de constitution logico-empiriques

---

7. On peut nuancer en remarquant avec Vuillemin qu'on peut déceler de façon moderne chez certains philosophes des prémices de structures algébriques, comme dans le *Timée* de Platon [Vuillemin 1962, § 40–41]. Voir aussi [Cassirer 1938]. Dans le même ordre d'idée, mais pour des auteurs plus contemporains et moins étudiés, voir aussi [Timmermans 2012].

de Whitehead, Russell, Carnap, et Goodman<sup>8</sup>, qui seront regroupés en 1971 dans l'ouvrage *La Logique et le Monde sensible*. Parmi les questions couvertes par ces théories de l'abstraction figure à nouveau celle du statut de l'espace, mais cette fois abordée d'une manière tout à fait différente de celle qui avait été initiée dans les deux tomes de l'ouvrage de 1962. Faut-il en conclure que pour examiner le problème de l'espace, Vuillemin a finalement préféré délaisser l'outil algébrique de la théorie des groupes au profit de l'outil logique et de la théorie des ensembles ?

C'est une interprétation que n'interdit pas, *a priori*, la conclusion de l'ouvrage de 1971, dans laquelle Vuillemin se contente de remarquer au § 68 que sur « le statut particulier de l'espace et du temps », il existe deux approches distinctes. D'une part une approche *constructiviste*, consistant à retracer la genèse de nos concepts spatiaux à partir d'éléments et de relations non spatiaux. C'est ainsi, selon Vuillemin, que procèdent Helmholtz, Poincaré et Nicod. D'autre part, une approche *originnaire*, consistant à accepter la spatialité comme une donnée *sui generis*. C'est ce que mettent en œuvre les projets de Weyl, Russell et Goodman. L'approche *constructiviste* a pour caractéristique de faire un usage massif de la théorie des structures. S'interroger sur la fonction des structures dans la théorie de l'espace de Vuillemin, c'est donc se demander s'il adopte pour son propre compte une approche constructiviste ou originnaire.

Dans son dernier ouvrage inachevé, intitulé *Être et choix. Éléments de philosophie réaliste* [Vuillemin s.d.], rédigé dans le courant des années 1990, Vuillemin tranche sans équivoque la question :

La tentative de Poincaré l'emporte sur toutes les autres par la clarté (il oppose continu sensible à continu mathématique), l'élégance systématique (grâce au concept de groupe), la vraisemblance empirique (grâce à l'association par compensation) et l'efficacité (l'adéquation, à la continuité près, entre espace représentatif et espace géométrique).

[...]

Mais ce n'est pas le concept de groupe qui fait difficulté dans l'espace représentatif : il est plus naturel et plus économique que les substituts logiques qu'on lui oppose. Il explique mieux qu'ils ne le font l'objectivité de l'extériorité. Il présente aussi clairement qu'ils le font les difficultés liées au passage de la pré-géométrie à la géométrie et desquelles on conclut à la moindre réalité du monde sensible<sup>9</sup>.

Il est impossible, dans le cadre restreint de cette étude, de justifier point par point les propos de Vuillemin relatifs à la supériorité de la théorie de

8. Il faudrait ajouter Nicod à cette liste, mais son statut est particulier puisqu'il est le seul des auteurs étudiés à faire précisément usage du concept de groupe.

9. Cet extrait de [Vuillemin s.d.], encore inédit, est cité à partir de [Thomasette 2015, 428, 430], qui propose un commentaire ligne à ligne du texte.

Poincaré sur les systèmes de constitution logico-empiriques. On s'intéressera ici essentiellement à la thèse ayant trait à l'objectivité : c'est en effet grâce à l'abstraction structurale qu'il sera possible d'objectiver l'extériorité de l'espace et ainsi de formuler une réfutation de l'idéalisme matériel. Cette forme particulière d'objectivité dont est munie l'extériorité de l'espace devra ainsi être appréhendée dans le cadre de la théorie des groupes.

## 4 L'espace existe-t-il hors de nous ? Une réfutation de l'idéalisme matériel

Si Vuillemin s'intéresse déjà aux problèmes relatifs à l'espace dans *La Philosophie de l'algèbre*, il se concentre essentiellement sur leurs aspects mathématiques et physiques. Au §47, consacré à l'analyse du problème de Helmholtz-Lie, Vuillemin propose en effet de dédoubler le « problème de l'espace » : d'une part le problème de l'espace mathématique, qui consiste à décrire la forme de celui-ci comme si la matière n'existait pas ; d'autre part le problème de l'espace physique, qui est celui de l'espace réel, pour lequel on ne sépare plus forme et matière [Vuillemin 1962, 428].

Or Vuillemin délaissera progressivement ces deux approches pour s'intéresser au problème de la genèse de nos notions spatiales, c'est-à-dire à l'espace représentatif<sup>10</sup>. Il s'agit donc de résoudre le problème suivant : comment produire l'étendue à partir de sensations inétendues, et surtout, comment garantir une objectivité à la construction ainsi proposée ? Si l'extériorité est le produit d'une construction, cette dernière est-elle nécessairement subjective ? Dans *Être et choix*, Vuillemin tente de formuler une réfutation de l'idéalisme matériel, thèse qu'après Kant il rattache à Berkeley, ce « scandale de la philosophie<sup>11</sup> ». Contrairement à ce que le nom de l'ouvrage semble indiquer, la solution proposée n'est pas pour autant proprement réaliste : la preuve constructive avancée par Vuillemin est compatible avec l'esprit de l'intuitionnisme, puisqu'elle insiste sur les actes subjectifs qui vont permettre de construire l'extériorité.

Le raisonnement de Vuillemin repose pour l'essentiel sur des outils que la philosophie a pu emprunter à l'algèbre moderne. C'est en ce sens qu'une partie des réflexions engagées dans *La Philosophie de l'algèbre* trouve une

10. Sa réflexion se nourrit de la théorie de l'espace de Poincaré. On peut remarquer que dans [Vuillemin 1972], il est question de l'espace représentatif et géométrique, mais que dans [Vuillemin 1994] c'est seulement l'étude du premier qui occupe toute l'attention de Vuillemin.

11. Il faut préciser que si Vuillemin combat l'idéalisme matériel, qu'il associe naturellement à Berkeley, il ne prétend pas faire œuvre d'historien de la philosophie dans ce cadre. Le texte de l'auteur irlandais n'est donc pas discuté dans le détail, et se voit réduit pour l'essentiel à la thèse selon laquelle il n'existe pas de monde extérieur à nos représentations dont les objets existent indépendamment de celles-ci.

forme d'aboutissement, puisqu'elles permettent de résoudre avec des outils nouveaux un problème ancien de philosophie. De même que Platon doit sa théorie des Idées à la découverte des irrationnelles [Vuillemin 1962, 4], cette réfutation de l'idéalisme matériel aurait été rendue possible par l'apparition de la théorie des groupes. On aurait ainsi l'exemple d'une découverte mathématique qui, correctement interprétée et utilisée, permettrait de réfuter une thèse philosophique.

On se limitera dans ce qui suit à montrer d'une part que la notion de distance est la propriété invariante que permet de dégager l'abstraction structurale à partir des changements de position, et d'autre part que cette distance se trouve ainsi dotée d'une objectivité de type nomologique<sup>12</sup>.

## 4.1 Invariance et abstraction structurale

Les sens tactile et kinesthésique ont la particularité d'être des sens que l'on qualifie généralement, depuis Gareth Evans, de sériels<sup>13</sup> : l'un et l'autre nous livrent une suite d'impressions non-spatiales qui forment deux ensembles hétérogènes entre eux. Adoptant une démarche similaire à celle de Poincaré, Vuillemin souligne que c'est l'étude de la *coordination* des sens tactile et kinesthésique qui nous permettra de rendre compte de la genèse de nos premières notions spatiales. Les tentatives d'y parvenir en ne s'appuyant que sur l'étude d'un seul sens isolé sont donc globalement vouées à l'échec.

Ainsi, comme le développe Vuillemin dans *Être et choix*<sup>14</sup>, la distance entre le point  $A$  et le point  $B$  de l'espace tactile est définie au moyen de la sensation kinesthésique<sup>15</sup>  $s$  qui, appliquée au couple  $(A, B)$  de sensations tactiles, produit le couple  $(C, D)$ . Le mouvement « inverse », qui permet de rétablir le couple  $(A, B)$ , correspond à la sensation kinesthésique  $s^{-1}$  et on a  $s \circ s^{-1} = s^{-1} \circ s = e$  où  $e$  désigne la sensation kinesthésique associée à l'absence de mouvement. La sensation kinesthésique  $s$  définit ainsi une relation d'équivalence sur l'ensemble des couples de sensations tactiles :  $(C, D)$  est dans la même classe d'équivalence que  $(A, B)$ , et on peut lui associer la même « qualité de position », i.e., la qualité laissée invariante par la composition des sensations kinesthésiques  $s$  et  $s^{-1}$ . Les qualités de position, correspondant à la

12. On laissera par conséquent de côté de nombreux aspects de la théorie de l'espace de Vuillemin. On ne dira rien, en particulier, de la genèse de la notion de dimension à partir de l'idée de coupure, de la constitution d'un espace général à partir des espaces particuliers via le principe d'adjonction, ou de la loi de dualité. Ces trois aspects de la théorie ont tous un lien avec les méthodes de l'algèbre.

13. La distinction entre concepts spatiaux sériels et concepts spatiaux simultanés a été introduite par Evans à l'occasion de sa critique du chapitre 2 de l'ouvrage *Les Individus* de Strawson [Evans 1985, 281–284].

14. Cf. [Thomasette 2015, § 37, 332–335].

15. Pour simplifier le propos, on évoquera parfois une sensation kinesthésique là où il faudrait rigoureusement mentionner une *série* de sensations kinesthésiques pour les mouvements complexes. L'axiome d'associativité autorise cette facilité de langage.

distance entre deux points tactiles, sont donc bien définies par les changements de position uniquement exprimés au moyen de sensations kinesthésiques non-spatiales. L'égalité de distance entre deux couples de points de l'espace tactile équivaut à la possession par ces deux couples de points d'une propriété invariante commune qui est de pouvoir être compensée par la même sensation kinesthésique  $s$ .

À ce premier niveau d'abstraction, les sensations kinesthésiques permettent de partitionner l'ensemble des sensations tactiles en classes d'équivalence. Ces deux types de sensations possèdent dès lors un statut différent : les premières sont des opérations alors que les secondes sont matériellement définies. En effet, la série de sensations kinesthésiques qui accompagne le déplacement de mon doigt de  $A$  à  $B$  peut être la même que celle qui le déplace de  $C$  à  $D$ . Ce que l'on retient est l'opération consistant à passer d'un couple de points tactiles à l'autre, ces points correspondant à des sensations distinctes non-interchangeables. Le raisonnement précédent, relatif aux changements internes  $s$  de mon corps, qui sont accompagnés de sensations kinesthésiques, peut être étendu à celui des changements externes  $\alpha$ , qui ne sont pas accompagnés de sensations kinesthésiques. Dans les deux cas, on part d'une classe d'éléments matériels dont on abstrait une opération formelle.

Le second niveau d'abstraction consiste alors à rassembler les opérations obtenues, l'ensemble des changements internes  $s_i$  et  $s_i^{-1}$  ainsi que l'ensemble des changements externes  $\alpha_i$  et  $\alpha_i^{-1}$ , auxquelles on ajoutera l'élément neutre  $e$  correspondant à une absence de changement afin de former le groupe des mouvements rigides. Cet ensemble satisfait bien l'axiome de fermeture (toute combinaison de changements donne un changement), d'associativité (la manière de grouper les changements n'importe pas), de l'élément neutre (l'absence de changement) et de l'élément inverse (tout changement est accompagné du changement inverse). Les notions de groupe et d'opération se trouvent donc intimement liées, comme l'indique Poincaré :

Ce que les mathématiciens appellent un groupe est l'ensemble d'un certain nombre d'opérations et de toutes les combinaisons qui peuvent être formées avec elles. [Poincaré 2002, 8–9]

Il faut cependant préciser ce que Poincaré entend ici par opération. En effet, pour savoir si nous avons affaire à un changement d'état ou à un changement de position, il faut déterminer si le changement observé peut être ou non compensé. Cette compensation est une opération, mais ne peut correspondre à un mouvement, puisque cette notion possède une dimension spatiale évidente en tant qu'il s'agit de se transporter d'un point à l'autre de l'espace. Elle ne correspond pas non plus à une série d'impressions réelles, mais seulement imaginées : identifier un changement de position revient à se représenter la suite de sensations kinesthésiques qui accompagneraient les mouvements qu'il faudrait faire pour atteindre un objet. Il s'agit donc bien d'une opération, mais d'une opération mentale, d'un acte de l'imagination.

En résumé, si le premier niveau d'abstraction a permis de dégager la notion de distance à partir de couples de points tactiles, le second niveau permet de produire l'espace représentatif moteur à partir des ensembles de sensations kinesthésiques qui forment un groupe. Cette construction est rendue possible par une abstraction de type structurale, telle qu'elle est définie dans *La Philosophie de l'algèbre*.

## 4.2 Loi et objectivité

L'idée forte de la construction de Poincaré telle qu'elle est reprise par Vuillemin tient au fait que l'association par compensation, qui rend possible la construction précédente, est une association *active*, qui implique un élément dynamique [Vuillemin 1986, 11]. Cette activité, ce dynamisme, correspondent au niveau de l'abstraction structurale à l'émergence de la notion d'opération. Or, les théories empiristes de l'abstraction critiquées plus haut par Vuillemin ont toutes le défaut d'avoir recours à des associations *passives* comme la contiguïté temporelle ou la ressemblance mémorielle. Elles sont par conséquent contraintes d'en rester à l'abstraction empirique.

Mais précisément, si l'idéalisme matériel ne nie pas que nous possédons bien des notions spatiales comme celles de distance, de situation ou d'orientation, il leur dénie toute objectivité en vertu du fait qu'elles ne seraient que le produit d'associations d'idées subjectives. Berkeley soutient en effet qu'il n'existe qu'une connexion arbitraire entre nos idées visuelles et nos idées tactiles, et que cette connexion est acquise dans l'expérience. Par conséquent, on ne peut prétendre que les idées spatiales qu'elles font naître existent indépendamment de l'esprit humain, puisque c'est ce même esprit qui les recevrait.

Vuillemin serait probablement d'accord avec la conclusion de Berkeley selon laquelle la coordination tactilo-visuelle n'est pas à l'origine de nos idées spatiales. Il n'y a en effet pas de connexion nécessaire directe entre le toucher et la vue, mais seulement une connexion arbitraire et indirecte. En revanche, comme la construction de l'espace représentatif le montre, il existe une connexion directe et nécessaire entre le sens moteur et le sens tactile, ainsi qu'entre le sens moteur et le sens visuel. Cette connexion est nécessaire car elle obéit à une *loi* de groupe objective, qui s'impose à nous, car le fait que certains éléments forment un groupe est totalement indépendant du fait que nous les percevions. La connexion entre les idées visuelles et tactiles n'obéit quant à elle à aucune loi de groupe, c'est pourquoi elle est subjective.

L'erreur de Berkeley est de ne pas avoir vu que nos idées spatiales étaient intimement liées à notre sens musculaire, au caractère dynamique et opératoire de celui-ci. En ignorant cet aspect fondamental, il est conduit à l'impasse de l'idéalisme matériel. Puisque nos idées spatiales ne nous sont fournies ni par le sens de la vue ni par le sens du toucher, chercher à résoudre le problème de l'objectivité de l'espace à partir de ces deux sens ne pourra qu'échouer. En définitive, Berkeley a simplement démontré que ces deux sens ne permettent

pas de construire l'espace, ce qui n'implique pas qu'il soit impossible de construire l'espace d'une autre manière.

Si Vuillemin entend réfuter l'idéalisme matériel, c'est d'abord parce qu'il place au centre de sa théorie de l'espace l'étude du sens musculaire. Il suffit d'ajouter que les sensations musculaires forment un groupe, et que les éléments de ce groupe permettent de partitionner l'ensemble des sensations tactiles ou visuelles. Une sensation musculaire, qui est un élément du groupe, peut alors servir d'invariant à un sous-ensemble de sensations tactiles ou visuelles.

Cette distinction entre association subjective et loi objective permet d'éviter le glissement conceptuel qui a conduit Berkeley à l'idéalisme matériel. Dans la perspective de ce dernier, si l'espace n'est pas inné, il est acquis, et s'il est acquis, il l'est nécessairement par l'intermédiaire d'une association d'idées subjective. Or, il est tout à fait possible de s'accorder sur le fait que l'espace n'est pas inné, tout en soutenant comme Vuillemin qu'il est acquis par le biais d'une loi de groupe objective qui s'impose à nous. L'objectivité de l'espace, et par conséquent la réfutation de l'idéalisme matériel, ne dériverait alors pas de son caractère *a priori* comme le pensait Kant, mais de son caractère *nomologique* puisqu'il est produit selon une loi.

## 5 Conclusion

Il est maintenant bien connu qu'en soutenant la thèse du pluralisme philosophique, Vuillemin a été conduit à récuser le concept traditionnel de *vérité* philosophique [Vuillemin 1986, ix]. On pourrait facilement en déduire qu'en l'absence de celui-ci, Vuillemin se trouve contraint d'adopter une certaine forme de relativisme puisque le choix d'une philosophie reste entièrement libre.

Pour nuancer cette conception, on peut considérer qu'une attention aux méthodes et aux résultats des sciences permet d'envisager un *progrès* philosophique compatible avec ce scepticisme modéré en matière de vérité. En effet, de même que, selon Vuillemin, la publication des théorèmes de Gödel a mis en difficulté certaines philosophies des mathématiques, la conception structurale de l'abstraction porte un coup presque fatal à la thèse de l'idéalisme matériel. Il s'agit d'un des rares cas de *réfutation* d'une thèse philosophique mentionné par Vuillemin. Même si celle-ci s'expose à des critiques, comme le fait qu'elle ne permette de produire l'espace que de manière sérielle et non simultanée, elle permet d'illustrer l'idée d'un progrès critique dont le pluralisme s'accommoderait sans difficulté.

C'est, en l'occurrence, le recours à une conception structurale de l'abstraction et à une conception nomologique de l'objectivité qui traduit le rapport entre groupe et invariant qui permet à Vuillemin de formuler cette réfutation. Il fallait pour cela être attentif aux outils introduits par l'algèbre, comme nous y invite l'ouvrage de 1962, pour répondre au défi proposé par Berkeley plus de deux siècles auparavant.

## Remerciements

Cet article a profité des suggestions de Baptiste Mélès, Sébastien Maronne et d'un relecteur anonyme, que je tiens à remercier.

## Bibliographie

- BOUVERESSE, Jacques [1999], *Prodiges et vertiges de l'analogie*, Paris : Raisons d'agir.
- CASSIRER, Ernst [1938], Le concept de groupe et la théorie de la perception, *Journal de Psychologie Normale et Pathologique*, XXXV, 368–410, trad. fr. par P. Guillaume.
- CAVAILLÈS, Jean [2008], *Sur la logique et la théorie de la science*, Paris : Vrin.
- EVANS, Gareth [1985], Things without the mind—A commentary upon Chapter Two of Strawson's *Individuals*, dans *Collected Papers*, Oxford : Clarendon Press, 249–290.
- MÉLÈS, Baptiste [2013], Unix selon l'ordre des raisons : la philosophie de la pratique informatique, *Philosophia Scientiæ*, 17(3), 181–198, doi : 10.4000/philosophiascientiæ.897.
- POINCARÉ, Henri [2002], *L'Opportunisme scientifique*, Bâle : Birkhäuser, édité par L. Rollet.
- THOMASSETTE, David [2015], *La Philosophie à l'âge de la science. Édition d'un livre inachevé de Jules Vuillemin*, Thèse de doctorat, Université de Lorraine.
- TIMMERMANS, Benoît [2012], *Histoire philosophique de l'algèbre moderne. Les origines romantiques de la pensée abstraite*, Paris : Classiques Garnier.
- VIDAL-ROSSET, Joseph [2005], Le platonisme de Jules Vuillemin, dans *Philosophie des mathématiques et théorie de la connaissance. L'œuvre de Jules Vuillemin*, édité par R. Rashed & P. Pellegrin, Paris : Albert Blanchard, 171–186.
- VUILLEMIN, Jules [1955], *Physique et métaphysique kantienne*, Bibliothèque de philosophie contemporaine—Histoire de la philosophie et philosophie générale, Paris : PUF, 2<sup>e</sup> éd., 1987.
- [1960], *Mathématiques et Métaphysique chez Descartes*, Epiméthée, Paris : PUF.
- [1962], *La Philosophie de l'algèbre. Tome premier. Recherches sur quelques concepts et méthodes de l'algèbre moderne*, Épipiméthée, Paris : PUF.

- [1967], *De la logique à la théologie. Cinq études sur Aristote*, Nouvelle Bibliothèque Scientifique, Paris : Flammarion.
- [1969], La « Constitution » selon Carnap : la construction logique du monde, *L'Âge de la science*, II(4), 304–305.
- [1971], *Le Dieu d'Anselme et Les Apparences de la raison*, Paris : Aubier.
- [1972], Platonism in Russell's early philosophy and the principle of abstraction, dans *Bertrand Russell : A Collection of Critical Essays*, édité par D. F. Pears, Garden City, N. Y. : Doubleday Anchor Books, 305–324.
- VUILLEMIN, Jules (éd.) [1983], *Mérites et limites des méthodes logiques en philosophie*, Paris : Vrin, Fondation Singer-Polignac.
- VUILLEMIN, Jules [1984], *Nécessité ou contingence. L'aporie de Diodore et les systèmes philosophiques*, Paris : Minuit ; Fondation Singer-Polignac.
- [1985], Physique quantique et philosophie, dans *Le Monde quantique*, édité par St. Deligeorges, Paris : Seuil, 201–224.
- [1986], *What are Philosophical Systems ?*, Cambridge ; Londres ; New York : Cambridge University Press.
- [1989], Note sur l'école allemande de mécanique quantique, dans *L'Âge de la science. Lectures philosophiques*, édité par P. Jacob, Paris : Odile Jacob, t. 2 : Épistémologie, 177–179.
- [1994], *L'Intuitionnisme kantien*, Paris : Vrin.
- [s.d.], *Être et choix. Éléments de philosophie réaliste*, Nancy : Archives Henri-Poincaré.
- VUILLEMIN, Jules & ÉRIBON, Didier [1984], Entretiens de Didier Éribon avec Jacques Bouveresse et Jules Vuillemin, *Le Monde*, 4–5 mars, 2 feuillets.



# Décisions métaphysiques de la Science et Critique générale de la Raison Pure : le pluralisme inachevé de *La Philosophie de l'algèbre*

Gabriella Crocco

Aix-Marseille-Université,  
CNRS, CGGG, UMR 7304 (France)

**Résumé :** Après avoir indiqué ce qu'il entend par Mathématiques pures et par Théorie de la connaissance, Vuillemin annonce, dans l'Introduction au premier tome de *La Philosophie de l'algèbre*, que son but est double. En considérant le « rapport étroit » et l'« affinité d'inspiration » entre ces deux disciplines, il se propose d'examiner, d'une part, « comment une connaissance pure est possible » et, d'autre part, de « critiquer, reformer et définir, autant qu'il se pourra, la méthode propre à la philosophie théorique » grâce aux « analogies » repérées dans la connaissance mathématique. Ce double but dérive du constat, reposant sur l'analyse de l'histoire des mathématiques et de la philosophie, qu'« un renouvellement des méthodes de celles-là a, à chaque fois, des répercussions sur celle-ci ». Les renouvellements des méthodes que les mathématiques modernes induisent portent essentiellement, selon Vuillemin, sur les notions de structure, d'infini et de logique. Le deuxième tome de *La Philosophie de l'algèbre* devait donc montrer comment définir la méthode propre à la philosophie théorique. On essaiera de montrer comment le dernier chapitre du premier tome de cet ouvrage contient en soi des difficultés qui commanderont l'abandon du projet et comment l'idée de pluralisme qui y est esquissée exige une refonte conceptuelle que Vuillemin ne fournira que plus de vingt ans après.

**Abstract:** In the Introduction to the first volume of *La Philosophie de l'algèbre*, Vuillemin first gives a preliminary definition of what he means by pure mathematics and the theory of knowledge and then explains his task. He intends to study the important question of the possibility of pure knowledge and of the method of philosophy. When the histories of

mathematics and philosophy are considered comparatively, they show clearly how methodological changes in mathematics always have deep consequences on philosophy. According to Vuillemin, modern mathematics induce a methodological renewal that essentially concerns notions of structure, infinite and logic through a movement that exceeds, prolongs and generalizes the achievements of classical mathematics. The second volume of *La Philosophie de l'algèbre* was intended to show how to define a new method for theoretical philosophy. We will try to show how the last chapter of the first volume contains inherent difficulties which led to the abandonment of the project and how the idea of pluralism outlined therein requires a complete conceptual renewal that Vuillemin would only provide more than twenty years later.

## 1 Introduction

Le point de départ de cette réflexion sur ce que nous appelons, dans le titre, le « pluralisme inachevé de *La Philosophie de l'algèbre* » est un constat. Le premier tome de *La Philosophie de l'algèbre* [Vuillemin 1962] contient des thèses qui vont partiellement à l'encontre de positions que Vuillemin formulera plus tard, du moins à partir de *Nécessité ou Contingence* [Vuillemin 1984b] et qu'il systématisera dans *What are Philosophical Systems?* [Vuillemin 1986], ouvrage dans lequel l'affirmation du pluralisme philosophique est la plus accomplie. Parmi ces thèses abandonnées par la suite, l'une, présentée dans le dernier chapitre de *La Philosophie de l'algèbre*, concerne explicitement les rapports entre philosophie, science et métaphysique. Au § 56, Vuillemin affirme en effet que :

[...] toute connaissance, quelle qu'elle soit, est de part en part métaphysique, en ce qu'elle implique à son principe des décisions et des choix qui n'appartiennent pas eux-mêmes à la juridiction intérieure de cette connaissance. [Vuillemin 1962, 505]

Il souligne également que cette supposition s'oppose de manière radicale à l'idéal scientifique et dogmatique d'une séparation nette entre les sciences positives (neutres, univoques, complètement épurées des querelles métaphysiques et donc ne connaissant pas de crise de principes) et la philosophie, reléguée à un simple rôle critique ou externe. Renverser cet idéal signifie s'opposer à une longue tradition philosophique qui va de Kant à Husserl, et à ce propos Vuillemin poursuit ainsi :

Un tel renversement mériterait plus exactement que celui de Kant d'être appelé copernicien. Car, comme Copernic a changé le centre du monde et, « pour sauver les phénomènes », a fait tourner la Terre autour du Soleil au lieu de considérer la Terre comme immobile, on peut penser que la Métaphysique n'a point à tourner

autour de la Science et de la Philosophie considérées comme les centres indépendants du système, mais que la Métaphysique est ce centre même dont tout dépend. [Vuillemin 1962, 505]

D'un tel renversement découlent quatre postulats sur la nature de la philosophie et de la science (des mathématiques en particulier) :

**P"4** Il n'y a pas de connaissance neutre. Toute science est engagée et partielle.

**P"3** Il y a plusieurs mathématiques, selon les exigences formulées eu égard aux procédés de construction et aux axiomes d'existence.

**P"2** La mathématique n'étant pas une science positiviste, la philosophie n'a plus à la critiquer de l'extérieur. Sa tâche consiste uniquement à élucider les motifs rationnels qui justifient le choix de tel ou tel système axiomatique en logique et en mathématique.

**P"1** La philosophie ne possède aucun privilège d'évidence, qui permettrait à la représentation de se rendre complètement indépendante des décisions qui engagent l'activité théorique. Elle n'est donc pas séparable de la Métaphysique et son objet général consiste non pas à tenter d'ignorer les choix métaphysiques, mais à en étudier les motifs en rapport à la liberté de l'homme. [Vuillemin 1962, 505–506]<sup>1</sup>

Ces postulats fondent à la fois le rejet de la phénoménologie husserlienne et le projet propre à Vuillemin d'une ontologie formelle non husserlienne, libérée de tout dogmatisme et soutenue par une critique générale de la raison pure, projet introduit au §25 et repris au §60 du tome I de *La Philosophie de l'algèbre*.

Nous voudrions par la suite suggérer comment cette idée d'une nouvelle révolution copernicienne<sup>2</sup>, ainsi que les postulats P"4 et P"3 que l'on vient de citer ne sont pas conformes à la position de Vuillemin dans les années 1980. Plus généralement, nous voudrions suggérer que la Conclusion du premier tome de *La Philosophie de l'algèbre* contient des difficultés qui commanderont l'abandon du projet de la révolution copernicienne et de ses conséquences,

---

1. Ces quatre postulats viennent du renversement de l'ordre et du contenu des postulats P1-P4 présentés au §55 par Vuillemin, lors de sa discussion de la critique husserlienne de la mathématique formelle [Vuillemin 1962, 496].

2. On ne manquera pas de mettre en rapport cette nouvelle *révolution copernicienne* avec la révolution ptolémaïque dont il est question à la toute fin de *L'Héritage kantien* [Vuillemin 1954, 306].

comme le montre la volonté de Vuillemin de renoncer à la publication du deuxième tome<sup>3</sup>.

Pour tenter de réaliser cette tâche ambitieuse, nous diviserons notre analyse en trois temps.

D'abord, nous donnerons des arguments pour étayer l'affirmation selon laquelle l'idée de cette nouvelle révolution copernicienne ne semble pas être conforme aux positions de Vuillemin, formulées à partir de *What are Philosophical systems?*

Ensuite, nous chercherons à expliciter, à partir du premier tome de *La Philosophie de l'algèbre*, les conditions de possibilité de cette nouvelle révolution copernicienne, invoquée par Vuillemin.

Enfin, nous indiquerons les éléments de difficulté propres à la position pluraliste adoptée par Vuillemin dans *La Philosophie de l'algèbre* et discuterons quelques pistes de solution qu'il avait envisagées dans le deuxième tome.

En conclusion, nous formulerons une conjecture à propos de ce que Vuillemin appelle les « parutions récentes », dont il est question dans la quatrième de couverture de l'édition de 1993 et qui, aux dires de Vuillemin, l'auraient dissuadé de « publier la première section du second tome et de rédiger les deux autres<sup>4</sup> ».

## 2 1962-1986 : deux conceptions divergentes des rapports entre science et philosophie

Rappelons d'abord brièvement le contenu du troisième chapitre de *What are Philosophical systems?* intitulé : « Axiomatics, ontologies, philosophies ». Cela nous permettra d'indiquer par la suite, avec précision et presque en contrepoint, les thèses qui ne paraissent pas conciliables avec les positions de *La Philosophie de l'algèbre*. Dans les deux sections qui constituent

---

3. À la fin de l'Introduction du tome I de *La Philosophie de l'algèbre*, Vuillemin annonce ceci : « Les trois idées de structure, d'infini, et de logique contiennent en elles les principaux progrès des Modernes et des Classiques. Elles m'ont paru fournir à la Deuxième Partie de mon livre son articulation naturelle. » Une note à ce dernier mot précise : « Cette seconde partie paraîtra dans un autre volume ou dans trois publications distinctes, ayant pour titre : "Structure, infini, ordre" » [Vuillemin 1962, 66].

4. « L'auteur se proposait d'examiner dans un tome second les trois concepts de structure, d'infini et d'ordre. Cet examen l'eût conduit aux questions concrètes de la mathématique universelle. D'autres travaux et des parutions récentes sur ces sujets l'ont dissuadé de publier la première section de ce second tome et de rédiger les deux autres. Ces développements, d'ailleurs, n'auraient pas modifié pour l'essentiel la leçon du premier tome, dont la tâche est achevée en décrivant la révolution de pensée qui, au siècle dernier, a changé la nature de l'algèbre » [Vuillemin 1962, quatrième de couverture].

ce troisième chapitre, Vuillemin analyse comparativement trois formes de rationalité s'exprimant dans des productions symboliques humaines : les mythes, la philosophie et la science. La thèse qui est au centre de la première section de ce chapitre est la suivante : le passage de la rationalité pratique et concrète du mythe à la rationalité théorique de la science et de la philosophie présuppose une « révolution dans l'usage des signes » [Vuillemin 1986, 96]. Cette révolution, mise en œuvre par l'invention de la méthode axiomatique, contemporaine de la naissance de la pensée théorique rationnelle, comporte trois aspects.

D'abord, elle concerne le sens des signes utilisés, plurivoque et ambigu dans le récit du mythe, univoque dans la méthode axiomatique. En effet, dans le cadre de la pensée axiomatique, des « instructions fondationnelles » assurent l'univocité dans l'emploi de signes par des définitions, des axiomes, des règles de compositions ou de construction à partir d'éléments primitifs exhaustivement énumérables. Une telle univocité n'est absolument pas une exigence pour la pensée mythique.

Ensuite, le deuxième aspect de cette révolution concerne l'absence dans le mythe et respectivement la présence dans la pensée rationnelle de procédures uniformes et réglées d'extension. La pensée axiomatique procède par démonstration ; la pensée mythique par agrégation comme l'activité du bricoleur, dit Vuillemin en citant à ce propos *La Pensée sauvage* de Lévi-Strauss [Vuillemin 1986, 99, n. 9]. Cette dernière est donc par essence conservatrice alors que les potentialités révolutionnaires de la première et sa capacité d'aller à l'encontre de la tradition se fondent sur son exigence de n'accueillir des nouvelles propositions que dans le cas où une procédure rationnelle et ouverte au libre examen peut les garantir.

Enfin, leur rapport à la vérité est tout autre : la pensée axiomatique vise la vérité tandis que la pensée mythique vise à transmettre, renforcer et réajuster ce que Vuillemin appelle « le code de la raison » humaine dans une communauté donnée, c'est-à-dire l'ensemble des informations nécessaires au maintien d'une société et de la cohésion de ses individus, informations transfigurées et unifiées dans le récit mythique, situé à un niveau intermédiaire entre la perception et l'abstraction, et dont le but est de donner sens à l'existence de l'individu dans la communauté et à l'existence de la communauté dans la nature.

Dans la deuxième section du même chapitre, « Axiomatics and philosophical ontologies : the analysis of the motion and the analysis of freedom », l'analyse des rapports entre science et philosophie, visant à les distinguer à l'intérieur de la rationalité théorique, est conduite sur les trois mêmes aspects que nous venons d'évoquer. C'est là que l'écart avec les thèses de 1962 est frappant.

Considérons d'abord la question de l'univocité des signes. Les axiomatiques de la science sont formelles, dit Vuillemin [Vuillemin 1986, 104]. Les mathématiques explicitent de manière exhaustive les êtres dont elles traitent, mais

leurs objets sont complètement définis à l'intérieur de l'axiomatique même. « En tant que système hypothético-déductif, une axiomatique scientifique est complètement étrangère à l'ontologie » [Vuillemin 1986, 104]. Les praticiens de la science peuvent rattacher des images et engager ontologiquement leur pensée, mais « une telle interprétation ontologique n'est jamais forcée par les axiomes mêmes » [Vuillemin 1986, 104], incapables de fixer ce que sont les éléments sur lesquels ils portent. Cette thèse d'un usage essentiellement hypothético-déductif des axiomatiques scientifiques est à l'évidence suggérée à Vuillemin par sa réflexion sur les théorèmes d'incomplétude de Gödel dont l'interprétation, à partir de ces années 1980, est une constante tout au long de son œuvre. Les résultats de Gödel, s'appliquant à toute théorie récursive contenant l'arithmétique et s'exprimant dans la logique du premier ordre, ne laisseraient aucune place, selon Vuillemin, à une interprétation matérielle des théorèmes mathématiques, lesquels demeurent arrimés à une syntaxe toujours incomplète, seule garante de l'univocité de leur interprétation. Cette même thèse est répétée explicitement par Vuillemin jusqu'à ses derniers articles [Vuillemin 2001*b*, *a*]. En particulier, dans « Formalisme et Réflexion philosophique », il affirme qu'après la crise des antinomies cantorienne et après l'échec du programme hilbertien, conséquence des théorèmes de Gödel, le formalisme pragmatique sauve l'intégralité des mathématiques tout en consacrant dans la pratique « objective » de la science la destruction définitive du lien des signes avec l'existence. L'existence ne dépend donc plus de la science. La formalisation de la science (son expression dans une théorie récursive exprimée dans le langage de la logique du premier ordre) garantit une sorte de neutralité formelle à la science. Au contraire, la philosophie s'engage dans l'interprétation matérielle des axiomes et en général de toute proposition de la science et elle paye cette volonté par l'irréductible pluralité qui est la sienne. La philosophie partage avec la science, et avec les mathématiques en particulier, l'exigence de la possibilité d'une organisation axiomatique de ses doctrines. Toutefois, c'est toujours sur le plan de la signification des symboles que la philosophie déploie son analyse. L'analyse de l'argument du Dominateur présuppose de « déterminer d'abord les sens exacts avec lesquels y figurent les concepts modaux et à examiner ensuite si le raisonnement qui lie ces concepts éventuellement disparates est acceptable logiquement » [Vuillemin 1984*b*, 11]<sup>5</sup>. Or, « l'usage des modalités ne devient irréductible que lorsqu'on subordonne les faits aux principes, et cette subordination met en jeu la philosophie » [Vuillemin 1984*b*, 274–275]. En effet, les assertions fondamentales qui « voisinent pacifiquement dans la langue naturelle et dans la rhapsodie du sens commun », lorsqu'elles se veulent des principes philosophiques pour l'organisation cohérente et complète des faits, commandent une certaine

---

5. Voir en bas de cette même page, à propos de la légitimité de cet usage philosophique des systèmes axiomatiques et de la logique, les remarques de Vuillemin contre les rigoristes qui refusent tout sens à un concept modal hors d'un système complètement formalisé.

interprétation de la légalité de la nature et donc de la signification des lois. Ainsi les

philosophies naissent en prenant conscience des incompatibilités auxquelles ces notions conduisent quand on les met en rapport et qu'on développe systématiquement leurs conséquences. Il y a donc un usage philosophique des assertions et des modalités fondamentales, qui permet de classer les philosophies, en remontant aux principes desquels découle leur unité, leur limitation et leur affrontement. [Vuillemin 1984b, 275]

Cette interprétation va à l'encontre de la position de Vuillemin en 1962. Dans *La Philosophie de l'algèbre*, la rationalité scientifique (et donc mathématique) n'est pas du tout neutre quant aux décisions métaphysiques. La possibilité même de la nouvelle révolution copernicienne qu'il appelle de ses vœux présuppose que la pratique scientifique ne puisse pas être métaphysiquement neutre. La thèse P<sup>n</sup>4 énoncée plus haut explicite en toute lettre que « toute science est engagée et partielle » [Vuillemin 1962, 505]. De plus, les choix, les décisions métaphysiques et les engagements ontologiques sont au cœur de l'activité scientifique, puisqu'ils déterminent les axiomes et les postulats d'existence qui y sont formulés. Vuillemin le dit explicitement page 504 de l'ouvrage de 1962. Les mathématiques ne sont pas une science positive et ne peuvent prétendre à aucune neutralité descriptive comme le voudrait le « dogmatisme husserlien » : les « mathématiciens de profession » se disent « empiristes ou idéalistes » et font dépendre de cela « le choix ou le rejet de tel axiome ». En outre, si le théorème de Gödel est cité en clef anti-husserlienne à la page 499, aucune différence n'est ici envisagée entre une interprétation formelle scientifique et une interprétation matérielle philosophique, tandis que cette différence dans l'interprétation d'un système d'axiomes est la clef de la solution de Vuillemin en 1986, lui permettant de tirer des théorèmes gödéliens toutes les conséquences que nous avons énoncées plus haut sur les rapports entre mathématiques et philosophie.

