À propos du calcul aérien : Abū Bakr al-Karaǧī, Kamāl al-Dīn al-Fārisī et quelques autres

Pascal Crozet

▶ **To cite this version:**

Pascal Crozet. À propos du calcul aérien : Abū Bakr al-Karaǧī, Kamāl al-Dīn al-Fārisī et quelques autres. 2019. halshs-04250431

HAL Id: halshs-04250431
https://shs.hal.science/halshs-04250431

Preprint submitted on 19 Oct 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

A PROPOS DU CALCUL *AERIEN* : ABŪ BAKR AL-KARAĞĪ, KAMĀL AL-DĪN AL-FĀRĪSĪ ET QUELQUES AUTRES

PASCAL CROZET

(CNRS – UNIVERSITE DE PARIS)

Résumé

Depuis le x^e^ siècle jusqu'au xv^e^ siècle au moins, s'est développée une tradition de composition en arabe de traités de calcul, le calcul aérien*, qui s'est résolument tenue à l'écart d'une exploitation de la numération décimale de position introduite avec les chiffres indiens. Cet article voudrait à la fois préciser historiquement l'existence de cette tradition, en analyser les contours, et élucider les raisons de tels développements. Il défend en particulier la thèse que c'est dans cette tradition qu'a pu émerger une véritable science du calcul (*ḥisāb*), attachée à donner des définitions et à poser des exigences démonstratives. Des exemples seront pris en ce sens chez al-Karağī au x^e^ siècle, et surtout chez al-Fārisī au début du xiv^e^, auteur d'un commentaire entendant précisément doter toutes les règles arithmétiques de démonstrations.*

I. INTRODUCTION

Il est d'usage de distinguer deux grandes traditions d'écriture de traités d'arithmétique en arabe : le calcul indien, qui rassemble les procédures pratiques fondées sur la numération décimale de position ; et un calcul non indien, où les nombres sont écrits en toutes lettres sans le secours de chiffres ni description d'un dispositif qui en exploiterait le principe.

La présence de cette seconde tradition a très tôt retenu l'attention des historiens, dans la mesure où deux mathématiciens majeurs de la fin du x^e^ siècle et du début du xi^e^ siècle,

à savoir Abū al-Wafā' al-Būzğānī et Abū Bakr al-Karağī, avaient composé dans ce genre des ouvrages repérés dès le XIX^e^ siècle[1]. Un certain nombre d'interrogations avaient été soulevées, mais sans que ne s'impose une réponse définitive : pourquoi en effet une deuxième tradition, puisque le calcul indien était alors diffusé depuis un certain temps déjà et qu'aussi bien Abū al-Wafā' qu'al-Karağī ne pouvaient en ignorer les ressorts ? De surcroît, le second lui avait consacré un ouvrage aujourd'hui perdu.

Franz Woepcke voyait ainsi dans l'absence de calcul indien chez Abū al-Wafā' un fait « important pour la détermination de l'époque à laquelle les chiffres ont été introduits chez les Arabes », et pointait une méthode présentant « une différence notable d'avec celle des traités d'arithmétique arabe dans lesquels il est fait usage des chiffres »[2]. Pour Moritz Cantor, suivi par Florian Cajori, il s'agissait de deux écoles concurrentes, l'une suivant un modèle indien, l'autre un modèle grec[3]. On s'est ensuite appuyé sur le témoignage d'al-Uqlīdisī[4], rapportant au x^e^ siècle une certaine réticence à utiliser la tablette et la poussière (ou le sable), pour expliquer les difficultés de diffusion du calcul indien et, partant, la persistance d'autres traditions arithmétiques[5]. Pour Adel Anbouba et d'autres après lui, soucieux de ne pas insister trop sur cette persistance, il s'agissait plus simplement d'une « catégorie de calcul non indien, où les opérations sur les nombres pas trop grands peuvent s'effectuer mentalement, ou au besoin en utilisant les doigts comme mémoire, mais sans le secours d'un instrument »[6].

Bien que ni Abū al-Wafā' ni al-Karağī n'aient qualifié le genre dans lequel ils avaient inscrit leurs traités, on a parfois rangé ceux-ci, non sans quelques raisons sur lesquelles nous reviendrons, dans la catégorie de calcul *hawā'ī* (*aérien*). Mais doter une tradition d'un nom ne suffit pas à la définir, d'autant que le qualificatif *aérien* n'est que faiblement évocateur. Comment dès lors apprécier plus précisément la place dans l'histoire de la tradition qu'un tel terme désigne ? Peut-on se contenter de la renvoyer simplement, comme on le fait encore souvent aujourd'hui, tantôt au calcul digital, tantôt au calcul mental[7] ? Et surtout, quel sens

---

[1] On pourra se référer aux éditions suivantes de ces deux traités : al-Būzğānī ([1971]) et al-Karağī ([1986]).

[2] Woepcke (1855: 250-251).

[3] Cantor (1880: 655-656) ; Cajori (1894: 112).

[4] Al-Uqlidīsī ([1984]: 386).

[5] Rappelons que la tablette enduite de poussière, sur laquelle on peut tracer des chiffres, constitue le dispositif sur lequel s'appuie le calcul indien dans les premiers temps de son développement.

[6] Anbouba (1964: 27).

[7] Voir par exemple Saidan (1997) ou plus récemment Oaks (2019: 108).

attribuer à des tels développements, dont on peut remarquer qu'ils sont concommitants à celui de l'algèbre ? Ce sont ces questions que nous voudrions poser à nouveau ici, en reprenant une réflexion que nous avons amorcée ailleurs[8].

Nous nous appuierons ici essentiellement sur l'œuvre d'al-Karağī qui, outre ses ouvrages de calcul indien et non indien, est l'auteur d'une contribution majeure à l'algèbre, et surtout sur celle de Kamāl al-Dīn al-Fārisī (~1267-1319), l'un des premiers, à notre connaissance, à avoir utilisé le terme *aérien*, et de surcroît à s'en être expliqué.

II. CALCUL AERIEN, CALCUL INDIEN ET SCIENCE DU CALCUL (*ḥISAB*)

Mais avant d'interroger directement ces textes, il nous faut au préalable justifier et préciser l'usage de la catégorie de *calcul aérien* à laquelle nous les assignons, ne serait-ce que pour autoriser la mise en correspondance des textes d'al-Karağī et d'al-Fārisī, que deux siècles séparent. En effet, cette catégorie est encore mal établie dans l'historiographie d'aujourd'hui, et il est essentiel non seulement d'en montrer la permanence sur une longue période, mais encore d'en pointer d'emblée certains traits. L'enjeu est d'importance puisque, comme nous allons tenter de le montrer, c'est dans le cadre du calcul aérien, plus que dans tout autre, que va prendre forme une sorte d'arithmétique abstraite et générale, indépendante de toute forme de numération autre que linguistique, et où pourra s'amorcer une réflexion sur la nature des opérations. Nous pourrons alors également préciser comment se distinguent calcul aérien et calcul indien au sein d'une science du calcul (*ḥisāb*) dont il sera particulièrement utile d'esquisser d'ores et déjà les contours.

L'utilisation du mot *aérien* (*hawā'ī*) pour désigner une discipline arithmétique n'a pas une origine bien établie. Les bibliographes Tāš Kubrī Zādeh (1495-1561) et Ḥāğğī Ḫalīfa (1609-1657) désignent de cette façon une science constituant selon eux l'une des branches de la science du calcul (*'ilm al-ḥisāb*)[9]. Ils signalent tous deux que le mathématicien andalou Abū al-Qāsim ibn al-Samḥ, peu ou prou contemporain d'al-Karağī, aurait écrit dans ce genre un ouvrage dénommé *al-Kāmil* (*al-Kāmil fī al-ḥisāb al-hawā'ī* chez Ḥāğğī Ḫalīfa). On a pris appui sur ces écrits pour en conclure qu'Ibn al-Samḥ lui-même utilisait le terme *aérien*[10]. Cependant, ce livre d'Ibn al-Samḥ est aujourd'hui perdu, de sorte que l'affirmation ne repose que sur un témoignage tardif (celui de Ḥāğğī Ḫalīfa) et sans doute de seconde main. On attribue certes

[8] Crozet (2002).

[9] Ṭāš Kubrī Zādeh ([1968]: I-394) ; Ḥāğğī Ḫalīfa ([1982]: col. 1381).

[10] Par exemple Adel Anbouba, dans une note (néanmoins très éclairante par ailleurs) consacrée au *al-Kāfī* d'al-Karağī et plus généralement au calcul aérien (Anbouba 1964: 26-30).

régulièrement à Ibn al-Samḥ un traité anonyme de ce genre dont subsistent quelques copies manuscrites ; mais outre que l'attribution reste très incertaine, et quoique ce texte soit référencé comme relevant du *calcul aérien*, il faut bien noter que le terme *aérien* lui-même en est absent[11].

Quelques décennies après al-Karaǧī, dans un traité composite où il expose également les règles du calcul indien, Ibn Ṭāhir al-Baġdādī (mort en 1037) consacre sa quatrième partie au calcul non indien, annoncé comme se faisant « sans tablette ». Il dénomme ce calcul *ḥisāb al-yadd*, littéralement *calcul de la main*, ce qui, autrement dit, renvoie au calcul digital[12]. Al-Baġdādī se situe ici dans la continuité des livres d'Abū al-Wafā' et d'al-Karaǧī quant à l'organisation générale de l'exposé, dans une filiation soulignée par l'éditeur de l'ouvrage. La dénomination de *calcul digital* trouve donc ici une réelle justification historique. Pourtant, on ne trouve chez al-Baġdādī aucune explication sur les positions de la main qui permettraient de représenter les nombres, ni sur les moyens d'en tirer parti, ni même la moindre mention sur l'utilité des doigts. Il nous semble donc qu'une telle dénomination soit suscitée davantage par les origines – vraisemblables – de ce genre de calcul, que par les ressorts de l'exposé lui-même. Nous ne voulons pas dire, bien sûr, qu'il n'y ait pas là quelque rapport avec l'usage des doigts – ou avec celui de la mémoire ; simplement, il nous semble important de pointer le décalage entre l'exposé et sa qualification, ce qui pourrait avoir suscité l'utilisation d'autres termes pour désigner la discipline.

