



**HAL**  
open science

## Erreurs systématiques et schèmes-algorithmiques

Jean Brun, François Conne, Pierre Alain Cordey, Rual Floris, Gisèle Lemoyne,  
Francia Leutenegger, Jean Portugais

► **To cite this version:**

Jean Brun, François Conne, Pierre Alain Cordey, Rual Floris, Gisèle Lemoyne, et al.. Erreurs systématiques et schèmes-algorithmiques. M. Artigue, R. Gras, C. Laborde & P. Tavignot (dir.). Vingt ans de didactique des mathématiques en France, La pensée sauvage, pp.202-209, 1994. halshs-04293286

**HAL Id: halshs-04293286**

**<https://shs.hal.science/halshs-04293286>**

Submitted on 18 Nov 2023

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution - ShareAlike 4.0 International License

- RICHARD J. F. (1990) *Les Activités Mentales: Comprendre, Reasonner, Trouver des solutions*. Paris: Colin.
- VYGOTSKI L. S. (1934/1985), *Pensée et langage*, Paris: Editions Sociales (trad. F. Sève).

## ERREURS SYSTÉMATIQUES ET SCHÈMES-ALGORITHMES

Jean Brun <sup>(1)</sup>, François Conne <sup>(2)</sup>, Pierre Alain Cordey <sup>(3)</sup>,  
Ruhai Floris <sup>(4)</sup>, Gisèle Lemoyne <sup>(5)</sup>,  
Francia Leutenegger <sup>(6)</sup>, Jean Portugais <sup>(7)</sup>

### ABSTRACT

This paper refers to the theme: «Schèmes d'Action et Champs conceptuels.» Our discussion concerns the algorithm of written division and the errors of calculation that pupils commit at that task. In a first part, we propose to enlarge the perspective adopted in VanLehn's Repair Theory about pupils errors by adopting the concept of «Schème-Algorithm» proposed by G. Vergnaud in his «Théorie des Champs Conceptuels.» We consider errors as transitory forms which figure the trace of the progressive construction of the scheme of division. So we can integrate in a same theoretical perspective the fact that errors are manifestations of organised conducts of the subject and the fact that schemes take part in the dynamics of piagetian assimilation/accomodation process. We give examples of errors described from that point of view, which show, across four distinguished situations, how this scheme functions adaptatively.

### 1. Problématique

Les travaux de Brown et Van Lehn (1978, 1980) ont permis de franchir une étape importante dans la compréhension des erreurs de calcul écrit. En mettant en évidence des «erreurs systématiques» ces auteurs ont montré le caractère profondément organisé de certaines erreurs; de ce fait ils ont pu les reproduire et les prévoir en les reconstruisant par l'intermédiaire de programmes en intelligence artificielle. Ces auteurs ont également développé, à propos de la soustraction, une théorie du fonctionnement du calcul et de l'origine des erreurs, appelée Repair Theory, qui conçoit l'erreur comme le produit d'une impasse que l'élève surmonte en inventant une solution personnelle. On observe que ces solutions présentent des régularités solides, chez un même sujet ou entre sujets différents, d'où la pertinence de parler d'«erreurs systématiques». L'originalité de la théorie de Van Lehn est de ne pas

1. Université de Genève.
2. Université de Lausanne et Service de l'enseignement spécialisé.
3. Ecole normale de Lausanne.
4. Université de Genève.
5. Université de Montréal.
6. Université de Genève.
7. Université de Sherbrooke.

se réduire à la détermination de règles isolées de production d'erreurs mais d'envisager une production d'erreurs répondant à des circonstances particulières où le sujet se trouvant dans une impasse – du fait des règles qu'il utilise – effectue une réparation («repair») afin de poursuivre sa tâche. Cette prise en compte dans le modèle du cheminement de la résolution en fonction de l'état pas à pas des données et non pas seulement en fonction d'une suite stricte et réduite d'opérations automatisées est la contribution la plus importante de cette théorie; c'est ce qui en fait un véritable modèle informatique (et non pas seulement un automate). Du point de vue psychologique, elle prend en considération cette donnée importante qui est que l'élève finalise ses opérations sur l'obtention impérieuse d'un résultat: sa solution est souvent d'avoir pu mener jusqu'au bout ses calculs. Par contre cette théorie nécessite – ainsi que Van Lehn lui-même l'indique – un complément didactique. Il suggère que l'étude des classes permettra de trouver non seulement l'origine de ces montages imparfaits de règles mais encore celle des réparations que le sujet est à même d'envisager.

