



HAL
open science

Début d'un enseignement, début d'un apprentissage : où placer les routines ?

François Conne, Jean Brun

► To cite this version:

François Conne, Jean Brun. Début d'un enseignement, début d'un apprentissage : où placer les routines ?. 4èmes journées annuelles d'étude du centre d'observation et d'expérimentation didactique, 1991, Genève, France. pp.53-88. halshs-03289488

HAL Id: halshs-03289488

<https://shs.hal.science/halshs-03289488>

Submitted on 5 Aug 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

DEBUT D'UN ENSEIGNEMENT, DEBUT D'UN APPRENTISSAGE: OU PLACER LES ROUTINES¹⁰

Auteurs: F. Conne, J. Brun

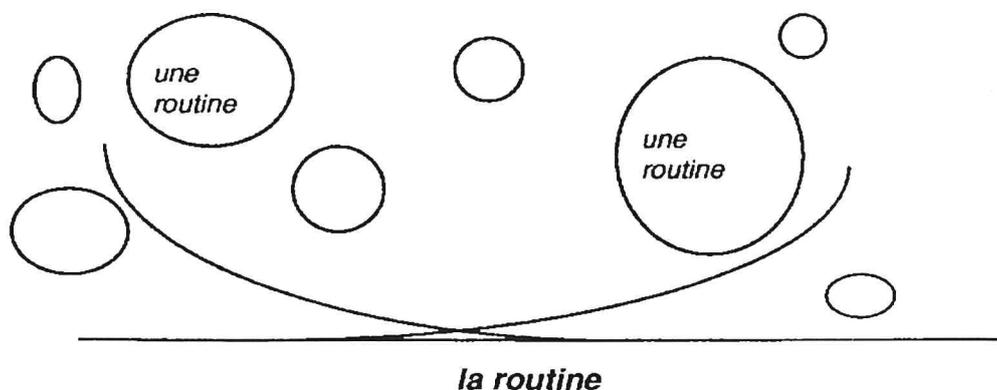
Compositeur/interprète: F. Conne

Faculté de psychologie et des sciences de l'éducation
Université de Genève

Comme méditation sur le temps, construction / reconstruction,
fondement / préconstruit, cette petite histoire racontée par Lewis Carroll , Les
aventures de Sylvie et Bruno :

«Il était une fois une coïncidence qui était partie faire une
promenade en compagnie d'un petit accident; pendant qu'ils se
promenaient tous deux, ils rencontrèrent une explication, une
très vieille explication, si vieille qu'elle était toute pliée en deux
et ratatinée, et qu'elle ressemblait plutôt à une devinette.»

INTRODUCTION



¹⁰ Exposé de F. Conne à la journée du COED, mai 1990, repris par écrit, mai 1991.

¹¹ Notre propos se rapporte à la recherche entreprise avec J. Brun, R. Schubauer, et J. Retschitzki, ainsi que quelques étudiants en sciences de l'éducation , subsidé F.N.R.S. n^o 11-25448-88.

Ce schéma représente l'exemple que je voudrais développer aujourd'hui. pour faire référence au titre que j'ai donné, mais sans approfondir pour l'instant, les routines y sont représentées comme des galets bien ronds bien lisses laissés sur la grève et charriés de temps en temps par le flux et le reflux des vagues venant battre la plage. J'en ai juste indiqué quelques unes ici, mais il y en a beaucoup encore. Mais avant d'en venir à ce schéma, quelques considérations sur le thème de notre rencontre.

Considérant les questions du temps didactique, j'ai toujours des problèmes avec le sens de la ligne du temps, mais peut-être le temps fait-il des boucles, ou des spires, mais comment alors traiter l'avant et l'après sur de telles figures ? Et que marque donc alors le début ? En particulier atteint-on jamais le début d'un apprentissage?

Je vais parler ici d'un sujet bien particulier, l'enseignement de l'algorithme de la division écrite en colonnes. A ce titre l'enseignement de la division est typique du moment où le cursus mathématique de l'enseignement cesse d'être élémentaire, la méthode pour diviser des nombres écrits (en écriture décimale) combine de manière particulièrement sophistiquée des savoirs auxiliaires dûment enseignés. Déjà se pose une question, est-ce que je ne diverge pas du sujet en vous entretenant plus du *début d'un enseignement* que du *début d'un apprentissage* ? Peut-être que la question vous paraîtra saugrenue. Mais considérez donc toutes les descriptions de l'enseignement dont nous disposons, ou pour être plus exact, tous les descriptifs d'intentions d'enseigner, les comptes rendus de la façon dont tel enseignant tel méthodologue, tel auteur de manuel entend organiser l'enseignement de tel objet de savoir. Comparez donc cette abondante littérature avec les données descriptives très pauvres concernant les apprentissages effectifs. Qui veut connaître les apprentissages scolaires devra longtemps chercher dans une littérature spécialisée, ou y aller voir de lui-même. Or dans cette relative pauvreté de données, encore plus pauvres sont celles qui portent sur les débuts d'un apprentissage. Généralement on feint de croire qu'enseignement et apprentissages sont en phase et donc que leurs débuts coïncident. Il se pourrait cependant que cette contemporanéité ne soit que fictive comme le suggèrent les données dont je vais vous entretenir ici. Dit en passant, tout le monde s'accorde bien avec l'idée que l'apprentissage se poursuit bien au-delà

de l'enseignement. Tout le monde s'accorde aussi à penser que les apprentissages s'enchaînent les uns aux autres. Il serait étonnant que ces décalages entre la fin des enseignements et la fin des apprentissages ne se répercutent pas sur les débuts. Comment donc concilier les regards?

OU PLACER LES ROUTINES ?

Pourquoi donc associer les *routines* avec le thème du *début d'un apprentissage* ? parlons d'abord des routines. Je veux vous parler de l'enseignement et de l'apprentissage de l'algorithme de division en colonne à l'école primaire. On peut donc considérer que le but d'un tel enseignement est justement de munir les élèves de *routines* (au sens courant du terme, je préciserai plus loin), soit de calculs disponibles et effectuables par eux sans qu'il ne leur en coûte trop. Un tel objectif découle d'une certaine représentation que l'on se fait tout à la fois du traitement mathématique et du travail intelligent. Les *routines* sont des auxiliaires de travail, qui fonctionnent de manière relativement autonomes, isolées, à peu de frais pour une grande fiabilité, et qui sont là pour fournir des résultats et des données au traitement mathématique à proprement parler.

Où donc placer les *routines* ? La question en cache une autre. Dans le modèle des *routines* vues comme *des auxiliaires machinaux du traitement mathématique*, c'est une relation fonctionnelle du traitement mathématique qui est mis en évidence. Dès lors le calcul d'une division en colonne n'est pas en soi une *routine*, mais **fonctionne** comme telle dans certaines conditions particulières. Dans le projet pédagogique maintenant, on voudrait que les élèves soient capables de tels traitements. Il faut donc que l'élève *acquière* ces *routines*. Pour ce faire une action d'enseignement sera mise en place qui aura pour point de mire ces *routines*. Une question vient alors tout de suite: selon quel modèle va-t-on considérer le travail fourni par la classe durant la présentation et l'appropriation de la *routine* ? Le modèle du travail mathématique assisté par des auxiliaires machinaux de calculs fournissant les résultats et les données que j'ai évoqué ci-dessus, serait-il là aussi valable? Peut-être, mais alors les *routines* auxquelles il serait fait référence ne sauraient en aucune façon être confondues avec celle que l'on se propose d'enseigner. Du point de vue du *nouvel objet* que l'on présente, les conditions fonctionnelles évoquées dans ce modèle ne sont pas celles du travail de

présentation et d'acquisition ; et si, à ce moment de l'enseignement, cette procédure qui est l'*objet* de l'action d'enseignement est bel et bien **destinée** à devenir une *routine*, elle n'y joue pas encore son rôle. Les *routines* sont donc à placer en fin d'apprentissage.

Se pose alors la question de savoir comment caractériser le travail de cette acquisition. Il est culturellement admis que ce travail doit prendre place dans les leçons de mathématiques. Examinons maintenant l'action d'enseignement elle-même. Classiquement, on la considérait comme articulant trois moments, et ce modèle très simple va nous servir de point de référence; ce schéma reste encore d'actualité, même si le temps consacré à chacune de ces phases peut varier fortement d'une classe à l'autre, et si le fil de cette organisation (concernant les 4^e, 5^e et 6^e années primaire) peut paraître fort distendu, voire enchevêtré parmi les autres sujets inscrits au programme scolaire. Ces trois moments sont : 1^o la *présentation* proprement dite, 2^o l'*entraînement*, l'exercice, et enfin 3^o l'*usage* à la faveur de la solution de *problèmes*. Dans chacun des cas il s'agit d'engager réellement les élèves dans un travail, et c'est la qualification de ce travail qui est délicate. Dans un tel schéma, l'enseignement consiste donc à contrôler les activités des élèves pour en guider l'apprentissage. A l'issue du processus, les élèves devraient être capables de traiter de façon autonome et pertinente une nouvelle classe de situations, et de se dégager de ces contrôles provisoirement établis. Il faut bien voir ici que **c'est le fonctionnement global du dispositif d'enseignement, incorporant non seulement les actions effectives des élèves, mais aussi toutes les interactions du groupe classe dirigé par l'enseignant qui est décrit**, l'enseignement est sensé assister l'élève en le dispensant de devoir tout contrôler à la fois. Penser ainsi l'enseignement, c'est le concevoir comme un dispositif réalisant les changements au niveau du sens et de la fonctionnalité des activités engagées en classe. La signification didactique de ces trois moments de l'enseignement est bien claire.

-La **présentation** vise à contrôler que l'acquisition de la nouvelle *routine* ne se passe pas dans le vide, hors signification et sans assurance d'un minimum de compréhension de la part des élèves. Il semble aussi admis que ce travail soit considéré comme participant d'une élaboration mathématique. Ici, le dispositif d'enseignement assure le contrôle du sens.

-L'**entraînement** vise à rendre machinal l'effectuation de la procédure présentée, il s'agit chez l'élève, et pour l'élève de la rendre disponible en tant que *routine*. Ici, le dispositif d'enseignement assure le contrôle du fonctionnement de l'élève dans son effectuation.

-Les **problèmes** visent à englober ces *routines* dans des traitements mathématiques plus larges, et devraient réaliser le modèle de l'activité mathématique à proprement parler. Ici le dispositif d'enseignement établit son contrôle à un niveau plus élevé, et porte essentiellement sur le traitement de l'élève. Ce dernier est appelé à prendre en charge de façon cohérente le sens de ses calculs et la justesse de leur effectuation. Les chercheurs et les enseignants s'accordent à penser que c'est cette phase qui pose le plus de problème dans l'enseignement de la division.