Dans son volumineux *Asās al-qawā'id fī uṣūl al-fawā'id*, large commentaire d'un traité de son maître ʿAbdallah ibn Muḥammad ibn al-Ḫawwām (1245-1325), Kamāl al-Dīn al-Fārisī s'explique de façon plus détaillée que ses prédécesseurs sur ce qu'il entend par une telle discipline, qu'il dénomme pour sa part *calcul aérien* (*hawā'ī*). Après avoir relevé que la science du calcul dont il est question (*ḥisāb*) se distingue de la « science du nombre » – qui fait, selon lui, partie des sciences théorétiques – il écrit en effet :

[11] Voir le manuscrit anonyme Escorial Ar. 973.

[12] Al-Baġdādī ([1985]: 165-197).

> S'il est permis de donner le nom de pratique à cette partie (à savoir le *ḥisāb*), il reste que l'usage n'y est pas l'usage des membres du corps et des instruments pour obtenir en acte ce qui est demandé. De la même façon, on ne dit pas de la logique qu'elle est pratique pour cette notion elle-même, si ce n'est qu'elle est semblable aux disciplines pratiques ; car de même que les disciplines pratiques recherchent des procédés dans certains matériaux selon des manières particulières conduisant à un but, de même en est-il de ces problèmes, si ce n'est que ces matériaux-là sont extérieurs et que <les matériaux des problèmes logiques> sont mentaux. C'est ce dont traite le calcul *aérien* que renferme le livre. Mais il y a dans le *ḥisāb* des méthodes véritablement pratiques, et cela comme le calcul à l'aide de la tablette et de la poussière[13].

Se trouve ainsi soulignée, pour le calcul *aérien*, une dimension théorique que ne semblent posséder en tant que tels ni le calcul indien ni le calcul digital, en ce sens qu'on n'y a recours ni aux doigts (« les membres du corps »), ni aux instruments comme la tablette et la poussière. Comme nous le verrons bientôt, il s'agit là non seulement de fournir des techniques de résolution, mais surtout, ce qui est fondamental, de s'intéresser à la nature des opérations en en proposant des définitions et en en explicitant le détail avec plusieurs exemples, de façon à les rendre intelligibles et donc exploitables par un lecteur qui, au besoin, pourra toujours recourir à d'autres procédures ; « si tu connais le concept (*maʿnā*) de la multiplication et sa définition (*ḥadd*), tu connais son calcul », avait écrit de façon éloquente al-Karaǧī[14]. Mais avant de développer ce point, poursuivons notre enquête sur la dénomination de la discipline, en relevant au passage, et c'est important, que l'utilisation de la locution *calcul digital* se trouve en creux invalidée par la citation que nous venons de donner.

Un contemporain plus jeune d'al-Fārisī, le médecin et encyclopédiste Ibn al-Akfānī (mort en 1348), consacre dans sa classification des sciences un article à cette même discipline, qu'il nomme alors *ḥisāb maftūḥ* (littéralement *calcul ouvert*)[15]. Sont là cités un certain nombre d'ouvrages, parmi lesquels *al-Kāfī* d'al-Karaǧī, *al-Kāmil* d'Ibn al-Samḥ et, soulignons-le également, deux ouvrages d'al-Samaw'al. En revanche, al-Akfānī ne cite pas l'œuvre d'al-Fārisī, qu'il semble ne pas connaître, pas plus qu'il n'utilise le terme *aérien*. S'inspirant d'une manière générale de l'œuvre de son prédécesseur, Tāš Kubrī Zādeh reprendra deux siècles plus tard, et dans le même ordre, la même liste d'ouvrages, en ajoutant le traité d'al-Fārisī et en changeant

[13] Al-Fārisī ([1994]: 69) ; le passage qui précède cette citation, et qui traite de la distinction entre calcul et science du nombre, est traduit et commenté par Jeffrey Oaks (Oaks, 2019: 109).

[14] Al-Karaǧī ([1986]: 37).

[15] Ibn al-Akfānī ([1989]: 60).

le titre général en *calcul aérien*[16], soulignant ainsi l'identité des deux dénominations. Le témoignage d'Ibn al-Akfānī est ici intéressant à plus d'un titre : en premier lieu parce qu'il semble indiquer que l'usage du terme *aérien* n'est pas encore fixé au moment où il rédige sa notice ; et aussi parce que le terme *maftūḥ*, qu'il utilise pour nommer la discipline, est utilisé par ailleurs par al-Fārisī dans un sens assez précis renvoyant au bout du compte à ce qui est prononçable dans la langue. Le calcul *aérien* tirerait alors certaines de ses caractéristiques d'exigences propres à la langue arabe. Nous y reviendrons.

Peu de temps plus tard, Yaḥyā ibn Aḥmad al-Kāšī[17], un auteur appartenant aux mêmes cercles qu'al-Fārisī – il a lui aussi commenté le traité de calcul d'Ibn al-Ḫawwām – entérine l'usage du terme *aérien*. Dans un traité rédigé vers 1350, *al-Lubāb fī al-ḥisāb*, il revient ainsi sur la science du calcul (*ʿilm al-ḥisāb*) et sur ses divisions[18]. Cette science, explique-t-il comme d'autres avant lui, est celle qui s'intéresse aux « règles par lesquelles on détermine les inconnues numériques à partir des connues ». En sont donc exclues, poursuit-il, « toutes les sciences qui ne traitent pas du nombre », mais aussi celles « qui traitent du nombre en ne s'attachant pas à la détermination des inconnues, comme *al-aritmāṭīqī* », à savoir la théorie des nombres s'inscrivant dans la tradition de Nicomaque de Gérase.

Une première division de cette science apparaît alors, qui distingue le calcul *aérien* (*hawāʾī*) de celui qui opère à l'aide de la « tablette et de la poussière », le premier étant simplement défini comme « ne s'appuyant pas sur des chiffres placés sur une surface sensible ». La singularité du traité d'al-Kāšī réside dans le fait que l'auteur organise par la suite son exposé en détaillant pour chaque opération, pour les entiers puis pour les fractions, le *modus operandi* du calcul *aérien*, puis celui du calcul « par tablette et poussière ». Quoique les deux calculs soient encore séparés, le texte témoigne en réalité, par la juxtaposition des procédures, d'une unité de la discipline plus profonde qu'il n'y paraît, et qui sera réalisée dans les faits avec des ouvrages comme le *Miftāḥ al-ḥisāb* de Ġiyāt al-Dīn al-Kāšī ; nous y reviendrons.

Les autres divisions exposées dans *al-Lubāb fī al-ḥisāb* n'en sont pas moins intéressantes, dans la mesure où elles viennent préciser de manière raisonnée le contenu de la science du calcul (*ḥisāb*), d'une façon qui n'est souvent pas aussi explicite chez ses

---

[16] Ṭāš Kubrī Zādeh ([1968]: I-394). Notons que Tāš Kubrī Zādeh mentionne bien *al-Kāfī*, mais en omettant de signaler qu'il s'agit d'un ouvrage d'al-Karaǧī ; il nous semble que c'est cette omission qui a conduit Ḥaǧǧi Ḫalīfa à attribuer *al-Kāfī* à l'auteur suivant de la liste, à savoir Ibn al-Samḥ, lequel, d'après lui, serait donc l'auteur de deux livres de calcul *aérien* (Ḥāǧǧī Ḫalīfa [1982]: col. 1377 et 1381).

[17] A ne pas confondre avec le célèbre Ġiyāṯ al-Dīn al-Kāšī (*c*.1380-1429), auteur du *Miftāḥ al-ḥisāb*.

[18] Al-Kāšī (MS Ayasofya 2757: 5^{r}).

prédécesseurs et ses successeurs. La division exposée immédiatement après celle qui sépare calcul *aérien* et calcul indien – et qui est en réalité plus fondamentale – s'intéresse ainsi à la méthode mise en œuvre et à la façon d'envisager ce qui est recherché. Deux grandes méthodes se distinguent alors, qui vont partager l'ouvrage en deux livres. Soit, explique al-Kāšī, on ne suppose rien au préalable sur ce que l'on cherche, et l'on procède en suivant les principes jusqu'à ce qu'on en vienne à connaître ce que l'on cherche : c'est la méthode des *ouverts* (*maftūḥāt*)[19], objet du premier livre. Soit on suppose, comme dans le second livre, que ce que l'on cherche (l'inconnue) est une *chose*, et l'on procède alors en s'appuyant sur ses propriétés : ce sera la méthode de l'algèbre et d'*al-muqābala* si la chose est supposée de manière indéterminée, ou bien la « méthode des deux erreurs » (autrement dit la méthode de double fausse position) si elle l'est de manière déterminée. Enfin, al-Kāšī partage son premier livre en deux parties, définies en fonction du traitement de la quantité continue, soit parce que celle-ci en est écartée (cas des entiers et des fractions), soit parce qu'au contraire elle constitue l'objet du calcul (cas d'*al-misāḥa*, à savoir le calcul nécessaire à la mesure des aires et des volumes)[20].