L'espoir de Brown et Van Lehn semble être d'obtenir un modèle qui évite des hypothèses conceptuelles et sémantiques à l'origine des erreurs. Ce qui, on le comprend, poserait des problèmes très grands à la confection d'un modèle informatique. Si le caractère organisé des conduites est déjà largement présent dans les travaux sur les erreurs systématiques, il reste à préciser la part qui, dans ces organisations est faite aux connaissances. Dans l'exposé que nous avons fait au colloque, nous avons développé et illustré le fait que les modèles des erreurs s'ils veulent être fidèles doivent rendre compte, outre du caractère régulé des erreurs, du fait qu'elles résultent d'anticipations et d'inférences faites par le sujet. (Le texte de cet exposé est disponible auprès des auteurs.) Ceci montre qu'il n'est pas exagéré de faire recours à la notion de schème, et de schème-algorithme (Vergnaud 1991). Dit autrement, nous nous demandons comment intégrer dans le modèle explicatif de ces erreurs les opérations sur les nombres, au-delà de celles sur les signes? Vergnaud définit le schème comme «l'organisation invariante de la conduite pour une classe de situations données» (p.136). Il faut comprendre cette organisation à la fois d'un point de vue structural (la conduite est organisée) et d'un point de vue fonctionnel (le schème est un organisateur). La notion de schème prend précisément en compte les connaissances à l'œuvre dans une conduite organisée: «C'est dans les schèmes qu'il faut rechercher les connaissances-en-acte du sujet, c'est-à-dire les éléments cognitifs qui permettent à l'action du sujet d'être opératoire.» (136): «Un schème repose toujours sur une conceptualisation implicite» (139). Evoquant des «schèmes-algorithmes», Vergnaud note qu'«il peut certes y avoir des ratés dans l'exécution automatisée d'un schème, mais ce ne sont pas ces ratés qui rendent compte des principales erreurs» (139). Nous pourrions compléter la notion d'erreur systématique par celle de schème

me dans la mesure où les inventions erronées des élèves à propos des algorithmes mettent véritablement en jeu des coordinations imparfaites de connaissances; c'est ce que nous verrons à propos de l'opération de division.

Les différentes formes (procédurales et sémiotiques) que prennent les différentes inventions des élèves sont ce qu'on pourrait appeler avec Inhelder et Cellérier (1992) des «réalisations psychologiques différentes d'un même schème», ici celui de division de nombres. Ce schème a, par rapport à ces différentes réalisations psychologiques, la propriété demandée par Piaget à tout schème, celle de tendre à la généralisation. Il organise, en amont, une variété de conduites sur une variété de tâches. Il s'agit alors de comprendre les erreurs (certaines tout au moins) comme des formes provisoires de ce *schème en construction*; elles sont des réalisations psychologiques, encore inadaptées à l'algorithme, mais fruits de compromis entre diverses connaissances qu'un schème achevé coordonnerait. Ces formes que nous avons appelées «hybrides» peuvent avoir été forgées par une progression didactique et être négociées par l'élève comme une combinaison originale d'autres schèmes nécessaires à la réalisation de l'algorithme: nombre, soustraction, valeur de position, partage par exemple. Dans le cas de l'opération de division la partition du nombre prend une place centrale; cette partition s'effectue en utilisant la numération écrite de position (on peut découper l'écriture du nombre pour diviser une partie du nombre, puis une autre, etc.); la numération de position permet ainsi de prendre la part la plus grande en fonction de chaque pas de l'écriture du quotient. Il faut donc combiner différentes connaissances numériques pour diviser deux nombres, et non seulement enchaîner des règles sur les signes.