A ce point de la discussion, une question s'impose: comment caractériser la participation de l'élève dans un tel schéma d'enseignement? Ceci revient à se demander comment situer l'apprentissage de l'élève par rapport à un enseignement ainsi conçu. Le décalage entre les phases d'enseignement et d'apprentissage assume la charge d'opérer ce changement de statut, qui affecte autant le plan du fonctionnement que celui de la signification. Se posent alors différents problèmes comme celui de l'articulation de ces 3 moments d'enseignement, et des jeux différents auxquels y sont conviés les élèves. Mais l'articulation avec les enseignements antérieurs n'est pas non plus évidente. Par exemple, la présentation de l'algorithme de division procède classiquement d'une procédure de soustractions successives. A l'autre bout de l'apprentissage, la *routine* à laquelle on aboutit comporte des soustractions, ces dernières fonctionnant comme *sous-routines*, réurnissant les restes auxiliaires permettant de poursuivre la détermination des chiffres du quotient. Ces *sous-routines* soustractives sont-elles les soustractions successives de l'introduction ? Pour qu'on en soit assuré il faudrait qu'au moment d'aborder la division, la troisième phase de l'enseignement de la soustraction soit parachevée! Cette façon de penser l'action d'enseignement voudrait donc que la soustraction, lors de la présentation de l'algorithme de division, perde son statut fonctionnel et objectif) de *routine* pour être considérée comme une *procédure primitive* (en tant que participant d'une procédure de partage), puis qu'elle retrouve un statut de *routine* lorsque l'on passe à l'entraînement et à l'usage de la division proprement dite. (Il est clair en effet que la présentation ne suffira pas à

l'acquisition de l'algorithme par l'élève, et qu'une phase d'exercice sera nécessaire). Ceci va donc correspondre à un nouveau changement de statut, où toutes les procédures engagées dans la procédure nouvellement mise en place redeviendront *routines*. Peut-on vraiment s'attendre que chaque élève suive cette alternance, ou bien va-t-il rester en marge de celle-ci, se contentant de déterminer quand il doit s'impliquer vraiment dans la situation? A priori rien n'exclut que le fonctionnement des élèves en de telles situations suive un tout autre schéma que celui que l'enseignement se propose de réaliser.

UN MODELE PSYCHOLOGIQUE

Les remarques ci-dessus portaient d'une caractérisation de l'activité mathématique selon un critère de fonctionnalité. Quoique relativement simple au départ, l'analyse s'est faite plus complexe à mesure où j'ai essayé d'intégrer à ce modèle des considérations sur l'enseignement lui-même. Je pense qu'à ce point de ma réflexion il convient de clarifier un peu le propos. Reprenons alors le modèle fonctionnel. Dans son article : La microgenèse de la représentation d'un problème, M. Saada-Robert, psychologue du fonctionnement, propose de considérer trois facettes d'un schème: **routine**, **primitive**, **procédure**. Je cite ses définitions¹² :

"Lorsqu'il y a repérage et choix d'un schème identifié en fonction de sa pertinence à un objet, ensemble d'objets ou de relations, on peut parler de **routine**. C'est un schème familier au sujet (au sens de Boder, 1982) et fonctionnellement lié à l'objet (objet-à-faire...). Une routine n'en est pas moins un programme bien compilé, qui se déroule en tant qu'unité compacte, bloc non composable. Elle est liée au contrôle ascendant, car son guidage est assumé par les aspects particuliers de l'objet (tels qu'ils sont sémantisés par le sujet). (...) Lorsqu'il y a guidage de la routine par le but (contrôle descendant, téléonomique), on peut parler de **primitive**. Elle se définit par sa signification en regard de la solution. (...) La primitive est modifiable et composable. (...) Une **procédure** est l'organisation unifiante résultant de plusieurs primitives composées. Celles-ci, au départ isolées, ont en commun la valeur de condition nécessaire à la solution. (...) On aboutit alors à la formation d'une **procédure-type**, unité procédurale manipulable, qui en tant

¹² C'est moi qui souligne

que bloc pourra servir de routine ou de primitive dans un autre contexte (ce qui n'exclut pas sa réorganisation sur le plan des schèmes fondamentaux non contextuels)."

Le texte cité concerne la description du fonctionnement cognitif d'un sujet **dans une situation non didactique**. Ceci veut dire que ses procédures traitent du problème posé, et de la réalité qu'il évoque. En ce sens ceci décrit un fonctionnement idéal. Si ce modèle est correct il devra pouvoir aussi s'appliquer au fonctionnement cognitif de l'élève en situation diadactique, mais ce qui va changer c'est le type de réalité traitée par l'élève, étant donné que la situation didactique a une double réalité: la réalité évoquée par le problème, comme ci-dessus, et la réalité des objets présentés à l'élève pour qu'il les apprennent. Ainsi dans la leçon sur la division, l'élève traite la réalité d'une situation évoquée, le partage par exemple, mais il traite aussi la réalité de ce qu'il doit apprendre, à savoir la division, qui de fait est un objet de la situation.

Nous reviendrons sur ce point. Mais auparavant, je tiens à faire encore quelques remarques concernant ce modèle. Outre les critères de fonctionnalité clairement exposés, ce modèle a l'avantage d'expliquer comment se forment de nouvelles *procédures* à partir de *primitives* et comment ces *procédures types* sont alors disponibles pour fonctionner soit à titre de *routines* soit à titre de *primitives* lorsqu'elles seront engagées dans de nouvelles constructions. L'intérêt du modèle réside donc dans l'intégration opérée entre les critères fonctionnels et le processus de construction. Ceci est très parlant pour quiconque tente d'analyser l'enseignement des mathématiques et tout particulièrement l'enseignement des algorithmes.

Du point de vue de **l'objet d'enseignement** d'abord. L'algorithme de division que l'on enseigne s'il n'est pas une *routine* à proprement parler, n'en est pas moins un support à une *routine* de calcul, et il semble particulièrement adéquat de l'analyser en tant que tel, et d'y retrouver l'architecture d'une *procédure-type* composée, et sans doute constructible, à partir de *primitives*. Ainsi fournira-t-on un modèle de construction de l'algorithme à partir d'une *procédure de soustractions successives*, qui est réorganisée et raccourcie par l'intégration de *procédures de traitement de l'écriture de position*, et de *recherche de multiples simples du diviseur*. Ce modèle, outre qu'il réalise une explicitation de l'algorithme, fournit aussi *la clé d'une mise en situation de sa construction*. Les pédagogues depuis Condorcet, au moins, ne s'y sont pas

trompés. Bien entendu ce faisant **nous opérons au moyen d'une analogie**. L'objet d'enseignement n'est que le support à la procédure que l'on veut enseigner. Nous n'avons fait ici que d'établir une relation, une correspondance entre l'architecture de l'algorithme, d'une part, l'organisation d'une situation de reconstitution de cette architecture, et un modèle du fonctionnement cognitif. Comme nous n'avons pas prise directe sur ce fonctionnement cognitif, nous pouvons espérer que cette analogie va nous permettre de contrôler la construction de la *procédure* chez l'élève, en contrôlant la situation. La donnée de cette analogie suffit-elle? Nous allons voir que non.

Du point de vue de la **logique de l'enseignement** cette fois, le modèle fonctionnel permet une traduction des considérations développée plus haut (Où placer les routines?). Désignons donc le *début d'un enseignement* par ce moment plus ou moins long consacré à la présentation de l'algorithme. On pourra alors dire que ce temps de l'étude consistera en la construction, dans un cadre situationnel clairement établi, d'une *procédure-type* à partir des *primitives* induites par la situation. Ainsi la soustraction ou la multiplication qui entrent dans la construction de l'algorithme de division (la *procédure-type* visée par l'enseignement) vont revêtir, dans ce moment de la présentation le statut de *primitives*. (Ceci n'empêche pas que, par ailleurs, elles puissent avoir déjà fonctionné à titre de *routines* lors d'activités mathématiques antérieures dans l'enseignement). Puis comme je l'ai dit, lors du second moment de l'enseignement, celui de l'exercice, la nouvelle *procédure type* va être appelée à fonctionner pour elle-même, et enfin venir s'intégrer dans des traitement de problèmes à titre de *routine* (quitte, lors d'activités ultérieures à servir éventuellement de primitive à de nouvelles *procédures*).

Ce schéma paraît relativement clair, l'analogie semble effectivement licite, du moins du point de vue de la **fonctionnalité**. Car la question vient alors de savoir **qui fonctionne sur quoi** (quelle réalité). Or comme je l'ai déjà mentionné plus haut, c'est du **fonctionnement de l'enseignement** dont il a été question, et en particulier c'est le **système maître-élève pris globalement qui procède ici**.

Le processus d'enseignement décrit ci-dessus s'ordonne sur l'alternance des contrôles du sens et du fonctionnement. Le dispositif d'enseignement assure le contrôle du sens lors de la phase de présentation. Ainsi l'enseignement de la division débute-t-il fréquemment par l'évocation d'une

situation de partage par distribution d'objets. Le maître pourra proposer une procédure de soustraction successives, et **la leçon réaliser** effectivement cette organisation procédurale. Comment le maître s'y prendra-t-il pour que les procédures engagées par les élèves, lors de la présentation et du montage de l'algorithme, **fonctionnent bien pour eux** à titre de *primitives*, et ne restent pas de simples *routines* effectuées ponctuellement lors de la leçon, afin de répondre aux questions? Ce point est d'autant plus délicat à obtenir que les élèves peuvent se contenter de comprendre superficiellement ce dont il s'agit, sans avoir construit pour eux-mêmes une *procédure-type*. Nous voyons donc que le problème pour l'enseignant est de s'assurer que les élèves participent activement au montage de la nouvelle *procédure*, qu'ils comprennent que le but de l'activité est plus de trouver une *procédure générale de résolution* qu'une simple solution, et qu'ils puissent penser à la façon dont ils ont procédé. Lors de la phase d'entraînement le dispositif d'enseignement établit le contrôle du fonctionnement. Ici ce n'est plus tant l'engagement actif de l'élève qui est problématique pour l'enseignant, mais bel et bien le risque que le sens des activités engagées s'estompe totalement. C'est bien ce qui semble se passer généralement en classe. La troisième phase d'enseignement devrait permettre de renouer sens et fonctionnement. J'ai déjà mentionné que cette phase était reconnue comme particulièrement problématique.