À quelques variantes près, ces contenus – à savoir calcul sur les entiers, calcul sur les fractions, mesure des aires et des volumes, algèbre, méthode de double fausse position – sont bien ceux que l'on retrouve dans la plupart des ouvrages relevant de la science du calcul (*ʿilm al-ḥisāb*), et notamment dans ceux d'al-Karaǧī et d'al-Fārisī, qui vont nous intéresser plus particulièrement ici. À l'arithmétique « pratique » au sens où nous l'entendons aujourd'hui, s'ajoute donc l'algèbre ou la science du mesurage pour former ainsi un ensemble plus vaste, la science du calcul (*ḥisāb*).

Pour compléter notre panorama, et simplement parce que ses traités ont été beaucoup diffusés jusqu'au XIX^e^ siècle, signalons encore un auteur un peu postérieur, Ibn al-Ha'im (1352-1412). Celui-ci a notamment composé *al-Maʿūna*, un volumineux traité relevant du même genre, qu'il qualifie lui même d'*aérien*, sinon dans le texte lui-même, du moins dans le résumé intitulé *al-Wasīla* qu'il en donne plus tard[21].

Les quelques jalons que nous venons de donner ne sauraient bien sûr épuiser la description des très nombreux traités de *ḥisāb* composés pendant cette période. Ils nous autorisent néanmoins à poser quelques conclusions. En premier lieu, il y a bien, jusqu'à l'orée

---

[19] *Ouverts* dans le sens d'*accessibles*, de *prononçables* ; voir plus loin l'utilisation par al-Fārisī de ce mot.

[20] Al-Kāšī (MS Ayasofya 2757: 7^r^).

[21] Ibn al-Hā'im ([1989]) ; Ibn al-Hā'im (MS Landberg 599: 1^v^).

du XV^{e} siècle au moins, un genre d'écriture de traités de *ḥisāb* où l'exposé ne repose pas sur la numération décimale de position, mais sur l'écriture des nombres en toutes lettres.

Ceci ne veut aucunement dire – et c'est fondamental – que la présence ou non de chiffres dans les ouvrages soient un critère discriminant. Ainsi, dans le traité d'al-Fārisī – qui est ainsi un traité de calcul *aérien* – il y a beaucoup d'occurrences dans lesquelles l'auteur donne des exemples où les nombres sont écrits à l'aide de chiffres[22] ; simplement, il n'exploite pas les procédures pratiques que lui permettraient cette écriture, lesquelles ne relèvent pas de son propos. Et à l'inverse, on ne trouvera aucun chiffre dans le célèbre traité *Talkhīṣ aʿmal al-ḥisāb* d'Ibn al-Bannā' (1256-1321), dont le projet est au contraire de présenter ces procédures[23]. En second lieu, la permanence de ce genre, dont nous allons bientôt décrire plus précisément les principaux traits, s'oppose aux difficultés rencontrées pour le nommer. Partant de l'absence de qualification chez Abū al-Wafā', chez al-Karağī, ou encore chez l'anonyme attribué à Ibn al-Samḥ, on aboutit plusieurs siècles plus tard à la dénomination de *calcul aérien*, qui finit par s'imposer. Qualifier le genre de calcul digital ou de calcul mental n'est sans doute pas totalement déplacé si l'on considère que les calculs intermédiaires qui doivent être consignés peuvent l'être de différentes manières, en utilisant par exemple la mémoire ou les doigts (mais on pourrait imaginer d'autres façons). Cependant, une telle qualification ne serait pas seulement réductrice : elle conduirait à manquer une caractéristique tout à fait essentielle de ce qu'elle prétendrait désigner, à savoir la dimension théorique signalée par al-Fārisī et suggérée avant lui par al-Karağī, tout autant que le souci de rationalisation de la pratique du calcul qui se manifeste beaucoup plus spécifiquement dans ce cadre que dans celui du calcul indien. Aussi garderons-nous ce terme d'*aérien* pour désigner d'une manière générale le genre de calcul qui nous occupe, et même si, en l'appliquant à des ouvrages comme *al-Kāfī* d'al-Karağī, nous faisons preuve d'une légère forme d'anachronisme, toute relative du reste si l'on considère la permanence du genre.

III. L'EXPOSE DU CALCUL *AERIEN*

Nous pouvons maintenant nous engager dans une description plus précise de l'exposé du calcul *aérien*. La tâche est d'autant plus nécessaire que, pour l'évoquer, nous n'avons presque eu recours jusqu'à présent qu'à des caractères négatifs : calcul non indien, absence de chiffres, non utilisation de la tablette, etc.

---

[22] Nous en verrons un exemple plus loin. On peut noter aussi l'usage que fait al-Fārisī des chiffres indiens pour illustrer à l'aide d'un tableau l'opération de multiplication des entiers décrite avant lui et dans des termes voisins par al-Karağī (Al-Fārisī [1994]: 99).

[23] Ibn al-Bannā' ([1969]).

Les fondements sur lesquels s'appuie cet exposé, chez al-Karağī comme chez al-Fārisī, sont essentiellement une conception du nombre entier défini comme chez Euclide comme une pluralité d'unités, l'addition et la soustraction de ces entiers, et le concept de rapport pour définir les fractions. Al-Fārisī justifie la présence de l'addition et de la soustraction parmi les principes premiers de la discipline – et donc leur absence de traitement dans le calcul *aérien* – en remarquant que leur conception (*taṣawwur*) en est complète, et que c'est la raison pour laquelle Euclide ne les a pas clarifiées alors qu'il utilise pourtant la soustraction dans la première proposition du livre des *Éléments* consacré aux nombres[24]. En retour, c'est pour obéir à cette même exigence d'une composition théorique rigoureuse que les irrationnelles trouvent à l'intérieur de la discipline une place moins affirmée qu'ailleurs, puisqu'ils ne peuvent bénéficier à l'époque d'une construction proprement arithmétique : al-Fārisī explique ainsi, en introduction à son ouvrage, que si un nombre qui n'est pas un carré parfait possède bien une racine que l'on peut même borner (ainsi a-t-on $2 < \sqrt{5} < 3$, explique-t-il en substance), la détermination de celle-ci n'est possible que par le biais de droites et l'utilisation des propositions euclidiennes, sa « valeur numérique » (*'adadiyya*) restant inconnue aux hommes[25] ; et, ajoute-t-il plus loin, ce qui n'a pas de « valeur numérique » relève de la géométrie et non des « ouverts » (ou « accessibles ») (*maftūḥāt*) du *hisāb*[26]. Cela n'empêche pas que l'on puisse trouver, dans ces mêmes ouvrages, le thème des racines carrées des nombres et de l'approximation de celles-ci, comme chez al-Karağī ou al-Fārisī lui-même. Mais outre que cette mention n'est pas systématique (ainsi, Abū al-Wafā' n'aborde pas le sujet), le traitement de l'approximation des racines irrationnelles y semble exposé presque inopinément, d'une façon souvent beaucoup moins approfondie que dans les ouvrages de calcul indien, où il constitue un sujet en soi. Dans leurs ouvrages de calcul *aérien*, al-Karağī comme al-Fārisī se contentent en effet de fournir, pour la racine carrée de $(a^2 + r)$, l'approximation $a + \frac{r}{2a+1}$ déjà donnée par al-Uqlīdisī et par tous ses successeurs, sans réellement chercher à l'améliorer et à l'étendre comme le feront Kušyār ibn Labbān, al-Nasawī et surtout al-Samaw'al dans leurs ouvrages de calcul indien. Du reste, le procédé itératif fourni par ce dernier nécessitait une théorie des fractions décimales trouvant naturellement sa place dans le cadre de cette dernière discipline.

L'écriture des nombres en toutes lettres constitue donc le support de l'exposé du calcul *aérien*. Reprenons par exemple l'exposé d'al-Karağī, en nous concentrant sur l'exemple

[24] Al-Fārisī ([1994]: 79).

[25] Al-Fārisī ([1994]: 63).

[26] Al-Fārisī ([1994]: 82).

de la multiplication. Celui-ci commence par définir trois notions permettant de distinguer les nombres entre eux, à savoir les *rangs* (*marātib*), les *nœuds* (*ʿuqūd*) et les *noms* (*asmāʾ*)[27] :

> Les *rangs* sont (au nombre de) trois : les unités, les dizaines et les centaines, ce qui va au-delà étant construit sur celles-ci, comme les milliers, les dizaines de milliers et les centaines de milliers, les milliers de milliers, les dizaines de milliers de milliers et les centaines de milliers de milliers, chaque (groupe de) trois étant sur le système du premier (groupe de) trois, le premier étant des unités auxquelles on joint le terme *mille* une fois, deux fois ou plus, et le troisième des centaines auxquelles on joint le terme *mille* une fois, deux fois ou plus. Ne vois-tu pas que tout nombre est (tel) que s'il n'est pas des trois rangs, alors si tu ôtes les termes *milliers*, il reste des unités, ou des dizaines ou des centaines ? Sache que le nombre est ordonné selon ces rangs en proportion, le rapport de un à dix étant égal au rapport de dix à cent, égal au rapport de cent à mille, la proportion étant ainsi jusqu'à l'infini.
>
> Les *nœuds* sont (au nombre de) neuf. Ne vois-tu pas que le plus grand nombre dans les unités est neuf, dans les dizaines quatre-vingt-dix, dans les centaines neuf cents et que, de même, le plus grand nombre qui apparaisse dans chaque rang est de neuf nœuds ?
>
> Quant aux *noms* qui se trouvent dans les expressions relatives à ce qui est dénombré, ils sont (au nombre de) douze : un, deux, trois jusqu'à dix, cent et mille.