Sur la question du *fonctionnement des erreurs systématiques*, de leur origine à leur cheminement, nous constatons une convergence avec Brown et Van Lehn sur le point suivant: le sujet n'est plus considéré comme un simple exécuteur de règles imposées de l'extérieur, mais comme se forgeant lui-même ses propres règles; ces dernières peuvent diverger plus ou moins de celles proposées par l'enseignement. Mais sur ce point aussi, la notion de schème est un apport. En effet le schème prend en compte le caractère dynamique du fonctionnement de l'erreur en tant qu'instrument d'assimilation, pouvu de capacités d'accommodation; il est l'unité cognitive qui rend possible les inventions, en jouant un rôle organisateur des règles. Ainsi, dans les cas d'apprentissages, «on va assister à l'amorçage successif de plusieurs schèmes, qui peuvent entrer en compétition et qui, pour aboutir à la solution recherchée, doivent être accommodés, décombinés et recombinaés» (Vergnaud, p.136). La dimension fonctionnelle des erreurs est alors à souligner non seulement pour décrire le mécanisme de ces erreurs (impasse-réparation) mais aussi pour comprendre leur rôle heuristique. Les observations qui suivent montrent comment diffé-

rentes situations de calculs de divisions peuvent offrir diverses résistances aux schèmes assimilateurs des élèves, schèmes qui demandent à être coordonnés avant de former le schème-algorithme de la division écrite.

## 2. Analyse d'erreurs dans la perspective d'un schème de base

Alors que le modèle de Van Lehn recourt à une description de règles et à la notion d'*état du système*, une description dirigée par le concept de schème fera référence elle à la notion de *situation* qui lui est indissociable. (Sur ce point, le lecteur se référera aux conférences de J. Brun et G. Vergnaud lors de ce même colloque.) Les situations de calcul de divisions présentées aux élèves offrent, par leur variété, diverses résistances; c'est alors que se forment différentes erreurs liées aux caractéristiques des situations comme nous le montre l'analyse des erreurs à propos des différentes situations suivantes.

### 2.1. Situations où le Dividende est égal au Diviseur

Le schème «partager/distribuer» fonctionne lors de l'apprentissage de la division; il revêt pour certains élèves une signification très précise qui correspond à la situation où le dividende est plus grand que le diviseur. La situation où le dividende est «seulement» égal au diviseur ne peut être assimilée par le schème car, selon ces élèves, la quantité à partager ne l'est pas si on la divise par le même nombre: le dividende n'est pas fractionné. Suite à cette impossibilité l'élève abaisse alors la colonne suivante pour se mettre dans la situation où «dividende est plus grand que diviseur», et peut donc «être partagé». Dans ces cas, une règle de numération peut être coordonnée au schème «partager»: à chaque position de l'écriture du quotient le plus grand nombre écrit possible est 9 (exemples 1 et 2.) On retrouve aussi ce fonctionnement «restrictif» du schème dans les cas où le reste est égal au diviseur; il n'est alors pas divisé (exemple 3).

9009	9		7147	7		7344	18
81	999		63	999		72	407
90			84			144	
81			63			126	
99			217			r. 18	
81			63				
18			154				

### 2.2. Situations où Restes (partiels) sont plus grands que le Diviseur

Le schème «partager/distribuer» fonctionne très bien; il est également coordonné avec une règle contraignante liée à la numération: «9 est le plus grand chiffre possible au quotient.» Lorsque se présente la possibilité de contrôler le calcul par le rapport reste/diviseur, l'élève ne résoud pas ce problème mais il le transporte avec lui jusqu'à l'indice de fin du calcul (la dernière colonne). On a une succession de 9 au quotient, comme précédemment, ou comme dans l'exemple 4. Le schème «partager/distribuer» peut par contre s'imposer très fort pour résoudre le problème du rapport reste/diviseur, au point de délaissier, cette fois, les règles de numération associées. On observe alors des nombres à deux chiffres au quotient, exemple 5. Au lieu d'un nombre à deux chiffres on trouve également une succession de deux nombres au quotient pour un seul et même dividende; celui-ci a fait l'objet de partages successifs, exemple 6.

60363	9		60363	7		13117	13
45	5999		56	8 5 12 3		13	10081
153			43			0117	
81			35			104	
626			86			13	
81			84				
5453			23				
81			21				
5372							

L'exemple 6 illustre une forme du schème où la recherche d'un reste inférieur au diviseur se dispense d'une autre manière des règles de la numération de position. Ce fonctionnement peut aller jusqu'à prendre la forme d'une succession de 1 au quotient, correspondant à un enchaînement de soustractions successives.

