



HAL
open science

Savoirs et pratiques des polygones à l'école primaire

Paul Delhumeau, Sophie Gobert

► **To cite this version:**

Paul Delhumeau, Sophie Gobert. Savoirs et pratiques des polygones à l'école primaire. Brochure IREM des Pays de la Loire, 2011. halshs-04260579

HAL Id: halshs-04260579

<https://shs.hal.science/halshs-04260579v1>

Submitted on 26 Oct 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution - NoDerivatives 4.0 International License

Savoirs et pratiques des polygones à l'école primaire.

GROUPE IREM 1er DEGRE – ANGERS

Co-rédaction : Paul Delhumeau, Sophie Gobert.

Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques (IREM)
Université de Nantes, IUFM des Pays de la Loire

Membres du groupe de recherche IREM 1er degré d'Angers :

Evelyne Balmette	Professeur des écoles
Olivier Blond	Maître formateur
Yoann Bluteau	Maître formateur
Mickael Chauvin	Professeur des écoles
Paul Delhumeau	Professeur de Mathématiques - IUFM d'Angers
Bérangère Dupré	Maître formatrice
Eric Franc	Professeur des écoles
Christian Gruget	Conseiller pédagogique
Raphael Martineau	Professeur des écoles
Véronique Perrin	Conseillère pédagogique

Responsable du groupe : Paul Delhumeau, Enseignant Université de Nantes, IUFM Pays de la Loire, Angers.

Co-rédaction : Sophie Gobert, Enseignant-chercheur Université de Nantes (laboratoire du CREN), IUFM Pays de la Loire, Nantes.

Nous remercions Daniel Bochereau du service audiovisuel pour sa disponibilité et sa compétence. Nous remercions également Joël Fabius, Inspecteur de l'Éducation Nationale, pour son soutien et la rédaction de la préface à cette brochure.

Préface

Au quotidien, dans le cadre des inspections, je rencontre des enseignants. C'est une part prépondérante de mon métier où j'apprends en observant et en échangeant avec eux et avec leurs élèves.

Pour leur quasi unanimité, « maîtres et maîtresses » sont des professionnels très consciencieux dont le projet est d'aider chacun des élèves qui leur sont confiés à développer des compétences.

Pourtant, il m'arrive, trop souvent, de constater que les enseignants travaillent beaucoup et leurs élèves... pas assez... Je sais que c'est là un point « nodal » qu'il nous faut « dénouer » !

Enseigner est une tâche complexe ; les questions que se pose chaque enseignant sont multiples, les difficultés de mise en œuvre ne doivent pas être ignorées. Toutefois, aujourd'hui plus qu'hier, nous, éducateurs, avons à mettre en œuvre ce pari fou qui est celui de l'éducabilité à la recherche !

Faisons en sorte que nos élèves osent chercher et qu'ils s'affirment au « risque d'apprendre »... Prenons appui, entre autres, sur l'enseignement des mathématiques pour fonder cette belle ambition.

Les démarches, ici relatées, fruit de « mises à l'épreuve », pilotées et analysées par le groupe IREM 49, contribueront à offrir des perspectives à tous ceux qui souhaitent faire évoluer cette situation.

Chacun lira avec attention les propos recueillis dans cette brochure, je me contenterai, en dégagant quelques caractéristiques récurrentes, d'en marquer la possible transversalité à d'autres enseignements :

- des questions simples qui engagent chaque élève dans une dynamique d'apprentissage : « Est-il possible de construire un triangle à deux angles droits ? » ;
- des situations qui initient, concomitamment, un travail en profondeur selon deux axes : la dimension socio relationnelle - place accordée au débat, à la justification, à l'argumentation - et la dimension cognitive - comment permettre aux élèves de dépasser leurs représentations initiales, par exemple « un carré qui n'est pas droit n'est pas un carré »
- des équilibres maître – élève(s) où chacun assure pleinement son statut : l'enseignant est un « ingénieur pédagogico-didactique » ; il lui revient le devoir de créer des situations où l'élève éprouvera sa capacité de recherche mais aussi celui d'éclairer la question du savoir : synthèse de séance, institutionnalisation, rappel des procédures engagées... ;
- des situations où les connaissances acquises par le « jeu » de la « dé-contextualisation » vont se transformer en compétences : invitation faite aux élèves de chercher d'autres situations où ils peuvent utiliser ce qu'ils ont appris ;
- l'affirmation d'une nécessaire continuité (programmations) des apprentissages.

En conclusion, œuvrons pour que la classe soit reconnue telle « Le lieu privilégié des apprentissages », un cadre où se construit, dans le contexte d'une relation maître - élève(s) assumée, une authentique autonomie des « apprenants – chercheurs » où des « chercheurs - apprenants ». Un Grand Merci à tous ceux qui, au quotidien, conservent voire impulsent cette « folle et saine ambition » d'une Education Populaire au sens de celle qui, quel que soit le terreau originel, permet à chaque « petit d'homme » de s'élever !

Bonne suite à l'IREM pour la promotion de ces valeurs. Merci à Paul Delhumeau, professeur de mathématiques à l'IUFM des Pays de Loire et coordonnateur du groupe départemental, pour ses précieuses contributions lors des journées de formation de circonscription.

J. Fabius
IEN Angers 6
au titre de témoin !

Table des matières

Table des matières	5
Partie I - Savoirs et pratiques des polygones au cycle 2	8
Cycle 2 - Introduction	8
Cycle 2 – Plan.....	10
Acte 1 : installer une référence commune autour de quelques critères nécessaires pour la suite.....	11
Scène 1. Première caractéristique : des traits droits.....	11
Scène 2. Deuxième caractéristique : enchaînement des traits droits par leurs extrémités.....	12
Scène 3. Troisième caractéristique : ligne « fermée » (ou forme « pleine »).....	12
Scène 4. Reprise de l'ensemble des caractéristiques pour définir un polygone de façon générale.....	13
Acte 2. Polygone ou non polygone, s'approprier les caractéristiques.....	14
Scène 1. S'approprier les caractéristiques par la pratique de formes langagières spécifiques.....	14
Scène 2. Construire des polygones. S'approprier les caractéristiques par la pratique de constructions.....	14
Scène 3. Validation des productions.....	15
Scène 4. Construction de polygones avec contrainte. Poursuivre l'appropriation des caractéristiques, données avec le vocabulaire spécifique : polygone, côté, sommet.....	16
Acte 3. D'un critère à une famille de formes, pratique de classement.....	17
PARTIE II – Savoirs et pratiques des polygones au cycle 3.....	19
Cycle 3 - Introduction	19
Cycle 3 - Plan	19
Acte 1. Polygone ou non polygone, rappeler les caractéristiques vues au cycle 2.....	21
Scène 1. Réactiver l'usage des caractéristiques par la pratique de formes langagières spécifiques.....	21
Scène 2. Formes langagières d'argumentation : les non polygones.....	23
Scène 3. Construction d'un univers de formes polygonales diversifiées,	23
Acte 2. Pratiques de construction : jeu sur les contraintes, étude des possibles.....	24
Scène 1. Contraintes de constructions pour s'approprier les critères et explorer un ensemble de solutions variées, non étiqueté.....	27
Scène 2. Contraintes de constructions pour explorer un ensemble de solutions « étiqueté ».....	31
Scène 3. Contraintes de constructions pour explorer des impossibilités de construction et basculer vers une tâche argumentative.....	34
Conclusion	34
Acte 3. Pratiques d'argumentation : possible, impossible ?.....	35
Triangle et angles droits.....	35
Quadrilatères et angles droits.....	42
Ce que nous retenons de cette activité :	44
Acte 4. Pratique de description argumentée : le jeu du portrait, trois versions pour engager les élèves dans du raisonnement.....	46
Scène 1. Description : jeu du portrait. Les formes, objets du questionnement.....	47

Scène 2. Jeu du portrait : argumentation du lien entre les questions pour l'avancée de la recherche.....	52
Scène 3. Argumenter de liens logiques entre les questions, pour l'avancée de la recherche.....	55
Acte 5. Pratiques de classement, tri : emboitements de familles.	60
Scène 1. classements divers, principe et règles du jeu	62
Scène 2. classements et emboîtements académiques	62
Acte 6. Pratiques de description : les fiches d'identité.....	70
Scène 1. Listing de propriétés	72
Scène 2. Propriétés caractéristiques	75
Conclusion	77
Annexes	78

Introduction générale

Le groupe IREM d'Angers est composé de Professeurs des écoles, de maîtres formateurs, de conseillers pédagogiques et d'un enseignant de l'Université de Nantes, exerçant en formation des enseignants sur le site d'Angers. Nous analysons ensemble des situations d'apprentissage, nous expérimentons dans les classes, nous confrontons nos points de vue sur les résultats observés. Cette recherche n'est pas une recherche au sens universitaire ni un mémoire de recherche. Bien que nos réflexions et analyses soient orientées par des choix théoriques, nous avons privilégié dans cette brochure une présentation focalisant sur des scénarii de classe à partir d'analyses didactiques étayées par les expérimentations menées au sein des classes des membres du groupe.

Cette brochure est destinée aux maîtres formateurs, conseillers pédagogiques et professeurs des écoles et se veut avant tout un outil de formation continue.

Après trois années consacrées à l'étude des problèmes pour chercher (2006 - 2009¹), nous nous sommes intéressés durant deux ans (2009-2011) à l'enseignement de la géométrie à l'école primaire. Ce choix résulte de constats faits depuis de nombreuses années dans les classes de l'école primaire mais aussi du collège : difficulté des élèves à mobiliser des connaissances en géométrie, difficulté à entrer dans cet exercice exigeant qu'est l'argumentation, la formulation d'une preuve, ...

Nous avons fait le choix de ne pas couvrir l'ensemble du programme de géométrie, mais de focaliser notre attention sur les savoirs et les pratiques spécifiques de l'étude des polygones. Cette thématique, nous permettait de poursuivre nos investigations sur les pratiques d'argumentation (travaillées dans la brochure précédente), tout en abordant un autre domaine (la géométrie), et répondre ainsi à une demande forte de nos collègues de pouvoir expliciter les enjeux de savoirs, objectifs d'apprentissages pour les élèves.

La rédaction de ce document n'est pas définitive, nous souhaitons en effet y inclure vos remarques, vos suggestions. De nombreuses animations pédagogiques seront cette année consacrées à la présentation de notre recherche et à des bilans après expérimentation en classe. Les enseignants pourront ainsi nous donner leur avis mais aussi nous fournir des productions d'élèves (en format pdf, en précisant école, cycle, niveau, acte et scène). Vos contributions à notre travail pourront se faire directement lors des animations pédagogiques ou bien aux adresses suivantes :

Paul-henri.delhumeau@univ-nantes.fr

Sophie.gobert@univ-nantes.fr

Le groupe IREM 1er degré d'Angers

¹ Brochure IREM « Problèmes pour chercher ».

Partie I - Savoirs et pratiques des polygones au cycle 2

Cycle 2 - Introduction

Proposition d'un scénario de travail au CP.

La description du scénario se fait par « Acte » et « Scène » de façon à bien repérer les « intrigues » relatives aux connaissances et savoirs en jeu. Nous proposons ensuite une progression en terme de séances.

Le scénario est basé sur **la variété** :

- des formes proposées aux élèves,
- des représentants aussi variés que possible de ce qu'est un polygone,
- des orientations des « images » (non prototypiques)
- des types de tâches : décrire, construire, reconnaître, trier, classer

L'objectif de la progression pour les élèves : apprendre à décrire, construire, reconnaître un polygone, à partir de ses trois caractéristiques : des segments, qui se touchent par leurs extrémités, formant une ligne fermée.

La démarche : « Faire des Mathématiques » consiste à chercher, à donner du sens, à débattre et argumenter, mais dans des moments de recherche et de débat bien définis par l'enseignant au vu des objectifs d'une séance. Ainsi, nous avons opté pour une prise de responsabilité assumée du côté de l'enseignant d'installer la référence commune² pour désigner les propriétés géométriques en jeu, et pour **l'ouverture des investigations des élèves** dans la réalisation des tâches proposées. Dans l'acte 1 par exemple, l'enseignant, à partir des conceptions des élèves, travaille à établir une référence commune en apportant des connaissances, il assume ce choix pour des raisons de temps, d'efficacité, de clarté, et de responsabilité. Il nous semble préférable à certains moments d'apporter clairement une connaissance lorsque la construction par les élèves de cette connaissance s'avère laborieuse et dessert la compréhension globale de l'activité.

Il est souhaitable d'aborder très tôt le concept de polygone, bien qu'il ne figure pas tel quel dans les programmes. Mais les mentions de connaissance du vocabulaire « côté, sommet », de tracé à la règle, de travail sur l'alignement, correspondent, entre autres choses, de manière implicite à l'étude des polygones. Il s'agit d'en cerner les caractéristiques et leurs usages pour faire faire de la géométrie aux élèves de l'école primaire. Le travail sur les formes géométriques au cycle 2 doit permettre également d'installer ces bases pour les apprentissages du cycle 3. Les expérimentations que nous avons menées de séances construites en amont des scénarios proposés ici, confirment la possibilité d'engager des

² Une dérive consisterait, selon nous, à vouloir absolument débattre de tout.

élèves de CP dans des pratiques d'appropriations de critères, par des tâches de formulation, de construction, de validation.

Le choix d'entrer dans l'étude par la généralité permet d'engager les élèves sur l'étude des propriétés géométriques et de ne pas en rester à une connaissance simplement « familière » de ces objets (matériels et symboliques). La présence, dans le matériel utilisé, d'une grande variété de polygones, pas seulement les formes usuelles, pas seulement à des tailles usuelles, pas seulement dans des orientations standard sur papier, ... concrétise ce choix dans les supports de classes. L'ouverture des investigations possibles des élèves dans les tâches de constructions, concrétise également ce choix dans la démarche de travail.

Proposition d'organisation en séance du scénario, à partir des expérimentations réalisées, considérant qu'une séance de travail en CP ou CE1 correspond à une durée de trente minutes environ.

S1	Acte 1 : scènes 1, 2.	
S2	Acte 1 : scènes 3, 4.	Institutionnalisation « polygones : les critères »
S3	Acte 2 : scènes 1, 2.	
S4	Acte 2 : scène 3, 4.	
S5	Acte 3.	

En évaluation on peut proposer aux élèves de reprendre :

- une tâche de construction de polygones avec contrainte. Par exemple : « construit plusieurs polygones avec cinq côtés », « construit deux polygones avec quatre côtés, de forme très différentes ».
- une tâche de formulation. Par exemple : « Cette forme (donnée avec un bord arrondi) n'est pas un polygone. Ecris une phrase pour dire pourquoi ce n'est pas un polygone », « Cette ligne (donnée ouverte par exemple) n'est pas un polygone. Ecris une phrase pour dire pourquoi ce n'est pas un polygone. »

Le scénario se structure en trois grandes parties indiquées ci-dessous.

Cycle 2 – Plan

Acte 1 : installer une référence commune autour de quelques critères nécessaires pour la suite.

- Scène 1. Première caractéristique : des traits droits.
- Scène 2. Deuxième caractéristique : enchaînement des traits droits par leurs extrémités.
- Poursuivre l'appropriation des caractéristiques, données avec le vocabulaire spécifique : polygone, côté, sommet.

Acte 2. Polygone ou non polygone, s'approprier les caractéristiques, par des pratiques de formulation et des pratiques de construction

- Scène 1. S'approprier les caractéristiques par la pratique de formes langagières spécifiques.
- Scène 2. Construire des polygones. S'approprier les caractéristiques par la pratique de constructions
- Scène 3. Validation des productions
- Scène 4. Construction de polygones avec contrainte

Acte 3. D'un critère à une famille de formes, pratique de classement.

Acte 1 : installer une référence commune autour de quelques critères nécessaires pour la suite.

Scène 1. Première caractéristique : des traits droits.

Dispositif : L'enseignant demande à plusieurs élèves de venir « tracer des traits droits » au tableau. La plupart d'entre eux sont horizontaux. Tout le monde est d'accord pour dire que ce sont effectivement des traits droits. L'enseignant considère alors un trait horizontal. Extrait de transcription d'un moment de classe en CP :

P. Le trait est-il droit ?

E. Oui.

P. Tout le monde est-il d'accord avec ça ? Pourquoi, est-il droit ?

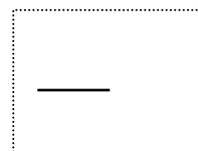
E. C'est bien appuyé.

P. Elle s'est bien appuyée, sur la règle. Est-ce que c'est la seule raison pour laquelle le trait est droit ?

Est-ce qu'il y a une autre raison ?

E : Ils restent silencieux et dubitatifs.

P. Donc il suffit, il suffit de bien s'appuyer sur la règle ?



L'enseignant dessine un trait droit non horizontal, les élèves sont partagés, certains disent « non, ce n'est pas un trait droit, il est penché », d'autres « oui, il est droit mais il est penché ».

P. Alors moi je vais tracer un trait et vous allez me dire s'il est droit. *Le maître trace avec la règle au tableau, un trait droit penché par rapport à l'horizontale.*

P. Est-ce que ce trait est droit ?

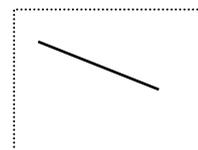
E. Non

P. Pourquoi il est n'est pas droit ?

E. ?

P. Parce qu'il est penché ?

E. Il n'est pas droit, mais il a appuyé sur la règle.



Les élèves associent explicitement le mot « droit » à « réalisé à la règle », et implicitement à « horizontal ». Le maître rend explicite ces deux aspects : un trait « droit » au sens géométrique, pas au sens de tous les jours, peut-être horizontal ou penché, la seule caractéristique du trait « droit » est d'être *réalisé à la règle*.

La rupture avec l'usage courant de l'expression « trait droit » se fait pour les élèves sur du long terme. Ce serait se leurrer de croire qu'une fois explicité cela par l'enseignant, tout devient clair pour les élèves. Mais le fait que cette explicitation soit posée comme référence participe d'une nécessité didactique de distinguer « les choses du monde familier » et « les choses du monde des formes géométriques ».

Le professeur demande à un élève de venir tracer un trait droit au sens qui vient d'être précisé. Paul vient tracer un trait droit, penché.

P. Celui qu'a fait Paul maintenant, est-ce qu'il est droit ?

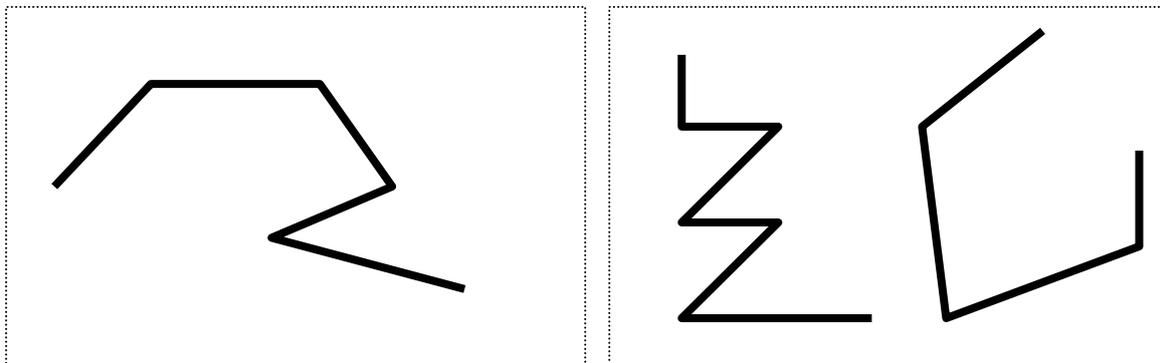
E. Oui

- P. Tout le monde est d'accord là-dessus ? Le trait peut-être penché et droit ? Droit, en géométrie, ça veut dire, tracé ...
- E. Bien.
- P. Bien ? Comment ça bien ? C'est-à-dire, bien ?
- E. C'est à dire qu'il peut être bien, même penché.
- P. Bien, même penché, mais qu'est-ce que ça veut dire bien ?
- E. Ça veut dire un trait qu'il est quand même bien et aussi qu'il est bien droit.

Ces difficultés concernant l'orientation des figures se retrouvent plus tard au cycle 3, le carré est un carré pour beaucoup d'élèves s'il est « bien droit », sinon, c'est un losange. Il nous semble important dès le CP de préciser que l'orientation n'a aucune incidence sur les propriétés des tracés des formes géométriques. Cela se perçoit bien pour les élèves quand ils manipulent des gabarits de formes (objets spatiaux très peu épais), mais disparaît quand on travaille sur des tracés, fixes et orientés par rapport au support.

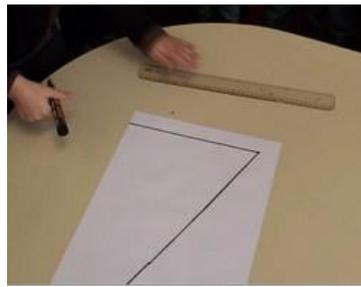
Scène 2. Deuxième caractéristique : enchaînement des traits droits par leurs extrémités.

Dispositif : les élèves sont répartis autour d'une table où se trouve sur une feuille unie avec le dessin d'un trait droit ; il s'agit de tracer un autre trait droit, les deux se touchant par une extrémité, « le bout ». Il s'agit en fait de prolonger le premier segment par un second, mais pas dans la même direction. Et ainsi de suite de sorte à obtenir une ligne brisée.



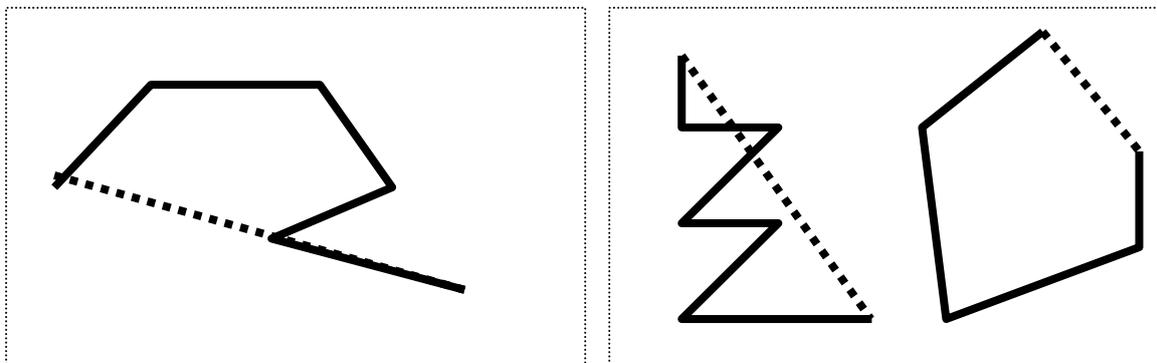
Scène 3. Troisième caractéristique : ligne « fermée » (ou forme « pleine »)

L'enseignant ajoute à la consigne la contrainte de fermeture de la ligne : « tracer un trait droit qui touche l'autre trait par le bout, comme précédemment, mais après plusieurs tracés de traits, on doit revenir au point de départ, et fermer la ligne, pour avoir une forme. »



Certains élèves sont tentés de tracer peu de segments et donc d'aboutir uniquement à des triangles ou des quadrilatères, comme sur la suite de photos ci-dessus.

En repartant des productions de lignes brisées des élèves (épisode précédent) l'intérêt est de visualiser que fermer une ligne brisée ne donne pas toujours une forme, quand le dernier segment vient couper les autres. On peut avoir une forme pleine, ou plusieurs, on peut aussi avoir des un côté caché par le dernier trait (comme ci-dessous à gauche), on peut avoir des formes ambiguës, ...



Ensuite, l'enseignant ayant séparé les formes pleines des autres indique que toutes celles-là, qui sont construites avec des traits droits, qui se touchent par les extrémités, et qui forment une ligne fermée, s'appellent en géométrie des polygones.

« Les formes que nous avons construites ici s'appellent des polygones »

Scène 4. Reprise de l'ensemble des caractéristiques pour définir un polygone de façon générale.

L'enseignant rappelle ensuite les trois caractéristiques d'un polygone, formulant ainsi un « texte » à partir du général, et non plus seulement comme l'étiquette de l'ensemble restreint des formes construites en situation par les élèves.