Les *rangs* correspondent ainsi aux rangs du calcul indien (le même mot est utilisé), et renvoient donc aux puissances de 10. Comme l'explique al-Karaǧī, ils sont dénommés selon un système fondé sur les trois premiers d'entre eux (les unités, les dizaines et les centaines), ce qui permet de nommer les suivants par l'adjonction du terme *millier* (les milliers, les dizaines de milliers, les centaines de milliers ; puis les milliers de milliers, les dizaines de milliers de milliers, les centaines de milliers de milliers ; etc.).

Le nombre de *nœuds* spécifie la valeur à attribuer à chaque rang (ainsi pour les dizaines, *dix* n'a qu'un seul nœud, alors que *soixante* en a six), ce nombre variant donc de *un* à *neuf* et correspondant au bout du compte au chiffre dans le calcul indien. Le terme *ʿuqūd*, qui renvoie aux articulations des doigts, est par contre emprunté au vocabulaire du calcul digital.

Enfin, les *noms* qui interviennent dans l'expression des nombres sont au nombre de douze puisque la langue arabe permet d'écrire tous les nombres à l'aide de douze racines et n'en utilisant pas d'autres, contrairement à d'autres langues comme le français, où l'on trouve par exemples des traces de système vicésimal avec l'utilisation de termes comme *vingt*.

Une fois ces termes définis, al-Karaǧī peut aborder le traitement des opérations, à commencer par la multiplication. Il en donne pour les entiers une définition ainsi présentée : « Sache que la multiplication est la réplication (*taḍʿīf*) de l'un des deux facteurs autant de fois qu'il y a d'unités dans l'autre ». Comme le remarquera quelque temps plus tard Muḥammad

[27] Al-Karaǧī ([1986]: 36-37).

ibn ʿAlī al-Šahrazūrī, fin commentateur du *Kāfī* et maître d'al-Samaw'al, il s'agit là en substance de la définition placée par Euclide au début du Livre VII des *Éléments* et utilisée par la plupart des arithméticiens[28].

Puis al-Karağī introduit une distinction entre deux catégories de nombres, les nombres simples qui ne possèdent qu'un rang (comme huit, vingt ou trente mille), et les nombres composés qui en possèdent plusieurs (comme trente-six). Pour reprendre ses propres mots[29] :

> Sache que le nombre se divise en deux parties : le simple et le composé. Le simple est ce qui n'a qu'un rang, et le composé est ce qui a deux rangs ou plus.

Pour opérer la multiplication de deux nombres simples, on multiplie alors les deux seuls nombres de nœuds en présence et on applique les règles pour la multiplication des puissances de 10, données par al-Karağī dans le langage introduit par lui. Ainsi[30] :

> Si tu veux multiplier un nombre simple par un nombre simple, alors tu multiplies le nombre de nœuds du multiplicande par le nombre de nœuds du multiplicateur ; tu prends pour chaque un du nombre ce qui vient du produit d'un nœud du multiplicande par un nœud du multiplicateur. Cette règle impose que l'on prenne : dans la multiplication des unités par les dizaines, pour chaque un dix ; dans la multiplication des unités par les centaines, pour chaque un cent ; dans la multiplication des dizaines par les dizaines, pour chaque un cent ; dans la multiplication des dizaines par les centaines, pour chaque un mille ; dans la multiplication des centaines par les centaines, pour chaque un dix mille. Si tu connais cela et que tu veuilles multiplier un nombre simple qui n'est pas des trois rangs par un nombre simple égal à lui ou différent de lui, alors tu ôtes de chacun des deux facteurs ce qui vient avec eux de termes *milliers*, tu les retiens, puis tu multiplies ce qui vient du multiplicande par ce qui vient du multiplicateur selon ce qui a été mentionné. Puis tu appliques au résultat les milliers retenus.

Puis vient un exemple[31] :

---

[28] Al-Šahrazūrī (MS Yeni Cami 801: 3^{v}).

[29] Al-Karağī ([1986]: 38) ; les exemples qui précèdent sont les nôtres, al-Karağī n'en fournissant pas.

[30] Al-Karağī ([1986]: 38).

[31] Al-Karağī ([1986]: 39).

> Multiplie deux cents mille mille par trente mille. La méthode pour cela : ôte les termes mille des deux facteurs, qui sont <au nombre de> trois, il reste deux cents par trente. La règle de sa multiplication : tu multiplies le nombre de nœuds du multiplicateur par le nombre de nœuds du multiplicande, on a six, prend pour chacun un millier car les centaines par les dizaines sont les milliers, on a donc six mille, que nous appliquons aux trois termes retenus, il vient six mille mille mille mille.

Autrement dit :

$$(200 \times 10^3 \times 10^3) \times (30 \times 10^3) = (200 \times 30) \times 10^3 \times 10^3 \times 10^3$$
$$= (2 \times 3) \times (100 \times 10) \times 10^3 \times 10^3 \times 10^3$$
$$= 6 \times 10^3 \times 10^3 \times 10^3 \times 10^3$$

Pour la multiplication de deux nombres composés, il suffit de multiplier chacun des nombres simples formant le multiplicande par tous les nombres simples formant le multiplicateur et de faire la somme des résultats obtenus[32] :

> Si tu veux multiplier un nombre à plusieurs rangs par un autre nombre à plusieurs rangs égal à lui ou différent de lui, tu multiplies chacun des nombres du multiplicande par tous les nombres du multiplicateur. Tu commences par le plus grand, puis par celui qui suit jusqu'à ce que tu parviennes au nombre tout entier. Tu additionnes tout ce qui est ainsi obtenu, et c'est le demandé.

Se trouve ainsi exprimée, d'une manière particulièrement nette, une règle de distributivité qui sera non seulement énoncée, mais également démontrée par al-Fārisī, qui accentuera dès lors de cette manière l'aspect théorique de l'exposé (voir plus loin).

Les règles générales étant posées pour tous les nombres entiers, simples ou composés, al-Karaǧī peut ensuite énoncer quelques règles plus éloignées de la définition, mais qui facilitent le calcul dans certains cas particuliers. Ces règles s'appuient sur les propriétés mêmes de l'opération et reposent sur ce que l'on pourra nommer plus tard des identités algébriques. Il énonce ainsi, parmi d'autres règles :

> Si tu veux multiplier un nombre par un nombre, prend le rapport du plus simple des deux facteurs au nœud simple que tu veux, ou divise-le par lui, puis multiplie ce qui résulte de la division ou du rapport par l'autre, puis de ce qui vient prend pour chacun le nœud auquel on a pris le rapport si on a pris le rapport, ou le nœud par lequel on a divisé si on a divisé, et ce qui résulte de cela est la réponse[33].

---

[32] Al-Karaǧī ([1986]: 39)

[33] Al-Karaǧī ([1986]: 41).

Autrement dit :

$$a \times b = \left(\frac{a}{c} \times b\right) \times c$$

Et il donne l'exemple suivant :

$$125\times84 = \left(\frac{125}{1000} \times 84\right) \times 1000 = \left(\frac{1}{8} \times 84\right) \times 1000 = \left(10 + \frac{1}{2}\right) \times 1000 = 10500.$$

Ou encore :

> Si tu veux multiplier l'un par l'autre deux nombres différents, additionne-les, prend la moitié du résultat, prends-en le carré, et retranches-en le carré de la moitié de la différence entre eux ; ce qui vient après cela est la réponse[34].

Soit :

$$a \times b = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2.$$

Cette dernière règle peut s'avérer utile, comme le remarque le mathématicien sans donner d'exemple, lorsque la somme des deux nombres *a* et *b* est un nombre simple. Nous reviendrons plus loin sur cette règle avec la démonstration qu'en donne al-Fārisī, démonstration qui permettra d'en préciser le statut.

L'exemple de la multiplication des entiers, que nous venons de résumer, nous semble illustrer parfaitement la tentative de rationalisation dont fait alors l'objet la pratique de l'arithmétique. Mais quoique une telle rationalisation soit ici essentiellement fondée sur la langue, un support qui a pu paraître plus susceptible de généralité qu'un symbolisme lié à des techniques particulières de résolution, l'influence du calcul indien n'en semble pas moins prépondérante : les « nombres de nœuds » sont bien les véritables pendants « littéraux » des chiffres de la numération indienne, et tiennent une même place centrale dans le dispositif. Semblant à la fois opérer cette identification et signifier un ordre des raisons entre les deux notions, al-Šahrazūrī expliquera ainsi *a posteriori*, dans son commentaire, que c'est parce que chaque rang est muni de neuf nœuds que les Indiens ont utilisé neuf formes numériques pour désigner les nombres[35] : la remarque, notons-le, vaut autant pour l'articulation avec le calcul indien que pour le caractère de plus grande généralité qui est ainsi conféré au calcul aérien.

Pourtant, ce support linguistique n'est pas tout à fait neutre. Nous avons relevé plus haut que les *noms* énoncés par al-Karağī, qui font explicitement partie des termes premiers du calcul *aérien*, ne s'adaptent pas de la même façon à toutes les langues. Mieux encore, certaines caractéristiques de la langue arabe engendrent des classifications mathématiques

---

[34] Al-Karağī ([1986]: 44).