25125	125		540060	901
125	111		901	11111
126			4499	
125			901	
125			3598	
125			901	
			2697	
			901	
			1796	
			901	
			8956	

## 2.3. Situations où le Dividende est plus petit que le Diviseur

Dans ces cas le schème «partager/distribuer» n'est pas alimenté; d'où:

a. Passage à la colonne suivante et absence de 0 au quotient

$$\begin{array}{r|l} 7344 & 18 \\ 72 & 48 \\ \hline 144 & \end{array}$$

b. en l'absence de colonne suivante, arrêt du calcul

$$\begin{array}{r|l} 18202 & 901 \\ 1802 & 2 \\ \hline 182 & \end{array}$$

## 2.4. Situations avec reste final plus petit mais proche du diviseur

Le schème fonctionne encore, malgré l'indice de fin du calcul; il est alimenté du fait d'un «gros» reste, et ce de deux façons

a. zéro supplémentaire au quotient

$$\begin{array}{r|l} 568 & 368 \\ 368 & 10 \\ \hline 200 & \end{array}$$

b. inscription de 1 au quotient

$$\begin{array}{r|l} 7829 & 39 \\ 78 & 21 \\ \hline 29 & \end{array}$$

L'examen des erreurs des élèves que nous venons de faire nous semble bien justifier l'explication en termes de schèmes; en effet ce qui apparaît clairement c'est le caractère organisé et dynamique de ces erreurs: dynamique en ce sens que le calcul forme un tout se déroulant de manière fluide, en négociant pour ainsi dire les différentes contraintes de l'algorithme; les unes sont jugées incontournables et d'autres négligeables afin d'arriver sans encombre au terme du calcul. Ce sont des erreurs systématiques certes, mais *organisées autour de connaissances* numériques, et *découvertes* par adaptation aux propriétés de la situation. Une question essentielle pour comprendre les erreurs observées a trait au fonctionnement didactique de ces erreurs. Cette question a été étudiée dans le cadre d'une recherche sur la formation des enseignants (Portugais 1992). Nous renvoyons le lecteur à une autre communication de notre équipe, faite à ce même colloque: J. Portugais, J. Brun, «De futurs instituteurs formés à la didactique des mathématiques?».

## RÉFÉRENCES

BROWN J. S. and BURTON R. R. (1978) Diagnostic model for procedural bugs in basic mathematical skills. *Cognitive Science*, 2, 155-192.

- BROWN J. S. and VAN LEHN K. (1980) Repair theory: A generative theory of bugs in procedural skills. *Cognitive Science*, 4, 379-426.
- BRUN J., CONNE F., RETSCHITZKI J. (1989) *L'étude des algorithmes de calcul dans la transmission et la constitution des connaissances numériques*. Projet de recherche FNRS. Rapport final, 1991.
- CONNE F. (1992) Savoir et connaissance dans la perspective de la transposition didactique. *Recherches en didactique des mathématiques*, 12/2.3, 221-270.
- CONNE F. et BRUN J. (1991) Analyse de brouillons de calcul d'élèves confrontés à des items de divisions écrites. *Proceedings of the 15th Conference of Psychology of mathematics Education*, (Vol. I, pp.239-246), Assisi, Italie.
- INHELDER B., CELLERIER G. (1992) *Le cheminement des découvertes de l'enfant*. Neuchâtel, Paris: Delachaux et Niestlé.
- PORTUGAIS J. (1992) *Didactique des mathématiques et formation des enseignants; le cas des erreurs de calcul*. Thèse. Faculté de psychologie et des sciences de l'éducation. Université de Genève.
- VAN LEHN K. (1988) Toward a theory of impasse-driven learning. In Heinz Mandl and Alan Lesgold (eds), *Learning issues for intelligent Tutoring systems*, (pp.19-41), New-York: Springer Verlag.
- VERGNAUD G. (1985) Concepts et schèmes dans une théorie opératoire de la représentation. *Psychologie Française*, 30, 3-4, 245-252.
- VERGNAUD G. (1991) La théorie des champs conceptuels. *Recherches en didactique des mathématiques*, 10/2.3, 133-170.