A ce point nous nous retrouvons avec la même question que tout à l'heure: dans quelle mesure l'analogie que nous venons de faire est-elle pertinente? L'enseignement ne peut atteindre le fonctionnement cognitif des élèves qu'en organisant des conditions à leurs traitements mathématiques. On peut chercher à transférer au niveau du dispositif d'enseignement les caractéristiques de fonctionnalité et de signification décrites par le modèle psychologique. Mais dans quelle mesure ceci peut-il garantir que le fonctionnement induit chez les élèves s'intègre effectivement dans ce schéma? Le dispositif peut bien établir tantôt son contrôle au niveau du sens, tantôt au niveau de la fonction, ceci n'assure pas que le fonctionnement, respectivement le sens, induit par le dispositif chez les élèves soit garanti. Ceux-ci peuvent bien rester en dehors du processus et y déployer des significations (relativement) propres et un fonctionnement (relativement) autonome. On peut chercher alors à focaliser l'action d'enseignement sur l'objet enseigné et espérer que ceci assure le joint. Précisons bien ce point. L'algorithme enseigné est un support à la *procédure* de calcul que l'élève doit apprendre. Ce

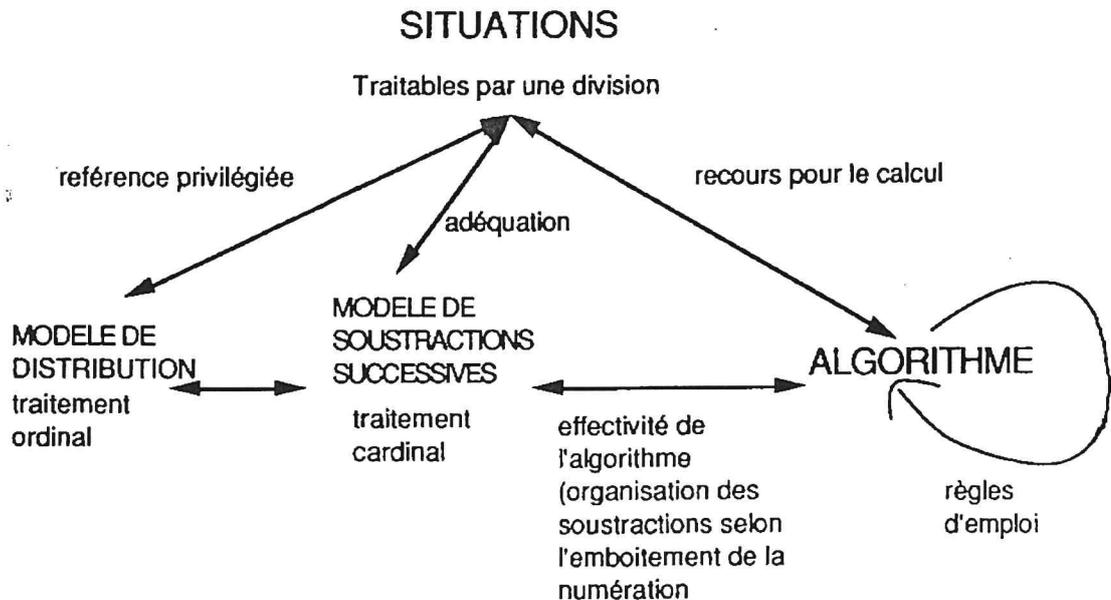
support est d'autant plus réel, concret, que lui correspond un symbolisme standard, l'écriture des nombres et les dispositions des données sur des diagrammes de calcul en colonnes. Dans la situation didactique, la signification des activités engagées n'est donc pas univoquement celle induite par le problème à traiter. La division ne se limite pas à être une procédure de calcul en situation de partage, mais est cette opération que l'on déroule sur telle écriture numérique. **Et les procédures que l'élève va engager (à titre de primitive, ou de routines) vont être sinon plus, du moins tout autant des procédures de traitement de ces éléments symboliques, que des procédures de traitement du problème qui lui est posé.** Ce sont peut-être à elles qu'il s'agit d'appliquer le modèle fonctionnel. Dès lors quelle sera donc la *procédure-type* effectivement construite, peut-on dire qu'il s'agit bien d'une division? Et alors que signifie *diviser*? Nous touchons ici les limites du contrôle du sens dès lors que l'effort didactique mis à placer les élèves dans des situations signifiantes, est généralement contrecarré par le recours au symbolismes standards et les significations que ces derniers véhiculent par eux-mêmes (en tant que réels objets culturels). Ou bien on laisse les élèves inventer eux-mêmes leur symbolismes, à mesure qu'ils élaborent leurs procédures, ou bien on est amené à travailler sur deux niveaux de signification à la fois. L'algorithme est un modèle du fonctionnement cognitif, puis un support à ce fonctionnement, comment être assuré qu'en apprenant à l'élève à fonctionner avec l'algorithme, on lui apprend véritablement à fonctionner **sur** ce support et **selon** ce modèle. Fera-t-il de la division ou des mathématiques?

Par ces remarques nous avons donc soulevé deux problèmes qui s'interposent à notre tentative d'utiliser le modèle fonctionnel dans une analyse didactique de l'enseignement de la division écrite. Ces problèmes se résument en la question suivante: **qui** fonctionne sur **quoi**? Par *qui* nous entendons *quel système*, l'élève ou le couple maître-classe, par *quoi* nous entendons sur *quelle réalité*, qu'est-ce qui est l'objet traité par la procédure. La question qui se pose à nous devient donc celle de savoir si le modèle cognitif fonctionnel, du système sujet-situation, que nous avons utilisé peut effectivement être transféré (par analogie) au niveau du fonctionnement du système didactique: maître-élève-savoir.

NOTRE RECHERCHE SUR L'ENSEIGNEMENT DES ALGORITHMES DE CALCUL A L'ECOLE PRIMAIRE.

Les problèmes que nous avons soulevé ci-dessus s'intègrent bien dans la problématique de notre recherche sur les algorithmes, et sur l'algorithme de division en particulier. Je me contenterai d'en présenter ici que la première phase et vous évoquerai la ligne selon laquelle nous entendons poursuivre.

Pour des raisons institutionnelles trop longues à évoquer ici, la recherche que nous entreprenons ne porte ni sur l'observation et l'analyse d'un enseignement effectif de la division, ni sur la mise au point d'une séquence de situations d'enseignement de cet algorithme. Ce qui, dans les termes des deux questions auxquelles nous nous sommes arrêtés ci-dessus, se traduit par le fait que nous nous sommes focalisés sur la seconde: qui fonctionne sur **quoi**? Autrement dit *quelle réalité* traite un élève lorsqu'il effectue une division, mais aussi de quelle réalité traite l'enseignement de la division? Nous retrouvons ici la dualité apprentissage / enseignement dénotée dans notre introduction. L'analyse que nous faisons peut se lire dans le schéma ci-dessous:



Lorsqu'on examine l'introduction de la division, on note partout ce souci de mise en relation pertinente des énoncés et de l'algorithme. Cependant, c'est par une référence privilégiée à une **situation de partage** que l'on introduit (l'idée de) la division. Or cette situation se traite par des distributions (tours), qui ne représentent pas un modèle des traitements de l'algorithme lui-même.

Le **modèle des soustractions successives** est celui auquel on aura alors recours pour introduire le calcul de la division. Cela se fait dans le cadre général de **l'inversion de la table des multiples** du diviseur. Cette table est construite essentiellement par itérations additives, à son inversion correspond naturellement les soustractions successives. Le passage du modèle-de-partage au modèle-de-soustractions-itérées se fait généralement par une étude de la succession des transformations que la quantité de choses à partager subit dans la situation de référence. On fait en sorte de ne pas tant s'occuper des choses elles-mêmes, que des nombres associés à leurs arrangements (par un arrangement en tableaux récapitulatifs, par exemple). Ceci opère **une mise en adéquation** du modèle de soustractions successives avec les situations de division, et de là, avec la division elle-même. Ceci une fois établi, l'algorithme de division se présente comme un traitement de soustractions successives, organisé sur l'exploitation systématique des règles de la numération de position. Ainsi, le modèle de soustractions successives explique à la fois l'adéquation de la procédure de division en colonnes pour des situations divisives, et le fait que cette procédure soit effective. Ainsi donc, on peut dire qu'**une sorte de preuve de l'algorithme a été jouée lors de l'introduction** que je viens de vous décrire. Ceci est assez classique puisqu'on retrouve ce schéma dans les explications de Condorcet dans son célèbre ouvrage: Moyens d'apprendre à compter sûrement et avec facilité. Cette façon de *preuve par l'application*, est l'inverse de celle que l'on trouve couramment à l'université, par exemple pour le cours de calcul différentiel et intégral, où c'est dans les démonstrations que l'on voit en premier la mise en oeuvre des techniques de calcul (techniques qu'il s'agit de repérer en vue des applications lors des exercices). Tout enseignement recourt à un degré ou à un autre à une telle introduction. Selon les cas et les styles d'enseignement, cette phase sera juste évoquée, fugacement, ou au contraire patiemment développée et approfondie. Faut-il rappeler que dans tous les cas de figure, rien n'assure le degré de participation

effective des élèves à cette élaboration. Il se peut très bien qu'ils n'aient pas fait autre chose que d'assister à ce jeu, et nous ne savons pas ce qu'ils auront effectivement construit à ce propos. La situation n'a peut-être joué qu'un rôle de décors, voire de support à des activités mises en oeuvre par les élèves à la demande expresse de l'enseignant.

A cela s'ajoute qu'un **système de règle d'emploi de l'algorithme** se constitue au cours des entraînements. C'est ce système qui est mis en place par l'exercice et le pointage puis le corrigé des erreurs de calcul. Ce système est relativement autonome, coupé des situations de références: on ne fait jamais *une erreur de partage*, ni de *soustraction successive*, lorsque l'on se trompe dans une division. La sanction n'intervient pas dans la situation de référence. (Une erreur est perçue puis traitée par l'élève au niveau du fonctionnement essentiellement, et ce souvent, malgré toute la *bonne volonté* du maître.)

Concernant le **langage** qui accompagne cet enseignement: c'est-à-dire soit les termes dans lesquels on évoque la division en tant qu'opération, soit les termes qui accompagnent les différentes actions engagées dans le calcul de la division, soit encore les termes qui désignent le statuts des nombres inscrits dans le diagramme (dividende, diviseur, quotient, reste, etc...), il convient de remarquer que les mêmes expressions peuvent se rapporter à chacun des sommets de la figure donnée ci-dessus. Ceci n'assure cependant pas pour autant la mobilité dans les évocations de situations par des énoncés, nous allons le voir par la suite. Par exemple, prenons la sorte de ritournelle qui rythme le calcul lui même et son système de règles d'emploi: ex. $552 : 24$, «*En 5 combien de fois 24, je ne peux pas, je prends 55; en 55 il va 2 fois 24, 2 fois 24, 48, il reste 7, j'abaisse le 2; en 72 combien de fois 24, 2 fois c'est pas assez, j'essaie 3 fois, 3 fois 24, 72, ça tombe juste,...*» Quoique ces termes fassent un tout, chacun évoque précisément la nature de la règle appliquée. On trouve par exemple la formule: *en tant combien de fois tant* qui suggère la multiplication certes, mais la multiplication par additions successives, et dont le résultat doit être alors comparé puis soustrait de la quantité à diviser.