[35] Al-Šahrazūrī (MS Yeni Cami 801: 3^{r}) ; également cité par Ahmad Saidan (1978: 350).

qui sont tout à fait spécifiques. Ainsi, l'arabe dispose d'un mot propre pour dénommer les fractions de un *demi* à un *dixième*, mais n'en possède pas, comme en français, pour désigner un *onzième* ou un *douzième* (on dit dans ces derniers cas une *partie de onze* ou une *partie de douze*) ; or, sur ce fait linguistique, s'appuie une classification des fractions s'étendant aux nombres entiers eux-mêmes, laquelle est donc moins le reflet de propriétés mathématiques que de particularités propres à l'arabe. Entérinant une distinction déjà bien ancrée avant lui[36], al-Fārisī écrit ainsi :

> Les nombres se réduisent à trois parties : <le> sourd (*aṣamm*), qui est celui que ne mesure aucun un nombre issu des neufs dénominateurs <à savoir de un *demi* à un *dixième*>, c'est-à-dire qui n'admet pas de fraction issues des neuf fractions, comme 11 et 143 ; <le> prononçable (*munṭaq*), qui est celui que ne mesure aucun sourd, ni une fois ni plusieurs, comme 8 et 25, et qui se nomme également ouvert (*maftūḥ*) ; et <le> commun, qui est celui que mesure un sourd et un prononçable, comme 22 et 65, le premier étant mesuré par 2 et 11, et le deuxième par 5 et 13[37].

Sans nous étendre sur ce point, notons juste que, selon cette définition, les nombres sourds sont des nombres premiers supérieurs ou égaux à 11 ou des produits de nombres premiers supérieurs ou égaux à 11, comme 143, produit de 11 par 13, et qu'ils sont nommés ainsi parce qu'une fraction les ayant comme dénominateur ne peut être décomposée en somme et/ou produit de fractions prononçables[38].

Cette citation d'al-Fārisī appelle deux autres remarques. La première ressortit au terme *ouvert* (*maftūḥ*), qui apparaît, dans ce contexte tout au moins, comme un synonyme de *prononçable* (*munṭaq*). Le fait qu'Ibn al-Akfānī ait usé de ce même terme pour désigner le calcul qu'on qualifiera plus tard d'*aérien* (voir plus haut), ne fait alors que souligner le caractère prégnant de la langue pour le genre qui nous occupe. La deuxième remarque touche aux chiffres indiens qui sont utilisés ici (11, 143, 8 ou 25 sont écrits en utilisant ces chiffres, et non pas en toutes lettres comme cela est le cas en d'autres endroits) : on a là l'un des nombreux exemples de l'usage des chiffres dans un ouvrage qui, selon l'affirmation même de son auteur, relève bien du calcul aérien ; preuve, s'il en était besoin, que ce n'est pas cet usage en tant que tel, ni plus généralement la simple notation des nombres, qui permet de faire le départ entre calcul aérien et calcul indien.

---

[36] Voir par exemple l'encyclopédie des *Iḫwān al-Safā'* au x^{e} siècle (Iḫwān al-Ṣafā' [2012]: 34).

[37] Al-Fārisī ([1994]: 143).

[38] Pour de plus amples commentaires, voir notre notice sur le terme *sourd* dans Rashed (2017: 433-437).

IV. QUELQUES DEMONSTRATIONS CHEZ AL-FARISI

Comme la très grande majorité des traités de *ḥisāb*, le texte d'al-Karaǧī ne comporte aucune démonstration : aux règles générales énoncées dans toute leur généralité, succèdent juste des exemples qui permettent au lecteur de mieux en saisir le sens. Les nombreux commentaires rédigés dans cette discipline donnent souvent des explications plus fournies que le texte qu'ils commentent, et aussi, parfois, des mises en perspective plus larges, à l'exemple des deux citations que nous avons données du commentaire d'al-Šahrazūrī ; mais la plupart du temps, ils ne s'attachent pas plus à donner de démonstrations. La particularité du commentaire d'al-Fārisī, comme celui-ci l'annonce en introduction à son livre, est précisément d'entreprendre de démontrer de façon systématique les propositions et les règles énoncées avant lui, dans un cadre qu'il définira plus loin être celui du calcul *aérien*[39]. Il ne saurait être question de passer ici toutes ces démonstrations en revue ; nous nous contenterons ici de prendre quelques exemples relatifs à la multiplication, qui seront d'autant plus précieux qu'ils nous permettront de saisir la nature des arguments fournis par al-Fārisī pour doter de fondements le calcul *aérien*[40]. Nous allons voir que ces fondements sont puisés pour l'essentiel dans les *Éléments* d'Euclide – qui constituent la référence majeure d'al-Fārisī – mais dans un contexte qui pourra parfois être celui de l'algèbre.

Notre premier exemple est celui de la multiplication de deux nombres composés, reposant étroitement sur la règle de distributivité. Reprenons dans le détail l'exposé d'al-Fārisī, en partant du passage du texte d'Ibn al-Ḫawwām qu'il entend commenter et introduit ainsi[41] :

> Il a dit : quant à la multiplication des nombres composés entre eux, la méthode en est de décomposer en simples chacun des deux facteurs, de multiplier chaque simple de l'un par tous les simples de l'autre et de faire la somme.

Il explicite ensuite la règle ainsi décrite, puis prend plusieurs exemples pour l'illustrer :

> Je dis : cette règle comprend la multiplication du simple par le composé et la multiplication du composé par le composé, et elle revient à décomposer le composé en tous ses simples, que ce soit l'un des deux ou tous les deux, puis de multiplier chaque simple du côté du multiplicateur par chaque <simple> du côté du multiplicande, et de faire la somme.

---

[39] Al-Fārisī ([1994]: 58).

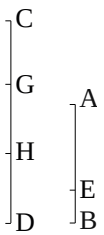
[40] Jeffrey Oaks s'est récemment penché sur les démonstrations de ce traité d'al-Fārisī, dans une perspective toute différente de la nôtre et avec quelques nuances interprétatives (Oaks 2019).

[41] Al-Fārisī ([1994]: 98-99) ; comme il est d'usage dans la plupart des commentaires, le texte du traité commenté est ici cité intégralement, commençant par « il dit : » et s'interrompant en général par « je dis », ce qui annonce le commentaire proprement dit.

Exemple. Cinq par vingt-cinq. Décomposons le multiplicande en ses simples. Multiplions cinq par vingt, on a cent, puis par cinq, on a vingt-cinq, additionnons-les, et la réponse est cent vingt-cinq. De même, sept par cent treize, on multiplie sept par cent, on a sept cents, puis par dix, on a soixante-dix, puis par trois, on a vingt-et-un, donc la réponse est sept cent quatre-vingt-onze. Si l'on dit vingt-cinq par quarante-six, on multiplie vingt du côté du multiplicateur par quarante du côté du multiplicande, on a huit cents, puis par six de lui, on a cent vingt, puis on multiplie cinq du premier par quarante, on a deux cents, puis par six, on a trente, puis on additionne les quatre résultats, on a mille cent cinquante. Ainsi, on a besoin, pour multiplier ce qui est composé, de multiplier une multiplicité de facteurs, la multiplicité des simples du multiplicateur par la multiplicité des simples du multiplicande.

Même si la règle ainsi décrite semble assez naturelle, son énoncé ne saurait, pour al-Fārisī, constituer une démontration : il faut encore pour cela, en citant de façon claire les définitions, pouvoir pointer sur quel principe plus général elle se fonde. C'est bien l'objet de la démonstration à laquelle s'attache ensuite le mathématicien, démonstration qui s'avère être celle du résultat lui aussi plus général assurant la distributivité de la mutiplication par rapport à l'addition. Al-Fārisī instancie là les nombres entiers à l'aide de segments de droite, à la manière d'Euclide dans les *Éléments* :

Démonstration de la règle. Etant donné que les deux facteurs sont des entiers, qu'ils soient *AB* et *CD*. Décomposons *AB* en ses simples, soit *AE* et *EB*. De même <pour> *CD*, soit *CG*, *GH* et *HD*. Alors la multiplication de *AB* par *CD* est prendre *AB* <un nombre de fois égal> aux unités de *CD*. Or les unités de *CD* ne sont autres que les unités de ses parties. Donc prendre *AB* <un nombre de fois égal> aux unités de chacune d'elles et faire la somme est le prendre <un nombre de fois égal> aux unités de *CD*. Il en est de même pour le propos sur la multiplication de *AB* par chacune des parties de *CD* : elle est égale à la multiplication des deux parties de *AB* par chacune de ces parties. La <somme des> résultats de la multiplication des parties de *AB* par les parties de *CD* est donc égale à la multiplication de *AB* par *CD* ; ce qu'il fallait démontrer.



Le cadre de l'argumentation est ici entièrement celui du Livre VII des *Éléments*. Le mathématicien commence en effet par appliquer la définition de la multiplication de deux nombres entiers, telle qu'il l'avait donnée plus haut en faisant explicitement référence à Euclide : « le sens de la multiplication pour les entiers est ce qu'il (Euclide) a mentionné en évoquant la répétition (*takrīr*) de l'un des deux facteurs autant de fois que l'autre a

d'unités »[42] ; c'était bien en substance la définition 16 du Livre VII, que nous avons rencontrée sous une forme voisine chez al-Karağī. Il passe ensuite à l'argument principal de la démonstration, qui lui permettra de conclure et qui repose sur ce qui apparaît comme une évidence : les unités d'un nombre sont la réunion des unités de ses parties.

Il faut remarquer qu'il n'y a pas de démonstration – ni même d'énoncé – de la distributivité pour les entiers dans les livres arithmétiques d'Euclide, à la différence de ce qui en constitue le pendant géométrique, consigné au début du Livre II (en particulier la proposition II-1). C'est très vraisemblablement le caractère d'évidence de la démonstration qui pourrait expliquer cette absence. C'est du moins l'avis de Jean-Louis Gardies, qui écrit :

> La définition 16, qu'Euclide, en tête de son livre VII, donne lui-même de la multiplication d'un nombre par un nombre, suffisait à rendre à peu près immédiates de telles propriétés arithmétiques, alors que leur version géométrique, concernant ces grandeurs particulières que sont segments, carrés et rectangles, nécessitait au contraire les démonstrations que le rédacteur du livre II avait pris la peine de leur consacrer, mais qui ne pouvaient en aucun cas s'appliquer aux nombres qui viendront ensuite[43].