« Un polygone est une forme géométrique qui a trois propriétés caractéristiques : c'est une forme construite par une suite des traits droits qui se touchent par leurs extrémités et qui se referme. »

L'enseignant n'introduit pas pour le moment le vocabulaire côté et sommet, pour ne pas alourdir le texte, mais surtout parce qu'il préfère attendre une mise en situation appropriée pour le faire.

Acte 2. Polygone ou non polygone, s'appropriier les caractéristiques.

Scène 1. S'appropriier les caractéristiques par la pratique de formes langagières spécifiques.

Dispositif : L'enseignant propose de nombreuses figures (cf Annexes 1) affichées au tableau. Les élèves doivent, chacun leur tour, trier ces formes en deux catégories, polygones ou non polygones, en expliquant leur choix. Si un au moins des critères n'est pas vérifié, ce n'est pas un polygone ; si tous les critères sont vérifiés, c'est un polygone.

C'est un moment de travail langagier, où il s'agit d'installer des formes langagières spécifiques de la géométrie et c'est une esquisse de travail sur l'argumentation.

« Cette forme n'est pas un polygone parce qu'elle a un bord arrondi (donc non droit) », « cette ligne de traits droits n'est pas fermée, donc ce n'est pas un polygone », ...

Il semble dans un premier temps plus aisé d'identifier un non polygone et d'énoncer la caractéristique manquante que de justifier qu'une figure est un polygone en vérifiant les trois propriétés.

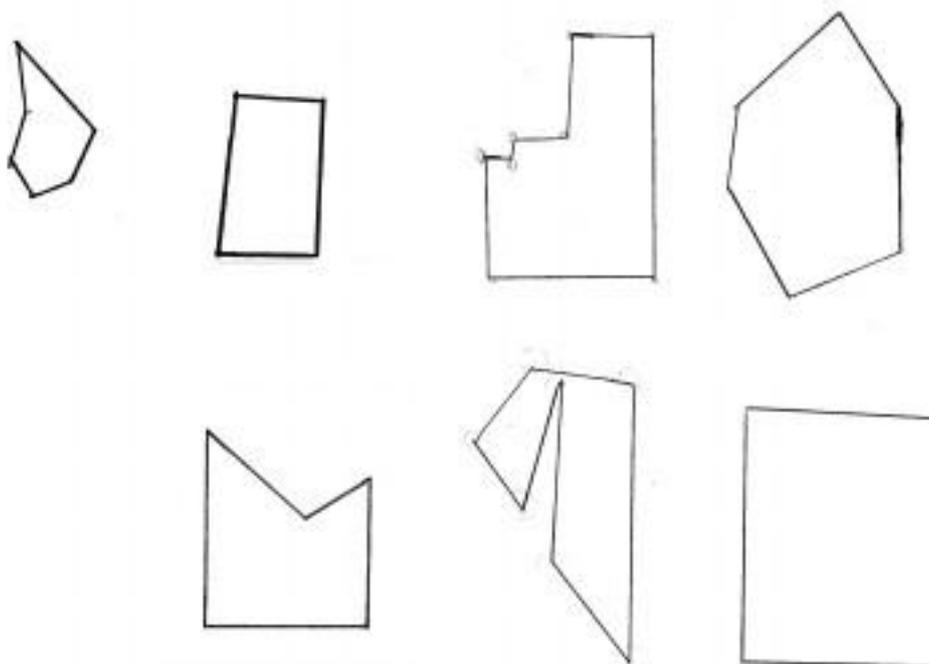
Parmi les polygones proposés, il n'y a pas de quadrilatère particulier (carré, rectangle, losange, parallélogramme) l'intérêt de la tâche n'étant plus alors assuré. C'est la présence de formes très diverses, possédant des propriétés géométriques autres (concavité, convexité, formes croisées, ...) qui rend intéressant ici le travail de formulation.

Scène 2. Construire des polygones. S'appropriier les caractéristiques par la pratique de constructions

Dispositif : les élèves, répartis en binômes, doivent construire un (ou plusieurs) polygones (en grand format sur des feuilles A3 de manière à rendre visible à toute la classe lors d'une mise en commun des productions et de leur validation dans la séance ultérieure).

L'intérêt ici est de mettre en fonctionnement les critères dans l'action, production d'une construction, et non plus dans la production d'une formulation comme précédemment.

Exemples de productions d'élèves.



Scène 3. Validation des productions

Rappel par les élèves des caractéristiques du polygone.

Les dessins, construits par les élèves précédemment, sont proposés à la classe, qui valide ou non chaque production en justifiant par l'usage des critères : « c'est un polygone car ... » ou « ce n'est pas un polygone car ... ». Par exemple, une ligne brisée non fermée ne sera pas conforme à la définition de référence.

Quelques productions, bien que rigoureuses sur le plan des critères, ne sont pas suffisamment précises du point de vue du tracé : des traits pas tout à fait droits, des liaisons un peu arrondies entre deux segments consécutifs, ou la deuxième production de la deuxième ligne ci-dessus qui présente un sommet très proche d'un côté faisant presque apparaître deux formes différentes. Ces productions « ambiguës » ou « imprécises du point de vue du tracé » ne sont pas retenues³.

L'enseignant à l'issue de cette phase introduit un vocabulaire spécifique de géométrie à partir des productions des élèves et de leur formulation : un « trait droit » (ou segment) est appelé un « côté » du polygone, une « pointe » (l'extrémité commune de deux traits se joignant) est appelé un « sommet » du polygone.

L'enseignant engage ensuite les élèves à dénombrer les côtés et les sommets des polygones construits, et note près de la production accrochée au tableau « Ce polygone a quatre côtés et quatre sommets », « Ce polygone a six côtés », « Voici un polygone avec cinq sommets », ...

L'intérêt de travailler sur les productions des élèves présentant en général des variétés intéressantes est de révéler certaines questions : par exemple est-ce que « la pointe » qui

³ Cependant il faudra être vigilant à bien instaurer que c'est le critère de précision du tracé qui est retenu ici, et que dans d'autres occasions où l'on aura besoin de faire des tracés à main levée (pour se représenter rapidement un polygone, pour schématiser une forme, ...) alors ces considérations n'auront pas lieu d'être.

fait un creux (zone de concavité) (premier polygone de la deuxième ligne ci-dessus) est-elle aussi appelé un sommet ? Oui, mais cela est en général non perçu par les élèves qui ont tendance à associer sommet aux zones de convexité.

Scène 4. Construction de polygones avec contrainte. Poursuivre l'appropriation des caractéristiques, données avec le vocabulaire spécifique : polygone, côté, sommet.

Dispositif : les élèves, répartis en binômes, doivent construire un polygone ayant un nombre défini de côtés ou bien un nombre défini de sommets

La tâche n'est pas simple notamment si le bon de commande indique un nombre important de sommets (sept sommets par exemple), en effet, il faut anticiper sur la position des sommets pour qu'il soit possible de rejoindre le premier sans avoir à traverser les côtés, le polygone n'étant pas croisé. Cela permet ainsi de remettre les élèves en action sur les premières tâches de l'acte 1, en considérant l'ensemble des paramètres et des expériences de l'acte 2.

Il semble que les élèves considèrent en priorité le nombre de côtés pour effectuer leur tracé à partir d'une contrainte sur le nombre de sommets. Il est intéressant alors de repérer avec eux l'égalité nombre de sommets / nombre de côtés.

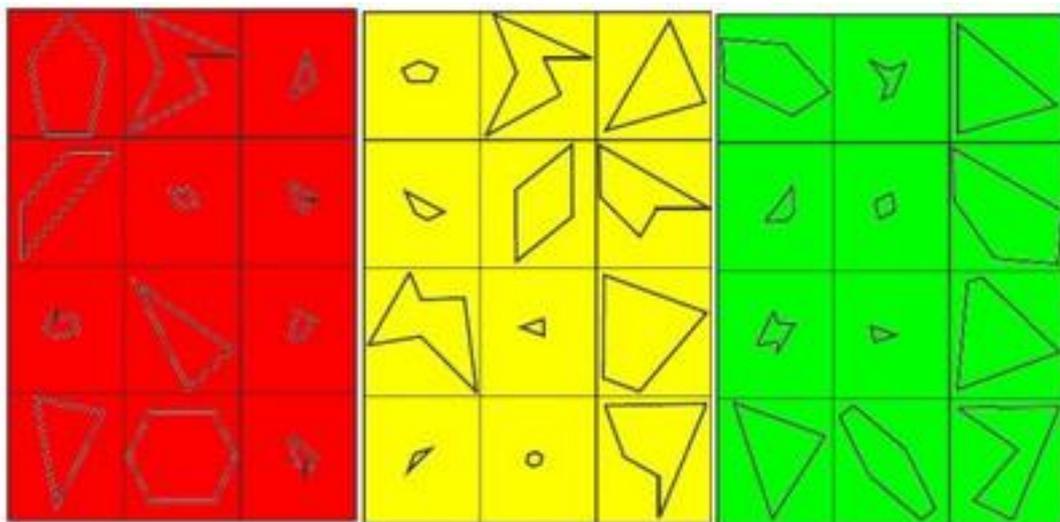
A la fin de cette phase, chaque binôme vient présenter sa (ou ses) productions que la classe valide (ou pas) : les formes sont-elles conformes aux propriétés géométriques indiquées dans le bon de commande ? C'est l'occasion de rappeler à nouveau les caractéristiques de ce qu'on appelle polygone en géométrie.

L'enseignant a préparé quelques productions contre-exemple, au cas où elles n'apparaîtraient pas dans les productions des élèves (sommets « arrondis », ligne ouverte, formes croisées, ...).

Acte 3. D'un critère à une famille de formes, pratique de classement.

Rappels sur les polygones et le vocabulaire côté et sommet

Dispositif : les élèves, répartis en binômes, disposent d'un grand nombre d'étiquettes sur lesquelles figurent des polygones petits, moyens, grands, rouges, verts, jaunes, ayant trois, quatre, cinq côtés. Voici le matériel (format réduit) en planche, que l'enseignant a recoupé en étiquettes.



La consigne est : « Vous mettez ensemble ceux qui vont ensemble (qui pourraient former une même famille)».

Cette consigne très ouverte permet des classements selon des critères comme, par exemple : la grandeur, la couleur, le nombre de côtés. Le choix d'un critère permet d'obtenir des familles, les éléments de cette famille ayant alors un point commun mais également des différences : à l'intérieur de la famille des formes à quatre côtés par exemple, il y a des formes de taille grande, petite, ou moyenne, ce qui permet alors de considérer des sous-familles (par exemple les formes à quatre côtés de taille moyenne), qui elles-mêmes peuvent se décomposer en d'autres sous-familles.

L'intérêt est de voir les classifications comme des emboitements et non pas, comme c'est souvent le cas, comme des juxtapositions. L'objectif de l'enseignant est de travailler sur la notion de propriété commune à un ensemble d'objet, et de montrer les variétés de classements possibles en fonctions des propriétés considérées.

Le travail des séances précédentes sur les polygones incite en général les élèves à classer les polygones selon le critère du nombre de côtés. Mais d'autres classements apparaissent, par couleur ou par taille. Le travail de formulation porte ici surtout sur le caractère commun d'une famille et de sous familles possibles.

P. Dans cette famille, qu'ont-ils de commun ?

E. Ils sont tous verts.

P. Et à l'intérieur de la famille des verts, sont-ils tous pareils ?

E. non, il y a des grands, des moyens, des petits

E. Il y a des 3 côtés, des 4 côtés, des 5 côtés.

Concernant les autres classements les mêmes questions sont posées : qu'y-a-t-il de commun dans chaque famille, quelles sont les différences entre les éléments de telle famille pour arriver à nouveau à des classements en plusieurs étapes (familles et sous-familles).

Pour les classements réalisés à partir du critère « nombre de côté », l'enseignant indique qu'il existe des noms pour les familles de polygones : triangle pour la famille des polygones à trois côtés, quadrilatères pour la famille des polygones à quatre côtés, ...

Concernant les triangles, pour les élèves, le mot et le concept de triangle ne sont pas nouveaux, ils identifient et nomment assez rapidement cette forme dès le début de cette séquence, mais la visée de ces situations est de replacer la notion de triangle d'un point de vue géométrique (et non du point de vue d'une forme familière). Les triangles possèdent certaines propriétés qui le caractérisent (le spécifient) dans cet univers plus général des formes géométriques planes.

Le critère du nombre de coté est une propriété des polygones, d'autres propriétés seront construites ultérieurement à l'occasion de nouvelles progressions, comme celles de « côtés à angle droit » et « côtés de même longueur », relevant du programme de cycle 2, ou « côtés parallèles » pour le programme de cycle 3.

PARTIE II – Savoirs et pratiques des polygones au cycle 3

Cycle 3 - Introduction

Bien que la notion de polygone ne soit pas explicitement au programme, elle constitue le meilleur terrain pour travailler les propriétés géométriques au programme du cycle 3, et les pratiques afférentes (construction, description, argumentation, ...).

Nous avons fait les mêmes choix pour le cycle 3 que pour le cycle 2 : travailler sur la généralité, structurer les apprentissages à partir des pratiques, et développer les pratiques d'argumentation.

Cycle 3 - Plan

Acte 1 : Installer ou rappeler une référence commune autour de l'univers des polygones

- Scène 1. Rappel des caractéristiques d'un polygone.
- Scène 2. Formes langagières d'argumentation : les non polygones.
- Scène 3. Construction d'un univers de formes polygonales diversifiées.

Acte 2. Pratiques de construction : jeu sur les contraintes.

- Scène 1. Des contraintes de constructions pour s'approprier les critères. Explorer un ensemble de solutions larges et variées.
- Scène 2. Des contraintes de constructions pour s'approprier des propriétés caractéristiques de formes spécifiques. Explorer un ensemble de solutions restreint à un type de formes standardisées.
- Scène 3. Des contraintes de constructions pour entrer dans une démarche d'argumentation. Explorer l'impossibilité de solution.

Acte 3. Pratiques d'argumentation : possible, impossible ?

- Scène 1 : construction possible, une figure suffit à argumenter de la possibilité, plusieurs c'est mieux.
- Scène 2 : construction impossible, nécessité d'un recours à des arguments de nature géométrique.

Acte 4. Pratiques de description argumentée : le jeu du portrait, trois versions pour engager les élèves dans du raisonnement.

- Scène 1. Description : Jeu du portrait : les formes objets du questionnement.
- Scène 2. Jeu du portrait : argumentation du lien entre les questions pour l'avancée de la recherche.
- Scène 3. Argumenter de liens logiques entre les questions, pour l'avancée de la recherche.

Acte 5 : Pratiques de description : classer, trier, emboîter.

- Scène 1 : classements divers, principe et règles du jeu
- Scène 2 : classements académiques, et étiquetage de familles emblématiques.

Acte 6. Pratique de description : les fiches d'identités.

- Scène 1 : Quelles peuvent être les propriétés géométriques associées à une forme ? Listing de propriétés d'une forme.
- Scène 2 : quelles peuvent être les formes associées à une (ou des) propriété(s) géométrique(s) ? Propriétés caractéristiques d'une forme.

Acte 1. Polygone ou non polygone, rappeler les caractéristiques vues au cycle 2.

Scène 1. Réactiver l'usage des caractéristiques par la pratique de formes langagières spécifiques.

Dans l'univers des formes géométriques planes (en tant que surface), les polygones ont ceci de particulier qu'ils sont délimités par des bords droits. D'un point de vue plus linéaire (en termes de ligne) ils sont alors des lignes fermées « brisées », c'est-à-dire une suite de segments droits formant une ligne fermée. En termes de ligne, les trois critères : rectitude des bords, suite de segments, et fermeture de la ligne constituent les propriétés caractéristiques des polygones. Une forme vérifiant ces trois conditions est un polygone, et si une forme ne possède pas l'une au moins de ces propriétés, ce n'est pas un polygone.

Nous choisissons de faire entrer les élèves dans une pratique langagière spécifique de cette forme de caractérisation d'un objet mathématique, en assumant de rappeler au départ une définition des polygones (en s'appuyant sur les formulations des élèves, ce qu'ils auraient mémorisés, ...) mais en assumant de donner ensuite ce qui peut faire office d'une référence commune au sein de la classe.

Extrait d'une réalisation.

Le tableau est scindé en 2 colonnes avec titres : polygones / non polygones. L'enseignant dispose de formes dessinées sur des étiquettes mobiles, qu'il s'agit de classer dans l'une ou l'autre colonne.

L'enseignant affiche quelques figures dans chaque colonne en énonçant s'il s'agit ou non d'un polygone, et en indiquant que le but du jeu est de rappeler les caractéristiques d'un polygone en géométrie, caractéristiques vues les années précédentes. Un polygone est une surface délimitée (définie, construite) par une suite de traits droits (des segments), traits qui se touchent par leurs extrémités, et l'ensemble forme une ligne fermée.

Ces propriétés sont écrites ou bien au début en rappel, ou bien au fur et à mesure des précisions apportées pour le tri, puisque l'enseignant demande aux élèves de justifier à chaque fois par l'usage d'une forme langagière typique que telle forme est ou n'est pas un polygone.

Une forme n'est pas un polygone si elle ne vérifie pas au moins une des trois propriétés (bords droits, ligne fermée, points communs des côtés en leurs extrémités). Une forme est un polygone si elle vérifie les trois propriétés simultanément.

La forme est un polygone. Un élève la place dans la colonne polygone.

P. Pourquoi c'est un polygone ?

E1. *Pas de réponse puis, montrant l'exemple donné par le maître dans la colonne non polygone : celui là, il manque un côté.*

P. Ce que dit Quentin, comment on pourrait le dire ?

E2. Y'a un trou.

Faute de pouvoir formuler toutes les caractéristiques du polygone, les élèves précisent une condition pour laquelle une figure n'est pas un polygone, en formulant (formulation approximative) pour cela l'une des trois caractéristiques. Ils ne répondent pas à la question posée.

La forme 2 n'est pas un polygone, elle possède un bord arrondi.

L'élève place bien la figure dans la colonne des non polygones

E3. Parce qu'il a un arc de cercle, c'est pas droit.

P. Une autre propriété est en effet que tous les bords soient droits.

La justification est claire, une première caractéristique est énoncée.

Pour la forme 3, certains segments ont leurs extrémités à l'intérieur d'un autre segment.

L'élève 4 place la figure dans la colonne des polygones « les traits sont droits ».

P. Qu'en pensent les autres ?

E. Non parce qu'il y a des traits qui dépassent.

Une seconde caractéristique est énoncée.

La forme 4 est une ligne brisée non fermée.

Elève 6 : ce n'est pas un polygone parce que ça ne se ferme pas.

Une troisième caractéristique est formulée.

Les deux tâches ne sont pas de difficulté égale, il est plus difficile de justifier qu'une figure est un polygone que de justifier qu'une figure n'est pas un polygone. Lors de l'expérimentation, les trois caractéristiques ayant été formulées, il aura fallu attendre la treizième forme pour qu'une élève justifie qu'une figure est un polygone en les énonçant toutes les trois. Il semble en conséquence judicieux de proposer dans un premier temps des non polygones afin de formuler au fur et à mesure les caractéristiques.

Le maître clôt cette phase en réécrivant les 3 caractéristiques, constituant alors le texte de référence de définition d'un polygone.

Le texte de référence peut se constituer au fur et à mesure comme dans l'extrait précédent, ou bien être redonné par les maîtres dès le début de la séance. Du point de vue de la construction du savoir cela revient au même puisque c'est l'enseignant qui valide et fixe le texte commun. Par contre, du point de vue de l'implication des élèves ou de la prise d'information par l'enseignant des conceptions initiales des élèves c'est différent. Les élèves ont à rechercher en mémoire des connaissances anciennes. Pour préciser alors les différents statuts des énoncés produits (par les élèves ou par le maître), il nous semble alors intéressant de bien dissocier trois temps dans cette phase de rappel :

- Le jeu question-réponse, les élèves s'y engagent avec leur mémoire, les énoncés sont validés arbitrairement par le maître.
- Le maître reprend les caractéristiques formulées, indiquent qu'en effet elles correspondent aux textes de savoir que l'on trouve dans les manuels et textes de mathématiques. Il instaure ainsi un texte qui se décontextualise des productions individuelles des élèves, et fera référence pour tous au sein de la classe.
- Le jeu question réponse est repris, avec la contrainte d'utiliser le texte de référence et les formes langagières spécifiques de l'argumentation et de la logique mathématique : une forme n'est pas un polygone si une propriété au moins n'est pas vérifiée, une forme est un polygone si elle vérifie les trois propriétés.

Scène 2. Formes langagières d'argumentation : les non polygones.

Cf. Partie I. Acte 2, scène 1.

Scène 3. Construction d'un univers de formes polygonales diversifiées, ...

Cf. Partie I. Acte 2, scène 2, scène 3, scène 4.

Acte 2. Pratiques de construction : jeu sur les contraintes, étude des possibles.

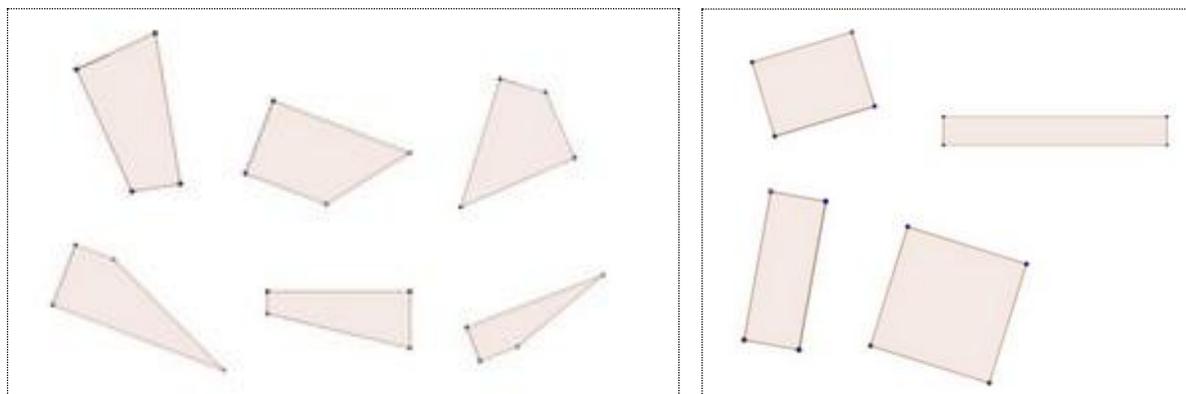
Dans la première partie de la brochure consacrée plus particulièrement au cycle 2, nous avons eu l'occasion de présenter quelques propositions de tâches de construction de polygones avec des contraintes relatives à certaines propriétés (Partie I, Acte 2, scène 2). Dans cette partie ci, nous rendons compte du même type de tâche, adapté au cycle 3 en fonction des propriétés géométriques et des nouveaux systèmes d'instruments travaillés dans ce cycle de la scolarité primaire. Redonnons quelques repères :

	CP	CE1	CE2	CM1	CM2
Propriétés mentionnées dans les programmes 2008.		Angle droit Egalité de longueurs		Parallélisme	
Proposition IREM	Nombre de côtés	Angle droit	Egalité de longueurs Reprise Angle droit	Parallélisme	Reprises

De nos propositions pour le cycle 2 nous reprenons par ailleurs la distinction entre trois types de contraintes permettant des apprentissages de nature différente :

- des contraintes telles que l'ensemble des formes possibles ne correspondent pas à une famille usuelle de polygones ;
- des contraintes telles que les formes obtenues constituent une famille de formes usuelles de la géométrie élémentaire ;
- des contraintes telles que les constructions soient impossibles.

Ci-dessous un exemple de formes obtenues avec les contraintes « quadrilatères avec deux angles droits » et « quadrilatères avec quatre angles droits », où dans le premier cas l'ensemble des formes possibles n'est pas un ensemble étiqueté dans les familles de polygones usuelles⁴, tandis que dans le second l'est (l'ensemble obtenu correspond à la famille des rectangles⁵).



⁴ Bien que les élèves ne pensent souvent qu'aux quadrilatères trapèzes rectangles pour ce genre de formes.

⁵ Où l'on voit alors que les carrés font partis des rectangles, et qu'ils sont donc des rectangles particuliers.