Venons-en au deuxième aspect, évoqué à propos de la rupture opérée par la pensée rationnelle vis-à-vis de la pensée mythique et concernant les procédures d'extension de la connaissance. Dans *What are philosophical systems ?*, Vuillemin affirme que les démonstrations de la science font l'accord parmi les scientifiques, parce que les disputes techniques qui peuvent porter sur l'acceptabilité de telle et telle procédure n'ont jamais empêché d'obtenir le consensus universel sur ce qui peut être reconnu comme un théorème :

Technical disputes about methods of construction and local reservations about the principle of the excluded middle did not hinder Greek science from reaching universal agreement on what a scientific theorem is. Queries and discussions could always be put to an end, at least within the hypothetical method, by locating the debatable point in the chain of deductions. [Vuillemin 1986, 107]

Aujourd'hui également ces controverses ne sont pas au cœur des mathématiques mais à leur marge, aux frontières des mathématiques, de la logique et de la philosophie, dans le domaine abstrait de la théorie des ensembles. Elles n'empêchent donc pas le développement d'un corpus de connaissances et d'une pratique mathématique pouvant se tenir à distance des querelles métaphysiques. Les engagements ontologiques propres à la philosophie, par contre, remettent en discussion les procédés logiques, comme le tiers exclu, et Vuillemin mentionne à ce propos ses propres analyses des labyrinthes de la liberté, celle développée dans *Nécessité ou Contingence* [Vuillemin 1984b] et du mouvement, celle développée dans ce même troisième chapitre de *What are philosophical systems ?*. Il y a donc un lien direct entre l'interprétation matérielle des axiomes exigée par la philosophie, la pluralité des engagements ontologiques de celles-ci et la pluralité des procédés démonstratifs qui en découlent. Et ce lien impose de tracer une ligne de séparation entre science et philosophie :

Within the particular sciences, the methodological pluralism which is bound to the axiomatic method produces limited consequences. At a given time, only a few working methods are ripe and adopted in practice by all scientists along with their corresponding axiomatic system. On the contrary, the premises with which philosophy deals are so general, numerous and complex that they resist any particular formal expression and perhaps even defy any particular historical expression thorough it. Despite of all the efforts of those who do not distinguish between science and philosophy, universally acceptable working standards have never been reached—and presumably never will be reached. Consequently, as applied to ontology, axiomatics inevitably produces pluralism and disagreement. Indeed, philosophical reason is born and lives in contest. [Vuillemin 1986, 113]

En revanche, la thèse P<sup>3</sup> de *La Philosophie de l'algèbre* [Vuillemin 1962, 505], dit explicitement qu'« il y a plusieurs mathématiques, selon les exigences formulées eu égard aux procédés de construction et aux axiomes d'existence ». La section 56 du même ouvrage précise que c'est le propre du dogmatisme phénoménologique de vouloir prétendre qu'« il ne saurait être question, pour la raison pure, d'avoir à choisir entre plusieurs systèmes logiques, dont chacun [...] serait scientifiquement possible » [Vuillemin 1962, 502]. Les mathématiques, affirme-t-il, ne peuvent prétendre à aucune neutralité formelle qui mettrait à l'abri ses méthodes du questionnement métaphysique. Il faut ici souligner avec force que l'idée que toute théorie axiomatique de la science s'exprime dans le langage de la logique classique du premier ordre est complètement absente de l'horizon théorique de *La Philosophie de l'algèbre*. Elle est par contre au cœur des positions plus tardives de Vuillemin [Vuillemin 2001b,a] et elle semble impliquée par l'opposition entre mathématiques et philosophie dans *What are philosophical Systems ?*. Nous reviendrons sur ce point dans notre conclusion.

Concernant enfin la question du rapport à la vérité, troisième aspect qui permet de caractériser la révolution dans l'usage des signes opérée par la pensée rationnelle (scientifique et philosophique), Vuillemin affirme, dans *What are Philosophical systems?*, que le rapport de la science à la vérité est tout à fait autre que celui de la philosophie à la vérité. La vérité scientifique est cumulative : le progrès historique des sciences peut toujours être considéré comme une extension qui ou bien « préserve la vérité des systèmes précédents » tout entière, ou bien admet au moins avec ceux-ci ce que Vuillemin appelle « *a point of truth-contact* » [Vuillemin 1986, 113]. Comme tout résultat mathématique est traduisible dans le langage des mathématiques modernes, où il trouve toujours sa place dans un contexte théorique nouveau, de même les vieilles théories physiques partagent avec les nouvelles la vérité de leurs lois à un degré d'approximation donné, bien que leurs structures théoriques soient devenues caduques. De plus, lorsque deux théories physiques sont en compétition quant à leur explication des phénomènes, il est entendu, dit Vuillemin, que l'évidence des observations et des expérimentations futures permettra toujours de régler la question [Vuillemin 1986, 113].

Par contre, dans son rapport à la réalité, la philosophie fait une tout autre expérience, faite d'étonnement et d'inconfort, car l'interprétation matérielle qu'elle recherche lui révèle constamment des incompatibilités inattendues parmi les principes du sens commun qui guident en première instance l'organisation et la classification des éléments de la réalité. Ces incompatibilités, d'une part, obligent à distinguer systématiquement la réalité des apparences et, d'autre part, contraignent à faire constamment des choix afin de sauver ces apparences par des principes interprétatifs cohérents. La conclusion de l'ouvrage de 1986 ne peut d'ailleurs être plus explicite sur la différence entre science et philosophie quant à leur rapport à la vérité. Vuillemin y écrit :

[...] in contradistinction to scientific truth, its consideration of ontology makes philosophy generalize an opposition which is only of local and minor importance in science. Competing philosophical systems struggle for recognized, if not fixed, frontiers between appearance and reality. [Vuillemin 1986, 114]

Or, bien que *La Philosophie de l'algèbre* porte essentiellement sur l'analyse de ce que Vuillemin appelle dans son introduction la « connaissance pure », c'est-à-dire les mathématiques, ses affirmations montrent la généralité de son interprétation et l'influence qu'elle a sur sa conception des rapports de la science et de la philosophie. En 1962 il n'y a pas de raison de séparer science et métaphysique, science et engagements ontologiques. Nous l'avons déjà mentionné dans notre introduction : « [...] toute connaissance quelle qu'elle soit est de part en part métaphysique, en ce qu'elle implique à son principe des décisions et des choix qui n'appartiennent pas eux-mêmes à la juridiction intérieure de cette connaissance » [Vuillemin 1962, 505, nous soulignons].

L'analyse comparative entre les positions de 1962 et de 1986 est compliquée par le fait qu'au lieu de deux termes (science et philosophie) nous nous retrou-

vons dans *La Philosophie de l'algèbre* avec trois termes : mathématiques, philosophie et métaphysique. Nous reviendrons sur les rapports qu'entretiennent les termes de cette triade dans la prochaine étape de cette analyse. Il n'en demeure pas moins que jamais la nouvelle révolution copernicienne invoquée par Vuillemin en 1962 ne se préoccupe d'établir le champ de juridiction de la science vis-à-vis des engagements ontologiques de la philosophie, comme il en est question en 1986.

Le changement de perspective entre 1962 et 1986 apparaît donc radical quant aux rapports entre philosophie et science bien que deux éléments de continuité demeurent : l'affirmation de la nature logique des démarches rationnelles de la science et de la philosophie, garantie par le cadre de la pensée axiomatique et l'affirmation de la pluralité nécessaire des choix métaphysiques<sup>6</sup>. Cette affirmation de la pluralité nécessaire des choix apparaît, nous semble-t-il, pour la première fois de manière explicite dans *La Philosophie de l'algèbre* et, on le sait, elle en constituera par la suite un des fils conducteurs plus féconds. Avant 1962 ce thème de la pluralité n'est pas thématiqué et on peut s'interroger sur sa compatibilité avec une des thèses adoptées par Vuillemin au début de sa carrière : celle de la possibilité d'une philosophie comme science. Cette dernière thèse est revendiquée explicitement par Vuillemin, dans la préface de *Physique et métaphysique kantienne* [Vuillemin 1955], où Vuillemin semble bien admettre que, étant donné l'état des questions scientifiques de son temps, la philosophie kantienne en rend compte de la seule manière possible :

Lorsqu'on comprend quels problèmes sollicitaient Kant, il est impossible de bonne foi, d'attendre une solution différente de celle qu'il avance. [Vuillemin 1955, 2]

Plus loin, dans la même préface, il affirme non seulement que l'histoire de la philosophie est une science, mais que la philosophie elle-même l'est, en contradiction explicite avec ce qu'il affirme dans le passage de l'ouvrage de 1986 qu'on a cité plus haut [Vuillemin 1986, 113]. Dans la préface à la seconde édition de *Physique et Métaphysique kantienne*, Vuillemin rejette la deuxième de ces affirmations<sup>7</sup>. Or, si la philosophie n'est pas une science, on ne peut plus affirmer un lien nécessaire et univoque entre la science d'une époque donnée et la philosophie qui l'organise et la systématise. Comment utiliser cette indication précieuse pour expliquer la place que *La Philosophie de l'algèbre* occupe dans l'évolution des conceptions de Vuillemin ?

6. Pour l'affirmation du pluralisme dans *La Philosophie de l'algèbre* voir page 475 de [Vuillemin 1962]. Nous citerons explicitement ce passage dans la section 3 et discuterons de ce pluralisme « inachevé » à la section 4.

7. « [...] ma méthode ne suppose que deux postulats, qui m'ont semblé d'abord étranges, mais sans lesquels l'histoire de la philosophie deviendrait doublement vaine, par sa méthode et son objet : 1) Une connaissance historique de la philosophie kantienne peut être absolument rigoureuse et objective; l'histoire peut être une science et 2) La philosophie est elle-même une science » [Vuillemin 1955, 2]. Il ajoute en 1987, à la fin de cette même préface, une postille « Cette nouvelle impression reproduit l'original, aux corrections typographiques près. Je ne maintiendrais plus, aujourd'hui, le second postulat de la page 2 » [Vuillemin 1955, 3, 2<sup>e</sup> édition 1987].

Il y a un problème difficile auquel pendant ces années Vuillemin semble faire face. L'idée d'un pluralisme philosophique qu'il hérite (du moins en un certain sens) de Martial Gueroult et qui n'est pas facilement conciliable avec la thèse selon laquelle la philosophie peut être une science rigoureuse. On sait que l'on peut entendre cette thèse en deux sens différents. La philosophie peut être dite scientifique parce qu'elle adopte une méthode rigoureuse, *et* parce qu'elle est capable d'un progrès cumulatif basé sur le consentement universel. À l'époque de *Physique et métaphysique kantienne*, Vuillemin semble soutenir pour la philosophie les deux caractéristiques que nous venons de mentionner. Après 1986, il a explicitement abandonné la seconde sur la base de son analyse de la nature des classes des systèmes philosophiques :

Indeed, we cannot expect to get a principle of decision from a comparison between classes of philosophical systems whose mutual translations are indeterminate. [Vuillemin 1986, 131]<sup>8</sup>

Comment donc situer *La Philosophie de l'algèbre* dans cette évolution de la conception des rapports entre science et philosophie ? La conjecture qui est la nôtre peut se formuler comme suit. Vuillemin cherche à se démarquer à partir de 1962 de la thèse de l'existence d'une philosophie scientifique, tout à fait séparée de la science par sa tâche, mais semblable à elle dans ses démarches et dans sa rigueur. Il est possible que cela coïncide avec une mise à distance de la philosophie de Husserl, de sa phénoménologie comme science descriptive, inexacte mais rigoureuse, des expériences constitutives des objets de la connaissance et de son ontologie formelle. Husserl, qui fait d'ailleurs l'objet d'un hommage appuyé dans les dernières pages de *L'Héritage kantien et la révolution copernicienne* [Vuillemin 1954, 296], est en effet la cible d'une critique sévère dans *La Philosophie de l'algèbre* en écho au bilan que Vuillemin en a donné en 1959<sup>9</sup>. L'enjeu concerne la possibilité de redéfinir le rôle de la philosophie, par la Logique, en réactualisant le

---

8. Cette référence à l'indétermination de la traduction entre les systèmes appartenant à des classes différentes est particulièrement intéressante, car elle suggère l'influence de Quine dans l'élaboration de la position de 1986. Nous reviendrons dans la conclusion sur cette question.

9. Dans l'article « Le problème phénoménologique : intentionnalité et réflexion » [Vuillemin 1959], consacré à Husserl, Vuillemin s'interroge sur la nature de la philosophie, à une époque où les sciences de la nature ont pris la place qu'elle occupait quand elle décrivait le système du monde. Il constate que « les mathématiciens ont annexé la logique et que les psychologues – à la tête des “sciences humaines” – se partagent le reste des dépouilles ». À propos de Husserl, Vuillemin y affirme qu'il mérite toute notre attention pour avoir clairement refusé d'« abandonner la Logique aux Mathématiciens », et avoir tenté de redéfinir ainsi la nature de la philosophie. Dans la conclusion de son analyse, Vuillemin fait jouer aux théorèmes de Gödel un rôle majeur dans le jugement finalement négatif qu'il donne de la tentative de Husserl. Ce n'est pas ici le lieu pour rendre compte de cette analyse de Vuillemin, mais sa conclusion est particulièrement importante pour notre propos. Vuillemin affirme : « Après Gödel, deux voies restaient ouvertes. La première est en partie parcourue : on y abandonne la Logique aux Mathématiciens. Pour le reste, on devient sceptique ou psychologue. On ne semble pas avoir exploré l'autre voie, qui conduirait à reprendre

programme husserlien sans faire aucune place à la notion d'intuition et sans céder au « dogmatisme » intrinsèque, selon Vuillemin, et à la conception que Husserl se fait des rapports entre science et philosophie. Face à cette tâche, Vuillemin a pu envisager que tirer les mathématiques et la logique du côté de la pluralité, en plaçant des décisions ontologiques au cœur même de leurs démarches, impliquerait la révocation de l'idéal de la positivité de la science, et la rapprocherait de la métaphysique, finalement acceptée avec sa pluralité, essentielle à la compréhension de son histoire. Pourtant, le développement de l'algèbre générale et de l'ontologie formelle conduirait à indiquer des moyens de décisions fondés dans la raison grâce à une analyse logique renouvelée capable d'ordonner l'espace des choix possibles selon un ordre explicite des préférences. Tout se passe donc comme si Vuillemin voulait substituer en 1962 à cette idée d'une philosophie scientifique une série de thèses qui mettent en exergue la pluralité (et la liberté) de la pensée et qui fonderaient la nouvelle révolution copernicienne qu'il appelle de ses vœux. Parmi ces thèses il y a sûrement l'idée que la science n'est pas positive car elle est métaphysique et plurielle, il y a l'idée que la philosophie doit rester, au sens kantien, critique générale de la raison et enfin que cette critique, loin d'être fondée par les prétentions « dogmatiques » de la phénoménologie, peut puiser ses sources dans les décisions métaphysiques des mathématiques et donc être compatible avec une nouvelle ontologie formelle, c'est-à-dire une discipline de l'être, formelle, au sens d'universelle, et *a priori*.

Nous allons dans la prochaine section essayer d'éclaircir ces thèses, à la lumière des analyses mathématiques de *La Philosophie de l'algèbre*, en faisant ainsi le point sur le genre de pluralisme affirmé par Vuillemin en 1962.

### 3 Les conditions de possibilité de la révolution copernicienne et la notion de structure algébrique

Les renouvellements des méthodes que les mathématiques modernes induisent, dans un mouvement qui dépasse, prolonge et généralise les acquis des mathématiques classiques, portent essentiellement, selon Vuillemin, sur la notion de structure. Analysons donc comment cette notion peut rendre possible la nouvelle révolution copernicienne. Nous verrons se dégager trois conditions de possibilité d'une telle révolution.

La première de ces conditions de possibilité est placée au cœur même de l'introduction de l'ouvrage. Elle prescrit de pouvoir distinguer la connaissance

---

la question husserlienne et peut-être à y répondre, en assurant l'une par l'autre la vérité et la liberté » [Vuillemin 1959]. Nous reviendrons dans la prochaine section sur le caractère fichtéen de ce programme qui semble déjà annoncer le projet de *La Philosophie de l'algèbre*.

pure des autres types de connaissance. Sans elle, il n'y aurait pas d'étude possible des choix et des déterminations de la pensée lorsqu'elle a affaire aux objets qui lui sont les plus propres. Sans elle il ne serait pas possible de critiquer, réformer et redéfinir la méthode propre à la philosophie théorique. *La Philosophie de l'algèbre* s'ouvre avec une définition très classique de la connaissance pure.

Les connaissances pures à proprement parler sont indépendantes de l'expérience pour leurs principes primitifs comme pour leurs enchaînements. Elles constituent le champ de la partie pure des mathématiques, au sens large. [Vuillemin 1962, 2]

Les mathématiques pures comprennent donc l'arithmétique, l'algèbre et l'analyse, la théorie des ensembles et la topologie, ainsi que la logique mathématique, qui, dit Vuillemin, permet de construire les notions de classe et de nombre que supposent la théorie des ensembles et l'arithmétique. Cette caractérisation classique n'est, toutefois, que le prélude d'une caractérisation structurale qui permettra à Vuillemin de dégager la connaissance pure de son asservissement à l'intuition.

Ce qui fonde en effet la pureté de la connaissance mathématique n'est pas à chercher dans la capacité de la raison d'appréhender de manière claire et distincte des natures simples susceptibles d'être combinées et enchaînées entre elles, car l'histoire de la raison théorique nous montre que la simplicité est toujours relative. Il n'est pas non plus à chercher dans la possibilité de construire des objets à partir du matériel pur de l'intuition, notion obscure et théoriquement dangereuse dans la mesure où elle ouvre la porte au psychologisme. Les mathématiques elles-mêmes suggèrent à la philosophie le moyen de se libérer de l'intuition d'inspiration cartésienne ou kantienne, pour s'affranchir de ses limitations en devenant purement rationnelle. La notion de structure algébrique le fait à double titre.

En effet, d'une part, en thématissant la notion d'opération, l'algèbre fait abstraction des objets et nous permet de nous libérer de la passivité intrinsèque à leurs représentations :

Aux intuitions de l'entendement elle [l'algèbre] substitue l'ordre d'une raison qui compose entre elles des opérations, qui n'ont point en elles-mêmes de valeur représentative et qui, plutôt que des idées que l'on puisse voir, incarnent des décisions qu'on peut prendre et pour lesquelles la vérité, hors de toute adéquation matérielle, se résout dans la compatibilité formelle. [Vuillemin 1962, 472]

C'est là la leçon de Galois, qui généralise et corrige le programme fichtéen, auquel est faite toutefois une place d'honneur dans ce parcours de libération et d'affranchissement :

[Fichte a] assujetti [...] toute la métaphysique à la notion d'opération [...] sa doctrine marque ainsi l'aboutissement logique d'une évolution qui a détaché peu à peu l'idée de son contexte représentatif et théologique, pour la réduire à un acte d'intelligence. [Vuillemin 1962, 59]

Ainsi, ayant « construit tous les concepts de la philosophie pure uniquement à partir des opérations du Moi fini », Fichte ouvre la possibilité d'installer la pluralité au cœur de l'activité de la raison.

D'autre part, l'algèbre permet de dépasser les limites de la méthode *génétiq*ue (c'est ainsi que Vuillemin appelle p. 59 la méthode de Fichte) [Vuillemin 1962, 214–215] pour aboutir au concept de structure, libéré de tout préjugé dogmatique. Ce sont là les conséquences du travail de Galois dans la notion moderne et générale de structure algébrique. Fichte, comme Lagrange, anticipe les structures mais les garde « engluées » [Vuillemin 1962, 117] dans la contingence des cas particuliers dont elles dérivent, puisqu'il a besoin dans sa démonstration du choc de la sensation. La méthode de Galois ne traite pas la structure comme une « genèse renversée » [Vuillemin 1962, 120], comme le fait Fichte, et permet donc une considération directe et générale des structures.

Et pourtant c'est dans la philosophie de Fichte qu'il faut chercher les prémices de la révolution philosophique que l'œuvre de Galois suggère. Dans un passage du § 50 de *La Philosophie de l'algèbre*, faisant le bilan des préceptes que le développement formel de l'algèbre suggère à la philosophie, Vuillemin affirme, en concluant sa longue méditation sur la postérité de la réflexion de Fichte et de son rapport aux résultats de la méthode des groupes :

En effet, une fois qu'on a reconnu que l'acte de la volonté consiste non seulement à acquiescer à une représentation ou à refuser cet acquiescement, mais à définir implicitement des êtres en vertu des axiomes acceptés, l'intervention de la liberté de choix des axiomes ne pouvait plus échapper longtemps à l'attention des philosophes. Dès que le critère du vrai consiste non plus dans l'adéquation de la chose avec l'intelligence mais dans l'accord avec elle-même d'une raison qui par un seul et même acte pense et choisit, définit et veut, « la Doctrine de la science » perd nécessairement son caractère absolu et devient perméable à la présence d'interprétations différentes et relatives qui assignent au projet critique un nouveau contenu, en le rapportant à la pluralité nécessaire des choix entre les systèmes axiomatiques et non à la limitation interne que le fait de l'expérience impose à la connaissance. [Vuillemin 1962, 475–476]

Grâce à la réflexion sur la notion d'opération, « l'idée même de subordonner la raison théorique comme pouvoir de connaître à la raison pratique comme pouvoir de décider contient donc en germe, selon Vuillemin, une doctrine entièrement nouvelle de la relativité du savoir » [Vuillemin 1962, 475] et ouvre donc la possibilité de la pluralité au sein même de la science.

La première condition pour fonder la nouvelle révolution copernicienne est donc à chercher dans l'existence d'une connaissance pure que la possibilité d'une algèbre des structures fonderait, en subordonnant la représentation à la décision [Vuillemin 1962, 505–506].

La deuxième condition de possibilité de la révolution copernicienne exige de laisser à la philosophie théorique son rôle critique. La philosophie théorique est décrite dans *La Philosophie de l'algèbre* en accord avec la définition kantienne :

Elle éprouve la validité des connaissances pures et leur portée. Elle les analyse critiquement et, cherchant quels actes de la pensée les rendent possibles, elle examine le statut de ces sciences, le genre de connaissances dont elles relèvent, la nature des êtres dont elles traitent, la limite qui leur est assignée dans l'ensemble de la Philosophie théorique. [Vuillemin 1962, 3]

Grâce à la notion de structure et au sens rigoureux qu'elle assigne à la pluralité des choix, il est possible d'assigner un nouveau contenu au projet critique « en le rapportant à *la pluralité nécessaire* des choix entre les systèmes axiomatiques » [Vuillemin 1962, 476, nous soulignons].

En effet, les préceptes que l'on tire de l'émergence de la notion de structure permettent de corriger les limitations dans lesquelles la pensée kantienne avait enfermé la posture critique<sup>10</sup> : la méthode générale d'Abel peut conduire la philosophie théorique en dehors des cercles du dogmatisme et fonder l'idée d'une critique générale de la raison. Cette méthode abélienne est décrite comme répondant à la double exigence de rechercher la pureté de la méthode et l'indépendance (minimalité dit Vuillemin) des hypothèses. Ces deux exigences, loin d'être des exigences esthétiques, permettent de définir *a priori* les types de structures dont dépendent les solutions d'un problème et donc de fournir en toute rigueur des preuves d'impossibilité.

Avant Abel, la pureté de la méthode n'est qu'un luxe de l'exposition mathématique. Avec lui elle devient l'instrument même de l'analyse critique. [Vuillemin 1962, 215]

Comme l'écrit Lie, avant Abel les mathématiques s'interrogeaient exclusivement sur des questions telles que : « une équation peut-elle être résolue par radicaux et comment doit-elle l'être ? » Après lui elles s'autorisent à rechercher la manière la plus simple et la plus générale d'une telle démonstration, seule voix pour aboutir, le cas échéant, à une démonstration d'impossibilité. Comme le dit Vuillemin :

Les démonstrations générales au sens d'Abel changent la modalité de la preuve. Les démonstrations particulières sont réelles : elles supposent à leur principe la possibilité de l'expérience donnée dans l'affectation de la sensation. Les démonstrations générales ont trait au possible et partent du seul concept, en ignorant les conditions restrictives de la sensibilité. [Vuillemin 1962, 221]

Grâce à la double exigence de la pureté et à l'indépendance des hypothèses, la mathématique formelle devient critique, capable de se libérer à la fois de

10. On retrouvera encore ces mêmes thèmes ainsi que l'affirmation de la nécessité d'une critique générale de la raison dans l'article « Kant Aujourd'hui » [Vuillemin 1976].

la recherche des natures simples avec l'ordre linéaire qu'elles imposent à la démonstration, et des restrictions qui empêchaient de poser en toute généralité les problèmes d'impossibilité.

Les pages que Vuillemin consacre à cette méthode d'Abel (p. 213 et suivantes) expliquent clairement le sens du mot « général » qui qualifie cette démarche méthodique. Tant que l'on réfléchit sur des individus, la méthode qu'on suit, si générale soit-elle, demeure *a posteriori*, comme le remarque Abel à propos de Lagrange, lui adressant le reproche même que celui-ci adressait à ses prédécesseurs [Vuillemin 1962, 116]. Par conséquent, pour que la démarche soit générale, il faut analyser les structures de classes définies de problèmes indépendamment des individus auxquels ceux-ci s'appliquent. Pour atteindre une vraie généralité il faut donc rompre toute dépendance de la singularité et de l'individualité auxquelles on reste arrimé si on cherche à passer du spécial au général par simple analogie [Vuillemin 1962, 215]. Ce n'est qu'à cette condition que l'on pourra démêler l'accessoire de l'essentiel, les propriétés des individus des propriétés de structure, pour accéder à cette analyse structurale que Hilbert lui-même a revendiquée [Vuillemin 1962, 214].

Grâce à cette leçon des mathématiques formelles, la philosophie théorique peut donc devenir réellement critique. En effet, une critique générale de la raison n'est possible que si la philosophie accepte de « connaître le pouvoir de la raison indépendamment des occurrences de celle-ci dans l'expérience même » [Vuillemin 1962, 217]. Elle n'est possible que si la philosophie accepte de ne pas « subordonner la déduction des concepts [organisant l'expérience] aux principes de l'expérience possible », et que si elle est capable de dégager de l'analyse interne d'un concept les conditions générales de l'impossibilité de son application. Bref, à la différence de la critique kantienne, une telle critique aurait trait au possible, « part[ant] du seul concept en ignorant les conditions restrictives de la sensibilité ». La seconde condition de possibilité de la nouvelle révolution copernicienne est donc la possibilité d'une analyse critique de la connaissance relativement à un espace des possibles que la connaissance pure elle-même permettrait de restituer de manière objective car structurale.

La troisième condition de possibilité exige que la nouvelle métaphysique, que la philosophie comme critique générale de la connaissance permet de dégager, puisse être conçue dans les termes d'une ontologie formelle, libérée des contraintes dogmatiques auxquelles, selon Vuillemin, Husserl l'a assujettie.

Que faudra-t-il entendre par cette expression, et en particulier par le mot « formel » ?

Encore une fois, les mathématiques permettent de le préciser. En suivant leurs prescriptions nous pouvons nous libérer de la notion d'intuition nécessaire à la détermination de ce qui est individuel. Nous pouvons en effet lier l'individuel à la notion d'invariance, dégageant ainsi le principe d'individuation des conditions de possibilité de l'expérience.

La théorie des groupes, sous sa forme véritable, c'est-à-dire délivrée de son apparence sensible et imaginative, permet [...] de

lier le pouvoir qu'ont les concepts de conditionner le divers qu'ils subsument et celui que, – dans la connaissance pure du moins –, on souhaiterait qu'ils eussent de déterminer de l'intérieur ce divers lui-même. [...] Un individu ne peut être défini absolument comme tel, mais il est intelligible dans la mesure où il est discernable d'autres individus, et cette discernabilité, à son tour, est relative à un groupe d'opérations, par rapport auquel il demeure invariant seul parmi d'autres objets. [Vuillemin 1962, 287]

Un individu est donc un objet invariant par rapport au groupe de toutes les permutations; il est ainsi « défini en lui-même de façon entièrement intelligible » et générale.

Le processus de formalisation, donc, qui préside cette nouvelle technique d'individuation, rationnelle de part en part, est concevable comme une double abstraction. La première, « empirique et matérielle », nous sert à passer des individus aux espèces et des espèces aux genres par une généralisation croissante. Toutefois, dans un tel contexte constructif et génétique, l'abstraction est incapable de construire *a priori* les différences spécifiques en jeu dans la classification. Au contraire, dit Vuillemin, la théorie des groupes construit ces différences, car sa méthode est structurale et « dégage les structures de la gangue des problèmes individuels ». Dans la théorie des groupes, la formalisation se fait deux fois : « sur les éléments du groupe, qu'on remplace par des symboles entièrement formels et sur les opérations mêmes ». Cette formalisation permet donc « de construire les individus, non plus dans l'intuition par des schèmes imparfaits mais dans les concepts eux-mêmes, de façon entièrement *a priori* et générale, sans faire appel désormais à aucun donné » [Vuillemin 1962, 288–289].

Cette possibilité pousse Vuillemin à affirmer que la formalisation rendue possible par la théorie des groupes annule la distinction « entre connaissance symbolique et intuitive, comme le faisait Leibniz à la suite de Platon et de Spinoza, puisque la connaissance rationnelle nous donne ses raisons de réussite et que la découverte a lieu entièrement sous la lumière et le contrôle de la réflexion » [Vuillemin 1962, 292]. L'ontologie est donc formelle car elle se fonde sur un processus de formalisation qui élimine l'opposition entre connaissance symbolique et connaissance intuitive, en rendant cette dernière inutile.

## 4 Les décisions ontologiques et la clôture du champ des possibles

Les trois changements de perspective que la notion de structure permet d'opérer, respectivement dans les notions de connaissance pure, de philosophie théorique et d'ontologie formelle, rendent possible la révolution copernicienne, et pourtant, ce même changement de perspective cache une difficulté.

Reprenons le fil de l'analyse que nous venons de mener.

Une ontologie formelle est donc possible, constituée à partir des analyses de la philosophie théorique entendue comme critique générale de la raison, c'est-à-dire étude de la connaissance pure.

Grâce à la nouvelle révolution copernicienne, le processus à travers lequel la connaissance se constitue n'oppose pas vérité et liberté, mais au contraire les unit dans un processus dialectique. Vuillemin le décrit brièvement à la fin du § 60 de l'ouvrage de 1962. En premier lieu, les décisions métaphysiques des Mathématiques, exprimées par ses postulats d'existence, sont accueillies par la philosophie entendue comme Critique générale de la connaissance et leurs motivations rationnelles sont étudiées dans l'espace des choix possibles. Ces décisions, ainsi que l'espace de choix dans lequel elles se situent, ne dépendent que de la raison pure. C'est pourquoi Vuillemin affirme que cette partie de la critique coïncide avec l'ontologie formelle, car elle y aboutit [Vuillemin 1962, 517]. En deuxième lieu, la critique « aurait à étudier la convenance de ces décisions générales avec les êtres et les valeurs » [Vuillemin 1962, 518]. En effet, l'ontologie formelle par le biais de la philosophie doit réunir et éclairer l'ensemble des pratiques humaines. La philosophie doit garder le rôle de systématiser l'expérience de manière complète et cohérente. Ainsi aucun domaine de la connaissance et de l'action ne devrait être indépendant de l'ontologie formelle dégagée dans la première étape. La convenance (ou la non-convenance) de cette ontologie aux êtres et aux valeurs que l'expérience humaine produit devrait également nous permettre d'analyser la nature des liens entre le domaine pratique et le domaine théorique de manière cohérente. Les conséquences de cette étude, à partir d'une ontologie formelle renouvelée, aboutiront donc à une philosophie des principes qui guidera le chemin de la science et de l'expérience humaine par son travail critique. Ce cercle vertueux de la raison est donc obtenu par une méthode que Vuillemin reconduit explicitement à la dialectique platonicienne :

Cette méthode peut se recommander d'un modèle illustre : la Dialectique de Platon. Menée à bien, elle aurait le triple avantage de retrouver des liens, menacés par le positivisme, entre la vie philosophique et la vie scientifique, de rétablir en ses droits la Métaphysique désormais intimement liée avec la Critique et de restaurer enfin l'unité d'une philosophie intimement subordonnée, comme la science elle-même, aux choix métaphysiques de l'ontologie formelle. [Vuillemin 1962, 518]

L'ambition de ce programme est donc explicite : échapper aux pièges du positivisme, en trouvant une nouvelle voie pour rétablir l'unité de la science, l'unité de la philosophie pratique et théorique, et la légitimité de la métaphysique. Tout cela en échappant aux tentations subjectivistes et à une critique partielle de la raison par une objectivité qui devrait rendre à la raison pure ses droits sans l'enfermer dans les cercles du dogmatisme.

Il y a malgré tout une difficulté de taille dans cette entreprise.

Vuillemin nous a dit que les décisions propres à toute connaissance ne peuvent pas trouver leurs principes de décisions ou de choix à l'intérieur d'elle-même. Nous avons cité à plusieurs reprises le passage de page 505, mais, arrivés à ce point, il semble nécessaire d'y revenir :

[...] toute connaissance quelle qu'elle soit est de part en part métaphysique, en ce qu'elle implique à son principe des décisions et des choix qui n'appartiennent pas eux-mêmes à la juridiction intérieure de cette connaissance. [Vuillemin 1962, 505]

Dans un espace pluriel de choix possibles, donc, chaque science prend des décisions, c'est-à-dire choisit des axiomes, sans qu'elle puisse trouver en elle-même les principes grâce auxquels ces choix et ces décisions puissent être rationnellement justifiés.

Pourquoi les principes de décisions et de choix ne peuvent-ils pas appartenir à la juridiction intérieure de la connaissance en question ?

La réponse semble claire au vu de l'analyse menée. Si les principes de décision et de choix n'étaient pas extérieurs à la connaissance en question, on rétablirait la distinction entre les sciences positives d'une part et la philosophie et la métaphysique de l'autre. Une telle distinction est à l'origine du projet husserlien : la science seule est juge du bien-fondé de ses propres principes de décision, la philosophie doit se limiter à les analyser de l'extérieur, pour en retrouver le sens grâce à la démarche phénoménologique. Vuillemin dénonce une telle position comme dogmatique tout au long de la dernière section de la conclusion de *La Philosophie de l'algèbre*.

De quelle juridiction les décisions des mathématiques pures relèvent-elles ? Peut-on trouver les fondements de ces choix dans la philosophie théorique dans son ensemble ?

Cela semblerait au premier abord plausible. En effet, des conceptions philosophiques opposées comme l'empirisme, l'idéalisme ou le réalisme semblent demander de prendre en compte la connaissance dans son ensemble : fécondité, applicabilité des mathématiques à la physique ou aux sciences de l'homme, à la technique, capacité d'unification de la connaissance, et aussi tout simplement capacité d'éclairer le sens de l'activité mathématique au sein de la science. Bien loin d'être tous naïvement réalistes, les mathématiciens du début du siècle ont essayé de ne pas réduire leur science à une science des faits et ils se sont interrogés comme leurs prédécesseurs sur leur propre pratique. Idéalisme et empirisme reflètent des décisions de théorie de la connaissance qui présupposent l'appréciation de la connaissance dans son ensemble, par des considérations qui engagent à la fois la connaissance pure et celle qui ne l'est pas. Empirisme et idéalisme se prononcent sur la question de la possibilité de la connaissance, prescrivant une réorganisation hiérarchique du savoir, basée sur une analyse nomologique de sa valeur. Axiome du choix, définitions imprédicatives, cardinaux transfinis, voilà des exemples concrets qui ont opposé les mathématiciens du début du XX<sup>e</sup> siècle. Les raisons qui ont poussé les uns et les autres à les accepter ou à les rejeter concernent

essentiellement l'idée que chacun d'eux se faisait de la connaissance et plus particulièrement de la science et du rôle que les mathématiques y jouaient. Brouwer, Weyl, Carnap, Hilbert, Gödel, tous lient, à leur propre diagnostic sur l'état des mathématiques et sur les décisions qu'elles devraient prendre, des considérations sur la nature de la connaissance dans son ensemble, de son articulation interne, du rôle que le langage y joue. Ou encore, la position de Poincaré sur la logique et les mathématiques ne peut être comprise sans tenir compte de sa conception des rapports de la physique et des mathématiques.

Et pourtant, nous l'avons vu, la révolution copernicienne appelée par Vuillemin présuppose que l'on puisse distinguer la connaissance pure des autres connaissances théoriques. L'existence d'une partie pure de la connaissance est une des conditions de possibilité de la révolution copernicienne et les décisions et les choix de cette connaissance pure, étant identifiés à la métaphysique, ne semblent pas pouvoir relever de l'ensemble de la connaissance théorique, considérée de manière holistique.

Pouvons-nous alors considérer que les décisions des mathématiques pures trouvent leur justification dans la philosophie pratique, dans la mesure où elle peut être pure ?

Cela ne semble pas possible. Il est vrai que le primat de la raison pratique sur la raison théorique cher à Kant a été repensé par Vuillemin, nous l'avons dit, en clef fichtéenne : connaître et décider vont ensemble. Toutefois, cela ne veut pas dire que l'analyse des conditions de possibilité de la liberté et de l'action puisse déterminer à elle seule les choix théoriques des mathématiques et, en effet, tout ce que Vuillemin affirme dans la dernière section de *La Philosophie de l'algèbre* va à l'encontre d'une telle solution. L'ontologie formelle coïncide avec la première phase du processus dialectique esquissé par Vuillemin, et ce n'est que par la suite que la critique de la raison s'applique à l'analyse des « convenances » avec l'ensemble des valeurs et des actions humaines.