Notre recherche se centre actuellement sur l'étude de ce **système d'emploi**. Nous examinons les erreurs des élèves, nous voudrions aussi décrire les *traitements didactiques* de ces erreurs (traitement didactique des erreurs, en contraste avec traitement psychologique de ces mêmes erreurs par

les psychopédagoges essentiellement). Nous voudrions aussi avoir accès à la connaissance induite par la mise en place de ce système. Or rien ne sert de demander directement aux élèves ce qu'ils font, ils nous servent la ritournelle qu'ils ont apprise, même si elle est adaptée à leurs erreurs, il en est de même de leurs explications qui reprennent étrangement les termes mêmes de leurs enseignants.

Rappelons que nous cherchons à déterminer quelle réalité traite un élève lorsqu'il effectue une division, d'une part, et, d'autre part, de quelle réalité traite l'enseignement de la division. Nous savons que les supports symboliques, écritures et verbalisation supportant les actions prennent une grande part dans cette *réalité* :

A ce propos, nous savons que les différents pays n'utilisent pas les mêmes diagrammes, et que la plupart des gens, adultes comme enfants, sont fortement perturbés lorsqu'on leur demande d'effectuer un calcul, par ailleurs routinier pour eux, sur un tableau inhabituel. Et ceci se passe même si le nouveau support symbolique ne présente que de faibles différences. Comme par exemple entre la

$$\begin{array}{r|l} 444 & 37 \\ -37 & 12 \\ \hline 74 & \\ -74 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

disposition d'une division enseignée en Suisse Romande:

et la

$$\begin{array}{r} 12 \\ 37 \overline{)444} \\ -37 \\ \hline 74 \\ -74 \\ \hline 0 \end{array}$$

disposition américaine: . Autre fait que nous connaissons, celui qui veut que peu d'individus arrivent à s'imaginer ce qui se passe avec des variantes de degrés divers des algorithmes de calcul, et que ceci ne semble pas tenir à leur compétences de calculateur. Mais plus encore, le fait que ces exemples de variations, très répandus dans la littérature pédagogique, ne "passe" pas dans la culture commune, ni dans l'épistémologie des professeurs. (Par exemple les fameuse multiplications *per gelosia* et à l'*égyptienne*; mais encore aussi les variantes de soustractions mentionnées par Condorcet dans son ouvrage, et commentées pour les

instituteurs; ou encore les articles sur l'histoire et les formes des algorithmes de calcul des 4 opérations élémentaires...)

Pour comprendre cela, nous avons examiné le langage et les indices symboliques associés au recours à la division. Ces indices peuvent agir soit en évoquant une situation type pour laquelle l'élève connaît la procédure qui la résout, soit en évoquant la *comptine* qui accompagne et rythme l'effectuation des calculs, ou encore les termes consacrés pour décrire la division, soit à des niveaux plus ponctuels, et directs, des termes (*diviser, fois*), des expressions (*en tant combien de fois tant, il reste*), voire des dispositions de symboles numériques désignant le calcul lui-même. Etc... Dans le modèle classique du recours à une division, à titre de *routine* intervenant lors de la résolution d'un problème, la réalité du calcul s'estompe derrière la réalité évoquée par l'énoncé, et nous ne pouvons y avoir accès. Voilà pourquoi nous avons eu l'idée pour notre expérimentation d'inverser la référence, c'est-à-dire essayer d'évoquer une division par l'entremise d'un énoncé de problème, qui reprenne les termes mêmes des explications scolaires et de la ritournelle. En quelque sorte, nous nous sommes demandé si, par cette entremise, nous pouvions induire une réflexivité dans le traitement mathématique.

Parallèlement, nous espérons que l'analyse des erreurs des élèves nous permettra, elle aussi de répondre à notre question (quelle *réalité* l'élève traite-t-il?). Nous avons donc essayé de combiner nos deux approches. Ainsi par exemple, il semble que l'élève se donne certaines règles de calcul non pas en se référant à la signification de son traitement, mais en se donnant des prescriptions, voire des interdits, dont la fonction est clairement d'éviter telle ou telle erreur. Une telle circonstance donne encore plus de *réalité* aux indices figuratifs et symboliques. L'algorithme dans sa forme écrite (son diagramme) n'est pas seulement l'objet à apprendre, mais c'est aussi l'objet des règles que l'on se donne!

Nous avons donc proposé aux élèves d'effectuer un certain nombre de divisions, et parallèlement, aux mêmes élèves, nous leur avons soumis quelques énoncés de problèmes se référant à une situation numérique de calcul (équivalente à une situation de division). Notre question concernant ces énoncés était de savoir si cela suffirait à évoquer pour les élèves une division, et à quel titre. Par exemple, dans l'énoncé suivant: *De 800, j'ai enlevé 2 fois 320 et il me reste 5 fois 32. Puis j'ai divisé 800 par 32 et j'ai trouvé 15. Ai-je fait juste ?* Une bonne compréhension permet de déduire que la réponse 15 est

fausse, sans qu'il soit nécessaire ni d'effectuer la division $800:32$, ni de calculer le multiple: 15×32 . Il en sera de même dans l'énoncé suivant: *De 728, j'ai enlevé 8 fois 26, et il me reste 520. Combien de fois faut-il additionner 26 pour avoir 728 ?* avec une particularité de plus cette fois, à savoir que l'élève pourrait même ne pas envisager la division pour le traiter! Nous voulions examiner quelles données (ici toujours en surnombre) les élèves allaient identifier pour leur traitement, sur quoi ils allaient donc fonctionner. Notre expérimentation demande quelques précautions, de multiples facteurs pouvant être évoqués dans l'interprétation des résultats que nous allions obtenir. Il nous faut donc d'une part proposer une variété d'énoncés, et d'autre part essayer de qualifier cette *sensibilité aux variations* en examinant ce que nos énoncés induisent.

EXPERIENCE

Nous avons soumis à 6 classes de 5P et 6P (cm2 et 6^{ème}) une épreuve écrite de division en quatre parties.

- Les deux premières concernaient le calcul lui-même et ont donné d'assez bons résultats. Nous avons engagé une analyse des erreurs commises dont nous avons fait la description ailleurs. Sans entrer dans les détails, les élèves interrogés étaient d'assez bons calculateurs.

- La troisième partie de notre épreuve consistait à compléter trois divisions:

$$9072 : \dots = \dots$$

$$\dots : 38 = \dots$$

$\dots : \dots = 95$. La consigne orale était : *une division, c'est un nombre divisé par un nombre, et ça donne un troisième nombre. (Tout en disant ceci, je montrais à mesure les trois emplacements du diagramme) Tu dois compléter là et là (les lacunes) pour obtenir une division, un calcul de division qui soit correct. L'exercice: $\dots : \dots = 95$ est le plus intéressant, car resenti par les élèves comme étant le plus contraignant.*

- La quatrième partie consistait en la donnée de quatre énoncés :

(a) Dans 552, il va 3 fois 24, c'est sûr. Mais on peut y mettre encore beaucoup de fois 24. En tout, combien de fois peut-on mettre 24 dans 552 ?

(b) De 728, j'ai enlevé 8 fois 26, et il me reste 520. Combien de fois faut-il additionner 26 pour avoir 728 ?

(c) De 800, j'ai enlevé 2 fois 320 et il me reste 5 fois 32. Puis j'ai divisé 800 par 32 et j'ai trouvé 15. Ai-je fait juste ?

(d) Dans 86, il va 3 fois 27. Et dans 864 ?

Comme vous le voyez, tous ces problèmes peuvent être résolus par une division. Ils comportent même trop de données, pour celui qui pose celle-ci. Par contre, ils reprennent chacun à leur manière, les termes mêmes de la ritournelle, ou des explications de l'algorithme. Ces termes sont aussi ceux utilisés par les élèves eux-mêmes. Le premier problème induit une idée d'addition itérée du nombre 24, le second fait plus référence à une procédure de soustractions successives, tandis que les deux derniers problèmes demandent à intégrer les données obtenues dans le cadre du déroulement d'une division.

Concernant tous ces résultats (confirmés et renforcés encore par d'autres expérimentations effectuées depuis), il se dégage une caractéristique intéressante. Prenons tout d'abord l'exemple de $\dots : \dots = 95$. On peut envisager en gros trois façons de répondre à cet item. 1° Se donner un dividende. 2° Se donner un diviseur et obtenir le dividende en effectuant le produit de ce diviseur avec le quotient 95. 3° Essayer d'inverser la procédure de division, en quelque sorte reconstituer le dividende en remontant le calcul.

Rares sont ceux qui se donné un dividende. Et aucun n'a poursuivi dans cette voie. Le point difficile est qu'en procédant ainsi, même si l'on pense à diviser le dividende par le quotient (ce qui n'est de loin pas évident pour nos élèves comme le confirme une expérience ultérieure), l'élève risque de trouver un résultat avec reste (on demandait des divisions entières), ce qui ne saurait convenir comme diviseur.

Les élèves se sont donc donné un diviseur. Mais alors les deux résolutions décrites ci-dessus se sont présentées et la solution par multiplication ne s'est pas imposée à une majorité d'élèves! Mais le fait qui est plus significatif réside plutôt dans le fait qu'une bonne part des élèves se représente suffisamment bien le déroulement d'une division pour envisager de le reconstituer. Ceci n'est pas rien compte tenu du fait qu'il demande à ce que les élèves puissent *ouvrir* leur *routine* de calcul, soit faire un effort d'explicitation. Dans ce cas on trouve alors quelques résolutions correctes, plusieurs erreurs du type: $8145 : 9 = 95$, que les élèves peuvent ensuite

corriger, mais aussi des erreurs du type: $8125 : 95 = 95$ qui représentent une sorte de *division chiffre à chiffre*, erreur que les élèves peuvent commettre dans des item de division en début d'apprentissage. Mais les élèves ne parviennent pas toujours à un résultat et peuvent rester dans une impasse, soit qu'ils se perdent dans le parcours inversé de leur calcul, soit qu'ils n'arrivent pas à concilier la donnée d'un quotient, **lu comme un nombre (95)**, avec la suite des chiffres 9 et 5 que doit leur donner le calcul. Un second point très intéressant des résultats obtenus est le suivant: dans certains cas, l'élève ramène sa résolution à la pose d'un calcul annexe, la mise en action d'une *routine*, qui lui donne un résultat considéré comme réponse. Par exemple: se donner un diviseur et effectuer la multiplication de ce dernier par le quotient 95 ; mais aussi se donner un diviseur, par exemple 9, et se contenter d'associer les produits 9×9 et 9×5 : 8145, voire en décalé: 855 (810+45 disposé en deux lignes décalées) sans que la multiplication 95×9 soit posée explicitement. Par contre dans d'autres cas l'élève s'engage sur une résolution beaucoup moins mécanique, et établit une *reconstitution effective de procédure*. Ce qui frappe aussi c'est que l'élève une fois qu'il s'est engagé sur l'une ou l'autre piste, ne semble pas pouvoir envisager une autre façon de résoudre son problème. Il semble donc que chacune de ces résolutions représente un autre traitement de la question posée.