Le premier type de contraintes permet de faire travailler les élèves sur les propriétés géométriques en lien avec les systèmes instruments associés, et de développer la notion de famille de formes, indépendamment de l'allure générale de ces formes. En effet, plusieurs formes possédant une même propriété peuvent avoir des allures très différentes. Ainsi, par exemple, construire des pentagones ayant un angle droit, ou deux, permet aux élèves de se familiariser, réinvestir ou apprendre, avec l'usage d'instruments associés à la notion d'angle droit, tout en aboutissant sur une très grande variété de productions.

Le second type de contraintes donne un ensemble de formes solutions également diverses du point de vue de l'allure générale, mais suffisamment proches pour pouvoir étiqueter l'ensemble des formes. Par exemple, construire des quadrilatères avec tous les côtés de la même longueur, aboutira à l'ensemble de formes communément appelé « les losanges » (dont les carrés sont des cas particuliers).

Le troisième type de contrainte correspond à des constructions impossibles, et permet de basculer d'une tâche de construction à une tâche d'argumentation, pour justifier avec des arguments géométriques de l'impossibilité de la construction. Par exemple, construire un quadrilatère avec cinq angles droits donne un ensemble vide de solutions.

Dans le tableau ci-dessous, nous avons listé un certain nombre de contraintes possibles, en les classant selon cette distinction et selon les propriétés géométriques qu'elles font intervenir.

Ensemble des solutions : des familles générales.	Ensemble des solutions : des familles particulières « étiquetées ».	Ensemble des solutions : vide.
Contrainte sur le nombre de côtés		
- Polygone à N côtés (ou sommets). - Polygones à quatre côtés ⁶ .	- Polygone à trois côtés.	- Polygones à deux côtés. - Polygone à cinq côtés et trois sommets.
Contrainte sur la présence d'angle droit		
- Polygone à cinq côtés (ou plus) et un ou deux angles droits. - Polygone à quatre côtés avec un angle droit. - Polygone à quatre côtés et deux angles droits.	- Polygone à quatre côtés et quatre angles droits, « les rectangles »	- Polygone à quatre côtés et trois angles droits seulement. - Polygone à trois côtés et deux angles droits.
Contraintes relatives à la famille des triangles et de ses sous-familles		
	- Polygone avec trois côtés, « les triangles ». - Triangles avec un angle droit, « les triangles rectangles ». - Triangles avec trois côtés de même longueur, « les triangles équilatéraux ». - Triangles avec deux côtés de même longueur, « les triangles isocèles ». - Triangles avec un angle droit et deux côtés de même longueur, « les triangles rectangles isocèles ».	- Triangles avec deux angles droits. - Triangles avec un angle droit et trois côtés de même longueur.
Contraintes sur des côtés de même longueur.		
- Quadrilatères avec deux côtés de même longueur. - Quadrilatères avec trois côtés de même longueur. - Pentagones avec trois (ou quatre) côtés de même longueur.	- Quadrilatères avec quatre côtés de même longueur, « les losanges ».	
Contraintes sur des côtés parallèles.		
- Polygones à cinq côtés (ou plus) avec deux côtés parallèles. - Quadrilatères avec deux côtés parallèles ⁷ .	- Quadrilatères avec côtés parallèles deux à deux, « les parallélogrammes ».	- Quadrilatères avec trois côtés parallèles.

- Remarques sur des précisions langagières.

Pour rédiger un bon de commande, il convient d'être très précis si nous souhaitons que les élèves le soient. Une commande formulée ainsi « un quadrilatère qui a deux côtés égaux » peut être comprise de deux façons :

- un carré par exemple a deux côtés égaux ; dans ce cas, il faut comprendre le « deux côtés

⁶ Volontairement placés dans cette colonne pour aller contre l'association courante d'un polygone à quatre côtés avec des polygones particuliers (losange, rectangles, carrés, parallélogrammes).

⁷ En fait, cet ensemble constitue une famille étiquetée également « les trapèzes ». Nous la plaçons ici dans la colonne des familles non étiquetées dans la mesure où les trapèzes ne constituent par spécialement une famille étudiée en tant que telle à l'école primaire.

égaux » comme « *au moins* deux côtés égaux ».

- on peut aussi comprendre le « deux côtés égaux » comme « *exactement* deux côtés égaux, ni moins, ni plus ». Dans ce cas, le carré ne convient pas car il a exactement quatre côtés égaux.

Dans les expérimentations menées en classe, nous avons fait le second choix, en l'explicitant à la fois dans le moment de passation de consigne auprès des élèves et dans l'écriture de la contrainte. Un bon de commande est alors formulé ainsi « construire un polygone à trois côtés avec *exactement* deux côtés égaux » ; nous attendons donc un triangle isocèle qui ne soit pas un triangle équilatéral. Nous avons constaté que les élèves associent parfois le mot « exactement » avec une contrainte sur la précision du tracé : il faudrait que les côtés soient exactement égaux. C'est pourquoi il est important de prendre du temps pour clarifier avec les élèves la signification choisie.

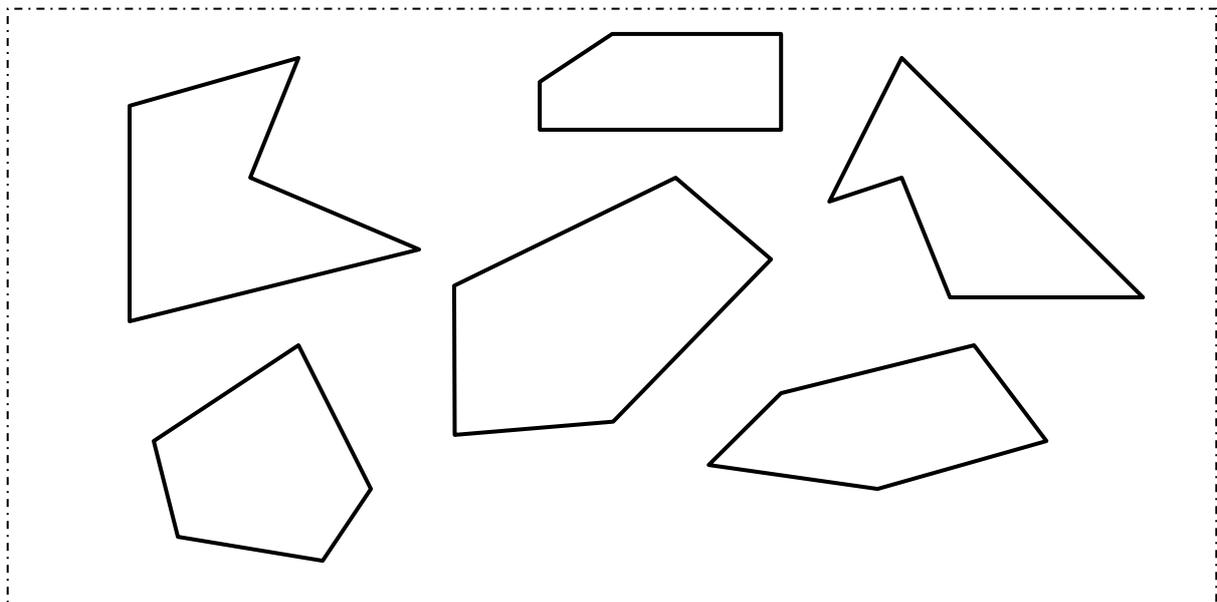
Les paragraphes suivants rendent compte des expérimentations menées dans une classe de CM1-CM2 : choix des enseignants, productions d'élèves, et éléments d'analyses, sont structurés selon ces trois types de conditions.

Scène 1. Contraintes de constructions pour s'appropriier les critères et explorer un ensemble de solutions variées, non étiqueté.

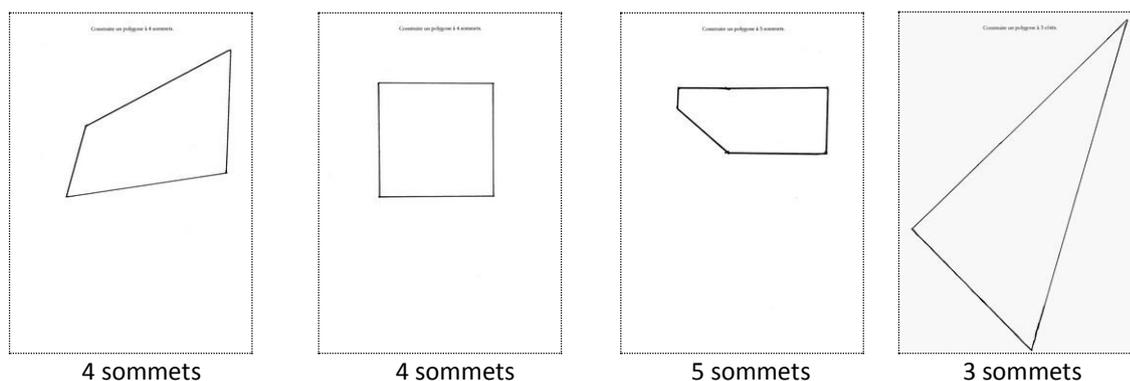
- **Un polygone et nombre de côtés (ou nombre de sommets)**

D'une manière générale, rappelons que l'objectif est ici de s'appropriier ou se réappropriier la critère « nombre de côtés », d'utiliser un instrument adapté à la rectitude des côtés, et d'envisager qu'une propriété géométrique permet de générer un ensemble très large de solutions possibles en termes d'allure générale perceptive.

Exemples d'une variété de formes que l'on peut obtenir avec la contrainte « polygone avec cinq côtés ».



Dans notre expérimentation, les élèves, repartis en binômes, doivent construire un polygone conforme à un bon de commande qu'ils reçoivent : « construire un polygone à quatre sommets » ou « construire un polygone à quatre côtés », « construire un polygone à cinq côtés », « construire un polygone à trois côtés ». Nous constatons que les productions des élèves sont très standardisées selon les formes courantes : trapèze, rectangle, carré, triangle rectangle. Nous notons également que l'orientation des figures est très particulière, les côtés sont souvent parallèles au bord de la feuille.



Les réponses sont correctes, et elles seront validées par la classe mais elles sont, à notre avis représentatives d'une conception assez restreinte de ce qu'est un polygone étant donné son nombre de côtés. Ce sont essentiellement des cas particuliers.

Or, le problème des cas particuliers est le suivant : bien qu'ils possèdent en effet la propriété demandée, ils possèdent également bien d'autres propriétés qui les rendent si particuliers au regard de l'univers des solutions possibles, qu'ils ne permettent pas de construire cet univers.

Trois pistes nous paraissent alors intéressantes à suivre pour rompre avec l'habitude et entrer dans une recherche de généralité :

- La rédaction du bon de commande doit spécifier la construction de *plusieurs* polygones possédant les propriétés, et ayant des allures assez différentes. Si l'on demande un seul polygone, l'élève produit celui qui lui vient en tête le plus familier et ne cherche pas à ouvrir son imagination sur d'autres types de formes. L'enseignant a un rôle important à jouer pour relancer la recherche des élèves.

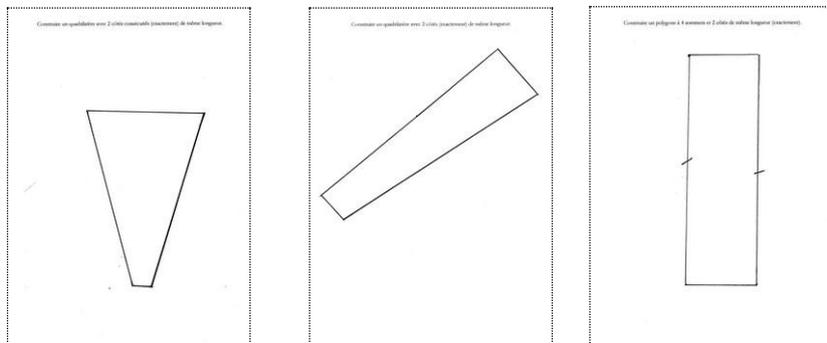
- L'utilisation de logiciels de géométrie dynamique par l'enseignant, dans la phase de passation de consigne peut également être intéressante pour clarifier le contrat de travail. En effet l'usage d'un tel instrument permet de générer une infinité de dessins possibles à partir d'une même propriété de formes. Par exemple, en ayant construit un polygone à partir de quatre points, le déplacement des points donne à voir des formes d'allure générale très différente⁸.

- Le choix des premiers bons de commande, s'ils portent sur des propriétés non usuelles permettent de générer chez les élèves des productions non usuelles. Par exemple, demander de construire des polygones à cinq, six, ou sept côtés est plus judicieux que

⁸ Et même des quadrilatères croisés. Ce peut être l'occasion d'indiquer qu'en effet les polygones croisés sont bien des polygones, mais qu'à l'école primaire (et au collège) on ne travaille qu'avec des polygones non croisés, et qu'on associe alors le terme polygone à polygone non croisé.

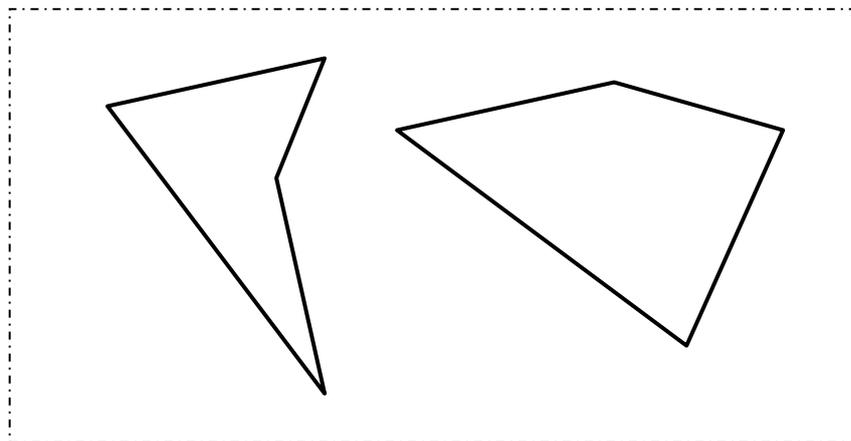
demander de construire des polygones à quatre ou trois côtés. Cela permet d'installer un contrat de recherche *de généralité*.

- **Quadrilatères et deux côtés de même longueur**



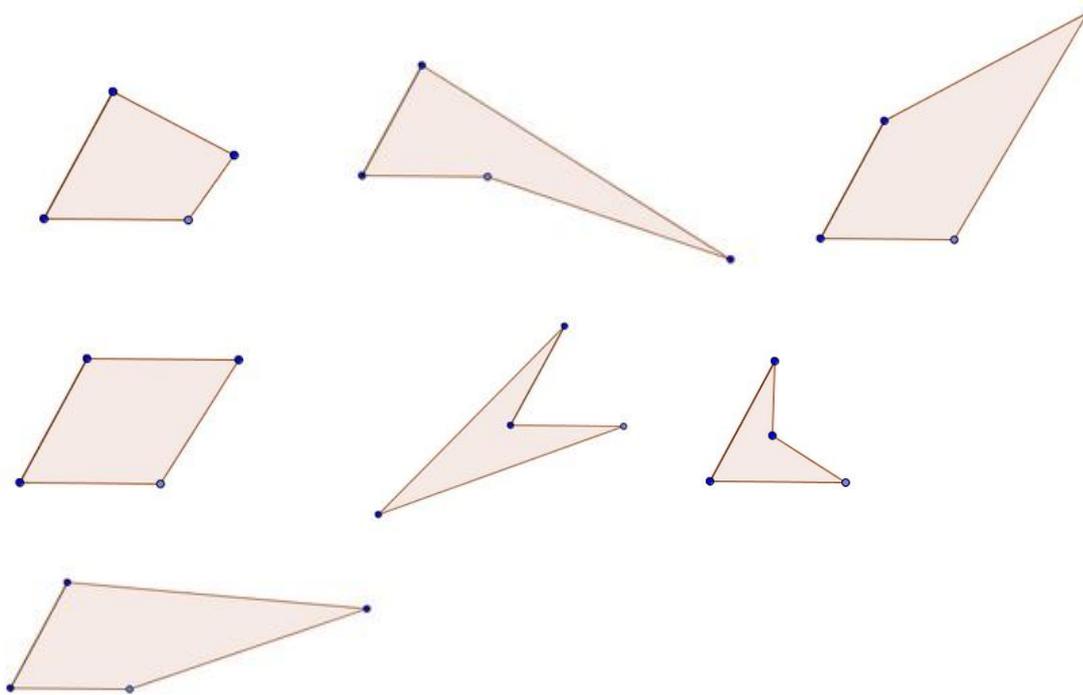
Construire un polygone à quatre sommets et deux côtés de même longueur (exactement).

Nous avons constaté que les élèves considèrent souvent les deux cotés de même longueur dans le cas de deux côtés opposés, et non comme deux côtés consécutifs. Par ailleurs ces deux côtés opposés sont relativement symétriques par rapport à l'allure générale du dessin. Il est en effet assez difficile de ne pas produire un trapèze isocèle, car les effets d'optique sont tels qu'on a du mal à reconnaître les égalités de longueur quand les orientations des segments sont trop différentes par rapport à un axe de la feuille, comme sur les deux images ci-dessous.

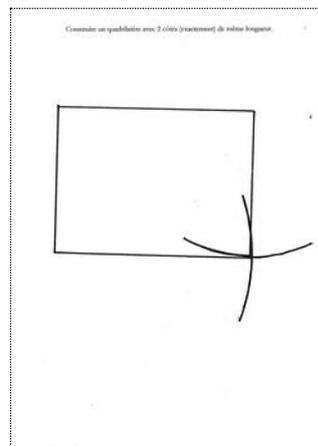


Par contre, le choix complémentaire de deux côtés consécutifs de même longueur, permet de générer des dessins d'allure très différentes comme ci-dessous⁹.

⁹ Images construites avec le logiciel libre « geogebra », logiciel de géométrie dynamique. Nous avons construit une seule forme et obtenu ces différentes images par la mise en mouvement d'un seul des quatre sommets.



Notons également la production ci-dessous où l'élève a compris la commande de « deux côtés de même longueur » comme chacune des longueurs devant être reproduite deux fois.

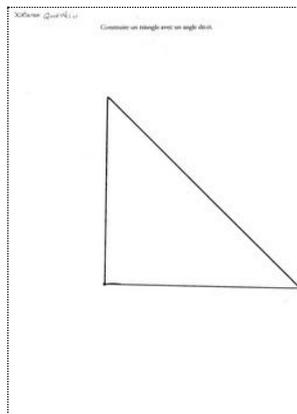


Construire un quadrilatère avec deux côtés exactement de même longueur.

L'intérêt d'une telle production (au sein d'une classe) est évidemment de faire apparaître la présence d'une autre propriété avec celle demandée qui ne répond pas à la contrainte du « exactement », mais aussi de faire remarquer l'usage du compas comme moyen de reporter une longueur. Nous n'avons pas détaillé les aspects relatifs à l'usage des instruments, mais rappelons que cette première scène de l'acte 2 est le moment privilégié pour travailler sur ces aspects, puisque les autres scènes ont des objectifs d'apprentissage différents.

Scène 2. Contraintes de constructions pour explorer un ensemble de solutions « étiqueté ».

- Triangle et un angle droit

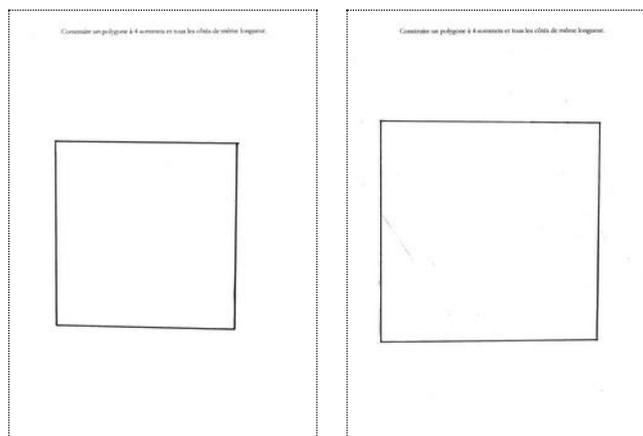


Construire un triangle avec un angle droit.

L'ensemble des formes possibles sera étiqueté « triangles rectangles ».

La plupart des triangles construits par les élèves présentent des côtés parallèles aux bords de la feuille. Par ailleurs, certains triangles ont également une allure de triangle isocèle, comme sur la production ci-dessus. Là encore on constate la prégnance de certaines orientations et des cas particuliers. La relance de l'enseignant est alors nécessaire pour permettre aux élèves d'envisager d'autres possibles.

- Quadrilatères et quatre côtés de même longueur



Construire un polygone à quatre sommets et quatre côtés de même longueur.
Construire un polygone à quatre sommets et tous les côtés de même longueur.

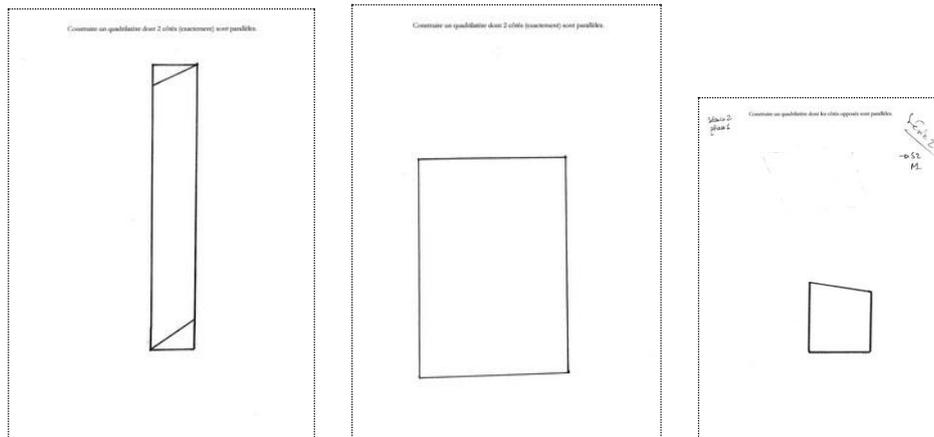
L'ensemble des formes possibles sera étiqueté « losanges ».

Ce type de construction est très complexe pour les élèves n'ayant pas travaillé sur l'usage du compas pour reporter une longueur. Mais nous pourrions aussi dire que justement ce type de construction est un bon prétexte pour introduire cet usage.

Quadrilatère et deux côtés parallèles

Attention ici, l'ensemble des formes possibles ne peut être étiqueté « trapèzes » que si on enlève la contrainte du « exactement ». Par conséquent si cette contrainte est maintenue (ce qui était le cas dans notre expérimentation), l'ensemble des formes solutions ne possède pas d'étiquette, ou plutôt il en possèdera une « les trapèzes non parallélogrammes », compréhensible bien plus tardivement dans l'avancée du travail.

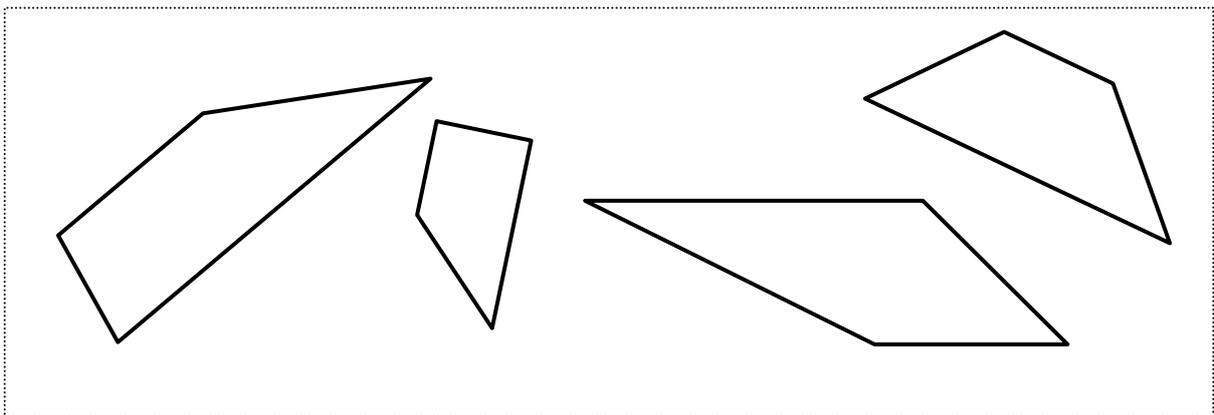
Malgré cette remarque, ici encore on constate que les élèves sont enfermés dans des formes standards, sans envisager la généralité des allures de formes possibles, comme dans les productions ci-dessous.