Il reste que, la propriété devant être énoncée dans le cadre d'un traité de calcul *aérien* – cette nécessité étant absente pour le Livre VII – al-Fārisī ne pouvait que procéder à sa démonstration, aussi immédiate fut-elle. Insistons enfin, parce que cette démonstration va s'opposer en cela à celle que nous examinons ensuite, sur son caractère strictement arithmétique.

Avant toutefois de passer à notre second exemple, il nous faut revenir quelques instants sur ce que nous avons nommé « le pendant géométrique » de propriétés arithmétiques comme la distributivité (Jean-Louis Gardies évoque « leur version géométrique »). Notons pour commencer qu'il n'y a pas chez nos auteurs, et encore moins bien sûr chez Euclide – pour qui la question ne saurait se poser – de définition *stricto sensu* de ce que serait une multiplication de grandeurs géométriques. En outre, et comme le remarque en substance Gardies (voir plus haut), il y a chez le mathématicien alexandrin une frontière étanche entre le traitement réservé aux nombres et celui qui se rapporte aux grandeurs géométriques. Or chez les mathématiciens arabes – comme du reste chez leurs successeurs – cette frontière s'estompe. Ainsi, dès ses commencements en tant que discipline, l'algèbre entend traiter des quantités continues comme s'il s'agissait de quantités discrètes, les inconnues pouvant être en effet aussi bien des nombres que des grandeurs géométriques : il est donc nécessaire d'opérer sur ces grandeurs et, en particulier, de les multiplier. En l'absence

---

[42] Al-Fārisī ([1994]: 79).

[43] Gardies (2004: 37).

de définition proprement dite, les algébristes sont alors conduits à recourir à la géométrie, et notamment, à partir d'Abū Kāmil, au Livre II des *Éléments* : on agit dès lors *comme si* la multiplication de deux grandeurs recouvrait la saisie du rectangle qu'elles définissent, conduisant au bout du compte à une équivalence entre les termes *produit* (*ḍa*ʿ*b*) et *rectangle* (ou *surface*) (*saṭḥ*). Mais cette équivalence se retrouve aussi dans d'autres champs mathématiques, y compris la géométrie elle-même, où l'on observe cette même tendance à l'arithmétisation des grandeurs qui fait user indifféremment des deux termes dès lors qu'il s'agit d'exprimer des propriétés métriques[44]. Sans doute alors, et seulement alors, la fameuse expression *algèbre géométrique* forgée par Zeuthen pour rendre compte du Livre II prend-elle tout son sens. Quant à la stricte disjonction euclidienne du traitement des nombres et des grandeurs, elle est explicitement remise en cause chez des auteurs comme Thābit ibn Qurra, lequel pourra écrire, après avoir longuement évoqué le concept de *rapport* :

> Quant à nous, nous ne voulons traiter ici que des rapports de grandeurs même si, pour tout ce que nous décrivons se rapportant aux grandeurs, quelque chose de semblable peut en découler nécessairement pour les nombres. Si tu veux connaître cela, à chaque fois que nous disons *grandeur*, il faut donc que tu comprennes en plus de cela *ou nombre*[45].

C'est précisément dans ce jeu entre nombre et grandeur que se déploie notre deuxième exemple de démonstration par al-Fārisī. Il s'agit ici de fournir une preuve à la règle déjà donnée par al-Karaǧī et évoquée plus haut, reposant sur l'identité :

$$a \times b = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2.$$

Al-Fārisī l'introduit en reprenant l'exemple donné par Ibn al-Ḫawwām :

> S'il est dit : trente-six par quarante-quatre. Fais-en la somme, prend la moitié de la somme, et multiplie-le par lui-même, il vient mille six cent. Soustrais de cela le produit de la moitié de la différence entre eux par elle-même, c'est-à-dire seize, et le reste est la réponse. Tu procèdes de même pour tout couple de nombres dont la moitié de la somme est un nombre simple[46].

Et il ajoute :

> Je dis : sa démonstration suit un lemme, qui est que le rectangle de tout couple de nombres différents est égal au carré de la moitié de leur somme moins le carré de la moitié de leur différence.

---

[44] Voir notre notice du terme *saṭḥ* dans Rashed (2017: 355-357).

[45] Voir notre édition (Thābit ibn Qurra [2009[b]]: 430).

[46] Al-Fārisī ([1994]: 107).

Notons d'emblée le caractère délibérément géométrique de la terminologie (*rectangle* au lieu de *produit*, *carré*) par laquelle la règle est exprimée. Il est vrai que le seul usage de tels termes ne saurait à lui seul situer la nature de la règle ainsi énoncée, puisque Euclide lui-même introduit les nombres *plans* et les nombres *carrés* aux définitions 17 et 19 du Livre VII. Mais la démonstration que donne al-Fārisī s'accorde pleinement avec ces termes puisque, comme nous allons le voir, il ne se place plus dans le cadre du Livre VII, mais dans celui du Livre II.

Il commence, comme dans la démonstration précédente, par instancier les nombres entiers dont il traite à l'aide de segments de droite. Ainsi :

> Soit *AB* et *BC* deux nombres différents, leur somme est *AC*, et soit *AD* sa moitié. Ôtons *CB* de *AD*, il reste *DE*. Puisque *AD* et *CD* sont égaux et qu'on leur a ôté *AE* et *BC* égaux entre eux, alors *ED* et *DB* sont égaux.

Il s'agit donc ici de montrer que $AB \times BC = DC^2 + DB^2$. Pour ce faire, le mathématicien use, comme nous allons le voir, d'un langage mixte, à la fois arithmétique (« *CB* par *EB* ») et géométrique (les mots *rectangle* et *carré*), dont nous avons noté qu'il n'était nullement spécifique à cet ouvrage ni même à l'arithmétique. Al-Fārisī écrit ainsi :

> Or *EB* est la différence entre *AB* et *BC*, *AB* par *BC* est égal à *AE*, c'est-à-dire *BC*, par lui-même et par *EB*, et *CB* par *EB* est le double de son rectangle par *DB*. Donc le carré de *CB* plus le double de son rectangle par *DB* est égal au rectangle *AB* par *BC*. Si nous ajoutons au premier le carré de *DB*, il devient égal au carré de *DC*, car le carré de *DC* est égal à <la somme> des carrés de *CB* et *BC* plus le double de leur rectangle, selon ce qui a été démontré dans les *Éléments*, et que nous démontrerons dans le quatrième livre de cet ouvrage. Donc le carré de *DC*, qui est la moitié de la somme des deux nombres, moins le carré de la moitié de la différence entre eux, à savoir *DB* moitié de *EB*, est égal au rectangle des deux nombres ; ce qu'il fallait démontrer.

Autrement dit :

$$EB = AB - BC$$

et $$AB \times BC = BC^2 + BC \times EB.$$

Or $$CB \times EB = 2CB \times DB,$$

donc $$CB^2 + 2CB \times DB = AB \times BC.$$

La démonstration prend donc un tour calculatoire en s'appuyant sur des règles que l'on pourrait certes renvoyer à l'arithmétique (par exemple la règle de distributivité démontrée plus haut), mais qui évoquent plus sûrement les procédures mises en œuvre par

les géomètres dès lors qu'il s'agit de traiter des propriétés métriques. C'est du reste ce que confirme al-Fārisī lui-même lorsqu'il fait référence à Euclide dans la phrase suivante.

En effet, écrit-il en substance, c'est en vertu de ce qu'a démontré le mathématicien alexandrin que l'on a :

$$CB^2 + 2CB \times DB + DB^2 = DC^2,$$

ce qui permet aisément de conclure. La proposition à laquelle il fait référence est bien évidemment la fameuse proposition II-4, énoncée par Euclide pour des grandeurs géométriques et non pour des nombres.

Il y a, dans ce recours au Livre II par al-Fārisī – alors même qu'une démonstration purement arithmétique était envisageable – une indication nette que le statut de la règle qu'il démontre dépasse le cadre strict des nombres entiers auxquels elle s'applique à cet endroit précis : on est bien ici dans le champ de l'algèbre, où les objets que l'on manipule, et auxquels on applique délibérément les opérations de l'arithmétique, peuvent aussi bien être du domaine des nombres que de celui des grandeurs géométriques. Du reste, le quatrième livre de l'ouvrage d'al-Fārisī, évoqué par lui dans sa démonstration, est précisément celui qu'il consacre à l'algèbre ; et les applications de la proposition II-4 que l'on y trouve (plutôt qu'une démonstration proprement dite), sont bien exprimées dans le même langage géométrico-arithmétique[47]. La règle $a \times b = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$, pensons-nous, peut dès lors à bon droit être qualifiée d'identité algébrique.

Pour asseoir les propositions du calcul *aérien* relatives à la multiplication, al-Fārisī mobilise donc deux traditions mathématiques distinctes : celle du Livre VII des *Éléments* lorsqu'il s'agit de donner une démonstration en accord avec sa définition de l'opération, et celle de l'algèbre lorsqu'il s'agit de s'appuyer sur une identité d'un ordre plus général. Mais pour rendre compte de la généralité de ce dernier cas, le mathématicien n'a d'autre choix que de renoncer à sa définition et d'identifier les produits aux rectangles, comme l'avaient fait avant lui Thābit ibn Qurra, Abū Kāmil ou encore al-Karaǧī (dans son traité d'algèbre), pour démontrer les algorithmes de résolution des équations en recourant aux propositions II-5 et II-6 des *Éléments*[48]. Ainsi observe-t-on, dans ces passages, ce qui nous semble constituer deux traits essentiels du calcul *aérien*, à savoir l'intention de donner aux opérations de l'arithmétique des définitions fondées et étayées, ce qui pouvait déjà être relevé chez al-

[47] Voir par exemple al-Fārisī ([1994]: 520).

