



HAL
open science

Qué podría haber sido la universalidad para Euclides

Marco Panza

► **To cite this version:**

Marco Panza. Qué podría haber sido la universalidad para Euclides. G. D. Secco, F. T. Sautter and O. M. Esquisabel, W. Sanz. De mathematicae atque Philosophivae Eleganti, College Publications, 2023. halshs-03947510

HAL Id: halshs-03947510

<https://shs.hal.science/halshs-03947510v1>

Submitted on 19 Jan 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Qué podría haber sido la universalidad para Euclides

Marco Panza
IHPST - CNRS, and Univ. of Paris 1
Chapman University

Las proposiciones geométricas de los *Elementos* de Euclides son universales. Pero, ¿en qué sentido lo son?

¿Tratan las proposiciones geométricas acerca de una cierta totalidad de ítems geométricos (posiblemente objetos)? Ello resultaría sugerido al leer tales proposiciones como sigue: ‘Para todo segmento x , construir esto y esto’; ‘Todos los triángulos son así y así’.

¿Tratan estas proposiciones de cualquier elemento de tal totalidad? Ello resultaría sugerido al leerlas del siguiente modo: ‘Dado cualquier segmento, construir esto y esto’. ‘Cualquier triángulo es así y así’.

¿Se refieren a esquemas (en el sentido lógico) de cualquier elemento de tal totalidad? Como parecería estar sugerido al leerlas de la siguiente manera: ‘Dado el (un) segmento AB , construir esto y esto’, ‘El (un) triángulo ABC es así y así’.

Considero que todas estas interpretaciones, estén ellas apoyadas o no en consideraciones filológicas, entran en conflicto con un hecho crucial: que no se proporciona ninguna condición global de identidad para los ítems relevantes, e incluso no hubiera podido proporcionarse en el entramado conceptual de la geometría de Euclides. Todo lo que se proporciona son condiciones locales de identidad, que dependen de representaciones diagramáticas de estos ítems. Luego, ningún sentido claro estaría disponible para las afirmaciones universales referidas, en un sentido u otro, a una totalidad fija de ítems geométricos.

Posiblemente, el modo en que hoy concebimos a tal totalidad se encuentra condicionado, o al menos es diferente del modo en que lo griegos concebían una totalidad fija de ítems geométricos. Sin embargo, la pregunta que estoy planteando es una pregunta para nosotros, no para ellos. No estoy preguntando si Euclides concebía a una totalidad de ítems geométricos en algún sentido compatible con la ausencia de condiciones globales de identidad para sus elementos. Estoy preguntando si existe un modo para nosotros de comprender lo que él podría haber tomado como una afirmación universal, dado que no podemos adscribirle nuestra concepción de una totalidad fija de ítems geométricos.

No quiero una respuesta desde la filología, simplemente porque esta es una pregunta que la filología no puede responder, puesto que no trata de lo que está escrito, sino de cómo nosotros entendemos lo que está escrito. Sin embargo,

tampoco deseo una respuesta que vaya en contra de la filología. Así, comenzaré recolectando evidencia filológica. He revisado las afirmaciones de las 48 proposiciones del primer libro de los *Elementos* y clasificado los diferentes modos en que ellas, en mi opinión, se refieren a los ítems relevantes.

Dejé de lado las pruebas, tanto por cuestiones de espacio, como también porque la práctica (o técnica) de la *ekthesis* uniformiza el modo de referencia, de una manera que no ofrece comprensión sino que la requiere, puesto que esconde el universal bajo la forma aparente de un particular.

Algunas proposiciones refieren a los ítems a través del nombre de su tipo, utilizado en el singular y precedido por un artículo, a menudo junto con el calificativo que es usualmente traducido como ‘dado’, extraído del verbo ‘δίδωμι’:

- Prop. I.1 Sobre una línea recta dada [επι της δοθεισης ευθειας] construir un triángulo equilátero.¹
- Prop. I.2 Poner en un punto dado [τω δοθεντι σημειω] (como extremo) una línea recta igual a una línea recta dada [τη δοθειση ευθεια].
- Prop. I.9 Bisectar un ángulo rectilíneo dado [την δοθεισαν γωνιαν εὐθύγραμμον].
- Prop. I.10 Bisectar una línea recta dada [την δοθεισαν εὐθειαν πεπερασμένην].
- Prop. I.11 Trazar una línea recta en ángulo recto a una línea recta dada [την δοθειση εὐθειαν] desde un punto dado [δοθέντος σημείου] sobre ella.
- Prop. I.12 Para una recta infinita dada [την δοθεισαν εὐθειαν ἄπειρον], desde un punto dado [τοῦ δοθέντος σημείου] que no está sobre ella, trazar una línea recta perpendicular.