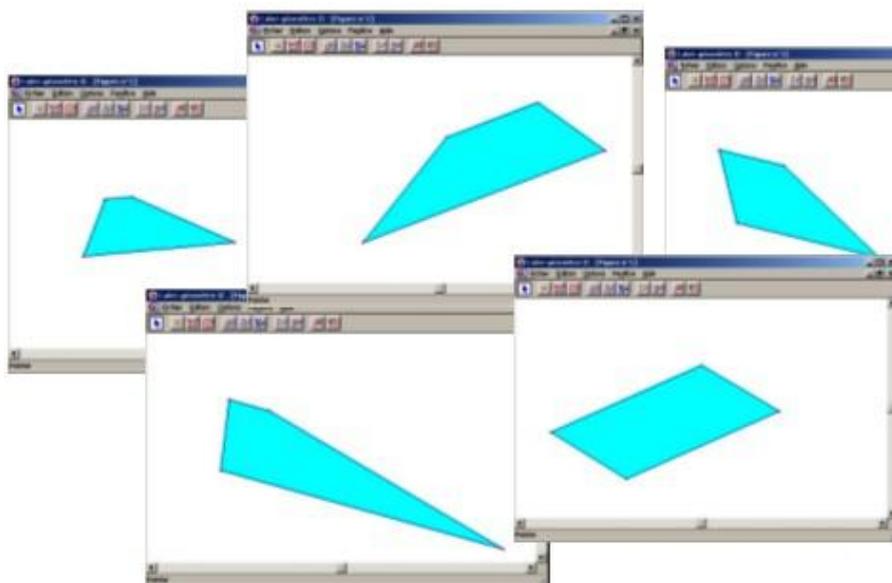
Construire un quadrilatère dont deux côtés (exactement) sont parallèles.

Les élèves s'aident des formes qu'ils connaissent comme le rectangle qui possède en effet deux côtés parallèles. Le fait de n'en vouloir que deux amène l'élève de la production de gauche à rendre obliques les deux autres côtés, en les laissant toutefois parallèles.

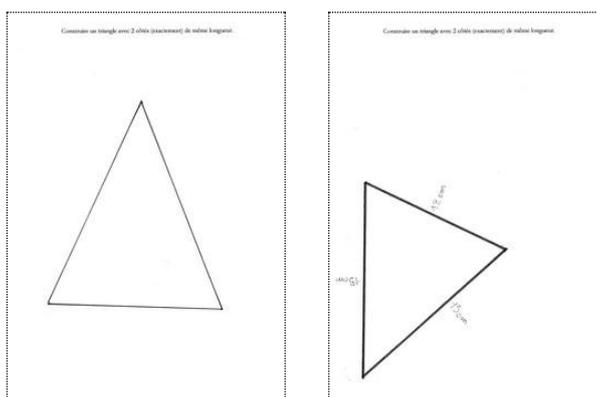
Ci-dessous, un ensemble plus varié de formes possibles, construite avec les instruments usuels ou avec un logiciel de géométrie dynamique¹⁰.



¹⁰ « Cabrigéomètre », logiciel de géométrie dynamique, agréé par le ministère de l'Éducation Nationale.



- **Triangles et deux côtés de même longueur**



Construire un triangle avec deux côtés (exactement) de même longueur

Attention ici encore, l'ensemble des formes possibles n'est pas étiqueté en géométrie. « Les triangles isocèles », étiquette à laquelle on pourrait penser, correspond aux formes ayant deux côtés de même longueur mais pas nécessairement « exactement ». La famille des triangles isocèles comprend aussi tous les triangles équilatéraux (trois côtés de même longueur).

Nous avons cependant fait le choix de mettre ce cas de construction dans cette rubrique, justement pour marquer les subtilités (et ambiguïtés) des étiquetages en géométrie.

Pour l'ensemble de ces recherches, les mises en commun portent sur les présentations des productions des élèves, que l'enseignant aura veillé à enrichir, soit par les relances individuelles auprès des élèves faites lors de la phase de recherche, soit par des productions qu'il aura construites préalablement, soit par des constructions réalisées dans un environnement de géométrie dynamique.

L'institutionnalisation de ces constructions correspond à la formalisation des propriétés caractéristiques des ensembles de formes étiquetés :

« Les losanges sont les quadrilatères ayant quatre côtés de même longueur. » ou bien « les quadrilatères avec quatre côtés de même longueur sont appelés les losanges ».

« Les triangles rectangles sont les triangles possédant un angle droit. »
Ou en formulant les choses d'une autre façon : « les triangles ayant trois côtés de même longueur sont appelés les triangles équilatéraux ».

Scène 3. Contraintes de constructions pour explorer des impossibilités de construction et basculer vers une tâche argumentative.

L'impossibilité, ou les discussions vives sur les constructions réalisées par certains élèves, permet alors à l'enseignant de proposer d'entrer dans un nouveau type de tâche : une tâche d'argumentation relative à des questions du type : « est-il possible de construire un forme ayant telle(s) propriété(s) ».

La spécificité du travail d'argumentation engage à traiter ces nouvelles recherches dans une partie spécifique : l'Acte 3.

Conclusion

L'activité de construction, primordiale pour les élèves en difficulté, peut faire l'objet de plusieurs mises au point :

- Quels sont les instruments que nous avons utilisés : pour construire un angle droit, pour tracer deux côtés parallèles, pour obtenir deux côtés de même longueur ? Un tableau peut être fait pour préciser l'utilisation fonctionnelle de chaque instrument de géométrie.
- La validation des dessins : chaque dessin est-il conforme à la commande ? Pourquoi ?
- Ces dessins sont-ils identiques ? Qu'ont-ils de commun ? Qu'ont-ils de différent ?
- Ces dessins ont donc une (ou des propriétés communes), ce sont des représentants d'une même figure, cette figure a-t-elle un nom ?

La tâche de construction peut être riche si elle est accompagnée d'une réflexion sur les productions : sur les instruments qui ont permis la construction, sur une réelle variété des productions et sur l'identification des propriétés des figures.

Acte 3. Pratiques d'argumentation : possible, impossible ?

Passage de « construire » où le contrat porte sur la construction à « est-il possible de construire ? » où la tâche porte sur la recherche d'argument.

Le type de tâche dont il est question ici consiste à demander aux élèves de produire une argumentation pour savoir s'il est possible de construire une forme ayant telle(s) propriété(s). Par exemple : « est-il possible de construire un triangle avec deux angles droits ? »

Cette activité est difficile pour des élèves de l'école primaire, une des raisons étant que les élèves ne comprennent pas clairement ce qui est attendu d'eux dans cette tâche d'argumentation. C'est une activité à haut risque pour l'enseignant, mais sans doute indispensable pour construire un rapport aux savoirs et pratiques mathématiciennes.

Pour certains élèves, argumenter en géométrie consiste à dire « j'ai fait plusieurs essais, ça ne marche pas » ou bien « tous les élèves de la classe ont essayé, personne n'y arrive, ce n'est pas possible ». Dans ce cas l'enseignant doit prendre position, et c'est l'un des enjeux fondamentaux de cette situation, pour exprimer l'une des règles de l'argumentation en géométrie :

« Des dessins, même un grand nombre de dessins, ne permettent pas de prouver que c'est impossible, il va falloir utiliser les propriétés des figures pour argumenter ».

Il est également très important de faire la différence entre dessin (représentation graphique) et objet géométrique (objet de pensée).

Un objet géométrique (souvent appelée « figure » dans l'enseignement) possède des propriétés, une infinité de dessins sont des représentants de cette figure. Pour prouver qu'une figure est impossible il faudra donc démontrer qu'elle est impossible en général et raisonner à partir des propriétés de la figure et non des dessins. En mathématiques une proposition est vraie lorsqu'elle est toujours vraie.

Nous rendons compte de travaux portant sur les exemples « triangle et angles droits » et « quadrilatères et angles droits », à partir des questions « Est-il possible de construire un triangle un angle droit ? » « Deux angles droits ? » « Un quadrilatère avec deux angles droits ? » « Trois angles droits ? Quatre, cinq ? ».

Deux types de scènes se distinguent :

Scène 1 : construction possible, une figure suffit à argumenter de la possibilité. Plusieurs c'est encore mieux.

Scène 2 : construction impossible, rupture avec l'argument de production d'une forme, passage à un argument de nature géométrique.

Triangle et angles droits.

Scène 1 : « Est-il possible de construire un triangle avec un angle droit ? »

En général cette scène n'est pas problématique. Elle permet de réintroduire l'usage de gabarits pour construire des angles droits, et de rappeler ou introduire le vocabulaire de « triangle rectangle » si cela n'est déjà fait.

Scène 2 : « Est-il possible de construire un triangle avec deux angles droits ? »

La contrainte de construction est telle que d'un point de vue géométrique la construction n'est pas possible. L'impossibilité ou la difficulté à obtenir un tel triangle amène à faire le constat de son impossibilité, puis à tenter de comprendre les raisons géométriques de cette impossibilité. Nous prendrons appui ici sur les productions et transcriptions extraites du travail mené dans une classe de CM1-CM2 au cours du mois de février 2009. Les élèves travaillent par groupe de deux ou trois avec la consigne suivante : « Est-il possible de construire un triangle à deux angles droits ».

Les élèves, dans un premier temps, s'engagent dans une tâche de construction, puis tentent d'expliquer, de justifier l'impossibilité ou la possibilité.

Nous présentons dans un premier temps les productions graphiques des élèves, puis dans un second temps les arguments et les échanges ayant eu lieu au cours de la mise en commun ou en entretien individuel durant la phase de recherche.



Est-il possible de construire un triangle à deux angles droits?

Construction : les productions graphiques des élèves.

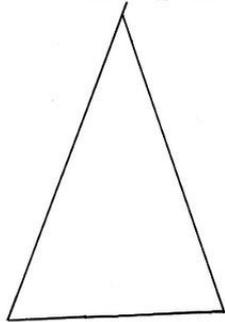
Nous avons classé les productions graphiques des élèves selon le type de formes qu'ils font intervenir d'un point de vue perceptif.

Comment interpréter ces traces ? Faire travailler notre imagination pour rendre compte de connaissances potentiellement inscrites dans ces productions.

Par exemple des raisonnements du type : Considérons que le triangle a deux angles droits, et voyons à quelle contradiction cela nous amène. Ou des raisonnements du type : Considérons un angle droit, et voyons quelles sont les contraintes alors imposées à la position du troisième côté, qui ne sont pas compatibles avec la présence d'un second angle droit. Ou d'autres encore.

- **Productions de triangles**

Il n'est pas possible de faire 2 angles droits



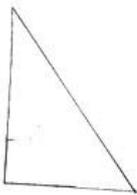
A.

A. « Ce n'est pas possible de faire un angle droit. »

Dans ce type de productions, il n'y a pas de trace d'une prise en compte d'une contrainte relative aux angles droits. Il se peut que les outils de travail conceptuel associés « angle droit » ne soient pas disponibles, ou bien que l'image d'un triangle isocèle (type d'image produite) soit trop prégnante comme image de triangle pour que l'élève puissent entrer dans une interrogation sur des formes spécifiques de triangle, autres qu'isocèles.

Relance possible de l'enseignant : l'enseignant peut demander aux élèves de tracer des segments à angle droits, pour bien s'assurer que la difficulté ne porte pas sur cet aspect. Il peut aussi engager les élèves à produire un triangle avec un seul angle droit, de manière à instaurer une action possible permettant alors de bâtir l'interrogation sur ce réel là.

- **Production de triangles rectangles**



Nous ne pouvons pas faire un triangle à 2 angles droits.

« Nous ne pouvons pas faire un triangle à deux angles droits »

Cette production fait signe d'une prise en compte de l'existence de triangle avec des angles droits. Elle nous amène à penser au raisonnement suivant (dont la production pourrait être une illustration) : construisons déjà deux côtés à angle droits. On a donc un sommet du triangle (le sommet de l'angle), les deux autres sommets sont nécessairement sur chacune des demi-droites supports des côtés tracés. En prenant tout point à n'importe quel endroit sur chacune de ces demi-droites, les angles ainsi formés ne sont pas des angles droits.

En fait on peut imaginer que le dessin de l'élève correspond à un seul dessin, parmi un ensemble de plusieurs dessins où les sommets sur les demies droites seraient reliés, constatant ainsi qu'aucun des autres angles n'est droit.

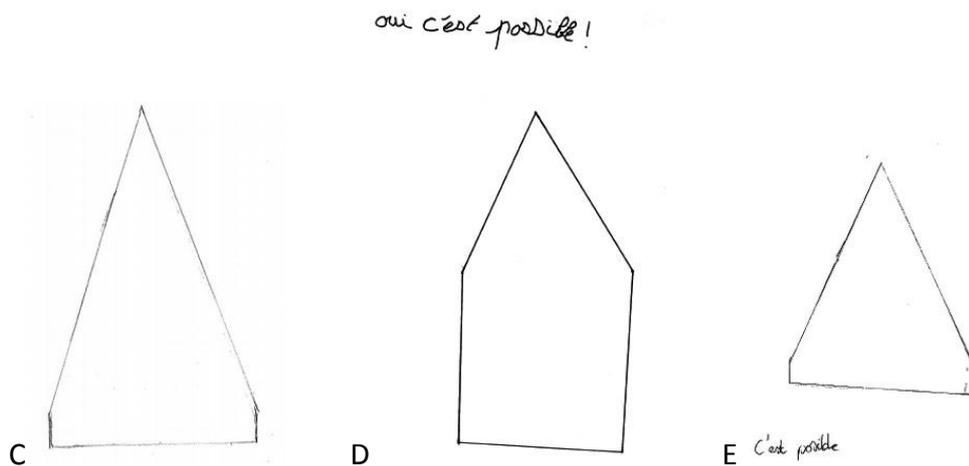
« Un exemple ne prouve rien, la chose est bien connue, mais lorsque le nombre d'exemple de la même sorte vient grossir de manière récurrente, que ceux-ci sont attestés de plusieurs points de vue et qu'il est possible de les vérifier, on est bien obligé d'admettre qu'il y a derrière ceux-ci quelque chose de plus général. C'est à ce point précis que l'ingénieur se fait homme de science. La science en question, qui constitue le maillon entre la formation des concepts et l'information par le signe est, selon nous, la Logique. Mais la question de savoir de quel type de logique il peut s'agir est en fait le sujet de cette ouvrage. » (B. Morand, Logique de la conception – Figures de sémiotique générale d'après Chales S. Peirce, L'harmattan, 2004)

L'élève ici en reste au constat d'attester de quelque chose de plusieurs points de vue et avec beaucoup d'exemples. Mais il n'en vient pas à construire un objet de discours qui porte sur la recherche de ce quelque chose de plus général (une propriété qui permettrait au niveau du discours de rendre compte de cette généralité).

La relance du professeur pourrait être : de faire visualiser un sommet très proche et un sommet très éloigné. Possible avec Cabri.

La question étant quand même de savoir, autrement que par un dessin, si on peut quand même très très loin trouver un point qui fasse que l'angle soit un angle droit.

- **Productions de pentagones semi-rectangles**



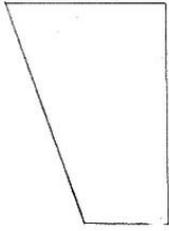
D. « Oui c'est possible ! »

E. « C'est possible. »

Les productions D et E sont facilement réfutées avec des arguments très convaincants pour les élèves. Les formes produites vérifient bien en effet certaines contraintes de la consigne : polygone à deux angles droits, possédant une partie d'allure triangulaire. Mais ces formes ont cinq côtés, ce ne sont donc pas des triangles. Implicitement, la connaissance de la définition d'un triangle comme polygone à trois côtés est mobilisée dans ce raisonnement.

La production C est analysée dans un paragraphe ultérieur avec les arguments fournis par les élèves.

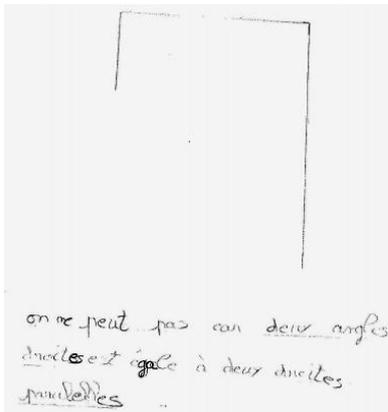
- **Productions de quadrilatères semi-rectangles**



F.

Production mobilisant sans doute la connaissance qu'un polygone est une forme fermée. Et un raisonnement par analyse synthèse. Supposons que le triangle ait deux angles droits. Alors puisque c'est une forme fermée, il faut deux points (minimum) un sur chaque demi-droite construite pour fermer la forme. A minima il faut deux points (et non trois autres points comme dans les productions ci-dessous). Il est intéressant de noter que les élèves en grande majorité ne prennent pas des points qui se relient pour former un rectangle avec le tout, mais produisent des segments qui sont penchés.

- **Production d'une ligne ouverte semi-rectangle**

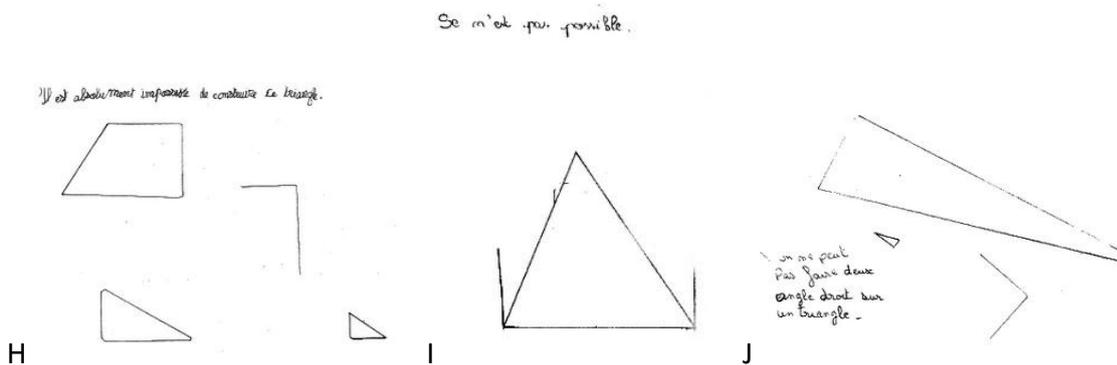


G.

G. « On ne peut pas car deux angles droits est égal à deux droites parallèles. »

Production reprise en analyse dans le paragraphe « productions langagières ».

- **Des productions mixtes**



H. « Il est absolument impossible de construire le triangle. »

I. « Ce n'est pas possible »

J. « On ne peut pas faire deux angle droit sur un triangle. »

Argumentation : Les productions langagières des élèves.

La mise en commun dans la classe s'est effectuée de la façon suivante : 1. Un premier bilan des types de réponses : « oui, c'est possible », « non, c'est impossible », « je ne sais pas ». 2. Un premier binôme affiche sa production et la présente à la classe : débat, arguments valides ou invalides, les élèves pensant avoir les mêmes arguments viennent afficher leur production près de la première. 3. Un autre binôme, ayant un argument différent vient proposer sa solution, et ainsi de suite jusqu'à ce que toutes les productions soient affichées. Les productions langagières des élèves lors de la mise en commun peuvent se classer également selon la nature de ce qui fait office pour les élèves d'un argument de poids, comme « Le triangle a trois côtés », « Des côtés parallèles ne peuvent se relier ».

- **Un triangle, ça a trois côtés. Si un triangle a un angle droit, il ne peut en avoir deux.**

Théo. C'est pas possible, parce que un triangle ça a déjà trois côtés. C'est pas obligé qu'il aille un angle droit. Mais quand on demande d'avoir un angle droit, on peut.

P. Un seul angle droit c'est possible ?

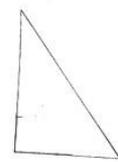
Théo. Oui. Mais deux, non.

P. Et donc pourquoi ? Quelle est ton explication exactement ?

Théo. Parce que c'est pas possible de faire deux angles droits sur un triangle.

P. Pourquoi ?

Théo. Parce que un triangle ça a que trois côtés, et il y a deux côtés qui n'ont pas d'angle droit.



Nous ne pourrions pas faire un triangle à 2 angle droits.

Un angle droit c'est possible, mais deux non. On peut supposer que l'insistance à redire qu'un triangle a trois côtés correspond au fait que le nombre de côté ne peut plus être conservé si on privilégie la contrainte de deux angles droits. L'élève indique bien qu'il est possible d'avoir un angle droit, et insiste sur le fait que deux angles droits ne donneraient plus un triangle.

- **Un triangle, ça a trois côtés. Un triangle avec deux angles droits a forcément cinq côtés.**

P. Pourquoi cela n'est pas possible ?

Stella. Parce qu'un triangle, ça a trois côtés

P. Pourquoi on ne peut pas faire deux angles droits ?

Stella. Parce qu'autrement, il y en aurait cinq.

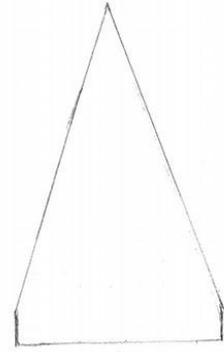
P. Parce que sinon ?

Stella. Il y en aurait cinq.

P. Y'aurait cinq côtés ?

Stella. Oui.

Un autre élève du groupe. Ou alors ça ne serait pas un triangle.



On peut reconstruire le raisonnement de l'élève comme un raisonnement par l'absurde : supposons que le triangle ait deux angles droits, comme c'est un polygone (donc une figure fermée), alors nécessairement pour joindre les sommets situés sur deux côtés opposés il y a un autre sommet.

L'élève commence donc par construire trois côtés avec deux angles droits, constate que la figure n'est pas fermée, pour obtenir un polygone qui ressemble quand même à un triangle, il construit deux autres côtés. Il aurait pu fermer la ligne en reliant deux points des deux côtés opposés (formant ainsi ou un rectangle ou un quadrilatère semi-rectangle), mais visiblement l'allure générale de la forme n'aurait pas donné à voir l'allure générale d'un triangle. Or ici, placer un cinquième sommet, bien en hauteur par rapport aux autres, permet de conserver l'allure triangulaire de la forme. *La nécessité soulevée par les élèves dans cette production pourrait alors se reconstruire ainsi : pour qu'une forme polygonale ait deux angles droits et une « allure » triangulaire, elle doit nécessairement avoir cinq côtés.*

- **Deux côtés à angle droit avec un troisième sont forcément parallèles.**

Carole. Si on fait deux angles droits, comme là, et ben on ne peut pas les relier, et ça fait deux droites parallèles. Même si on les continue, ça ne fera pas d'angle droit, euh, ça ne rejoindra pas.

P. Pourquoi ? Parce que deux droites parallèles ? Il y a deux angles droits, donc ça fait deux droites parallèles.

Oui.

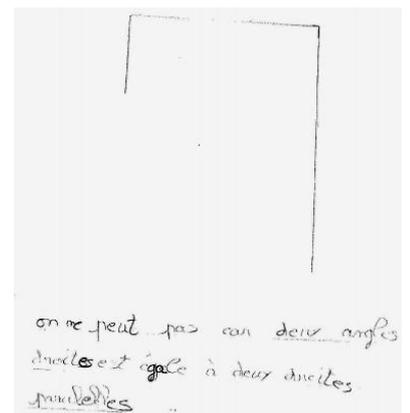
P. Et s'il y a deux droites parallèles ?

Carole. Ben même si on les continue, euh, ... si on les continue, ben ça fait des droites parallèles. Et si on les continue elles se rejoindront toujours pas.

P. Parce que si elles sont parallèles, elles ne peuvent pas se rejoindre.

Carole. Alors il faut soit quatre côtés, soit cinq côtés.

P. D'accord.



La nécessité utilisée ici par l'élève est la suivante, même si elle n'est formulée qu'en dernier : deux droites perpendiculaires à une même troisième sont nécessairement parallèles.

Ainsi, trois côtés étant déjà construits et définissant alors les positions des trois sommets, comme intersections de ces droites, le troisième sommet est forcément à l'intersection des deux droites construites. Parce que nous sommes en géométrie euclidienne, par définition, deux droites parallèles n'ont pas de point commun.