Il ne reste alors qu'une solution pour interpréter de manière cohérente le passage de la page 505 cité plus haut. Ce n'est que dans les mathématiques pures, partie pure de la connaissance, que la métaphysique, la critique générale de la raison et l'ontologie formelle peuvent devenir une seule et même discipline grâce à l'algèbre. Seules les mathématiques pures, puisqu'elles sont métaphysiques de part en part, peuvent trouver en elles-mêmes à la fois les principes de la pluralité métaphysique et les moyens d'une critique générale de ces principes, capable d'analyser cette pluralité et de l'ordonner de sorte que, délaissant la cacophonie des querelles philosophiques, on aboutisse à la fondation des choix et des décisions.

De quelle manière l'étude des structures devrait-elle fonder les décisions mathématiques et fonder ainsi l'ontologie formelle ?

On pourrait conjecturer qu'elle devrait motiver les décisions des mathématiciens par des principes tels que la sécurité, la simplicité, la généralité, la conservation maximale, l'économie ontologique sans sortir du domaine mathé-

matique. Elle devrait non seulement permettre de donner une formulation rigoureuse à ces principes que nous venons d'évoquer, mais également permettre une analyse comparative des différents choix ontologiques en compétition, de sorte à pouvoir les *ordonner* selon un « ordre de perfections » qui puisse permettre de dégager à un moment donné de l'histoire des mathématiques le choix ontologique le plus rationnel. À partir de cette ontologie formelle, le travail critique et organisateur de la philosophie s'appliquerait aux autres domaines de la connaissance et de l'action, accomplissant ainsi l'unification entre domaine pratique et domaine théorique souhaitée par Vuillemin.

Toutefois, dans l'analyse du premier tome de *La Philosophie de l'algèbre*, il n'y a rien qui puisse motiver les décisions métaphysiques et les choix des mathématiques pures. L'algèbre analysée par Vuillemin dans ce premier tome permet de définir une pluralité de structures, d'en étudier la possibilité d'application et de non-application à différents domaines d'objets, mais elle ne permet pas de donner véritablement une théorie générale des structures. Par conséquent, au niveau du premier tome, ces mêmes décisions au cœur de la connaissance pure, ne trouvant pas leur justification dans la connaissance pure elle-même, ne peuvent pas fonder d'ontologie formelle.

C'est donc au deuxième tome de *La Philosophie de l'algèbre* [Vuillemin inédit] que devait être réservée la tâche d'expliquer le travail de la raison pure sur elle-même. Lorsqu'on consulte ce manuscrit inédit<sup>11</sup> l'on voit comment, de l'analyse des travaux de Dedekind et de Birkhoff, Vuillemin voudrait aboutir à une algèbre de la raison, théorie pure des théories possibles et de leurs articulations, intégrant la métamathématique et donc la logique. Vuillemin est convaincu que si la notion de groupe a joué un rôle unificateur pour l'algèbre abstraite, la notion de treillis jouera le même rôle pour l'algèbre générale qu'il appelle de ses vœux : une algèbre des algèbres, permettant d'analyser les relations entre les structures algébriques, permettant de les ordonner, intégrant, grâce à cette notion d'ordre, la notion de déduction. Ce classement des algèbres et des logiques devrait non seulement permettre de dégager des choix et des décisions univoques et fonder l'unité de la pratique mathématique, mais également permettre de répondre à la question : qu'est-ce que la connaissance et quel ensemble de représentations mérite le nom de science ? Elle serait donc, au sens propre, la nouvelle Doctrine de la Science réalisant ainsi le rêve de la *mathesis universalis*. Le manuscrit du tome II donne des indications sur les lignes générales que Vuillemin entendait suivre.

Au tout début du manuscrit, § 61 Vuillemin observe comment :

Jusqu'à la fin du XIX<sup>e</sup> siècle, la critique des fondements demeure extérieure à la technique des disciplines critiquées. Il en résulte que, non seulement elle s'exprime dans une langue équivoque et imprécise, mais qu'à la faveur de ces imperfections de l'expression elle mêle inextricablement des points de vue différents et même

---

11. Nous remercions vivement les Archives Poincaré, et en particulier Gerhard Heinzmann et Baptiste Mèlès, pour nous avoir permis de consulter cet ouvrage.

opposés et qu'incapable d'énoncer avec distinction ce qu'elle vise, elle rend *a priori* impossible non seulement toute décision dans les conflits qui opposent la raison avec elle-même mais encore toute formulation significative de la question. Au contraire avec Cauchy, Kronecker, Weierstrass et Dedekind, la réflexion sur les mathématiques devient partie intégrante des mathématiques elles-mêmes. Du même coup, elle permet aux conflits métaphysiques, qui sont les problèmes des fondements, de se produire dans la clarté. [Vuillemin inédit, chap. VII, § 61, 1–2]

Cette connaissance transcendantale (transcendantale au sens où elle se rapporte à l'acte de pensée qui la fonde, comme Vuillemin le dit au § 43, p. 223) peut être réalisée par l'Algèbre de l'algèbre, qu'il introduit au § 64 après sa discussion sur le théorème de la factorisation unique de Dedekind. Cette Algèbre de l'algèbre, véritable Algèbre générale, considère comme ses objets propres les structures algébriques elles-mêmes, dans toute leur généralité ainsi que leurs relations réciproques (§ 64, p. 326 du manuscrit). Elle permet de montrer que la relation la plus générale entre une algèbre et ses sous-algèbres forme un treillis et Vuillemin conjecture que cette notion aura un rôle unificateur pour toute l'algèbre abstraite, ainsi qu'un rôle fondamental pour la philosophie (§ 64, p. 329–330). Grâce à la théorie des treillis, l'algèbre générale se révèle en effet n'être rien d'autre que la théorie de la connaissance, exprimée sous la forme symbolique des mathématiques. Donc :

La tâche fondamentale de l'algèbre générale consiste à étudier systématiquement cette structure quasi-algébrique et à examiner à quelles conditions elle assure, dans le cas général où on a affaire non plus aux nombres, mais aux théories déductives elles-mêmes, la décomposition élémentaire unique souhaitée. [Vuillemin inédit, § 65, 355]

Deux paragraphes (§ 70–71) figurent en conclusion du tome II. Vuillemin y observe au § 70 que l'algèbre générale et la notion de treillis permettront de comparer les structures déductives de la logique, de leurs principes ainsi que les théories scientifiques exprimées dans ces structures logiques. Toute connaissance scientifique, donnée par un système axiomatique, se laisse analyser par la logique du point de vue de l'indépendance, de la catégoricité, de la cohérence de ses axiomes.

Puisque l'Algèbre de l'algèbre étudie la nature même *des sciences déductives en général*, c'est à elle que nous devons nous adresser pour répondre à la question du critère de vérité. [Vuillemin inédit, § 70, 360, nous soulignons]

En effet, « Elle est une science qui réfléchit elle-même sur ses principes et qui est susceptibles d'établir la légitimité de leur droit et de leurs prétentions » [Vuillemin inédit, § 70, 360].

Il semble clair, donc, à la lumière de ces passages, que Vuillemin pensait comparer non seulement des théories différentes, mais que, dans la mise en

forme axiomatique des théories, il pensait pouvoir également comparer des logiques différentes.

Mais alors, et c'est ici que se niche la difficulté du projet dans son ensemble, il aurait sûrement fallu déterminer *a priori* le spectre éventuellement infini de la possibilité du logique, faute de quoi la relativité de la connaissance et sa pluralité deviendraient relativisme. Vuillemin pensait-il classer les classes de logiques possibles par le biais de la notion de treillis ? C'est ce qu'a fait Haskell Curry, dans ses livres sur la logique combinatoire [Curry 1952, 1963], [Curry, Hindley *et al.* 1972], que cite Vuillemin [Vuillemin 1962, 293]. Toutefois, la gamme des logiques ainsi ordonnées ne couvre pas la totalité des logiques envisageables et il aurait alors fallu dégager une caractérisation de la notion de logique par les moyens de l'algèbre à l'intérieur même de l'algèbre, tout en abandonnant le point de vue que la théorie des treillis permettait de maîtriser. Le travail de Curry permet en effet d'analyser et de classer les logiques utilisées dans le débat des fondements des mathématiques, ainsi que certaines logiques modales [Curry 1963], mais Curry ne prétend pas proposer un outil universel d'analyse de toute logique possible. À partir des années 1980, lorsque le pluralisme philosophique ne sera plus lié à l'idée d'une critique générale de la raison, Vuillemin abandonnera l'idée d'une caractérisation logique du spectre des systèmes philosophiques en se tournant vers la sémiologie générale. Dans cette nouvelle conception de la pluralité, la question du repérage et de la clôture du spectre des possibles occupe une place centrale. La déduction des formes fondamentales de la prédication que Vuillemin esquisse à la section 3 du chapitre 2 de *What are Philosophical Systems ?*, se termine avec l'affirmation de la complétude de la déduction :

The deduction can go no further for, if it did, it would overstep all access to the truth conditions to which it has been bound. [Vuillemin 1986, 92]<sup>12</sup>

La fin de cette même section analyse le cas des fictions pour le neutraliser et assurer ainsi la clôture de la déduction :

All verbal determinations have been displayed, including their general neutralization. The deduction is now complete and has even overreached itself. [Vuillemin 1986, 94]<sup>13</sup>

Rien, dans l'approche de l'Algèbre de l'algèbre, ne semble garantir une telle clôture, préalable nécessaire à l'ordonnement des décisions.

---

12. L'article « Les formes fondamentales de la prédication : un essai de classification » se termine par la même affirmation [Vuillemin 1984a, 28].

13. Pour une analyse de cette question dans *What are philosophical Systems ?* et pour une tentative de caractérisation logique, à l'aide du point de vue déductif par le biais du calcul des séquents, voir [Crocco 2016].

## 5 Conclusion

Vuillemin a-t-il aperçu la difficulté qu'il y avait dans son projet d'ontologie formelle, lié à la nouvelle révolution copernicienne? Peut-être qu'une étude attentive du tome II nous permettrait de répondre à cette question. Il est certain que la question du §71 qui conclut le manuscrit inédit du tome II implique l'hypothèse d'un principe de comparaison et de décision entre les alternatives philosophiques que l'Algèbre générale et la notion de treillis devraient rendre possible :

Or comme la connaissance philosophique elle-même se présente, dans la mesure où son nom la rend digne du nom qu'elle porte, comme une théorie de la science, elle tombe sous le concept général de treillis. On peut alors formuler le problème suivant : toute philosophie se présentant comme un système, la théorie des treillis permet-elle de classer ces systèmes et d'établir une véritable théorie comparée des systèmes philosophiques? [Vuillemin inédit, § 71, 362]

Les « Éléments de Logique philosophique » que Vuillemin annonce p. 218 et 337 du manuscrit du tome II de *La Philosophie de l'algèbre*, n'ont jamais été écrits.

Par contre, Vuillemin, au chapitre 4 de *What are Philosophical systems ?*, exclut toute possibilité de choisir entre des classes de systèmes philosophiques alternatives par des voies logiques. Il n'y a pas de principe scientifique de décision entre classes de systèmes philosophiques en compétition, puisque les « perfections » théoriques (simplicité, applicabilité, fondation, indépendance, complétude, etc.) ne se laissent pas ordonner de manière neutre. Tout choix d'un ordre de préférence est en même temps un choix philosophique, d'où l'impossibilité d'expliquer rationnellement les inclinaisons qui conduisent chacun à opérer ses libres choix :

As grounded in the interests of reason philosophical perfection involves a previous preference with respect to those interests [...]. In order to assign them their relative weights, we must already have adopted a particular class of philosophical systems. [Vuillemin 1986, 131]

La classification des systèmes est donc un préalable à la philosophie, qui ne commence qu'une fois que le libre choix d'une des classes est opéré, sans que la science elle-même puisse le justifier. À partir de ce choix et des démarches qu'il dicte, le travail organisateur de la philosophie peut tenter de s'appliquer de manière systématique à la science et aux pratiques sociales d'une époque donnée, et son rôle explicatif, unificateur et clarificateur peut se déployer. La division des tâches entre la philosophie et la science est donc une conséquence directe de cette impossibilité d'ordonnement que Vuillemin semble par contre envisager avant la moitié des années 1980.

Quelles qu'aient été les raisons précises de l'abandon du projet d'une Algèbre de la raison et d'une théorie logique de l'ordre l'accompagnant, il peut être intéressant de se demander quelles voies s'ouvraient à Vuillemin au début des années 1980, pour sauvegarder au moins une partie de son projet.

Une première solution aurait pu consister à maintenir la thèse selon laquelle, au cœur des mathématiques, il y aurait des décisions impossibles à justifier sur la base des seules mathématiques. Il aurait dû, en même temps, accepter l'idée d'une continuité fondamentale entre les connaissances de toutes sortes. Une telle continuité aurait demandé, en particulier, d'abandonner l'idée de la pureté de la connaissance mathématique eu égard à la raison. Une telle solution portait tout droit vers le projet quinién, son naturalisme et son holisme, déjà formulé partiellement dans *From a Logical Point of View*, paru en 1953 [Quine 1953]. La publication de *Word and Object* de Quine en 1960 [Quine 1960] et de *Relativity of Ontology and Other Essays* en 1969 [Quine 1969] ont pu, en ce sens, agir comme un repoussoir et orienter Vuillemin dans la direction opposée. Dans les années 1970, Vuillemin se penchera sur la critique du système quinién, avec d'autant plus d'énergie que son admiration pour cet auteur était grande. Peut-être donc que les « parutions récentes » dont il est question dans la quatrième de couverture, outre les livres de Curry déjà mentionnés, ont à voir avec les publications de Quine des années 1960.

Une deuxième solution aurait consisté à reconnaître que les mathématiques, si elles contiennent des décisions à leur principe, les prennent sur la base d'une analyse toute interne aux mathématiques mêmes. Le principe de la conservation optimale, l'exigence de moindre mutilation, la nécessité de préserver l'unité de la science mathématique dans sa pratique ont pu peser dans un sens ou dans l'autre au cours de l'histoire des mathématiques et déterminer un débat philosophiquement engagé surtout lorsqu'un théorème d'impossibilité demandait un renouvellement des outils mathématiques et la réorganisation de la pratique mathématique. Au moins deux de ces crises de la raison pure, la crise des mathématiques anciennes face à la découverte des grandeurs irrationnelles et la crise de la théorie naïve des ensembles au tournant du  $xx^e$  siècle, sont reconnues par Vuillemin dans son article « La substance » [Vuillemin 2001b]. Son analyse semble impliquer qu'après une crise, une révolution, il y a toujours une posture formelle qui s'installe par l'axiomatisation, et qui impose une norme à la pratique mathématique, en rejetant à la marge ce qui ne peut pas y être intégré. La nécessité de sauver l'unité de la pratique mathématique, ainsi que la possibilité d'une interprétation formelle des axiomes rendent toutefois possible la coexistence de styles mathématiques différents, à l'intérieur d'un même paradigme. Cette même exigence de reléguer les conflits métaphysiques à la périphérie des mathématiques, à leurs frontières avec la philosophie, ne peut toutefois se réaliser qu'en renonçant à l'inspiration logiciste revendiquée par Vuillemin page 2 de *La Philosophie de l'algèbre*, et en acceptant l'idée quiniénne que toute théorie s'exprime dans la logique classique des prédicats du premier ordre et que changer de logique c'est au fond changer de sujet, ce qui ne peut

qu'obscurcir l'analyse de la science. Isoler les mathématiques de la logique, en déniaut à celle-ci la prétention de fonder celles-là, c'est là une posture que Vuillemin semble avoir effectivement adoptée à la fin des années 1980.

Si la première solution que nous envisageons, lorgnant vers le naturalisme, tend à enlever à la philosophie tout rôle autonome, ne la laissant survivre que dans la forme d'une épistémologie naturalisée, la dernière solution conserve pour la philosophie une place irremplaçable, même si elle demande de révolutionner les rapports entre mathématiques et philosophie et donc entre science et philosophie. C'est par elle, donc, que Vuillemin a construit son chemin à partir des années 1980. Les libres choix, identifiés aux actes de foi (plus qu'aux questions de goût, évoquées en 1968 dans ses *Leçons sur la première philosophie de Russell*<sup>14</sup>) sont le domaine d'une philosophie qui n'est plus pensée comme critique générale de la raison, mais comme activité de constitution de systèmes philosophiques, une fois que les choix, les actes et les dispositions individuelles se sont exprimés.

## Bibliographie

CROCCO, Gabriella [2016], La classification des systèmes philosophiques et la logique, *Philosophia Scientiæ*, 20(3), 127–148, doi : 10.4000/philosophiascientiae.1208.

CURRY, Haskell [1952], *Leçons de logique algébrique*, Paris : Gauthier-Villars.

— [1963], *Foundations of Mathematical Logic*, New York : Macgraw Hill, 2<sup>e</sup> éd., dover, 1979.

CURRY, Haskell, HINDLEY, J. Roger *et al.* [1972], *Combinatory Logic, II*, Amsterdam : North-Holland.

QUINE, Willard Van Orman [1953], *From a Logical Point of View*, Cambridge, Mass. : Harvard University Press, 2<sup>e</sup> éd.

— [1960], *Word and Object*, New York : MIT Press.

— [1969], *Ontological Relativity and Other Essays*, Cambridge, Mass. : Columbia University Press.

---

14. « Au principe de toute philosophie il y a un jugement de goût portant sur ce qu'il convient de tenir pour réel. L'un choisit la durée ou l'angoisse, l'autre la lutte des classes. Pour Russell le réel est d'un autre ordre que ce que suggère l'anthropomorphisme. C'est la science qui en donne actuellement la meilleure image et je ne vois pas quelle objection sérieuse on peut opposer à ce que nous vérifions d'ailleurs chaque jour. La pensée d'un philosophe vaut ce que vaut son sens de la réalité » [Vuillemin 1968, 333].

- VUILLEMIN, Jules [1954], *L'Héritage kantien et la révolution copernicienne*, Paris : PUF.
- [1955], *Physique et métaphysique kantienne*, Bibliothèque de philosophie contemporaine—Histoire de la philosophie et philosophie générale, Paris : PUF, 2<sup>e</sup> éd., 1987.
- [1959], Le problème phénoménologique : intentionnalité et réflexion, *Revue Philosophique de la France et de l'Étranger*, 149, 463–470, doi : 10.2307/41088874.
- [1962], *La Philosophie de l'algèbre. Tome premier. Recherches sur quelques concepts et méthodes de l'algèbre moderne*, Épiméthée, Paris : PUF.
- [1968], *Leçons sur la première philosophie de Russell*, Philosophies pour l'âge de la science, Paris : Armand Colin.
- [1976], Kant aujourd'hui, dans *Actes du Congrès d'Ottawa sur Kant dans la tradition anglo-américaine et continentale tenu du 10 au 14 octobre 1974*, édité par P. Labège, F. Duchesneau & B. E. Morrisey, Ottawa, réimprimé dans [Vuillemin 1994, 11–30].
- [1984a], Les formes fondamentales de la prédication : Un essai de classification, *Recherches sur la philosophie et le langage*, 4, 9–30.
- [1984b], *Nécessité ou contingence. L'aporie de Diodore et les systèmes philosophiques*, Paris : Minuit ; Fondation Singer-Polignac.
- [1986], *What are Philosophical Systems ?*, Cambridge ; Londres ; New York : Cambridge University Press.
- [1994], *L'Intuitionnisme kantien*, Paris : Vrin.
- [2001a], Formalisme et réflexion philosophique, *Bulletin de la Société française de philosophie*, 94(3), 1–44.
- [2001b], *Quelle philosophie pour le XXI<sup>e</sup> siècle ?*, Paris : Gallimard, chap. La substance, Folio, 11–60.
- [inédit], *La Philosophie de l'algèbre. II. Structure, infini, ordre*, non publié.



# Vuillemin : Dedekind initiateur de l'Algèbre de l'Algèbre

*Hourya Benis-Sinaceur*

IHPST, Université Paris 1 Panthéon-Sorbonne,  
CNRS, ENS, Paris (France)

*Emmylou Haffner*

Laboratoire de mathématiques d'Orsay,  
Université Paris-Saclay, Orsay (France)

**Résumé :** Dans le deuxième volume, inédit, de *La Philosophie de l'Algèbre*, Jules Vuillemin fait une lecture inattendue et suggestive de l'œuvre de Richard Dedekind. Nous avons essayé de comprendre, en mobilisant les idées et outils de Vuillemin, les résultats de cette lecture. Ceux-ci nous semblent poser en particulier le problème des rapports entre histoire des sciences et philosophie des sciences. Notre article propose un diptyque pour présenter les questions que nous avons voulu poser au texte de Vuillemin. D'une part, nous analysons de quelle manière Vuillemin continue et approfondit le travail de Jean Cavailles. D'autre part, nous souhaitons accentuer la distance qu'établit Vuillemin entre l'histoire mathématique et son interprétation par les filiations conceptuelles qu'il propose comme essentiellement distinguées des relations historiques.

**Abstract:** In the second unpublished volume of *La Philosophie de l'Algèbre*, Jules Vuillemin gave an unexpected and suggestive reading of Richard Dedekind's works. We tried to understand the results of this reading by using Vuillemin's own ideas and tools. To us, these results seemed to question the relations between history of science and philosophy of science. Our paper proposes a diptych to present the questions we wanted to ask to Vuillemin's text. Firstly, we analyze how Vuillemin continued and deepened Jean Cavailles' work. Secondly, we aimed to emphasize the distance Vuillemin set between the history of mathematics and his interpretation of the conceptual parentage which he considered essentially distinct from historical relations.

# 1 Introduction

Le caractère inachevé du deuxième tome, resté à ce jour inédit, de *La Philosophie de l'Algèbre* de Jules Vuillemin<sup>1</sup> en rend la lecture encore plus ardue que celle du premier tome. Les rapprochements abrupts entre mathématiciens et philosophes par-dessus les frontières disciplinaires et par-dessus les siècles ont de quoi provoquer un choc salutaire et ouvrir des perspectives vertigineuses sur un horizon où Platon et Aristote, Descartes et Fichte voisinent avec les constructions purement arithmétiques des nombres entiers et les théorèmes de structure des algèbres abstraites. L'ambition est prométhéenne : vouloir saisir dans une vision synoptique surplombante *le sens ultime* des apports particuliers, divers et successifs, ressortissant aux mathématiques, à la logique, à la philosophie, à la métaphysique ou à la théologie, et cependant tous plus ou moins indirectement liés entre eux par des liens cachés et profonds. Il est bien question de se mettre en quête du sens ultime et non plus seulement, comme dans le premier tome de *La Philosophie de l'Algèbre*, de suggérer analogiquement, entre Lagrange (1736-1802) et Fichte (1762-1814) par exemple, des « affinités historiques qui tiennent au *Zeitgeist* » [Vuillemin 1962, 102, note 1]. Et il est bien question de « totaliser » la somme des connaissances, neutralisant ainsi les frontières, en vue d'une « philosophie pure » qui pose les questions décisives.

En première approche, dans un panorama qui reste malgré tout inchoatif, on décèlera principalement les entrelacs de deux lignes, une ligne mathématique allant de Gauss à Birkhoff en passant par Kummer, Riemann, Kronecker et Dedekind, et une ligne philosophique allant de Platon à Husserl en passant par Descartes, Kant et Fichte, sans oublier Frege qui reverse cet héritage subjectif. Cependant, le dédale des longs exposés techniques d'algèbre parsemés de vues philosophiques, qui interpellent d'autant plus qu'elles sont, elles, rarement explicitées et demeurent, pour la plupart, de brèves et succinctes indications, aboutit à un programme en quatre points très clairs :

1. Déterminer la signification de la logique, à l'origine, dans la philosophie grecque, sous-entendu remettre en question la paternité exclusive d'Aristote au profit de Platon (théorie des idées comme éléments simples de pensée, méthode de la dichotomie comme méthode de pensée interactive<sup>2</sup>).

---

1. [Vuillemin inédit]. Nous nous référerons à cet ouvrage par [PA2].

2. Vuillemin a publié, en 1998-1999, un long article, « La méthode platonicienne de division et ses modèles mathématiques » [Vuillemin 1998-1999]. À la fin de [PA2] Vuillemin écrit : « Enfin, des notions analogues aux théorèmes de décomposition propres aux treillis n'apparaissent-elles pas dans les systèmes philosophiques ? On fait généralement remonter à Aristote l'origine de la Logique, mais outre que sa *Métaphysique* et l'*Organon* lui-même se présentent très souvent comme une réponse aux difficultés du platonisme, deux arguments pressent le philosophe à chercher dans

2. Établir les éléments d'une logique philosophique, c'est-à-dire une logique qui ne se résume pas à la logique mathématisée moderne et en diffère par l'intention proprement philosophique d'en problématiser, y compris sur un plan métaphysique, les principales caractéristiques. Dans le tome I de *La Philosophie de l'Algèbre*, Vuillemin définit l'objet de sa « Philosophie de la logique » comme « élucidation des motifs rationnels qui justifient le choix de tel ou tel système axiomatique en Logique et en Mathématiques » [Vuillemin 1962, 505]. Ici est illustré en divers endroits le fait qu'un choix scientifique est extrinsèque à la science et relève de la métaphysique. On peut dire que le projet de Jules Vuillemin de « logique philosophique » fut prémonitoire de la tendance actuelle à construire, dans un geste contraire au positivisme du XX<sup>e</sup> siècle, la métaphysique de telle ou telle logique<sup>3</sup>, ou, plus généralement la métaphysique des sciences *versus* la métaphysique scientifique<sup>4</sup>.
3. Classer, en vertu de principes formels, les divers systèmes philosophiques, programme accompli dans les ouvrages *Nécessité ou Contingence* [Vuillemin 1984] et *What are philosophical systems?* [Vuillemin 1986].
4. Enfin, savoir ce qu'il en est de la nature de l'idée de Dieu, autrement dit si l'on peut conclure de *l'idée* de Dieu à *l'existence* de Dieu, programme métaphysique antithétique du positivisme scientifique et de la méthode phénoménologique de l'ἐποχή réalisé dans *Le Dieu d'Anselme* [Vuillemin 1971]. Vuillemin entendait en effet remettre à l'ordre du jour philosophique les questions d'existence et avec elles la question du fondement de l'objectivité. Il pense qu'en

mettant entre parenthèses la question de l'existence, la méthode phénoménologique empêche le développement de la

---

Platon la première théorie de la science. D'abord la théorie platonicienne de la connaissance se trouve, par rapport à la découverte de Pythagore et aux contestations de Zénon, dans une position assez semblable à celle de la Logique moderne par rapport à la Théorie des ensembles. En second lieu, tant les procédés de la méthode de division que l'obscur théorie des nombres idéaux cherchent à déterminer des méthodes logico-mathématiques spécifiques pour analyser la pensée » [PA2, 361].

3. C'est un aspect de la théorie des types de Per Martin-Löf, qui, philosophiquement, est une théorie de la signification [*theory of meaning*]. Celle-ci consiste en effet à donner une signification aux entités ou notions syntaxiques basiques d'un langage formel : les propositions, les jugements ou assertions, la *vérité* d'une proposition, qui se dit d'une proposition dont on connaît une preuve canonique, la *validité* d'une preuve d'un jugement, cette dernière étant « la notion métaphysique de vérité », par opposition à la notion de vérité d'une proposition. Martin-Löf plaide pour un « réalisme métaphysique » compatible avec l'intuitionnisme mathématique et phénoménologique. Voir [Martin-Löf 1987, nous soulignons].

4. Celle-ci défend et justifie l'option réaliste et essentialiste en philosophie et en science (voir les cours de Claudine Tiercelin au Collège de France, disponibles sur [www.college-de-france.fr/site/claudine-tiercelin/\\_course.htm](http://www.college-de-france.fr/site/claudine-tiercelin/_course.htm)), option qui fut aussi celle de Vuillemin.

philosophie critique [en tant que celle-ci cherche] le fondement et les limites de notre pouvoir de penser. [PA2, 361]

Ce quatrième volet du programme est théologico-mathématique, car l'idée d'infini est pour Vuillemin étroitement associée à l'idée de Dieu, comme elle l'a été pour la philosophie ancienne et classique, comme elle l'a été aussi pour le mathématicien Georg Cantor (1845-1918). Richard Dedekind (1831-1916), au contraire, a traité l'idée d'infini sur un plan strictement mathématique, ou strictement humain, indépendant d'une hypothétique garantie divine. Son « théorème » 66 de *Was sind und was sollen die Zahlen?* [Dedekind 1888] (ci-après dénommé *Zahlen*), censé démontrer l'existence d'un ensemble simplement infini, n'en appelle pas à Dieu, comme cela était le cas chez Descartes ou Spinoza, mais à son propre moi [*mein eigenes Ich*] et au monde de ses pensées [*meine Gedankenwelt*]. Or c'est un objectif important de la Critique générale ambitionnée par Vuillemin que

d'examiner systématiquement non seulement comme l'avait fait Kant si Dieu existe hors de nous, mais encore, si l'idée de Dieu, en nous, correspond à une véritable « réalité objective », [problème ontologique] retrouvé au détour de ses créations mathématiques par Cantor lui-même. [PA2, 361]

Dans cette perspective, Vuillemin fait une analyse extrêmement fine et détaillée de la proposition 66 de *Zahlen*. Nous y revenons plus bas. Mais il nous faut tout de suite avancer une observation préalable à garder à l'esprit : ce qui intéresse Vuillemin ce sont moins des filiations historiques linéaires et confinées aux domaines disciplinaires que des lignées conceptuelles transversales révélant des liens inédits<sup>5</sup>. Et son point de vue est commandé, semble-t-il, par la question globale suivante : que valent les données et acquis mathématiques pour la philosophie, ou que valent-ils philosophiquement, c'est-à-dire quelle est leur teneur philosophique ? Quels arguments fournissent-ils aux raisons du philosophe ?

Deux questions agitent l'esprit de Vuillemin : l'existence de l'infini *versus* l'existence de Dieu, et l'organisation du champ de la connaissance, depuis ses origines grecques, en classes de problèmes et types de réponses. Dedekind est l'auteur d'une définition mathématique de l'infini et d'une définition du concept qui recevra le nom de treillis, où Vuillemin découvre un principe

---

5. « La philosophie théorique doit être soigneusement distinguée de la Psychologie et de l'Histoire des sciences. Ces deux dernières disciplines n'étudient les connaissances que dans leur acquisition individuelle ou collective, telles que les présente le développement de l'expérience. La philosophie théorique, au contraire, ne tient compte que de l'ordre des choses mêmes, c'est-à-dire de la validité objective liée à la nature de nos *jugements* et non aux hasards ou aux bonheurs de l'invention » [Vuillemin 1962, 3, nous soulignons « jugements », qui indique l'adhésion de Vuillemin, ici, à une philosophie du jugement].

classificateur d'une grande fécondité. Aussi Dedekind fait-il figure de héros de ce tome II de *La Philosophie de l'Algèbre*, où deux chapitres entiers sont consacrés respectivement à sa théorie des idéaux et à sa théorie des ordinaux naturels (chap. X et XI) ; notre propos se restreindra à l'examen de quelques thèses avancées par Vuillemin à propos de l'œuvre de Dedekind. Mais dans une première partie, nous voudrions préciser en quoi et comment Vuillemin prolonge, élargit et approfondit l'œuvre de Jean Cavaillès. Confronter Vuillemin à Cavaillès permet de mettre en valeur, par contraste, l'originalité de ses vues. Ce fut, en tout cas, pour nous une manière de pénétrer quelque peu la pensée extraordinairement imbriquée de Jules Vuillemin.

Notre but dans cet article sera de suivre les différents chemins que trace Vuillemin en plaçant Dedekind au cœur de la naissance de « l'Algèbre de l'Algèbre ». Nous tenterons de saisir la signification philosophique de certains rapprochements qui nous ont parfois semblé vertigineux. En décortiquant les raisonnements de Vuillemin, nous serons parfois confrontés à notre propre lecture de Dedekind, qui est beaucoup plus naïve mais d'une certaine façon inverse de celle de l'auteur, puisqu'elle se veut proche de la lettre des textes. Sans que cela mette en question l'ambition philosophique de Vuillemin, il nous a paru important d'indiquer le décrochage délibéré qu'effectue l'interprétation par rapport aux écrits originaux. Par exemple, le rapprochement entre Descartes et l'algèbre structurale met assurément le doigt sur une séquence philosophique qu'il était important de mettre en vue. Néanmoins, il nous paraît utile de souligner que Vuillemin porte sur les textes mathématiques un regard philosophique, métaphysique même, qui les extrait de leur contexte pour tisser une immense tapisserie basée sur une architecture conceptuelle (re)construite par recollements de sources historiques. Il ne s'agit alors certainement pas de contester ou récuser la superstructure proprement philosophique qu'édifie Vuillemin, mais simplement d'attirer l'attention du lecteur sur les difficultés qu'un tel édifice peut poser à une compréhension primaire.

## 2 Vuillemin continuateur de Cavaillès

Le manuscrit de Vuillemin traite des notions de structure, d'infini et d'ordre. Comme Cavaillès et d'autres penseurs, Vuillemin considérait que l'infini est le cœur et le moteur de la mathématique moderne, sa marque distinctive par rapport à la mathématique classique, qui tout en développant les méthodes du calcul infinitésimal n'avait pas réussi à définir positivement un concept mathématique de l'infini [Vuillemin 1962, 519–532]. Pour commenter à son tour la construction par Dedekind de l'ensemble infini des nombres naturels, il se sert abondamment des *Remarques sur la formation de la théorie abstraite des ensembles* de Cavaillès [Cavaillès 1938a]. Mais seul, à notre connaissance, il porte un regard philosophique sur la structure d'ordre, et se sert de la notion de treillis comme schéma classificateur, applicable en

particulier à la collection des systèmes philosophiques. Ce fut l'un des puissants motifs de son intérêt pour les travaux de Dedekind sur les nombres et sur ce que ce mathématicien appelait les *Dualgruppen*, qui reçurent par la suite le nom de « treillis ». Et ce fut la raison pour laquelle Vuillemin a dénoncé « le dogmatisme » mathématique consistant à n'utiliser que la seule notion de groupe comme principe classificateur.

Dans ce manuscrit du tome II de *La Philosophie de l'Algèbre*, plus clairement peut-être que dans le tome I, où il récusait explicitement dès son introduction les limites de l'épistémologie historique régionalisée à la Bachelard, Canguilhem ou Cavaillès, Jules Vuillemin semble bien continuer, élargir, et radicaliser ou approfondir le travail de Jean Cavaillès. En quel sens ?

## 2.1 Méthodes structurales et théorie de la connaissance

En ce sens d'abord que pour « réaliser le programme critique de la connaissance » [PA2, 360], il faut préalablement examiner les méthodes mathématiques structurales, qui fourniront, et même constitueront les lignes de force d'une théorie de la connaissance renouvelée et, pour Vuillemin, le point d'appui pour ses préoccupations métaphysiques. Mais ce postulat général est monnayé de façon différente par Cavaillès et par Vuillemin. Soit l'exemple de l'œuvre de Dedekind qui fut un objet de réflexion commun. Cavaillès l'avait étudiée comme fondatrice, avec celle de Cantor, de la théorie des ensembles. À ce titre il avait analysé *Stetigkeit und irrationale Zahlen* [Dedekind 1872] comme « première utilisation de la méthode axiomatique en acte » [Cavaillès 1938a, 39], et *Was sind und was sollen die Zahlen?* [Dedekind 1888] comme « essai de réduction des mathématiques à la logique » [Cavaillès 1938a, 120], encore qu'il relevât le caractère d'« expérience arithmétique, analysée conceptuellement » de cet écrit. Cavaillès, qui s'appuyait probablement sur une remarque d'Ernst Zermelo (1871-1953)<sup>6</sup>, fut sans doute, en langue française, le premier à suggérer, prudemment, une interprétation logiciste de l'essai sur les nombres de Dedekind. Interprétation nuancée et rectifiée, dans *Méthode axiomatique et formalisme*, où Cavaillès distingue Dedekind des « logicistes stricts Frege, Peano et Russell » [Cavaillès 1938b, 53, 56–58]. Sur ce point, Vuillemin est plus nuancé encore, comme on le verra plus loin. Mais il voit en Dedekind moins l'initiateur de la théorie des ensembles que l'initiateur de « l'Algèbre de l'Algèbre ».

---

6. « La théorie des ensembles est la branche des mathématiques à laquelle il revient d'étudier mathématiquement les concepts fondamentaux de nombre, d'ordre et de fonction dans leur simplicité originaires, et par là, de développer les bases logiques de l'arithmétique tout entière et de l'analyse. Elle constitue de ce fait une partie intégrante de la science mathématique » [Zermelo 1908], cité dans [Cavaillès 1938a, 142].

De fait, Cavaillès travaille sur le patrimoine mathématique établi par Cantor, Dedekind, David Hilbert (1862-1943), Paul Bernays (1888-1977), Zermelo, pour ne citer que certains des acteurs dominants. Il a décrit les caractéristiques de ce premier structuralisme dans ses thèses de doctorat [Cavaillès 1938a,b] bien avant qu'elles ne deviennent des marques distinctives du bourbakisme que le lecteur retrouve dans le livre, *Les Grands Courants de la pensée mathématique*, publié par François Le Lionnais en 1948. Vuillemin connaît la période subséquente et s'appuie, pour les treillis, sur les travaux de Øystein Ore (1899-1068) et Garrett Birkhoff (1911-1996), présentés dans le livre de Eric T. Bell, *The Development of mathematics* [Bell 1940], nommément cité dans [PA2]<sup>7</sup>.

Comme Cavaillès, Vuillemin veut réformer la *Critique de la raison pure* en l'amputant de l'Esthétique transcendantale, c'est-à-dire en rejetant « le principe de la possibilité de l'expérience »<sup>8</sup>. Il s'agit non pas de rendre compte des phénomènes du monde mais d'observer le fonctionnement de la raison réduite à ses propres ressources. Or c'est Dedekind qui a clairement énoncé l'ambition de fonder la théorie des nombres indépendamment des notions d'espace et de temps, lesquelles constituaient pour Kant les formes *a priori* de la sensibilité, qui précèdent et rendent possible l'expérience :

En considérant l'Arithmétique (l'Algèbre, l'Analyse) comme une simple partie de la logique, j'exprime déjà que je tiens le concept de nombre [*Zahlbegriff*] pour totalement indépendant des représentations [*Vorstellungen*] ou intuitions [*Anschauungen*] de l'espace et du temps, et que j'y vois plutôt une émanation directe des pures lois de la pensée. [Dedekind 1888, 133]

Il s'agit bien de pensée pure ayant ses propres lois indépendantes du principe de la possibilité de l'expérience. Cavaillès cherchait certes à caractériser la pensée pure, mais sans faire des écrits de Dedekind une analyse aussi fouillée que celle que nous livre Vuillemin dans ce tome II, et surtout sans y situer le début d'une nouvelle Algèbre. Vuillemin, lui, explique que la théorie des idéaux de Dedekind « contenait en germe » l'idée d'une « Algèbre de l'Algèbre » [PA2, 287-287a].