Otros ejemplos son las proposiciones I.23; I.31; I.42; I.44; I.45; I.46.

Algunas proposiciones hacen lo mismo, aunque omitiendo tanto el calificativo ‘dado’ como el artículo:

- Prop. I.6 Si en [un] triángulo [τριγωνου] dos ángulos son iguales entre sí, los lados que subtienden los ángulos iguales serán también iguales entre sí.
- Prop. I.13 Si [una] línea recta [εὐθεϊα] puesta sobre [una] línea recta [εὐθειαν] forma ángulos, formará o bien dos ángulos rectos o bien ángulos iguales a dos ángulos rectos.

¹En la medida de lo posible, hemos intentado una traducción literal al castellano de la traducción al inglés del texto de Euclides por parte del autor de esta nota, con base en la traducción de Heath. El texto griego entre corchetes es introducido por el autor. [N.d.T.]

- Prop. I.21 Si sobre uno de los lados de un triángulo [τριγώνου ἐπὶ μιᾷ τῶν πλευρῶν], desde sus extremos, se construyen dos líneas rectas que se encuentren en el interior del triángulo, las líneas rectas construidas serán menores que los lados restantes del triángulo, pero comprenderán un ángulo mayor.

Otros ejemplos son las proposiciones I.41; I.48.

Algunas proposiciones utilizan numerales adecuados, en lugar del artículo con o sin ‘dado’:

- Prop. I.3 Dadas dos líneas rectas desiguales [δύο δοθεισῶν εὐθειῶν], quitar de la mayor una línea recta igual a la menor.
- Prop. I.4 Si dos triángulos [δύο τριγῶνα] tienen dos lados iguales a dos lados respectivamente, y tienen iguales los ángulos comprendidos por las líneas rectas iguales, tendrán también la base igual a la base, el triángulo será igual al triángulo, y los ángulos restantes serán iguales a los restantes ángulos respectivamente, a saber: los subtendidos por lados iguales.
- I.8 Si dos triángulos [δύο τριγῶνα] tienen los dos lados iguales a dos lados respectivamente, y tiene también la base igual a la base, ellos también tendrán iguales los ángulos que son contenidos por las líneas rectas iguales.
- I.15 Si dos líneas rectas [δύο εὐθεῖαι] cortan una a la otra, ellas hacen los ángulos del vértice iguales entre sí.

Otros ejemplos son las proposiciones I.22; I.24; I.25; I.26.

Algunas proposiciones directamente usan el nombre del tipo de ítems relevantes en el plural, junto con un artículo:

- Prop. I.5 En los triángulos isósceles [τῶν ἰσοσκελῶν τριγῶνων] los ángulos de la base son iguales entre sí, y si las líneas rectas iguales son prolongadas, los ángulos bajo la base serán iguales entre sí.
- Prop. I.30 Las líneas rectas [εὐθεῖαι] paralelas a una misma línea recta son también paralelas entre sí.
- Prop. I.33 Las líneas rectas [εὐθεῖαι] que unen líneas rectas iguales y paralelas sobre la misma parte [de ellas] son también ellas mismas iguales y paralelas.

Otros ejemplos son las proposiciones I.34; I.35; I.36; I.37; I.38; I.39; 40; I.47.

La Proposición 14 hace lo mismo con una parte de ella, aunque utilizando, en otra parte, el pronombre ‘τις’, que podría ser mejor traducido como ‘algún’:

- Prop. I.14 Si con alguna línea recta [τινὶ εὐθείᾳ], y en un punto de ella, dos líneas rectas [δύο εὐθεῖαι] que no están en el mismo lado (de ella) forman los ángulos adyacentes iguales a dos rectos, las dos líneas rectas estarán en línea recta entre sí.