[48] Thābit ibn Qurra ([2009ª]) ; Abū Kāmil ([2012]: 254-269) ; al-Karaǧī ([1985]: 151-161).

Karağī, mais aussi le caractère prégnant de l'algèbre dans cette entreprise. Ce sont ces deux points que nous voudrions maintenant reprendre de façon plus large.

V. L'EMERGENCE DU CALCUL AERIEN ET L'INFLUENCE DE L'ALGEBRE

Mais revenons au préalable sur les conditions dans lesquelles, à la fin du x^e^ siècle, Abū al-Wafā' et al-Karağī composent leurs ouvrages. La première chose à relever est la multiplicité des traditions arithmétiques qui coexistent dès le IX^e^ siècle, et qui se distinguent autant par leurs règles opératoires et les systèmes de numération qui les fondent, que par leurs usages et leurs champs d'application : calcul indien s'appuyant sur la numération décimale de position ; calcul s'appuyant sur l'écriture alphabétique héritée des Grecs (notation *abğad*) ; calcul digital ; calcul sexagésimal ; etc. Ces différentes traditions ont posé aux mathématiciens des problèmes à la fois théoriques et pratiques, que ce soit pour asseoir les règles de chacune d'elles sur des bases mathématiques solides ou, comme en réponse à des sollicitations de l'administration de l'État, pour élaborer des procédures qui puissent en faciliter et en rationaliser l'usage. Ainsi, pour Roshdi Rashed[49] :

> la confrontation au moins implicite des arithmétiques a fait apparaître beaucoup plus clairement qu'auparavant la généralité et la nature abstraite du concept d'opération. Vues de cette manière, et en quelque sorte systématisées, les opérations sont dès lors des moyens d'organiser l'exposé arithmétique. La présence de plusieurs arithmétiques a eu pour conséquence, en effet, de relativiser les systèmes de numération pour montrer que l'essentiel est dans le choix de la base et dans les opérations à appliquer.

Mais au vu de de ce que nous venons de détailler, il nous semble que le calcul *aérien* va plus loin encore. En effet, les opérations n'y sont plus simplement principe d'organisation : par le souci manifesté de leur trouver aussi des définitions, elles deviennent également, d'une certaine manière, des objets pour la discipline, objets dont on pourra chercher à asseoir les fondements conceptuels en revenant le cas échéant, comme Abū al-Wafā' ou al-Fārisī, aux *Éléments* d'Euclide et à la rigueur de leur exposé. Tel est le sens, pensons-nous, de la phrase d'al-Karağī que nous citions plus haut (« si tu connais le concept de la multiplication et sa définition, tu connais son calcul »).

Or à ce contexte arithmétique dèjà propice à de tels développements s'ajoute un fait historique majeur qui en renforce singulièrement les effets, à savoir la mutation de la discipline algébrique qui s'opère à la fin du x^e^ siècle, précisément au sein de l'école d'al-Karağī. Pour mesurer le saut effectué alors, il suffit de comparer l'organisation du traité d'algèbre d'Abū Kāmil (deuxième moitié du IX^e^ siècle) à celle du *Faḫrī* d'al-Karağī. En effet, l'algèbre

[49] Rashed (1984: 66).

d'Abū Kāmil reste avant tout centrée sur la théorie des équations quadratiques et les applications de cette théorie. Suivant un plan hérité d'al-Ḫwārizmī, l'ouvrage commence ainsi par l'exposé de cette théorie, se poursuit par une partie consacrée au « calcul algébrique » – qui offre des outils devant permettre de ramener la formulation d'un problème vers l'une des six équations de la théorie – et se termine par une abondante collection de problèmes, dont une partie sur l'analyse indéterminée[50]. Or dans *al-Faḫrī*, on observe un renversement de ce plan qui est parfaitement significatif de ce qu'est devenue l'algèbre pour son auteur : exposé du calcul algébrique pour commencer, sur plusieurs chapitres, puis, seulement alors, un chapitre consacré aux six équations quadratiques, et enfin, là encore, une abondante collection de problèmes[51]. C'est donc bien le calcul algébrique qui constitue le fait prédominant du traité et, dans la façon dont le sujet est traité, il faut voir, pensons-nous et comme on l'a souvent rappelé, les débuts de l'algèbre des polynômes : al-Karaǧī définit là les puissances de l'inconnue et leurs inverses, et s'intéresse aux sommes des objets ainsi définis (l'ensemble est donc un peu plus large que les polynômes d'aujourd'hui). Ce qui est particulièrement important pour notre propos, c'est l'organisation même de cette partie, structurée comme dans les traités d'arithmétique selon la succession des opérations. Il y a bien là un projet d'*arithmétisation* de l'algèbre, selon le mot de Roshdi Rashed, projet qu'al-Samaw'al, successeur d'al-Karaǧī, résume au XII^{e} siècle de la façon suivante : « opérer sur les inconnues au moyen de tous les instruments arithmétiques, comme l'arithméticien procède sur les connues »[52].

Mais dans ce processus, il n'y a pas seulement une arithmétisation de l'algèbre. Il y a aussi une influence réciproque sur l'arithmétique, qui se manifeste précisément dans le cadre du calcul *aérien.* Il y a en effet, entre les deux disciplines, un même mouvement qui relève d'une même intention et de moyens souvent identiques. Il suffit de comparer *al-Faḫrī*, traité d'algèbre, et *al-Kāfī*, traité de calcul *aérien* du même auteur, pour saisir ce voisinage. Un polynôme est ainsi la somme de puissances de l'inconnue affectées de coefficients, de même qu'un nombre entier est la somme de puissances de dix affectées de coefficients. Dans les deux cas, al-Karagī distingue les nombres *simples* (*mufrad*), qui sont ceux où n'intervient qu'une seule puissance, quelle soit de dix ou de l'inconnue, et les nombres *composés* (*murakkab*), où interviennent plusieurs puissances différentes, quelles soient de dix ou de l'inconnue. Dans les deux cas, il commence par donner les règles, bien évidemment similaires, pour les nombres simples. Puis il passe dans les deux cas aux nombres composés, exposant une règle de distributivité qui est bien sûr identique dans le cas arithmétique des puissances de dix et dans le cas algébrique des puissances de l'inconnue. Plus explicite encore, al-Karagī

[50] Abū Kāmil ([2012]).

[51] Al-Karaǧī ([1985]).

[52] Al-Samaw'al (([1985]: 1).

explique dans un autre ouvrage, *al-Badīʿ*, que « les inverses des inconnues sont comme les fractions pour les connues, l'inverse de toute chose étant ce qui, multiplié par elle, donne un »[53].

Le développement du calcul *aérien* ne nous semble donc nullement indépendant, à partir d'al-Karağī tout au moins, de celui de l'algèbre. Mais mieux encore, et c'est un point qui nous semble tout à fait essentiel pour ce qui nous intéresse ici, l'algèbre vient étendre le champ d'application des opérations du domaine des nombres entiers et des fractions vers celui d'inconnues dont la nature n'est pas précisée puisqu'elles peuvent être aussi bien numériques que grandeurs géométriques. Dès lors, des propriétés comme la distributivité peuvent être pensées de façon plus ample que dans le simple cas de l'arithmétique, et il pourra en être de même pour des identités que l'on pourrait désormais qualifier d'algébriques, comme nous l'avons noté plus haut en évoquant les démonstrations d'al-Fārisī. Rappelons en outre que c'est bien chez al-Karağī que se trouvent exprimés, pour la première fois à notre connaissance, la formule du binôme et le tableau des coefficients binômiaux, formule qui peut s'appliquer tout aussi bien aux connues qu'aux inconnues.

Pour conclure sur ce point, il ne nous semble pas fortuit que des mathématiciens comme al-Karağī et al-Samaw'al, deux des principaux artisans de l'arithmétisation de l'algèbre, se soient tournés de cette façon vers l'arithmétique pour mieux en fonder les objets, en tirant parti des avancées opérées aussi bien du côté de la mise en ordre du calcul algébrique que du côté du calcul indien. Au contraire, pourrait-on dire, c'est bien dans un contexte marqué par un double développement récent qui exercera sur lui une influence latente, celui du calcul indien d'une part, et celui de l'algèbre d'autre part, que prend naissance le calcul *aérien*.

VI. CONCLUSION : VERS UNE SCIENCE DU CALCUL (*ḥISAB*)

Qu'est-ce alors que le calcul *aérien* ? L'origine du terme lui-même nous semble encore obscure, mais il pourrait bien renvoyer à l'usage d'une écriture des nombres en toutes lettres et donc à un contexte linguistique, comme le suggère la citation d'al-Fārisī que nous donnions plus haut, où son équivalent, *maftūḥ*, renvoie alors à ce qui est exprimable dans la langue.

En revanche, il semble bien que ce soit dans cette tradition, plus que dans celle du calcul indien proprement dite – et bien que la première ait pu tirer avantage des développements de la seconde – qu'a pu s'épanouir une véritable science du calcul (*ḥisab*), avec ses définitions et ses exigences démonstratives, mises en acte de façon systématique chez al-Fārisī. En outre, le développement de la discipline algébrique a manifestement

[53] Al-Karağī ([1964]: 47).

beaucoup joué dans celui du calcul *aérien*, de par la proximité de leurs modes d'exposition et aussi, comme nous venons de le voir, par le partage de règles communes et l'extension du champ d'application des opérations.