Concernant les problèmes, le résultat est très net. Pour les problèmes (a), (b) et (d), moins de la moitié des élèves recourt à la pose d'une division pour les résoudre. La principale procédure employée consiste à faire une recherche multiplicative, de type *essais-erreur*, sans même que cette recherche soit guidée par une évaluation de l'écart au but. Majoritairement donc, les élèves se donnent un nombre puis le multiplient par le "diviseur" donné (24, 26 ou 27). Fait anecdotique, très souvent ils essaient le *carré* de cette donnée, ce qui aura permis à certains d'obtenir rapidement les solutions aux problèmes (a) et (b). Mais on voit aussi apparaître des recherches additives pour les problèmes (a) et (b), ou soustractives pour le problème (b) essentiellement. Le problème (d) suscitant quant à lui une variété très grande de résolutions, et un taux de réussite très faible, indice de la perplexité que cet énoncé a pu provoquer chez ces élèves.

Le problème (c) par contre, se distingue nettement des trois autres en ce sens qu'il est le plus fréquemment résolu par l'entremise de la pose et de l'effectuation de la division: 800:32. De plus, les réponses des élèves

montrent qu'ils ne font pas le lien entre les relations données et cette division. Très fréquemment l'élève se contente d'effectuer les trois opérations indiquées sur la donnée, **de façon totalement indépendante**. En général, les élèves refont tous les calculs mentionnés : $800 - 640 = 160$, $5 \cdot 32 = 160$, $800 : 32 = 25$. Bien qu'il leur soit demandé si la réponse 15 est exacte, rares sont ceux qui songent à faire la vérification de la division: $800 : 32 = 15$ comme il l'ont appris, c'est-à-dire en effectuant le produit $32 \times 15 = \dots$

Des expériences ultérieures faites avec une autre variété d'énoncés ont pleinement confirmé ces résultats. Ces expériences seront relatées ailleurs.

Ce qui frappe dans ces résultats, c'est bien sûr la faible mise en oeuvre de la division. Et pourtant on a pu vérifier que ces élèves savaient diviser relativement bien, de plus les problèmes étaient les derniers items d'une série portant tous sur la division, et les élèves auraient pu de ce fait en tirer un indice supplémentaire. Il semble cependant que ce qui a fait écran à ce recours consiste en les **indices repérables** dans les énoncés. Ces indices ont fonctionné ponctuellement, par exemple, un terme comme le mot **fois** glissé dans l'expression : *En tout combien de fois peut-on mettre 24 dans 552?* ou, à contrario, le terme **divisé** dans l'expression: *Puis j'ai divisé 800 par 32 et j'ai trouvé 15*. Là encore, ce qui frappe c'est que les élèves une fois engagés dans un type de résolution, ne semblent pas avoir changé de point de vue en cours de route, et ce malgré le grand nombre de multiplications que certains ont dû effectuer. On a bien l'impression que ces multiplications ont fonctionné comme des *routines* bien rôdées, réitérable à volonté. La même remarque peut être faite à propos des additions ou des soustractions successives. Ce qui frappe aussi c'est que les termes des problèmes sont exactement ceux que l'on prononce lors d'un calcul de division, et à ce titre ils auraient pu aussi bien évoquer **globalement** la situation de l'effectuation d'une division, plutôt que **ponctuellement** aiguiller le traitement sur telle ou telle *routine*. Enfin, il semble bien se confirmer que les relations évoquées dans les énoncés ont peu été exploitées par les élèves. Ainsi est-il tout de même étonnant de voir qu'une majorité ne pense qu'à multiplier pour résoudre le problème (a), alors que très peu songent à vérifier par une multiplication le résultat: $800:32=15$ au problème (c). Ceci est aussi à rapprocher de leur résolution de l'item ... : $\dots=95$, examiné ci-dessus.

Pourtant, les rapports entre multiplication et division sont présents dès l'introduction de la division. Non seulement par l'affirmation que la division,

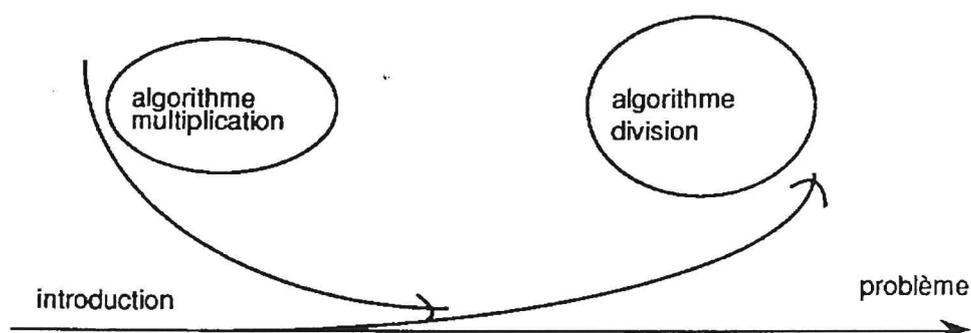
c'est l'inverse de la multiplication, tous sauront vous le dire, mais encore parce qu'on leur a montré, pour motiver l'introduction à la division, que le problème était de trouver à inverser la table des multiples. D'ailleurs les élèves reconnaissent très bien ce problème au travers des énoncés, puisqu'ils s'engagent, à nouveau dans une suite de multiplications tâtonnantes. Cependant cette reconnaissance semble se faire plus au niveau d'indices que du sens, ce qui nous questionne quant à leur compréhension de l'introduction de la division. Enfin, tous savent aussi qu'on vérifie le résultat d'une division en multipliant le quotient par le diviseur (en y additionnant le reste, le cas échéant).

On voit bien ici que c'est la logique de l'enseignement qui est prise en défaut. Les analogies entre l'analyse de l'algorithme, l'organisation de l'enseignement (en phases de présentation d'exercice et de résolution de problèmes), les situations imaginées pour contrôler le sens attribué par l'élève à ces traitements, et le fonctionnement cognitif d'un sujet, ces analogies ne suffisent pas à assurer l'apprentissage. En effet cette rationalité aurait voulu que le problème introductif, qui a motivé tout l'apprentissage de l'algorithme de division, ne soit désormais plus traité par le recours à des multiplications. Or il n'en est rien, pour celui-ci la mouture n'a pas pris chez une grande partie des élèves! Pourtant, entre temps, tous ont appris à diviser, avec en moyenne, une efficacité attestée. Certains se représentent même suffisamment bien cette procédure qu'ils peuvent chercher à l'inverser pour trouver deux facteurs qui divisés l'un par l'autre donnent 95. De plus, s'ils ne recourent pas à tel algorithme pour traiter une situation donnée, ils recourent à un autre algorithme.

Concernant cette résistance de procédures bien rôdées, on retrouve ici des observations rapportées depuis longtemps par G. Brousseau, puis par H. Ratsimba-Rajohn (Etude de deux méthodes de mesures rationnelles: la commensuration et le fractionnement de l'unité, en vue de l'élaboration de situations didactiques.) Mais plus aussi, puisqu'ici ce n'est pas tellement la difficulté de l'adoption de nouvelles procédures de traitement dont il est question, ni même de l'abandon d'anciennes stratégies pour le moins coûteuses. Il est en effet paradoxal que la situation même qui a mené à la

division ne soit pas, en retour, traitée par cette technique une fois celle-ci installée (ce qui est bien le cas des élèves interrogés). C'est comme si les élèves avaient bien avancé dans le programme, mais pas par rapport à la situation qu'ils ont dû traiter pour parvenir à apprendre cette nouvelle technique ! Mais pourtant, et ça ajoute au paradoxe, les algorithmes appris (multiplication et division) sont tout-à-fait mobilisables par ailleurs. Cela ne veut-il pas dire que le début de leur apprentissage n'a pas coïncidé avec le début de l'enseignement? Et qu'ils ont appris à fonctionner sur le support algorithmique (système de symboles numériques disposés en diagramme, plus les règles de leur traitement), voire même à faire fonctionner ce support, plutôt qu'à construire une procédure type de traitement d'une situation divisive?

Revoilà aussi mon schéma de l'introduction :



Tout se passe comme s'il y avait deux plans. Celui du problème d'introduction, qui reste intact le long du déroulement du temps didactique (ligne horizontale du schéma), et celui des apprentissages scolaires, calculs de routine, qui en émergent comme à droite, la division, ou qui sont induits comme à gauche, la multiplication; mais qui ne se constituent ni comme réponse au *problème-enzyme*, et encore moins comme solution à quoi que ce soit. Je dirais même, mais ceci est encore à vérifier, qu'ils sont à eux tout seuls problème et solution.

On ne finit donc jamais de commencer: sur le premier plan, le problème reste inaltéré ; et, sur le second plan, les apprentissages qui émergent semblent être archaïques dès la naissance. Il y aurait d'une part, **la routine**, que ce soit celle d'apprendre ou celle d'enseigner (premier plan), et, d'autre part, les

routines qu'elle fait émerger comme apprentissages, laissées sur la grève (second plan).

QUELQUES CONSIDERATIONS SUPPLEMENTAIRES

Le second type de résultats que nous avons obtenu à ce jour est le suivant. Au travers de nos recherches, nous constatons qu'il est extrêmement difficile d'obtenir des élèves, soit en cours d'apprentissage, soit en fin d'apprentissage, qu'ils nous remémorent les activités au travers desquelles l'algorithme leur a été présenté, ce moment qui correspondrait au montage de la *procédure-type*. C'est comme si la disposition de *routines* occultait à leur yeux le processus au travers duquel ils ont passé, même récemment. On peut alors se demander où se situe la continuité qui les a amené de *la construction de la procédure-type* à *l'usage de la routine*. Serait-il même pensable qu'il y ait à ce point discontinuité ? Nous retrouvons ici le problème déjà rencontré qui consiste à concilier signification et fonctionnalité.