Cette « algèbre au second degré » [PA2, 326], qui donne lieu chez Vuillemin à de si amples développements, porte non sur le comportement des éléments

---

7. Voir la contribution de S. Decaens dans ce dossier : « *La Philosophie de l'Algèbre*, tome II, un témoin de la circulation des treillis en France ».

8. Par cette expression Vuillemin renvoie à la thèse kantienne bien connue, selon laquelle les données de l'expérience sensible doivent se régler sur les formes *a priori* de l'intuition que sont l'espace et le temps et sur les catégories de l'entendement. Les catégories sont les conditions de possibilité de l'expérience, et « les conditions *a priori* d'une expérience possible en général sont en même temps conditions de la possibilité des objets de l'expérience » [Kant 1781,1787, trad. fr., 186]. Vuillemin note que « le principe de la possibilité de l'expérience vient subordonner notre pouvoir de pensée au fait de la thèse du monde » [PA2, 248].

d'une structure particulière, mais sur le comportement des structures elles-mêmes :

[L'Algèbre de l'Algèbre] s'intéresse non plus à des éléments particuliers comme l'ancienne Algèbre, non plus même à la structure abstraite qui relie des éléments non particularisés, comme l'Algèbre abstraite, mais [à] l'ensemble des relations entre une structure et les formes structurales qu'on y peut établir. [PA2, 329]

Dedekind en était bien un précurseur, notamment par sa démonstration que le nombre des classes d'idéaux d'un corps de nombres algébriques est fini [Dedekind 1894a]. Elle s'épanouit dans les travaux d'Emmy Noether (1882-1935) et d'Emil Artin (1898-1962), héritiers de Richard Dedekind et de David Hilbert. C'est le moment de floraison de ce qu'on appelait les « théorèmes de structure » [voir Benis-Sinaceur 1991, 189–191]. Justement Vuillemin accorde une place particulière au théorème de Wedderburn sur les algèbres linéaires associatives [Wedderburn 1908]<sup>9</sup>, dont Artin a souligné l'influence sur le développement de l'Algèbre moderne [Artin 1950]. Comme Artin, Vuillemin considère que ce théorème constitue la véritable césure dans ce développement.

Le théorème de Wedderburn est symptomatique de l'évolution de l'Algèbre moderne. En mettant en lumière les analogies qu'on peut établir entre les structures algébriques et les algèbres des structures, il préparait la voie à l'Algèbre générale, esquissée tant dans les travaux de Boole que dans ceux de Dedekind. [PA2, 329]

Généralisé par Artin aux anneaux [Artin 1927]<sup>10</sup>, ce théorème exhibe en effet la structure des algèbres sur un corps commutatif. Selon Artin, Wedderburn sut « trouver la véritable signification et la véritable importance de la structure d'algèbre simple » [Artin 1950]<sup>11</sup>. Selon Vuillemin, le théorème de Wedderburn préparait la voie à l'Algèbre générale. Jugement localisé pour le premier, vue plus générale pour le second.

« L'Algèbre générale, écrit Vuillemin, procède éminemment par concepts et sans construction [de concepts dans l'intuition] » [PA2, 333]. Aussi n'y a-t-il plus lieu de retenir la distinction entre mathématiques et philosophie léguée par Kant<sup>12</sup>. On peut supposer que le rôle majeur donné par Dedekind

9. Vuillemin énonce, p. 327, le théorème sous la forme suivante : « 1) Toute Algèbre linéaire associative sur un corps  $F$  est la somme d'une Algèbre semi-simple et d'une sous-Algèbre invariante nilpotente toutes les deux sur  $F$ . 2) Une algèbre semi-simple sur  $F$  ou bien est simple, ou bien est la somme directe d'Algèbres simples sur  $F$ . 3) Toute algèbre simple sur  $F$  est le produit direct d'une Algèbre de division et d'une Algèbre matricielle simple, toutes deux sur  $F$ , en incluant la possibilité que le module soit la seule unité d'un facteur. »

10. Une preuve plus simple fut donnée par Ernst Witt en 1930 et une autre preuve s'en trouve dans la *Moderne Algebra* de van der Waerden [van der Waerden 1930].

11. Une algèbre est simple si elle n'a pas de sous-algèbre invariante.

12. Pour Kant la philosophie procède par concepts, tandis que les mathématiques procèdent par construction de concepts dans l'intuition [Kant 1781,1787, trad. fr., 603 sq.].

aux concepts a contribué à l'initiative de Vuillemin de proposer une nouvelle manière de distinguer les deux disciplines, qui n'apparaissait pas dans le tome I de *La Philosophie de l'Algèbre*. Bien entendu, Dedekind n'est pour rien dans le contenu de cette nouvelle manière, que nous allons préciser.

## 2.2 La philosophie pure : théorie transcendantale de l'Algèbre abstraite et des treillis

Cavaillès considérait que l'étude des structures mathématiques permet d'examiner le fonctionnement de la raison en elle-même, isolée de ses sources et de ses applications mondaines, et qu'à ce titre elle est un objet pour le philosophe préoccupé de construire une théorie de la connaissance. Pour Cavaillès les mathématiques sont le modèle parfait de l'activité rationnelle [Cavaillès 1938b, 21]. Vuillemin est beaucoup plus radical. Il pense trouver dans l'algèbre universelle *l'expression mathématique* de la théorie de la connaissance. Il écrit :

L'Algèbre abstraite demeurerait un objet pour la théorie de la connaissance. L'Algèbre générale *n'est autre que cette théorie elle-même*, exprimée sous la forme symbolique des mathématiques. [PA2, 330, nous soulignons]

En commentant la *Wissenschaftslehre* de Fichte à la suite de son analyse de la théorie de Galois, Vuillemin avait souligné que « les structures formelles se lisent en filigrane sur les structures philosophiques » [Vuillemin 1962, 279]. Ici, il continue :

Si la philosophie, dans sa partie théorique, ne se confond cependant pas avec l'Algèbre générale, ce n'est point qu'un écart demeure entre leurs objets, puisqu'elles *étudient systématiquement les opérations de pensée en général sous la condition de leur validité objective* [nous soulignons], et qu'ainsi est rempli le rêve séculaire de *Mathesis universalis*, mais c'est que l'analyse transcendantale<sup>13</sup> doit manifester le rapport de ces enchaînements avec la conscience qui les pense, tandis que l'Algèbre proprement dite ne s'intéresse qu'à la cohérence exprimée du symbolisme, en faisant l'économie d'une référence constante au sens. [PA2, 330]

C'est écrire noir sur blanc que « les opérations de pensée en général » ne sont pas simplement modélisées par les opérations mathématiques, mais sont elles-mêmes la cible et l'outil de « l'Algèbre générale ». En étudiant celle-ci on comprendra comment user de celles-là pour édifier la « philosophie pure »,

13. Rapportons la précision donnée par Vuillemin : « Dans le langage kantien, *transcendantal* désigne le rapport à la possibilité de la connaissance, que Kant identifie avec la possibilité de l'expérience. J'entends ici ce mot en un sens libéré de cette restriction. Est transcendantale une connaissance en tant qu'elle est rapportée à l'acte de pensée qui la fonde » [PA2, 330, note 1, soulignement de Vuillemin].

dont le but théorique est de dresser le système des systèmes philosophiques. Thèse forte, qui semble ignorer la distinction que Vuillemin avait faite dans la note 1 de la page 262 du tome I de *La Philosophie de l'Algèbre*, entre « notion mathématique et notion philosophique d'opération <sup>14</sup> », et surmonter la barrière méthodologique qu'il maintenait entre philosophie et mathématique formelle <sup>15</sup>. Et c'est aussi faire du rapport à la conscience l'élément discriminant décisif entre la philosophie et l'Algèbre générale et, en même temps, ne considérer la signification d'une proposition mathématique que dans son rapport à l'activité ou à l'intentionnalité de la conscience en négligeant ce qu'il en est objectivement déposé dans les contenus mathématiques eux-mêmes, y compris ceux des sphères les plus générales et les plus abstraites. L'idée de contenu, qui permettait à Cavallès de laisser la conscience jouer, dans l'ombre, les seconds rôles, n'accroche pas du tout l'attention de Vuillemin :

En tant que cette question [Qu'est-ce qu'une connaissance ? c'est-à-dire quel ensemble de représentations exprimées en propositions mérite le nom de science ?] appartient à la philosophie pure, *on y fait abstraction de tout rapport à la matière* à laquelle s'applique ce système de connaissances et il ne demeure donc que la forme de la théorie. Sans doute est-ce Fichte le premier qui a clairement formulé ce problème en tentant de décrire *a priori* la constitution transcendantale d'une Théorie de la science. [PA2, 330, nous soulignons]

Cavallès avait, dans une ligne de pensée fidèle à Hilbert, laissé de côté « la machinerie transcendantale » pour se focaliser sur les contenus mathématiques eux-mêmes. L'objectivité de ces derniers n'était ni rapportée à l'esprit (psychologisme) ni produite transcendentale (constitution idéaliste). De même pour les processus épistémologiques d'idéalisation et de thématization considérés du point de vue de leurs effets. Comme Brunschvicg

14. Il promettait alors de revenir sur « les confusions qui se glissent » entre les deux notions. Dans un autre passage [Vuillemin 1962, 294 *sq.*], Vuillemin identifiait « concevoir », « juger », « raisonner » comme opérations de la connaissance pure. Puis il mettait en place la distinction entre « opérateurs objectifs » de la logique et « opérations transcendantales » telles que « je pense que », « je mets en doute que », « je juge que », etc. Vuillemin observe que ces dernières sont caractérisées par « la propriété d'être non réversibles, liées et non associatives » [Vuillemin 1962, 300].

15. « On aura soin de remarquer toutefois que les structures des opérations de la réflexion sont dépourvues des caractères principaux des opérations de la Mathématique formelle. L'associativité surtout leur fait défaut. De plus, le philosophe se propose d'examiner la légitimité des systèmes d'axiomes posés par le mathématicien : celui-ci suppose l'existence ou la déduit, celui-là la fonde. Cette double différence est l'occasion d'imaginer que si l'on peut espérer appliquer à la philosophie les préceptes de la méthode mathématique, il convient de chercher le fondement de ce droit non pas dans une correspondance particulière et pour ainsi dire matérielle entre deux disciplines aussi différentes, mais dans *un rapport très général et touchant aux principes les plus fondamentaux de la science* » [Vuillemin 1962, 476, nous soulignons]. Sur l'associativité dans *La Philosophie de l'Algèbre*, voir la contribution de Benoît Timmermans dans le présent dossier.

et, antérieurement, Spinoza, Cavaillès pense que la raison est *immanente* à ses produits. Le rapport à la conscience n'était, certes, pas totalement absent, surtout au début, dans *Méthode axiomatique et formalisme*, mais il était marginalisé et la conscience finalement dispersée en divers moments [Cavaillès 1947, 2<sup>e</sup> éd. 1960, 78]. Vuillemin, au contraire, s'intéresse à la constitution transcendante *de la forme* du système de connaissance qu'est l'Algèbre générale. Car c'est en cette tâche que consiste la philosophie pure :

[...] dans sa partie pure, la philosophie n'est que la théorie transcendante de l'Algèbre abstraite et des treillis. [PA2, 279]

Vuillemin est focalisé sur la conscience transcendante, car clairement, pour lui, ce qui distingue l'Algèbre générale de la philosophie « c'est non pas son objet, mais le rapport que celle-ci maintient et que celle-là oublie à la conscience constituante » [PA2, 333]. La conscience continue d'être une et pourvoyeuse de la synthèse unificatrice où se dévoile le sens. La question du sens est héritée de Husserl (comme chez Cavaillès), mais le sens n'est ni déterminé de manière précise ni inséré dans une théorie qui en développerait les caractéristiques. Vuillemin se limite à dire que les mathématiques ont le privilège de formuler de manière exacte ce que les philosophes aperçoivent de manière floue ou indécise, le philosophe conservant l'avantage d'exhiber le sens de ce qui est formulé.

Le philosophe ne dit pas autre chose que le mathématicien : il en montre seulement le sens. [PA2, 333]

Dans la postérité de Kant, Vuillemin évoque Fichte comme celui qui a, le premier, proposé une description *a priori* de la constitution transcendante de la théorie de la science, puis Husserl comme celui qui a mis la théorie des variétés au cœur de la logique et a ainsi ouvert la voie à un traitement logique du rapport entre structures et sous-structures ou parties qui les composent [PA2, 330]. Fichte et Husserl sont les maillons intermédiaires entre Descartes et les structures algébriques. Vuillemin promet en effet de montrer comment les théorèmes sur la décomposition de telle ou telle structure algébrique sont une expression précise et objective de la notion d'« analyse philosophique » et de l'idée cartésienne de réduction du complexe au simple énoncée dans la deuxième règle du *Discours de la Méthode*<sup>16</sup> :

On verra comment [...] le problème de la décomposition unique d'une théorie scientifique ou d'un système déductif permet de formuler de façon enfin précise et objective le problème classique de l'« analyse » philosophique et de donner un statut autre qu'imaginaire aux anciennes notions d'idées « simples » et complexes et de réduction du complexe au simple. Telle est la voie dans laquelle la Mathématique moderne cherche et détermine

16. « Diviser chacune des difficultés [...] en autant de parcelles qu'il se pourrait et qu'il serait requis pour les mieux résoudre. » De manière complémentaire, la troisième règle recommande d'ordonner progressivement ses pensées en considérant d'abord les objets les plus simples pour arriver à la connaissance des plus complexes.

la réponse à la question que Descartes posait implicitement en formulant la seconde règle du discours de la méthode. On peut retracer historiquement l'émergence de la conscience de ce problème aujourd'hui. Le théorème de Wedderburn l'illustre à propos de la structure des algèbres linéaires. [PA2, 331-332]

Pour surprenant que cela puisse paraître, au premier abord, rapprocher les théorèmes de structure avec la deuxième règle de la méthode de Descartes, et traiter sur un même plan Wedderburn et Descartes, ne manque ni d'audace ni de profondeur. Brusquement est ouverte une improbable et prodigieuse voie pour la pensée. On découvre là un de ces liens cachés que nul, sans doute, avant Vuillemin n'avait aperçu. Et l'on est confondu d'admiration. Et l'on se souvient de l'injonction de Cavaillès : creuser au plus profond, « dans le sol commun de toutes les activités rationnelles » [Cavaillès 1938b, 21]. Vuillemin donne à cette injonction une ampleur insoupçonnée. Pourtant, ne doit-on pas rappeler que la factorisation unique des nombres premiers date d'Euclide ? Que donc la règle de Descartes consigne pour le philosophe un geste caractéristique de la mathématique, dès son origine ? Que Descartes avait justement l'ambition de construire sur la base solide du raisonnement mathématique les règles pour « bien appliquer » son esprit ?

Tout cela, Vuillemin le savait, bien sûr. Mais son idée est surtout, ici, d'affirmer que l'affaire du philosophe est la même que celle de l'algébriste : exhiber la décomposition unique d'une structure en ses éléments. Et de même que « toute la connaissance mathématique est une classification des structures » [PA2, 357], de même toute la philosophie sera classification des systèmes philosophiques, une fois ceux-ci décomposés en leurs éléments constitutifs. Et c'est ce que Vuillemin réalise en ordonnant ces systèmes de manière arborescente, sur le modèle des treillis que Dedekind avait commencé à définir dès 1894 [Dedekind 1894b, 1897, 1900]. Mais la philosophie est aussi celle qui pose la question du simple et du complexe au niveau transcendantal, niveau que Vuillemin veut lire dans la démarche des mathématiciens depuis le fameux mémoire d'Abel sur l'impossibilité de la résolution algébrique des équations générales de degré supérieur à quatre [Abel 1826] [PA1, chap. III] :

à quelles conditions doit répondre un système déductif, pour être susceptible d'être, selon le vœu de Descartes, analysé en ses « éléments ». [PA2, 333]

Rien de tel ne se trouve dans les écrits de Cavaillès, qui n'établissait pas de parallélisme analogique entre mathématiques et philosophie.

### 2.3 La phénoménologie : l'idée d'invariance et le monde des essences

Vuillemin est moins sévère que Cavaillès à l'égard de la phénoménologie. Bien plus, il reprend ou prête à Husserl nombre d'aperçus intéressants. Par

exemple, il soutient que l'idée mère de la phénoménologie est de substituer à la méthode génétique, parfaitement représentée par Fichte, une méthode où le possible détrône le réel. Pour lui, ce qu'Abel a fait en mathématique, passer du réel au possible, de l'équation déterminée à sa structure, Husserl l'a effectué en philosophie en appliquant à la pensée les procédés de l'Algèbre des structures :

À son second moment l'Algèbre et la philosophie se rapprochent.  
On tente d'appliquer à la pensée les procédés de l'Algèbre des structures. Telle est l'idée mère de la phénoménologie. [PA2, 361]

Vuillemin lui-même pratique cette application et l'application inverse. Il note, on vient de le voir, que par sa théorie des multiplicités, Husserl a ouvert la voie à un traitement logique du rapport entre structures et sous-structures. Lui-même poursuit dans cette même voie en exploitant les théorèmes de structure en Algèbre et la théorie des treillis de Birkhoff. Il y a des affinités entre Vuillemin et Husserl et on est loin de l'autonomie du mathématicien par rapport à la logique chère à Cavaillès

Aussi Vuillemin a-t-il scruté l'intrication chez Husserl entre philosophie ou logique et mathématique. Il a mis en lumière (chap. IX), d'une manière qui ne doit rien à la tradition phénoménologique, l'utilisation par Husserl du concept mathématique d'invariant. Il observe notamment que le programme d'Erlangen de Felix Klein et la phénoménologie « ont en commun de rapporter l'idée d'objectivité à celle d'invariance » [PA2, 268]. Et tandis qu'il affirme d'un côté que les mathématiques structurales définissent l'objectivité par l'invariance à l'intérieur d'une classe d'équivalence [PA2, 37], il souligne de l'autre que la variation eidétique n'est pas liée à la thèse du monde, n'obéit pas au « principe de la possibilité de l'expérience », ce pourquoi elle autorise un usage non restreint du concept. Celui-ci n'est plus, comme chez Kant, contraint par les conditions de réalité imposées par l'objet qui doit le remplir, et qui est lui-même soumis en retour aux lois de la pensée. Par une variation libre et quelconque de ses objets, nous pouvons nous représenter l'essence d'un concept indépendamment de l'application à la réalité physique ou sensible. Aussi pourrait-on « comparer, écrit Vuillemin, la méthode phénoménologique à l'Algèbre pure : elle développe la théorie pure des formes sans se soucier de leurs réalisations » [PA2, 264]. Plus précisément :

De même que l'Algèbre moderne a libéré les structures de groupe, d'anneau, de corps et surtout d'ensemble de la gangue des applications où ces structures étaient engagées, de même la phénoménologie a libéré les structures matérielles, qualitatives et significatives des analyses empiriques où les maintenait la thèse du monde, c'est-à-dire le préjugé de la possibilité de l'expérience ou de l'objet naturel donné *hic et nunc*. [PA2, 265]

La variation eidétique est « la méthode qui nous fait passer de l'existence à l'essence, du fait à l'Eidos » [PA2, 253]. Pour Vuillemin, Husserl a eu le mérite de rouvrir à l'enquête philosophique le monde des essences, dont Cavaillès

s'était détourné, et plus particulièrement, en ce qui concerne la logique, le monde du jugement analytique. Husserl a ainsi élargi le périmètre de l'héritage kantien. Mais il reste pour Vuillemin à faire la critique de cet élargissement.

La méthode que nous proposons, écrit-il, est entièrement différente de la méthode descriptive de Husserl. Elle est critique et procède axiomatiquement conformément au précepte d'Abel. [PA2, 268i]

Ce que Vuillemin appelle ici le « précepte d'Abel » renvoie notamment à son commentaire de la page 221 du tome I de *La Philosophie de l'Algèbre*, où il oppose les démonstrations générales aux démonstrations particulières par le fait qu'elles « ont trait au possible et partent du seul concept, en ignorant les conditions restrictives de la sensibilité ». Vuillemin reproche en effet à Husserl d'accorder « une place disproportionnée » à l'intuition eidétique. Celle-ci ne fait pas bon ménage avec le concept pur. La validité des essences doit donc être fondée autrement, et, pour ce qui concerne les régions formelles, « en examinant à quelles conditions une essence doit répondre pour correspondre à une réalité ». Comme en d'autres occasions, la démarche proposée est de type transcendantal. Vuillemin illustre son propos par l'exemple philosophique qui le hante, la preuve ontologique de l'existence de Dieu. Nous avons l'idée de Dieu, mais pouvons-nous de cette idée conclure à l'existence de Dieu. Ou, en termes cartésiens, peut-on de la réalité objective de l'idée de Dieu conclure à sa réalité formelle ? Question que Vuillemin proposait dans son tome I [Vuillemin 1962, 221] comme « objet suprême de la Critique générale » et dont il traite dans sa longue conclusion en examinant les réponses d'Aristote, de Descartes et de Fichte [Vuillemin 1962, 506–518]. Question qu'il repose dans le tome II, notamment lorsqu'il exprime sa volonté d'annuler l'ἐπιτομή husserlienne et de restaurer le problème de l'existence, tout particulièrement celui de l'existence de Dieu, qui fera l'objet d'une analyse détaillée dans *Le Dieu d'Anselme*. C'est, en un sens, le retour à Descartes pour qui la question de Dieu faisait partie intégrante de la philosophie, tandis que Kant l'avait évacuée hors des limites de la raison pure, montrant « qu'il est impossible de démontrer, *par un procédé théorique*, l'existence de Dieu » [Vuillemin 1962, 216].

## 2.4 Histoire *versus* métaphysique

Ce problème, qui demeure au cœur du tome II de *La Philosophie de l'Algèbre*, en arrière-plan des longs exposés techniques qui déploient une certaine évolution des mathématiques depuis les congruences de Carl Friedrich Gauss (1777-1885), marque une différence capitale entre Vuillemin et Cavaillès. Vuillemin n'entend pas, en effet, limiter au noyau central qu'y représente la théorie de la connaissance le projet d'une « philosophie théorique », « rationnelle et systématique », susceptible de formuler de manière précise toute question philosophique, de quelque ordre qu'elle soit, théorique ou pratique. La liaison entre théorie et pratique était forte mais totalement implicite dans les écrits de Cavaillès. C'est le rapport établi avec son combat

de résistant qui la mettait en lumière. Vuillemin, lui, la met au cœur de son rationalisme et au sommet de sa philosophie. Aussi le point névralgique de sa réforme du kantisme consiste-t-il, non à lier l'entreprise critique à l'enquête historique comme l'avait fait Cavaillès, mais à rétablir la métaphysique dans ses droits philosophiques en l'incluant dans le cercle de ce qu'il nomme « la Critique générale ». Pour Vuillemin, la mathématique structurale n'évince pas la métaphysique, elle lui offre les moyens de s'exprimer distinctement. C'est dans cette perspective que la question du rapport entre mathématiques ou physique et métaphysique a de manière essentielle occupé la réflexion de Vuillemin : il y a consacré des articles sur Pythagore et Platon, un livre relatif à Descartes, un autre relatif à Kant. Ici, dans ce tome II de *La Philosophie de l'Algèbre*, il soutient, par exemple, que Kant avait eu, déjà, l'idée de « l'identité d'une structure formelle » dans son analyse de la catégorie de la modalité [PA2, 210]. Il faut prendre « structure formelle » en un sens élargi pour comprendre, ou croire comprendre. Par ailleurs, le lien de la mathématique vers la métaphysique est établi pour Leopold Kronecker (1823-1891)<sup>17</sup>, et aussi pour Dedekind : nous y reviendrons. Le lien de la métaphysique vers les mathématiques est remarquablement établi dans le cas de Husserl. Mais Husserl a cru pouvoir atteindre « les choses mêmes » indépendamment de toute théorie métaphysique [Vuillemin 1962, 504]. Or le programme de Vuillemin est, au contraire, de voir en la Métaphysique le « centre dont tout dépend » [Vuillemin 1962, 505]. Tandis que Cavaillès restait attaché à la mathématique classique tout en élaborant une épistémologie semi-intuitionniste, semi-hégélienne, Vuillemin prend acte de la pluralité des axiomatiques pour un même concept mathématique, ou pour des concepts parallèles tels ceux d'ensemble et de *species*, de la pluralité des logiques<sup>18</sup>, et de l'importance donnée à l'initiative du choix par le concept de *species* de Brouwer. Cela lui permet de joindre la rigueur de la déduction mathématique à la liberté métaphysique. Et cela *en théorie et en droit*, et pas seulement en fait comme dans le cas de Cavaillès, chez qui c'est le lecteur qui retrouve cette alliance en rapportant son action dans la Résistance à ses écrits théoriques. Dans le tome I de *La Philosophie de l'Algèbre*, nous pouvions déjà lire :

Toute connaissance, quelle qu'elle soit, est de part en part métaphysique, en ce qu'elle implique en son principe des décisions et des choix qui n'appartiennent pas eux-mêmes à la juridiction interne de cette connaissance. [...] Toute science est engagée et partielle. Il y a plusieurs mathématiques, selon les exigences formulées eu égard aux procédés de construction et aux axiomes d'existence. [...] La tâche [de la philosophie] consiste uniquement à élucider les motifs rationnels qui justifient le choix de tel ou tel système axiomatique en Logique et en Mathématique.

17. « Rien, sinon une idée métaphysique, ne nous contraint *a priori* à admettre le caractère intuitif de l'ensemble des entiers » [PA2, 34, 214].

18. L'Algèbre générale a « introduit dans la logique le principe de tolérance propre aux sciences formelles » [PA2, 360].

[...] [La philosophie] n'est pas séparable de la Métaphysique et son objet général consiste non pas à tenter d'ignorer les choix métaphysiques, mais à en étudier les motifs *en rapport avec la liberté de l'homme*. [Vuillemin 1962, 505–506, nous soulignons]

Cette liberté conçue au plan métaphysique, Vuillemin la superpose à la liberté créatrice du mathématicien revendiquée par Cantor et par Dedekind. Pour lui la première justifie philosophiquement la seconde.

### 3 Vuillemin praticien de l'œuvre de Richard Dedekind

Vuillemin crédite Dedekind d'avoir introduit « une conception nouvelle des opérations algébriques et des structures », une conception qui conduit à l'Algèbre de l'Algèbre. Celle-ci est manifeste d'abord dans l'extension de l'opération de divisibilité à des structures plus abstraites qui rendent possible un théorème de factorisation unique en éléments premiers, et commence avec la théorie des idéaux, qui généralise aux entiers algébriques les lois de l'arithmétique des nombres entiers positifs. Cette conception nouvelle est manifeste, ensuite, dans la création des treillis, auxquels Vuillemin attribue le rôle unificateur auparavant tenu par la théorie des groupes.

Vuillemin considère que les mathématiques modernes ont absorbé la logique dans leurs tentatives de s'auto-fonder. Pour lui, issue de la conceptualisation de l'ordre cristallisée dans la notion de chaîne inventée par Dedekind, la théorie des treillis « fait apercevoir l'infrastructure logique des mathématiques » [PA2, 330]. Plus encore, « elle fournit le modèle cohérent et exact de l'étude de la logique, et elle remplit enfin le programme que s'était fixé Aristote dans *l'Organon* ». L'Algèbre générale, alors, « n'est autre que [la] théorie [de la connaissance], exprimée sous la forme symbolique des mathématiques ». Or dans le chemin que retrace Vuillemin vers la théorie des treillis et l'Algèbre de l'Algèbre, qu'il suit via l'émergence et le développement des structures abstraites en mathématiques, Dedekind joue un rôle clef : ses travaux en théorie des nombres inaugurent l'avancée vers l'algèbre des structures, ses travaux fondationnels lient mathématiques et logique, et il est le premier à introduire la notion de treillis.

Et bien que Vuillemin affirme que l'avènement de l'Algèbre générale provient du croisement de l'algèbre abstraite et de l'algèbre de la logique, il la considère comme le produit d'une appropriation de la logique par les mathématiciens sans trop considérer, inversement, la logique du point de vue de sa mathématisation, ce qu'était pourtant à l'origine la perspective de George Boole (1815-1864)<sup>19</sup> et de ses successeurs jusqu'à Tarski (1901-1983) et au-delà.

---

19. On peut lire dans [Boole 1992, 21, nous soulignons] : « Le but de ce traité est d'étudier les lois fondamentales des opérations de l'esprit par lesquelles s'effectue le

### 3.1 Dedekind et la logique

Vuillemin a une position nuancée en ce qui concerne le prétendu logicisme de Dedekind<sup>20</sup>. D'une part, il est clair pour lui que « l'analyse logique, pour elle-même, n'est pas le propre de l'*Essai [Zahlen (Nda)]* » [PA2, 313]. Lecteur de Frege et averti par ce que ce dernier en dit dans la préface au premier volume des *Grundgesetze der Arithmetik*<sup>21</sup>, il se garde bien de prendre la fameuse assertion de Dedekind sur l'appartenance de l'Arithmétique, l'Algèbre et l'Analyse au domaine de la logique, pour une profession de foi logiciste [PA2, 304]. Et à propos de la définition 73, où Dedekind explique que les éléments du système des nombres ordinaux sont libérés de « tout contenu » et qu'en ce sens, on peut à juste titre dire des nombres qu'ils sont « une libre création de l'esprit humain » [Dedekind 1888, 134], Vuillemin observe justement que

[...] cette liberté s'oppose à une conception « logiciste » de l'Arithmétique, telle que l'a par exemple conçue Frege. Et bien que dans la préface à la première édition, Dedekind ait regardé l'Arithmétique comme une partie de la Logique, Frege ne s'est pas trompé sur le sens de cette déclaration : elle tendait seulement à réfuter les intuitionnistes qui veulent fonder le nombre sur la représentation du temps et de l'espace, alors qu'il « résulte immédiatement des lois de la pensée », mais d'une pensée regardée comme créatrice, toujours susceptible d'introduire des concepts nouveaux, et ne se soumettant qu'à la seule condition d'une *démonstration rationnelle* [nous soulignons] et qu'au seul impératif : « Dans la science, rien de ce qui peut être prouvé ne doit être accepté sans preuve. » [PA2, 304]

Du reste, comme nous l'avons montré<sup>22</sup>, c'est en l'arithmétique, non en la logique, que Dedekind voit une structure de la connaissance rationnelle et un outil primordial de perception du monde.

Mais d'autre part, Vuillemin interprète la construction des idéaux et la définition des ordinaux finis comme une construction mathématique à l'aide

---

raisonnement ; de les *exprimer dans le langage symbolique d'un calcul*, puis, sur un tel fondement, d'établir la science de la logique et de constituer sa méthode. » De même dans la préface au premier tome des *Vorlesungen über die Algebra der Logik* [Schröder 1890-1905], Ernst Schröder (1841-1902) souligne que le traitement calculatoire de la logique l'a libérée des chaînes où la maintenait le langage vernaculaire.

20. À ce sujet, on pourra consulter, entre autres, [Kitcher 1986], [Stein 1988], [Tait 1997], [Ferreirós 1999], [Demopoulos & Clark 2005], [Detlefsen 2011], [Benis-Sinaceur, Panza *et al.* 2015], [Ferreirós à paraître].

21. « Monsieur Dedekind est aussi d'avis que la théorie des nombres serait une partie de la logique ; mais son essai contribue bien peu à étayer cette opinion, car les expressions “Système” et “une chose appartient à une chose” qu'il utilise ne sont guère usuelles en logique ni ne sont réductibles à quelque chose reconnue comme logique » [Frege 1893, VIII, nous traduisons].

22. Voir [Benis-Sinaceur, Panza *et al.* 2015], [Benis-Sinaceur 2017, 187–198], l'introduction de [Dedekind & Weber 2019] et [Haffner & Schlimm à paraître].

d'une opération qu'il conçoit comme une opération logique : l'inclusion. « La logique, écrit-il, est la science de l'inclusion » [PA2, 286]. Plus précisément, Vuillemin considère que dans sa théorie des idéaux, la traduction par Dedekind de la division entre éléments par l'inclusion entre classes est « la véritable raison mathématique de la subordination des mathématiques à la logique<sup>23</sup> ». Vuillemin ne dit pas que Dedekind revendique cette subordination, mais qu'il en fournit « la raison mathématique ». C'est l'opinion propre de Vuillemin que véhicule cette analyse, qui fait fond sur la correspondance entre PPCM et intersection et PGCD et union d'ensembles. Pour Vuillemin cette correspondance entre opérations arithmétiques (division, PPCM, PGCD) et opérations ensemblistes (inclusion, intersection, union) permet la construction de structures « mi-logiques, mi-algébriques, qui rendent possible l'interprétation pour ainsi dire *minima* du théorème de décomposition unique » [PA2, 326]. La théorie des ensembles est ainsi considérée comme une théorie logique, ou au moins comme le témoin essentiel de l'appropriation de la logique par les mathématiciens. Comme on l'a vu plus haut c'était bien l'avis de Zermelo. Et c'était déjà, dans un contexte antérieur différent, l'avis de Hilbert.

Ce n'était en revanche clairement pas l'avis de Dedekind. Celui-ci place en effet au fondement de *Zahlen*, le concept d'*Abbildung*, préféré au terme de *Substitution*, qu'il avait d'abord utilisé en suivant Galois dans l'étude qu'il lui a consacrée [Dedekind 1856-1858]. Le contexte est algébrique. Il s'agit en l'occurrence d'une généralisation du concept mathématique de fonction, puisqu'elle consiste à « transformer » les éléments d'un système  $S$  en éléments d'un système  $S'$  (qui peut éventuellement être égal à  $S$ ), ou à « représenter » ceux-là par ceux-ci. Le but est de pouvoir transporter une structure algébrique d'un domaine à un autre. L'*Abbildung* de Dedekind *n'est pas* l'application de la théorie des ensembles, celle-ci étant définie par son graphe quand celle-là est définie comme correspondance entre deux ensembles. L'*Abbildung* serait plutôt un ancêtre de la flèche des catégoriciens. Cependant, Dedekind présente l'*Abbildung* comme l'expression mathématique de « la capacité de l'esprit à relier des choses à des choses, à faire correspondre une chose à une chose, ou à représenter une chose par une autre, capacité sans laquelle aucune pensée en général n'est possible » [Dedekind 1888, 134–135]. Peut-être est-ce sur cette caractérisation que Vuillemin établit l'identité foncière entre opérations de pensée (opérations logiques) et opérations mathématiques, gommant, dans le tome II de *La Philosophie de l'Algèbre*, leurs différences, évoquées dans le tome I. On comprendrait, dans ce cas, pourquoi il écrit qu'algèbre et philosophie ont le même objet : les opérations de la raison, que

---

23. « En même temps qu'on abstrait la propriété de divisibilité des domaines concrets auxquels elle se trouvait primitivement mêlée, on aperçoit les structures qui la déterminent. Ces structures ont trait essentiellement aux idées de chaîne et d'idéal développées par Dedekind, et qui fournissent la raison mathématique de la subordination des mathématiques à la logique. Une correspondance abstraite s'établit entre l'opération de division et celle d'inclusion et, parallèlement, entre les opérations respectives de p.p.c.m et d'intersection, de p.g.c.d et d'union » [PA2, 325–326].

la première traduit en termes mathématiques et dont la seconde montre le sens. On rappellera toutefois que le contexte de travail dans lequel Dedekind généralise la notion de fonction en celle de représentation d'un élément par un autre est arithmétique et algébrique, et que son idée fondamentale était que l'arithmétique constitue, en elle-même et par elle-même, une structure formelle de notre expérience sans qu'aucune médiation logique préalable ne soit requise. Ce sont les nombres, non pas l'espace et le temps, qui organisent notre perception des choses du monde extérieur. Ce sont les nombres, non pas les catégories logiques, qui sont l'attribut essentiel et immédiat de la pensée.

Dans un autre passage, Vuillemin s'exprime différemment. Il écrit que la logique est à la théorie des ensembles ce que la philosophie de Platon est à la découverte des irrationnels [PA2, 361]. Ce qui signifie, entre autres, que la logique a permis une réponse aux paradoxes de la théorie des ensembles. Mais là encore, Dedekind n'y est pour rien, ayant laissé à sa postérité le soin d'apporter cette réponse pour *Zahlen*, dont seule la perfection mathématique lui importait. C'est par une lecture fortement rétrospective qu'on veut voir dans Dedekind un représentant de la tendance logiciste éminemment représentée par Frege et Russell.

Si Vuillemin lit les travaux de Dedekind comme s'intégrant dans un mouvement qui subordonne les mathématiques à la logique, c'est parce qu'il considère l'inclusion comme une opération logique. Pour les mathématiciens, en général, l'inclusion,  $\subseteq$ , est une relation d'ordre entre ensembles, comme  $\leq$  est une relation d'ordre entre nombres, et ce qui est proprement logique est l'implication  $\Rightarrow$ . De fait, il y a une relation entre inclusion et implication, connue depuis Aristote<sup>24</sup>, et qui est sans doute responsable de l'idée répandue que l'inclusion est une relation logique. Or l'usage de l'inclusion entre ensembles et sous-ensembles est le « tour » par lequel Dedekind retrouve la factorisation unique des idéaux en idéaux premiers dans un anneau dont tout idéal non nul est inversible. Dans la théorie des idéaux, l'inclusion intervient en tant qu'extension de la divisibilité. Pour deux idéaux  $\mathfrak{a}$  et  $\mathfrak{b}$ , Dedekind dit que  $\mathfrak{a}$  divise  $\mathfrak{b}$  si  $\mathfrak{b}$  est inclus dans  $\mathfrak{a}$ , ce qui lui permet de montrer que l'on peut exprimer la divisibilité des entiers algébriques en termes d'inclusion d'idéaux et ainsi transférer l'étude de la divisibilité des entiers du corps de nombres algébriques à celle des idéaux de ce corps, et y retrouver les lois de divisibilité connues pour les entiers rationnels (en particulier, le théorème de décomposition unique en éléments premiers<sup>25</sup>). Ainsi, définir la division par l'inclusion suppose que Dedekind conçoit, inversement, l'inclusion comme une nouvelle notion de divisibilité, c'est-à-dire une nouvelle notion arithmétique.

24. On peut caractériser l'inclusion comme suit :  $A \subseteq E$  ssi  $(\forall x)(x \in A \Rightarrow x \in E)$ . Inversement, on peut exprimer une implication par une inclusion. Considérons pour ce faire un ensemble  $E$ , deux propositions  $P$  et  $Q$  portant sur les éléments de  $E$ , alors l'implication de  $P$  vers  $Q$  équivaut à l'inclusion :  $((\forall x \in E)(P(x) \Rightarrow Q(x)))$  ssi  $\{x \in E \mid Q(x)\}$ .

25. Dedekind introduit également des notions de PPCM et PGCD comme intersection et union d'idéaux, qui guideront plus tard son invention des treillis.