Algunas proposiciones siguen los postulados I.1, I.3 y I.4, al utilizar ‘ $\pi\tilde{\alpha}\varsigma$ ’, que resultaría difícil no traducir como ‘todo’:

- Post. I.1 Postúlese el trazar una línea recta desde todo punto hasta cualquier punto [$\alpha\pi\omicron\ \pi\alpha\nu\tau\omicron\varsigma\ \sigma\eta\mu\epsilon\iota\omicron\upsilon\ \epsilon\pi\iota\ \pi\alpha\nu\ \sigma\eta\mu\epsilon\iota\omicron\nu$].
- Post. I.3 Y el describir un círculo con todo centro y distancia [$\pi\alpha\nu\tau\iota\ \kappa\epsilon\nu\tau\rho\omega\ \kappa\alpha\iota\ \delta\iota\alpha\sigma\tau\eta\mu\alpha\tau\iota$].
- Post. I.4 Y todos los ángulos rectos [$\pi\alpha\sigma\alpha\varsigma\ \tau\alpha\varsigma\ \omicron\rho\theta\alpha\varsigma\ \gamma\omega\nu\iota\alpha\varsigma$] son iguales entre sí.
- I.16 En todo triángulo [$\pi\alpha\nu\tau\omicron\varsigma\ \tau\rho\iota\gamma\acute{\omega}\nu\omicron\upsilon$], si se prolonga uno de sus lados, el ángulo externo es mayor que cada uno de los ángulos internos y opuestos.
- I.17 En todo triángulo [$\pi\alpha\nu\tau\omicron\varsigma\ \tau\rho\iota\gamma\acute{\omega}\nu\omicron\upsilon$] dos ángulos tomados juntos de cualquier manera son menores que dos ángulos rectos.
- I.18 En todo triángulo [$\pi\alpha\nu\tau\omicron\varsigma\ \tau\rho\iota\gamma\acute{\omega}\nu\omicron\upsilon$] el lado mayor subtiende al ángulo mayor.
- I.19 En todo triángulo [$\pi\alpha\nu\tau\omicron\varsigma\ \tau\rho\iota\gamma\acute{\omega}\nu\omicron\upsilon$] al ángulo mayor lo subtiende el lado mayor.
- I.20 En todo triángulo [$\pi\alpha\nu\tau\omicron\varsigma\ \tau\rho\iota\gamma\acute{\omega}\nu\omicron\upsilon$] dos lados tomados juntos de cualquier manera son mayores que el restante.

Otros ejemplos son las proposiciones I.18; I.19; I.20; I.32; I.43.

Finalmente, algunas otras proposiciones utilizan uno de los modos anteriores de exposición para parte de ellas, y otros para otras partes de ellas, tal como ocurre con la recién mencionada Proposición I.14:

- Prop. I.7 Dadas dos líneas rectas [$\delta\upsilon\omicron\ \tau\alpha\iota\varsigma\ \alpha\upsilon\tau\alpha\iota\varsigma\ \epsilon\upsilon\theta\epsilon\iota\alpha\iota\varsigma$] constuidas sobre una línea recta [$\epsilon\pi\iota\ \tau\eta\varsigma\ \alpha\upsilon\tau\eta\varsigma\ \epsilon\upsilon\theta\epsilon\iota\alpha\iota\varsigma$] (desde sus extremos) y que se encuentran en un punto, no es posible constuir sobre la misma línea recta (desde sus extremos), y por el mismo lado de ella, otras dos líneas rectas que se encuentren en otro punto y que sean iguales respectivamente a las dos anteriores, es decir, con los mismos extremos que las líneas rectas dadas.
- Prop. I.27 Si una línea recta [$\epsilon\upsilon\theta\epsilon\iota\acute{\alpha}$] al incidir sobre dos líneas rectas hace [$\delta\acute{\omicron}\ \epsilon\upsilon\theta\epsilon\iota\acute{\alpha}\varsigma$] los ángulos alternos iguales entre sí, las dos rectas serán paralelas entre sí.
- Prop. I.28 Si una línea recta [$\epsilon\upsilon\theta\epsilon\iota\acute{\alpha}$] al incidir sobre dos líneas rectas hace el ángulo externo igual al interno y opuesto del mismo lado, o los dos internos del mismo lado iguales a dos rectos, las líneas rectas [$\acute{\alpha}\iota\ \epsilon\upsilon\theta\epsilon\iota\acute{\alpha}\iota$] serán paralelas entre sí.