Concernant cette *amnésie*, nous devons préciser ceci. Elle se manifeste par une non-reconnaissance, qui elle-même peut être de différents types. Soit c'est la situation de référence, *partage par une procédure de soustraction successives*, qui n'est pas reconnue ; soit la situation est reconnue, et déterminée aussitôt comme étant divisive, mais c'est la *procédure de soustractions successives* qui n'est pas reconnue ; soit la situation et la procédure sont bien reconnues, mais la *procédure de division est considérée comme toute autre*, en tout cas pas comme pouvant dériver (ou, c'est le cas de le dire, procéder) de la *procédure de soustractions successives*. Nous n'avons jamais obtenu de la part des élèves interrogés cette dernière reconnaissance. De même, il nous a été très difficile d'amener les élèves à concevoir leur traitement en tant que *procédure* et non pas à se contenter de le considérer comme une suite plus ou moins longue d'*effectuations de calculs*. **Même lorsque nous leur présentons comme une méthode la procédure de soustractions successives, ou lorsque nous engageons les élèves à réfléchir à leur recherche tâtonnante d'un quotient par voie de multiplications itérées, les élèves ont de la peine à y trouver d'autre signification que le résultat à produire.** Par exemple ils indiqueront la dernière de leurs multiplications, isolée, lorsqu'on

leur demandera de nous décrire leur méthode de résolution. De même, pour tous les élèves interrogés, le calcul d'une division est à ce point routinier qu'il contrecarre notre tentative de les engager sur une activité réflexive.

Revenons alors à la caractérisation des *routines* selon M. Saada-Robert. L'auteur écrit à ce propos : "Une routine n'en est pas moins un programme bien compilé, qui se déroule en tant qu'unité compacte, bloc non composable. Elle est liée au contrôle ascendant, car son guidage est assumé par les aspects particuliers de l'objet (tels qu'ils sont sémantisés par le sujet)."

Nous tenons là peut-être un début d'explication à l'*amnésie* des élèves. La question est en effet de savoir si lors de nos entretiens nous ne mobilisons pas des *routines* ; et alors à ce titre, l'*amnésie* observée ne serait-elle pas à rapporter à ces *routines* et au cadre situationnel ainsi établi, plus qu'à l'élève ? En effet comment voulez-vous prendre appui sur une *routine*, un tel *bloc non composable*, pour évoquer une entité d'une *autre nature fonctionnelle* ? La discontinuité résidant alors dans le changement de *statut fonctionnel* et ayant donc trait à la situation dans laquelle est évoqué le calcul, cette évocation amenant une fermeture de la situation elle-même sur *la réalité du support symbolique à ce calcul*. Rappelons que nous avons observé une telle fermeture, et relevé, au cours l'analyse des items décrits ci-dessus, la manière univoque dont les élèves engagent leur résolution. Mais c'est le phénomène d'*amnésie* qui nous paraît significatif, peu importe finalement de savoir à quel système il doit être attribué (à l'élève ou bien à notre interaction avec lui) ! Tout se passe comme si le fait d'avoir *présente à l'esprit* la division, à titre de *routine*, bloquait sa *représentation*, sinon à titre d'opération, du moins à titre de *procédure-type*. Conformément à ce que nous avons vu, il est envisageable que cette discontinuité **porte sur l'objet appris: les élèves ayant appris le calcul de la division, et développé une *procédure type* pour traiter de cet objet, et pas tant d'une situation divisive**. Ceci revient à bien comprendre ce que les élèves ont appris à traiter, ou en d'autres termes, **sur quoi** ils fonctionnent. Dans ce cas la signification didactique de la troisième phase de l'enseignement (l'*usage*) serait d'opérer un changement de signification, et d'intégrer cette routine dans le traitement de situations divisives. Une sorte de reprise de la division, de ce qu'elle est censé résoudre. Nos investigations auraient alors surpris les élèves avant que cette élaboration n'ait été atteinte. Si ceci s'avérait exact, le début de l'enseignement prendrait une valeur toute nouvelle par rapport au schéma classique.

Or n'est-ce pas là l'expérience que nous-mêmes, adultes, enseignants ou didacticiens, avons tous fait, nous qui avons, en quelque sorte, *redécouvert* la division au travers de méthodologie d'enseignement, de manuels à l'usage des enseignants, ou encore d'articles spécialisés ? Que pouvons-nous dire sur les *débuts* de nos apprentissages en division, sur la manière dont on nous l'a présentée effectivement ? Rien d'autre que ce que nous pouvons déduire des ouvrages précités et de ce que nous pouvons penser comme une nécessité objective de la division. Par exemple l'évocation, même fugace, du partage, de la distribution et de soustractions successives, etc. Qu'est-ce donc qui nous aura permis de dépasser la situation d'*amnésie* ou nous étions tout comme nos élèves d'aujourd'hui plongés, si ce n'est un changement *fonctionnel* de notre objet, la division n'étant plus alors *savoir à savoir (effectuer)*, mais un *savoir à enseigner* ? C'est bien un tel type de redécouverte que relate E. Duckworth dans son article: Some Depths and Perplexities of Elementary Arithmetic.

Quelques mots maintenant concernant les recherches qui ont suivi celles relatées ici. Tout d'abord, nous nous sommes engagés à confirmer ces résultats. Par le recours à une autre batterie d'items, passés soit dans les mêmes conditions que ci-dessus, soit en entretiens individuels. Puis nous essayons d'examiner plus exactement les liens que nous pouvons faire entre les réponses obtenues aux items de calculs, et en particulier les erreurs, et les résultats aux items discutés ici. Nous cherchons aussi à lier ceci à l'analyse des manuels, analyse qui nous permet de faire certaines hypothèse quant au type d'enseignement effectivement reçu.

Actuellement, nous portons notre réflexion dans les directions suivantes. Toujours à la recherche de caractériser le substrat situationnel pour un élève à l'effectuation d'une division, nous nous demandons à quelles conditions le savoir d'un élève à propos de cet algorithme, pourrait participer à l'élaboration d'un savoir sur le nombre. L'enjeu que nous voyons à une telle question est bien sûr de trouver le moyen de s'assurer que l'apprentissage des algorithmes de calcul puisse être mis à profit de l'élaboration d'un savoir mathématique intéressant. Mais il est tout autant de trouver les moyen d'engager l'enseignement à s'intéresser davantage aux traitements mis en oeuvre par les élèves eux-mêmes. (Lorsque je dis l'enseignement, je veux dire que les conditions soient mises en place pour que l'intérêt de ces traitements soit reconnu tant par le maître que par l'élève lui-même.)

Dès lors trois voies d'investigation (non forcément exclusives ni divergentes) peuvent être suivies. 1° Tout d'abord un travail qui porte sur les moyens didactiques que l'on pourrait envisager pour favoriser l'explicitation par l'élève de ses propres procédures. Or ici on bute sur la force des *routines*. Il faudrait en effet pouvoir *faire ouvrir leurs propres routines* par les élèves. Une chose est certaine, c'est que les *routines* ne sauraient s'ouvrir d'elles-mêmes, elles ne sont pas réflexives. Rappelons alors que la phase de présentation de l'algorithme, dans l'enseignement procède bel et bien à une telle explicitation, mais elle n'est pas le fait de l'élève bien entendu. 2° L'autre voie d'investigation suivrait le fil de la construction décrite par le modèle fonctionnel. L'ouverture des *routines* se faisant par leur inscription dans l'élaboration de nouvelles *procédures-types*. Il convient donc de chercher les conditions permettant la transformation d'une *routine* en une *primitive*. Or comme nous l'avons vu, c'est bien là toute la question qui se pose au début de l'enseignement. Rappelons alors que le problème sur lequel nous nous achoppons ici provient du fait que dans la situation d'enseignement, l'algorithme lui-même devient un objet traité par l'élève... 3° La troisième voie, celle qui reçoit ma préférence, consisterait à mettre ces *routines* au service d'explorations numériques véritables, qu'elles soient donc des moyens de connaître le nombre, plus que de résoudre des problèmes d'arithmétique tous plus artificiels les uns que les autres. (Mais ceci ne requiert-il pas de la part de l'élève un changement de niveau dans sa réflexion?)

CONCLUSION : PRECONSTRUIT ET ALGORITHME.

Pour conclure revenons au thème de notre rencontre; *Les débuts d'un apprentissage*, et au décalage entre temps d'apprentissage et temps d'enseignement que recouvrent toutes les considérations précédentes.

Le temps de l'enseignement comme fiction: préconstruction et après-coup. tel est le titre du huitième et dernier chapitre du livre que Y. Chevallard a consacré à la Transposition Didactique (le lecteur se référera au résumé annexé à cet article). La première de ces propositions est celle-ci: "Le temps de l'apprentissage dément le temps didactique officiel." Nous retrouvons ici ce que nous avons déjà dénoté entre apprentissage et enseignement. Il semble

bien que nous nous achoppions ici à la fiction du temps didactique. Comme le dit la 9^{ème} proposition de Y. Chevallard, dans le chapitre cité ci-dessus:

“La construction d’une théorie des situations adéquate suppose un changement de temporalité, ou plutôt la prise en compte du problème de l’articulation entre plusieurs temporalités non isomorphes.”

Le modèle fonctionnel de la microgenèse que j’ai emprunté à M. Saada-Robert a pour moi une grande valeur, en ce sens qu’il intègre de manière simple et très satisfaisante les critères fonctionnels et la construction des procédures. Pourrait-on s’en inspirer pour les études didactiques et faire une analogie fructueuse? Bien que cela semble a priori tout à fait adéquat et possible, j’ai sans cesse buté dans mon entreprise sur les interrogations du type: à quoi appliquer ce modèle? qu’est-ce donc qui est construit en classe? Ce que j’ai résumé sous la forme de la question double: **qui fonctionne sur quoi ?** Fonctionnalité et élaboration ne semblent plus aussi facilement coïncider en didactique!

Comme nous l’avons vu, vient s’interposer la *réalité de l’objet enseigné*, qui double en quelque sorte la *réalité* traitée dans la situation divisive. Nous touchons là un point extrêmement sensible de toute entreprise d’enseignement des mathématiques. En premier lieu se pose la question fondamentale de la *réalité des objets mathématiques eux-mêmes*, et nous n’échappons pas à l’ambiguïté qu’il y a à vouloir faire apprendre aux élèves des objets de pensée. Quelle pensée se développe-telle dans une telle entreprise ? et quel est donc le lien entre cette pensée sur la pensée et la conceptualisation du réel ? En d’autres termes il est ici question de concilier deux regards portés sur l’algorithme, le premier le considérant comme un objet mathématique, le second comme un schème de la pensée. Donc l’élève ne commence pas par apprendre à résoudre une classe de situations divisives, mais il commence par *apprendre la division*. Ce savoir, *déjà-là*, pour reprendre l’expression de A. Rouchier, est donné préalablement, comme construit ailleurs et déjà tout déterminé. **L’élaboration de tout enseignement est une reconstitution**. Le dispositif d’enseignement a la charge d’amorcer, sous le contrôle sémantique et fonctionnel de ce *déjà-là*, l’apprentissage des élèves. Reprenons notre schéma classique de l’enseignement. Le début de l’enseignement, présente l’algorithme en le motivant par une situation (un partage à effectuer par exemple): « Voilà une situation divisive ». Du coup, voilà aussi la division installée, et l’enseignant ou même quelqu’un de ses

élève peut en exhiber le diagramme. Pour le moment il n'y a en fait aucune procédure de constituée, ceci est pour plus tard, au moment où l'apprentissage commencera, avec la phase d'exercice, qui consistera essentiellement à *apprendre à faire comment on fait*. Le contrôle du dispositif d'enseignement s'établit bel et bien à la faveur d'un *double déjà là*, sémantique puis fonctionnel. On le voit, ce contrôle par le dispositif d'enseignement se paie au prix d'une interposition dans le rapport de l'élève à la réalité, la connaissance de ce dernier est sous tutelle d'une réalité instituée. Au cours de ce processus quelque chose sera effectivement construit, et, pour autant que le modèle microgénétique du fonctionnement cognitif soit correct, il pourra s'appliquer à rendre compte de cette élaboration.