L'argument est finalement recevable, il s'appuie sur les connaissances mathématiques suivantes :

- Un triangle est un polygone, il est donc fermé
- Un triangle a trois côtés
- Deux cotés parallèles ne se coupent pas
- Si deux côtés sont perpendiculaires à un même côté, alors ils sont parallèles

Lors de la mise en commun, les élèves comprennent bien ces arguments.

Retour sur l'apparition de l'argument de parallélisme dans le propos de Carole : où l'enseignant doit jouer son rôle.

Ci-dessous un extrait d'entretien entre une élève (que nous appellerons Carole, dont la production lors de la mise en commun est la G. ci-dessus) et le professeur durant la phase de recherche.

Carole. Impossible, ben parce qu'un triangle faut déjà trois côtés, et pour faire déjà deux angles droits, il faut déjà trois côtés. Et il faut les relier.

P. Eh alors, on ne peut pas les relier ?

Carole. Non parce que si on fait deux angles droits, après on peut pas ...

P. Vas-y, fais-le et tu m'expliques pourquoi ça ne marche pas.

Carole. *Elle trace (Production ci-contre)*. Parce que si on fait deux angles droits, après on peut plus relier.

P. Le problème il est où alors ?

Carole. On peut faire que trois côtés.

P. Je vois bien, oui, ça fait trois côtés mais pourquoi c'est pas ...

Carole. Parce qu'on peut pas les relier.

P. Pourquoi on ne peut pas les relier ?

Carole. Parce qu'il faut trois côtés et il faut deux angles droits.

P. J'ai bien vu, oui, il y a trois côtés, deux angles droits, mais il y a une chose : tu me dis « c'est pas possible » parce qu'on ne peut pas ... Alors montre moi ce qu'on ne peut pas relier.

Carole montre les deux côtés qu'on ne peut pas relier.

P. Alors pourquoi on ne peut pas les relier ?

Carole reste silencieuse.

P. Est-ce qu'ils vont se relier un jour, plus loin, jamais ?

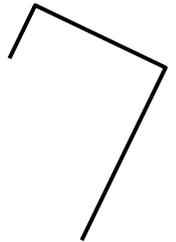
Carole. Parce qu'ils sont parallèles.

P. Ils sont comment ?

Carole. Parallèles.

P. Et pourquoi ils sont parallèles ?

Carole. Parce que deux angles droits, ça fait parallèle.



On voit bien d'après cette transcription que ce travail est laborieux, le maître souhaite rester dans le rôle qu'il s'est donné : poser des questions « pourquoi tu affirmes cela ? » afin d'obtenir des arguments, mais l'élève ne comprend pas bien ce que l'on attend de lui.

Pour obtenir finalement la formulation d'une propriété (il y a deux côtés parallèles) le maître doit insister et induire la réponse (est-ce qu'ils vont se relier *un jour, plus loin, jamais ?*)

Quadrilatères et angles droits.

Pour que la surprise apparaisse, il faut créer le contexte et les conditions de la surprise à savoir de la non surprise en amont, des choses relativement non problématique, qui vont de soi. Ainsi de la tâche de construction d'un quadrilatère avec deux angles droits, en scène 1, avant d'amorcer la scène 2.

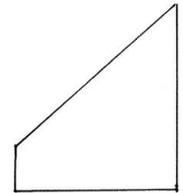
• **Scène 1. Deux droits : Une figure suffit à argumenter de la possibilité.**

Plusieurs c'est encore mieux.

Est-il possible de construire un quadrilatère avec deux angles droits exactement (deux et deux seulement) ?

La plupart des élèves produisent un seul type de quadrilatère.

Briac. Parce qu'il suffit de faire deux traits droits [à angle droit avec un troisième, dans la même direction], après là tu en montes un, plus haut que celui qui est à côté, qui sont parallèle, et tu le fais, euh, ... un peu en diagonale.

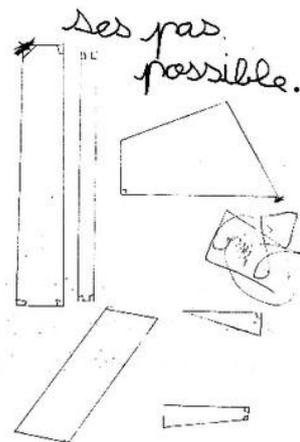
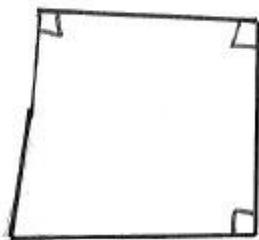
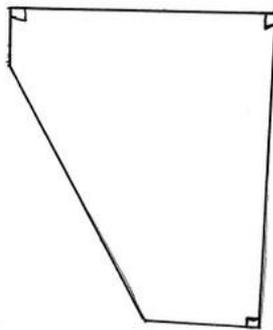
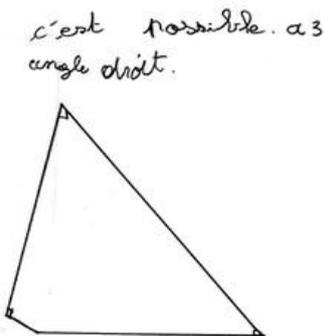


Rappelons qu'on pourrait imaginer aussi des quadrilatères avec les deux angles droits non consécutifs.

• **Scène 2. Trois droits : L'impossibilité nécessite le recours à des arguments discursifs.**

Est-il possible de construire un quadrilatère avec trois angles droits exactement (trois et trois seulement) ?

Nous avons relevé deux types d'arguments correspondant aux productions suivantes :



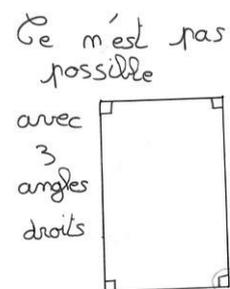
Argument 1 : formulé par plusieurs binômes

Noémie. C'est impossible.

P. Pourquoi ?

Noémie. Parce qu'on est obligé d'en avoir quatre.

P. Pourquoi ?



Noémie. Parce c'est un quadrilatère, ou alors il faut cinq côtés.

P. Si on veut trois angles droits, qu'est ce que ça entraîne ?

Noémie. Ça entraîne un quatrième.

Cet argument est à rapprocher de l'argument 2 de la situation précédente.

Les contraintes du problème sont :

c'est un polygone, donc une figure fermée

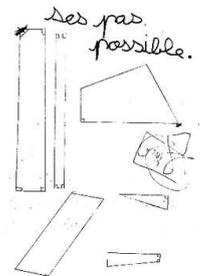
elle a trois angles droits exactement (pas quatre)

L'élève construit trois côtés avec deux angles droits, commence à construire le quatrième côté perpendiculaire au précédent, il a donc ses trois angles droits, pour ne pas obtenir un quatrième, il est contraint à construire un cinquième côté.

On peut considérer que cet argument n'est pas vraiment rigoureux, il aurait fallu justifier la réponse « ça entraîne un quatrième » mais cela semble effectivement difficile pour des élèves de CM.

Argument 2 :

Sébastien. L'élève montre un des rectangles de sa feuille (le plus allongé et le moins large). J'ai une bande, ça a quatre angles droits, mais si on fait une droite qui va de travers pour ne pas que le quatrième soit un angle droit, et si c'est de travers, le troisième, il n'est pas à angle droit non plus.



Cet argument n'est pas vraiment recevable dans le sens où il s'appuie plus sur l'observation de ce qui se passe sur un dessin que sur des propriétés.

Ce que nous retenons de cette activité :

Nous voyons donc que cette tâche d'argumentation est loin d'être évidente pour des élèves de l'école primaire et ce pour deux raisons au moins : cela nécessite une bonne maîtrise des connaissances en géométrie, les élèves entrent dans une activité nouvelle dont ils ne comprennent pas bien (au début) le but et les règles.

C'est peut-être cela, l'objectif de cette activité : montrer en quoi certains arguments sont recevables et en quoi d'autres arguments ne le sont pas. Si les élèves ont compris à l'issue de ce travail que des dessins (aussi nombreux soient-ils) ne suffisent pas pour prouver et qu'il est nécessaire d'utiliser les propriétés des objets géométriques, ils auront déjà fait un pas vers ce qu'il leur sera demandé au collège.

Il ne faut pas s'attendre au CM, à la formulation d'arguments de type collège, cette activité, difficile, permettra sans doute aux élèves de mieux comprendre ce qui est attendu d'eux dans un travail d'argumentation. Ce type d'activité ne prendra sens que s'il est répété plusieurs fois au cours de l'année.

Le rôle du maître dans les moments de synthèse et d'institutionnalisation :

La synthèse doit 'coller' à ce qui a été dit, fait par les élèves, cette 'synthèse des travaux' n'est donc pas complètement prévisible, son contenu est lié au problème posé, elle n'a pas pour but de généraliser les résultats obtenus.

Lors de la synthèse, l'enseignant peut reprendre les arguments proposés, expliquer en quoi ils sont (ou non) recevables, identifier les propriétés sur lesquelles s'appuie ces arguments.

Ce qui est à institutionnaliser est « *ce que nous avons appris des mathématiques lors de l'activité, hors du contexte précis du problème posé* », en l'occurrence, deux règles de l'argumentation :

- Des dessins ne permettent pas de prouver, il faut raisonner à partir des propriétés des figures
- Pour qu'une propriété soit vraie (en mathématique), il faut qu'elle soit toujours vraie

Cette activité est limitée par le type de problèmes (question possible / impossible) à poser dans la mesure où les connaissances nécessaires pour argumenter peuvent ou non être disponibles à l'école primaire. Par exemple : « Est-il possible de construire un triangle équilatéral et rectangle ? ». Pour prouver que cela n'est pas possible, il faut mobiliser la connaissance « la somme des angles dans un triangle est égale à 180 degrés », connaissance de collège. Cette activité n'est pas adaptée à l'école primaire. Toute activité d'argumentation doit donc faire l'objet d'une analyse a priori précisant les arguments possibles et les connaissances à mobiliser.

Acte 4. Pratique de description argumentée : le jeu du portrait, trois versions pour engager les élèves dans du raisonnement.

Un « Jeu de portrait » est généralement associé à une tâche de description (à lire ou à produire) d'un objet mathématique en fonction de ses propriétés, description permettant alors de le déterminer. Portrait de nombres en fonction de propriétés arithmétiques, portraits de formes en fonction de propriétés géométriques. De plus en plus de manuels proposent ce type de tâche aux différents niveaux de la scolarité, et les analyses didactiques sont nombreuses.

L'originalité de la proposition faite dans cette brochure tient au fait de prendre prétexte du jeu du portrait pour engager les élèves dans des raisonnements logiques basés sur les propriétés caractéristiques des formes géométriques (les propriétés nécessaires et suffisantes qui définissent géométriquement une forme). Par exemple le fait qu'un polygone ayant trois côtés est un triangle, le fait qu'un quadrilatère ayant quatre angles droits est un rectangle, ... Il s'agit d'engager les élèves dans une pratique spécifique du travail mathématique : la production d'inférences logiques.

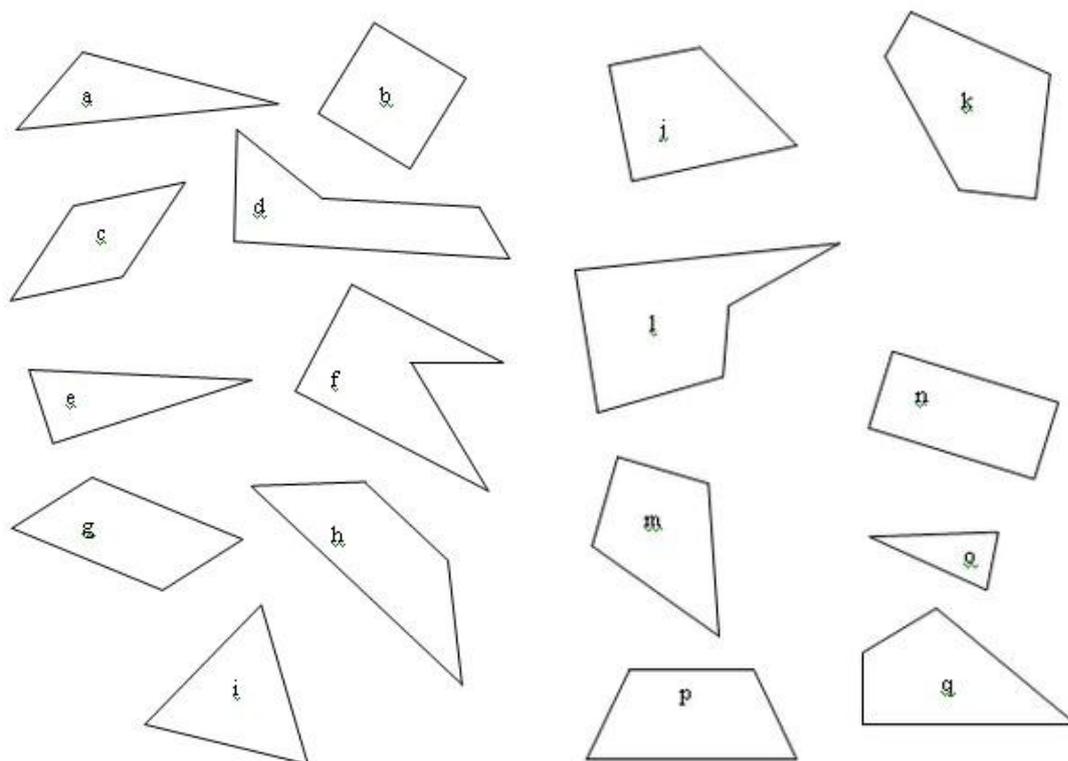
Ainsi, nous proposons un enchaînement d'utilisations du jeu du portrait à trois niveaux de questionnement différents

- le niveau de l'action de description des formes, jeu du portrait classique : scène 1.
- le niveau de questionnement sur le lien logique entre question/réponse et question suivante, où la validation se fait par recours à l'ensemble des formes considérées sur le support des élèves : scène 2.
- le niveau de questionnement sur le lien logique entre question/réponse et question suivante, où la validation se fait par recours à l'ensemble des formes polygonales *en général*, et par suite, à des arguments géométriques : scène 3.

Scène 1. Description : jeu du portrait. Les formes, objets du questionnement.

Objectifs d'apprentissage

Un lot de dix-sept formes est projeté au tableau (ci-dessous, remises en format A4 en annexe 2).



- **Éléments de consigne.**

P. Je choisis une forme parmi toutes ces formes. Vous devez chercher cette forme, en me posant des questions sur des propriétés géométriques, je ne réponds que par oui ou par non.

Je ne réponds pas à des questions du genre : " Est-ce que la figure est un rectangle ? ", « Est-ce qu'elle est en bas de la feuille ? », « est-ce qu'un côté mesure six centimètres ». Je ne réponds qu'à des questions portant sur les propriétés géométriques des formes. D'ailleurs, on va rappeler ensemble celles qu'on connaît déjà.

[...]

P. Quand on a un certain nombre de question/réponse, lorsque vous êtes sûr d'avoir trouvé la forme, et qu'on sera d'accord pour passer aux propositions, un élève peut dire par exemple : je pense que c'est la figure D.

Les règles du jeu ; il ne s'agit pas d'un jeu de devinette, il est interdit de poser des questions telles que : « est-ce que ça ressemble à une maison ? », « est-ce que c'est la figure A ? », suivi de « est-ce que c'est la figure B ? », il est également interdit de donner des noms de figure « est-ce que c'est un rectangle ? »

Les seules questions acceptées doivent concerner les propriétés des formes : nombre de côtés, d'angles droits, de côtés de même longueur, de paires de côtés parallèles (éventuellement de symétrie ou de diagonale)

Il se peut que le rappel de ce que sont les propriétés géométriques des formes soit nécessaire pour permettre aux élèves d'entrer dans la situation. Dans notre expérimentation, l'enseignant a choisi de les mentionner par leur désignation orale uniquement, sans redonner de définition ou d'éléments de rappel de ce que chacune de ses expressions pouvaient signifier¹¹.

P. Quelles sont les propriétés géométriques des formes qui nous permettent de décrire pour reconnaître une forme ?

E. Le nombre de côtés.

P. Oui.

E. Le nombre de sommets.

E. Oui.

E. Est-ce qu'il a des angles droits.

P. Oui, la présence et le nombre d'angle droit.

E. Est-ce qu'on peut prendre son équerre ?

P. Oui, on peut aussi prendre sa règle, son compas, tout instrument utile.

E. Est-ce que deux côtés pourraient être parallèles.

P. Oui, avoir des côtés parallèles, c'est aussi une propriété géométrique.

Chaque élève dispose des outils courants de géométrie et d'une feuille où sont également représentées les différentes formes. L'enseignant ne donne aucune indication sur ce que les élèves doivent faire avec leur feuille, à leur charge donc de choisir une procédure permettant de tenir compte des informations successives pour poser une question pertinente (utile), et retrouver la forme choisie par l'enseignant.

L'enseignant note au tableau les questions posées par les élèves et les réponses. Lorsqu'un élève pense avoir trouvé la forme cachée, il doit justifier son choix en montrant qu'elle est compatible avec l'ensemble des questions-réponses. L'enseignant peut demander lors de cette phase de validation de la proposition d'utiliser les instruments pour vérifier (que deux côtés ont la même longueur par exemple).

• **Éléments sur les objectifs d'apprentissage**

Il est parfois poursuivi des objectifs assez différents dans les manuels proposant ce genre de tâche : travail sur les formes usuelles, travail sur les instruments pour vérifier, travail sur la méthode de recherche. Ce ne sont pas les objectifs que nous avons poursuivis : notre orientation porte essentiellement sur un travail de repérage, d'explicitation et d'usage de propriétés géométriques, sur l'étude des liens logiques entre ces propriétés.

Nous précisons ci-dessous ces éléments de manière à bien cerner l'originalité de la proposition.

Dans la version 1 (scène 1), l'enseignant n'intervient pas entre les questions pour discuter de la pertinence ou non, cela fera justement l'objet d'une nouvelle tâche. L'enseignant note au

¹¹ L'enseignant qui choisirait de redonner rapidement quelques uns de ces éléments serait vigilants aux exemples à donner pour ne pas figer les représentations des élèves dans des formes standardisées dont on sait qu'elles font obstacle pour le travail en général en géométrie.

fur et à mesure les questions et les réponses au tableau, et conserve une trace de ces questions/réponses pour les tâches ultérieures (Version2/Version3).

L'objectif d'apprentissage n'étant pas dans la méthode de recherche mais dans la recherche des indices (discursifs et graphiques) et de leur interprétation et des liens logiques entre question/réponse et nouvelle question, l'enseignant n'intervient pas non plus pour orienter l'action des élèves.

Lorsqu'une proposition est formulée par un élève, figure G par exemple, cet élève doit reprendre toutes les questions-réponses notées au tableau et ainsi vérifier que la figure proposée est bien conforme. L'enseignant peut également demander à l'élève de vérifier au tableau ce qu'il affirme, utiliser les instruments pour vérifier deux côtés parallèles, deux côtés de même longueur ...

Pour que ce jeu soit aussi une situation d'apprentissage, il faut insister sur la justification, la validation de la proposition de l'élève : « c'est telle figure car elle possède telles propriétés, je le vérifie avec tels instruments, je vérifie également qu'il n'y a pas d'autres formes qui conviennent dans le lot ».

- **Éléments sur le jeu de langage**

Tout comme les tâches de construction avec contrainte (cf. Acte 2 p24), le mot « exactement » est utilisé dans nos expérimentations dans un sens exclusif : « exactement, ni plus, ni moins ». De même un nombre indiqué d'angles droits, de côtés parallèles, ou autres, signifie « ce nombre exactement ». Par exemple la question « Le polygone a-t-il deux angles droits ? » signifiera : « le polygone a-t-il exactement deux angles droits ». Cette convention doit faire l'objet d'une clarification en amont, pour jouer le jeu.

Choix fondamentaux



- **Éléments sur le choix des formes**

Indiquons des critères de pertinence d'un bon choix de formes constituant un lot (support de travail pour les élèves). Des formes à la fois variées mais uniques quant à l'ensemble des propriétés qu'elles vérifient (pour pouvoir la désigner au final).

Pour engendrer un ensemble très divers de formes, l'enseignant peut jouer sur :

- le nombre de côtés ;
- la présence ou l'absence d'angle droits et leur nombre ;
- la présence ou l'absence de côtés parallèles et leur nombre ;
- les éléments de symétrie ;
- la présence ou l'absence de côtés de même longueur (et leur nombre) ;
- la présence ou l'absence de côtés parallèles et de même longueur ;
- la présence ou l'absence de côtés perpendiculaires et de même longueur.

La variable « nature des propriétés » est relative aux propriétés déjà rencontrées et travaillées par les élèves en classe, et tout enseignant pourra l'adapter au contexte de sa progression. Cependant nous avons pu constater que les élèves font appel à bien d'autres propriétés que l'enseignant peut juger a priori inopérantes, ou en marge et qui pourtant entrent bien dans la règle du jeu. Par exemple dans notre expérimentation les élèves ont référé aux angles obtus ou aigus pour une forme, et ce type de question a été reprise ensuite par d'autres élèves pour rechercher d'autres formes.

L'importance étant de travailler sur les propriétés géométriques, et non sur les formes elles-mêmes, il n'est pas indispensable d'avoir des formes usuelles. Elles sont fortement présentes dans notre expérimentation, mais on peut imaginer d'autres supports qui sont en fait dépendants des propriétés avec lesquelles on souhaite faire travailler les élèves. (support « polygone, non polygone » ; support « quadrilatères » ; support « mixte »).

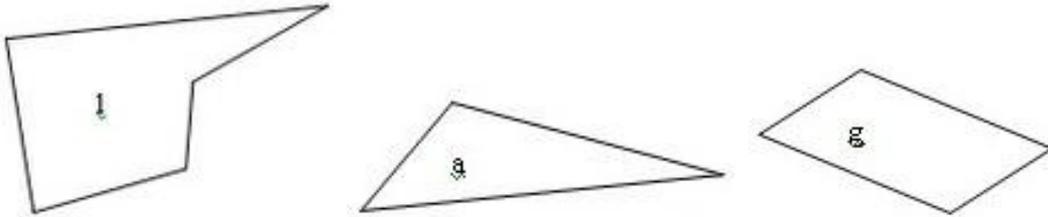
Rappelons également que les orientations des dessins sur la feuille de papier ont une incidence sur l'appréhension de la généralité des propriétés, il est important de ne pas privilégier l'horizontale et la verticale.

Éléments sur la précision des tracés

Les indices de présence ou absence des propriétés sur le dessin sont donnés avec une certaine précision du tracé, qui doit permettre en utilisant les instruments usuels ne pas avoir de doute. Les élèves doivent pouvoir se dire par exemple « en utilisant mon équerre je vois clairement que ce n'est pas un angle droit ». Il ne doit pas y avoir d'ambiguïté sur la précision des tracés. On devrait pouvoir, pour un œil exercé, réaliser la tâche sans les instruments de mesure (car là encore, l'objectif d'apprentissage n'est pas dans l'usage des instruments pour vérifier quelque chose). Ainsi, les segments ne seront pas trop petits, de manière à pouvoir comparer leurs longueurs, s'ils ont des longueurs différentes elles seront nettement différentes ; les angles seront clairement aigus ou obtus ou droits, ...

- **Élément sur l'ordre des formes choisies par l'enseignant : pour démarrer, une forme non usuelle.**

Dans l'expérimentation menée, le choix de l'enseignant était le suivant : la figure L, puis la figure A (triangle quelconque), puis la figure G (parallélogramme). Ce choix nous avait paru important en amont des mises en œuvre en classe et sa pertinence s'est confirmée par la suite.



Il est important de choisir une forme qui va permettre de comprendre qu'il s'agit d'explorer un ensemble de formes du point de vue de leurs propriétés géométrique, et d'établir des liens entre les données progressivement construites grâce aux questions/réponses.

L'intérêt de la figure L est de vérifier que tous les élèves ont bien intégré la consigne, elle est utilisée par l'enseignant pour le premier essai. Cette première figure n'est pas une figure usuelle. Ce choix fait par l'enseignant n'est pas anodin, il s'agit de trouver une figure inconnue (non usuelle), or, pour certains élèves, deviner une figure nécessite qu'on la connaisse, il en résulte deux types de réactions possibles des élèves :

Des procédures de recherches de formes élémentaires courantes, ou bien de recherche globale par famille de polygone.