- Prop. I.29 (para una parte de) Una línea recta que cae sobre líneas rectas paralelas [ἡ εἰς τὰς παραλλήλους εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα] hace los ángulos alternos iguales entre sí, el ángulo externo igual al interno y opuesto, y los ángulos internos del mismo lado igual a dos ángulos rectos.

Algunos de estos usos son ciertamente establecidos por restricciones gramaticales. Sin embargo, creo que podrían haber sido uniformizados, si ello hubiese sido requerido. Ello sugiere que cualquier interpretación de la universalidad de las proposiciones de Euclides que esté justificada por algunos de estos usos, lo estaría arbitrariamente, puesto que se podría haber apelado a otros para contradecirla.

Por lo tanto, el único modo de desenmarañar esta cuestión es por medio de una reflexión general sobre la lógica de los argumentos de Euclides (si es que es posible identificar una). Identificar y reconstruir esta lógica es el objeto de una investigación en curso, que estoy llevando a cabo con el colega Alberto Naibo. Aquí solo deseo realizar algunas observaciones sobre el problema de la universalidad.

Mi punto de partida es el que ya he anticipado: deseo evitar toda apelación a cualquier tipo de totalidad fija de ítems geométricos, sean estos:

- Una totalidad de ítems independientes y existentes por sí mismos (presumiblemente ideales o abstractos), simplemente porque, aun si Euclides hubiese estado dispuesto a admitirla, no hubiese tenido manera (o hubiese fallado en proporcionar los medios) de discriminar globalmente entre ellos, o, al menos, de hacer claro lo que distingue a uno de ellos de los otros;
- Una totalidad de ítems contruidos, almacenados en algún lugar para su futuro uso o referencia, por razones similares a las anteriores, puesto que el único modo en que Euclides hubiese podido discriminar entre ellos hubiese sido apelando a un acto previo de construcción, planteado como la construcción de un ítem individual, distinto de cualesquiera otros ítems del mismo tipo, y sin ningún tipo de necesidad matemática, sino más bien perjudicando la universalidad de sus construcciones;
- Una totalidad de formas, que se distinguen entre sí por su tamaño y su ubicación en el espacio, puesto que cualquier distinción de esta clase hubiese requerido algún tipo de sistema de referencia en el espacio, que Euclides hubiese podido proporcionar no solo identificando ya un ítem en el espacio, sino también y en general solo localmente apelando meramente a una representación diagramática de este ítem, y haciendo trabajar sus condiciones locales de identidad.

La idea básica para evitar esto es entender a las construcciones de Euclides como regidas por algo así como reglas de introducción para ítems de tipos previamente identificados, cada uno de los cuales puede ser aplicado en todo momento que se requiera tener a disposición uno de estos ítems. Algunas de estas reglas son elementales y vienen con suposiciones liminales de la teoría. Otras son derivadas y se siguen de las elementales.

Utilizando letras romanas mayúsculas, A, B, C, \dots , para puntos, letras romanas minúsculas, a, b, c, \dots , para segmentos, y letras griegas minúsculas, $\alpha, \beta, \gamma, \dots$, para círculos, estas reglas pueden ser formuladas de un modo esquemático como sigue:

$$\text{P.1 } \frac{A \ B}{a} \ ; \ \text{P.2 } \frac{a}{b \ c} \ ; \ \text{P.3 } \frac{A \ B}{\alpha}$$

o mejor:

$$\text{P.1 } \frac{A \ B}{a_{[A,B]}} \ ; \ \text{P.2 } \frac{a}{[a]b \ [a]c} \ ; \ \text{P.3 } \frac{A \ B}{\alpha_{[A,B]}}$$

Algunas otras reglas elementales son implícitas. Entre ellas, las más importantes son las siguientes:

- Una regla requerida para comenzar cualquier construcción $\text{Com } \frac{}{a}$
- Una regla requerida para extraer puntos a partir de segmentos $\text{Ex } \frac{a}{[a]A \ B[a]}$
- Una regla (diagramática) requerida para obtener puntos a partir de intersecciones $\text{In } \frac{\mathcal{D}}{A[\mathcal{D}]}$

Las reglas derivadas son probadas resolviendo problemas. De acuerdo con la interpretación que sugiero, resolver un problema proporciona, en efecto, una suerte de meta-teorema, que establece que algunos objetos pueden ser construidos si otros son tales, concibiendo a una construcción como el resultado de las reglas de introducción.