Naturellement, l'inclusion joue un rôle fondamental dans *Zahlen*, notamment pour la définition du concept de chaîne : est une chaîne une partie  $K$  d'un ensemble  $S$  muni d'une représentation  $\phi$  dans lui-même telle que  $\phi(K) \subseteq K$ . La chaîne engendrée par  $K$  est l'intersection de toutes les chaînes contenant  $K$ . L'ensemble des entiers naturels  $N$  est alors un ensemble simplement infini, c'est-à-dire un ensemble susceptible d'une représentation *semblable* (une injection)  $\phi$  en lui-même telle qu'il soit la chaîne d'un élément distingué, appelé 1, qui n'est pas contenu dans son image  $\phi(N)$ . Les ordinaux de Dedekind sont définis en termes d'ensembles ; ce sont des éléments abstraits dénués de tout contenu, construits d'après le modèle de la suite des nombres familiers. Vuillemin observe également que ce que Dedekind appelle un « idéal principal » généré par un entier  $\alpha$  (c'est-à-dire les multiples de  $\alpha$ ) forme une chaîne [PA2, 292]. Ce n'est, en revanche pas une observation que l'on retrouve chez Dedekind. Bien que l'on ait du mal à imaginer que Dedekind ne l'ait pas vu, rien ne suggère que cela ait été moteur dans l'introduction du concept de chaîne.

Notons, en passant, que Dedekind définit l'inclusion en utilisant un symbole différent de celui que nous a légué Ernst Schröder (1841-1902), dont Dedekind mentionne le *Lehrbuch der Arithmetik und Algebra* [Schröder 1873]<sup>26</sup>, paru en 1873, et non pas les *Vorlesungen über die Algebra der Logik* [Schröder 1890-1905], parues entre 1890 et 1905<sup>27</sup>. L'interprétation logique de l'inclusion et de la construction des nombres découle sans doute de l'appréciation de Schröder, qui, dans le troisième volume des *Vorlesungen über die Algebra der Logik*, salue en Dedekind celui qui a « comblé une grosse et importante lacune, qu'aucun auteur, y compris [lui-même Schröder] dans [son] *Lehrbuch der Arithmetik und Algebra*, n'avait remplie » [Schröder 1890-1905, 349, nous traduisons]. Schröder juge en effet que Dedekind a découvert la source logique de l'Arithmétique en définissant logiquement les nombres entiers et, surtout, en démontrant logiquement le principe de l'induction complète :

C'est le mérite de Dedekind d'avoir, pour la première fois, dépouillé de son aspect arithmétique accessoire le procédé de démonstration bien connu sous le nom d'« inférence de  $n$  à  $n+1$  », d'en avoir identifié le noyau logique, et d'avoir ainsi *formulé* le « théorème de l'induction complète » comme un théorème de logique générale. [Schröder 1890-1905, 355, nous traduisons, soulignement de l'auteur]

---

26. Schröder y définit le nombre naturel cardinal comme « une somme d'unités », ce qui est très loin de la définition des ordinaux finis de Dedekind. D'autre part, Schröder utilise le terme *Abbildung* dans un sens totalement différent de celui que lui imprime Dedekind ; il s'en sert pour exprimer qu'un nombre cardinal est l'image de la pluralité des choses dont il est le nombre.

27. Des *Vorlesungen über die Algebra der Logik*, Dedekind a lu au moins le premier tome entre 1890 et 1895, comme nous en informe son *Nachlass* – donc bien après la conception de *Zahlen*.

Vuillemin insiste à son tour sur « la forme généralisée » [PA2, 294] de l'induction mathématique donnée par Dedekind [*Zahlen*, propositions 59 et 60]. Le texte de Vuillemin ne le dit pas, mais longtemps, la lecture de Schröder s'est imposée contre celle de Frege, plus juste selon nous et plus conforme à l'esprit de l'écrit de Dedekind et au contexte de son élaboration. Et il est clair que le programme de Dedekind était celui d'une Arithmétique générale, non d'une Logique générale.

La lecture rétrospective et surplombante que fait Vuillemin des travaux de Dedekind, très largement influencée par celle de [Bell 1945], dans laquelle Dedekind est un « génie perspicace et prophétique » [Bell 1945, 258], l'amène à prêter à Dedekind une vision très générale que celui-ci n'exprimait pas – qui, en fait, ne l'intéressait pas vraiment. En particulier, si les similarités conceptuelles entre l'ordre défini par une chaîne dans *Zahlen* et celui défini dans un treillis peuvent nous sembler évidentes, il n'est pas certain qu'elles le furent immédiatement pour Dedekind. Grâce à son *Nachlass*, on sait aujourd'hui que ce n'est vraisemblablement qu'au moment de sa lecture de l'*Algebra der Logik* de Schröder, plusieurs années après la parution de *Zahlen*, qu'il s'est intéressé à la structure de treillis des opérations ensemblistes, et ce alors même qu'il avait déjà longuement travaillé sur le sujet dans le contexte de la théorie des nombres algébriques<sup>28</sup>.

### 3.2 Dedekind vers l'Algèbre générale

Reposant sur une notion d'ordre plus simple, plus générale et marquant une nouvelle étape d'abstraction des structures où sont étudiés les rapports entre une structure et ses sous-structures (par exemple, « on démontre que les sous-algèbres d'une algèbre abstraite quelconque forment un treillis complet » [PA2, 344]), les treillis offrent, pour Vuillemin, le nouveau principe unificateur des mathématiques. Ils sont la meilleure expression de l'idée abstraite de structure et mènent à l'Algèbre de l'Algèbre. Vuillemin voit dans la théorie des treillis le résultat de l'abstraction grandissante des structures étudiées par les mathématiques, de l'adaptation des moyens du raisonnement mathématique à la considération de structures « mi-algébriques, mi-logiques » naissant des extensions de l'inclusion et de la théorie des idéaux, et par là du théorème de factorisation unique en éléments premiers qu'il s'agissait alors de pouvoir interpréter minimalement, c'est-à-dire abstraitement. Ainsi, « le domaine primitif de l'Algèbre était étendu [...] [et] une nouvelle Algèbre naissait qu'on peut légitimement appeler Algèbre générale » [PA2, 326].

Rappelons la définition d'un treillis. Un treillis est un ensemble  $E$  muni de deux lois internes  $\vee$  et  $\wedge$  telles que :

- $\vee$  et  $\wedge$  sont commutatives, associatives et idempotentes.

---

28. Plus exactement dans le contexte de la théorie des  $\mathbb{Z}$ -modules, que Dedekind utilise en théorie des nombres. Dedekind le rappelle dans l'introduction de ses travaux sur les treillis (voir plus bas, p. 181).

- $\vee$  et  $\wedge$  vérifient la loi d'absorption :  $a \vee (a \wedge b) = a = a \wedge (a \vee b)$ .
- On définit d'une relation d'ordre :  $a < b \iff a \vee b = b$  (ou  $a \wedge b = a$ ).
- Pour cette relation d'ordre,  $\inf(a, b) = a \wedge b$  et  $\sup(a, b) = a \vee b$ .

Dans un treillis  $(E, \vee, \wedge, <)$ , on définit une chaîne comme un sous-ensemble fini totalement ordonné. Cela permet d'énoncer la condition de chaîne de Jordan-Dedekind<sup>29</sup>. Soulignons que Dedekind ne revendique pas de filiation conceptuelle entre cette notion de chaîne et celle qu'il définit dans *Zahlen* (et c'est encore moins le cas de Birkhoff et de ses successeurs), contrairement à ce que suggère Vuillemin, après avoir énoncé le « théorème de la chaîne » :

C'est là un exemple de ces nouvelles structures algébriques-logiques dont on doit le développement à la théorie de Dedekind, bien qu'il soit emprunté à l'arithmétique des nombres algébriques, il peut être généralisé à l'algèbre des anneaux commutatifs. Philosophiquement, il introduit le concept fondamental de chaîne, qu'on retrouve au centre des réflexions de Dedekind concernant les entiers rationnels. [PA2, 287]

Bien sûr, au cœur de chacune se trouve le rapport d'ordre d'un terme à son successeur, mais l'homonymie ici n'est pas un signe de stricte correspondance conceptuelle. En réalité, cette notion trouve plutôt sa source dans la théorie des nombres où Dedekind définit une notion de chaîne de modules (ou d'idéaux) comme un ensemble de modules (ou d'idéaux) totalement ordonné par  $\subset$  – ce qui mènera aux conditions de chaîne d'Emmy Noether. Le fait que Dedekind n'évoque jamais, lorsqu'il utilise *cette* notion de chaîne, son ouvrage de 1888 est, en soi, un signe fort, puisqu'il ne manquait pas de le faire dès qu'il le pouvait. Par ailleurs, le mot allemand *Kette*, utilisé pour ces deux notions, est assez répandu, et Dedekind l'utilise également pour désigner une suite de nombres ou d'idéaux avec un dénominateur commun, ou même une suite d'équations de la forme :

$$a = mb + c$$

$$b = nc + d$$

$$c = pd + e$$

*etc.*

Citant [Bell 1945], Vuillemin rappelle, à juste titre, que Dedekind, en 1900, avait seulement reconnu la « forme unifiante » des treillis, sans en développer la théorie abstraite. La lecture très rétrospective de Bell, sur laquelle s'appuie Vuillemin, saute par-dessus les filiations et circulations complexes de l'histoire. Rappelons que les travaux de Dedekind, dans lesquels est défini un concept formellement équivalent aux treillis, appelé *Dualgruppe*, n'ont ni la généralité et l'ampleur que Vuillemin attribue à la théorie des treillis, ni les origines

---

29. Deux chaînes maximales finies sont de même longueur.

qu'esquisse sa reconstruction<sup>30</sup>. Sur ce second point, Dedekind raconte très explicitement les origines de son nouveau concept :

Pendant de nombreuses années, j'ai été occupé par ces questions, mais je n'y ai pas été poussé par la logique, mais par la théorie de ces systèmes de nombres que j'appelle modules. Par mes efforts pour obtenir cette théorie à partir du plus petit nombre de lois fondamentales, et non sans grandes difficultés, j'ai reconnu les [propriétés définissant les treillis]. [Dedekind 1897, 113]

Sur le premier point, comme l'a d'ailleurs bien vu Vuillemin, Dedekind ne s'intéresse pas (contrairement à Birkhoff) à la théorie abstraite des *Dualgruppen* mais seulement à quelques cas particuliers, et ce bien qu'il en donne une définition générale. Plus important encore, les articles de Dedekind sur la théorie des treillis n'avaient pas été lus par Birkhoff lorsque celui-ci a publié ses premiers travaux sur le sujet. Ce sont pourtant bien ceux-là qui marquent la naissance et le développement des treillis en tant que théorie<sup>31</sup>. Mais ce n'est pas ce qui importe le plus à Vuillemin, car ce qui l'intéresse ce n'est pas la simple généalogie mathématique, mais le fait qu'a ainsi été développée

[...] une théorie [qui] s'intéresse donc non plus à des éléments particuliers comme l'ancienne Algèbre, non plus même à la structure abstraite qui relie des éléments non particularisés, comme l'Algèbre abstraite, mais [à] l'ensemble des relations entre une structure et les formes structurales qu'on y peut établir. Ainsi, l'Algèbre générale est bien une Algèbre de l'Algèbre. Au lieu de fournir une théorie des relations entre éléments, elle fournit une théorie des relations entre les théories elles-mêmes. [PA2, 329]

Or cette « Algèbre de l'Algèbre » a, pour Vuillemin, un rôle philosophique. Dans le tome I de *La Philosophie de l'Algèbre*, Vuillemin avait « tenté de montrer que parmi les structures abstraites, celle qui avait joué le rôle unificateur le plus important en Mathématiques était la structure de groupe » [PA2, 329], car liée à la découverte des véritables *raisons* structurales donnant les conditions de possibilité de la résolution des équations algébriques. L'algèbre passait ainsi de l'étude des équations à celle des structures algébriques. Dans le tome II, il suggère que les treillis pourront « [jouer], sur le plan de l'Algèbre générale, le même rôle unificateur que la structure de groupe dans l'Algèbre abstraite » [PA2, 329–330]. Mais alors que le groupe n'était « incorpor[é] dans l'étude de la pensée » que par analogie, les treillis vont plus loin :

[...] comme la théorie des treillis ne fait usage que des concepts logiques les plus généraux, non seulement, au point de vue technique, elle fait apercevoir l'infrastructure logique des mathématiques, mais elle fournit le modèle cohérent et exact de l'étude

30. Sur la genèse des *Dualgruppen*, voir [Haffner à paraître].

31. Nous renvoyons à la contribution de S. Decaens dans ce dossier pour plus de détails sur l'histoire de la théorie des treillis.

de la Logique, et elle remplit enfin le programme que s'était fixé Aristote dans l'*Organon*. L'algèbre abstraite demeurerait un objet pour la théorie de la connaissance. L'Algèbre générale n'est autre que cette théorie elle-même, exprimée sous la forme symbolique des mathématiques. [PA2, 330]

Non seulement l'Algèbre générale peut donner les outils pour étudier les théories et raisonnements déductifs, mais encore elle permet de retourner au « problème de la décomposition unique d'une théorie scientifique ou d'un système déductif » et de formuler précisément et objectivement « le problème classique de l'“analyse” philosophique, donnant ainsi un statut autre qu'imaginaire ou analogique aux anciennes notions d'idées “simple” et complexe et de réduction du complexe au simple » [PA2, 331–332]. En effet, il existe des isomorphismes structuraux permettant de naviguer entre les opérations logiques et les opérations arithmétiques (divisibilité, PGCD et PPCM) et de retrouver la décomposition en éléments premiers. Pour Vuillemin, alors :

La tâche fondamentale de l'Algèbre générale consiste à étudier systématiquement cette structure quasi-algébrique, et à examiner à quelles conditions elle assure dans le cas général où l'on a affaire non plus aux nombres, mais aux théories déductives elles-mêmes, la décomposition élémentaire unique souhaitée. [PA2, 336–337]

Immense projet philosophique qui dépasse largement les auteurs qu'utilise Vuillemin.

Revenant sur la notion d'ordre, qui appartient aux mathématiques, à la philosophie, et à la logique et qui, comme l'on sait, constitue une pierre angulaire dans la philosophie de Descartes, Vuillemin opère un nouveau rapprochement vertigineux en liant la notion de *series* selon Descartes au concept de chaîne de Dedekind [PA2, 339]. Mais la notion de *series* chez Descartes est liée à la notion de rapports, héritée de la théorie euclidienne des proportions. Le paradigme en est fourni par les rapports de nombres entiers<sup>32</sup> et l'application étendue aux figures, aux astres, aux sons [Descartes 1628, Règle IV, 50–51] et à « l'enchaînement des propositions » [Descartes 1628, Règle XVII, 112]. En revanche, la chaîne est un concept fondé sur l'inclusion d'ensembles infinis quelconques n'ayant rien à voir *a priori* avec des proportions numériques. Que veut donc signifier Vuillemin par l'identification de la *series* de Descartes à la chaîne de Dedekind ?

Explicitons ce qu'il n'exprime pas, à savoir que le trait commun à la *series* de Descartes et à la chaîne est le rapport constant d'un terme à son successeur. Cela suffit-il cependant pour concevoir la série cartésienne comme la matrice générale de raisonnements incarnés ultérieurement de manière aussi diverse que

32. Voir dans [Descartes 1628, 55–56, la Règle VI], où Descartes donne l'exemple de la suite les nombres 3, 6, 12, 24, 48, etc.

dans le jugement synthétique chez Kant [PA2, 338]<sup>33</sup> et la chaîne de Dedekind ? Ici encore, nous rencontrons un exemple de la méthode de Vuillemin : creuser au plus profond pour exhumer un lien enfoui dans les replis des œuvres et des siècles, et qu'il est le premier, ou peut-être le seul, à établir.

La ligne d'affinité philosophique que Vuillemin trace de Descartes à Dedekind est l'occasion pour nous d'un autre embarras : le rapprochement entre le *Cogito* et la chaîne. Nous allons y consacrer la section suivante.

### 3.3 Dedekind et l'infini

Sous l'influence de Dedekind, le rapprochement qui s'est fait entre la Logique et les Mathématiques s'est fait par l'intermédiaire de l'infini. [PA2, 357]

On sait bien, et Vuillemin le souligne<sup>34</sup>, que dans *Zahlen* Dedekind définit le fini à partir de l'infini, et non l'inverse comme cela se pratiquait depuis deux mille ans. Cette priorité de l'infini, Vuillemin y voit l'empreinte de la logique et de la philosophie. Et qui dit philosophie y inclut la métaphysique, ce qui explique le parallèle fait par Vuillemin entre l'infini chez Descartes et l'infini chez Dedekind.

Empreinte de la logique dans la définition de la divisibilité des idéaux par l'inclusion entre classes infinies. Pour Vuillemin, Dedekind a dégagé l'idée de structure de sa forme proprement algébrique en ce que « les lois de composition qui la définissent n'ont plus besoin d'être regardées comme des opérations finies » [PA2, 286]. « L'Algèbre des idéaux » donne lieu à des structures logiques « plus abstraites que les structures proprement algébriques » [PA2, 287].

Empreinte de la philosophie également dans la démonstration par Dedekind de l'existence d'un système infini (proposition 66 de *Zahlen*). Après avoir relevé la non-pertinence mathématique de la « preuve » de Dedekind, Vuillemin ajoute qu'elle est, « à vrai dire, extrêmement ingénieuse, [et] peut être regardée comme une contraction – tout à fait dans le style très dense de ce mathématicien – des preuves philosophiques de l'existence de Dieu, qui

---

33. « Le jugement synthétique kantien, c'est la *series* [de Descartes] appliquée à la succession et à la juxtaposition. » Voir aussi [Vuillemin 1960, 123] : « [...] il suffit de comparer la nature des *nexus* cartésiens et de leurs ramifications dans le système de Kant, pour apercevoir combien, chez Descartes, elle retient de la sériation et de la linéarité propres à l'ordre de la *Géométrie*. La *Critique de la raison pure* se présente, elle aussi, comme une théorie des proportions; qu'il s'agisse des axiomes de l'intuition, des anticipations de la perception, des analogies de l'expérience et des postulats de toute pensée empirique en général, il faut, trois termes étant donnés, trouver le quatrième proportionnel [cf. Gueroult 1953, II, 278]. »

34. « Un trait constant caractérise le style mathématique de Dedekind, en ceci analogue au style philosophique de Descartes : l'infini est toujours, chez lui, premier par rapport au fini » [PA2, 311].

partent de l'idée d'infini en nous » [PA2, 302]. Le rapprochement est sidérant. Il faut donc expliciter le point de vue de Vuillemin.

Les mathématiciens ont rapidement oublié cette proposition 66 dont le sort a été réglé pour eux par l'axiome de l'infini de Zermelo. Les historiens se bornent, pour la plupart, à exposer les raisons et les circonstances de sa genèse tardive<sup>35</sup>. En revanche, les philosophes et logiciens n'ont cessé de s'y intéresser, peut-être justement en raison de ses failles. Rappelons, à la suite de Pierre Dugac [Dugac 1976, 89], que, dans la première édition de *The Principles of Mathematics* [Russell 1903, 357], qui contient son fameux paradoxe, Bertrand Russell juge correcte cette preuve et trouve évidente l'existence des ensembles infinis (“That there are infinite classes is so evident that it will scarcely be denied”). Mais lors de la rédaction des *Principia mathematica* [Russell & Whitehead 1910-1913], il se rallie à la position de Zermelo. Cependant, la solution mathématique de Zermelo n'a pas arrêté *ipso facto* le train des interprétations épistémologiques. Cavaillès considérait que la proposition 66 de *Zahlen* était une « chute dans le transcendantal, ou réalisme psychologique » [Cavaillès 1938a, 126]. Il fut suivi par d'autres, notamment par David McCarty, dont [McCarty 1995] fit autorité dans le monde anglo-saxon. Dans un article récent, Ansten Klev suggère l'influence de la philosophie de Hermann Lotze, dont Dedekind a suivi les cours, et qui utilise la notion de *Gedankenwelt* [Klev 2018] – influence jointe à la lecture plus tardive de Bolzano<sup>36</sup>. D'autres encore l'ont regardé, non sans raison, comme « une combinaison singulière du *Cogito* de Descartes et de l'idée de l'idée de Spinoza » (Badiou, cité dans [Belna 1996, 93]). Mais cette identification analogique par un lecteur moderne ne vaut naturellement pas filiation généalogique. Elle relève d'une lecture épistémologique *a posteriori* et ne prétend pas retrouver une genèse effective.

Revenons au rapprochement de Vuillemin. Il repose sur le fait qu'il s'agit d'une *preuve d'existence* comme dans le cas de la preuve ontologique. Pour Vuillemin, la solution mathématique fournie par Zermelo en la forme d'un *axiome* de l'infini n'élimine pas la question philosophique de *l'existence* de l'infini. Et il considère celle-ci avec d'autant plus de sérieux que, prenant le contre-pied de la Critique au sens de Kant et de la pratique husserlienne de l'ἐποχή, il veut réintroduire les questions métaphysiques existentielles dans

---

35. Comme l'a remarqué Dugac [Dugac 1976, 88], ce paragraphe ne faisait pas partie de la version primitive de *Zahlen*. Son rajout répond à l'idée que si des ensembles infinis existent dans le monde idéal, alors ils sont non contradictoires. Ainsi Dedekind répond à Keferstein, qui lui a reproché sa « preuve manquée », que « sans preuve logique d'existence on ne saurait décider si le concept d'un tel système [simplement infini] ne contient pas éventuellement de contradictions internes » [Dedekind 2008, 308]. Mais, en fait, le soubassement de la démarche de Dedekind est sa croyance en la puissance de l'esprit humain à créer des concepts ou objets de pensée [*Gedankendinge*] à partir d'objets plus simples. On pourra également consulter [Klev 2018].

36. Dedekind cite, en effet, le §13 des *Paradoxes de l'infini* dans la note\*\*), p. 17 de l'édition originale de *Zahlen* voir [Dedekind 2008, 174].

la philosophie pure. Car il pense, comme Fichte, que toute philosophie est métaphysique.

Vuillemin retrace donc, en reprenant les analyses données par Gueroult dans [Gueroult 1953, 1955], les étapes de la démonstration par Descartes de l'existence de Dieu. Ce qui retient surtout l'attention est l'argument par lequel Vuillemin soutient que le *Cogito* a une structure de chaîne de Dedekind<sup>37</sup>, au sens où je peux réitérer sur le *Cogito ergo sum* lui-même l'acte de réflexion qui m'a une première fois révélé la certitude de mon existence, puis réitérer sur cet acte un nouvel acte et ainsi de suite. Si bien que le *Cogito* me livre à la fois la certitude que j'existe – certitude que la chaîne ne me donne pas – et la conscience d'un pouvoir opératoire indéfini, lequel a une structure de chaîne. « La preuve de Dedekind repose sur la connexion des deux » [PA2, 302'], ce qui signifie que le canevas philosophique de cette preuve se trouve dans le *Cogito ergo sum*. Suit un démontage de cette preuve, difficile à suivre. Nous tâchons d'en exposer un schéma au plus près du raisonnement de Vuillemin.

1. Le *Cogito* délivre une certitude existentielle, donc « il est normal de l'utiliser pour prouver une existence » [PA2, 302c].
2. En fait, le *Cogito* apporte à la fois une certitude existentielle et une instanciation « objective » de la chaîne : « C'est objectivement que nous rencontrons une chaîne qui est le *Cogito* » [PA2, 302c].
3. En revanche, le concept de chaîne pourrait être défini dans un cadre intuitionniste comme correspondance entre deux ensembles infinis au sens d'« ensembles inépuisables » ; il n'est pas nécessaire qu'il soit fondé sur des ensembles infinis actuellement donnés dans leur totalité, comme c'est le cas chez Dedekind.
4. Alors, « rien n'interdit de recevoir l'idée de chaîne, sans en conclure, comme le fait Dedekind, l'existence de l'infini actuel » [PA2, 302d].
5. Donc, en ce qui concerne l'existence de l'infini actuel, le raisonnement fondé sur la chaîne n'est pas, en lui-même, conclusif. En revanche,

Le *Cogito* est par lui-même, et sans le secours d'aucun principe, la preuve de l'existence de l'infini actuel<sup>38</sup>.

Ici nous rencontrons une difficulté. En effet, si la chaîne ne conduit pas à l'infini actuel, comment le *Cogito*, qui équivaut à existence + pouvoir indéfini ayant structure de chaîne, conduirait-il à l'infini actuel ?

6. Quoi qu'il en soit, selon Vuillemin, la chaîne a un degré d'évidence moindre que le *Cogito ergo sum*. Explication :

---

37. C'est ici le troisième point témoin de la présence inaperçue de l'actif cartésien dans nos démarches actuelles. Descartes a bien sonné le commencement de la mathématique et de la philosophie modernes : la seconde règle de son *Discours de la Méthode* se trouve à l'œuvre dans l'Algèbre structurale, sa notion de série contient déjà en puissance celle de chaîne de Dedekind, et son *Cogito ergo sum* déployait déjà une structure de chaîne.

38. « *Cogito, ergo infinitum actuale est* » [PA2, 302'].

Le *Cogito ergo sum* est une évidence qui relève de l'entendement. La preuve de Dedekind est une décision de la volonté. [PA2, 302d]

En note Vuillemin commente que c'est là le sens philosophique quand on passe de Descartes à Fichte :

Chez Descartes, l'intuition intellectuelle est une évidence de la connaissance : elle porte sur des *réalités* qui deviennent des idées que nous apercevons. Chez Fichte, l'intuition intellectuelle est une activité [*Tathandlung*], et, à ce titre, elle échappe à la connaissance proprement dite pour appartenir déjà aux « catégories » de la volonté. [PA2, 302d, nous soulignons]

Ce commentaire est évidemment une réflexion philosophique remarquable, mais à distance du texte de Dedekind, qui, en particulier, n'en appelle pas à l'intuition.

Il faut bien voir que si « le *Cogito* est par lui-même, et sans le secours d'aucun principe, la preuve de l'existence de l'infini actuel », il est alors par lui-même la preuve, dans la perspective cartésienne, de l'existence du seul infini actuel concevable, Dieu, l'infini mathématique n'étant qu'un indéfini ou, comme on dit aussi, syncatégorématique. À son insu, Dedekind aurait donc livré dans les limites de la raison pure<sup>39</sup>, sans recours ni à l'idée d'immensité ou de perfection divine, ni au principe métaphysique de causalité qui veut qu'il y ait au moins autant de réalité dans la cause que dans l'effet [PA1, 26], et grâce seulement à la représentation semblable [*ähnliche Abbildung*] et au concept de chaîne, la matrice mathématique, *objectivement instanciée par le Cogito ergo sum*, d'une preuve de l'existence de Dieu. Dedekind aurait apporté à Descartes ce qui lui manquait : l'analyse mathématique de l'infini actuel.

Mais l'homme de Descartes n'a un accès direct qu'à de l'indéfini. Où trouver une fenêtre entrouverte sur l'infini ? Le mouvement de sa conscience serait-il le témoin et le reflet (l'image) en lui d'une réalité en soi, hors de lui, à la fois « son principe et son but » ? Vuillemin pose la question, et n'y répond pas explicitement [PA2, 302']. On peut supposer, cependant, que sa réponse serait de type cartésien, c'est-à-dire affirmative.

Vuillemin analyse la preuve de Dedekind avec les instruments de Descartes. Que peut-on dire si on s'en tient à ceux qu'utilise Dedekind ?

39. C'est pourquoi Vuillemin juge que la preuve de Dedekind est « entièrement compatible avec une philosophie critique », pour peu que celle-ci soit libérée du principe de la possibilité de l'expérience [PA2, 302c]. Il faut rappeler que Vuillemin soutient que « les preuves d'impossibilité ne sauraient valablement s'appuyer sur un fait, fût-ce celui de l'expérience possible, puisque rien ne permet *a priori* de penser que la preuve pourrait avoir lieu sans qu'on invoque un tel fait ». Parmi les preuves d'impossibilité figure celle de la preuve ontologique établie par Kant [Vuillemin 1962, 474]. En récusant le principe de la possibilité de l'expérience, Dedekind aurait permis l'effondrement de l'argument kantien.

Tandis que le *Cogito* noue une certitude *existentielle* (« *Cogito ergo sum* ») à la conscience d'un pouvoir indéfini, la preuve de Dedekind repose sur la confiance en notre pouvoir de penser, sans que ce pouvoir n'atteste une existence subjective, ni ne soit intérieurement doublé de conscience. Le pouvoir de penser selon Dedekind est tourné vers son objet, les concepts qu'il crée, non vers la conscience du sujet pensant. Nous avons vu que Vuillemin fait appel, outre à Descartes, à une pensée Critique distincte de celle de Kant, mais de même option intuitionniste [PA2, 302d, en particulier 2<sup>e</sup> alinéa]. Son argument consiste à dire que la chaîne déroule un indéfini et ne débouche donc pas forcément sur l'infini actuel. Extrait de son contexte et isolé, ce segment ne pointe en effet qu'un indéfini. Mais la notion de chaîne est définie comme partie d'un ensemble infini au sens de Dedekind, et un ensemble infini au sens de Dedekind est celui qui est susceptible d'une représentation semblable (une injection) *sur* une de ses parties propres. Ce segment de la preuve est fondamental. Voudrait-on considérer qu'il est seulement l'habillage mathématique d'une option préalable et serait donc, du point de vue philosophique, non contraignant ? Son degré d'évidence philosophique serait même inférieur à celui du *Cogito ergo sum* ; s'agissant de démontrer une existence, celui-ci réussit plus sûrement que la preuve fondée sur celle-là. Or la construction rationnelle qu'est la chaîne ignore précisément l'évidence intuitive et tire, dans le fait, sa force de son insertion dans un tissu mathématique ensembliste auquel elle s'ajuste. Et si la faille logique de la preuve a conduit à son remplacement pur et simple par l'axiome de Zermelo, il faut rappeler que celui-ci ne remet pas en question la validité de la définition des ensembles infinis mais seulement la preuve d'existence de tels ensembles.

On retournera donc le procédé à Vuillemin lui-même : il lit Dedekind avec les yeux de Descartes, assumant ainsi une option intuitionniste préalable et prêtant à l'attitude du mathématicien une dimension conscientielle qu'elle n'avait aucunement et une dimension constructiviste à laquelle Dedekind s'opposa explicitement. D'une part, le recours au moi de la proposition 66 de *Zahlen* n'est pas un recours à la conscience, et la pensée de la pensée n'est pas en même temps chez Dedekind conscience de la pensée. La réflexivité, mieux l'itérabilité d'un procédé, eût-il pour contenu un objet idéal [*ein Gedankending*], n'est pas le redoublement de la réflexion<sup>40</sup>. D'autre part, la chaîne est définie par une représentation d'un ensemble infini *catégorématique* dans lui-même. Comme le reconnaît Vuillemin lui-même ailleurs<sup>41</sup>, dans un contexte où il ne traite ni du *Cogito* ni de la preuve d'existence de l'infini actuel/Dieu, le propos de Dedekind était de rejeter l'intuition des

---

40. Sur la distinction nécessaire entre « réflexivité » et « réflexion » voir [Benis-Sinaceur à paraître].

41. Voir le texte de [PA2, 304], cité plus haut : « bien que dans la Préface de la première édition, Dedekind ait regardé l'Arithmétique comme une partie de la Logique, Frege ne s'est pas trompé sur le sens de cette déclaration ; elle tendait seulement à réfuter les intuitionnistes qui veulent fonder le nombre sur la représentation du temps ou de l'espace. »

intuitionnistes de type kantien et de détrôner l'empire des constructivistes, défenseurs de l'infini syncatégorématique.

Ainsi, s'il n'est certainement pas suffisant d'assumer les présupposés d'un auteur pour lire fructueusement son texte, et y déceler des implications qu'il ne soupçonnait pas, il n'est pas non plus nécessaire de lui imposer une grille de lecture si contraire.

Poursuivons le jeu subtil de détective philosophique auquel Vuillemin excelle. Voilà qu'il nous livre en Dedekind un homologue mathématique de Fichte. Nous ne serons pas étonnées car nous savons déjà par le tome I de *La Philosophie de l'Algèbre* que Fichte est la figure philosophique de la mathématique libertaire et créatrice du XIX<sup>e</sup> siècle. En effet, Vuillemin avait souligné, dans le tome I de *La Philosophie de l'Algèbre*, que Fichte avait, contre l'esprit du kantisme, rapproché philosophie et mathématiques. Il avait consacré de très nombreuses pages à établir et nuancer un parallèle entre les opérations de l'axiomatique des groupes et les déductions de Fichte à partir du « Je » et de sa négation [Vuillemin 1962, 273–283]. Et l'accent était mis sur l'objectif présumé de Fichte :

Ayant restitué à l'intuition intellectuelle, convenablement amendée, sa place de premier principe philosophique, il assujettira toute la Métaphysique à la notion d'*opération*, même s'il la conçoit encore mêlée d'éléments extrinsèques en mathématiques. Sa doctrine marque l'aboutissement logique d'une évolution qui a détaché peu à peu l'idée de son contexte représentatif et théologique, pour la réduire à un *acte de l'intelligence*. [Vuillemin 1962, 59, nous soulignons]

La tendance de certains mathématiciens du XIX<sup>e</sup> siècle, Bolzano ou Dedekind entre autres, à se défaire du principe de la possibilité de l'expérience revient en effet à mettre tout le poids de la création sur les actes de l'intelligence. D'où l'hypothèse de leur affiliation philosophique supposée à Fichte.

Dans le tome II de *La Philosophie de l'Algèbre*, les principes de la *Wissenschaftslehre* fichtéenne servent à compléter la comparaison, commencée avec le Cogito et la chaîne, entre mathématiques et philosophie, à préciser leur concours, et à décrypter les présupposés inapparents de l'épistémologie présumée convenir à la mathématique de Dedekind. Explicite par une citation le point de vue selon lequel Vuillemin range Descartes et Fichte du même côté : « dans la mesure où il recourt à une intuition intellectuelle, Fichte retourne à l'inspiration cartésienne » [Vuillemin 1960, 125, note 1]<sup>42</sup>.

---

42. Plus loin, il écrit : « Dans le système de Descartes, fondé sur l'ordre des raisons, il y a analogie entre les Mathématiques et la Métaphysique. Dans le système critique, fondé sur la possibilité de l'expérience, il y a hétérogénéité radicale entre la méthode mathématique qui procède par construction de concepts et la méthode philosophique qui procède par simples concepts. Fichte, le premier, reviendra à Descartes : la *Doctrin de la Science*, par le rôle qu'elle assigne à l'intuition

Le problème est que toute l'œuvre de Dedekind promeut le concept pur contre l'intuition, qu'elle soit sensible ou intellectuelle. Pourtant, Vuillemin voit, en la preuve de Dedekind, non pas une évidence de *l'entendement* comme l'est le *Cogito* mais « une décision de la volonté », dans une perspective de type cartésien, mise en valeur par Fichte (et illustrée ultérieurement par Schopenhauer). Là-dessus pas d'autre éclaircissement. Le renvoi discret à Fichte s'interrompt brutalement. Ce silence vaut sagesse. Car, encore une fois, les analogies qu'il décèle entre des thèmes de la *Wissenschaftslehre* et le positionnement de Dedekind ou de Cantor, Vuillemin en assume la responsabilité. Il ne dit pas que l'activité créatrice de la pensée chez Dedekind, quand celui-ci affirme, par exemple, que « les nombres sont de libres créations de l'esprit humain », renvoie à la *Tathandlung*, pur acte d'autoposition du Moi de Fichte. Contrairement à ce que certains ont pu penser ou écrire, Vuillemin ne dit pas non plus que la proposition 66 est d'inspiration fichtéenne. Il n'établit pas de lien entre le principe de la *Wissenschaftslehre*, le Moi suprême et absolu [*das Ich* ou *absolutes Subjekt*], réplique du sujet transcendantal kantien, distinct donc du moi d'un sujet individuel particulier et condition de possibilité de la conscience, et le moi propre du sujet mathématicien de Dedekind, « *mein eigenes Ich* ». Son esprit acéré évite ces amalgames. Cependant, invoquer « une décision de la volonté », c'est suggérer que cette proposition 66, si « ingénieuse » qu'elle soit, n'est justifiable en philosophie pure qu'au plan métaphysique, le plan où le philosophe détecte les motifs rationnels des choix scientifiques. Et surtout c'est la placer dans la tradition des philosophies de la conscience, ce qui l'éclaire d'un jour imprévu. Sans en appeler à la conscience et en récusant l'intuition, Dedekind serait tout de même héritier, en philosophie, de l'idéalisme absolu. Or lui-même ne se reconnaissait pas en l'idéalisme absolu. Bien au contraire, il le moquait, si l'on en croit l'évocation ironique qu'il fait du principe fondamental de Fichte : « *Das Ich setzt sich selbst* », dans une lettre à sa sœur datée du 11 juin 1852<sup>43</sup>. Mais peu importe, puisque Vuillemin porte son intérêt principal à la philosophie pure plutôt qu'à l'histoire [Vuillemin 1962, 3], et que, par suite, ses rapprochements extirpent des filiations conceptuelles qui n'ont rien à voir avec la réalité historique. S'il n'est pas consenti par Dedekind, le rapport à Fichte est établi par Vuillemin. Cela est sans doute étrange mais pas totalement inattendu de la part de Vuillemin, qui n'a pas

---

intellectuelle, est construite, comme les *Méditations métaphysiques*, sur l'analogie de la théorie mathématique des proportions. Lorsque Fichte oppose la méthode génétique à la méthode descriptive de Kant, il rétablit en réalité sous une forme nouvelle le principe cartésien de causalité » [Vuillemin 1960, 126–127].

43. Cette lettre est reproduite dans [Dugac 1976, 156–157]. Dedekind a une connaissance de seconde main de la philosophie de Fichte. Au semestre d'été de l'année 1852, à l'université de Göttingen, il a suivi, en effet, un cours professé par Hermann Lotze sur l'histoire de la philosophie allemande depuis Kant. Les notes prises par lui comportent 5 chapitres, consacrés successivement à Kant, Fichte, Schelling, Hegel et Herbart. Dans la lettre à sa sœur, qui date précisément de cette période, il plaisante sur l'acuité d'esprit de celui qui de l'Axiome « Le Moi se pose lui-même » déduit tout l'ordre du monde.

rangé Dedekind parmi les logicistes, mais a seulement montré la logique qui sous-entendait son œuvre arithmétique, et la métaphysique présumée qui, en sous-main, la commandait.

Après tout, vu d'en haut, de très haut, c'est une lecture possible. L'épistémologie induite de l'idée fondamentale de la création des concepts n'est ni réaliste ni intuitionniste : l'intuition, que ces deux options mobilisent, différemment certes, n'y joue aucun rôle. Idéaliste donc ? Sans doute. Mais il ne saurait être question ni d'un idéalisme transcendantal ni d'un idéalisme absolu. Dedekind s'est explicitement séparé de Kant et sur Fichte il ne nous a laissé qu'une plaisanterie privée.