Toutefois, la multiplicité des traditions d'écriture des traités de calcul (*ḥisāb*) ne doit pas conduire à se méprendre sur la nature de cette discipline, dont l'unité est beaucoup plus profonde qu'il n'y paraît de prime abord, comme nous le laissions entendre à propos de Yaḥyā ibn Aḥmad al-Kāšī. Même si l'accent peut être porté ici ou là sur la façon traditionnelle de décomposer les fractions, pour ne prendre qu'un exemple, celles-ci font bien l'objet d'une conception identique dans le calcul indien et dans le calcul *aérien*. De même, le principe de la numération décimale de position sous-tend aussi bien le premier genre que le second. Le calcul sexagésimal, presque systématiquement signalé pour son usage massif dans certains domaines comme l'astronomie, apparaît surtout comme une variation dans la façon d'écrire les nombres où seule la base change, offrant la plupart du temps des procédures de calcul similaires à celles du calcul décimal (des tables de multiplication en base 60 sont utilisées à cet effet).

En présentant d'emblée une classification des nombres en nombres simples et nombres composés comme dans le calcul *aérien*, en introduisant ensuite les chiffres de la numération décimale de position comme le moyen de noter les nœuds de chaque rang, en proposant une définition pour chaque opération, et en développant enfin les procédures du calcul indien, des ouvrages comme le *Miftāḥ al-ḥisāb* (*La clé du calcul*) de Ġiyāṯ al-Dīn al-Kāšī au XV^{e} siècle ne feront que réaliser de façon effective cette unité du *ḥisāb*, déjà latente bien avant eux. Ainsi assistera-t-on au dernier acte d'un processus qui, partant de l'introduction de la numération indienne et s'appuyant sur elle, aura embrassé tout à la fois un approfondissement des techniques de calcul, l'abandon de la tablette et de la poussière, et, tirant bénéfice des travaux engagés dans le cadre du calcul *aérien*, l'élaboration de nouveaux concepts et une véritable réflexion sur la nature des opérations.

REFERENCES

Sources primaires

- Anonyme. *Risāla fī ʿilm al-ḥisāb*. Madrid: MS Escorial, Ar 973.
- Abū Kāmil, Šuǧāʿ ibn Aslam ibn Muḥammad ibn Šuǧāʿ. [2012]. *Kitāb al-ǧabr wa-l-muqābala* (Livre d'algèbre et d'al-muqābala), édité et traduit par Roshdi Rashed. In

Abū Kāmil, algèbre et analyse diophantienne, Roshdi Rashed (ed.), 241-521. Berlin: De Gruyter.

- al-Baġdādī, Abū Manṣūr ʿAbd al-Qāhir Ibn Ṭāhir. [1985]. *Al-Takmila fī al-ḥisāb*, édité par Aḥmad Saʿīdān. Koweit.
- al-Būzğānī, Abū al-Wafā. [1971]. *Kitāb al-manāzil al-sabʿ*, édité par Aḥmad Saʿīdān. Amman.
- al-Fārisī, Kamāl al-Dīn. [1994]. *Asās al-qawāʿid fī uṣūl al-fawā'id*, édité par Muṣṭafā Mawāldī. Le Caire: Maʿhad al-maḫṭūtāt al-ʿarabiyya.
- Ibn al-Akfānī, Muḥammad ibn Ibrāhīm ibn Sāʿid. [1989]. *Iršād al-qāṣid ilā asnā al-maqāṣid fī anwāʿ al-ʿulūm*, édité par Jan Just Witkam. Leiden: Ter Lugt Press.
- Ibn al-Bannā' al-Marākušī. [1969]. *Talḫīṣ aʿmāl al-ḥisāb*, édité et traduit par Mohamed Souissi. Tunis: Publications de l'Université de Tunis.
- Ibn al-Hā'im, Šahāb al-Dīn Aḥmad ibn Muḥammad. [1989]. *Al-Maʿūna fī ʿilm al-ḥisāb al-hawā'ī*, édité par Ḫuḍayr ʿAbbās Muḥammad al-Munšidāwī. Bagdad: Dār al-Aṯār wa-al-Turāṯ.
- Ibn al-Hā'im, Šahāb al-Dīn Aḥmad ibn Muḥammad. *Al-Wasīla fī al-ḥisāb al-hawā'ī*. Berlin: MS Landberg 599.
- Iḫwān al-Ṣafā'. [2012]. *Rasā'il*. Édité et traduit par Nader al-Bizri dans *On Arithmetic and Geometry*, *An Arabic Critical Edition and English Translation of Epistles 1 & 2*. Oxford: Oxford University Press.
- al-Karaǧī, Abū Bakr. [1964]. *Kitāb al-badīʿ fī al-ḥisāb*, édité par ʿAdil Anbūbā. In Adel Anbouba, *L'algèbre al-Badīʿ d'al-Karagī*, 7-86 (pagination arabe). Beyrouth: Publications de l'Université libanaise.
- al-Karaǧī, Abū Bakr. [1985]. *Al-Faḫrī*, édité par Aḥmad Saʿīdān. In Aḥmad Saʿīdān, *Tārīḫ ʿilm al-ǧabr wa-l-muqābala*, 2 vol., I.95-308. Koweit: al-Maǧlis al-waṭanī li-l-ṯaqāfa wa-l-funūn wa-l-ādāb.
- al-Karaǧī, Abū Bakr. [1986]. *Al-Kāfī fī al-ḥisāb*, édité par Sami Chalhoub. Alep: Université d'Alep.
- al-Kāšī, Yaḥyā ibn Aḥmad. *al-Lubāb fī al-ḥisāb*. Istanbul: MS Ayasofya 2757.
- al-Šahrazūrī, Muḥammad ibn ʿAlī. *Al-šarḥ al-šāfī li-kitāb* al-Kāfī fī al-ḥisāb *li-l-Karaǧī*. Istanbul: MS Yeni Cami 801.
- al-Samaw'al ibn Yaḥyā al-Maghribī. [2021]. *al-Bāhir fī al-ǧabr*, édité et traduit par Roshdi Rashed. In Roshdi Rashed, *L'algèbre arithmétique au XII^e siècle :* Al-Bāhir *d'al-Samaw'al*, 1-240. Berlin: De Gruyter.
- Ṭāš Kubrī Zādeh, Aḥmad ibn Mustafā. [1968]. *Miftāh al-saʿāda wa-misbāḥ al-siyāda fī mawḍūʿāt al-ʿulūm,* édité par Kāmil Kāmil Bakrī et ʿAbd al-Wahhāb Abū al-Nūr, 3 volumes. Le Caire: Dār al-kutub al-hadīṯa.
- Thābit ibn Qurra. [2009[a]]. *Fī taṣḥīḥ masā'il al-ǧabr bi-l-barahīn al-handasiyya* (Rétablir les problèmes de l'algèbre par les démonstrations géométriques), édité et traduit par Roshdi Rashed. In *Thābit ibn Qurra. Science and Philosophy in Ninth-Century Baghdad*, ed. Roshdi Rashed, 159-169. Berlin: De Gruyter.

- Thābit ibn Qurra. [2009[b]]. *Kitāb fī ta'līf al-nisab* (Livre sur la composition des rapports), édité et traduit par Pascal Crozet. In *Thābit ibn Qurra. Science and Philosophy in Ninth-Century Baghdad*, ed. Roshdi Rashed, 427-535. Berlin: De Gruyter.
- al-Uqlidīsī, Abū al-Ḥasan. [1984] (2ème éd.). *al-Fuṣūl fī al-ḥisāb al-hindī*, édité par Aḥmad Saʿīdān. Alep: Université d'Alep.
- Ḥāǧǧī Ḫalīfa, Muṣṭafā ibn ʿAbdallah. [1982]. *Kašf al-ẓunūn ʿan asāmī al-kutub wa-l-funūn*, 2 volumes. Beyrouth: Dār al-Fikr.

Bibliographie

- Anbouba, Adel. 1964. *L'algèbre al-Badīʿ d'al-Karagī*. Beyrouth: Publications de l'Université libanaise.
- Cajori, Florian. 1894. *A History of Mathematics*. New York: Macmillan.
- Cantor, Moritz. 1880. *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*, Erster Band. Lepzig: Teubner.
- Crozet, Pascal. 2002. Aritmetica. In *Storia della Scienza*, volume 3: *La civiltà islamica*, ed. Roshdi Rashed, 498-506. Roma: Istituto della Enciclopedia Italiana.
- Gardies, Jean-Louis. 2004. *Du mode d'existence des objets de la mathématique*. Paris: Librairie philosophique Vrin.
- Oaks, Jeffrey. 2019. Proofs and algebra in al-Fārīsī's commentary. *Historia Mathematica* 47:106-121.
- Rashed, Roshdi. 1984. *Entre arithmétique et algèbre*. Paris: Les Belles Lettres.
- Rashed, Roshdi (ed). 2017. *Lexique historique de la langue scientifique arabe*. Hildesheim: Olms.
- Saidan, Ahmad. 1978. *The Arithmetic of Al-Uqlīdisī*. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.
- Saidan, Ahmad. 1997. Numération et arithmétique. In *Histoire des sciences arabes*, ed Roshdi Rashed, II, 11-29. Paris: Seuil.
- Woepcke, Franz. 1855. Recherches sur l'histoire des sciences mathématiques chez les Orientaux. *Journal asiatique*, 5e série: 218-256.