El ejemplo más simple y obvio es la Proposición I.1. Tomemos a un triángulo como una configuración apropiada de tres segmentos, y a un triángulo equilátero, como una configuración de este tipo, que satisface las condiciones apropiadas. Supongamos también que las reglas de introducción vienen aparejadas con reglas secuenciales que permiten guardar registro de la introducción sucesiva de ítems, y combinarlas (funcionando, *mutatis mutandis*, como reglas de inferencia en una deducción), y además con reglas de identificación (que corresponden básicamente a definiciones) que permiten reconocer una cierta configuración, tal como un triángulo equilátero, en el resultado de una construcción (en virtud de una prueba apropiada). Luego, la solución de la Proposición I.1 muestra que un triángulo es construible (puede ser introducido) por la aplicación sucesiva de las reglas: Com; Ex; P.3 (dos veces); In; P.1 (dos veces), que arrojan la siguiente regla derivada:

$$\text{I.1 } \frac{a}{\langle a, b, c \rangle_{\mathbf{T}_{\text{eq}}}}$$

Ahora bien, ¿qué tiene todo esto que ver con la universalidad? Mucho, sugiero, puesto que nos proporciona suficientes herramientas conceptuales para delinear una noción de universalidad, que no depende de ninguna apelación a

una totalidad fija de ítems geométricos, y es perfectamente compatible con la práctica constructiva y demostrativa de Euclides.

Lo primero que debe observarse es que las reglas previas de introducción son esquemáticas. Pero no en el sentido de que las letras utilizadas para enunciarlas pueden referir a cualquier ítem del tipo apropiado; sino más bien en el sentido de que las letras usadas para enunciarlas pueden ser reemplazadas, en ellas, por cualquier otra letra del mismo tipo, y en el sentido de que cualquier letra del tipo apropiado puede ser usada para referir a los ítems relevantes, dentro de cualquier argumento, con la única restricción de que la referencia debe ser mantenida fija a lo largo de todo el argumento. Sí, ¿pero cuáles son los ítems relevantes?

Consideremos un ejemplo para comprender mejor el punto que quiero establecer. El más simple es, de nuevo, la proposición I.1. Esta requiere construir un triángulo equilátero con un segmento dado. ¿Qué segmento? Ciertamente no cualquiera, elegido dentro de la totalidad de segmentos. Ciertamente no uno particular, elegido dentro de esta totalidad. Ciertamente no uno genérico que representa cualquier segmento de esta totalidad. Pero, mucho más simple, un segmento que de ningún modo es particular, puesto que no tiene ni una posición particular en el espacio, ni una longitud particular. Y ello, meramente, porque no hay otro ítem en el espacio de la proposición, con respecto al cual su posición pueda ser determinada, mejor, no hay espacio en el cual está inmerso, sino que más bien él mismo proporciona una referencia con respecto a la cual la posición de otros ítems puede ser luego determinada. Y porque no hay ningún otro segmento que tenga una longitud cualquiera con respecto a la cual su propia longitud pueda ser determinada.

Si uno quiere decirlo de la siguiente manera: este es un segmento genérico, pero no porque representa o está en lugar de cualquier otro, sino porque no es de modo alguno particular, no tiene ninguna propiedad específica que lo distinga de los otros. Es con este segmento que la construcción comienza.

Por lo tanto, la Proposición I.1 es universal, puesto que trata del único caso que podía ser considerado: el caso de un solo segmento que es simplemente genérico por no ser particular en modo alguno.

Si ello resulta así, ¿que tipo de resultado universal establece la resolución de este problema? Simplemente, como dije antes, que una nueva regla derivada de introducción puede ser añadida a las elementales: una que autoriza la introducción de triángulos equiláteros. Ello también puede ser dicho de la siguiente manera: los triángulos equiláteros son construibles con los medios de construcción admitidos.

Dos objeciones parecerían aquí obvias. Sin embargo, sostengo que cada una de ellas es defectuosa.