## 4 Conclusion

La lecture de PA2 pose le problème du rapport de la philosophie de la science à l'histoire de la science. La fécondation de l'une par l'autre est non seulement possible mais souhaitable. Cependant elle est semée d'embûches de part et d'autre. On souhaiterait plus de prudence aux historiens qui utilisent, à l'occasion, des concepts philosophiques vulgarisés et hors contexte, comme transcendantalisme. Mais on aimerait plus d'égard pour les spécificités historiques de la part des philosophes. Ici, nous avons vu quels aperçus proprement inouïs apporte une lecture à la fois transversale et détachée des données historiques. Exemples de choix : le rapprochement entre la deuxième règle du *Discours de la Méthode* de Descartes et le théorème de Wedderburn ou entre le *Cogito* et la « preuve » de Dedekind de l'existence d'ensembles simplement infinis. Nous avons ainsi relevé des points d'interprétation philosophique de concepts ou méthodes mathématiques qui nous ont semblé sujets à discussion. Bien plus, il nous a paru que la connaissance du contexte historique de ces concepts ou méthodes conduisait à considérer avec circonspection leur interprétation philosophique. C'est donc que demeure parfois un écart significatif entre mathématique et philosophie et entre un moment de l'histoire et un autre. Par exemple, lire Dedekind en lui prêtant l'ampleur de Birkhoff est avantageux mais contrarie l'ordre historique et induit une interprétation philosophique à notre avis peu ajustée. De même lire Dedekind en cartésien dévoile une fibre conceptuelle fascinante mais voudrait la considération des contextes respectifs. En fait, ces interprétations de Vuillemin, les plus séduisantes et suggestives comme les plus problématiques, nous ont informées davantage sur les idées de Vuillemin lui-même que sur les idées des auteurs concernés. Et ainsi nous avons appris à mieux le connaître et à parcourir, en le suivant, des champs entiers de connaissances.

## Bibliographie

- ABEL, Niels Henrik [1826], Démonstration de l'impossibilité de la résolution algébrique des équations générales qui passent le quatrième degré, *Journal de Crelle*, 1, 65–84, doi : 10.1515/crll.1826.1.65, repr. in Sylow, L. & Lie, S. (ed.), *Œuvres complètes de Niels Henrik Abel*, I (2<sup>e</sup> éd., 1881), Grøndahl & Søn.
- ARTIN, Emil [1927], Zur Theorie der hyperkomplexen Zahlen, *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg*, 5(1), 251–260, doi : 10.1007/BF02952526.
- [1950], The influence of J. H. M. Wedderburn on the development of modern algebra, *Bulletin of the American Mathematical Society*, 56(1), 65–72, doi : 10.1090/S0002-9904-1950-09346-X.
- BELL, Eric T. [1940], *The Development of Mathematics*, New York : Mc Graw-Hill.
- [1945], *The Development of Mathematics*, New York : Mc Graw-Hill, 2<sup>e</sup> éd.
- BELNA, Jean-Pierre [1996], *La Notion de nombre chez Dedekind, Cantor, Frege*, Paris : Vrin.
- BENIS-SINACEUR, Hourya [1991], *Corps et modèles. Essai sur l'histoire de l'algèbre réelle*, Paris : Vrin, 1999.
- [2017], Dedekind's and Frege's views on logic, *Mathematische Semesterberichte*, 64, 187–198, doi : 10.1007/s00591-017-0198-z.
- [à paraître], Axiomatique et philosophie : Kant, Hilbert, Vuillemin, dans *L'Épistémologie du dedans. Mélanges en l'honneur de Hourya Benis-Sinaceur*, édité par E. Haffner & D. Rabouin, Paris : Classiques Garnier.
- BENIS-SINACEUR, Hourya, PANZA, Marco *et al.* [2015], *Functions and Generality of Logic. Reflections on Dedekind's and Frege's Logicisms*, Cham : Springer, doi : 10.1007/978-3-319-17109-8.
- BOOLE, George [1992], *Les Lois de la pensée*, Paris : Vrin, trad. fr. par S. B. Diagne, titre original *Laws of Thought*.
- CAVAILLÈS, Jean [1938a], *Remarques sur la formation de la théorie abstraite des ensembles*, Paris : Hermann, reproduit dans [Cavaillès 1962, 25–178].
- [1938b], *Méthode axiomatique et formalisme. Essai sur le problème du fondement des mathématiques*, Paris : Hermann, 1981.

- [1947], *Sur la logique et la théorie de la science*, Paris : Vrin, 1960.
- [1962], *Philosophie mathématique*, Paris : Hermann.
- DEDEKIND, Richard [1856-1858], Eine Vorlesung über Algebra, dans *Richard Dedekind 1831-1931. Eine Würdigung zu seinem 150. Geburtstag*, édité par W. Scharlau, Braunschweig : Vieweg und Sohn, 59–108.
- [1872], *Stetigkeit und irrationale Zahlen*, Braunschweig : Vieweg und Sohn, trad. fr. dans [Dedekind 2008, 57–90], cité d’après [Dedekind 2008].
- [1888], *Was sind und was sollen die Zahlen ?*, Braunschweig : Vieweg und Sohn, trad. fr. dans [Dedekind 2008, 131–220], cité d’après [Dedekind 2008].
- [1894a], Zur Theorie der Ideale, *Nachr. königl. Ges. Wiss. Göttingen, Math.-phys. Kl.*, 1, 272–277, cité d’après [Dedekind 1930-1932, II, 43–49].
- [1894b], Über die Composition der binären quadratische Formen, Supplement X, dans *Vorlesungen über Zahlentheorie*, édité par J. P. G. Lejeune-Dirichlet, Braunschweig : Vieweg und Sohn, 4<sup>e</sup> éd., 1–222.
- [1897], Über Zerlegungen von Zahlen durch ihre größten gemeinsamen Teiler, dans *Festschrift der Technischen Hochschule zu Braunschweig*, Braunschweig : Meyer, 1–40, cité d’après [Dedekind 1930-1932, II, 103–147].
- [1900], Über die von drei Moduln erzeugte Dualgruppe, *Mathematische Annalen*, 53, 371–403, doi : 10.1007/BF01448979, cité d’après [Dedekind 1930-1932, II, 236–271].
- [1930-1932], *Gesammelte mathematische Werke*, Braunschweig : Vieweg und Sohn, sous la dir. de R. Fricke, E. Noether et Ø. F. Ore.
- [2008], *La Création des nombres*, Paris : Vrin, textes traduits, annotés et présentés par Hourya Benis-Sinaceur.
- DEDEKIND, Richard & WEBER, Heinrich [2019], *Théorie des fonctions algébriques d’une variable complexe*, Paris : Vrin, trad. fr. commentée et introduite par E. Haffner.
- DEMOPOULOS, William & CLARK, Peter [2005], The logicism of Frege, Dedekind, and Russell, dans *The Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic*, édité par S. Shapiro, Oxford : Oxford University Press, 106–202.
- DESCARTES, René [1628], Règles pour la direction de l’esprit, dans *Œuvres et lettres*, édité par A. Bridoux, Paris : Bibliothèque de la Pléiade, 40, 1937.

- DETLEFSEN, Michael [2011], Dedekind against intuition : Rigor, scope and the motives of his logicism, dans *Logic and Knowledge*, édité par C. Cellucci, E. Grosholz & E. Ippoliti, Cambridge : Cambridge Scholars Publishing, 205–217.
- DUGAC, Pierre [1976], *Richard Dedekind et les fondements des mathématiques*, Paris : Vrin.
- FERREIRÓS, José [1999], *Labyrinth of Thought*, Bâle : Birkhäuser, 2<sup>e</sup> éd., 2007.
- [à paraître], On Dedekind's logicism, dans *Analytic Philosophy and the Foundations of Mathematics*, édité par A. Arana & C. Alvarez, Londres : Palgrave.
- FREGE, Gottlob [1893], *Grundgesetze der Arithmetik*, t. I, Iena : Pohle.
- GUEROULT, Martial [1953], *Descartes selon l'ordre des raisons*, Paris : Aubier, 2 vol.
- [1955], *Nouvelles réflexions sur la preuve ontologique de Descartes*, Paris : Vrin.
- HAFFNER, Emmylou [à paraître], Duality as a guiding light in the genesis of Dedekind's *Dualgruppen*, dans *Duality in 19th and 20th century mathematical thinking*, édité par R. Krömer, E. Haffner & K. Volkert, Bâle : Birkhäuser.
- HAFFNER, Emmylou & SCHLIMM, Dirk [à paraître], Dedekind et la création du continu arithmétique, dans *L'Épistémologie du dedans. Mélanges en l'honneur de Hourya Benis-Sinaceur*, édité par E. Haffner & D. Rabouin, Paris : Classiques Garnier.
- KANT, Immanuel [1781,1787], *Kritik der reinen Vernunft*, Hambourg : Felix Meiner, 1956, trad. fr. A. Renaut, Paris : Aubier, 1997.
- KITCHER, Philip [1986], Frege, Dedekind, and the Philosophy of Mathematics, dans *Frege Synthesized : Essays on the Philosophical and Foundational Work of Gottlob Frege*, édité par L. Haaparanta & J. Hintikka, Dordrecht : Springer, 299–343, doi : 10.1007/978-94-009-4552-4\_11.
- KLEV, Ansten [2018], A road map of Dedekind's Theorem 66, *HOPOS : The Journal of the International Society for the History of Philosophy of Science*, 8(2), 241–277, doi : 10.1086/698660.
- MARTIN-LÖF, Per [1987], Truth of a proposition, evidence of a judgement, validity of a proof, *Synthese*, 73(3), 407–420, doi : 10.1007/BF00484985.

- MCCARTY, David Charles [1995], The mysteries of Richard Dedekind, dans *From Dedekind to Gödel : Essays on the Development of the Foundations of Mathematics*, édité par J. Hintikka, Dordrecht : Springer, 53–96, doi : 10.1007/978-94-015-8478-4\_4.
- RUSSELL, Bertrand [1903], *The Principles of Mathematics*, t. I, Cambridge : Cambridge University Press.
- RUSSELL, Bertrand & WHITEHEAD, Alfred North [1910-1913], *Principia Mathematica*, t. I, II, III, Cambridge : Cambridge University Press.
- SCHRÖDER, Ernst [1873], *Lehrbuch der Arithmetik und Algebra für Lehrer und Studierende*, Leipzig : B. G. Teubner.
- [1890-1905], *Vorlesungen über die Algebra der Logik*, t. I, II, III, Leipzig : B. G. Teubner.
- STEIN, Howard [1988], Logos, logic, and logistiké : Some philosophical remarks on nineteenth-century transformation of mathematics, dans *History and Philosophy of Modern Mathematics*, édité par W. Aspray & Ph. Kitcher, Minneapolis : University of Minnesota Press, 238–259.
- TAIT, William W. [1997], Frege versus Cantor and Dedekind : On the concept of number, dans *Early Analytic Philosophy*, édité par W. W. Tait, Chicago : The Open court publishing company, 213–248.
- VAN DER WAERDEN, Bartel Leendert [1930], *Moderne Algebra*, Berlin : Springer.
- VUILLEMIN, Jules [1960], *Mathématiques et Métaphysique chez Descartes*, Epiméthée, Paris : PUF.
- [1962], *La Philosophie de l'algèbre. Tome premier. Recherches sur quelques concepts et méthodes de l'algèbre moderne*, Épipiméthée, Paris : PUF.
- [1971], *Le Dieu d'Anselme et Les Apparences de la raison*, Paris : Aubier.
- [1984], *Nécessité ou contingence. L'aporie de Diodore et les systèmes philosophiques*, Paris : Minuit ; Fondation Singer Polignac.
- [1986], *What are Philosophical Systems ?*, Cambridge ; London ; New York : Cambridge University Press.
- [1998-1999], La méthode platonicienne de division et ses modèles mathématiques, *Philosophia Scientiæ*, 3(3), 1–62, [www.numdam.org/article/PHSC\\_1998-1999\\_\\_3\\_3\\_1\\_0.pdf](http://www.numdam.org/article/PHSC_1998-1999__3_3_1_0.pdf).
- [2001], Formalisme et réflexion philosophique, *Bulletin de la Société française de philosophie*, 94(3), 1–44.

— [inédit], *La Philosophie de l'algèbre*. II. Structure, infini, ordre, non publié.

WEDDERBURN, Joseph [1908], On hypercomplex numbers, *Proceedings of the London Mathematical Society*, s2-6(1), 77–118, doi : 10.1112/plms/s2-6.1.77.

ZERMELO, Ernst [1908], Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre. I, *Mathematische Annalen*, 65(2), 261–281, doi : 10.1007/BF01449999.



# *La Philosophie de l'algèbre*, tome II, un témoin de la circulation de la théorie des treillis en France

*Simon Decaens*

Archives Henri-Poincaré – Philosophie et Recherches  
sur les Sciences et les Technologies  
(AHP-PreST), Université de Lorraine, CNRS,  
Université de Strasbourg, UMR 7117, Nancy (France)

**Résumé :** La théorie des treillis apparaît dans le contexte des mathématiques états-uniennes des années 1930. En 1940, elle se matérialise sous la forme d'une monographie, qui permet sa circulation. Dans le dernier chapitre du deuxième tome de *La Philosophie de l'algèbre*, Jules Vuillemin la présente comme une « algèbre générale » dont le but est l'étude logique des théories scientifiques. L'article porte sur cette circulation de la théorie des treillis qui sera étudiée selon deux axes. D'une part, en étant diffusée par l'intermédiaire d'un traité, la théorie prend une forme spécifique qu'il s'agira de détailler. D'autre part, la réception de Vuillemin dépend de ses intérêts propres, auxquels nous nous intéresserons.

**Abstract:** Lattice Theory emerged in the context of 1930s American mathematics. In 1940, it became materialized in the form of a monograph which enabled it to be disseminated. In the last chapter of the second volume of *La Philosophie de l'algèbre*, Jules Vuillemin presents it as a « general algebra » the aim of which is the logical study of scientific theories. The article focuses on this circulation of Lattice Theory which will be studied from two perspectives. Firstly, the theory was disseminated by a treatise and thus has a specific form that will be detailed. Secondly, Vuillemin's opinions are coloured by his own interests which are studied.

# 1 Introduction

Le douzième et dernier chapitre du deuxième tome de *La Philosophie de l'algèbre* [Vuillemin inédit] s'intitule « L'Algèbre générale ». Pour Jules Vuillemin, cette algèbre générale est la forme mathématique de la théorie de la connaissance [Vuillemin inédit, 330] et consiste, en pratique, en l'étude algébrique des théories scientifiques grâce à un nouvel outil : les treillis<sup>1</sup>. La théorie des treillis apparaît dans les travaux de mathématicien·nes états-unien·nes des années 1930<sup>2</sup>. Rapidement et grâce à l'American Mathematical Society, elle acquiert un statut important. En 1938, elle est l'objet d'un *symposium* ; en 1940, d'une monographie ; en 1941, d'un colloque [Decaens 2018, 210–225]. La théorie des treillis dispose ainsi d'une grande visibilité qui favorise sa diffusion. Dans cet article, nous envisagerons le chapitre 12 de *La Philosophie de l'algèbre* (tome II) comme une réception particulière de cette théorie.

Pourtant, Vuillemin n'accède pas à la théorie au sens de l'ensemble immatériel de toutes les définitions, théorèmes et méthodes qui lui sont liées<sup>3</sup>. Au contraire, il me semble important de ne pas séparer la circulation d'une théorie des conditions matérielles qui la permettent<sup>4</sup>. Or, la référence principale de Vuillemin sur les treillis est la deuxième édition du traité *Lattice Theory* de Garrett Birkhoff [Birkhoff 1948]. La théorie des treillis qu'il appréhende est celle présentée dans le livre<sup>5</sup>, pas un ensemble immatériel d'idées aux contours flous. La seconde édition de *Lattice Theory*, remaniée et largement enrichie, paraît huit ans après la première [Birkhoff 1940] et devient la référence canonique sur le sujet jusque dans les années 1960, quand de nouvelles monographies paraissent [Decaens 2018, Annexe A]. En abordant la théorie des treillis par le biais du traité de Birkhoff, Vuillemin se réfère à une version particulière de la théorie, qui influence sa compréhension du sujet.

Dans cet article, nous nous intéresserons à l'histoire des treillis par le biais de la circulation de la théorie, depuis des mathématicien·nes états-unien·nes vers un philosophe français. D'une part, ce travail permet de contextualiser l'écriture de *La Philosophie de l'algèbre* en la situant par rapport à l'histoire de la théorie des treillis. D'autre part, il informe sur la diffusion des treillis en considérant l'ouvrage de Vuillemin comme un témoin de cette circulation. Le but de la première section est d'historiciser quelques caractéristiques de la théorie des treillis, telle qu'elle apparaît dans la deuxième édition du traité *Lattice Theory*. Il s'agira de montrer que la monographie matérialise une

1. Pour des précisions mathématiques sur la théorie des treillis voir [Grätzer 1996].

2. Sur l'histoire de la théorie des treillis voir [Mehrtens 1979], [Decaens 2018] et [Haffner 2019].

3. Pour une discussion de l'utilisation de la catégorie historiographique de *théorie* voir [Fisher 1966, 1967] et [Decaens 2018].

4. Sur les circulations mathématiques, voir [Nabonnand, Peiffer *et al.* 2015].

5. Ce qui ne signifie pas pour autant que la compréhension de Vuillemin de la théorie des treillis se limite au contenu de *Lattice Theory*.

forme particulière de la théorie, résultat d'une construction historique. Dans la deuxième section, nous nous intéresserons à la présentation de l'algèbre générale (et des treillis) par Vuillemin. Comment s'approprie-t-il la théorie et quelles sont les spécificités de sa réception des treillis ?

## 2 *Lattice Theory*, une forme matérielle de la théorie des treillis

La théorie des treillis n'est pas un objet fixe, défini une fois pour toutes et sujet uniquement à des développements intrinsèques. Selon les acteurs et actrices, les lieux et les moments où elle est considérée, sa forme et ses contours sont variables et font débat. En publiant une monographie sur le sujet, Birkhoff stabilise la théorie et bénéficie d'un support pour imposer sa propre définition. Dans cette section nous nous concentrerons sur quelques caractéristiques de *cette* théorie des treillis : le statut des treillis au sein de l'algèbre abstraite ; leurs liens avec les algèbres de Boole et l'écriture de leur histoire. En nous restreignant à quelques éléments de la théorie, il sera possible de décrire finement leur construction historique.

### 2.1 Les treillis : un outil algébrique pour l'étude de l'algèbre

Le premier article de Birkhoff sur la notion de treillis paraît en 1933 [Birkhoff 1933]. L'auteur y propose explicitement de développer une « théorie des treillis » qu'il inscrit immédiatement au sein de l'algèbre abstraite. Il entend, d'une part, traiter de l'algèbre abstraite depuis un « point de vue privilégié » combinatoire et, d'autre part, formaliser l'algèbre abstraite au sens de Bartel L. van der Waerden [van der Waerden 1930], c'est-à-dire, donner une « définition technique » incluant entre autres les groupes, les anneaux, les algèbres linéaires et les algèbres de Boole. Précisons ces objectifs.

Dans son traité sur l'algèbre abstraite, van der Waerden envisage les groupes, anneaux et corps comme un même type d'objet, mais ne définit pas de notion englobante dont chacun serait un cas particulier. Birkhoff fournit précisément cette définition avec les « algèbres généralisées » : un ensemble muni d'opérations internes [Decaens 2018, 76]. Il se donne ainsi une notion très générale dont les groupes, anneaux, etc. sont des cas particuliers. De plus, cette définition permet de retrouver des notions usuelles de l'algèbre abstraite, à l'aide d'objets plus généraux. Par exemple, les sous-groupes ou sous-anneaux sont des cas particuliers de « sous-algèbres » [Decaens 2018, 77]. Birkhoff formalise ainsi la similarité entre les différents objets considérés par van der Waerden. Enfin, écrit-il, un treillis est une algèbre au sens précédent et donc, un objet comparable aux objets classiques de l'algèbre

abstraite. La notion d'algèbre généralisée permet alors à la fois de formaliser un air de famille entre les différents objets de l'algèbre abstraite et d'insérer les treillis parmi ces objets.

Le second objectif de Birkhoff est de proposer une approche combinatoire de l'algèbre abstraite. En pratique, il s'intéresse à des opérations entre sous-algèbres d'une algèbre généralisée ; principalement à des unions et intersections [Decaens 2018, 60]. Muni de ces opérations, l'ensemble des sous-algèbres d'une algèbre constitue un treillis. Ainsi, un treillis est avant tout une structure qui permet d'étudier des unions et intersections (et donc des combinaisons) de sous-algèbres. Dès lors, Birkhoff entend caractériser une algèbre à partir de la forme du treillis de ses sous-algèbres. Par exemple, l'ensemble des sous-groupes normaux d'un groupe forme un treillis d'un type particulier, appelé « modulaire » [Birkhoff 1948, 65], tandis qu'un treillis formé de sous-groupes quelconques n'est pas modulaire en général. Par conséquent, une caractéristique de treillis distingue les sous-groupes normaux, un objet important de la théorie des groupes, des autres sous-groupes. De plus, la modularité permet également de distinguer un treillis d'idéaux d'un anneau d'un treillis de sous-anneaux quelconques. L'approche combinatoire des algèbres permet donc de saisir des propriétés importantes des algèbres et s'applique de façon transversale.

Birkhoff n'utilise pas immédiatement les treillis comme outils pour une algèbre de l'algèbre mais se sert de la notion d'algèbre généralisée pour justifier doublement l'introduction des treillis (ce sont des algèbres et un ensemble de sous-algèbres est un treillis). Son glissement d'intérêt vers les algèbres elles-mêmes se manifeste plus particulièrement dans un nouvel article dont le titre, « On the Structure of Abstract Algebras » [Birkhoff 1935], montre bien le revirement de l'auteur des « combinaisons de sous-algèbres » à « la structure des algèbres abstraites ». Birkhoff explique d'ailleurs vouloir mener « une étude des algèbres abstraites en tant qu'algèbres abstraites » [Birkhoff 1935, 433, je traduis]. Effectivement, il développe dans cet article des outils sur les algèbres elles-mêmes, comme le « produit direct » d'algèbres ou l'« espèce<sup>6</sup> » d'une algèbre. Il énonce également des théorèmes sur les algèbres, l'exemple principal étant le théorème aujourd'hui appelé « théorème HSP » [Birkhoff 1935, 441]. Les treillis ne sont plus ici l'objet d'intérêt principal mais jouent leur rôle d'outil pour l'étude des algèbres.

Les travaux sur les treillis des années 1930 et 1940 reprennent peu l'étude des algèbres au sens général précédent, mais s'emparent plutôt des treillis soit comme objet d'intérêt propre, soit comme outil pour des domaines classiques des mathématiques [Decaens 2018, chap. 3]. Birkhoff écrit de nouveau sur le sujet dans deux articles [Birkhoff 1944, 1945], où il introduit le nom d'« algèbre universelle<sup>7</sup> ». Dans la deuxième édition de *Lattice Theory*, il insère

6. En termes actuels, « signature ».

7. Cette dénomination qui apparaît déjà dans *Lattice Theory* [Birkhoff 1940] fait référence à un traité d'Alfred N. Whitehead [Whitehead 1898].

un avant-propos sur l'algèbre qui commence par présenter son point de vue général [Birkhoff 1948, vii, je traduis]. Il suppose son lectorat « familier » des différents « types d'algèbre » (groupes, anneaux, espaces vectoriels) et donne des « définitions extrêmement générales » de manière à se placer à un « degré de généralité adéquat » pour pouvoir traiter de « toutes ces algèbres ». Ainsi, bien que peu de travaux aient été consacrés à l'étude des algèbres en tant que structures englobantes, Birkhoff les introduit comme des objets nécessaires pour énoncer des résultats généraux.

De nouveau, cette définition lui permet de présenter les treillis comme des algèbres en les comparant aux structures usuelles de l'algèbre abstraite et de justifier de leur « appliquer la terminologie générale de l'algèbre abstraite » [Birkhoff 1948, 19, je traduis] (c'est-à-dire, par exemple, de définir des sous-treillis ou des (iso)morphismes de treillis). De plus, il donne un certain nombre de théorèmes vrais pour une algèbre quelconque, qui sont donc valables pour un groupe, un anneau ou un treillis. Ces résultats sont aussi bien des généralisations de théorèmes connus pour des algèbres particulières (la généralisation du théorème de Jordan-Hölder [Birkhoff 1948, 88]) que des théorèmes originaux (le théorème de représentation d'une algèbre comme union sous-directe d'algèbres sous-directement irréductibles [Birkhoff 1948, 92]). Comme nous l'avons vu, les treillis bénéficient également d'une réflexivité puisqu'ils sont un outil pour l'étude des algèbres. Ainsi, ils ne permettent pas seulement de saisir ce qui est commun à différentes structures mais d'aborder ce commun à un niveau de généralité supérieur. La théorie des treillis est ainsi autant une théorie algébrique qu'une théorie de l'algèbre.

## 2.2 Présenter les algèbres de Boole comme des treillis particuliers

À partir de 1933, Marshall H. Stone publie une série d'articles dans lesquels il propose d'aborder les algèbres de Boole par les méthodes de l'algèbre abstraite<sup>8</sup>. Dans un premier article [Stone 1934], il envisage seulement une analogie entre algèbres de Boole et anneaux : puisque les deux sont définis à partir d'une addition et d'une multiplication, il suggère d'utiliser des outils de théorie des anneaux (les morphismes, idéaux et quotients) sur les algèbres de Boole. Son but n'est pas l'étude algébrique des algèbres de Boole, il s'agit seulement d'un préliminaire à l'utilisation des algèbres de Boole en topologie. Cependant, ces définitions lui permettent, à partir d'une algèbre de Boole, de construire une « algèbre d'ensembles », c'est-à-dire un ensemble d'ensembles muni des opérations d'union et d'intersection, analogues aux sommes et produits de l'algèbre de Boole de départ [Stone 1934, 198]. Ce théorème sera dit « de représentation », il permet de représenter les

---

8. À ce sujet, voir [Serfati 2013].

éléments et opérations abstraites d'une algèbre de Boole par des ensembles et des opérations sur les ensembles.

À la suite du théorème, Stone précise qu'« [u]n théorème plus général a été ensuite obtenu et publié par Garrett Birkhoff » [Stone 1934, 202, je traduis]. Il revendique donc un théorème inédit, tout en attribuant à Birkhoff un résultat similaire. Ce dernier a en effet montré qu'un ensemble d'algèbres formant un treillis distributif est isomorphe à une classe d'ensembles [Birkhoff 1933, 461]. Stone identifie donc des théorèmes qui établissent une correspondance entre un objet abstrait (une algèbre de Boole ou un treillis distributif) et un ensemble d'ensembles. Il les distingue toutefois selon deux niveaux de généralité. De manière informelle, il établit ainsi un lien entre algèbres de Boole et treillis, d'une part, et entre ses travaux et ceux de Birkhoff, d'autre part. Dans les années suivantes, Stone montre en fait qu'une algèbre de Boole, plus qu'un simple analogue, est un anneau à part entière [Stone 1935]. Comme Birkhoff, il justifie donc de placer les algèbres de Boole au sein de l'algèbre abstraite, ce qui l'amène à une « révision radicale » de ses recherches. De plus, Holbrook MacNeille, un étudiant de Stone et Birkhoff, montre dans son doctorat comment construire une algèbre de Boole à partir d'un treillis distributif par « une construction purement algébrique ». Il formalise ainsi les liens établis par Stone et Birkhoff entre leurs travaux [Decaens 2018, 155–159].

Dès lors, les résultats obtenus sur les algèbres de Boole peuvent servir de modèles à une étude algébrique des treillis distributifs, ce que font Stone et Birkhoff, chacun dans un article sur la représentation d'un treillis distributif par un ensemble d'ensembles. L'article de Stone [Stone 1937] consiste essentiellement à reprendre ses travaux sur les algèbres de Boole dans le cas des treillis distributifs. Dans son article [Birkhoff 1937], Birkhoff introduit la notion d'anneau d'ensembles : un ensemble d'ensembles muni des opérations d'union et d'intersection et vérifiant (entre autres) les propriétés d'un anneau. En laissant de côté la nature des éléments d'un tel anneau (c'est-à-dire en oubliant que ce sont des ensembles), écrit Birkhoff, tout anneau d'ensembles est un treillis distributif. Le théorème de représentation garantit, réciproquement, que tout treillis distributif est un certain anneau d'ensembles. Birkhoff propose donc un théorème analogue au théorème de représentation des algèbres de Boole et inscrit son travail dans la continuité de celui de Stone, qui a développé « [u]ne théorie complète de la représentation pour les algèbres de Boole par des corps d'ensembles » [Birkhoff 1937, 447, je traduis]. Ainsi, Birkhoff renforce les liens entre les treillis distributifs et les algèbres de Boole et établit un parallèle entre, d'une part, treillis distributifs et algèbres de Boole et, d'autre part, anneaux et corps. En effet, dans une algèbre de Boole et dans un corps tout élément possède un inverse, ce qui n'est pas le cas dans un treillis distributif et dans un anneau. Le rapprochement entre treillis distributifs et algèbres de Boole est ainsi formalisé et comparé à la relation entre anneaux et corps, usuelle en algèbre abstraite.

Les liens établis entre treillis et algèbres de Boole permettent à Birkhoff d'inclure ces dernières dans la théorie des treillis. Lors du *symposium* de 1938

sur la théorie des treillis [Decaens 2018, 211–212], par exemple, Stone présente son théorème de représentation d’une algèbre de Boole et ne mentionne les treillis que brièvement. Dans *Lattice Theory* [Birkhoff 1948], le chapitre 10 est consacré aux algèbres de Boole. Birkhoff définit les algèbres de Boole comme des treillis particuliers puis comme des anneaux et énonce le théorème de représentation. La théorie des treillis intègre ainsi le lien construit par Birkhoff, Stone et MacNeille avec les algèbres de Boole.

### 2.3 Une histoire des treillis comme aboutissement de l’algèbre abstraite et de l’algèbre de la logique

Quelques mois après la publication de son premier article sur les treillis [Birkhoff 1933], Birkhoff le complète par une note d’une page [Birkhoff 1934] dans laquelle il écrit avoir été informé par Øystein Ore<sup>9</sup> de la similarité de ses travaux avec ceux de Richard Dedekind. Son but est d’annoncer ce lien. Pour cela, il liste des définitions formellement équivalentes et des théorèmes présents chez Dedekind, certains étant cependant « implicites », « sous-entendus » ou même seulement « présagés ». Par ailleurs, la comparaison permet également de souligner l’originalité de certains de ses résultats. Birkhoff et Ore, qui publie également sur les treillis [Corry 2004, chap. 6], [Decaens 2018, chap. 2], construisent la figure d’un Dedekind fondateur de la théorie des treillis. Ils se donnent cet ancêtre et l’impliquent dans l’histoire de la théorie. La figure de Dedekind est même mobilisée par exemple dans des querelles de priorité ou pour inscrire les treillis dans l’histoire de l’algèbre abstraite [Decaens 2018, 86–89].

L’insertion des treillis dans l’histoire de l’algèbre se fait également dans des discours historiques, comme celui d’Eric T. Bell pour le cinquantenaire de l’American Mathematical Society [Decaens 2018, 176–183]. Bell fait de l’« abstraction » le moteur du développement des mathématiques (qui progressent du particulier au général). Or, ce qu’il nomme « l’algèbre abstraite américaine<sup>10</sup> » est précisément la théorie des treillis. Il réserve son dernier paragraphe à une présentation élogieuse des treillis, valorisant leur abstraction et leur pouvoir unificateur. Cette algèbre abstraite, explique Bell, trouve « ses racines » dans les travaux de Dedekind et se développe en Allemagne puis aux États-Unis, dans les travaux de Birkhoff et Ore (qu’il présente). Par ailleurs, Bell construit également une rupture, d’une part, entre l’algèbre abstraite et « l’algèbre linéaire » et, d’autre part, entre la nouvelle théorie des treillis et les mathématiques précédentes. Ainsi, il fait de la théorie des treillis une nouvelle algèbre, aboutissement (le plus abstrait) de l’algèbre abstraite.

---

9. Ore, Robert Fiske et Emmy Noether viennent alors d’éditer les œuvres de Dedekind [Dedekind 1930-1932].

10. Pour Bell, l’algèbre états-unienne se distingue par son abstraction. Sur l’utilisation de frontières nationales en histoire des mathématiques, voir [Mehrtens 1996], [Parshall 1996] et [Goldstein 2007].

Dans *The Development of Mathematics* [Bell 1945], Bell fait de nouveau une présentation sans réserve de la théorie des treillis, achèvement de l'histoire de l'algèbre. Dedekind est présenté comme un père fondateur des treillis, ce qui prouve « son génie perspicace et prophétique » [Bell 1945, 285, je traduis]. L'importance de Dedekind dans l'histoire de l'algèbre renforce la pertinence de l'étude des treillis qui, en retour, participe à la construction de la figure du mathématicien génial. Par ailleurs, Bell rend historiques les liens entre treillis et algèbres de Boole. Les treillis sont définis comme une continuité aux algèbres de Boole et George Boole est présenté comme un autre père fondateur de la théorie des treillis, ayant « anticipé » son importance « sans la réaliser ». Finalement, écrit Bell, « [l']algèbre de Boole, la source historique de la théorie des treillis, a trouvé sa place naturelle dans la théorie comme un type particulier de treillis » [Bell 1945, 261, je traduis]. Le livre connaît un certain succès et est, en particulier, la seule référence historiographique citée par Vuillemin dans le douzième chapitre de *La Philosophie de l'algèbre*, tome II.

*Lattice Theory* intègre une certaine histoire de la théorie des treillis, qui inclut notamment les éléments précédents. Birkhoff présente « [l]e développement de la théorie des treillis » en trois phases : l'algèbre de la logique ; les premiers articles des années 1930 ; et les travaux développant la théorie établie dans les années 1940 [Birkhoff 1948, iii]. Il place ainsi la théorie des treillis dans un double héritage : celui de l'algèbre de la logique (intégré à l'histoire des treillis) et celui de l'algèbre abstraite. Birkhoff fait ainsi des treillis une réception états-unienne de l'algèbre abstraite et accentue l'effet de rupture entre les deux. Enfin, comme Bell, il fait des algèbres de Boole l'origine des treillis [Birkhoff 1948, 152], les liens formels entre treillis et algèbres de Boole justifiant de réunir leurs histoires. En conclusion l'histoire des treillis est présentée comme un point final et un point de rencontre entre les histoires de l'algèbre abstraite et de l'algèbre de la logique.

### 3 Algèbre générale et treillis dans *La Philosophie de l'Algèbre*

L'édition de *Lattice Theory* fige une forme particulière de la théorie des treillis et permet sa circulation géographique et temporelle. Comme le note Herbert Mehrtens, la théorie se diffuse largement à l'échelle internationale, notamment en France [Mehrtens 1979]. Intéressons-nous maintenant au douzième chapitre de *La Philosophie de l'algèbre*, t. II qui témoigne d'une réception particulière des treillis. Le parcours qui amène Vuillemin à s'intéresser aux treillis est pour l'instant inconnu<sup>11</sup>. Cela dit, il n'est pas le seul acteur de la circulation des treillis en France. Avant lui, plusieurs auteurs et autrices

---

11. Voir cependant [Maronne 2014].

s'intéressent aux treillis et publient sur le sujet en français. J'essayerai dans un premier temps de dresser un panorama de ces recherches avant 1962, date de la publication du premier tome de *La Philosophie de l'Algèbre* [Vuillemin 1962]. Dans un second temps, je présenterai en détail le chapitre de Vuillemin sur l'« algèbre générale » en montrant les circulations dont il témoigne et les spécificités de sa réception des treillis.

### 3.1 Des treillis en France avant Vuillemin

Des publications sur les treillis paraissent en français dès le milieu des années 1930. Ore publie en 1936 une présentation générale de l'algèbre abstraite en français [Ore 1936a]. C'est alors un spécialiste reconnu de l'algèbre abstraite et joue un rôle clé pour la promotion des treillis [Corry 2004], [Decaens 2018]. Son but est de donner un panorama général de l'étude des « systèmes algébriques ». Il présente à la suite les corps, les anneaux, les algèbres linéaires, les groupes et enfin les treillis. Ceci lui permet de faire des treillis une partie légitime de l'algèbre abstraite. De plus, bien que la section sur les treillis soit très courte (même relativement aux autres), Ore insiste sur leur intérêt transversal, du fait de leur importance dans les théorèmes de décomposition présents dans chaque théorie algébrique. Ce sont ces théorèmes qui permettent décrire les « propriétés structurelles ». Ore profite de même de son invitation au dixième Congrès International des Mathématiciens pour promouvoir les treillis comme outil de décomposition, c'est-à-dire de réduction d'un système en parties plus simples [Ore 1936b]. Comme nous le verrons, cet usage des treillis sera également mis en avant par Vuillemin.

En 1938, Valère Glivenko est l'auteur d'un nouveau fascicule [Glivenko 1938], dans la même série que Ore, où il traite de treillis. Ces derniers donnent accès aux « fondements de plusieurs disciplines mathématiques d'une façon permettant de comprendre ce qui est commun à ces disciplines et ce qui leur est spécifique » [Glivenko 1938, 3]. Il dépasse même le cadre de l'algèbre, en proposant d'utiliser les treillis en géométrie projective, en topologie, en probabilités et en logique. À la différence de Ore, Glivenko consacre l'intégralité de son exposé aux treillis. Il commence par définir les treillis et donne le théorème de Jordan-Hölder avant de s'intéresser à des treillis munis d'une topologie et notamment aux travaux sur les treillis distributifs et les algèbres de Boole (présentés à la section précédente). Notons que Glivenko propose d'utiliser les treillis en logique. Parmi d'autres exemples de treillis, il donne celui d'un treillis constitué par un ensemble de propositions, muni de la conjonction et de la disjonction. Cette algébrisation de la logique constitue une pratique des treillis importante pour Vuillemin.

À partir de 1938, Paul et Marie-Louise Dubreil-Jacotin publient une série d'articles sur les treillis constitués des relations d'équivalence sur un ensemble<sup>12</sup>. Ce treillis permet de « généraliser » des théorèmes comme les

---

12. Pour une présentation de ces travaux, voir [Hollings 2014, chap. 7].

théorèmes d'isomorphisme ou de Jordan-Hölder (valables pour des groupes ou des anneaux) à un ensemble quelconque. Autrement dit, Dubreil et Dubreil-Jacotin se donnent les moyens d'énoncer ces théorèmes sans recourir à la nature particulière des structures sur lesquelles ils sont valables, les treillis se substituant aux outils usuels mais particuliers (à la théorie des groupes, par exemple). Ces travaux sont le point de départ de recherches algébriques sur les treillis et les relations, dont l'histoire est à faire. En 1941, Dubreil est chargé d'une série de conférences d'algèbre qui donnent lieu à un traité [Dubreil 1946]. Dans sa présentation de l'ouvrage, Gaston Julia mentionne l'héritage de « l'École américaine, particulièrement de Ø. Ore et Birkhoff » [Dubreil 1946, vi]. Pourtant, la notion « fondamentale » est celle d'équivalence et Dubreil ne mentionne pas les treillis, même s'il reprend des outils sur les équivalences introduit dans ce cadre.