- **Éléments sur Procédures ; Raisonnements ; Validations**

Certains élèves n'utilisent pas leur feuille et posent des questions sans tenir compte des informations obtenues à partir des questions/réponses précédentes.

D'autres rayent au fur et mesure les figures après la réponse de l'enseignant, observent les figures restantes qui déterminent la question suivante, certains élèves se rendent ainsi compte de la pertinence (ou pas) des questions posées.

Les objections se font à deux niveaux :

cette question ne sert à rien : elle ne m'a pas permis de rayer une nouvelle figure ou bien

cette question ne sert à rien : on le savait déjà, par exemple « elle a quatre sommets, on sait qu'elle a quatre côtés ».

les objections du second type font appel à une connaissance, contrairement à celles du premier type.

Variante pour un travail en autonomie :

Le maître écrit les questions et les réponses, les élèves (en binômes) doivent découvrir les figures correspondantes. Par exemple :

J'ai trois côtés.	non
J'ai cinq côtés.	non
J'ai deux paires de côtés opposés parallèles.	non
J'ai deux côtés de la même longueur.	non

La réflexion qu'il faut mener avec les élèves sur l'intérêt, la pertinence des questions posées est proposé dans le paragraphe suivant.

Scène 2. Jeu du portrait : argumentation du lien entre les questions pour l'avancée de la recherche.

Cette version se joue à partir des questions notées lors des parties de la version 1 (ou reconstruites par l'enseignant). La nouvelle tâche consiste à partir de la liste des questions réponses pour la recherche d'une forme, à s'interroger sur la pertinence d'une question étant connu un couple question/réponse antérieur. Par exemple, voici le listing correspondant à la figure « a »

Questions posées par les élèves	réponses de l'enseignant
Q1. Le polygone a-t-il trois sommets ?	non
Q2. Le polygone a-t-il quatre sommets ?	oui
Q3. Le polygone a-t-il quatre angles droits ?	non
Q4. Le polygone a-t-il quatre côtés ?	oui
Q5. Le polygone a-t-il cinq angles droits ?	non
Q6. Le polygone a-t-il deux angles droits ?	non
Q7. Le polygone a-t-il un angle droit ?	non
Q8. Le polygone a-t-il des petits côtés parallèles et des grands côtés parallèles ?	oui
Q9. Le polygone a-t-il trois angles droits ?	non
Q10. Le polygone a-t-il deux angles obtus ?	oui
Q11. Le polygone a-t-il des côtés parallèles de même longueur ?	oui
Q12. Les côtés du polygone sont-ils de même longueur ?	non

Etant connu Q1/R1, quelle est la pertinence de la question 2 ? Ou celle de la question 3 ? Ou étant donné Q3/R3 quelle est la pertinence de la question 7 ? ... La pertinence d'une question en fonction de la donnée d'un couple Qi/Ri (ou de plusieurs) précédents(s) se définit par le fait de faire avancer la recherche, c'est-à-dire d'avoir une nouvelle information dont on ne disposait pas avant la question/réponse.

La pertinence se traduit souvent par l'usage des mots « utile » ou « inutile ». Une question est « utile » si elle permet d'avoir de nouveaux indices.

Consigne : Sachant que le polygone cherché a telle propriété, est-il utile de poser une question sur telle autre propriété ?

Dans notre expérimentation, les élèves ont à coder 1 ou 0 selon que la question est utile ou inutile, ils disposent d'une nouvelle feuille contenant les formes utilisées dans la version 1 (scène 1), de manière à pouvoir attester ou non de l'évolution de l'exploration des solutions possibles, suite à un nouveau couple Q/R. Pour rendre visible pour les élèves cette idée d'une avancée dans l'exploration des possibles, nous avons tenu à ce qu'ils notent sur leur

feuille par un système de codage qui leur était approprié l'évolution de leur ensemble de solutions possibles ou réfutées. Comme dans la scène 1, certains barrent les formes, d'autres utilisent des systèmes de croix. Nous reprenons ci-dessous des exemples avec le système de marques « barré ». Ainsi, avec les 17 figures, ils peuvent donc rayer au fur et à mesure et faire fonctionner le critère de pertinence (d'utilité) d'une question : *une question est inutile si elle ne nous permet pas de rayer de nouvelle figure, utile dans le cas contraire. Rayer une nouvelle figure, c'est en fait avancer dans l'exploration des solutions possibles, en restreignant le champ des solutions possibles.*

Une des subtilités de cette tâche est de comprendre qu'une question/réponse peut apporter une nouvelle information sans apporter un nouvel indice, c'est-à-dire sans faire évoluer l'ensemble des solutions possibles. Par exemple « le polygone a quatre côtés » est bien une nouvelle information par rapport à « le polygone a quatre sommets », car considérer les sommets ou les côtés n'est pas du même ordre. Mais cela ne constitue pas un nouvel indice, l'ensemble des solutions déjà réfutées ou restant possible ne varie pas. C'est l'objet d'une troisième version du jeu (scène 3) que de porter l'attention des élèves sur les raisons de ces variations en termes d'équivalence ou d'implication de propriété géométrique. En effet, poursuivant l'exemple précédent, on peut référer à une propriété des polygones (par définition) relative à l'équivalence du nombre de sommets et du nombre de côtés (et du nombre d'angle). Ceci constitue *une raison* au fait de la non pertinence de la question 7 sachant Q3/R3.

Dans la version 2, la justification de l'inutilité d'une question peut être « elle ne permet pas de rayer de nouvelle figure », la référence à des connaissances mathématiques n'est donc pas nécessaire. Dans la version 3, les élèves auront à mobiliser des connaissances en géométrie.

Dans les échanges significatifs autour des formes A et G, nous avons utilisé la couleur grise pour mettre en évidence la validation contextualisée au support, et en italique celle relative à un contexte plus général de l'univers géométrique. Comme sur les exemples suivants : Sachant que le polygone est un quadrilatère (non rectangle et non carré).

- P. La question [Q5] « le polygone a-t-il cinq angles droits ? » est-elle utile ou inutile ?
E. Pas utile.
P. Pourquoi ?
E. *Un quadrilatère ne peut pas avoir cinq angles droits.*

- P. Et les questions [Q6-Q7] « Le polygone a-t-il deux (ou un) angle(s) droit(s) ? », sont-elles utiles ?
E. Oui. On raye la figure J, qui a deux angles droits et c'est un quadrilatère.
P. Oui, c'est un quadrilatère trapèze.
E. On raye aussi la Q, elle a un angle droit.

Cependant parfois, la mention de « rayure » n'est pas nécessairement le signe d'une référence contextualisée. Dans l'extrait ci-dessous par exemple, les élèves ont visiblement inféré qu'un quadrilatère avec quatre angles droits est nécessairement un carré ou un rectangle, et ensuite ils ont rayé le carré et le rectangle dessinés parmi l'ensemble des formes.

- P. La question [Q3] « le polygone a-t-il quatre angles droits ? » est-elle ensuite une question utile ?
E. Oui. Comme t'as répondu « Non » *on a rayé les rectangles et les carrés.*

P. Très bien. *Parce qu'un quadrilatère qui a quatre angles droits, c'est forcément un rectangle ou un carré.*

Dans la version 2 (cf scène 2), nous en restons avec les élèves à un constat empirique (tandis que celui de la version 3 sera géométrique), même si à l'oral, l'enseignant (parfois aussi les élèves) apporte des arguments liés à des propriétés (équivalence ou implication de propriété) Dans l'extrait suivant, nous savons que le polygone est un quadrilatère.

P5. Et la question « le polygone a-t-il cinq angles droits ? » ?

E. Pas utile.

P. Pourquoi ?

E. *Un quadrilatère ne peut pas avoir 5 angles droits.*

Cette question pourrait donner matière à discussion, à recherche (cf. Acte 3, constructions impossibles).

La présence dans le discours des élèves de cette forme de raisonnement, basée sur des propriétés ou définitions de géométrie n'est pas anecdotique. Dans le tableau ci-dessous nous avons repris les arguments pour chacune des questions pour lesquelles la tâche consiste à analyser la pertinence, en séparant les deux types de justifications, et en mettant en gras celle basée sur une rationalité géométrique et formulée par les élèves eux-mêmes.

Question réponse	Raisons empiriques.	Raisons géométriques.
Q1/R1. Le polygone a-t-il trois sommets ? Non.		E. Si tu réponds oui, on sait que c'est un triangle. Si tu réponds non on sait qu'on barre les triangles.
Q2/R2. Le polygone a-t-il quatre sommets ? Oui.	E. Donc on barre toutes les autres que quatre côtés.	P. [...] <i>Vous savez que la forme est un quadrilatère.</i>
Q3/R3. Le polygone a-t-il quatre angles droits ? Non.		E. Oui. Comme t'as répondu « Non » on a rayé les rectangles et les carrés. P. Très bien. <i>Parce qu'un quadrilatère qui a quatre angles droits, c'est forcément un rectangle ou un carré.</i>
Q4/R4. Le polygone a-t-il quatre côtés ?	E. Ben non. Il ne restait que des quadrilatères.	P. Oui. <i>Et en plus on savait déjà qu'il avait quatre sommets. Or un polygone a le même nombre de côté que de sommet.</i>
Q5/R5. Le polygone a-t-il cinq angles droits ? Non.		E. Un quadrilatère ne peut pas avoir 5 angles droits.
Q6-7/R6-7. Le polygone a-t-il deux (ou un) angle(s) droit(s) ? Non.	E. Oui. On raye la figure J, qui a deux angles droits et c'est un quadrilatère. E. On raye aussi la Q, elle a un angle droit.	
Q8/R8. A-t-il des petits côtés parallèles et des grands côtés parallèles ? Oui.	E. Comme t'a répondu Oui, on raye les figures M, P, H.	
Q9/R9. Le polygone a-t-il trois angles droits ? Non.	E. les figures qui restent n'ont pas d'angle droit.	E. La forme qu'on cherche c'est pas un rectangle.
Q10/R10. A-t-il deux angles obtus ? Non.	E. Les figures qui restent ont deux angles obtus.	
Q11/R11. Le polygone a-t-il des	E. Les figures qui restent ont des	

côtés parallèles de même longueur ? Oui.	côtés parallèles de même longueur.	
Q12/R12. Les côtés sont-ils de même longueur ? Non.	E. On peut rayer la figure C qui a quatre côtés de même longueur.	

Pour résumer, le contrat de la version 2 est basé a minima sur la production des formulations grises, elles suffisent à entrer dans le jeu de l'argumentation, où la validation attendue est celle provenant des formes elles-mêmes sur le support de travail. Bien que la validation ne porte pas encore sur les relations logiques entre les propriétés géométriques (ce sera l'objet de la version3) cette étape est importante pour faire entrer les élèves dans un nouveau type de tâche (celui de produire des arguments et de justifier une affirmation).

Scène 3. Argumenter de liens logiques entre les questions, pour l'avancée de la recherche.

La version 3 est une extension de la réflexion initiée dans la version précédente, extension à l'ensemble des formes géométriques. La tâche, tout comme celle de la version 2 est de rendre compte de la pertinence d'une question (son utilité dans l'avancée de la recherche) en fonction d'une donnée question/réponse antérieure ; or il ne s'agit plus de raisonner avec les formes choisies pour le support des versions précédentes, mais avec *toutes les formes polygonales possibles*. Ce saut permet de déplacer le travail de l'argumentation d'une modalité empirique à une modalité rationnelle. Dans la version 3, une question/réponse est déclarée utile ou inutile quand on peut justifier *avec un raisonnement géométrique* qu'elle ne permet pas de faire évoluer l'ensemble des solutions possibles.

Pour signifier ce changement du domaine des objets considérés (passage des formes supports des versions 1 et 2, aux formes polygonales en général), l'enseignant peut par exemple formuler une consigne du type :

P. On cherche un polygone particulier dans un ensemble de forme données, mais on ne peut plus regarder sa feuille, on essaye de raisonner de manière générale dans l'ensemble des formes. Par exemple, sachant que le polygone cherché est un quadrilatère ne possédant pas quatre angles droits, est-ce que la question « a-t-il des côtés opposés parallèles » est pertinente ? »

Nous proposons dans les deux paragraphes suivants de repérer les types d'arguments possibles (souvent difficiles d'accès pour les élèves) mais qui nous paraissent être un outil indispensable pour l'enseignant pour analyser les productions langagières des élèves.

Remarquons qu'en fonction de la réponse dans un couple Q/R, la question suivante peut être utile ou non utile. Considérons par exemple les deux questions suivantes : « Le polygone a-t-il trois sommets ? » et « Le polygone a-t-il quatre sommets ? ». Si la réponse à la première question est « Non, le polygone n'a pas trois côtés » alors la question « A-t-il quatre côtés ? » est une question utile. Par contre si la réponse est « oui, le polygone a trois cotés » alors la question « A-t-il quatre côtés ? » est une question inutile.

Ci-dessous, nous avons choisi de séparer les cas où sachant Q/R la question est utile, et les cas où sachant Q/R la question est inutile. A partir de nos deux transcriptions pour les

formes A et G de la version 2, nous avons repéré des types d'argumentations assez différentes.

Sachant Q/R, une question INUTILE

Nous avons repéré quatre types d'argumentations différentes :

1. Celles reposant sur un *principe de non contradiction*. Par exemple, un polygone ne peut pas posséder une propriété et en même temps ne pas posséder cette même propriété.
2. Celles où la *définition* de certains objets géométriques implique de fait certaines propriétés équivalentes : comme, par exemple, le fait d'avoir le même nombre de sommets que de côtés pour un polygone.
3. Celles reposant sur des *associations de propriétés impossibles*. Par exemple un triangle ne peut avoir deux angles droits.
4. Celles correspondant à des *implications de propriétés*. Par exemple, le fait d'avoir des côtés opposés parallèles, impose, pour un polygone à quatre côtés, que ses côtés soient de même longueur.

Pour chacun de ces types, nous montrons quelle est la question mathématique sous-jacente que l'enseignant peut reformuler avec les élèves, pour éventuellement la traiter ultérieurement avec eux.

- **Principe de non contradiction.**

Les seuls exemples que nous avons trouvés dans nos extraits de séances portent sur le nombre de côtés d'un polygone.

Forme A.

Q1. La forme a-t-elle trois côtés ? Oui.

Q6. La forme a-t-elle cinq côtés ?

Un polygone ne peut pas à la fois avoir trois côtés et ne pas avoir trois côtés. Ainsi la question Q6 n'est pas utile (sachant Q1/R1), puisque le nombre de côtés d'un polygone est unique.

- **Implications par définition.**

Certaines définitions d'objets impliquent des équivalences entre certaines propriétés.
Exemple :

Extrait transcript Figure A	Extrait transcript Figure A	Forme G
Q1. Le polygone a-t-il quatre sommets ? Non Q2. Le polygone a-t-il quatre côtés ?	Q3. Le polygone a-t-il 3 sommets ? Oui. Q4. Le polygone a-t-il 3 côtés ?	Q2. quatre sommets. Q5. Cinq angles droits.

Le nombre de sommet d'un polygone est égal au nombre de côtés (et d'angles) de ce polygone. Ainsi, connaissant le nombre de sommets d'un polygone, la question portant sur le nombre de côtés est inutile (et celle sur le nombre d'angle).

Autres exemples :

Extrait transcript Figure A
Q4. Le polygone a-t-il trois côtés ? Oui. Q9. Le polygone a-t-il un angle aigu ?

Un triangle a trois angles et ne peut avoir deux angles obtus. Il a nécessairement au moins deux angles aigus.

- **Des objets impossibles.**

Certaines propriétés sont incompatibles pour un même objet géométrique en vertu d'autres propriétés. Par exemple, un triangle ne peut avoir deux angles droits (cf. partie Argumentation avec constructions impossible).

Ainsi, dans l'enchaînement suivant la seconde question est inutile.

Exemples issus du transcript

Forme A.
Q3. Le polygone a-t-il 3 sommets ? Oui. Q7. Le polygone a-t-il 2 angles droits ?

- **Implication par propriété.**

Forme G	G	
Q8. A-t-il des petits côtés parallèles et des grands côtés parallèles ? Oui. Q11 Le polygone a-t-il des côtés parallèles de même longueur ?	Q2 A-t-il 4 sommets ? Oui. Q3 Quatre angles droits ? Non Q9 A-t-il 3 angles droits (exactement) ?	A-t-il 4 côtés ? Oui A-t-il ses côtés opposés parallèles ? Non. A-t-il 4 côtés égaux ?

Les connaissances en jeu relèvent des propriétés caractéristiques des formes usuelles (parallélogramme, losange, carré, rectangle) et des emboitements de familles (les losanges font partie de la famille des parallélogrammes, les carrés sont des losanges, ...)

A ce niveau, il faut avoir une bonne connaissance des propriétés des figures. Cette activité semble possible si les élèves ont préalablement construit le tableau de classification des figures et l'utilisent, on peut les imaginer suivant des 'chemins' dans ces emboitements de familles.

Sachant Q/R, une question UTILE

Nous avons dégager ici trois cas possibles.

- **Chercher le nombre de côtés**

Forme G
Q1. Trois sommets ? Non. Q2. Quatre sommets ?

- **Chercher des formes particulières**

Forme A	Forme G :	Forme G :
Q3. Le polygone a-t-il trois sommets ? Oui. Q5. A-t-il un angle droit ?	Q2 quatre sommets ? Oui. Q3. A-t-il quatre angles droits ?	Q2 quatre sommets. Oui. Q8 « A-t-il des petits côtés parallèles et des grands côtés parallèles ? »

- **Chercher sans stratégie particulière**

Forme A :	Forme G	Forma G :	Forme G :
Q3. trois côtés ? Oui. Q10. A-t-il trois angles aigus ?	Q2. quatre sommets ? Oui. Q6 et Q7 un ou deux angles droits.	Q2 : quatre sommets ? Oui. Q10 deux angles obtus ?	Q8. A-t-il des petits côtés parallèles et des grands côtés parallèles ? Oui. Q12. Les côtés sont-ils de même longueur ?

Intérêt de la Version 3.

L'intérêt de la Version 3 est double : placer les élèves dans un contexte de généralité du domaine de formes considérées, et les impliquer dans une réflexion de nature argumentative basée sur des propositions de la géométrie (euclidienne). Il ne s'agit peut-être pas tant de les initier à des raisonnements spécifiques de la géométrie que de suggérer que la pratique des mathématiques consiste à construire des questions. En effet la version 3 amène des questions mathématiques. Listons celles entrevues dans les exemples indiqués ci-dessus :

- Sachant qu'un polygone a quatre sommets, est-il utile de savoir s'il a ou n'a pas trois angles droits (trois exactement) ?
- Un polygone peut-il avoir un nombre de sommets différent de son nombre de côtés ? et de son nombre d'angle ?
- Un triangle peut-il avoir deux angles obtus ?
- Un triangle peut-il avoir deux angles droits ?
- Un quadrilatère peut-il avoir trois angles droits et trois seulement ?

Ce que nous retenons comme choix fondamentaux pour le C3.

Synthèse des évolutions du jeu du portrait, d'une tâche de description vers une tâche d'argumentation.

Le jeu du portrait	Tâche	Objectif
Version 1	Retrouver la forme choisie par le maître en posant des questions portant uniquement sur des propriétés géométriques, auxquelles le maître ne répond que par oui ou par non.	S'approprier des formes langagières sur les propriétés des formes, comprendre qu'une forme peut-être décrite (et donc reconnue) par ses propriétés géométriques.
Version 2	Etudier la pertinence des questions posées en termes d'avancée apportée pour la recherche, dans le contexte des formes et du jeu du portrait jouées avec ces formes.	Mettre en lien les questions les unes entre elles en établissant des liens logiques (des inférences) entre les réponses et les questions. Si on sait que la forme a trois côtés alors c'est un triangle, alors elle ne peut pas avoir trois angles droits, alors,
Version 3	Etudier la pertinence des questions posées en termes d'avancée apportée pour la recherche, dans le contexte générale de l'ensemble des formes géométriques.	Mettre en lien les questions entre elles en établissant des liens logiques (des inférences) entre les réponses et les questions.

Ces différentes tâches autour du jeu du portrait nous paraissent assurer un mouvement cyclique dans l'apprentissage des connaissances de géométrie : entre découverte, utilisation, appropriation, compréhension, connexions, ... Il s'agit finalement toujours des mêmes propriétés des formes polygonales concernant les grandes familles et sous familles, des pratiques courantes à l'école :

- polygone : égalité du nombre de côtés et du nombre de sommets.
- triangle, quadrilatère, pentagone.
- triangle rectangle, triangle isocèle, triangle équilatéral.
- trapèze, parallélogramme, rectangle, losange, carré.

Le point de vue spécifique au jeu du portrait est de sortir des étiquetages de ces formes pour entrer dans les dimensions logiques relatives aux définitions, implications et équivalences de propriétés géométriques.

Acte 5. Pratiques de classement, tri : emboitements de familles.

La pratique de classement s'appuie sur le repérage de propriétés géométriques, les classements possibles se font alors en fonction de ces propriétés. C'est pourquoi nous avons choisi, tout comme pour le cycle 2, de faire pratiquer ces classements en fin de progression, lorsque les propriétés ont été travaillées antérieurement, à partir des jeux de construction avec contraintes (Acte2), et les constructions possibles et impossibles (Acte3). De cette manière, les critères considérés et les différences à envisager pour un critère sont déjà établis. Par exemple, le fait d'avoir tenté de construire un triangle avec deux angles droits, et d'avoir argumenté de son impossibilité (théorique) permet d'envisager seulement deux cas pour le critère « angle droit dans un triangle » : zéro ou un.

Autre questions, à proposer éventuellement en amont des situations de classification :

- « Est-il possible qu'un parallélogramme ait un angle droit (exactement) ? »
- « Est-il possible qu'un parallélogramme ait deux angles droits (exactement) ? »
- « Est-il possible qu'un parallélogramme ait trois angles droits (exactement) ? »

Les élèves auraient alors à construire le tableau de classification en tenant compte des conclusions à ces questions. Il nous semble souhaitable, autant que possible, de développer chez les élèves des capacités à justifier, argumenter mais aussi à prendre des initiatives, être autonome.

Les notions sous-jacentes à cette présentation sont l'appartenance d'un élément à un ensemble, l'inclusion d'un ensemble dans un autre, l'intersection de deux ensembles.

Nous n'explicitons pas ces notions avec les élèves mais nous parlerons d'appartenance à une famille (ou à deux familles) et de sous-familles.

Il est possible de faire le lien entre les activités d'argumentation construction et les activités de classement. Dans ce cas, la construction des tableaux est de la responsabilité des élèves et doit tenir compte des conclusions du travail d'argumentation construction

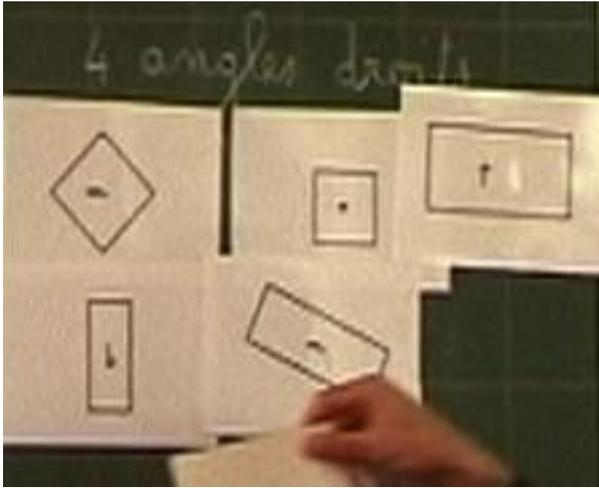
Rappelons que le classement selon la nature des bords (droit ou arrondi) et selon le nombre de côté relève du cycle 2 (cf. Partie I, Acte 3). En cycle 3, il peut être bon de rappeler ces premiers classements, qui amènent à distinguer les polygones des autres formes, puis, parmi les polygones, à distinguer les triangles, les quadrilatères, les pentagones et autres familles de polygones nommées par un préfixe indiquant le nombre de cotés. Selon le niveau de classe (CE2, CM1, ou CM2) le temps et les modalités consacrés à cette réactivation diffèrent.