La primera es que ahora estoy utilizando un plural para expresar universalidad: digo que los triángulos equiláteros son construibles. En consecuencia, refiero implícitamente a una totalidad. Aquí está mi respuesta: por supuesto, utilizo el plural, e incluso para mí ello resulta esencial, puesto que sin utilizar el plural no sería capaz de expresar universalidad. Y por supuesto, también, al hacerlo refiero implícitamente a una totalidad. Pero esta no es una totalidad de

ítems geométricos. No estoy hablando de todos los triángulos equiláteros. Estoy hablando de una totalidad abierta de actos de construcción admitidos dentro de una teoría. Estoy diciendo que la teoría permite introducir (construir) un triángulo equilátero, cada vez que un segmento ha sido introducido (construido o dado).

Ello debería volver manifiesta a la segunda objeción. Se trata de una objeción clásica, pero que no por ello no está fuera de lugar: ¿Cómo podemos estar seguros que una construcción realizada una vez puede ser repetida? Digamos que esta construcción comienza con un segmento que es genérico por no ser particular en modo alguno, por no tener ninguna propiedad específica. Pero ello no es lo que ocurre cuando la construcción puede ser repetida en la solución o prueba de cualquier otra proposición. Por ejemplo, ¿no resulta así, ya en la Proposición I.2, donde un triángulo equilátero es construido sobre un segmento que une los extremos de dos segmentos dados, y entonces es particular tanto por su posición como por su longitud? Por supuesto, ello es así. Pero, ni en la proposición I.2, ni en ninguna otra proposición en la que la Proposición I.1 es o puede ser aplicada, los otros ítems que hacen específico al ítem relevante son relevantes para que la construcción del triángulo equilátero resulte exitosa. Ella simplemente tiene lugar aisladamente de estos otros ítems: ella meramente considera al segmento singular sobre el que se construye un triángulo equilátero, que, como tal, aisladamente, es todavía genérico por no ser particular en modo alguno, por no tener ninguna propiedad específica.

Ahora que la Proposición I.1 ha sido probada, sabemos que un triángulo equilátero puede ser construido cada vez que se lo requiera. Esto es lo que una solución de un problema prueba, y es una afirmación universal. Más aún, en el caso de que la solución sea correcta, la afirmación está correctamente probada por ella, sin ningún salto de lo particular a lo general, sin ninguna suposición de uniformidad, sin ninguna apelación a una cuantificación universal sobre cualquier totalidad de ítems geométricos.

Mutatis mutandis, lo mismo ocurre con cualquier otro problema geométrico de la geometría de Euclides.

Lo que debe ser modificado depende de una simple observación: en la mayoría de los otros problemas, lo que es dado no es un ítem singular, que puede ser tomado como genérico por no ser particular en sentido alguno, sino más bien múltiples ítems que permiten la comparación entre sus respectivos tamaños, y admiten diferentes posiciones relativas; a menudo, lo que es dado es incluso una configuración de ítems, que es particular debido a su estructura interna.

Sin embargo, lo que puede ser diferente en un sentido relevante de un caso posible a otro son, por así decirlo, las características topológicas, que pueden variar en un número finito, usualmente pequeño, de maneras. Por lo tanto, la generalidad solo depende de consideraciones de un número finito de casos. Ciertamente, Euclides generalmente no distingue casos. Pero ello puede ser realizado y, como observó repetidamente Proclo, debe ser realizado para dar una solución a la requerida universalidad. Si Euclides no lo hace, supongo, es meramente porque el caso considerado proporciona suficientes instrucciones para tratar con todos los otros, de modo de obtener el mismo resultado.

Es importante aclarar un punto aquí. Afirmo que lo que puede ser diferente en un sentido relevante de un caso posible a otro, en lo que un problema toma como dado, son las propiedades topológicas. Ello podría ser desafiado. Uno podría observar, por ejemplo, que cuando dos segmentos son dados, su razón puede ser diferente, de un caso a otro caso. Podemos imaginar que nos fueron dados segmentos, uno de los cuales es el doble del otro, o el triple, o inconmensurable con aquel, de acuerdo con cierta secuencia *antiperisis*, o simplemente más que el doble, el triple, etc. Esto es cierto, pero la corrección de la solución depende justamente de su independencia respecto de estas diferencias, que por cierto son muy a menudo identificables solo en relación a parámetros aritméticos externos. Ello hace que estas diferencias simplemente no sean relevantes.