Mais quelle connaissance est donc produite par une telle tutelle ? Une chose est certaine, elle s'est développée sous la dépendance étroite du dispositif d'enseignement et du découpage de la *réalité* (en *domaines de la pensée* séparés) qu'il institue. A la sophistication des *procédures* et *routines* ainsi construites correspond corrélativement une absence quasi complète de construction des *situations* pour les faire fonctionner, une élaboration quasi nulle de la *réalité* qu'elles sont censées traiter. Cet état de dépendance des élaborations cognitives scolaires vient de ce qu'elles sont construites sur du *préconstruit*, et c'est ce qui fait l'artificialité d'une telle connaissance scolaire.

Ce sont J. Tonnellet et Y. Chevillard qui ont proposé d'utiliser la notion de *préconstruit* pour les analyses didactiques. Ils en font l'emprunt à la *théorie du discours* de M. Pêcheux et P. Henry. Voici tout d'abord ce qu'en dit M. Pêcheux, dans son ouvrage: Les vérités de La Palice, François Maspéro, Paris, 1975:p. 88, "C'est ce qui a conduit P. Henry à proposer le terme de « *préconstruit* » pour désigner ce qui renvoie à une construction antérieure, extérieure, en tout cas indépendante, par opposition à ce qui est « construit » par l'énoncé." puis p. 92 : "Nous concluons cette première approche du problème du *préconstruit* en soulignant comme sa caractéristique essentielle la séparation fondamentale entre la *pensée* et l'*objet de pensée*, avec une préexistence de ce dernier, marquée par ce que nous avons appelé un décalage entre deux domaines de pensée, tel que le sujet rencontre l'un de ces domaines comme l'impensé de sa pensée, lui préexistant nécessairement. C'est ce que Frege exprime en disant qu' « un nom d'objet, un nom propre, ne peut absolument pas être employé comme un prédicat grammatical. »

Nous allons voir maintenant que cette séparation est en même temps, et paradoxalement, le moteur du processus par lequel *se pense l'objet de pensée*, c'est-à-dire le processus par lequel la pensée fonctionne selon la modalité du *concept...*"

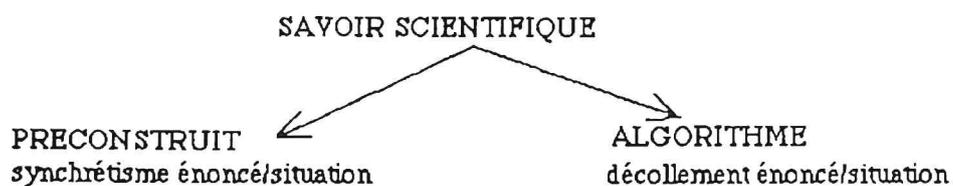
Dans l'exacte perspective ouverte par cette citation de M. Pêcheux, je dirai que la connaissance scolaire dont il est question ici n'a pas le statut d'une conceptualisation du réel. Pour l'atteindre il faudrait en effet qu'elle permette au sujet de retrouver par lui-même, la nécessité du découpage préalable institué par le dispositif d'enseignement, c'est-à-dire retrouver la détermination inscrite dans l'objet appris, ou en d'autres termes, **construire la classe de situations** qui lui correspond. Lorsqu'il élabore l'introduction de l'algorithme de division par l'évocation d'une *situation-de-partage-par-distribution*, le pédagogue croit souvent qu'il procède à une explicitation de l'algorithme, alors que l'essentiel de sa démarche s'est déjà joué dans la construction de la situation de référence, et dans la conceptualisation du réel que cela suppose! On comprend donc bien pourquoi tout le monde s'accorde à penser que les choses décisives vont se passer dans la troisième phase d'enseignement, car c'est avec elle que semble se faire l'essentiel du travail de conceptualisation. A ceci s'est consacré G. Vergnaud tant du point de vue du montage de séquences d'enseignement, que dans l'élaboration de la théorie psychologique, je citerai à ce propos le n° 4.1 de Recherches en Didactiques des Mathématiques, Didactique et acquisition du concept de volume, et son article intitulé: Concepts et schèmes dans une théorie opératoire de la représentation. Par ailleurs G. Brousseau fait porter ses recherches sur ce point exactement, tant dans l'étude de la dévolution à propos de l'enseignement de la soustraction, c.f. son article: Le contrat didactique, le milieu, in Recherches en Didactique des Mathématiques, n° 9-3., qu'à propos de l'étude de la division, c.f. Représentations et didactique du sens de la division. In Didactique et Acquisition des connaissances scientifiques. Bien d'autres chercheurs pourraient être encore cités.

En didactique des mathématiques, c'est J. Tonnelle qui le premier, à ma connaissance, a développé une analyse à partir de la notion de *préconstruit*, dans son travail de DEA: Le monde clos de la factorisation au premier cycle, et particulièrement aux pages 61-63. Citons en un passage significatif. "Or, le système didactique est ici la proie d'une contradiction au sens dialectique du mot. D'une part, il y a, inscrite dans la logique de cet enseignement, la

nécessité de prendre pour base de l'enseignement de l'analyse à ce niveau, les fonctions polynômes. (...) D'autre part, il y a l'impossibilité d'identifier par une construction conceptuelle explicite la notion même de fonction polynôme. Cette impossibilité renvoie immédiatement à l'absence de la construction du concept de polynôme que les programmes officiels entérinent en n'introduisant pas le concept." On aura compris que les concepts de polynômes et de fonction polynômes vont être introduits à titre de *préconstruit*, sur lesquels va s'enseigner la factorisation. L'analyse de J. Tonnelles va laisser implicite une question: comment résoudre cette contradiction ? Faut-il préalablement construire le concept de polynôme ? Est-ce envisageable ? C'est cette question que reprend Y. Chevallard cette fois dans le chapitre 8 de son ouvrage sur la Transposition didactique. Voici comment:

"L'objet préconstruit est un objet dont le concept est absent. Il est présenté, son existence apparaît comme évidente, il est installé par monstration, dans un état qui échappe au questionnement, parce que tout questionnement le suppose: il est un point d'appui inattaquable de la réflexion. (...) La préconstruction s'établit par le croisement d'énoncés du langage et de situations surdéterminées."

Cette caractérisation du rapport particulier entre le préconstruit et la situation qui lui sert de référence permet à l'auteur de contraster préconstruit et algorithme: "La préconstruction s'établit par le croisement d'énoncés du langage et de situations surdéterminées. (...) A l'autre bout de la chaîne, à la préconstruction s'oppose l'algorithmisation, où il y a coupure entre énoncés et situations. Le savoir scientifique se pose comme maîtrise de la dialectique entre énoncés et situations (dialectique qui suppose à la fois l'autonomisation des énoncés par rapport aux situations, ce qui l'oppose au statut de la préconstruction, et la mise en relation pertinente des énoncés et des situations, ce qui l'oppose à l'algorithmisation)." On peut donc faire le schéma suivant :



Chevallard concède cependant que : "Mais à un instant donné, un savoir scientifique quel qu'il soit fonctionne sur une strate profonde de préconstruit." C'est cette analogie avec l'avancée du savoir scientifique qui lui souffle alors la réponse à la question laissée en suspens par J. Tonnelles: "Le problème est celui qu'en histoire des sciences on a pu désigner par les noms de *refonte* ou de *reprise*. En ce qui concerne la psychologie, il semble que le problème ait été évité à partir de deux restrictions sur les types d'études menées : études *d'apprentissages courts*, études de schèmes (leur genèse, évolution, connexions, etc.) plus que de *contenus de savoir* particuliers. Si la temporalité de la psychogenèse substitue une durée intégrative à une durée simplement cumulative, elle n'en reste pas moins irréversible, alors que le temps de l'enseigné semble aussi être fait de réorganisations." Puis enfin: "La nécessité de reprises *d'acquis antérieurs*, à la lumière d'expériences ultérieures, peut être située du côté de l'activité propre du sujet.(...) Mais la réélaboration est une nécessité qui tient à ce que l'on a appelé la préconstruction du savoir." Dès lors le schéma que préconise Y. Chevallard pour penser l'enseignement s'écarte résolument du schéma classique. Le début d'un enseignement n'est pas, pour lui, une phase de construction, mais une phase d'installation, de mise en présence de l'élève face à l'objet à apprendre. La conceptualisation ne peut que succéder à l'initiation.

Toutes les considérations que j'ai développées jusqu'à ce point montre que je partage ce point de vue. Cependant, Y. Chevallard nous laisse sur l'invocation d'un *effet d'après coup*, et ceci ne saurait me suffire! Si l'on suit le raisonnement de Y. Chevallard, et l'opposition entre *préconstruction* et *algorithmisation*, l'entreprise d'enseignement des algorithmes, et plus généralement l'algorithmisation de l'enseignement mainte fois remarquée, nous placent devant un paradoxe: par quel tour de passe passe l'enseignement peut-il installer un algorithme en procédant par préconstruction ? L'enseignement aurait-il lui aussi toute la maîtrise que Y. Chevallard attribue en la matière au savoir scientifique ? Ne vaut-il pas mieux de parler de *déjà-là*, et d'inscrire ces considérations dans la perspective de l'institutionnalisation, comme A. Rouchier le propose, puisque ce *préconstruit* n'est pas seulement donné, apposé, mais joue encore le rôle de cadre organisateur de l'enseignement (au travers de contrôles du sens ou du fonctionnement) ?