Au niveau du cycle 3, les critères de classements sont plus nombreux : présence d'angle(s) droit(s), de côtés de même longueur, de côtés parallèles, ... La difficulté des pratiques de classement à l'école primaire provient de la double orientation des apprentissages : apprentissage des distinctions entre propriété et propriété caractéristiques (cf. Acte 6), de définition de famille de formes à partir d'autres familles de formes. Une rupture s'amorce au cycle 3 : les familles de polygones se construisent de manière emboîtées les unes dans les autres à partir des propriétés qui les caractérisent, contrairement au cycle 2 où elles restent souvent juxtaposées. Mais alors le problème est de bien d'envisager qu'il existe plusieurs emboitements possibles.

Précisons certaines de ces difficultés :

- **Le produit de la classification est fonction du problème.**

Si on classe les quadrilatères selon le nombre d'angles droits on obtient certaines familles qui ne portent pas de nom académique, et d'autres oui : les rectangles.

AUCUN angle droit	UN angle droit	DEUX angles droits	QUATRE angles droits
Pas de nom particulier	Pas de nom particulier	Pas de nom particulier	 <p>LES RECTANGLES (les carrés sont des rectangles particuliers)</p>

Dans cette classification, on n'a pas d'emboîtement. Pour cela il faudrait considérer une autre propriété. Dans cette classification, la famille des losanges par exemple n'est pas visible. Il faudrait considérer une autre classification, c'est-à-dire repartir des quadrilatères et considérer une autre propriété pour faire apparaître la famille des losanges comme sous-famille emblématique.

- **Une même famille peut être obtenue à partir de catégorisations différentes.**

Restons avec la famille des rectangles. Ci-dessus, elle est obtenue comme famille de quadrilatères possédant quatre angles droits.

Elle pourrait aussi être obtenue comme :

- famille de trapèzes ayant deux angles droits non consécutifs ;
- famille de parallélogrammes ayant un angle droit ;
- ...

Ce sont les propriétés caractéristiques que nous retrouverons dans l'Acte 6.

- **Conjonction de coordination et/ou exclusif ou inclusif**

La différence entre inclusion, exclusion, intersection. Par exemple dans tableau ci-dessus, on suppose que la colonne « UN angle droit » signifie « un angle droit et un seulement », de même pour deux, ... tandis que dans un exemple pris ci-dessous avec les triangles et le critère « nombre de côté de même longueur », les colonnes seront imbriquées, et le nombre signifiera « ce nombre *au moins* ».

L'ensemble de ces précautions amène alors à distinguer deux types de scènes :

Scène 1 : classements divers, principe et règles du jeu

Scène 2 : classements et emboîtement académique

Scène 1. Classements divers, principe et règles du jeu

Le travail dans ce type de scène est très proche du travail sur les constructions avec contraintes : un critère (par exemple le nombre d'angle droit) permet de repérer des grandes familles, dont certaines portent un nom et seront alors caractérisées par la valeur du critère choisi, et dont d'autres ne sont pas spécifiquement nommées.

Par exemple, classement des quadrilatères en fonction du nombre d'angle(s) droit(s) ci-dessus ; ou les quadrilatères et le nombre de côtés de même longueur (pour caractériser les losanges).

Nous avons séparé cette scène de la suivante pour marquer les jeux possibles de classement qui n'aboutissent pas à des familles emblématiques, mais permettent de comprendre le principe et les enjeux d'une pratique de classement, à savoir le travail sur les propriétés géométriques.

Scène 2. Classements et emboîtements académiques

Etant données les propriétés géométriques travaillées au cycle 3 (angle droit, parallélisme, égalité des longueurs des côtés, axes de symétrie) et le fait que les quadrilatères ont quatre côtés, on pourrait envisager de multiples classements et sous classements. La pratique de classement n'est pas dépendante de l'ordre des classifications effectuées. Cependant, certaines classifications font office de norme au sein de la communauté scolaire, dans l'optique d'instaurer des implications entre propriétés dont la connaissance et l'usage seront requis au collège pour effectuer des démonstrations.

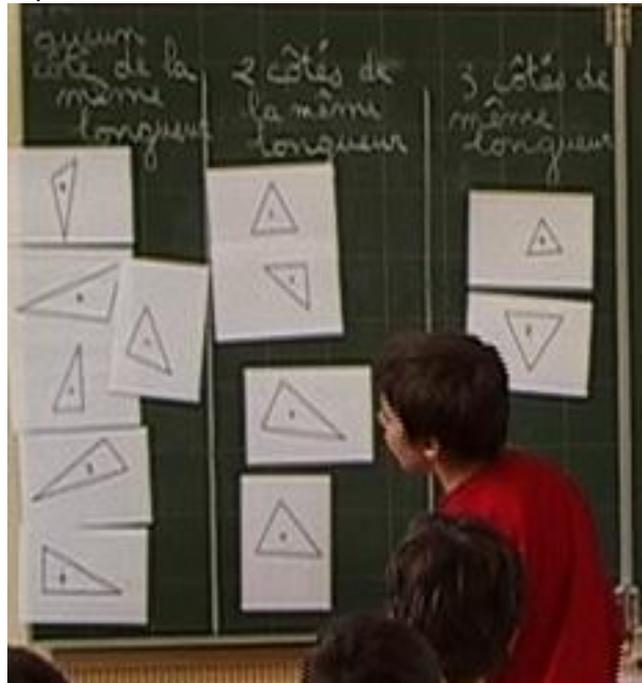
Classements dans la famille des triangles

Deux types de classement peuvent être faits selon que l'on considère l'un ou l'autre des critères suivants :

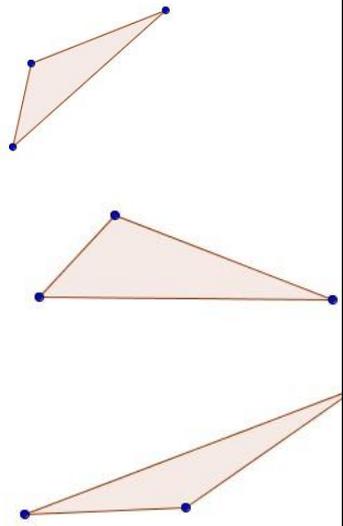
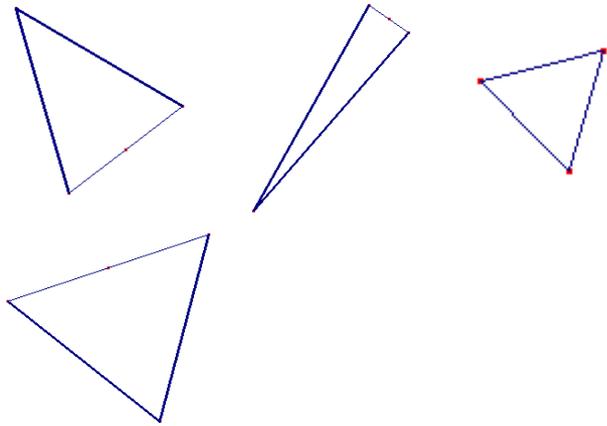
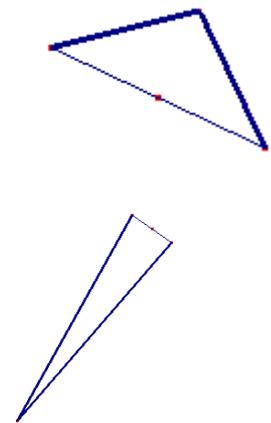
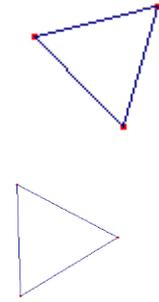
- angle droit, zéro ou un
- côtés de la même longueur : zéro, deux ou trois.

- **Triangles et côtés de la même longueur**

Dans notre expérimentation, l'enseignant avait choisi de considérer que « deux côtés de la même longueur » signifiait « deux exactement », ce qui donne une image telle que celle du tableau ci-dessous, de trois sous-familles, dont la dernière seulement est nommée en géométrie « triangles équilatéraux ».



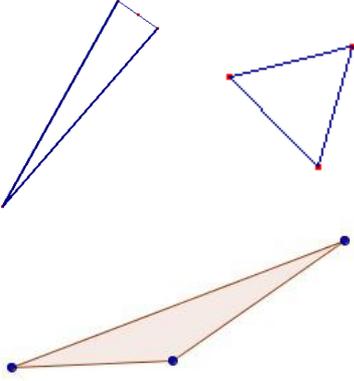
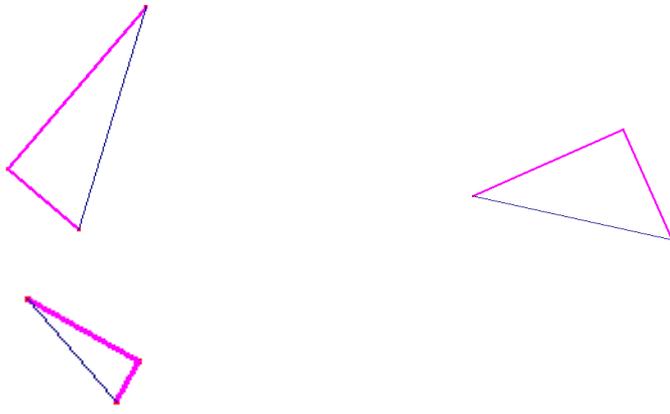
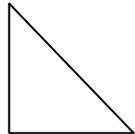
S'il l'on cherche à faire apparaître la famille des triangles « isocèles », on est obligé de considérer que « deux côtés de même longueur » signifie « deux au moins », c'est-à-dire en fait deux ou plus de deux. Alors les triangles équilatéraux sont une sous-famille des triangles isocèles, ce qui nous donne un schéma comme ci-dessous, différents du premier.

<p>Triangles avec AUCUN côté de la même longueur</p> 	<p>Triangles avec deux côtés de la même longueur (deux au moins).</p> <p>LES TRIANGLES ISOCELES</p>  <p>DEUX SEULEMENT de la même longueur</p>  <div style="border: 1px dashed black; padding: 5px; display: inline-block;"> <p>TROIS cotés de la même longueur. LES TRIANGLES EQUILATERAUX</p>  </div>
--	---

Nous n'avons pas mis dans les exemples de triangles rectangles, ni rectangles isocèles, or il faudrait les rajouter.

- **Triangles et angle droit**

Cette classification permet de mettre en évidence la famille des triangles rectangles.

<p>Triangles avec AUCUN angle droit</p> 	<p>Triangles avec un angle droit. LES TRIANGLES RECTANGLES</p> 
	<p>Triangles rectangles avec deux côtés de même longueur. LES TRIANGLES RECTANGLES ISOCELES</p> 

- **Modalités de déroulement lors des expérimentations.**

Les étiquettes manipulables des formes sont affichées en vrac sur la partie gauche du tableau, les colonnes de classement sont indiquées sur une autre partie.

Un élève vient effectuer un premier classement. L'enseignant demande de rappeler avec quel outil géométrique on peut vérifier la propriété géométrique (gabarit d'angle droit pour les angles droits et compas pour les égalités de longueur) et fait effectuer cette vérification pour une forme. Le nom des sous-familles emblématiques est indiqué au dessus du groupe de formes correspondantes. Rappelons que ces noms sont déjà introduits au cours de la progression, notamment par les activités de construction avec contraintes. Il s'agit ici de revoir par une pratique de classement ce qui aura été produit par une pratique de construction, et de renforcer la notion de « propriété caractéristique », c'est-à-dire une propriété ou un ensemble de propriétés qui définit de manière suffisante (et nécessaire) la famille d'objets considérée.

L'enseignant photographie le tableau de classement, qui sera ensuite réimprimé pour coller dans le cahier de géométrie, avec un texte qui décontextualise le travail et permet d'institutionnaliser les savoirs de référence. Par exemple :

Les triangles sont des polygones à trois côtés.

Ils peuvent posséder certaines propriétés géométriques.

Triangles et côtés de même longueur : S'ils ont deux côtés de même longueur (deux au moins), on les appelle *les triangles isocèles*.

Les triangles isocèles avec trois côtés de même longueur s'appellent des *triangles équilatéraux*. La famille des triangles équilatéraux fait partie de la famille des triangles isocèles.

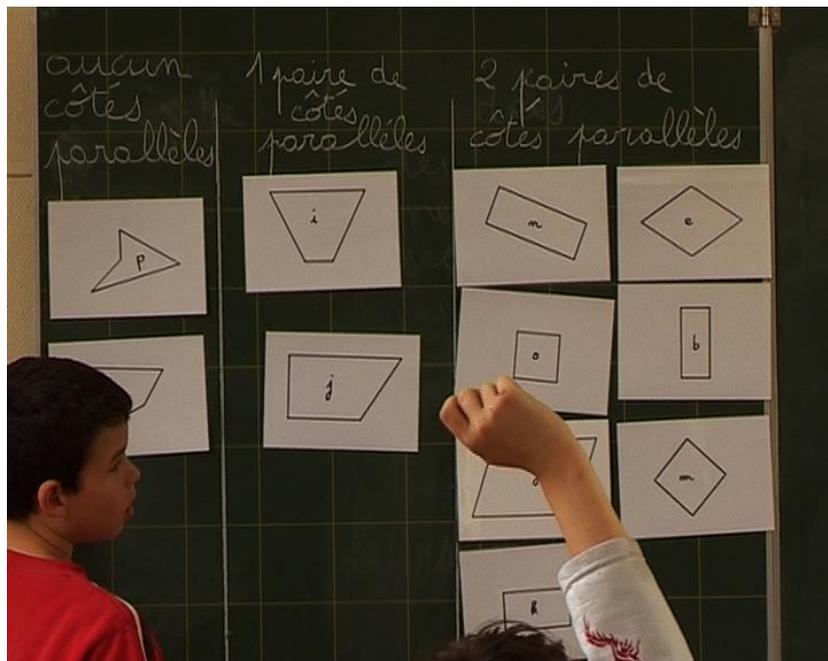
Triangles et angle droit : s'ils ont un angle droit on les appelle *les triangles rectangles*.

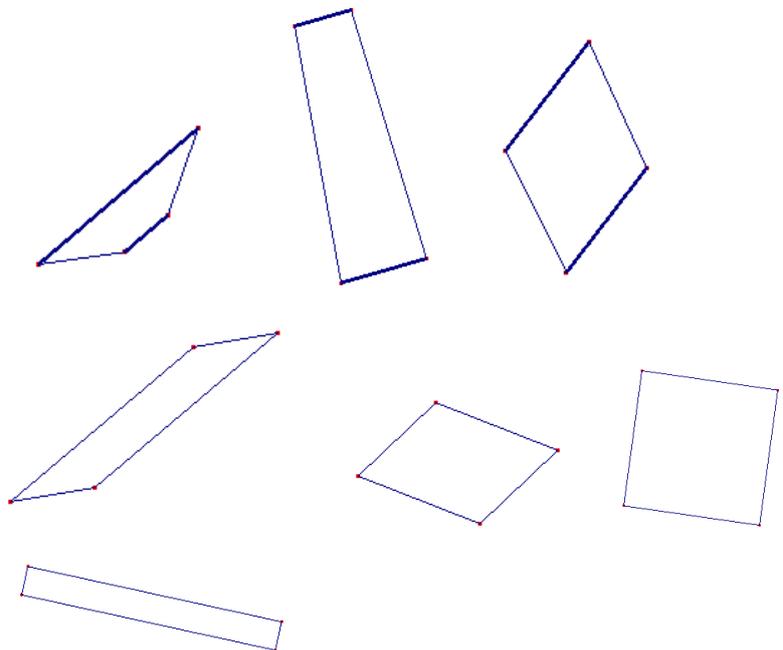
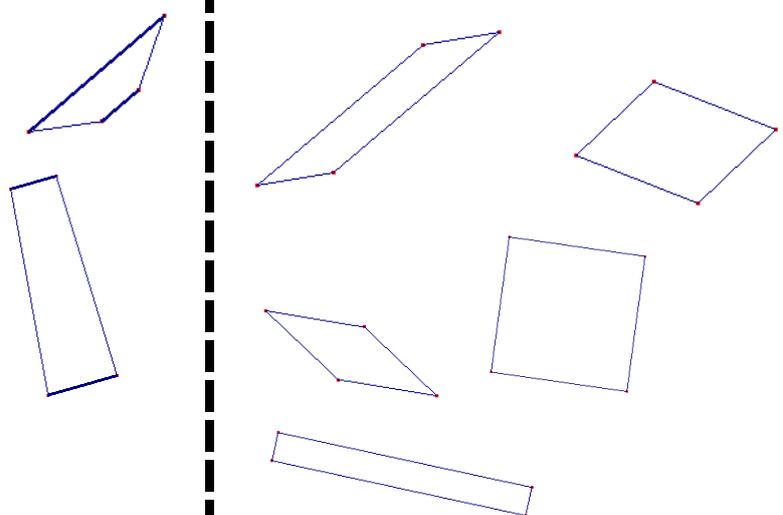
La famille des *triangles rectangles isocèles* appartient à deux familles différentes : la famille des triangles rectangles et de la famille des triangles isocèles.

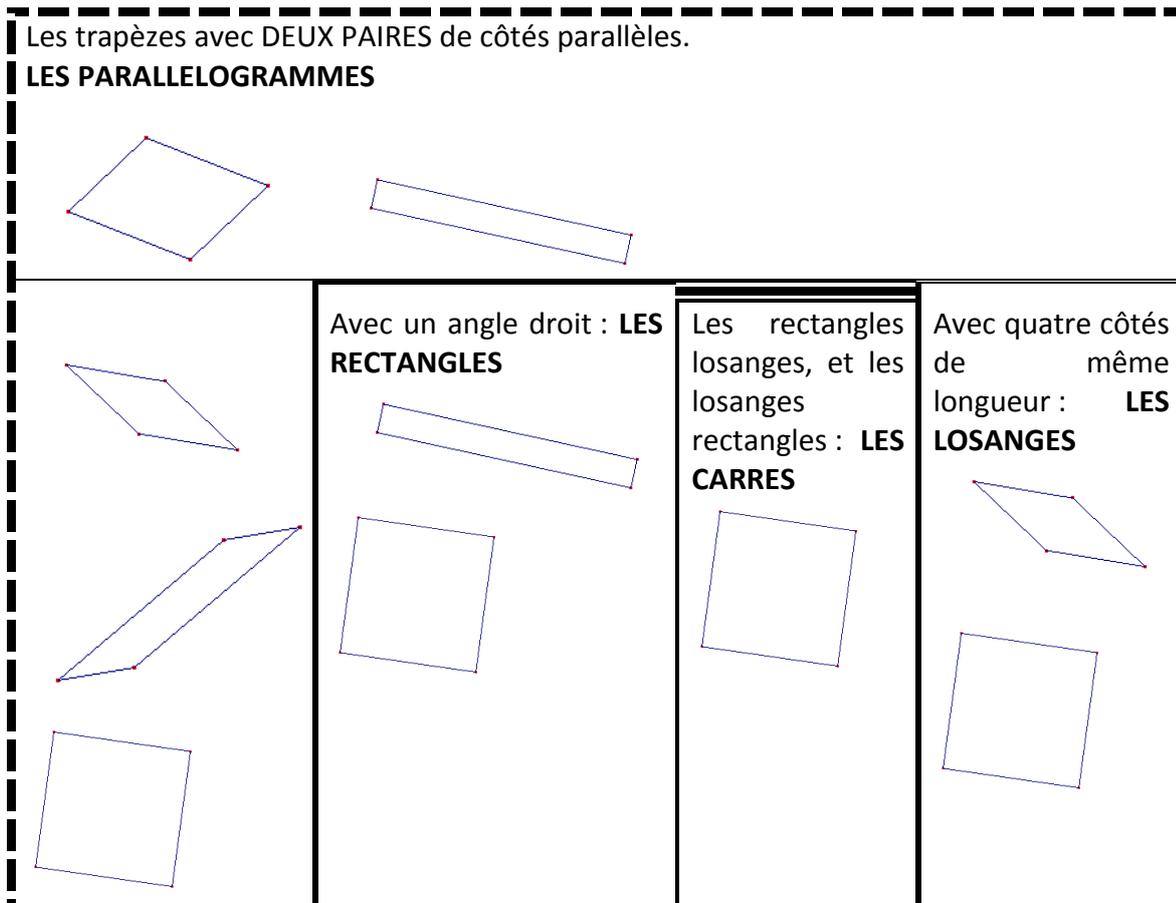
Classements des quadrilatères

- **Quadrilatères et côtés parallèles**

Le premier classement proposé est fonction du nombre de paires de côtés parallèles, aucune, une ou deux paires de côtés parallèles, de manière à aboutir à une première séparation entre les trapèzes (une paire de côtés parallèles), les parallélogrammes (deux paires de côtés parallèles) et les autres polygones.

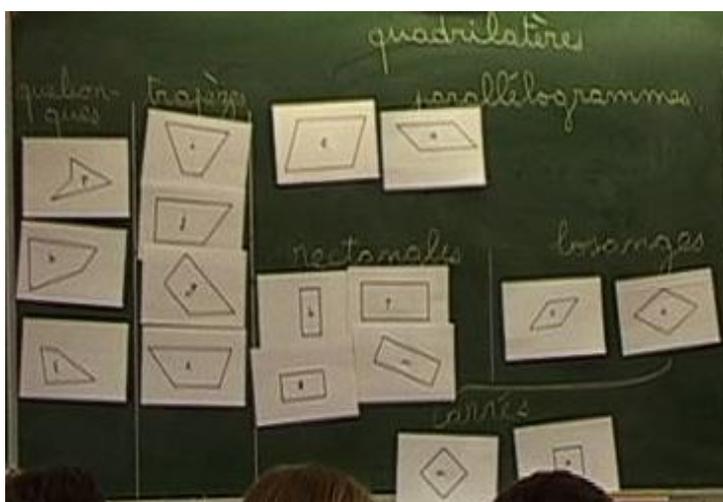
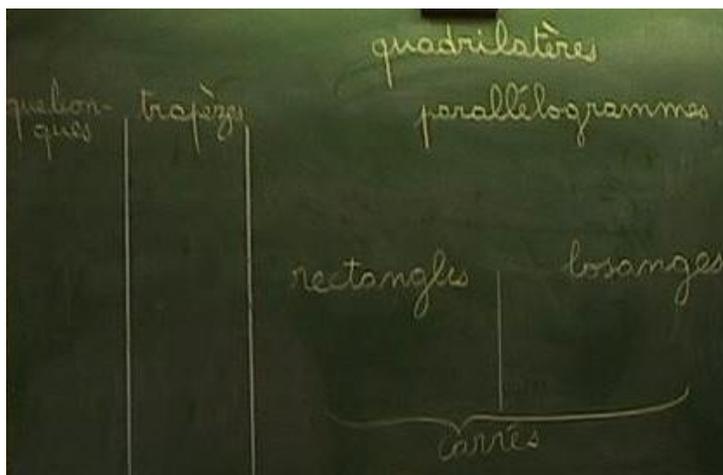


<p>AUCUN côté parallèle</p>	<p>Une paire de côté parallèle (une paire au moins) LES TRAPEZES</p> 
<p>UNE SEULE PAIRE de côtés parallèle</p>	<p>DEUX PAIRES de côtés parallèles. LES PARALLELOGRAMMES</p> 



Le risque de vouloir tout mettre dans un même tableau, est de tomber dans une approche juxtaposée des familles de polygones alors qu'il s'agit de mettre en place une conception emboîtée des classifications. Avec des emboitements possibles différents en fonction des propriétés que l'on prend comme référence.

Nous sommes nous-mêmes tombés dans ce piège, et cela est visible sur l'image ci-dessous, où les colonnes donnent à voir une juxtaposition, laissant penser que les trapèzes et les parallélogrammes sont deux familles distinctes, alors qu'elles sont emboîtées l'une dans l'autre si l'on considère la propriété de parallélisme des côtés. De même elle laisse penser que les rectangles ne sont pas dans la famille des trapèzes alors qu'un rectangle ou un losange est bien un trapèze particulier, ...



Il est relativement difficile de faire tenir tout ensemble, et même s'il l'on trouve des images d'emboîtements, elles laissent implicites les raisons de cet emboîtement.