Les treillis font toutefois l'objet de publications de recherche en France et apparaissent également dans des contextes d'enseignement. Entre 1945 et 1947, Albert Châtelet<sup>13</sup> profite de son cours à la Sorbonne pour exposer sur les treillis modulaires et les treillis de relations d'équivalence [Châtelet 1945, 1946]. À la suite, il publie un article sur les treillis [Châtelet 1947*b*] mais, comme Dubreil, s'oriente ensuite plutôt vers l'étude des relations [Châtelet 1947*a*]. Dubreil-Jacotin utilise sa position de professeuse à l'université de Poitiers pour diffuser les treillis. Ses étudiants, Léonce Lesieur et Robert Croisot, travaillent sur le sujet dans le cadre de leur doctorat et assurent avec elle un cours, qui donne lieu à la publication d'un traité [Dubreil-Jacotin, Lesieur *et al.* 1953].

Les treillis font également l'objet de réticences. Dans une lettre de 1946 à Henri Cartan, par exemple, André Weil critique les treillis et la « fausse généralité » qu'ils engendrent [Audin 2010, 120]. Pour lui, l'abstraction n'est pas un but en soi mais un outil pour l'économie des moyens. Unifier des démonstrations à l'aide des treillis pour finalement énoncer chaque résultat particulier est vide de sens. Dans les *Éléments de mathématiques*, [Bourbaki 1957] le groupe Bourbaki a considéré l'inclusion des treillis, pour finalement les rejeter. Dans l'état 3 (ou 4) du chapitre 4, les treillis sont présentés sous le nom d'« ensembles réticulés » sans être particulièrement importants. Au contraire, dans l'état 5 (où la dénomination « treillis » apparaît) Bourbaki écrit que ces ensembles ont une « une importance fondamentale dans toute la Mathématique » [Bourbaki NAa, 68] avant de retirer cet avis dans l'état 6 [Bourbaki NAb, 79]. La place des treillis est ainsi discutée. Notons qu'il n'est pas question de faire une étude algébrique des treillis. Il s'agit plutôt de caractériser certains ensembles ordonnés que d'utiliser les treillis comme outils pour l'algèbre abstraite, encore moins d'ajouter une nouvelle structure algébrique comme le font Ore ou Birkhoff. D'ailleurs, contrairement à eux, Bourbaki ne définit pas un treillis par des opérations mais seulement à partir de son ordre.

---

13. Sur Châtelet, voir [Gauthier & Goldstein 2013], [Radtka 2018] et [Gauthier à paraître].

Dresser un panorama détaillé du développement d'une théorie des treillis en France et de ses interactions avec d'autres domaines des mathématiques est un sujet à part entière, qui dépasse le cadre de cet article<sup>14</sup>. Ici, j'ai tenté de donner quelques pistes pour comprendre l'intérêt de Vuillemin pour les treillis. Comme nous allons le voir dans les sections suivantes, sa lecture des treillis incorpore des éléments que nous avons rencontrés dans les travaux précédents : un grand intérêt pour les théorèmes de décomposition, une approche de la logique grâce aux treillis et une volonté de fonder l'algèbre sur les treillis.

### 3.2 L'algèbre générale, une algèbre de l'algèbre

Abordons maintenant le douzième chapitre de *La Philosophie de l'algèbre*, t. II, « L'Algèbre générale ». C'est le dernier chapitre du livre avant la conclusion. Il est composé d'une première partie mathématique et philosophique, motivant l'introduction des treillis, puis d'une présentation mathématique des treillis et des algèbres de Boole. Dans un premier temps, nous nous intéresserons à un point capital de l'algèbre générale pour Vuillemin : sa réflexivité ; l'algèbre générale a pour objet d'étude l'algèbre elle-même.

La première définition, informelle, de l'algèbre générale donnée par Vuillemin est qu'elle est une « Algèbre des structures » ; « structure » devant s'entendre au sens usuel en algèbre abstraite d'un ensemble muni d'opérations (un groupe, un anneau, un corps, etc.). Premièrement, l'algèbre générale a pour objets les structures et est, en ce sens, une « algèbre au second degré ». Elle se distingue de l'algèbre abstraite, qui s'intéresse aux théorèmes valables au sein d'une structure mais pas aux théorèmes sur les structures elles-mêmes. Deuxièmement, elle permet de considérer toutes les structures « dans leurs variations relatives aux adjonctions d'axiomes de plus en plus particuliers » [Vuillemin inédit, 326]. Il s'agit donc de s'intéresser aux structures les plus générales, pour ensuite restreindre son propos à des structures particulières. Comme le note Vuillemin, le théorème de Wedderburn, qui permet de décomposer une algèbre linéaire en un produit d'algèbres, est « intermédiaire », puisqu'il a bien pour objet la décomposition de structures mais qu'il ne vaut pas pour *toutes* les structures (il ne concerne que les algèbres linéaires associatives). Ainsi, écrit-il, ce théorème permet de constater « des analogies qu'on peut établir entre les structures algébriques et les algèbres des structures » [Vuillemin inédit, 327–328]. Dans une structure algébrique, des théorèmes portent sur la décomposition d'éléments en éléments plus simples, de la même manière que le théorème de Wedderburn permet la décomposition d'une structure en structures plus simples. La distinction entre « algèbre abstraite » et « algèbre générale » est finalement la suivante : « tandis que l'Algèbre abstraite étudiait systématiquement les diverses structures [...], l'Algèbre générale part de définitions s'appliquant à toutes ces Algèbres particulières »

14. Christophe Eckes a attiré mon attention sur l'importance des travaux d'Albert Lautman, voir [Lautman 2006] et [Eckes à paraître].

[Vuillemin inédit, 329]. Premièrement, l'algèbre générale a donc pour objets les structures plutôt que les éléments des structures. Deuxièmement, elle porte sur toutes les structures plutôt que sur une structure particulière.

Pour ce faire, explique Vuillemin, il faut commencer par se débarrasser des considérations sur la nature des éléments dont sont composées les structures. Ainsi, si l'algèbre générale garde la notion d'opérations agissant sur des éléments, la nature de ces éléments est « abstraite », c'est-à-dire non spécifiée. Par exemple, il ne s'agit plus d'opérations entre des nombres entiers ou des éléments d'un groupe. De plus, l'algèbre générale permet d'opérer non seulement sur les éléments d'une structure, mais également sur ses sous-structures (par exemple sur les sous-groupes d'un groupe). Autrement dit, elle permet d'énoncer des résultats sur une structure sans se référer aux éléments qui la composent. Ainsi, écrit Vuillemin :

Une telle théorie s'intéresse donc non plus à des éléments particuliers comme l'ancienne Algèbre, non plus même à la structure abstraite qui relie des éléments non particularisés, comme l'Algèbre abstraite, mais [à] l'ensemble des relations entre une structure et les formes structurales qu'on peut y établir. [Vuillemin inédit, 329]

Notons que cette volonté explicite de se débarrasser des éléments pour ne s'intéresser qu'à la structure qu'ils forment est exprimée par Ore dès 1935 [Ore 1935, 406] et reprise par Bell [Bell 1945, 259]. Une fois ce programme établi, il est toutefois utile de retrouver des objets familiers de l'algèbre abstraite. Ainsi, de même que la définition de sous-structure généralise les notions de sous-groupe ou de sous-anneau, il convient de généraliser des outils comme ceux d'isomorphisme, de congruence ou d'homomorphisme. Pour cela, Vuillemin introduit un nouvel outil : les treillis.

Vuillemin présente les treillis comme « la relation la plus générale entre une Algèbre et ses sous-Algèbres » [Vuillemin inédit, 329]. Il insiste sur leur importance puisque « la théorie jouera, sur le plan de l'Algèbre générale, le même rôle unificateur que la structure de groupe dans l'Algèbre abstraite » [Vuillemin inédit, 329–330]. En effet, dans les chapitres précédents, Vuillemin pointe le rôle d'exemple qu'a joué la théorie des groupes pour l'algèbre abstraite. Les concepts, méthodes et résultats de la théorie des groupes ont servi de modèles pour l'étude d'autres structures, d'où leur rôle unificateur. Il résume : « [l]e groupe était un exemplaire objet d'étude; mais c'était par analogie seulement qu'on pouvait l'incorporer à l'étude de la pensée » [Vuillemin inédit, 330]. En algèbre générale, il ne s'agit plus seulement de proposer une méthode commune pour l'étude des différentes structures, mais de traiter toutes les structures de manière générale, ce que permet la théorie des treillis. « Une fois reconnue la forme unifiante », les treillis doivent être abordés comme « une théorie indépendante pour ses propres mérites », conclut Vuillemin [Vuillemin inédit, 332].

Pour donner la définition formelle d'un treillis, Vuillemin utilise trois exemples de couples d'opérations réciproques : prendre le pgcd et ppcm de

deux nombres, prendre le minimum et le maximum de deux nombres et prendre l'union et l'intersection de deux ensembles. Ces trois couples d'opérations ont des propriétés communes : l'idempotence, la commutativité, l'associativité et l'absorption [Vuillemin inédit, 335], qui sont précisément les axiomes des treillis. Vuillemin propose donc immédiatement trois exemples de treillis, pour chaque couple d'opérations : l'ensemble des nombres naturels pour les deux premiers, l'ensemble des sous-ensembles d'un ensemble pour le dernier. Par ailleurs, un treillis est bien un objet algébrique puisque « l'existence de deux lois de composition sur un treillis rend évidente l'analogie d'une telle structure avec les structures proprement algébriques » [Vuillemin inédit, 340]. Il légitime ainsi le traitement algébrique des treillis, c'est-à-dire l'application des objets usuels de l'algèbre abstraite aux treillis (isomorphisme, congruence, somme, etc.). Finalement,

[1]a tâche fondamentale de l'Algèbre générale consiste à étudier systématiquement cette structure quasi-algébrique, et à examiner à quelles conditions elle assure, dans le cas général où l'on a affaire non plus aux nombres, mais aux théories déductives elles-mêmes, la décomposition élémentaire unique souhaitée. [Vuillemin inédit, 336–337]

Ainsi, l'algèbre générale est l'étude des treillis en tant que structure algébrique. Ses objets sont les structures elle-mêmes. De plus, ces structures étant des « théories déductives », les treillis formalisent en général l'étude du raisonnement.

### 3.3 Une décomposition des connaissances complexes en connaissances simples

Pour Vuillemin, l'algèbre générale n'importe pas seulement pour sa généralité ou sa réflexivité. Elle est également une algèbre de la connaissance. Il écrit :

[1]'Algèbre abstraite demeurerait un objet pour la théorie de la connaissance. L'Algèbre générale n'est autre que cette théorie elle-même, exprimée sous la forme symbolique des mathématiques. [Vuillemin inédit, 330]

Les treillis permettent donc une formalisation de la connaissance, c'est-à-dire une théorie de la science « en faisant l'économie d'une référence constante au sens » [Vuillemin inédit, 330]. Autrement dit, l'algèbre générale a pour objet la forme des théories scientifiques et donc leur validité. Ainsi, conclut Vuillemin, elle se confond avec la philosophie théorique. Il poursuit :

dans la mesure où le problème fondamental de la philosophie théorique consiste dans l'examen de la nature des théories scientifiques, c'est-à-dire des systèmes déductifs et de leur rapport aux différentes sous-théories ou « parties » qui le composent, on

voit que ce problème fondamental se confond avec celui de la décomposition élémentaire d'une théorie. [Vuillemin inédit, 331]

La philosophie théorique et l'algèbre générale étant identifiées, la seconde peut maintenant aborder les problèmes de la première. Ici, le « problème fondamental » qui se pose est la décomposition d'une théorie en parties plus élémentaires. On retrouve la question de la décomposition d'une structure, à laquelle répondait le théorème de Wedderburn (vu dans la section précédente) pour les algèbres linéaires. Plus généralement, il s'agit maintenant de s'intéresser au problème de la décomposition dans une algèbre générale.

Les treillis permettent la formalisation de la décomposition des systèmes déductifs. Dans les chapitres précédents, Vuillemin a décrit la démarche de Dedekind pour étendre le théorème fondamental de l'arithmétique sur les nombres entiers à des domaines plus larges de nombres algébriques. Ceci, explique-t-il, est rendu possible en remplaçant la relation de divisibilité entre nombres entiers par celle d'inclusion entre ensembles de nombres algébriques. Effectivement, la décomposition d'un nombre en produit de nombres premiers a pour analogue une décomposition de tout ensemble de nombres algébriques en un produit de certains ensembles (dits premiers), ce produit étant lui-même un ensemble inclus dans l'ensemble décomposé. Vuillemin qualifie ce mouvement d'« interprétation logique d'une opération qui primitivement n'avait de sens qu'arithmétique » [Vuillemin inédit, 322], la relation de divisibilité étant « arithmétique », tandis que celle d'inclusion est « logique ». Or, comme nous l'avons vu dans les exemples précédents, un treillis décrit aussi bien un ensemble de nombres muni du pgcd et du ppcm qu'un ensemble d'ensembles muni de l'union et de l'intersection. Vuillemin l'exprime par le terme d'« abstraction » : la relation de division perd son sens « concret » lié aux nombres entiers pour prendre un sens plus général, c'est-à-dire une relation d'ordre dans un treillis. Au final, les treillis décrivent donc la forme de ces théories (des nombres ou des ensembles) en faisant abstraction de la nature des éléments ou des opérations impliquées. Ceci explique « la véritable raison mathématique de la subordination des mathématiques à la logique » [Vuillemin inédit, 325]. Ainsi, les treillis sont des « structures mi-logiques, mi-algébriques » [Vuillemin inédit, 326] en deux sens. Premièrement, ils décrivent la forme d'une théorie plutôt que son contenu, c'est-à-dire la structure plutôt que les éléments la composant. Deuxièmement, ils permettent de s'intéresser à des théories logiques, comme la théorie des ensembles, par des méthodes algébriques.

De la même manière que l'étude des ensembles prolonge celle des nombres, remarque Vuillemin, les théorèmes de Wedderburn, de Jordan-Hölder ou de Noether étendent respectivement la décomposition au cas des algèbres linéaires, des groupes ou des anneaux commutatifs. Or, l'auteur reprend de Bell l'idée qu'il y a une « caractéristique commune » à ces décompositions et que celle-ci s'exprime en termes de treillis [Vuillemin inédit, 332]. Effectivement,

ces théorèmes disposent tous d'une formulation grâce aux treillis<sup>15</sup>. La décomposition de structures par les treillis est donc effective. Ainsi, conclut Vuillemin,

le problème de la décomposition unique d'une théorie scientifique ou d'un système déductif permet de formuler de façon enfin précise et objective le problème classique de l'« analyse » philosophique et de donner un statut autre qu'imaginaire ou qu'analogique aux anciennes notions d'idées « simples » et complexes et de réduction du complexe au simple. [Vuillemin inédit, 332]

Le but de l'algèbre générale est ainsi de décomposer les théories scientifiques, c'est-à-dire d'étudier le treillis des sous-structures de la structure formalisant la théorie voulue.

La présentation des treillis dans *La Philosophie de l'algèbre*, t. II, est donc orientée vers les théorèmes de décomposition. Après avoir défini les treillis, Vuillemin traite de « quelques treillis particuliers et des théorèmes correspondants de décomposition » [Vuillemin inédit, 342]. Il choisit ainsi des types de treillis remarquables selon les théorèmes de décomposition qu'ils permettent d'obtenir. Il explique que

[l]a méthode consistera donc à enrichir peu à peu le système des axiomes auquel devra correspondre un treillis et à examiner sur celui-ci quel type de décomposition il permet. Cette méthode utilise elle-même constamment le procédé de la représentation [...]. En effet, il est en général aisé de trouver pour une structure algébrique formelle, telle qu'un treillis plus ou moins spécialisé, un ou plusieurs « modèles » isomorphes à cette structure. Pour que l'isomorphisme soit toutefois assuré entre la structure et le modèle – ce modèle pouvant lui-même être abstrait et étant désigné par le mot plus général de représentation –, il faut toutefois s'assurer que toute structure de représentation est isomorphe à la structure de départ. [Vuillemin inédit, 341–341a]

Il s'agit, d'une part, de trouver les treillis convenables pour énoncer tel ou tel théorème de décomposition et, d'autre part, de trouver une structure concrète (une représentation) vérifiant les axiomes du treillis ainsi trouvé. Par exemple, explique Vuillemin, un treillis distributif est représenté par un anneau d'ensembles<sup>16</sup>. De plus, dans un treillis distributif, tout élément peut être décomposé (de manière unique) en une union de points<sup>17</sup>. Le deuxième exemple donné par Vuillemin est celui des algèbres de Boole. Elles sont introduites à partir d'exemples sur les ensembles et l'essentiel de la section sert à montrer le théorème de représentation d'une algèbre de Boole (vu dans la section 2.2). En effet, Vuillemin cherche à formaliser la logique grâce aux

15. Par exemple, voir [Birkhoff 1948, 94, 87–89 et 93].

16. Comme nous l'avons vu dans la section 2.2.

17. Dans un treillis, un point est un élément strictement supérieur à l'élément minimal  $O$  et n'étant supérieur à aucun autre élément que  $O$ .

treillis, il souligne donc que les algèbres de Boole jouent un rôle crucial dans « la logique des classes » (c'est-à-dire le calcul sur les ensembles) et que « [l]e théorème de Stone servira, en Logique, pour décider si un système déductif est catégorique<sup>18</sup> » [Vuillemin inédit, 354a]. Après un exposé mathématique sur les treillis, il revient ainsi à son principal objectif : la formalisation de la logique, qui permet l'étude algébrique des systèmes déductifs.

Vuillemin envisage la décomposition d'une structure algébrique comme une formulation mathématique de la réduction d'une vérité complexe en propositions simples. Dans ce contexte, les treillis jouent un rôle privilégié puisqu'ils fournissent le cadre adéquat pour énoncer les théorèmes de décomposition. De plus, les treillis comme les algèbres de Boole peuvent être constitués d'objets logiques et sont représentés par des structures composées d'ensembles. La théorie des treillis est ainsi une algèbre de l'algèbre et une théorie abstraite de la logique.

## 4 Conclusion

Les treillis occupent dans *La Philosophie de l'algèbre*, t. II, une place éminente puisqu'ils permettent l'unification des différentes théories algébriques. En cela, Vuillemin reprend le point de vue de Birkhoff dans *Lattice Theory*. Premièrement, les treillis sont présentés comme des structures algébriques au même titre que les groupes ou les anneaux. Vuillemin le justifie de la même manière que Birkhoff : il s'agit dans tous les cas d'ensembles d'éléments munis d'opérations. Deuxièmement, les treillis sont inscrits dans une histoire de l'algèbre qui progresse de l'algèbre des équations vers l'algèbre abstraite pour aboutir à l'algèbre générale. En particulier, Vuillemin utilise régulièrement la figure de Dedekind en faisant des treillis une généralisation de ses travaux. Il établit en même temps une continuité entre les différentes algèbres (par exemple, les outils de l'algèbre générale sont ceux de l'algèbre abstraite) et une rupture (l'algèbre générale est algèbre de l'algèbre et non des structures particulières). Cet effet de continuité et de rupture est également présent chez Birkhoff, qui revendique à la fois un héritage allemand (l'algèbre abstraite) et un héritage anglo-saxon (l'algèbre de la logique). Troisièmement, les treillis permettent une réflexivité de l'algèbre en tant que structures (éventuellement) composées de structures ; ce qui fait de la théorie des treillis une algèbre de l'algèbre. Dans son premier article sur les treillis, Birkhoff introduisait les treillis comme des objets composés des sous-algèbres d'une algèbre. Il s'agissait alors de légitimer et de motiver l'utilisation des treillis. Enfin, Vuillemin

---

18. Vuillemin appelle « catégorique » un système dans lequel on peut toujours décider si une proposition est vraie ou fausse, voir [Vuillemin 1962, 498], [Vuillemin inédit, 360]. En langage moderne, si par « vrai » et « faux » on entend « démontrable » et « réfutable », ce système serait dit « complet syntaxiquement » (merci à David Rabouin qui a noté cette différence de vocabulaire).

s'intéresse particulièrement au rapprochement entre treillis et algèbres de Boole. Leur représentation comme structures composées d'ensembles permet de les considérer comme des formalisations de la logique, ce qui justifie son projet d'algébrisation de la philosophie.

Inversement, nous pourrions préférer insister sur ce qui distingue Vuillemin en tant que théoricien des treillis. Bien sûr, son projet philosophique influence largement sa réception des treillis. Il n'utilise véritablement qu'un seul des 16 chapitres de *Lattice Theory*, celui consacré aux applications de la théorie à l'algèbre. Son propos n'est pas de faire une présentation de l'ensemble de la théorie. Il se concentre sur les théorèmes de décomposition (à la manière d'Ore) qui se trouvent majoritairement dans le chapitre en question. En revanche, il leur donne une portée qui dépasse le cadre proprement algébrique : servir à l'étude des théories scientifiques. Pour finir, l'inscription du texte de Vuillemin dans le paysage mathématique français mériterait une étude plus poussée. D'une part, il emploie le terme « treillis<sup>19</sup> », introduit par Châtelet [Dubreil-Jacotin, Lesieur *et al.* 1953, vii] et utilisé par le couple Dubreil-Jacotin, mais son concept fondamental est le treillis et non la relation. D'autre part, il n'utilise pas le terme « espace réticulé » de Bourbaki, donne une définition en termes d'opérations algébriques des treillis et leur accorde une importance qui n'apparaît pas chez Bourbaki.

## Bibliographie

- AUDIN, Michèle [2010], *Correspondance entre Henri Cartan et André Weil (1928-1991)*, Paris : Société Mathématique de France.
- BELL, Eric T. [1945], *The Development of Mathematics*, New York : Mc Graw-Hill, 2<sup>e</sup> éd.
- BIRKHOFF, Garrett [1933], On the combination of subalgebras, *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 29(4), 441–464, doi : 10.1017/S0305004100011464.
- [1934], Note on the paper “On the combination of subalgebras”, *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 30(2), 200, doi : 10.1017/S0305004100016625.
- [1935], On the structure of abstract algebras, *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 31(4), 433–454, doi : 10.1017/S0305004100013463.
- [1937], Rings of sets, *Duke Mathematical Journal*, 3(3), 443–454, doi : 10.1215/S0012-7094-37-00334-X.

---

19. Initialement, Vuillemin avait choisi le terme « *lattice* » (emprunté à l'anglais) mais a presque systématiquement corrigé ensuite par « treillis ».

- [1940], *Lattice Theory*, American Mathematical Society Colloquium Publications, New York : American Mathematical Society.
- [1944], Subdirect unions in universal algebra, *Bulletin of the American Mathematical Society*, 50(10), 764–768, doi : 10.1090/S0002-9904-1944-08235-9.
- [1945], Universal algebra, dans *Proceedings of the First Canadian Mathematical Congress*, Toronto : Toronto University Press, 310–326.
- [1948], *Lattice Theory*, New York : American Mathematical Society, 2<sup>e</sup> éd.
- BOURBAKI, Nicolas [1957], *Éléments de mathématiques*, t. IV : Structures, Paris : Hermann.
- [NAa], Théorie des ensembles (état 5), [http://sites.mathdoc.fr/archives-bourbaki/PDF/170\\_nbr\\_071.pdf](http://sites.mathdoc.fr/archives-bourbaki/PDF/170_nbr_071.pdf).
- [NAb], Théorie des ensembles (état 6), [http://sites.mathdoc.fr/archives-bourbaki/PDF/189\\_nbr\\_092.pdf](http://sites.mathdoc.fr/archives-bourbaki/PDF/189_nbr_092.pdf).
- CHÂTELET, Albert [1945], *Éléments d'algèbre*, Paris : Bourdellier.
- [1946], *Éléments d'algèbre*, Paris : Université de Paris, faculté des sciences.
- [1947a], Algèbre des relations de congruence, *Annales scientifiques de l'École normale supérieure*, 3e<sup>e</sup> série, 64, 339–368, doi : 10.24033/asens.953.
- [1947b], Les théorèmes de Jordan-Hölder et Schreier, *La Revue Scientifique*, 85, 5<sup>e</sup> série, 579–596.
- CORRY, Leo [2004], *Modern Algebra and the Rise of Mathematical Structures*, Bâle ; Boston ; Berlin : Springer, 2<sup>e</sup> éd.
- DECAENS, Simon [2018], *Une histoire de la théorie des treillis au sein de l'American Mathematical Society entre 1933 et 1948*, Thèse de doctorat, Université Paris Diderot.
- DEDEKIND, Richard [1930-1932], *Gesammelte mathematische Werke*, Braunschweig : Vieweg und Sohn, sous la dir. de R. Fricke, E. Noether et Ø. F. Ore.
- DUBREIL, Paul [1946], *Algèbre. Tome 1 : Équivalences, opérations, groupes, anneaux, corps*, Gauthier-Villars.
- DUBREIL-JACOTIN, Marie-Louise, LESIEUR, Léonce *et al.* [1953], *Leçons sur la théorie des treillis, des structures algébriques ordonnées et des treillis géométriques*, Paris : Gauthier-Villars.

- ECKES, Christophe [à paraître], Philosophical and mathematical duality in Albert Lautman's work, dans *Duality in 19th and 20th Century Mathematical Thinking*, édité par R. Krömer, E. Haffner & K. Volkert, Bâle : Birkhäuser.
- FISHER, Charles S. [1966], The death of a mathematical theory : A study in the sociology of knowledge, *Archive for History of Exact Sciences*, 3(2), 137–159, doi : 10.1007/BF00357267.
- [1967], The last invariant theorists : A sociological study of the collective biographies of mathematical specialists, *European Journal of Sociology*, 8(2), 216–244, doi : 10.1017/S0003975600001521.
- GAUTHIER, Sébastien [à paraître], Albert Châtelet : de la théorie des nombres à la politique universitaire, dans *La Grande Guerre des mathématiciens français*.
- GAUTHIER, Sébastien & GOLDSTEIN, Catherine [2013], Portrait of Albert Châtelet (1883-1960), en ligne, URL [www.icmihistory.unito.it/portrait/chatelet.php](http://www.icmihistory.unito.it/portrait/chatelet.php).
- GLIVENKO, Valère [1938], *Théorie générale des structures, Actualités scientifiques et industrielles*, t. 652, Hermann.
- GOLDSTEIN, C. [2007], Du Rhin et des nombres : quelques réflexions sur l'usage de la notion de transfert culturel en histoire des mathématiques, dans *Sciences et frontières : délimitations du savoir, objets et passages*, édité par P. Hert & M. Paul-Cavallier, Fernelmont : Éditions modulaires européennes, 342–376.
- GRÄTZER, George [1996], *General Lattice Theory*, Bâle : Birkhäuser, 2<sup>e</sup> éd.
- HAFFNER, Emmylou [2019], From modules to lattices : Insight into the genesis of Dedekind's *Dualgruppen*, *British Journal for the History of Mathematics*, 34(1), 23–42, doi : 10.1080/17498430.2018.1555928.
- HOLLINGS, Christopher D. [2014], *Mathematics Across the Iron Curtain. A History of the Algebraic Theory of Semigroups*, Providence : American Mathematical Society.
- LAUTMAN, Albert [2006], *Les Mathématiques, les idées et le réel physique*, Paris : Vrin, chap. Symétrie et dissymétrie en mathématiques et en physique, 265–300, 1<sup>re</sup> publication Paris : Herman, 1946.
- MARONNE, Sébastien [2014], Pierre Samuel et Jules Vuillemin, mathématiques et philosophie, dans *Des mathématiques en Auvergne : histoire, progrès, interactions*, édité par Th. Lambre, Clermont-Ferrand : *Revue d'Auvergne*, t. 1, 151–173.

- MEHRTENS, Herbert [1979], *Die Entstehung der Verbandstheorie, Arbor scientiarum. Reihe A; Beiträge zur Wissenschaftsgeschichte*, t. 6, Hildesheim : Gerstenberg.
- [1996], Modernism vs counter-modernism, nationalism vs internationalism : style and politics in mathematics 1900-1950, dans *L'Europe mathématique. Histoires, mythes, identités*, édité par C. Goldstein, J. Gray & J. Ritter, Paris : Éditions de la Maison des Sciences de l'Homme, 517–529.
- NABONNAND, Philippe, PEIFFER, Jeanne *et al.* [2015], Circulations et échanges mathématiques (18<sup>e</sup>-20<sup>e</sup> siècle), *Philosophia Scientiæ*, 19(2), 7–16, doi : 10.4000/philosophiascientiae.1082.
- ORE, Øystein [1935], On the foundation of abstract algebra. I, *Annals of Mathematics*, 36(2), 406–437, doi : 10.2307/1968580.
- [1936a], *L'Algèbre abstraite*, Actualités Scientifiques et Industrielles : Exposés d'analyse générale, Paris : Hermann.
- [1936b], On the decomposition theorems of algebra, *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, 1, 297–307, URL [www.mathunion.org/fileadmin/ICM/Proceedings/ICM1936.1/ICM1936.1.ocr.pdf](http://www.mathunion.org/fileadmin/ICM/Proceedings/ICM1936.1/ICM1936.1.ocr.pdf).
- PARSHALL, Karen Hunger [1996], How we got where we are : An international overview of mathematics in national contexts (1875-1900), *Notices of the American Mathematical Society*, 43(3), 287–296, URL [www.ams.org/journals/notices/199603/parshall.pdf](http://www.ams.org/journals/notices/199603/parshall.pdf).
- RADTKA, Catherine [2018], Aspects d'une trajectoire mathématique dans la France d'entre-deux-guerres : l'édition et le tournant pédagogique d'Albert Chaâtelet, *Philosophia Scientiæ*, 22(1), 143–161, doi : 10.4000/philosophiascientiae.1330.
- SERFATI, Michel [2013], Sur l'abstrait et le concret en mathématiques, et l'axiomatique, dans l'œuvre de Marshall Stone, *Notae Philosophicae*, 2, 175–191.
- STONE, Marshall H. [1934], Boolean algebras and their application to topology, *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 20(3), 197–202, doi : 10.1073/pnas.20.3.197.
- [1935], Subsumption of the theory of Boolean algebras under the theory of rings, *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 21(2), 103–105, doi : 10.1073/pnas.21.2.103.
- [1937], Applications of the theory of boolean rings to general topology, *Transactions of the American Mathematical Society*, 41, 375–481.

VAN DER WAERDEN, Bartel Leendert [1930], *Moderne Algebra*, Berlin : Springer.

VUILLEMIN, Jules [1962], *La Philosophie de l'algèbre. Tome premier. Recherches sur quelques concepts et méthodes de l'algèbre moderne*, Épiméthée, Paris : PUF.

— [inédit], *La Philosophie de l'algèbre*. II. Structure, infini, ordre, non publié.

WHITEHEAD, Alfred North [1898], *A Treatise on Universal Algebra*, Cambridge : Cambridge University Press.



# Le tome II de *La Philosophie de l'algèbre*. Dossier documentaire

*Jules Vuillemin*<sup>†</sup> et *Gudrun Vuillemin-Diem*<sup>†</sup>

**Résumé :** On trouvera ici l'édition critique de la conclusion générale, restée inédite, des deux tomes de *La Philosophie de l'algèbre*. Vuillemin y décrit d'abord les deux révolutions successivement survenues en algèbre : le passage, décrit dans le tome I, de l'Algèbre cartésienne des équations à l'Algèbre des structures exemplifiée dans la théorie de Galois, puis le passage de celle-ci à l'Algèbre de l'algèbre chez Dedekind et Birkhoff. Un renouvellement parallèle peut donc être attendu dans la philosophie théorique : après la *mathesis universalis* de l'âge classique, qui transposait les méthodes des mathématiques classiques, puis celle de la phénoménologie, qui importait en philosophie l'idée de structure, il reste à mener en philosophie une nouvelle révolution, qui fonde l'analyse des structures dans une critique préalable de la raison.

Ce texte est suivi d'une notice de Gudrun Vuillemin-Diem décrivant les manuscrits de la deuxième partie de *La Philosophie de l'algèbre*.

**Abstract:** Here is the as yet unpublished critical edition of the general conclusion to the two volumes of *La Philosophie de l'Algèbre*. Vuillemin first describes the two successive revolutions that occurred in algebra: the transition—as described in Volume I—from the Cartesian Algebra of equations to the Algebra of structures as exemplified by Galois' theory, then the transition from the latter to the Algebra of algebra in the work of Dedekind and Birkhoff. A parallel renewal can thus be expected in theoretical philosophy: after the *mathesis universalis* of the classical age which transposed the methods of classical mathematics then that of phenomenology which brought the idea of structure into philosophy, a new revolution is awaited in philosophy which bases the analysis of structures on a prior critique of reason.

This text is followed by a document record by Gudrun Vuillemin-Diem describing the manuscripts of the second part of *La Philosophie de l'algèbre*.

## Avertissement

On trouvera ici la dernière version de la conclusion générale, restée inédite, des deux tomes de *La Philosophie de l'algèbre*. Dans cette édition critique, nous avons retenu les corrections manuscrites effectuées par Vuillemin tout en précisant au sein de notes critiques<sup>a</sup> les parties antérieures du texte dactylographié.

À la suite, nous donnons d'autre part une version révisée de la notice, rédigée par Gudrun Vuillemin-Diem, décrivant les archives du fonds Vuillemin (Boîte V, documents **A**, **B**, **C**) qui contiennent une version inédite de la deuxième partie de *La Philosophie de l'algèbre*.

Simon Decaens, Sébastien Maronne & Baptiste Mèlès

# 1 Conclusion générale inédite du tome II de *La Philosophie de l'algèbre*

Source : Archives Vuillemin, boîte V, document **A**, p. 355–362.

## Conclusion

[355] En étudiant le développement de l'Algèbre, j'ai voulu poser deux problèmes : 1) Quelle est la nature de la connaissance pure en Algèbre ? 2) Dans quelle mesure la réponse à ce problème permet-elle d'espérer un renouvellement de la philosophie théorique ?

### 5 § 70<sup>b</sup>. Nature de la connaissance pure en Algèbre

<sup>a</sup>Les notes critiques sont indicées par les numéros de lignes. Un crochet fermant y sépare la version finale de la version antérieure. Les corrections de coquilles dans le texte, par Jules Vuillemin ou par les éditeurs, ne sont pas signalées. La pagination originale est indiquée par des numéros de page placés entre crochets. Les notes de bas de page des auteurs sont indiquées par des nombres, celles des éditeurs par des lettres. Cette édition critique est issue du travail d'exploitation du manuscrit mené dans le cadre du projet ANR VUILLEMIN <ANR-17-CE27-0017-01> (2017-2020) et du postdoctorat de Simon Decaens dirigés par Baptiste Mèlès.

<sup>b</sup>La table des matières qu'on trouve dans le document A témoigne de l'insertion par Vuillemin, dans un second temps, de trois paragraphes supplémentaires : § 48 Le « Programme d'Erlangen » ; § 49 Limites du « Programme d'Erlangen » ; § 55 Retour à l'idée de Critique générale : temps et éternité. C'est ce qui explique le décalage dans la numérotation de trois paragraphes qui a été corrigé ici.

1 voulu] *suppr.* dans ce livre 2 en Algèbre] algébrique 3 la réponse à ce problème] cette connaissance 5 § 70] § 67

Trois éléments déterminent la nature d'une connaissance : son objet, sa méthode et ses principes. Ces trois éléments doivent permettre d'établir son rapport aux autres sciences et le type de certitude qu'on est en droit d'attendre d'elle.

5 J'ai distingué trois moments principaux dans le développement de l'Algèbre. Le premier accomplit le projet cartésien ; il aboutit à Lagrange. Le second est illustré par Galois. Dedekind et Birkhoff représentent le troisième.

10 Reprenant la définition d'Aristote, Descartes assignait comme objet aux Mathématiques à la fois l'ordre et la mesure. Mais sa propre pratique de l'Algèbre dément l'universalité de ce programme. L'Algèbre cartésienne est avant tout une science de la quantité, ou une machine à résoudre les équations. Même si l'Algèbre de Lagrange a beaucoup abandonné des ambitions et surtout des prétentions cartésiennes, elle demeure avant tout une théorie des équations, c'est-à-dire une science de la composition des  
15 quantités sous des formes particulières. Rapportée aux procédés des calculateurs aussi bien qu'aux constructions des géomètres grecs, cette Algèbre a le mérite d'une double abstraction. Sous une lettre, on pense un nombre déterminé quelconque, et chaque méthode pour résoudre une équation est donc une sorte de condensé pour une infinité de solutions numériques.  
20 De plus, l'Algèbre permet de connaître les figures géométriques sans les voir ; elle fait l'économie de l'intuition sensible, même pure. L'image d'une courbe sert d'adjuvant à notre faculté de représentation ; mais le Géomètre peut, à la rigueur, entièrement s'en passer.

Néanmoins, chaque équation déterminée sur laquelle on raisonne représente  
25 un être mathématique bien défini. L'Algèbre des structures met au contraire en jeu un second type d'abstraction, qui établit la cause ou raison d'être des propriétés liées aux individus, en la cherchant dans les structures [356] algébriques auxquels ils obéissent. Ces structures ne sont que les genres de combinaisons possibles auxquelles il est permis de soumettre les individus  
30 déterminés, sans sortir de la structure. L'image qui correspond au concept structural n'est plus ici qu'une « représentation », c'est-à-dire une individuation de la structure. Or ce rapport de la structure formelle à ses réalisations a une double conséquence sur le type d'abstraction qu'il exige de nous. En premier lieu, la notion d'opération est dégagée de ses illustrations particulières :  
35 par exemple, on peut, comme l'avait vu Gauss, écrire un groupe sous forme additive ou multiplicative. En ce sens, l'opération étant réduite à la mise en correspondance qu'elle permet d'effectuer entre deux ensembles, c'est-à-dire à la fonction, nous apercevons ce qui caractérise une structure algébrique : un ensemble ou plutôt deux ensembles reliés par une liaison fonctionnelle. La  
40 nature particulière de cette fonction n'est pas précisée : il peut s'agir d'une opération « rationnelle » ou d'une fonction classique (analytique) ou de toute correspondance appropriée qu'on voudra.