Quoiqu'il en soit, les questions qui m'importent sont du type suivant: comment penser l'enseignement pour amener les élèves à engager le travail de conceptualisation ? Comment assurer qu'à un moment donné l'enseignement puisse reculer l'*horizon du préconstruit* et ne pas se contenter de cumuler les *préconstruits* au fur et à mesure de son parcours du savoir? Ceci nous ramène donc à la question centrale de caractériser le *jeu savoir-situation* qui y a cours. Le mot *routine* a bien entendu cette connotation propre à l'algorithmisation, et sa possibilité de "fonctionner à vide", décollée du substrat situationnel. Cependant, il est difficile d'envisager qu'une procédure aussi complexe que le calcul d'une division puisse se mettre en place en étant d'emblée décollée de toute situation. Dès lors que se passe-t-il vraiment au cours de l'enseignement? Comment le processus d'apprentissage scolaire se déroule-t-il? Le processus de réélaboration postulé par Y. Chevallard n'est-il pas, dès le départ, inscrit dans les processus d'enseignement et d'apprentissage ? Et concernant les modèles psychologiques, il me semble que cet auteur va un peu vite en besogne. A ce titre je ferai remarquer que les considérations didactiques que j'ai développées pour montrer la complexité qu'il y a à penser l'enseignement n'invalident en aucune manière les modèles psychologiques. Par exemple, nous avons vu que l'enseignement ne pouvait éviter de s'interposer dans le rapport de l'élève à la réalité. Mais ceci les psychologues ne l'évitent pas non plus dans leurs observations: ainsi cet *effet de préconstruit* que nous avons dénoté à propos de l'enseignement, se peut-il vraiment qu'il n'affecte pas l'expérimentation psychologique ? Non. Donc si le modèle fonctionnel a une certaine pertinence relativement à ce champ d'expérimentation, la dénotation du *préconstruit* ne saurait en soi les rendre impertinent relativement au champs didactique. Ceci nous force à admettre que l'on développe *sa connaissance du réel* à apprendre des *objets de pensée* : on apprend réellement quelque chose de mathématique en apprenant à effectuer une division en colonnes. Les processus que nous essayons d'atteindre possèdent donc bien quelque part une sorte de réflexivité, la conceptualisation est sans doute déjà en oeuvre dès les débuts de l'enseignement. Peut-être procèdent-ils selon un modèle récursif comme le propose T. Kieren.

Ce sont ces considérations qui nous poussent à examiner de manière approfondie l'enseignement et ce qui s'y passe. Quatre faits que nous avons pu observer nous encouragent à poursuivre dans cette voie:

1.- Au travers d'analyses conjointes des erreurs des élèves et de leurs réponses aux problèmes que nous avons imaginés, nous réussissons patiemment à déterminer quel type de connaissance recouvre l'apprentissage des algorithmes.

2.- Les élèves les plus avancés, ceux qui maîtrisent le mieux les *routines*, sont aussi ceux qui sont le plus à même d'amorcer le *travail de conceptualisation*..

3.- Il semble bien que dans la résolution des problèmes que nous avons posés, nous retrouvions chez les élèves un fonctionnement analogue à celui des maîtres lorsqu'ils lisent dans leur manuel de méthodologie, la présentation de la division...

4.- Les choses semblent à ce point réflexives que nous, c'est-à-dire notre équipe de recherche, ne cessons pas non plus de découvrir, **après coup**, tout ce que recouvre une division.

Ceci n'est donc pas une..

FIN.

BIBLIOGRAPHIE DES TEXTES CITES

BROUSSEAU G. : Représentations et didactique du sens de la division. In *Didactique et Acquisition des connaissances scientifiques*. Actes du Colloque de Sèvres. Mai 1987. 47-64. La Pensée sauvage 1988

BROUSSEAU G. Le contrat didactique, le milieu, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, n° 9-3, 1990. pp. 309-336.

CHEVALLARD Y. : *La Transposition Didactique*. , Grenoble, La Pensée Sauvage, 1985.

CONDORCET : *Moyens d'apprendre à compter sûrement et avec facilité*. , Paris, A.C.L. - éditions, 1989.

CONNE F., BRUN J. : Content and Process: the case of teaching written calculation at primary school, Actes du symposium *Responsible and Effective Teaching*, Fribourg sept. 3-7, 1990.

DUCKWORTH E. : Some Depths and Perplexities of Elementary arithmetic, *Journal of Mathematical Behaviour*, n°6, pp 43-94, 1987

KIEREN T. : Personal knowledge of Rational Numbers: Its intuitive and Formal development, in *Number Concepts and operations in the Middle*

Grades. The national Council of teachers of Mathematics, Inc, Lawrence Erlbaum, 1988.

PECHEUX M. : *Les vérités de La Palice*, François Maspéro, Paris, 1975.

RATSIMBA-RAJOHN H. : Eléments d'étude de deux méthodes de mesures rationnelles, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, n° 3.1, pp.65-113, la pensée Sauvage, Grenoble, 1982.

RATSIMBA-RAJOHN H. ,*Etude de deux méthodes de mesures rationnelles: la commensuration et le fractionnement de l'unité, en vue de l'élaboration de situations didactiques*. 1981, Thèse, Université de Bordeaux I, Irem Bordeaux.

ROUCHIER A.L.'institutionnalisation des savoirs dans l'enseignement des mathématiques, in *Etude de la conceptualisation dans le système didactique en mathématiques et informatique élémentaires: proportionnalité, structures itérativo-récurrentes, institutionnalisation*. Thèse de doctorat d'état, Université d'Orléans, UFR: Sciences Fondamentales et Appliquées, Orléans 1991, pp. 26-71.

SAADA-ROBERT M. : La microgenèse de la représentation d'un problème, *Psychologie Française* n° 34 2 / 3 , Septembre 1989 , pp. 193-206

TONNELLE J. :*Le monde clos de la factorisation au premier cycle*, mémoire pour le DEA de didactique des mathématiques, IREM Aix-Marseille et IREM Bordeaux, 1979.

VERGNAUD G. et alii Didactique et acquisition du concept de volume, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, n°4.1, 1983, Grenoble, La Pensée Sauvage.

VERGNAUD G. Concepts et schèmes dans une théorie opératoire de la représentation, *Psychologie française*, n° 30-3/4, Armand Colin, Paris, nov 1985, pp. 245-252.

ANNEXE:

RESUME EN 19 PROPOSITIONS DU CHAP 8 DE L'OUVRAGE: La transposition Didactique, de M. Y. Chevallard.(1985)

Dans son ouvrage sur la Transposition Didactique, Y. Chevallard évoque la question des algorithmes au chapitre 8, intitulé: "Le temps de l'enseignement comme fiction: préconstruction et après coup." Examinons très succinctement l'argumentation de ce chapitre.

1 - Le temps de l'apprentissage dément le temps didactique officiel.

2 - L'enseignant doit croire d'une certaine manière, à la fiction de la durée didactique dont il est l'ordonnateur. Certains psychologismes viennent supporter cette fiction.

3 - La mise en évidence d'une distorsion de la norme temporelle par la réalité des apprentissages n'émane qu'exceptionnellement de l'instance enseignante proprement dite : elle est le fait d'un regard porté sur la relation didactique d'un point proche mais extérieur, porté pour faire surgir *l'inadaptation* du système didactique, ou porté par l'analyse scientifique elle-même.

4 - C'est l'affaire de la transaction, qui vient réaliser l'auto-régulation du système didactique, que de s'arranger avec ces faits, patents, qui viennent nier la temporalité affichée par lui. Un moyen général de négociation est l'algorithmisation. (c.f. chap. 7-11 et 7-12)

5 - La normalisation, imposée par le temps didactique légal à l'appréhension de la temporalité des apprentissages, prend appui sur le découpage du savoir résultant de la mise en textes qui fonde le temps didactique.

6 - Pour explorer le temps de l'enseigné en sa structure particulière, on peut partir de la question suivante: s'il y a deux régimes de savoirs, articulés en synchronie selon des mécanismes transactionnels pour permettre la fiction du temps didactique légal, comment d'un élève toujours soumis au registre épistémologique qui définit sa place d'enseigné, peut-on un jour faire un professeur de mathématiques ?

7 - Le problème est celui qu'en histoire des sciences on a pu désigner par les noms de *refonte* ou de *reprise*. En ce qui concerne la psychologie, il semble que le problème ait été évité à partir de deux restrictions sur les types

d'études menées : études *d'apprentissages courts*, études de schèmes (leur genèse, évolution, connexions, etc.) plus que de *contenus de savoir* particuliers. Si la temporalité de la psychogenèse substitue une durée intégrative à une durée simplement cumulative, elle n'en reste pas moins irréversible, alors que le temps de l'enseigné semble aussi être fait de réorganisations.

8 - Il existe un modèle de temporalité qui autorise des retours réorganisateur radicaux: c'est le concept freudien d'après-coup. Ce modèle semble être éclairant lorsqu'il est appliqué à des réorganisations cognitives.

9 - La construction d'une théorie des situations adéquate suppose un changement de temporalité, ou plutôt la prise en compte du problème de l'articulation entre plusieurs temporalités non isomorphes.

10 - La nécessité de reprises *d'acquis antérieurs*, à la lumière d'expériences ultérieures, peut être située du côté de l'activité propre du sujet.

11 - Mais la réélaboration est une nécessité qui tient à ce que l'on a appelé la préconstruction du savoir.

12 - L'objet préconstruit est un objet dont le concept est absent. Il est présenté, son existence apparaît comme évidente, il est installé par monstration, dans un état qui échappe au questionnement, parce que tout questionnement le suppose: il est un point d'appui inattaquable de la réflexion.

13 - La préconstruction s'établit par le croisement d'énoncés du langage et de situations surdéterminées.

14 - A l'autre bout de la chaîne, à la préconstruction s'oppose l'algorithmisation, où il y a coupure entre énoncés et situations. Le savoir scientifique se pose comme maîtrise de la dialectique entre énoncés et situations. Mais à un instant donné, un savoir scientifique quel qu'il soit fonctionne sur une strate profonde de préconstruit.

15 - Lorsqu'il y a crise, la nécessité se fait sentir d'une reprise du savoir antérieur, dont la préconstruction n'est plus suffisante, parce que son inaptitude à donner prise à un questionnement scientifique apparaît.

16 - Il en va de même dans l'enseignement des mathématiques, quoiqu'il faille alors les étudier de manière spécifique.

17 - La manipulation des préconstruits est définie par un code de conduite qui n'est efficace qu'à ne pas être explicité: pour chaque situation particulière, une conduite particulière, sans qu'on puisse décontextualiser ces

conditions afin d'en dresser une liste. Le savoir préconstruit est fragile parce qu'il ne supporte pas la variation.

18 - Pour accéder à un statut qui le fasse entrer dans une activité théorique où il soit mis en débat, il devra être repris, construit.

19 - Le préconstruit est la manifestation -éventuellement archaisante- de notre savoir passé au sein du présent.