Or la notion de propriété caractéristique est délicate : par exemple un rectangle peut être défini (caractérisé) comme un parallélogramme possédant un angle droit, mais il peut aussi être défini comme un trapèze ayant deux angles droits non consécutifs, voire, sans passer par le trapèze, un rectangle est un quadrilatère ayant quatre angles droits. Ce que fournissent les classifications ce sont des propriétés caractéristiques des ensembles de formes, et en cela elles sont liées avec la pratique de description « fiches d'identité » (Acte6, Scène2).

Ce qui est fondamental du point de vue des enjeux de savoirs pour la suite de la scolarité des élèves, c'est la dynamique du lien entre classement et propriétés caractéristiques, et non les aspects statiques d'un classement dont les raisons resteraient opaques.

D'où la nécessité de lier cette pratique de classement avec une pratique de description, dans le but de dégager ces distinctions entre propriétés et propriétés caractéristiques de familles de formes. Ces distinctions vont assurer le caractère dynamique des argumentations.

Acte 6. Pratiques de description : les fiches d'identité.

Il convient de proposer ce type d'activités à la suite de tâches relatives à l'Acte 2 « Pratiques de construction, jeu sur les contraintes, étude de possibles » et à l'Acte 4 « Pratiques de description argumentée, jeu du portrait, scène 1 ». En effet, deux difficultés majeures sont inhérentes au travail sur les « identités », dont certains aspects sont déjà travaillés à travers ces activités :

- la distinction entre propriété et propriété caractéristique ;
- la distinction entre l'ensemble de toutes les formes considérées dans la famille, par le nom générique, et la spécificité d'un dessin qui particularise un type de représentation au détriments d'autres représentations (et en particulier exclue ainsi les singularités de formes contenues dans la famille).

Détaillons le premier point (le second sera traité dans l'exposition de la scène 1).

- **La distinction entre propriété et propriété caractéristique**

Une propriété est un attribut possédé par une forme en tant qu'objet mathématique (indépendamment des dessins qui peuvent la représenter), et que d'autres formes peuvent aussi posséder. Par exemple, le carré a quatre côtés de même longueur, tout comme les losanges non carrés, ou la famille des « hexagones avec quatre côtés de même longueur ». Les rectangles ont deux côtés parallèles, tout comme les trapèzes, les losanges, les hexagones réguliers, ...

Ainsi, une propriété permet de décrire « une qualité » de la forme, mais sans caractériser cette forme. Voici par exemple une liste de propriétés que l'on peut considérer pour certaines formes :

Liste de propriétés géométriques (non caractéristiques)		
Un carré	Un triangle isocèle	Un parallélogramme
Il a quatre angles droits. C'est un polygone. Il a deux côtés opposés parallèles. Ses diagonales se coupent en leur milieu. Il a deux côtés de même longueur. Il a un angle droit. Il a quatre angles droits. ...	C'est un polygone.	C'est un trapèze particulier.
	Il a trois côtés.	Il a un centre de symétrie.
	Le pied de la hauteur issue du sommet opposé à sa base est le milieu de la base.	Il a deux côtés opposés parallèles.
	Il possède un axe de symétrie.	Ses diagonales se coupent en leur milieu.
	Il a deux côtés de même longueur.	Il a deux côtés de même longueur.

Une propriété « caractéristique » est quant à elle une propriété (ou un ensemble de propriétés) qui *nécessairement et suffisamment* impose que la forme considérée soit *telle* forme. Par exemple, le fait pour un polygone d'avoir « quatre côtés de même longueur et un angle droit » impose que cette forme soit un carré. « Impose » signifie que si l'on cherche toutes les formes qui possèdent cette propriété, alors toutes ces formes sont des carrés ; et réciproquement tout carré possède cette propriété.

Par ailleurs, on entend en général par « propriété caractéristique » un ensemble *minimal* de propriétés permettant de caractériser la forme (et surtout on entendra cela au collège). Par exemple pour le carré, « avoir quatre angles droits et quatre côtés de même longueur » n'est pas minimal ; par contre « avoir quatre angles droits et deux côtés consécutifs de la même longueur » est minimal pour caractériser tous les carrés, ou bien « avoir quatre côtés de même longueur et un angle droit ». Ainsi l'écrit de la photo ci-dessous correspond à une liste de deux propriétés mais dont l'association n'est pas une propriété caractéristique des carrés.



Cette ambiguïté est présente assez tôt dans la scolarité des élèves, sans qu'elle ne soit explicitée, et qu'elle donne lieu à une clarification de contrat.

Pour bien visualiser la différence, voici par exemple une liste de propriétés caractéristiques des formes considérées précédemment :

Liste de propriétés géométriques **caractéristiques**

Un carré	Un triangle isocèle	Un parallélogramme
Polygone à quatre angles droits et deux côtés consécutifs de même longueur.	Polygone à trois côtés, dont deux côtés ont la même longueur.	Trapèze ayant deux paires de côtés parallèles.
Polygone avec quatre côtés de même longueur et un angle droit.	Polygone à trois côtés, ayant un axe de symétrie.	Polygone avec quatre côtés, possédant un centre de symétrie.
Polygone dont les diagonales se coupent en leur milieu, sont perpendiculaires et de même longueur.	...	Polygone à quatre côtés ayant deux côtés opposés parallèles et de même longueur.
Polygone a quatre côtés ayant quatre axes de symétrie.		Polygone dont les diagonales se coupent en leur milieu.
...		

Dans les deux tableaux ci-dessus (propriétés, et propriétés caractéristiques) on peut noter la différence de formulation entre « *il [le carré] a telle propriété* » correspondant au fait de considérer déjà telle forme particulière, et « Polygone ayant telle(s) propriété(s) », formulation portant sur une forme *en général*, et spécifiant progressivement des propriétés qui restreignent l'ensemble des formes possibles correspondant à la description, pour finalement restreindre les possibles à la forme considérée.

Cette distinction « propriété » et « propriété caractéristique » donne alors lieu à deux types d'activités différents décrites en scène 1, et en scène 2 respectivement, dont les enjeux et les éléments d'institutionnalisation sont alors très différents.

Scène 1. Listing de propriétés

Quelles peuvent être les propriétés géométriques associées à une forme ? Etude d'un listing de propriétés.

Les élèves doivent écrire le nom de la figure et toutes les propriétés observées sur cette forme, ils cherchent en binôme puis viennent compléter au fur et à mesure la liste des propriétés. Certaines propriétés peuvent découler de propriétés déjà écrites, pour le losange par exemple, un élève peut écrire : « quatre côtés de même longueur », puis « c'est un quadrilatère », « il a des côtés opposés parallèles ». Les deux dernières informations ne sont pas nécessaires (elles peuvent être déduites de la première) mais seront acceptées dans cette phase, puisqu'il s'agit de lister un ensemble d'attribut.

Les difficultés auxquelles nous avons été confrontées durant nos expérimentations, et qui semble intrinsèque à l'activité :

- **Rupture de contrat avec le jeu du portrait scène 2 et 3.**

Les équivalences ou les implications de propriétés, étudiées dans l'acte 4, jeu du portrait, ne sont plus de mises ici, puisqu'il s'agit d'un listing, qui peut répéter des significations correspondants à des attributions différentes. Par exemple sur cet extrait d'un échange en classe à propos des parallélogrammes :

Les élèves viennent au tableau et notent dans au fur et à mesure.

E. Un parallélogramme a quatre sommets.

E. Il a quatre côtés.

E. On sait qu'il a quatre sommets, ça sert à rien d'écrire quatre côtés !

Le maître précise alors qu'il s'agit d'écrire des propriétés (même si elles sont redondantes).

Cette implication « quatre sommets dont quatre côtés » et l'évitement de la répétition était justement l'enjeu des scènes 2 et 3 du jeu du portrait. Or ici, le contrat est modifié. On ne cherche pas à inférer, ou à déduire, mais à faire une liste de tout ce qu'on peut dire à propos de la forme considérée, même si on se répète, même si des choses en impliquent d'autres, et même si certaines formulations sont équivalentes.

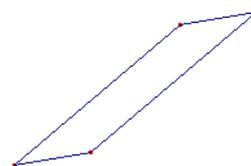
- **Confusion entre l'objet géométrique et les dessins qui peuvent le représenter.**

Les propriétés d'un objet géométrique ne sont pas les propriétés d'un dessin qui le représente. Par exemple le dessin ci-dessous de parallélogramme, dessin emblématique de cette forme, ne permet pas d'envisager qu'en tant qu'objet géométrique un rectangle ou un carré est aussi un parallélogramme (particulier certes). En effet, le dessin ne donne pas à voir d'angle droit, et donc aucun indice ne mène à la piste rectangle. Exemple, et toujours à propos de la fiche « parallélogramme », avec ce dessin utilisé au tableau dans la classe :

E. Il n'a pas d'angle droit.

P. Il n'a pas d'angle droit, est-ce que ça vous va ou est-ce que ça vous choque ? »

Es: ça nous va.



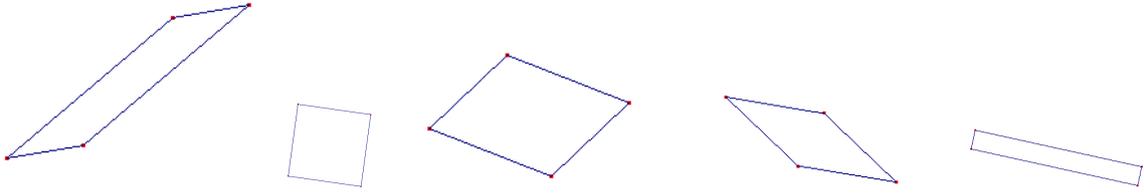
Délicat, non ?

Dès l'instant où nous écrivons « parallélogramme », et où l'on s'intéresse à la forme *en général*, nous ne faisons plus référence à un dessin mais à l'objet géométrique. Si un parallélogramme n'a pas d'angle droit, alors les rectangles et les carrés ne font pas parties de la famille des parallélogrammes. C'est ce qui « choque » l'enseignant sans choquer pour autant les élèves.

Nous voyons dans cet exemple que maître et élèves semblent parler d'un même objet, alors que les élèves s'intéressent à ce qu'ils voient (un dessin, un représentant de l'objet géométrique) et le maître à un objet géométrique (acceptant une infinité de représentants). Or il est important de préciser avec les élèves quel est l'objet de discours : le parallélogramme comme forme géométrique. Pour ce faire, il peut être très utile de réintroduire dans le milieu matériel de la classe, le tableau de classification où apparaissaient de multiples dessins de parallélogrammes (dont les dessins singuliers), ou bien de relancer une activité de construction de parallélogramme avant de s'intéresser à élaborer une liste de propriétés. Car alors les constructions, en cherchant à trouver des dessins les plus variés possibles (généraux et spécifiques) produiront un ensemble assez

pertinents de dessins sur lesquels les élèves pourront s'appuyer (puisque'il est indéniable qu'ils s'appuient sur eux).

Et alors, en éléments de synthèse la classe peut aboutir à une fiche comme celle ci-dessous, par exemple.

<p>Les parallélogrammes (définition : polygones ayant deux paires de côtés parallèles)</p> 
<p>Liste de propriétés géométriques d'un parallélogramme en général</p> <ul style="list-style-type: none">• Il a deux côtés de même longueur.• Il a quatre côtés.• ...

- **Une propriété caractéristique est aussi une propriété**

Les élèves peuvent aussi lister une propriété qui est aussi une propriété caractéristique (renforçant la difficulté à saisir que ce sont deux choses différentes). Par exemple, toujours à propos du parallélogramme :

E. Il a deux côtés parallèles et les deux autres côtés sont aussi parallèles.

C'est en effet une propriété caractéristique, car servant à déterminer une forme comme parallélogramme et réciproquement, comme une définition. Bien sûr il faut noter les propriétés caractéristiques dans la liste des propriétés de la forme. La question de savoir « quelle propriété ou association de propriétés imposent à une forme d'être un parallélogramme ? » peut se poser à partir de la liste construite.

- **L'amalgame de plusieurs difficultés.**

On trouve aussi des propositions d'élèves qui comportent plusieurs types de difficultés évoquées ci-dessus. Par exemple :

E. Il a deux petits côtés parallèles et deux grands côtés parallèles

L'élève évoque une propriété caractéristique, mais dans le cas où les formes sont des parallélogrammes non losanges, puisqu'en précisant « petit » et « grand », on peut supposer qu'il n'inclut pas le cas où les côtés sont de même longueur.

Cependant c'est une interprétation et peut-être que l'élève envisage aussi le cas où « petit » et « grand » peuvent être égaux.

On trouve cette même difficulté pour la suggestion suivante :

E. Un parallélogramme a deux angles aigus et deux angles obtus.

Cette formulation exclut-elle le cas où l'angle est à la fois aigu et obtus c'est-à-dire « droit » ? Ceci ne peut être décidé qu'en classe et au regard des conventions et des références

communes que l'on adoptera. Si on exclut qu'un angle puisse être à la fois aigu et obtus, alors la propriété précédente ne peut pas être une propriété d'un parallélogramme. Si au contraire on accepte cette possibilité, alors la formulation ci-dessus peut être inscrite dans la liste des propriétés.

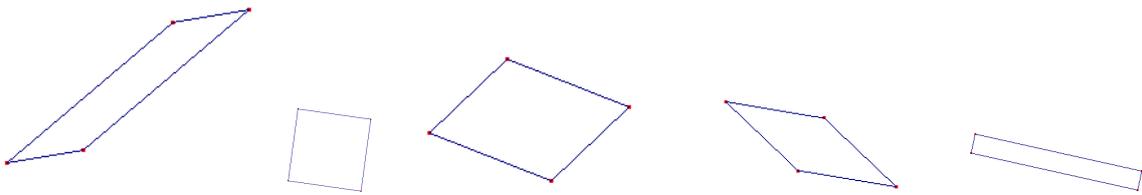
Scène 2. Propriétés caractéristiques

Le type de tâche considéré ici relève d'un travail de fin CM2, voire collège. Cependant, dans la mesure où nous le pensons articulé avec les tâches de construction avec contraintes aboutissant à des familles emblématiques de polygones (Acte 2, scène 2) il nous semble possible dans une progression de fin de cycle 3 de sensibiliser les élèves à cet aspect, aspect indispensable à l'entrée dans les raisonnements déductifs pratiqués dans l'enseignement de la géométrie au collège.

Rappelons qu'une propriété « caractéristique » est une propriété (ou un ensemble de propriétés) qui impose(nt) que la forme considérée soit *telle* forme. Et on entend par « propriété caractéristique » un ensemble *minimal* de propriétés permettant de caractériser la forme. Avec cette règle, on peut alors basculer de la scène précédente à celle-ci, en demandant de chercher parmi ces propriétés (et d'autres peut-être non écrites) et parmi les associations possibles de ces propriétés, celles qui permettraient de désigner des formes qui seraient *forcément* telle forme *en général*.

Contrairement à la scène précédente, qui était en rupture avec le jeu des implications et équivalences du jeu du portrait (Acte 4, scènes 2 et 3), on retrouve ici le fait de devoir prendre en compte ces implications et équivalences de propriétés pour justement ne pas être redondant et disposer d'un minimum d'assertions pour caractériser une forme.

Donnons pour exemple un tableau de synthèse pouvant rassembler les propriétés caractéristiques envisagées :

Les parallélogrammes (définition : polygones ayant deux paires de côtés parallèles)

Liste de propriétés géométriques CARACTERISTIQUES d'un parallélogramme en général :
<ul style="list-style-type: none"> • Quadrilatère dont les côtés opposés sont parallèles.
<ul style="list-style-type: none"> • Polygone dont les diagonales se coupent en leur milieu.
<ul style="list-style-type: none"> • Trapèze dont deux côtés opposés ont la même longueur.
<ul style="list-style-type: none"> • Quadrilatère dont les côtés opposés ont la même longueur.
<ul style="list-style-type: none"> • Polygone à quatre côtés ayant deux côtés opposés parallèles et de même longueur.
<ul style="list-style-type: none"> • Polygone avec quatre côtés, possédant un centre de symétrie.
<ul style="list-style-type: none"> • ...

Théoriquement, la vérification qu'une proposition convient est complexe (à ce niveau), car il s'agirait de redémontrer des équivalences de propriétés. Mais en pratique, au sein d'une CM2, on peut se contenter sommairement de revenir à une tâche de construction, en

cherchant à voir si en effet l'assertion amène forcément à un parallélogramme (même particulier). Si l'on trouve un contre-exemple, une forme qui correspond à l'assertion, sans être un parallélogramme, alors celle-ci pourra être réfutée. Si par contre on ne trouve pas de contre-exemple, il faudra faire confiance au professeur ...

Conclusion

Ce que nous retenons de cette expérimentation :

La possibilité de proposer, dès le CP, différentes activités sur les polygones pour en connaître les caractéristiques, les reconnaître, les décrire, les construire, les trier.

La nécessité de rappeler au cycle 3 les caractéristiques, de donner à voir et à construire une grande variété de polygones (pas seulement les formes usuelles, pas toujours dans des orientations standard).

L'intérêt de se poser des questions sur l'existence de figures, ce qui nous conduit soit à des pratiques de construction (de possibles), soit à des pratiques d'argumentation (pourquoi telle figure est impossible ?). Nous avons testé des extensions du jeu du portrait, montré qu'une réflexion sur la pertinence des questions menait également à une tâche d'argumentation.

La complémentarité de deux pratiques de description : d'une part un travail de classement, d'autre part la production de fiches d'identité des figures. L'expérimentation nous a permis de mettre en évidence la confusion possible entre objet géométrique et dessins qui le représentent.

Nous avons établi des liens entre les différentes activités : le jeu du portrait version 3 (acte 4) nous amène à une tâche d'argumentation, l'acte 3 (pratique d'argumentation) permettra de faire l'inventaire des figures possibles (et impossibles), facilitera la construction par les élèves des tableaux de classification (acte 5)

Ces liens entre les différents actes nous permettent d'envisager la progression suivante : Acte 1 / Acte 2 / Acte 4 / Acte 3 / Acte 5 / Acte 6 mais d'autres organisations sont certainement envisageables.

Nous souhaitons que la lecture de cette brochure contribue à une réflexion sur l'enseignement de la géométrie à l'école primaire, permette l'expérimentation en classe et le débat entre enseignants sur les pratiques des mathématiques en situations scolaires.

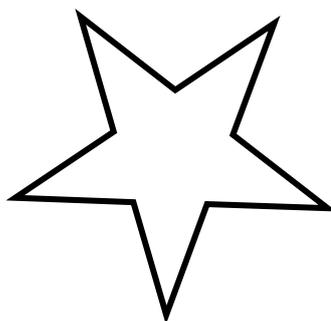
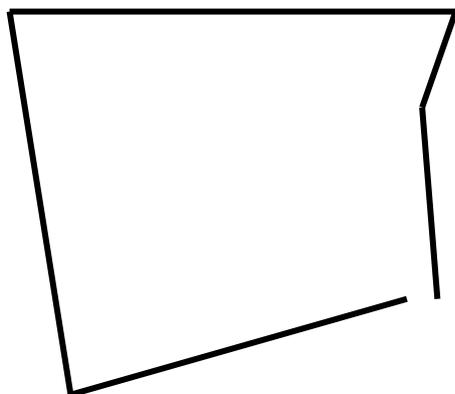
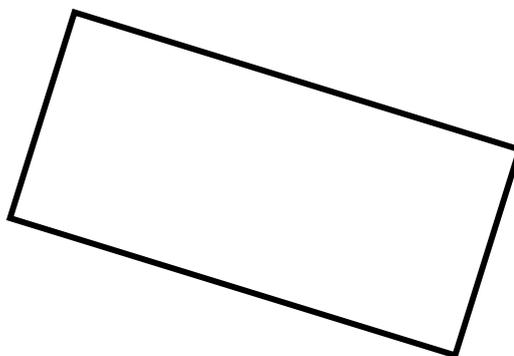
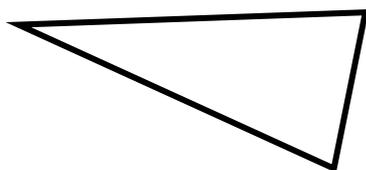
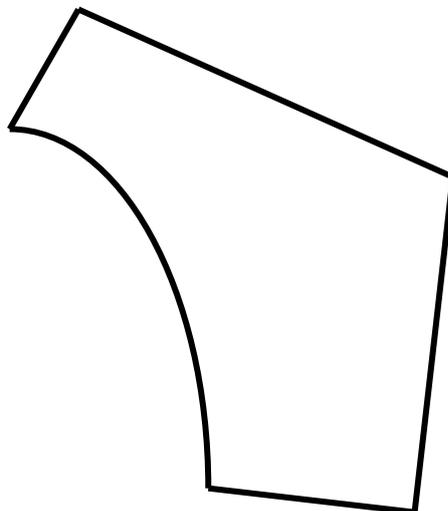
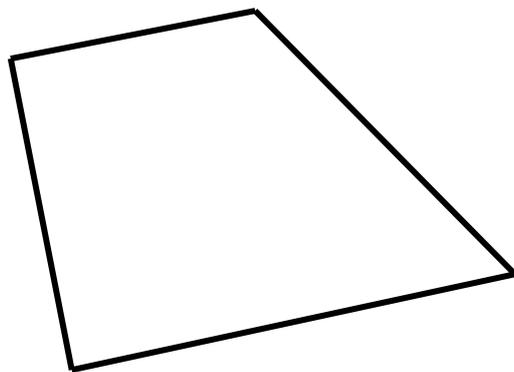
Vous pouvez nous envoyer vos remarques, vos suggestions, des productions d'élèves (en précisant école, cycle, niveau, acte et scène) à l'adresse suivante :

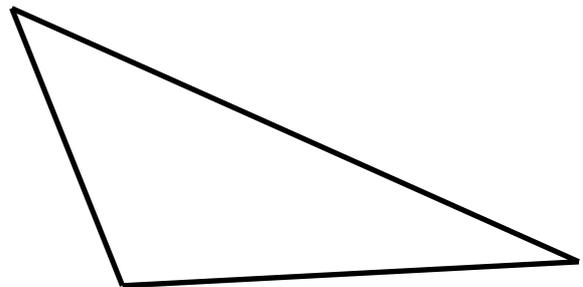
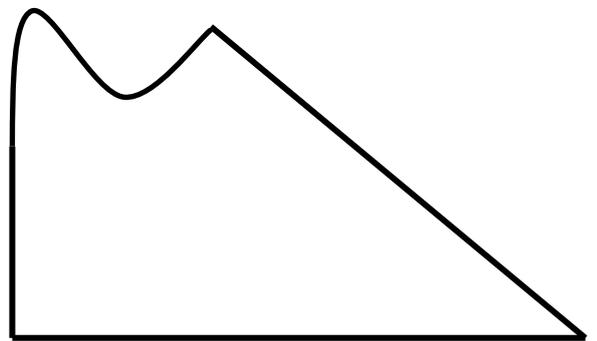
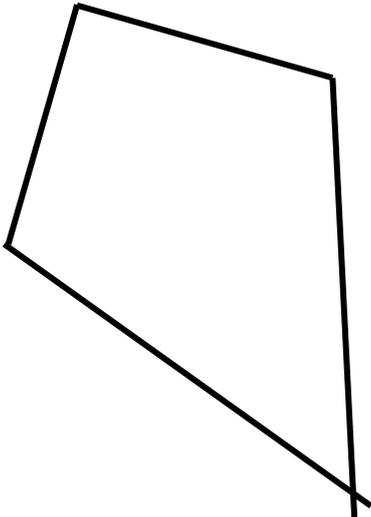
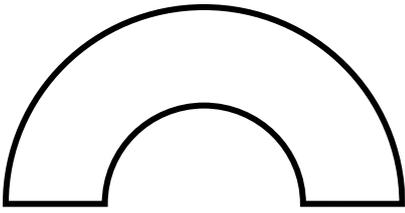
IREM Angers : Paul DELHUMEAU
IUFM – 7 rue Dacier – BP 63522 – 49035 – Angers CEDEX 01

ou par mail :

paul-henri.delhumeau@univ-nantes.fr
sophie.gobert@univ-nantes.fr

Annexes 1. Polygones et non polygones





Annexe 2 : Figures du jeu du portrait