La solución a cualquier problema en la geometría de Euclides proporciona, de acuerdo con mi interpretación, la prueba de una regla derivada de introducción. Y, al hacerlo, autoriza una extensión de la ontología de esta teoría. Pero no lo hace probando que los nuevos ítems existen; y, menos incluso, añadiendo nuevos ítems a la totalidad de aquellos que ya existen. Y tampoco añadiendo nuevos ítems a la totalidad de aquellos ya construidos. Por el contrario, esta extensión es lograda proporcionando nuevas reglas de introducción, a las que se debe apelar, para construir los ítems relevantes en cualquier caso que esto sea requerido.

¿Pero qué ocurre con la universalidad de los teoremas? ¿Qué prueba el teorema I.5, por ejemplo, si no es acaso que en todos los triángulos isósceles, o en cualquiera de ellos, los ángulos de la base son iguales entre sí? Si no hubiese otra alternativa más que leer estos teoremas de este modo, no podríamos evitar admitir que, a pesar de la dificultad de proporcionar condiciones de identidad globales, Euclides aceptó totalidades fijas de ítems y modos de tratar con ellas. Sin embargo, existe una alternativa, y la comprensión de los problemas que he recién presentado es una indicación de la misma.

En la geometría de Euclides, las pruebas de un teorema comienza con la suposición de que los ítems relevantes, aquellos acerca de los cuales el teorema afirma que cumplen una cierta condición, son dados. Pero su ser dados no es arbitrario. Ello está sujeto a la posibilidad de introducir (construir) estos ítems a través de las cláusulas de introducción aceptadas. No hay prueba alguna, en los *Elementos*, acerca de un cuadrado igual a un círculo dado, o acerca de la tercera parte de un ángulo.

Esto sugiere que lo que una prueba de un teorema geométrico demuestra es algo acerca del resultado de una construcción. Es decir, que la construcción de cierto ítem se corresponde, o no puede sino corresponderse, con hacer que este ítem satisfaga algunas condiciones, o con la construcción de ítems relacionados que satisfacen ciertas condiciones.

Por ejemplo, lo que la prueba de la Proposición I.5 demuestra es que la construcción de un triángulo isósceles se corresponde con la construcción de dos ángulos iguales. Esto es esencialmente diferente a probar que todos los triángulos isósceles tienen los ángulos de la base iguales entre sí. Simplemente porque en el marco de la geometría de Euclides no hay algo así como todos los triángulos isósceles. Lo que hay son reglas de introducción que, cuando

son combinadas entre sí, introducen un triángulo isósceles, que, además de sus propiedades irrelevantes, es genérico, por no ser particular en modo alguno, por no tener ninguna propiedad específica, más allá de ser triangular e isósceles, y, entonces, de tener dos de sus lados iguales.

En un sentido esto es universal, puesto que cada vez que un triángulo isósceles es construido, dos ángulos iguales son así. Pero en otro sentido también es particular, puesto que trata del resultado de una construcción singular, o, posiblemente, de una clase de equivalencia de construcciones, o incluso, para decirlo mejor, solo trata de un número finito de reglas particulares de introducción, y de un modo particular de combinarlas.

Una última observación, para responder preventivamente a una nueva posible objeción.

Uno podría decir que lo que hace que los triángulos isósceles tengan los ángulos de la base iguales no es el modo modo en que están construidos, sino el hecho independiente de que tienen dos lados iguales entre sí.

Sin embargo, esto está simplemente errado. Puesto que, en la geometría de Euclides, lo que decide que dos segmentos sean iguales es que están construidos como los radios de un mismo círculo, o como los radios de círculos cuyos radios son iguales, dado que están construidos para ser así, debido al modo en que la regla P.3 es aplicada. Y, *mutatis mutandis*, esto es también así para los ángulos, a pesar de que la cuestión aquí es un poco más compleja, en virtud del papel de la proposición I.4

Si estoy acertado, no sólo la generalidad de la geometría de Euclides trata de sus ítems sin ocuparse de cualquier totalidad de ellos, sino también sus reglas de introducción, y meramente dependiendo de sus condiciones locales de identidad, que corresponden a las condiciones de identidad de los diagramas trazados sobre un sustento limitado, o imaginadas para ser trazada sobre tal tipo de sustento. Pero con ello no viene aparejado nada misterioso, puesto que esto no depende de ninguna generalización, o esquema, sino solo del modo en que funcionan las reglas de introducción relevantes.