En second lieu, du moment que l'individu est aperçu dans une structure, sa nature change. Pour la philosophie classique, l'individu figurait à titre d'absolu de la connaissance, soit qu'il apparût comme un irréductible à la raison dans l'intuition empirique ou sensible, soit que, comme nature simple  
 5 intelligible, il défiât les puissances simplement raisonnantes de notre faculté de penser. Comme le montre la Théorie des groupes, tout individu est relatif à une structure, qui détermine *a priori* son degré de discernabilité. Celle-ci n'est plus une sorte de propriété en soi, liée à la nature singulière de l'individu : elle qualifie un groupe d'opérations, par rapport auquel elle définit  
 10 un invariant. Cet invariant change avec l'expression du groupe. La relativité de la connaissance n'est donc plus, comme dans le kantisme, le fait d'un rapport après tout contingent de notre faculté de connaître aux formes de la sensibilité : elle définit la connaissance pure et par concept en elle-même. Elle résulte en effet du rapport nécessaire de l'individu et de la structure, de l'invariant  
 15 à un groupe d'opérations. En même temps, la possibilité d'apercevoir un même individu engagé dans de multiples structures pose le problème du passage intellectuel entre ses diverses présentations. Ce passage est résolu grâce aux idées de congruence et d'homomorphisme : par rapport à une congruence *modulo* une relation quelconque, une structure plus complexe, en  
 20 elle-même seulement homomorphe à une structure plus pauvre, lui devient isomorphe, c'est-à-dire structurellement identique. De ce point de vue, toute [357] la connaissance mathématique est une classification des structures et de leurs rapports, la congruence permettant de rabattre, pour ainsi dire, le particulier sur le général, et d'identifier un même individu aux différents  
 25 niveaux que l'analyse structurale distingue en lui. Nous avons appelé jugement d'identification ce procédé entièrement rigoureux ; les différents niveaux de propriétés que la généralité des structures permet de distinguer dans un être mathématique ne sont donc attribués à une même substance que par l'intermédiaire de jugements d'identités ou d'isomorphismes de structures. Ce  
 30 procédé évite l'ancien dilemme du formalisme et de l'intuitionnisme, celui-là prétendant s'appuyer sur des analogies formelles insuffisantes pour déterminer le contenu du jugement, celui-ci voulant réduire toutes les mathématiques à la seule intuition du nombre entier.

Dans son troisième moment, l'Algèbre, faisant abstraction de la nature  
 35 définie des structures, n'examine plus que les rapports qui lient une structure à ses sous-structures. Elle examine, par conséquent, l'idée de subsomption ou de subordination, en son sens le plus général. Cette idée n'est autre que celle de ce que Kant appelait un jugement analytique, mais qu'il considérait comme si évident ou si parfaitement étudié par Aristote qu'il pensait que  
 40 toutes les vérités qu'on pouvait encore découvrir à son propos ne touchaient plus qu'à la présentation et à l'élégance de l'exposé. Ce préjugé tenait à ce que le jugement analytique dans l'ancienne logique ne portait que sur des exemples

---

3 apparût] apparaisse 5 défiât] défie 8 en soi] absolue 8 singulière *ajouté*  
 10 change] varie 13 elle] il 13 Elle] La relativité 13-14 en effet *ajouté* 30  
 l'ancien dilemme] le dilemme 42 le jugement.] l'idée de jugement 42 ne portait  
 que sur] ne tenait qu'à

finis, pour aboutir aux truismes du syllogisme. On notera que, surtout sous l'influence de Dedekind, le rapprochement qui s'est fait entre la Logique et les Mathématiques s'est fait par l'intermédiaire de l'infini. L'idée d'ordre pouvait enfin devenir l'objet d'une étude mathématique proprement dite, et, avec l'idée  
5 d'ordre, l'idée même de connaissance déductive que cette idée commande. L'Algèbre de l'Algèbre réalisait enfin le programme de la *Mathesis universalis*, quand elle se proposait d'être une « Doctrine de la science ».

Parallèlement à cette évolution portant sur l'objet des mathématiques s'effectuait une évolution portant sur ses méthodes.

10 Un débat domine les Mathématiques classiques, celui de l'Analyse et [358] de la Synthèse. Ces mots, certes, reçoivent souvent des sens divers, compliqués par l'usage qu'on en a fait pour opposer la Géométrie d'Euclide à l'Analyse infinitésimale. Mais si l'on ne retient que la tendance générale, on aperçoit alors qu'en dépit des querelles d'école, un même idéal méthodique est présent chez  
15 tous les mathématiciens. Étant donné un individu complexe, il faut pouvoir le décomposer en ses éléments, puis le recomposer entièrement à partir de cette analyse élémentaire. Tel est le double mouvement de la méthode « génétique ». Son défaut tient uniquement à ce que la particularité du point de départ cache, la plupart du temps, les raisons du succès ou de l'échec de l'analyse.  
20 L'entendement ne réussit que par une divination heureuse, ce qui donne lieu à la théorie du génie.

Or toute cette méthode se déploie sur le plan de la réalité. La donnée primitive de l'équation à résoudre lie par exemple les analyses larvées de structures à cet univers réel, individualisé et donné. Le propre de l'analyse  
25 structurale, comme l'a vu Abel, consistera au contraire à passer du réel au possible, et à développer pour elles-mêmes les analyses de structure, indépendamment de leurs applications. La théorie des opérations possibles en vertu d'une structure se substituera à l'assignation des opérations réelles qui permettent en fait de découvrir les éléments d'une solution. De même,  
30 on peut dire que lorsqu'on passe de la méthode génétique en philosophie, telle qu'elle apparaît au moment de sa perfection dans la philosophie de Fichte, à la méthode phénoménologique, chez Husserl, le même changement a lieu dans la méthode, du réel au possible. La théorie des « réductions » dans cette dernière philosophie est le signe de cette transformation.

35 Lorsqu'on en tire toutes les conséquences, la méthode structurale doit être axiomatique. Autrement dit, elle doit examiner systématiquement et *a priori* les conséquences d'une structure donnée par des postulats définis : les changements dans ces postulats font apercevoir par les changements dans les conséquences l'organisation de la connaissance et le type de leur dépendance  
40 stricte, indépendamment des hypothèses superflues. Mais le développement conséquent de la méthode axiomatique exigeait deux conditions qui n'ont été réalisées véritablement que dans le troisième moment de l'Algèbre.

---

1 , pour aboutir] et 6 le programme] ce programme 31 au moment de] dans 32  
a lieu] apparaît

La première tient à l'étude des structures pour elles-mêmes, par exemple indépendamment de la Théorie des équations. Cette étude habitue l'esprit à penser les structures indépendamment de leurs réalisations, et, comme [359] il apparaît chez Dedekind, à rapprocher des opérations aussi différentes que celles de l'inclusion et de la division, de la Logique et de l'Algèbre proprement dite. Une nouvelle analyse naît alors qui porte sur les structures elles-mêmes, en tant qu'elles peuvent se décomposer en sous-structures qui sont comme leurs « éléments ». Comment ces décompositions sont possibles, de quelles lois elles dépendent, c'est ce qu'examine en premier lieu l'Algèbre de l'Algèbre. On pourrait, en reprenant la théorie des facultés des classiques, dire qu'en son premier moment, l'Algèbre est Algèbre de l'entendement, dans son second moment, Algèbre du jugement, c'est-à-dire de la liaison entre les structures générales et les applications particulières. En son troisième moment, elle est Algèbre de la raison, c'est-à-dire Théorie pure des théories possibles et de leur articulation.

Mais la forme axiomatique elle-même que revêt cette Algèbre de la raison fait apercevoir une seconde condition de la doctrine, particulièrement éloignée des doctrines classiques. Il est coutumier de montrer l'affinité de l'axiomatique avec la relativité de la connaissance. La géométrie euclidienne, considérée dans sa pureté et sans égard au problème de son application à l'expérience possible, est en effet aussi vraie, mais pas plus que la géométrie de Riemann ou que celle de Lobatchewsky. Or deux domaines semblaient échapper *a priori* à cette relativité. Le premier est celui de l'Arithmétique, et le second celui de la Logique. Mais si nous apercevons dans ces domaines les structures formelles qui commandent aux propriétés des individus, nous rendons aussi ces derniers à leur relativité « naturelle ». Suivant que nous les empruntons à des structures plus ou moins riches, ces propriétés sont plus ou moins profondément liées aux êtres que nous examinons. Par exemple la factorisation unique des entiers naturels n'est pas liée à la nature du domaine d'intégrité des entiers comme tels ; elle reparait plus profondément, lorsque nous nous trouvons en face de certains anneaux commutatifs et de treillis spécialisés.

Si une propriété fondamentale est due à une structure correspondante, les principes mêmes des mathématiques, si contestés depuis la Crise des fondements consécutive à la Théorie des ensembles, cesseront alors de paraître attachés intuitivement à la nature de notre esprit. S'ils sont liés à une structure, on devra éventuellement examiner plusieurs mathématiques possibles, en tant qu'on les utilisera ou qu'au contraire on en fera l'économie. Telle est la position à laquelle conduit l'examen des principes tels que l'induction, le bon ordre, [360] le choix. L'analyse des structures et surtout l'Algèbre de l'Algèbre après Dedekind et Cantor ont permis de dégager du conflit métaphysique formalisme-intuitionnisme une axiomatique définie : quelle mathématique peut-on construire avec et sans l'axiome de choix, etc. ?

---

30–31 de certains anneaux commutatifs et de treillis spécialisés] de certaines lattices particulières bien définies 32 Si] Or si 34 alors de paraître] d'apparaître comme des principes qui seraient 36 éventuellement *ajouté*

Or, en s'appropriant la Logique, la Mathématique ne laissait pas de réagir à son tour, par sa méthode axiomatique, sur la conception que nous nous faisons des principes logiques. De même qu'en Mathématique proprement dite on peut se demander quels théorèmes on peut prouver sans faire usage de l'axiome de choix, de même on peut en Logique restreinte examiner quelles vérités ne dépendent que du principe de non-contradiction, sans faire usage du principe, plus fort, du tiers exclu. L'opposition de la Logique intuitionniste et de la Logique classique cesse d'être alors un insoluble conflit de facultés ou de principes, pour devenir un moyen fécond d'analyser les connaissances humaines, c'est-à-dire d'examiner les titres de légitimité d'une proposition.

En même temps, ce genre d'examen permet d'entreprendre la réalisation du programme critique de la connaissance au sens le plus large. Puisque l'Algèbre de l'Algèbre étudie la nature même des sciences déductives en général, c'est à elle que nous devons nous adresser pour répondre à la question du critère de la vérité. Tel système déductif est-il consistant ou tel qu'il ne puisse conduire à aucune contradiction? Est-il redondant ou n'exprime-t-il que les principes nécessaires et suffisants pour en déduire les vérités qu'il expose? Est-il enfin catégorique ou tel qu'il permette de décider de la vérité ou de la fausseté de toute proposition qu'il permet de formuler?

Tel est le double aboutissement de l'Algèbre générale.

D'une part elle débouche dans la Méta-mathématique, et elle effectue elle-même la critique des connaissances qu'elle propose. Science de la raison elle l'est au sens le plus haut du mot : elle est une science qui réfléchit elle-même sur ses principes et qui est susceptible d'établir la légitimité de leurs droits et les limites de leurs prétentions.

De l'autre, elle introduit dans la Logique le principe de la tolérance propre aux sciences formelles. Elle cesse de considérer les principes logiques comme des entités isolées et les insère dans des structures plus vastes, qui permettent d'examiner leurs droits et les conséquences qu'ils produisent.

Tel est le programme qu'impose l'examen de la nature de la connaissance [361] ce pure en Algèbre, concernant les problèmes généraux de la Logique.

### § 71<sup>c</sup>. Programme philosophique

L'idée de *mathesis universalis* a été, historiquement, l'une des origines du dogmatisme. Celui-ci appliquait à la connaissance philosophique des méthodes propres à une discipline particulière, les mathématiques. Tel est l'état de la question dans le premier moment de l'Algèbre : même si Kant a le tort d'identifier alors connaissance mathématique et construction des figures dans l'espace euclidien, il a raison de dénoncer la confusion entre la connaissance philosophique qui procède par concepts et la connaissance mathématique particulière qui procède par construction de concepts.

<sup>c</sup>Sur la correction du décalage dans la numérotation des paragraphes, voir note b.

15 puisse] peut 32 § 71] § 68 34 appliquait] consistait dans l'application 34 des méthodes] de méthodes 35 les mathématiques] dans les mathématiques 40 particulière ajouté

À son second moment, l'Algèbre et la philosophie se rapprochent. On tente d'appliquer à la pensée les procédés de l'Algèbre des structures. Telle est l'idée mère de la phénoménologie. Nous avons ainsi d'abord distingué trois sortes d'actes de pensée : les impressions, les représentifications et les opérations. Mais il nous a paru illégitime d'appliquer à la pensée la notion générale de groupe. D'ailleurs, la méthode phénoménologique nous a paru souffrir d'un double défaut. Bornant ses ambitions à une simple description, elle a confondu les conditions psychologiques et les conditions proprement transcendantales de la pensée. Cette remarque nous a fait corriger notre classification des actes de pensée que nous avons regroupés en deux genres : les opérations qui définissent la raison pure et les idées liées à la conscience du temps interne.

D'autre part, mettant entre parenthèses la question de l'existence, la méthode phénoménologique empêche le développement de la philosophie critique, en un second sens du mot. En effet, *critiquer* signifie d'abord distinguer dans une connaissance ses différentes sources, par exemple les diverses structures auxquelles renvoient les propriétés d'un objet mathématique. La méthode structurale est critique en ce premier sens, et il en va de même pour la Phénoménologie. Mais *critiquer* indique aussi qu'on recherche si une connaissance est bien fondée et quelles limites rencontre notre pouvoir de penser.

Le développement du formalisme et l'extension de la Théorie des Ensembles ont suscité spontanément cette critique dans la méta-mathématique, partie intégrante de la Logique moderne, et où les questions d'existence retrouvent leur droit. De même, pour rendre cette seconde dimension au programme critique, la philosophie doit examiner systématiquement non seulement comme l'avait fait Kant si Dieu existe hors de nous, mais encore si l'idée de Dieu, en nous, correspond à une véritable « réalité objective ». Retrouvé au détour de ses créations mathématiques par Cantor lui-même, le problème ontologique appelle donc un nouvel examen.

[362]<sup>d</sup> La crise de la théorie des ensembles trouve-t-elle un analogue en philosophie ? Les remèdes à cette crise trouvent-ils un analogue dans la reconstruction philosophique ?

Une fois circonscrit le champ légitime de la connaissance humaine, on peut alors se demander si les méthodes structurales peuvent *mutatis mutandis* s'appliquer à la recherche philosophique. Or comme la connaissance philosophique elle-même se présente, dans la mesure où son ambition la rend digne du nom qu'elle porte, comme une théorie de la science, elle tombe sous le concept général de treillis. On peut alors formuler le problème suivant : toute

<sup>d</sup>Vuillemin a corrigé la numérotation de la page. Celle-ci portait le numéro 361. Dans la table des matières du ms. A, les entrées concernant la conclusion sont manuscrites et ne font pas apparaître de numéros de page. Dans la table des notes qu'on trouve dans le ms. C, la note I porte le numéro de page 362.

3 d'abord *ajouté* 10 regroupés] groupés 24 rendre cette seconde dimension au] retrouver ce second sens du 36-37 son ambition la rend digne] elle est digne par son ambition 37-38 le concept général de treillis] l'analyse générale des lattices

philosophie se présentant comme un système, la théorie des treillis permet-elle de classer ces systèmes et d'établir une véritable théorie comparée des systèmes philosophiques ?

5 Enfin, des notions analogues aux théorèmes de décomposition propres aux treillis n'apparaissent-elles pas dans les systèmes philosophiques ? La théorie des idées de Platon en particulier n'a-t-elle pas fourni un modèle d'une telle décomposition de la pensée, tâche première de la philosophie ? On fait remonter généralement à Aristote l'origine de la Logique, mais, outre que sa *Métaphysique* et l'*Organon* lui-même se présentent très souvent comme une  
10 réponse aux difficultés du platonisme, deux arguments pressent le philosophe à chercher dans Platon la première théorie de la science. D'abord la théorie platonicienne de la connaissance se trouve, par rapport à la découverte de Pythagore et aux contestations de Zénon, dans une position assez semblable à celle de la Logique moderne par rapport à la Théorie des ensembles. En  
15 second lieu, tant les procédés de la méthode de division que l'obscur théorie des nombres idéaux semblent chercher à déterminer des méthodes logico-mathématiques spécifiques pour analyser la pensée.

Quatre problèmes propres à éclairer la philosophie de la connaissance pure se posent donc à nous. Quels sont les Éléments d'une Logique philosophique ?  
20 Quelle est la nature de l'idée de Dieu ? Pouvons-nous classer, en vertu de principes formels, les divers systèmes philosophiques ? Quelle est la signification de la Logique, à son origine, dans la philosophie grecque ?

## 2 Notice de Gudrun Vuillemin-Diem sur les manuscrits du tome II de *La Philosophie de l'algèbre*

Les trois documents **A**, **B**, **C** se suivent chronologiquement. Les documents **A** et **B** sont des originaux (dactylos originaux et corrections main JV), le document **C** est une copie de **B+A** (en partie dactylo-copies, en partie copié main JV et plusieurs autres mains en aide). Pour la **lecture du contenu**, les documents **B+A** (ordre systématique) suffisent.

### V.1. Document A

Texte dactylo, années autour/avant 1960-1962, avec corrections, notes et feuilles intercalées, main JV, env. 145 pages.

Le contenu est énuméré dans la « **Table des matières** » du ms. **A**, mais les deux premiers chapitres manquent dans le texte du document. Ces deux

---

1 treillis] lattices 1 permet-elle] *suppr.* analogiquement 4 des notions analogues aux] les 5 treillis] lattices 5 n'apparaissent-elles] ne reparaisent-ils 10 deux arguments] trois arguments

chapters avaient les numéros **VI** et **VII**, les §§ 33-44 et les pages 173–223. Ce manuscrit devait donc être la suite d'une *première rédaction* de la Première Partie, qui devait avoir seulement 5 chapters et 32 paragraphes. Cette première rédaction de la Première partie a dû être augmentée par JV pour la *publication* de 1962 : celle-ci comprend 6 chapters et 60 paragraphes. Mais les sujets de la Deuxième partie (ici présents) n'ont pas été intégrés dans cette augmentation de la Première partie.

Le ms. **A** avait, à l'origine, 190 pages (de 173 à 362). En l'état actuel, dans lequel manquent les deux premiers chapters, il a environ 145 pages.

**Titre : Deuxième Partie. De quelques structures d'Algèbre et d'Arithmétique et de leur utilisation en Théorie des nombres.**

Voici la **Table des matières**.

<b>Chap. VI – Les structures gaussiennes et leur application à l'extension de la notion des nombres</b>	<b>p. 173–200</b>
§ 33 La notion de congruence et l'Arithmétique transcendantale de Gauss ; sa généralisation et le programme « pythagoricien » ; les autres méthodes d'extension des nombres	p. 173–176
§ 34 Hankel et le principe de la permanence des lois formelles	p. 176–178
§ 35 Le principe de Hankel n'est pas une loi objective de l'extension des nombres	p. 179–182
§ 36 La question de l'homogénéité des opérations « lytiques »	p. 182–183
§ 37 Le programme de Kronecker : réduction des nombres fractionnaires aux nombres naturels	p. 184–186
§ 38 Théorie des nombres algébriques chez Kronecker : synthèse de Gauss et de Galois	p. 186–190
§ 39 Kronecker et le théorème fondamental de l'Algèbre	p. 190–195
§ 40 Les extensions « structurales » : la structure d'ensemble-quotient	p. 196–200
<b>Chap. VII – Philosophie de la définition<sup>1</sup></b>	<b>p. 210–223</b>
§ 41 La définition par abstraction	p. 201–206
§ 42 La définition par abstraction et le concept d'isomorphisme	p. 206–211
§ 43 L'ensemble des entiers naturels. La doctrine de Frege	p. 211–220
§ 44 Du jugement d'identification	p. 220–223
<b>Chap. VIII – Structures gaussiennes. Théorie des nombres et Géométrie</b>	<b>p. 224–244h</b>
§ 45 Les congruences linéaires	p. 224–226

1. Cf. textes Nancy, Liste manuscrits **9\*3**.

§ 46	Les formes quadratiques du point de vue arithmétique : illustrations géométriques	p. 227–236
§ 47	Les formes quadratiques du point de vue algébrique	p. 236–244
§ 48	Le « Programme d'Erlangen »	p. 244a–244f
§ 49	Limites du « Programme d'Erlangen »	p. 244g–244h

**Chap. IX – L'invariant phénoménologique et le problème de la réflexion** p. 245–268i

§ 50	La phénoménologie de Husserl et la méthode de la variation éidétique	p. 245–253
§ 51	La réduction transcendantale	p. 245–258
§ 52	Exemple d'application phénoménologique de la variation éidétique	p. 259–261
§ 53	Critique de la méthode phénoménologique	p. 261–264
§ 54	Raison d'être des imperfections de la variation éidétique	p. 264–268b
§ 55	Retour à l'idée de Critique : temps et éternité	p. 268c–268i

**Chap. X – La théorie des nombres idéaux** p. 269–(287a)<sup>e</sup>

§ 56	Les théorèmes de réciprocité et la théorie des nombres algébriques	p. 269–274
§ 57	Les nombres idéaux de Kummer	p. 274–279
§ 58	Le concept d'idéal et la méthode de Dedekind	p. 279–(287a)

**Chap. XI – La théorie des nombres naturels chez Dedekind** p. 288–(321)

§ 59	Les notions de système, d'application et de chaîne en général	p. 288–295
§ 60	L'infini, l'ordre et la récurrence	p. 295–310
§ 61	Les ensembles finis et la notion de nombre cardinal	p. 311–312
§ 62	Postérité de Dedekind	p. 313–321

**Chap. XII – L'Algèbre générale** p. 322–(354a)

S 63	L'extension de la notion de divisibilité	p. 322–326
§ 64	L'Algèbre de l'Algèbre	p. 326–333
§ 65	Quelle structure algébrique correspond à la factorisation unique des entiers rationnels ?	p. 334–337

---

e. Gudrun Diem-Vuillemin précise entre chevrons certains des éléments de pagination des chapitres ainsi que les titres des paragraphes de la conclusion (et les pages correspondantes) qui ne figurent pas dans la table des matières du ms. A.

§ 66	Analyse de l'ordre : ordre partiel et ordre simple	p. 337–339
§ 67	Les lattices générales <sup>2</sup>	p. 339–341
§ 68	Sur quelques lattices particulières <sup>3</sup> et quelques théorèmes correspondants de décomposition	p. 342–348
§ 69	Théorèmes de représentation et de décomposition pour les Algèbres de Boole	p. 349–354a
<b>Conclusion</b>		<b>(p. 355–362)</b>
§ 70	〈Nature de la connaissance pure en Algèbre〉	〈p. 355–361〉
§ 71	〈Programme philosophique〉	〈p. 361–362〉

Le texte effectivement présent dans le ms. **A** commence avec le chapitre VIII, § 45, p. 224. Tout le reste du manuscrit est conforme à la Table des matières : p. 224–362.

Quelques **suppléments** au document **A** proviennent du ms. **C** (les Notes) : voir ci-dessous à la fin de la description de **C**.

## V.2. Document B

Le document **B**, dactylo original et correction main JV, environ 60 pages, est une nouvelle rédaction des deux premiers chapitres (VI et VII) du document **A**, qui sont mentionnés dans la Table des matières, mais qui manquent dans le ms. **A** lui-même. Pour cette nouvelle rédaction, JV a utilisé en partie les feuilles du doc. **A** (voir la description ci-dessous). Il a changé la numérotation des chapitres et des paragraphes pour les adapter au texte **publié**. Les deux chapitres sont devenus les chapitres VII et VIII, et la numérotation des paragraphes commence à la suite du texte publié, avec le § 61. Vers la fin de cette nouvelle rédaction [fin chap. VIII], la nouvelle rédaction s'arrête (voir ci-dessous la suite des §§ 73, 43, 44 [!!]). Visiblement, la nouvelle rédaction n'était pas achevée.

Voici le **nouveau titre**, et le contenu des deux premiers chapitres du ms. **B** :

### Deuxième Partie. Structure, Infini, Ordre

**Section Première : De quelques structures d'Algèbre et d'Arithmétique, de leur utilisation en Théorie des nombres et en Géométrie et des problèmes philosophiques qui s'y rattachent**

---

2. Dans le corps du texte : « Les treillis généraux ».

3. Dans le corps du texte : « Treillis particuliers ».

**Chap. VII – Les trois types d'extension de la notion de nombre** p. 1–33

§ 61 Sur divers problèmes mathématiques et philosophiques liés à la notion de structure p. 1–3

**I.**

§ 62 Extension génétique et inversion des problèmes p. 4–5

§ 63 Hankel et le principe de la permanence des lois formelles<sup>4</sup> p. 6–7

§ 64 Le psychologisme de Hankel et la critique de Frege p. 8–12

§ 65 La question de l'homogénéité des opérations « lytiques » p. 13–15

**II.**

§ 66 La notion de congruence et l'Arithmétique « transcendante » de Gauss, sa généralisation et le programme pythagoricien de Kronecker p. 15–17

§ 67 Réduction, par la méthode des congruences, des nombres « négatifs » et « fractionnaires » p. 18–20

§ 68 Théorie des nombres algébriques chez Kronecker ; synthèse de Gauss et de Galois<sup>5</sup> p. 20–23

§ 69 Kronecker et le théorème fondamental de l'Algèbre p. 23–28

**III.**

§ 70 Les extensions « structurales » ; la structure d'ensemble produit et d'ensemble-quotient<sup>6</sup> p. 29–33

Note IV : Exemple pour illustrer la théorie de Kronecker. (2 pages, à la suite de p. 33). [Le numéro de la Note IV est adapté au texte publié, qui a trois notes.]

**Chap. VIII – Philosophie de la définition** p. 34–41

**I. – Questions de méthode**

§ 71 La définition « créatrice » et l'extension structurale<sup>7</sup> p. 34–

§ 72 Abstraction et classes d'équivalence p. 38–41

Note III – Sur la définition des nombres rationnels par Russell<sup>8</sup>

§ 73 Extensions et isomorphie p. 42–45<sup>9</sup>

§ 43! L'ensemble des entiers naturels p. 211–220<sup>10</sup>

4. Anciennement § 34 corrigé par JV en § 63, p. 177, cf. ms. **A**, Table des matières.

5. Anciennement § 38, p. 186, cf. ms. **A**, Tables des matières.

6. Anciennement § 40, p. 196, cf. ms. **A**, Table des matières.

7. Le titre « la définition par abstraction » du ms. **A** a été corrigé (à la main). Le texte lui-même (p. 34–35) est pris (coupé) du ms. **A** et corrigé (à la main).

8. Le numéro de la note devrait être V d'après la Table des notes.

9. Ensuite les anciens numéros des pages et des paragraphes du ms. **A** sont repris sans changement.

10. Cf. Table ms. **A**.

**Attention** : ce chapitre VIII est à rapprocher d'un livre entier, plus récent et plus détaillé, sur les « Définitions par abstraction » (ms. à Nancy, n. 9\*3).

### V.3. Document C

Le document **C** est une copie des documents **B+A** dans cet ordre. La copie est faite en partie par des dactylo-doubles, en partie à la main : main de JV et d'autres mains, qui ont copié des pages entières ou des parties de pages. Il contient à peu près 60 (**B**) + 145 (**A**) pages (ou plus, suivant les écritures). Dans le document **C** existent donc deux chapitres avec le numéro VIII : le nouveau sur la « Définition » [document **B**], l'ancien sur « Les structures gaussiennes » [document **A**]. Le document **C** est souvent difficile ou très malcommode à lire.

**Pour étudier le contenu objectif conservé** de la « Deuxième Partie de la Philosophie de l'Algèbre », il faut utiliser les deux **documents originaux**, à savoir **B+A** dans cet ordre.

**Attention** : il y a dans le document **C** à six endroits des feuilles supplémentaires, de la main de JV, *en encre rouge*, faciles à distinguer, qui ne faisaient *pas partie de la copie* proprement dite, mais qui furent ajoutées par JV lors du travail de copie, à savoir :

(1) après la page 244h, (2) avant la page 291, (3) avant la page 293, (4) avant la page 304, (5) avant la page 305, (6) à la page 337.

Ces ajouts faits au temps de la copie sont donc ultérieurs au document **B**, et *a fortiori* ultérieurs au document **A**. En vue d'une lecture objective, je les ai insérés dans le document **A** aux endroits respectifs. Mais ils sont facilement reconnaissables. Il y avait dans le dossier **C** :

(1) une **Table des Notes**<sup>f</sup> (dactylo) : I-XIX, p. 362–437. Ces notes se rapportent au contenu du ms. **A**. La pagination des notes commence,

---

11. Cf. Table ms. **A**.

<sup>f</sup>Voici la Table des notes qu'évoque Gudrun Vuillemin-Diem :

Note I	Sur l'utilisation de la méthode directe et <i>a priori</i> de Lagrange pour résoudre les équations d'un degré inférieur à 5.....p. 362–366
Note II	Sur l'application du Théorème de Lagrange à la résolution de l'équation générale du troisième degré .....p. 367–378
Note III	Démonstration du théorème d'Abel .....p. 379–384
Note IV	À propos des nombres de Fermat .....p. 385
Note V	Sur l'application de la théorie de Galois à la résolution des équations du deuxième et du troisième degré .....p. 386–392
Note VI	Sur l'équation « pure » de Klein .....p. 393–396
Note VII	L'équation du dièdre .....p. 397–401

à une page près, à la suite du ms. **A**. Mais une deuxième table a été corrigée en rouge par JV. Le titre de la première note : « Note I. sur la notion mathématique de l'infini » est ajouté. C'est la Note I dans le texte publié de la « Première partie ».

- (2) Du **texte** de ces notes est conservée seulement une **partie** et en **copie** : copie à la main, mains différentes (à la fin du ms. **C**). Ce sont les notes IX–XI et XIII–XIX.

Note IX	Exemple pour illustrer la théorie de Kronecker <sup>12</sup>
Note X	Commentaire au Tableau des structures algébriques.
Note XI	Justification du tableau de Klein par rapport aux transformations affines. L'équation du plan de l'infini dans l'espaces est en coordonnées homogène
Note XIII	Sur le théorème de Wedderburn (et ses analogies dans la Théorie des groupes)
Note XIV	Sur la condition de Jordan-Dedekind et sur son rapport aux treillis modulaires
Note XV	(titre voir Tableau)

---

12. Le texte original de cette note se trouve déjà intégré dans le texte révisé du chapitre IV, dans le ms. **B**, après la page 33 : c'est la Note IV.

---

Note VIII	Sur l'expression analytique des rotations de la sphère autour de son centre ..... p. 402–413
Note IX	Exemple pour illustrer la théorie de Kronecker ..... p. 414–416
Note X	Commentaire au Tableau des structures algébriques ..... p. 417
Note XI	Justification du tableau de Klein par rapport aux transformations affines. L'équation du plan de l'infini dans l'espace est en coordonnées homogènes ..... p. 418–419
Note XII	Sur la factorisation dans $Z[\sqrt{-5}]$ par les idéaux de Dedekind ..... p. 420–422
Note XIII	Sur le théorème de Wedderburn (et ses analogies dans la Théorie des groupes) ..... p. 423
Note XIV	Sur la condition de Jordan-Dedekind et sur son rapport aux treillis modulaires ..... p. 424
Note XV	Passage d'un ensemble partiellement ordonné à un treillis général ..... p. 425–426
Note XVI	Exemple de treillis constitué par tous les sous-ensembles d'un ensemble ..... p. 427–429
Note XVII	Les homomorphismes sur les treillis ..... p. 430–434
Note XVIII	Opérations sur les treillis ..... p. 434–436
Note XIX	Idée générale des théorèmes de représentation ..... p. 437

- Note XVI Exemple de treillis constitué par tous les sous-ensembles d'un ensemble
- Note XVII Les homomorphismes sur les treillis
- Note XVIII [Opérations sur les treillis]
- Note XIX Idée générale des théorèmes de représentation

(3) Feuilles isolées.

**Attention** : J'ai ajouté cette Table des Notes et la copie du texte des Notes à la fin du ms. **A**, puisqu'ils appartiennent au texte, et que les originaux ne sont pas conservés.

## Chronologie relative des deux parties de la *Philosophie de l'Algèbre*

Du contenu des trois documents, qui est détaillé ci-dessus, on peut conclure l'ordre suivant pour la « généalogie » des **deux parties** :

(1) Il y avait d'abord une **1<sup>re</sup> rédaction** complète **des deux parties**. L'ensemble contenait : chapitres I–XII, §§ 1–71, pages dactylo 1–362 [il y avait en plus des notes I–XIX sur les pages 362–437, mais on n'a presque plus de traces, voir à la fin de la description du document **C**]. La **Première Partie** contenait : chapitres I–V, §§ 1–32, pages 1–172. La **Deuxième Partie** contenait : chapitres VI–XII, §§ 33–71, pages 173–362 [et les Notes I–XIX]. Elle avait pour titre : *Deuxième Partie. De quelques structures d'Algèbre et d'Arithmétique et de leur utilisation en Théorie des nombres* ». La **Table des matières** de la 1<sup>re</sup> rédaction de la Deuxième Partie est conservée dans le ms. **A** (voir ci-dessus). Le texte des chapitres VI–VII n'existe plus comme tel : les feuilles ont été utilisées pour une re-rédaction de ces deux chapitres (voir sous numéro 3). Le texte des chapitres VIII–XII de la 1<sup>re</sup> rédaction de la Deuxième partie (voir **Table des matières**) est conservé en dactylo original dans le document **A** (en copie dans le document **C**).

(2) **En vue de la publication de la Première partie**, donc avant 1962, JV a dû **augmenter et réviser** la 1<sup>re</sup> rédaction de cette Première Partie de façon assez substantielle, mais certainement en utilisant les feuilles du manuscrit de la 1<sup>re</sup> rédaction. En tout cas, il ne reste plus aucun manuscrit de la Première partie ; on a seulement le livre publié à partir de la Première Partie : il contient les chapitres I–VI (donc un chapitre de plus que la 1<sup>re</sup> rédaction) et les §§ 1–60 (donc 24 paragraphes de plus que la 1<sup>re</sup> rédaction).

(3) **Suite à la publication** de la Première Partie (en 1962), JV a commencé à préparer la Deuxième Partie, en vue d'une publication ultérieure. Il a re-rédigé les chapitres VI–VII, en maintenant globalement leurs sujets, et en utilisant les feuilles de la 1<sup>re</sup> rédaction (qui manquent dans le document **A**). Il a adapté la numérotation de ces deux chapitres et des paragraphes respectifs au texte publié de la Première Partie : ils sont alors devenus chap. VII–VIII et §§ 61–73. Il a donné un nouveau titre : « *Deuxième Partie. Structure,*

*Infini, Ordre. – Section Première : De quelques structures d'Algèbre et d'Arithmétique, de leur utilisation en Théorie des nombres et en Géométrie et des problèmes philosophiques qui s'y rattachent.* » Le texte de cette **révision** des deux premiers chapitres est contenu en original dans le document **B**. Les chapitres VIII(*sic*)-XII de la 1<sup>re</sup> rédaction de cette Deuxième Partie, sont restés inchangés (à l'exception de quelques ajouts en rouge, voir ci-dessus, sous Document **C**). Ils se trouvent en dactylo-original, corrigé main JV, dans le ms. **A**. Après la re-rédaction de ces deux chapitres (autour de l'année 1962), JV a visiblement interrompu et définitivement renoncé à la préparation du reste de cette Deuxième Partie pour une publication.

(4) Mais il a fait lui-même, et avec l'aide de quelques personnes, une **copie de l'ensemble** existant, dans l'ordre systématique du texte **B+A** : c'est le document **C**, dans lequel existent donc deux chapitres avec le numéro VIII (la copie du chapitre nouveau sur la « Définition », la copie du chapitre ancien sur « Les structures gaussiennes »). En regardant le ms. **C**, on se rend compte de l'énorme travail qu'une copie d'un si long texte représentait à cette époque<sup>§</sup>.

---

<sup>§</sup>Après comparaison systématique des ms. **B** et **A** avec le ms. **C**, il apparaît que celui-ci a été copié à partir de versions de **B** et **A** antérieures à celles qui nous sont parvenues et que chacun des trois (**B** et **A** d'un côté, **C** de l'autre) a continué d'évoluer. Les modifications manuscrites effectuées par Vuillemin dans **B** et **A** ont été répercutées par d'autres mains, probablement de secrétaires, dans **C**. Réciproquement, **B** et **A** contiennent les versions dactylographiées de pages partiellement ou entièrement manuscrites dans **C**, à quelques exceptions près, qui constitueraient donc les modifications ultimes (§ 49', modifications à l'encre rouge, notes finales IX à XIX). Le ms. **C** témoignerait ainsi plutôt des allers-retours d'un travail de réécriture du tome II de *La Philosophie de l'algèbre* qu'il n'acterait le gel du projet.



## Adresses des auteurs

Hourya Benis-Sinaceur  
IHPST – UMR 8590  
13, rue du Four  
75006 Paris – France  
Hourya.Sinaceur@univ-paris1.fr

Gabriella Crocco  
Maison de la Recherche  
CGGG UMR 7304  
Faculté des lettres  
29, avenue Robert-Schuman  
13621 Aix-en-Provence – France  
gabriella.crocco@univ-amu.fr

Simon Decaens  
AHP-PRéST, UMR 7117,  
Université de Lorraine, CNRS,  
Université de Strasbourg  
91, avenue de la Libération  
BP454  
54001 Nancy Cedex – France  
simon.decaens@mailz.org

Emmylou Haffner  
Département de Mathématiques  
Bâtiment 307  
Faculté des Sciences d'Orsay  
Université Paris-Saclay  
91405 Orsay Cedex – France  
emmylou.haffner@universite-paris-saclay.fr

Sébastien Maronne  
Institut de Mathématiques de  
Toulouse  
Université Paul Sabatier  
118, route de Narbonne  
31062 Toulouse cedex 9 – France  
smaronne@math.univ-toulouse.fr

Baptiste Mèlès  
AHP-PRéST, UMR 7117,  
Université de Lorraine, CNRS,  
Université de Strasbourg  
91, avenue de la Libération  
BP454  
54001 Nancy Cedex – France  
baptiste.meles@univ-lorraine.fr

David Rabouin  
Laboratoire SPHERE, UMR 7219  
Université de Paris – CNRS  
bâtiment Condorcet,  
case 7093  
5, rue Thomas Mann  
75205 Paris cedex 13 – France  
david.rabouin@wanadoo.fr

David Thomasette  
AHP-PRéST, UMR 7117,  
Université de Lorraine, CNRS,  
Université de Strasbourg  
91, avenue de la Libération  
BP454  
54001 Nancy Cedex – France  
david.thomasette@univ-lorraine.fr

Benoît Timmermans  
Université Libre de Bruxelles  
Faculté de Philosophie et Sciences  
sociales  
Avenue F. Roosevelt 50, CP 133/02  
1050 Bruxelles – Belgique  
Benoit.Timmermans@ulb.be